

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).189-198](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).189-198)**І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³, Ю. І. Духнов⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

⁴ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
yurii.dukhnov@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0352-1699>

ПОВНЕ ОПИСАННЯ ЕКВАЦІОНАЛЬНИХ КЛАСТЕРІВ БУЛЕВИХ АЛГЕБР ПЕРШОГО ТИПУ

У дослідженні продовжено вивчення еквівалентних властивостей у класі булевих алгебр. Розглянуто широкий клас алгебр, що включає структури з нульарними, унарними та бінарними операціями. Уведено нові поняття — сигнатурні тотожності та еквівалентні кластери. Особливу увагу приділено кластерам першого типу, для яких можна виразити повну систему тотожностей однієї алгебри через іншу за допомогою сигнатурних тотожностей. У результаті визначено повні системи тотожностей для сорока чотирьох алгебр, що формують двадцять один еквівалентний кластер першого типу.

Ключові слова: повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, еквівалентний кластер.

1. Вступ. Загальна теорія алгебр як окрема математична дисципліна сформувалася у 1935 році, коли Дж. Біркгоф опублікував свої класичні роботи, у яких довів основні теореми про повноту для еквівалентної логіки. Саме ця логіка стала ключовою для побудови сучасного апарату дослідження алгебраїчних структур, оскільки класи алгебр, що становлять основний інтерес для алгебраїстів, зазвичай аксіоматично визначаються системами тотожностей або перебувають у тісному зв'язку з такими системами [1].

Особливу роль у цій теорії відіграє булева алгебра — базовий інструмент двозначної логіки, який широко використовується у задачах обробки інформації, логічному програмуванні, побудові баз даних, аналізі цифрових схем та в моделюванні функціонування обчислювальних систем. Розвиток структурної теорії булевих алгебр привів до появи концепції еквівалентних підкласів, дослідження яких безпосередньо пов'язане з пошуком скінченних повних систем

тотожностей. Як відомо, питання про існування таких систем залишається відкритим навіть для скінченних алгебр. Результати Ліндона [2] показали, що майже всі двозначні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей, тоді як для багатозначних логік ситуація значно складніша.

Поняття еквівалентного кластеру виникло як узагальнення класичних еквівалентних класів, досліджуваних у працях Поста та пізніших представників алгебраїчної школи логіки. Еквівалентні властивості не обмежуються окремими множинами тотожностей, а можуть групуватися у системи взаємопов'язаних алгебр, які зберігають еквівалентну еквівалентність. Такі об'єднання отримали назву еквівалентних кластерів, і розглядаються як окремі об'єкти дослідження, що поєднують у собі ознаки класу, підкласу та відношення еквівалентності.

У цьому контексті особливий інтерес становить поняття еквівалентного кластеру булевих алгебр першого типу — структурної сукупності алгебр, пов'язаних спільними еквівалентними умовами, які забезпечують їхню тотожнісну сумісність та замкненість щодо основних алгебраїчних операцій. Дослідження таких кластерів дозволяє деталізувати механізми формування тотожностей у межах певного класу.

Метою цієї роботи є повне описання еквівалентних кластерів булевих алгебр першого типу, включно з аналізом їхніх внутрішніх зв'язків, систем породжувальних елементів, умов замкненості та відображень між підкластерами.

Отримані результати створюють основу для подальшої побудови узагальненої теорії еквівалентних систем, де булеві алгебри розглядаються як моделі логічних структур, що мають широке застосування у теоретичній інформатиці, штучному інтелекті та формальній логіці.

2. Клас булевих алгебр M_9 . Нехай задано клас універсальних булевих алгебр $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle; A = \{0, 1\}; \Omega — деяка множина булевих операцій\}$. Позначимо через $R(U)$ множину всіх тотожностей алгебри U .

Означення 1. Алгебри U_1 і U_2 називаються еквівалентно еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.

Означення 2. Алгебра U_1 еквівалентно вкладається в алгебру U_2 , якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Наслідок 1. Якщо алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ еквівалентно вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$, а $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$, то в алгебрі U_1 можемо побудувати формулу $F(\varphi)$, яка містить операцію $\varphi \in \Omega_1 - \Omega_2$. У цьому випадку тотожність $F(\varphi) = F(\varphi) \notin R(U_2)$.

Нехай $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Означення 3. Тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$ називається сигнатурною, якщо $F_2(\varphi)$ — формула, яка реалізує операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$, а $F_1(\psi)$ — формула, яка належить алгебрі U_1 .

Наприклад, якщо $U_1 = \langle A, \neg, \vee, \wedge \rangle$, $U_2 = \langle A, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow \rangle$, то сигнатурні тотожності мають вигляд: $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$; $x \Leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy$.

Означення 4. Алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ називається еквівалентним розширенням алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність

$$F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1).$$

Множину таких сигнатурних тотожностей позначимо через $R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Означення 5. Система тотожностей $H \subset R(U_1)$ називається повною в U_1 , якщо використовуючи операцію суперпозиції можна довести довільну тотожність до лексикографічної рівності, використовуючи тільки тотожності з H .

Наслідок 2. Якщо для алгебри U_1 знайдеться повна система тотожностей $H(U_1)$, а алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ є екваціональним розширенням U_1 , то $H(U_2) = H(U_1) \cup R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Доведення твердження випливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ з формул алгебри U_2 , звести їх до формул алгебри U_1 , для якої знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$.

Означення 6. Алгебри $U_1, U_2, \dots, U_t \in M$ утворюють екваціональний кластер K , якщо в множині K існує така алгебра U^* , що $\forall U_i \in K$ існує така послідовність алгебр $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_t} \in K$, що $R(U_1) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \dots \subset R(U_{i_t}) = R(U^*)$, і $\forall U_t \notin K, R(U_t) \not\subset R(U^*)$.

Означення 7. Потужністю екваціонального кластеру називається число алгебр, які входять до його складу.

Означення 8. Алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ називається екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$.

Якщо алгебра U_1 є екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, і для алгебри U_2 знайдена повна система тотожностей $H(U_2)$, то за допомогою сигнатурних тотожностей можемо ввести в сигнатуру алгебри U_1 операції $\Omega_2 - \Omega_1$.

У даній роботі досліджується клас універсальних алгебр

$$M_9 = \{U = \langle A, \Omega \rangle, A = \{0, 1\}, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow\}\}.$$

Алгебри цього класу утворюють дев'ятимірний сигнатурний куб. До складу цього кубу входять 512 алгебр. Кожна вершина кубу однозначно визначається сигнатурою, яку іноді позначають числом, що є розкладом за степенем двійки.

Екваціональні кластери зручно представляти у вигляді сигнатурно-еквіваціональних графів. Вершинами кластеру є алгебри, які входять до складу кластеру, а ребра позначають сигнатурними тотожностями, які з'єднують пари алгебр, одне з яких є екваціональним розширенням (звуженням) іншої.

Екваціональний кластер має алгебру, що має максимальну сигнатуру U^* і декілька елементів з мінімальною сигнатурою. Екваціональні кластери дають можливість:

- А) знаходити повні системи тотожностей для алгебр екваціонального кластеру;
- Б) передавати рівність $F_1 = F_2 \in R(U_1)$ для алгебри, для якої не знайдено повну систему тотожностей алгебри U_2 , для якої повні системи тотожностей знайдені.

Екваціональні кластери поділяються на три типи:

- 1) Кластери для яких виконано повне екваціональне описання. У цих кластерах для кожної алгебри знайдено повні системи тотожностей.
- 2) Кластери в яких виконано часткове екваціональне описання. Знайдена повна система тотожностей принаймні для однієї алгебри кластеру.
- 3) Кластери, в яких виконано початкове екваціональне описання: знайдені сигнатурні тотожності кластеру. Не знайдено жодної повної системи тотожностей для алгебри цього кластеру.

У даній роботі побудовані повні системи тотожностей для алгебр одноелементних кластерів.

Перший кластер N_0 складають алгебри, які мають екваціональну потужність 0, тобто в цих алгебрах не існує сигнатурних тотожностей. Цей клас складається з сімнадцяти алгебр, кожна з яких є одноелементним екваціональним кластером. Сімнадцять алгебр цього класу утворюють сигнатурний граф, представлений на рис. 1.

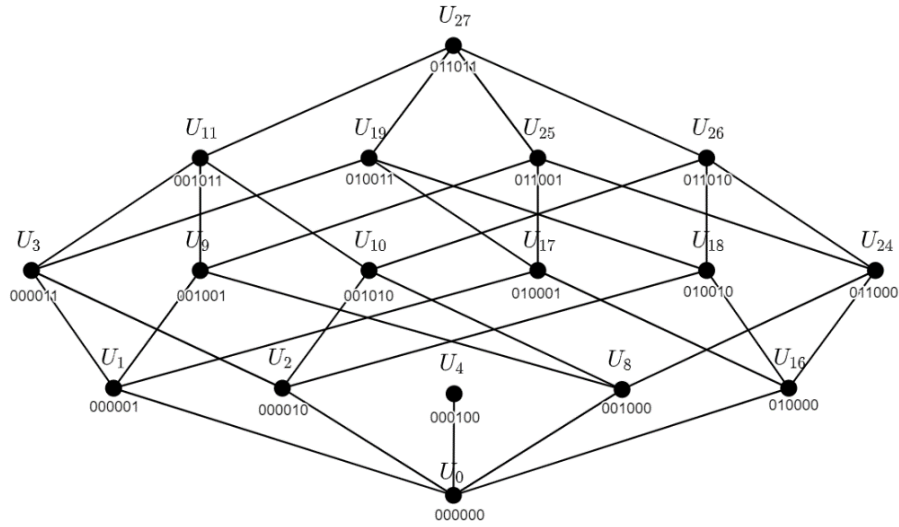


Рис. 1. Сигнатурний граф екваціональних алгебр потужності нуль.

Повна система тотожностей алгебр класу N_0 екваціональна потужності, яка дорівнює нулю.

1. Алгебра $U_0 = \langle A, \emptyset \rangle$. $H(U_0) = \{x_i = x_i\}$.
2. Алгебра $U_1 = \langle A, 0 \rangle$. $H(U_1) = \{x_i = x_i, 0 = 0\}$.
3. Алгебра $U_2 = \langle A, 1 \rangle$. $H(U_2) = \{x_i = x_i, 1 = 1\}$.
4. Алгебра $U_3 = \langle A, 0, 1 \rangle$. $H(U_3) = \{x_i = x_i, 0 = 0, 1 = 1\}$.
5. Алгебра $U_4 = \langle A, \neg \rangle$. $H(U_4) = \{x_i = x_i, \bar{x} = x\}$.
6. Алгебра $U_8 = \langle A, \wedge \rangle$. $H(U_8) = \{x_i = x_i, x_1 x_1 = x_1, x_1 x_2 = x_2 x_1, (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)\}$.
7. Алгебра $U_{16} = \langle A, \vee \rangle$. $H(U_{16}) = \{x_i = x_i, x_1 \vee x_1 = x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\}$.
8. Алгебра $U_{17} = \langle A, \vee, 0 \rangle$. $H(U_{16}) = \{H(U_{16}) \cup H(U_2), x \vee 1 = 1\}$.
9. Алгебра $U_9 = \langle A, \wedge, 0 \rangle$. $H(U_9) = \{H(U_1) \cup H(U_8), 0 \wedge x = 0\}$.
10. Алгебра $U_{10} = \langle A, 1, \wedge \rangle$. $H(U_{10}) = \{H(U_8) \cup H(U_2), x \wedge 1 = x\}$.

11. Алгебра $U_{18} = \langle A, 1, \vee \rangle$. $H(U_{18}) = \{H(U_2) \cup H(U_{16}), x \vee 1 = 1\}$.
12. Алгебра $U_{24} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{24}) = \{H(U_8) \cup H(U_{16}), x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3), x_1 \vee x_1x_2 = x_1, x_1(x_1 \vee x_2) = x_1\}$.
13. Алгебра $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$. $H(U_{11}) = \{H(U_9) \cup H(U_{10})\}$.
14. Алгебра $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$. $H(U_{19}) = \{H(U_{17}) \cup H(U_{18})\}$.
15. Алгебра $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{25}) = \{H(U_9) \cup H(U_{17}) \cup H(U_{24})\}$.
16. Алгебра $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{26}) = \{H(U_{10}) \cup H(U_{18}) \cup H(U_{24})\}$.
17. Алгебра $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{27}) = \{H(U_{11}) \cup H(U_{19}) \cup H(U_{25}) \cup H(U_{26})\}$.

Наслідок 3. Повною системою тотожностей алгебри $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$ є система тотожностей, яка включає повні системи тотожностей алгебр $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$, $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$, $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$, $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$.

Виписавши тотожності цих алгебр, отримаємо систему:

1. $x_1 \vee x_1 = x_1$; $x_1 \wedge x_1 = x_1$.
2. $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; $x_1x_2 = x_2x_1$.
3. $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$; $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$.
4. $(x_1 \vee x_2)x_3 = x_1x_3 \vee x_2x_3$; $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$.
5. $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$; $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$.
6. $0 \wedge x_1 = 0$; $1 \wedge x_1 = x_1$; $0 \vee x_1 = x_1$; $1 \vee x_1 = 1$.

Нехай F_1 і F_2 — формули алгебри U_{27} . Використовуючи тотожності (6), нуль і одиницю можна опустити або вони перетворюються у функції, які тотожно дорівнюють нулю або одиниці. За допомогою тотожностей (1-4) формули F_1 і F_2 зводяться до диз'юнктивної нормальної форми. Тотожності (5) дають можливість отримати диз'юнктивну нормальну форму, в якій кожна елементарна кон'юнкція не є власною частиною іншої. У роботі [6] показано, що таке представлення є єдиним відносно лексикографічного впорядкування.

Клас алгебр N_1 , які мають екваціональну потужність 1, складається з двох алгебр $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$ і $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. Сигнатурна тотожність $x \oplus x = 0$ дає можливість переходити від формули однієї алгебри до іншої. Ці алгебри утворюють двоелементний екваціональний кластер.

18. Алгебра $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$. $H(U_{32}) = \{x_1 \oplus x_1 = x_2 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1, (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)\}$.
19. Алгебра $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. $H(U_{33}) = \{x \oplus x = 0, H(U_{32})\}$.

Трьохелементний кластер N_2 утворюють алгебри $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$, $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$ і $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$.

20. Алгебра $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$. $H(U_5) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$. У цій алгебрі формули, за допомогою тотожності $\bar{\bar{x}} = x$, можуть бути приведені до формул вигляду $x, \bar{x}, 0, \bar{0}$.
21. Алгебра $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$. $H(U_6) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$. Формули можуть бути приведені до формул вигляду $x, \bar{x}, 1, \bar{1}$.
22. Алгебра $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$. $H(U_7) = \{\bar{\bar{x}} = x, \bar{1} = 0, \bar{0} = 1\}$.

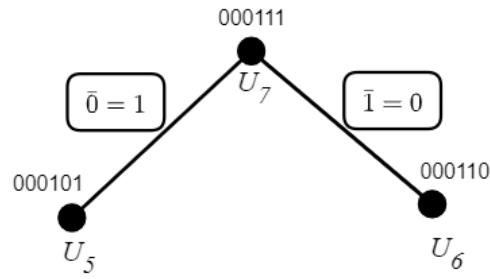


Рис. 2. Трьохелементний еквациональний кластер.

У класі M_9 маємо два двоелементні кластери, зображені на рис. 3.

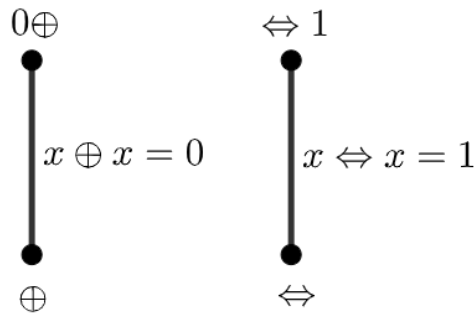


Рис. 3. Двоелементні кластери.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ для другого двоелементного кластеру. Повна система тотожностей:

- 1) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
- 2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 3) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 4) $x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = y$;
- 5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow x) = x \Leftrightarrow y$.

1. Тотожність (3) дає можливість опустити дужки у доданках алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$.

2. З тотожностей (1), (5) випливає, що формула $x \Leftrightarrow x$ є окремою формулою, або вона поглинається іншими формулами. Тому довільна формула алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ або співпадає з формулою $x \Leftrightarrow x$ або має вигляд $x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Нехай $F_1 = F_2 \in R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$. Покажемо, що $F_1 = x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k} = F_2 = x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}$, якщо вони лексикографічно співпадають. Допустимо, що $x_{V_1} \in F_1$, а $x_{j_1} \notin F_2$, тоді на наборі $x_{V_1} = 0$, а решта змінних рівна одиниці, формула $F_1 = 0$, а формула $F_2 = 1$. Тобто формула $F_1 = F_2 \notin R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$. Таким чином, знайдена повна ситема тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$.

Повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, 1 \rangle$ можемо отримати з $R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$ через тотожність $1 = E \Leftrightarrow E$.

Випишемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$:

- 1) $0 \Leftrightarrow 0 = x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 2) $0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0 = x$;
- 3) $0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 0 = 0$;
- 4) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
- 5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 6) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$.

За допомогою цих тотожностей для довільних формул F алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$ можна побудувати тотожності формул, в яких кожна змінна і 0 будуть зустрічатися не більше одного разу. Тоді в цій алгебрі існують формули тільки двох типів:

$$0 \Leftrightarrow x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k} \text{ і } x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}.$$

Легко показати, що якщо лексикографічно приведені формули не співпадають, то існує набір, на якому вони приймають різні значення.

Покажемо, що повною системою тотожностей для алгебри $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$ є така система рівностей:

- 1) $\bar{\bar{x}} = x$;
- 2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 3) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
- 4) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 5) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
- 6) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y$;
- 7) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 8) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 9) $x \Leftrightarrow \bar{x} = y \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 10) $x_1 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_4 = x_1 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow \bar{x}_4$;
- 11) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \bar{y}$.

Використовуючи формули (1) і (6) отримаємо формули, у яких заперечення зустрічається тільки над змінними і не більше одного разу. Тотожність (10) дає можливість отримати формули, які мають не більше одного заперечення.

У даній алгебрі існує тільки три типи формул:

- 1) $x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$;
- 2) $\overline{x_{V_1}} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$;
- 3) $x_{V_1} \Leftrightarrow \overline{x_{V_2}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Для кожної з цих формул можемо знайти набір, на якому вона приймає протилежне значення до формули з якою вона лексикографічно не співпадає.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$. Повна система тотожностей:

- 1) $x \oplus E = y \oplus y$;
- 2) $x \oplus x \oplus x = x$;
- 3) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \Leftrightarrow y$;

- 4) $(x \oplus x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \oplus y$;
- 5) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \oplus y) = x \Leftrightarrow y$;
- 6) $x \Leftrightarrow x \oplus y = x \oplus x \Leftrightarrow y$;
- 7) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$;
- 8) $(x \Leftrightarrow y) \oplus (x \Leftrightarrow z) = y \oplus z$;
- 9) $(x \Leftrightarrow y) \oplus z = x \Leftrightarrow (y \oplus z)$;
- 10) $x \oplus y \Leftrightarrow z \oplus u = x \oplus y \oplus z \Leftrightarrow u$;
- 11) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- 12) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$;

Тотожності (9), (11), (12) дають можливість опустити всі дужки у формулах цієї алгебри. Тотожності (3) і (5) опускають формулу $x \Leftrightarrow x$, а тотожності (2) і (4) формулу $x \oplus x$. Формула (10) дає можливість перенести доданки через операцію $\Leftrightarrow$.

У результаті використання цих тотожностей формулу F можна звести до вигляду: $x_{V_1} \oplus x_{V_2} \oplus \dots \oplus x_{V_k} \Leftrightarrow x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Тотожність (7) дає можливість отримати формули, в яких жодна змінна не може одночасно належати $\{x_{V_1}, x_{V_2}, \dots, x_{V_k}\}$ і $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{V_k}\}$.

Легко показати, якщо у формулах F_1 і F_2 , отриманих в результаті цих перетворень, $x_i \in F_1$ і $x_i \notin F_2$, то існує набір α , що $x_i = 0$, а всі інші змінні дорівнюють одиниці. На цьому наборі $F_1(\alpha) = 0$, а $F_2(\alpha) = 1$, тобто $F_1 \neq F_2 \in R(U)$, якщо вони лексикографічно співпадають.

Таким чином, знайдені повні системи тотожностей для всіх мінімальних алгебр кластера: $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$, $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \neg, \oplus \rangle$. Ми виконали повне екваціональне описання двадцятиелементного кластера.

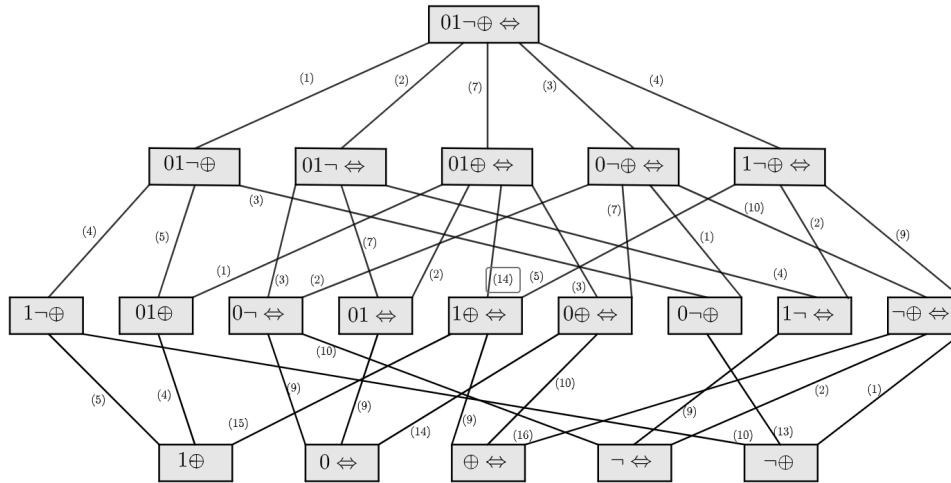


Рис. 4. Двадцятиелементний екваціональний кластер.

Випишемо сигнатурні тотожності, якими позначені ребра двадцятиелементного кластера:

1. $x \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$;
2. $x \oplus y = \overline{x} \Leftrightarrow y$;

3. $1 = \bar{0}$;
4. $0 = \bar{1}$;
5. $\bar{x} = x \oplus 1$;
6. $\bar{x} = y \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
7. $\bar{x} = x \Leftrightarrow 0$;
8. $1 = x \vee \bar{x}$;
9. $1 = x \Leftrightarrow x$;
10. $0 = \overline{x \Leftrightarrow x}$;
11. $0 = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
12. $0 = 1 \oplus 1$;
13. $0 = x \oplus x$;
14. $x \oplus y = (0 \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y$;
15. $x \Leftrightarrow y = 1 \oplus E \oplus y$;
16. $\bar{x} = (x \oplus x) \Leftrightarrow x$.

Для того, щоб знайти, наприклад, повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A, 0, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ досить рухаючись по ребрах (використовуючи відповідні сигнатурні тотожності (11)) перейти до сигнатури алгебри $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, а далі або за допомогою (9) перейти до алгебр $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ або за допомогою (12) до алгебр $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$. Таким чином, алгебра $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ у двадцятиелементному екваціональному кластері має $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ повних систем тотожностей. Найбільше повних систем тотожностей має алгебра $U^* = \langle A, 0, 1, \neg, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, а найменше — по одній повній системі п'ять алгебр першого ярусу.

Рухаючись по ребрах екваціонального кластеру відбувається перехід від сигнатури одних алгебр до інших.

3. Висновки. У даному дослідженні знайдені всі екваціональні кластери першого типу для класу булевих алгебр M_9 . До кластерів першого типу відносяться сімнадцять одноелементних кластерів, два двоелементних, один трьохелементний і один двадцятиелементний кластер.

У даній роботі завершено побудову повного екваціонального описання булевих алгебр класу M_9 і здійснено кластеризацію цих алгебр за екваціональними ознаками. На основі введених понять сигнатурних тотожностей, екваціонального розширення та екваціонального звуження визначено структуру екваціональних кластерів першого типу та описано їхні внутрішні зв'язки.

Екваціональні кластери подані у вигляді орієнтованих графів, вершинами яких є алгебри, а ребрами — сигнатурні тотожності, що відображають відношення екваціонального розширення або звуження. Така візуалізація дала змогу встановити послідовні переходи між сигнатурами алгебр і виявити закономірності у побудові тотожностей.

Отримані результати дозволили:

- формалізувати процес переходу від однієї алгебри до іншої через сигнатурні тотожності;
- узагальнити принцип побудови повних систем тотожностей у межах кластерів;
- показати, що для кожної алгебри кластеру існує ланцюг екваціональних зв'язків, за допомогою якого можна побудувати її повну систему тотожностей на основі систем інших алгебр кластеру.

Наукова новизна роботи полягає у системному визначенні еквівалентних кластерів булевих алгебр, розробленні алгоритму їх побудови та встановленні повних систем тотожностей для всіх алгебр кластерів першого типу.

Практичне значення полягає у можливості застосування запропонованого підходу для автоматизованої класифікації булевих структур, оптимізації логічних перетворень і побудови еквівалентних моделей у теоретичній інформації та штучному інтелекті.

Список використаної літератури

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31, 433–454.
2. Lyndon, R. C. (1954). Identities in finite algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5, 8–9. <https://doi.org/10.2307/2963956>
3. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 142–149. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149) [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 42(1), 194–201. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201) [in Ukrainian].
5. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 43(2), 136–143. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).136-143](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143) [in Ukrainian].
6. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(30), 79–86. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86) [in Ukrainian].
7. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(33), 109–113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113) [in Ukrainian].

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Dukhnov Yu. I. A complete description of equational clusters of boolean algebras of the first type.

The study continued to investigate equational properties in the class of Boolean algebras. A wide class of algebras was considered, including structures with zero, unary, and binary operations. New concepts were introduced — signature identities and equational clusters. Special attention was paid to clusters of the first type, for which the complete system of identities of one algebra can be expressed in terms of another using signature identities. As a result, complete systems of identities were determined for forty-four algebras that form twenty-one equational clusters of the first type.

Keywords: complete system of identities, signature identity, equational cluster.

Одержано 14.09.2025