

УДК 519.725

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).16-21](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).16-21)**М. Ю. Бортош¹, О. А. Тилищак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
maria.bortos@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

² Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II,
професор кафедри математики та інформатики,
доктор фізико-математичних наук
alxltk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>

ПОБУДОВА ТЕРНАРНИХ КОДІВ ЗА ГРУПОЮ $C_3 \times D_8$

Структура самодуальних кодів довжини 24 над полем з двох елементів $\mathbb{F}_2$ досліджувалися протягом тривалого часу, в результаті чого було виявлено численні властивості цих кодів. У даній статті розглянуто коди довжини 24 за головними (лівими) ідеалами груповою алгеброю $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ над полем з трьох елементів $\mathbb{F}_3$. Для елемента $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}$ заданої групової алгебри позначимо $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}^{-1}$. Знайдено кількість всіх елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, за якими можна побудувати код довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12, і які задовольняють умову $v = v^*$.

Ключові слова: групова алгебра, коди довжини 24, коди над полями, алгоритми побудови самодуальних кодів.

1. Вступ. У багатьох роботах [1, 3–15] досліджувалися різні підходи побудови і властивості бінарних та тернарних кодів. Розглянемо побудову тернарних самодуальних кодів довжини 24, використовуючи конструкцію, яку застосували [2–4, 6] використовуючи групи 24-го порядку для побудови розширених бінарних кодів Голя. У цій статті ми будемо цим методом самодуальні тернарні коди довжини 24 використовуючи групу $C_3 \times D_8$.

Розглянемо детально побудову таких кодів. Тернарним називають код над полем $\mathbb{F}_3$ із трьох елементів. Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ – скінченна група порядку n і елемент $v = \sum_{i=1}^n \alpha_{g_i}g_i \in \mathbb{F}_3G$ ($\alpha_{g_i} \in \mathbb{F}_3$). Для елемента $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_n}g_n \in \mathbb{F}_3G$ позначимо $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_n}g_n^{-1} \in \mathbb{F}_3G$. Розглянемо зображення $v \rightarrow \sigma(v)$, де матриця $\sigma(v) \in M(n, \mathbb{F}_3)$ має вигляд

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}.$$

Легко встановити, що матриця $\sigma(v)^T$ і матриця $\sigma(v^*)$ однакові. Визначимо $C(v)$, для заданого елемента $v \in \mathbb{F}_3G$, як код породжений рядками матриці $\sigma(v)$. Якщо розглянути простір $\mathbb{F}_3^n$, в якому заданий скалярний добуток $[v, w] = \sum_{i=1}^n v_i w_i \bmod 3$, то $C(v)$ є підпростором простору $\mathbb{F}_3^n$. Код C є самодуальним, якщо $C = C^\perp$, де $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_3^n \mid [v, w] = 0, w \in C\}$.

Скористаємося наступною теоремою.

Теорема 1 ([5]). *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v нової алгебри $\mathbb{F}_3 G$. Код $C(v)$ самодуальний тоді і тільки тоді, коли*

- 1) $vv^* = 0$,
- 2) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$.

2. Побудова кодів за групою $G = C_3 \times D_8$.

Поле $\mathbb{F}_3$ можна ототожнювати з $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$. При подальших записях цілі числа x , як елементи $\mathbb{F}_3$, позначають класи $x + 3\mathbb{Z}$, а кільцеві бінарні алгебраїчні операції над ними проводимо «за модулем 3».

Лема 1. *Нехай $G = \langle x, y, z | x^3 = 1, y^4 = 1, z^2 = 1, xy = yx, xz = zx, yzyz = 1 \rangle$ і $v = \sum_{i=0}^3 ((\alpha_{i+1} + \alpha_{i+5}x + \alpha_{i+9}x^2)y^i + (\alpha_{i+13} + \alpha_{i+17}x + \alpha_{i+21}x^2)y^i z)$. Якщо код $C(v)$ самодуальний, тоді*

- 1) $\left(\sum_{i=1}^{24} \alpha_i^2 \right) = 0$,
- 2) $((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24})) = 0$,
- 3) $((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20})) = 0$,
- 4) $(2((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}))) = 0$,
- 5) $2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_5\alpha_7 + \alpha_6\alpha_8 + \alpha_9\alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{15} + \alpha_{14}\alpha_{16} + \alpha_{17}\alpha_{19} + \alpha_{18}\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{22}\alpha_{24}) = 0$,
- 6) $(\alpha_1\alpha_9 + \alpha_9\alpha_5 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_2\alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_6 + \alpha_6\alpha_2 + \alpha_3\alpha_{11} + \alpha_{11}\alpha_7 + \alpha_7\alpha_3 + \alpha_4\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_4 + \alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{17} + \alpha_{17}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{22} + \alpha_{22}\alpha_{18} + \alpha_{18}\alpha_{14} + \alpha_{15}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{19} + \alpha_{19}\alpha_{15} + \alpha_{16}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{20} + \alpha_{20}\alpha_{16}) = 0$,
- 7) $(\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_{11}\alpha_5 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_3\alpha_9 + \alpha_9\alpha_7 + \alpha_7\alpha_1 + \alpha_2\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_6 + \alpha_6\alpha_4 + \alpha_4\alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_2 + \alpha_{13}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{17} + \alpha_{17}\alpha_{15} + \alpha_{15}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{19} + \alpha_{19}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{18} + \alpha_{18}\alpha_{16} + \alpha_{16}\alpha_{22} + \alpha_{22}\alpha_{20} + \alpha_{20}\alpha_{14}) = 0$.

Доведення. Обчислення в системі GAP показують, що у випадку, коли розглядаємо групу $C_3 \times D_8$, матриця $\sigma(v)$ набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} \\ \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} \\ \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 \\ \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_{11} = 2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_5\alpha_7 + \alpha_6\alpha_8 + \alpha_9\alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{15} + \alpha_{14}\alpha_{16} + \alpha_{17}\alpha_{19} + \alpha_{18}\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{22}\alpha_{24}).$$

$$\gamma_{12} = 2(\alpha_1\alpha_{13} + \alpha_2\alpha_{14} + \alpha_3\alpha_{15} + \alpha_4\alpha_{16} + \alpha_5\alpha_{17} + \alpha_6\alpha_{18} + \alpha_7\alpha_{19} + \alpha_8\alpha_{20} + \alpha_9\alpha_{21} + \alpha_{10}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{24}).$$

$$\gamma_{13} = 2(\alpha_1\alpha_{14} + \alpha_2\alpha_{15} + \alpha_3\alpha_{16} + \alpha_4\alpha_{13} + \alpha_5\alpha_{18} + \alpha_6\alpha_{19} + \alpha_7\alpha_{20} + \alpha_8\alpha_{17} + \alpha_9\alpha_{22} + \alpha_{10}\alpha_{23} + \alpha_{11}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{21}).$$

$$\gamma_{14} = 2(\alpha_1\alpha_{15} + \alpha_2\alpha_{16} + \alpha_3\alpha_{13} + \alpha_4\alpha_{14} + \alpha_5\alpha_{19} + \alpha_6\alpha_{20} + \alpha_7\alpha_{17} + \alpha_8\alpha_{18} + \alpha_9\alpha_{23} + \alpha_{10}\alpha_{24} + \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}).$$

$$\gamma_{15} = 2(\alpha_1\alpha_{16} + \alpha_2\alpha_{13} + \alpha_3\alpha_{14} + \alpha_4\alpha_{15} + \alpha_5\alpha_{20} + \alpha_6\alpha_{17} + \alpha_7\alpha_{18} + \alpha_8\alpha_{19} + \alpha_9\alpha_{24} + \alpha_{10}\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{23}).$$

Звідси отримаємо,

$$\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}).$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_{22} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{24} + \alpha_{23} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{17}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{14} + \alpha_{22} + \alpha_{16} + \alpha_{24} + \alpha_{15} + \alpha_{23} + \alpha_{13} + \alpha_{21}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{18} + \alpha_{14} + \alpha_{20} + \alpha_{16} + \alpha_{19} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{13}).$$

$$\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{15} = 2((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24})).$$

Якщо код $C(v)$ самодуальний, то за умовою 1 теореми 1 виконуються умови: $vv^* = 0$ і $\sigma(v)\sigma(v)^T = \sigma(vv^*) = 0$. Таким чином, $\gamma_i = 0$ ($i = 1, \dots, 10$). Тоді $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = 0$, $\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{15} = 0$, $\gamma_5 = 0$, $\gamma_7 = 0$, $\gamma_{11} = 0$. Звідси отримуємо відповідно рівняння наведені у висновку леми.

Одним зі знайдених елементів є, наприклад, $v = 2 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2x + 2xy + 2x^2 + 2x^2y^3 + yz + 2y^2z + y^3z \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$. Для нього запишемо вигляд елемента $v^* = 2 + 2y^3 + 2y^2 + 2y + 2x^2 + 2x^2y^3 + 2x + 2xy + yz + 2y^2z + y^3z$. В таблиці подано добутки всіх доданків з v на доданки з v^* за модулем 3.

Таблиця 1.

Таблиця добутків доданків з v на доданки з v^* у груповій алгебрі $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$

	2	2y	2y ²	2y ³	2x	2xy	2x ²	2x ² y ³	yz	2y ² z	y ³ z
2	1	y	y ²	y ³	x	xy	x ²	x ² y ³	2yz	y ² z	2y ³ z
2y ³	y ³	1	y	y ²	xy ³	x	x ² y ³	x ² y ²	2z	yz	2y ² z
2y ²	y ²	y ³	1	y	xy ²	xy ³	x ² y ²	x ² y	2y ³ z	z	2yz
2y	y	y ²	y ³	1	xy	xy ²	x ² y	x ²	2y ² z	y ³ z	2z
2x ²	x ²	x ² y	x ² y ²	x ² y ³	1	y	x	xy ³	2x ² yz	x ² y ² z	2x ² y ³ z
2x ² y ³	x ² y ³	x ²	x ² y	x ² y ²	y ³	1	xy ³	xy ²	2x ² z	x ² yz	2x ² y ² z
2x	x	xy	xy ²	xy ³	x ²	x ² y	1	y ³	2xyz	xy ² z	2xy ³ z
2xy	xy	xy ²	xy ³	x	x ² y	x ² y ²	y	1	2xy ² z	xy ³ z	2xz
yz	2yz	2z	2y ³ z	2y ² z	2xyz	2xz	2x ² yz	2x ² y ² z	1	2y ³	y ²
2y ² z	y ² z	yz	z	y ³ z	xy ² z	xyz	x ² y ² z	x ² y ³ z	2y	1	y ³
y ³ z	2y ³ z	2y ² z	2yz	2z	2xy ³ z	2xy ² z	2x ² y ³ z	2x ² z	y ²	2y	1

Таким чином, $vv^* = 0$. З вигляду v отримаємо, що

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здійснивши обчислення в системі комп'ютерної алгебри GAP отримаємо, що $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$, а мінімальна відстань Хемінга коду $C(v)$ рівна 6. Отже, $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12.

При числових обчисленнях скористуємось також наступною теоремою.

Теорема 2 ([6]). *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v групової алгебри $\mathbb{F}_3 G$. Якщо*

- 1) $v = v^*$,
- 2) $v^2 = 0$,
- 3) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$,

тоді код $C(v)$ самодуальний.

Для умови $\sigma(v) = \sigma(v)^T$ достатньо, щоб $\alpha_4 = \alpha_2$, $\alpha_9 = \alpha_5$, $\alpha_{10} = \alpha_8$, $\alpha_{11} = \alpha_7$, $\alpha_{12} = \alpha_6$, $\alpha_{21} = \alpha_{17}$, $\alpha_{22} = \alpha_{18}$, $\alpha_{23} = \alpha_{19}$, $\alpha_{24} = \alpha_{20}$.

3. Числові результати. Очевидно, групова алгебра $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ складається з $3^{24} = 282\,429\,536\,481$ елементів v . В результаті здійснених в дослідженні обчислень отримаємо кількість елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, що $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12 і виконується умова $v = v^*$. Точна кількість таких кодів дорівнює 198 018. Мінімальна відстань кодів: 2, 3, 4 або 6.

Таблиця 2.

Кількість елементів з групової алгебри $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$

Мінімальна відстань Хемінга $C(v)$	2	3	4	6
Кількість елементів v , що $v = v^*$	4482	23 328	91 872	78 336

Крім того, встановлено, що існує рівно 21 972 елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ таких, що перша координата рівна 2 і $C(v)$ є самодуальним кодом над полем $\mathbb{F}_3$.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті досліджено конструкцію кодів довжини 24 за групою алгеброю $\mathbb{F}_3 G$ групи $G = C_3 \times D_8$. Знайдено 198 018 елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, що $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12 і виконується умова $v = v^*$. В подальших дослідженнях, крім вже розглянутої групи $C_3 \times D_8$, можна

розглянути інші групи порядку 24, а також досліджувати тернарні самодуальні коди довжини 24 з мінімальною відстанню 9.

Список використаної літератури

1. Bortos, M. Yu., Tylyshchak, A. A., & Khymynets, M. V. (2024). Extended binary Golay codes by a group algebra. *Algebra Discrete Math.*, 38(1), 23–33. <https://doi.org/10.12958/adm2241> [in Ukrainian].
2. Hurley, T. (2006). Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math.*, 31(3), 319–335.
3. Bernhardt, F., Landrock, P., & Manz, O. (1990). The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55(2), 235–246.
4. McLoughlin, I., & Hurley, T. (2008). A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 9(54), 4381–4383.
5. Huffman, W. C., & Pless, V. (2003). *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge University Press: Cambridge.
6. Dougherty, S. T., Gildea, J., Taylor, R., & Tylyshchak, A. (2018). Group rings, G -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86(9), 2115–2138. <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0440-7>.
7. Conway, J. H., Pless, V., & Sloane, N. J. A. (1979). Self-dual codes over $GF(3)$ and $GF(4)$ of length not exceeding 16. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25, 312–322.
8. Leon, J. S., Pless, V., & Sloane, N. J. A. (1981). On ternary self-dual codes of length 24. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 27, 176–180.
9. Steven, T., Dougherty, T., Gulliver, A., & Harada, M. (1999). Optimal ternary formally self-dual codes. *Discrete Mathematics*, 196(1–3), 117–135.
10. Bortos, M. Yu., & Tylyshchak, A. A. (2020). Extended binary Golay codes by a group algebra of one group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(36), 65–72. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).65-72](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).65-72) [in Ukrainian].
11. Bortos, M. Yu., Tylyshchak, A. A., & Khymynets, M. V. (2022). Extended binary Golay codes by a group algebra of dihedral group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 27–32. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).27-32](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).27-32) [in Ukrainian].
12. Peng, X. H., & Farrell, P. G. (2006). On construction of the $(24, 12, 8)$ Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 8(52), 3669–3675.
13. Curtis, R. T. (2016). Error-correction and the binary Golay code. *London Mathematical Society*, 150(1), 51–58.
14. Huffman, W. C. (2005). On the classification and enumeration of self-dual codes. *Finite Fields and Their Applications*, 11(3), 451–490. <https://doi.org/10.1016/j.ffa.2005.05.012>
15. Harada, M., & Munemasa, A. (2009). A complete classification of ternary self-dual codes of length 24. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, 116(5), 1063–1072. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2008.11.011>
16. Huffman, W. C., Kim, J.-L., & Sole, P. (Eds.). (2021). *Concise Encyclopedia of Coding Theory* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315147901>

Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A. Construction of ternary codes by the group $C_3 \times D_8$.

The structure of self-dual codes of length 24 over the finite field with two elements $\mathbb{F}_2$ has been studied for a long time, through which numerous properties of such codes have been established. In this paper, we consider codes of length 24 constructed by principal (left) ideals in the group algebra $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ over the finite field with three elements $\mathbb{F}_3$. For an element $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}$ of the given group algebra, let $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}^{-1}$ denote its involution. The number of all elements $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ has been obtained, for which a code of length 24 can be built, with the dimension of the codewords subspace equal to 12 and satisfying the condition $v = v^*$.

Keywords: group algebra, codes of length 24, codes over fields, algorithms for constructing self-dual codes.

Одержано 15.09.2025