

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).9-15](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).9-15)**В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²**

¹ Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ НАДНАПІВГРУП НЕКОМУТАТИВНИХ ІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ПОРЯДКУ ТРИ СКІНЧЕННОГО ТИПУ

У теорії зображень скінченних напівгруп найбільша кількість робіт присвячена незвідним зображенням. Серед старих результатів є лише окремі результати про зображувальний тип напівгруп. А саме, про скінченний зображувальний тип йде мова в низці робіт І. С. Понізовського (зокрема, для скінченної цілком простої напівгрупи) та в його роботі з К. Рінгелем (для деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини). Якщо ж говорити про нові результати, то ще й для класів напівгруп, то варто відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (перший автор цієї статті разом з О. М. Тертичною), напівгруп, породжених потентними елементами (обидва автори), прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (перший автор разом з Е. М. Костишин) і про зображення (пов'язаних з напівгрупами Ріса) алгебр Манна (Ю. А. Дрозд і А. І. Плакош). Усі вони можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень, бути ручними чи дикими.

Перший автор разом з Я. В. Заціхою описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над довільним полем і вказали в цих випадках канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. У своїх попередніх статтях автори досліджували аналогічні задачі для наднапівгруп спеціального вигляду комутативних напівгруп третього порядку. У цій статті розпочато вивчення таких же самих задач для наднапівгруп некомутиативних напівгруп.

Ключові слова: визначальні співвідношення, основна наднапівгрупа, матричні зображення, напівгрупи скінченного і нескінченного зображувальних типів, ручні та дикі напівгрупи, канонічна форма.

1. Вступ. Ця стаття присвячена матричним зображенням наднапівгруп спеціального вигляду, які зіставляються заданій напівгрупі третього порядку. Якщо говорити конкретніше, розглядається випадок некомутиативних ідемпотентних напівгруп скінченного зображувального типу над довільним полем. Нагадаємо, що напівгрупа називається *ідемпотентною*, якщо всі її елементи — ідемпотенти, і напівгрупою *скінченного зображувального типу*, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень.

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура в роботі [1]. Г. Е. Форсайт у 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою

комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано з точністю до ізоморфізму та дуальності в термінах таблиць Келі. Напівгрупи третього порядку вивчалися пізніше в [3]–[6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп вказані в [6] (на основі результатів статті [5]). Зокрема, некомутативні ідемпотентні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності (при деякій перенумерації символів), такими напівгрупами:

$$T_1 : (bc, b, c) = \langle b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, cb = c;$$

$$T_2 : (0, b, c) = \langle 0, b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c;$$

$$T_3 : (e, b, c) = \langle e, b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c.$$

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках — мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних e та 0 (якщо вони є) не виписуються.

Нагадаємо, що дуальною до напівгрупи називається така напівгрупа, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку.

Зауважимо, що напівгрупи T_2 і T_3 не є ізоморфними, бо перша з них має елемент 0 і не має елемента e , а друга — навпаки.

Позначимо визначальні співвідношення $b^2 = b, c^2 = c, cb = c$ напівгрупи T_1 відповідно через $(b), (c), (cb)$ і визначальні співвідношення $b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c$ напівгруп T_2, T_3 відповідно через $(b), (c), (bc), (cb)$.

Дамо ще деякі загальні позначення. Для напівгрупи S та її визначального співвідношення (x) напівгрупу $S \setminus (x)$ (тобто S без співвідношення (x)) позначимо через $S^{(x)}$, для різних визначальних співвідношень $(x), (y)$ напівгрупу $S \setminus \{(x), (y)\}$ позначимо через $S^{(x,y)}$, для попарно різних визначальних співвідношень $(x), (y), (z)$ напівгрупу $S \setminus \{(x), (y), (z)\}$ позначимо через $S^{(x,y,z)}$ і т.д. Очевидно, що при перестановці співвідношень напівгрупи $S^{(x,y)}, S^{(x,y,z)}$ і т.д. не змінюються. Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі S , тобто є наднапівгрупою напівгрупи S . Такі наднапівгрупи називаються основними. Зауважимо, що коли при відкиданні будь-яких s визначальних співвідношень напівгрупа є дикою, то аналогічна властивість виконується і для $s + 1$ визначальних співвідношень (коли число всіх визначальних співвідношень більша за s). У цьому випадку в умовах теорем очевидний наслідок для $s + 1$ не вказується.

Сформулюємо тепер основні результати цієї статті,

Теорема 1. Для напівгрупи $T = T_1$ і довільного поля K мають місце наступні твердження.

- 1) $T^{(x)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $(x) = (cb)$;
- 2) $T^{(x)}$ — дика напівгрупа для $(x) \in \{(b), (c)\}$;
- 3) $T^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $(x), (y) \in \{(b), (c), (bc)\}$.

Теорема 2. Для напівгруп $T = T_2, T_3$ і довільного поля K мають місце наступні твердження.

- 1) $T^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) \in \{(bc), (cb)\}$;
- 2) $T^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) \in \{(b), (c)\}$;
- 3) $T^{(x,y)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) = (b), (y) = (c)$;
- 4) $T^{(x,y)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $(x) = (bc), (y) = (cb)$;
- 5) $T^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $x \in \{(b), (c)\}, y \in \{(bc), (cb)\}$;
- 6) $T^{(x,y,z)}$ — дика напівгрупа для $(x), (y), (z) \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$.

При доведенні цих теорем використовується метод класифікаційних матричних задач, розвинутий представниками Київської школи з теорії зображень (див. зокрема, [7] – [12]).

Перший автор підтриманий грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine 00014586, V.M.B.).

2. Зауваження.

2.1. Щодо аналогів сформульованих теорем для комутативних напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображуваотний тип, див. [13] – [15]. Підкреслимо, що серед таких напівгруп існує єдина, яка має нескінченний зображувальний тип, а саме $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0, c^2 = 0, bc = 0, cb = 0$ (див. [6]). Задачі про класифікацію зображень її основних наднапівгруп $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0, c^2 = 0$ і $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $bc = 0, cb = 0$ добре відомі в сучасній теорії зображень (див. відповідно [16] і [8], [17], [18]).

2.2. Ми розглядаємо всі напівгрупи, з точністю до дуальності, фіксуючи для кожної пари взаємно дуальних напівгруп лише одну напівгрупу. Але наші твердження про матричні зображення цих напівгруп природним чином переносяться на дуальні напівгрупи (бо матриці, транспоновані до матриць деякого зображення довільної напівгрупи, задають зображення дуальної напівгрупи).

2.3. Природно вважати (див. [19]), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Тоді довільне матричне зображення напівгрупи T_i ($i = 1, 2, 3$) однозначно задається матрицями B і C , які відповідають твірним елементам b і c . Його природно позначати через (B, C) . Одинична матриця будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$) буде позначатися через E .

3. Доведення теореми 1.

Твердження 1) випливає із [20, 3.6].

Перейдемо до доведення твердження 2), розглянувши спочатку випадок $(x) = (c)$.

Нехай $R = \{B, C\}$ — довільне матричне зображення напівгрупи $T^{(c)}$. Згідно з означенням еквівалентних зображень, матриці B і C можна приводити одночасними перетвореннями подібності. За допомогою таких перетворень приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З формальних міркувань (щоб не нагромаджувати позначення) матрицю C , яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через C (цією домовленістю будемо користуватися і надалі). Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці B), вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – деякі матриці. Запишемо рівність $CB = C$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $cb = c$), в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що ця рівність еквівалентна рівності

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, зображення $R = \{B, C\}$ еквівалентне зображенню $R_0 = \{B_0, C_0\}$, де

$$B_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер з'ясуємо, коли матричне зображення $R_0 = \{B_0, C_0\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R}_0 = \{\overline{B}_0, \overline{C}_0\}$ такого ж самого вигляду, тобто з матрицями

$$\overline{B}_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{C}_0 = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 & 0 \\ \overline{C}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{B}_0 = XB_0X^{-1}$, $\overline{C}_0 = XC_0X^{-1}$, що еквівалентно $\overline{B}_0X = XB_0$, $\overline{C}_0X = XC_0$. Очевидно, що матриці $\overline{B}_0$ і B_0 мають однаковий ранг, а значить рівні. Вважаємо, що матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриці B_0 (а значить C_0 та матриць зображення $\overline{R}_0$):

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Із рівності $\overline{B}_0X = XB_0$ випливає, що $X_{12} = 0$, $X_{21} = 0$. Тоді рівність $\overline{C}_0X = XC_0$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \overline{C}_1 & 0 \\ \overline{C}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}$$

і легко бачити, що вона еквівалентна рівностям $\overline{C}_1 = X_{11}C_1X_{11}^{-1}$, $\overline{C}_3 = X_{22}C_3X_{11}^{-1}$.

Позначимо через Γ сагайдак з двома вершинами 1 і 2 та двома стрілками $c_1 : 1 \rightarrow 1$ і $c_3 : 2 \rightarrow 1$. Введемо два його матричних зображення $\mathcal{R}$ і $\overline{\mathcal{R}}$ наступним чином: $\mathcal{R}(c_1) = C_1$, $\mathcal{R}(c_3) = C_3$, $\overline{\mathcal{R}}(c_1) = \overline{C}_1$, $\overline{\mathcal{R}}(c_3) = \overline{C}_3$.

Дві останні рівності в попередньому абзаці означають, що зображення R_0 і $\overline{R}_0$ напівгрупи T_1 еквівалентні тоді і лише тоді, коли еквівалентні (матричні)

зображення $\mathcal{R}$ і $\overline{\mathcal{R}}$ сагайдака Γ . А оскільки сагайдак Γ є диким, (згідно з роботами [21], [22]), то такою буде і напівгрупа T_1 . Твердження 2) для $(x) = (c)$ доведено.

Випадок $(x) = (b)$ розглядається аналогічним чином. У цьому випадку

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матриця B з урахування рівності $CB = C$ має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

При цьому дві пари матриць (B, C) і $(\overline{B}, \overline{C})$ вказаного вигляду подібні між собою тоді і лише тоді, коли пари матриць (B_3, B_4) і $(\overline{B}_3, \overline{B}_4)$ еквівалентні як зображення дикого сагайдака з двома вершинами $1, 2$ та двома стрілками $b_3 : 2 \rightarrow 1$, $b_4 : 2 \rightarrow 2$.

Твердження 3) випливає із твердження 2).

4. Доведення теореми 2.

4.1. Доведення твердження 1). Оскільки напівгрупи $T^{(bc)}$ і $T^{(cb)}$ ізоморфні напівгрупі T_1 , твердження 1 випливає із теореми 3 [6] (про те, що напівгрупа T_1 має скінченний зображувальний тип, вже говорилося вище).

Згідно з цією теоремою маємо наступне твердження.

Теорема 3. *Канонічна форма для матричних зображень некомутативної напівгрупи T_1 така:*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Доведення твердження 2). Оскільки напівгрупи $T^{(b)}$ і $T^{(c)}$ ізоморфні, достатньо розглянути другу напівгрупу.

Нехай $R = \{B, C\}$ — довільне матричне зображення напівгрупи $T^{(c)}$. Тоді із доведення твердження 2) теореми 1 і рівності $BC = B$ маємо, що зображення R еквівалентне зображенню $R'_0 = \{B'_0, C'_0\}$, де

$$B'_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Твердження 2) доведено.

Як наслідок маємо таку теорему.

Теорема 4. *Пара матриць B, C вказаного вигляду разом з нульовою (відповідно одиничною) матрицею, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, задає канонічну форму для матричних зображень напівгрупи $T^{(c)}$ при $T = T_2$ (відповідно $T = T_3$).*

4.3. Доведення тверджень 3) і 4).

Спочатку у формулюванні твердження 3) було вказано (з інтуїтивних міркувань), що в цьому випадку ми маємо дику наднапівгрупу. Але дослідження її матричних зображень показало, що це не так, а саме, що вона є напівгрупою скінченного зображувального типу. Більш точно, було вставлено на матричний мові, що в напівгрупі $T = T_2, T_3$ перші два співвідношення є наслідками двох останніх. Коли це стало відомо, вже було знайдено доведення цього факту і на мові самої напівгрупи. Скажімо, із співвідношення $cb = c$ маємо $c(bc) = c^2$, а тоді $cb = c^2$ (бо $bc = b$); але оскільки $cb = c$, то $c = c^2$. Така ситуація нормальна, адже одна із цілей дослідження основних наднапівгруп саме і полягає у знаходженні “лишніх” визначальних співвідношень.

Твердження 4) випливає із [20, 3.6].

4.4. Доведення тверджень 5) і 6). Твердження 5) випливає із твердження 2) теореми 1. Твердження 6) випливає із твердження 5).

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення основних наднапівгруп некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Описано зображувальний тип над довільним полем, а у випадку наднапівгруп скінченного зображувального типу вказана канонічна форма їхніх матричних зображень.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших некомутативних напівгруп третього порядку.

Список використаної літератури

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2013). On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics*, 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Chotchaisthit, S. (2014). Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, 8, 1261–1269.
5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 32–39.
6. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
7. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
8. Nazarova, L. A., Roiter, A. V., Sergeichuk, V. V., & Bondarenko, V. M. (1972). Application of modules over a dyad to the classification of finite p -groups that have an abelian subgroup of index p and to the classification of mutually annihilating operators. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 69–92 [in Russian].
9. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkcional. Anal., i Prilozhen.*, 8, 34–42 [in Russian].
10. Drozd, Yu. A. (1977). On tame and wild matrix problems. *Matrix problems, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev*, 104–114 [in Russian].
11. Bondarenko, V. M. (1988). Bundles of semichained sets and their representations. *Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, Preprint.* (60), 32 [in Russian].
12. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Tame partially ordered sets with involution. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 183, 149–159 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of

- the semigroup generated by mutually annihilating idempotents. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 36(1), 7–15 [in Ukrainian].
14. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of the semigroup generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, (3), 110–114 [in Ukrainian].
 15. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2023). On matrix representations of oversemigroups of the semigroup of third order without zero divisors. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 43(2), 15–21 [in Ukrainian].
 16. Bondarenko, V. M. (1975). Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2. *Mat. Sb.*, 96(1), 63–74. [in Russian]
 17. Gelfand, I. M., & Ponomarev, V. A. (1968). Indecomposable representations of the Lorentz group. *Uspehi Mat. Nauk*, 23(2), 3–60. [in Russian]
 18. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear Algebra Appl.*, 430(1), 86–105.
 19. Bondarenko, V. M., & Kostyshy, E. M. (2011). Modular representations of the semigroup T_2 . *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 22(1), 26–34. [in Ukrainian]
 20. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.*, 21(1), 18–23.
 21. Nazarova, L. A. (1973). Representations of quivers of infinite type. *Math. USSR Izvestija*, 3(4), 752–791 [in Russian].
 22. Donovan, P., & Freislich, M. R. (1973). The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Lecture Notes*, 5, 3–86.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of main oversemigroups of the non-commutative idempotent semigroups of order three of finite type.

In the theory of representations of semigroups, the largest number of works are devoted to irreducible representations. Among the old results, there are only some results on representation type of semigroups. Namely, the finite representation type for a finite quite simple semigroup is discussed in a series of papers of I. S. Ponizovsky and that for some semigroups of all transformations of a finite set are discussed by I. S. Ponizovsky and C. Ringel. If we are talking about new results on semigroup classes, then it should be noted works on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (the first author of this paper together with O. M. Tertychna), of semigroups generated by the potential elements (both the authors), of direct products of the symmetric second-order semigroup (the first author together with E. M. Kostyshyn), and on representations of (related to Rees semigroups) Munn algebras (Yu. A. Drozd and A. I. Plakosh). All they can have both a finite and infinite number of indecomposable representations, can be tame or wild.

The first author together with Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over any field, and indicated in these cases the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. In their previous papers, the authors investigated similar problems for oversemigroups of a special type of the commutative third-order semigroups. In this paper we begin to explore the same problems for oversemigroups of noncommutative semigroups.

Keywords: defining relations, main oversemigroup, matrix representations, semigroups of finite and infinite representation types, tame and wild semigroups, canonical form.

Одержано 21.09.2025