

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).52-64](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).52-64)**О. В. Капустян¹, А. О. Краснєєва², Т. Ю. Жук³**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

kapustyan@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9373-6812>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
krasnyeyeva@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8058-1823>

³ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
zhuktetiana6@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8015-0038>

СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРУ ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ВІДНОСНО ЗОВНІШНІХ ТА ГРАНИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

В роботі розглядається задача вивчення асимптотичної поведінки розв'язків параболічного включення з мноюзначною напівнеперервною зверху функцією взаємодії за наявності неавтономних обмежених збурень в правій частині та в крайових умовах. За відсутності збурень траєкторії цієї задачі в фазовому просторі L^2 рівномірно по обмеженим початковим даним притягуються з часом до компактної зв'язної інваріантної множини - глобального атрактора. Ми вивчаємо асимптотику збуреної задачі шляхом встановлення робастної оцінки, яка визначає відхилення траєкторій збуреної задачі від глобального атрактора незбуреної задачі через величину збурень. Наявність такої оцінки говорить про стійкість глобального атрактора щодо збурень. Ми використовуємо підхід, що полягає у дослідженні відповідного сімейства неавтономних напівпроцесів, які мають рівномірний аттрактор, що залежить від збурень. На основі властивості його напівнеперервності зверху встановлюються умови, що гарантують шукану робастну стійкість атрактора.

Ключові слова: стійкість, параболічне включення, глобальний аттрактор, неавтономні крайові умови, збурення.

1. Вступ. Однією з основних задач в якісній теорії диференціальних рівнянь та в теорії керування є дослідження стійкості положень рівноваги щодо збурень [1]. Цю властивість робастної стійкості для звичайних диференціальних рівнянь прийнято вивчати в рамках теорії ISS - стійкості від входу до стану (Input to State Stability) [2, 3]. Ключовим елементом цієї теорії є нерівність

$$\|y(t, y_0, d)\| \leq \beta(\|y_0\|, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \quad (1)$$

де $y(t, y_0, d)$ — це значення розв'язку збуреної системи диференціальних рівнянь в момент часу $t \geq 0$ з початковим даним y_0 і обмеженим неавтономним збуренням $d(t)$, $\beta \in KL$, $\gamma \in K$ - функції порівняння (див. означення нижче). І хоча ці функції визначаються, як правило, неявно [1], формула (1) виявилась в багатьох як теоретичних так і прикладних аспектах більш корисним і ефективним інструментом дослідження, ніж класичний $\varepsilon - \delta$ підхід, і дозволили одержати нові якісні результати щодо стійкості збурених систем, включаючи

багатокомпонентні та імпульсно-збудені системи [4, 5]. Класичний підхід одержання робастної оцінки (1) ґрунтується на аналізі ISS-функції Ляпунова і може бути використаний також для оцінки відхилення траєкторій збуденої системи від довільної замкненої інваріантної множини [2]. Робастна стійкість положення рівноваги для нескінченновимірних систем, заданих у термінах диференціальних рівнянь у частинних похідних, досліджувалася впродовж останнього десятиліття в рамках теорії ISS в роботах багатьох авторів, наприклад [6–8]. Проте якісна поведінка більшості дисипативних нескінченновимірних систем, породжених нелінійними рівняннями в частинних похідних, описується не сукупністю положень рівноваги, а набагато більш складним об’єктом – глобальним аттрактором [9]. При цьому у більшості випадків не існує природної ISS-функції Ляпунова, що описує відхилення траєкторій збуденої системи від нетривіального глобального аттрактора. Загальна схема одержання локального варіанту оцінки (1) в околі аттрактору Θ

$$\|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \beta(\|y_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (2)$$

де $\|y\|_{\Theta} = \inf_{\theta \in \Theta} \|y - \theta\|$, а також властивості AG — оцінки асимптотичного підсилення (Asymptotic Gain)

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (3)$$

для різних класів нескінченновимірних дисипативних систем була запропонована в роботах [10], [11]. Слід відзначити принципову різницю у способах одержання оцінок (2) та (3): для виведення (2) будується ISS-функція Ляпунова на основі оцінки між розв’язками збуденої і незбуденої систем, а також робастна оцінка, що впливає з асимптотичної стійкості глобального аттрактору (оцінка (2) при $d \equiv 0$) [10]; натомість для виводу (3) використовується теорія рівномірних аттракторів неавтономних процесів та характер залежності цих рівномірних аттракторів від збудуючого параметра [12, 13]. Обидва ці підходи допускають узагальнення на багатозначний випадок, тобто коли єдиність задачі Коші для еволюційного рівняння не гарантується [14]. Але всі ці роботи розглядали зовнішні збурення, що надходять через праву частину рівнянь. Наявність неавтономних збурень на границі просторової області є більш природним припущенням, проте робить задачу робастного оцінювання значно складнішою. Робастна стійкість нульового асимптотично стійкого положення рівноваги нескінченновимірної параболічної еволюційної задачі відносно граничних збурень розглядалася в [15]. В даній роботі ми виводимо оцінку асимптотичного підсилення (3) для параболічного включення зі збуренням як в правій частині, так і в граничних умовах.

2. Постановка задачі. Розглянемо наступну початково-крайову задачу на циліндрі $Q = (0, \infty) \times (0, l)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \in f(y(t, x)) + h(t, x), & (t, x) \in Q, \\ y|_{x=0} = d_1(t), \quad y|_{x=l} = d_2(t), \\ y|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Тут початкові умови y_0 належать фазовому простору $X = L^2(0, l)$ зі стандартною нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, збурення $d := \{h, d_1, d_2\}$ належать

деякій підмножині D (див. (9)) з простору функцій $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(0, l)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+) \times L^\infty(\mathbb{R}_+)$ з нормою

$$\|d\|_\infty = \max\{\text{ess sup}_{t>0} \|h(t)\|, \|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\}.$$

Багатозначна функція взаємодії $f : \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ (тобто значення f є непорожніми компактними опуклими підмножинами $\mathbb{R}$) задовольняє наступним умовам:

$$f \text{ є напівніпервною зверху } \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$\exists c_1 \geq 0 \exists c_2 \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \forall \xi \in f(s) \implies |\xi| \leq c_1|s| + c_2; \quad (6)$$

$$\exists \lambda \in (0, \lambda_1) \exists c \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \forall \xi \in f(s) \implies s\xi \leq \lambda s^2 + c; \quad (7)$$

де $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ — константа з нерівності Пуанкаре. Прикладом такого відображення може слугувати $f(s) = [0, \lambda|s| + b]$ для $b \geq 0$.

Надалі будемо використовувати позначення: для множин $A, A_1, A_2, \Theta \subset X$

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sup_{y_1 \in A_1} \inf_{y_2 \in A_2} \|y_1 - y_2\|,$$

$$O_\delta(A) = \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < \delta\}, \quad \|A\|_\Theta = \text{dist}(A, \Theta).$$

Відомо [16], що для $d \equiv 0$ за умов (5),(6) задача (4) є глобально розв'язною і за додаткової умови (7) всі розв'язки породжують багатозначну напівгрупу (або m -напівпотік) $\{S(t) : X \mapsto 2^X\}_{t \geq 0}$, $S(t)y_0 = \{y(t, y_0, 0)\}$, який має глобальний аттрактор [17]. Точніше, існує компактна множина $\Theta \subset X$ така, що

$$\forall t \geq 0 \quad S(t)\Theta = \Theta \quad \text{and} \quad \forall r > 0 \quad \sup_{\|y_0\| \leq r} \text{dist}(S(t)y_0, \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Слід зауважити, що для багатозначних функцій взаємодії множина Θ може мати дуже складну структуру і навіть бути нескінченновимірною [18].

Можна показати [17], що Θ є асимптотично стійкою в сенсі Ляпунова, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \quad S(t)O_\delta(\Theta) \subset O_\varepsilon(\Theta),$$

або в термінах функцій порівняння [14]

$$\exists \beta \in KL \forall t \geq 0 \quad \|S(t)y_0\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t).$$

Тут і надалі ми використовуємо класи функцій порівняння

$$K = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, \text{ неперервна, додатно визначена, строго зростаюча}\},$$

$$KL = \{\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, \text{ неперервна, } \beta(\cdot, t) \in K, \beta(s, \cdot) \text{ строго спадна до } 0\}.$$

Основним результатом роботи є оцінка асимптотичного підсилення AG для глобального аттрактора Θ відносно збурень $d = \{h, d_1, d_2\}$

$$\exists \gamma \in K \quad \forall y_0 \in X \quad \forall d \in D \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \quad (8)$$

Для доведення (8) ми, слідуючи загальній схемі теорії неавтономних процесів [12, 13], будемо сімейство m -напівпроцесів $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(d)}$ і доводимо для нього

існування рівномірного атрактора $\Theta_{\Sigma(d)}$ (Означення 2). Далі ми покажемо граничну рівність

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \rightarrow 0, \quad \|d\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

з якої і виводимо нерівність (8).

3. Основні результати. Ми припускаємо, що множина збурень D складається з функцій $d = \{h, d_1, d_2\} \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(0, l)) \times L^{\infty}(\mathbb{R}_+) \times L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ таких, що d_1, d_2 є абсолютно неперервними $d_1(0) = d_2(0) = 0$, $\dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, і

$$\|d\|_{\infty} \leq R. \quad (9)$$

Тоді D є інваріантною відносно зсуву, тобто, $\forall \tau \geq 0, \quad \forall d \in D \quad d(\cdot + \tau) \in D$ та $\|d(\cdot + \tau)\|_{\infty} \leq \|d\|_{\infty}$.

Припустимо $\omega = \omega(t, x)$, $(t, x) \in Q$ є розв'язком наступної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega(t, x)}{\partial x^2} = 0, \\ \omega|_{x=0} = d_1(t), \quad \omega|_{x=l} = d_2(t), \\ \omega|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Відомо, що $\omega \in C([0, +\infty); H_0^1(0, l))$ і завдяки принципу максимуму [15] виконується наступне:

$$\|\omega\|_{\infty} = \sup_{x \in (0, l), t > 0} |\omega(t, x)| \leq \max\{\|d_1\|_{\infty}, \|d_2\|_{\infty}\}. \quad (11)$$

Означення 1. Будемо говорити, що $y = y(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = (0, T) \times (0, l)$ розв'язок (4) на $(0, T)$ якщо $y = v + \omega$, де ω розв'язок (10) на $(0, T)$ і $v = v(t, x)$ і є слабким розв'язком

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \quad (12)$$

тобто $v \in L^2(0, T; H_0^1(0, l))$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$, і існує функція $g \in L^2(Q_T)$ така, що

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = g(t, x) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \quad (13)$$

$$g(t, x) \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) \quad \text{майже скрізь на } Q_T. \quad (14)$$

Зауваження 1. Розв'язок (13) розуміємо в слабкому сенсі, тобто $\forall \eta \in C_0^{\infty}(0, l)$, $\forall \theta \in C_0^{\infty}(0, T)$

$$-\int_0^T (v(t), \eta) \theta_t dt + \int_0^T (v_x(t), \eta_x) \theta dt = \int_0^T (g(t) + h(t), \eta) \theta dt. \quad (15)$$

Лема 1. Для всіх $T > 0$, $h \in L^\infty(0, T; L^2(0, l))$, та $\omega \in C([0, T]; X) \cap L^\infty(Q_T)$ із

$$\max\{\text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|h(t)\|, \|\omega\|_\infty\} \leq R,$$

задача (12) має принаймні один розв'язок $(0, T)$. Більше того, кожний розв'язок (12) задовольняє для всіх $0 \leq \tau \leq t \leq T$ наступним оцінкам:

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta_1(t-\tau)} + c_3(1 + \int_\tau^t \|h(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} ds), \quad (16)$$

$$\|v(t)\|^2 + \delta_2 \int_\tau^t \|v(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq \|v(\tau)\|^2 + c_4 \int_\tau^t (1 + \|h(s)\|^2) ds, \quad (17)$$

де $\delta_1, \delta_2, c_3, c_4$ є додатними константами, які залежать тільки від R .

Доведення. Розглянемо відображення $F : [0, T] \times X \mapsto 2^X$,

$$F(t, v) = \{u \in X \mid u(x) \in f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x) \text{ майже скрізь}\}.$$

Тоді задачу (12) можна записати у вигляді задачі Коші для диференціально-операторного включення

$$\frac{d}{dt}v(t) + Av(t) \in F(t, v(t)),$$

де $A : H_0^1(0, l) \mapsto H^{-1}(0, l)$ породжується $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ з нульовими крайовими умовами Діріхле. Тоді згідно [16] для доведення розв'язності (12) достатньо показати, що: 1) $F(t, v) \neq \emptyset \quad \forall (t, v) \in [0, T] \times X$; 2) $\forall v \in X \quad t \mapsto F(t, v)$ має вимірний селектор; 3) $\forall t \in [0, T] \quad v \mapsto F(t, v)$ є напівнеперервним зверху; 4) $\exists D_1, D_2 \geq 0 \quad \forall (t, v) \in [0, T] \times X \quad \sup_{z \in F(t, v)} \|z\| \leq D_1 + D_2 \|v\|$.

Властивість 4) є прямим наслідком (6). Перед тим, як доводити інші властивості, відмітимо, що багатозначне відображення $f : \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ є напівнеперервним зверху [19] тоді і лише тоді коли $\forall s \in \mathbb{R} \quad f(s) = [f_-(s), f_+(s)]$, де $f_-(s)(f_+(s)) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є напівнеперервними знизу (зверху) функціями.

Таким чином, для $v \in X$ функція $x \mapsto f_+(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)$ є вимірною, і, згідно нерівності (6), належить протору X . Це означає, що $F(t, v)$ є непорожньою підмножиною X . Більше того, функція $t \mapsto f_+(v(\cdot) + \omega(t, \cdot)) + h(t, \cdot)$ є вимірним вимірним селектором $t \mapsto F(t, v)$, що доводить 2). Далі припустимо, що властивість 3) не виконується. Тоді $\exists \varepsilon > 0, v_n \rightarrow v$ в X і $u_n \in F(t, v_n)$ такі, що

$$\|u_n - u\| \geq \varepsilon \quad \forall u \in F(t, v) \quad \forall n \geq 1. \quad (18)$$

Без втрати загальності ми можемо припустити, що $v_n(x) \rightarrow v(x)$ для майже всіх $x \in (0, l)$. Згідно Теорема 8.2.13 в [19] існує вимірний селектор $\xi_n(x) \in f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)$ такий, що $\text{dist}(u_n(x), f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)) = |u_n(x) - \xi_n(x)|$ майже скрізь. Враховуючи той факт, що відображення f є напівнеперервним зверху, ми отримуємо

$$|u_n(x) - \xi_n(x)| \leq$$

$$\text{dist}(f(v_n(x) + \omega(t, x)) + h(t, x), f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{м.с.}.$$

З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає $\|u_n - \xi_n\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Але $\xi_n \in F(t, v)$, що суперечить (18). Таким чином, згідно теореми 3.1 з [16] задача (12) має принаймні один розв'язок на $(0, T)$.

Тепер виведемо оцінки (16), (17) для довільного розв'язку v задачі (12). Нехай g відповідна функція з (14) Означення 1. З того, що $v : [0, T] \rightarrow X$ є абсолютно неперервною функцією, отримуємо для майже всіх $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \|v(t)\|_{H_0^1}^2 &= \int_0^l (g(t, x) + h(t, x))v(t, x)dx = \\ &= \int_0^l g(t, x)(v(t, x) + \omega(t, x))dx + \int_0^l h(t, x)v(t, x)dx - \int_0^l g(t, x)\omega(t, x)dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Із включення $g(t, x) \in f(v(t, x) + \omega(t, x))$ м.с. і (6), (7) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \lambda_1 \|v(t)\|^2 &\leq \lambda \int_0^l (v(t, x) + \omega(t, x))^2 dx + Cl + \|h(t)\| \|v(t)\| + \\ &+ \int_0^l (c_2 + c_1 |v(t, x) + \omega(t, x)|) |\omega(t, x)| dx. \end{aligned}$$

Звідси для деяких констант $\delta_1 \in (0, \lambda_1 - \lambda)$ і $C_{\delta_1} > 0$ ми отримуємо, що

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \delta_1 \|v(t)\|^2 \leq C_{\delta_1} (1 + \|\omega(t)\|^2 + \|h(t)\|^2), \quad \text{для м.в. } t \in (0, T). \quad (20)$$

Поклавши $c_3 := \max\{\frac{C_{\delta_1}}{\delta_1} (1 + l \|\omega\|_\infty^2), C_{\delta_1}\}$, з (20) та леми Гронсуола одержуємо (16).

Далі, вибираючи $\delta_2 \in (0, 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})$, для деякого $C_{\delta_2} > 0$ ми отримуємо з (19)

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \delta_2 \|v(t)\|_{H_0^1}^2 \leq C_{\delta_2} (1 + \|\omega(t)\|^2 + \|h(t)\|^2), \quad \text{для м.в. } t \in (0, T). \quad (21)$$

Поклавши $c_4 := \max\{C_{\delta_2} (1 + l \|\omega\|_\infty^2), C_{\delta_2}\}$, одержуємо (17). Лема доведена.

Зауваження 2. Твердження леми означає глобальну розв'язність (4).

Щоб побудувати сім'ю напівпроцесів, породжених (12), ми виділяємо деякі додаткові властивості розв'язку (10). Нехай ω — це розв'язок (10). Тоді $\bar{\omega} = \omega - (\frac{x}{l} d_1(t) + \frac{l-x}{l} d_2(t))$ є слабким розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} - \Delta \bar{\omega} = \bar{f}(t, x) := -\frac{x}{l} \dot{d}_1(t) + \frac{l-x}{l} \dot{d}_2(t), \\ \bar{\omega}|_{x=0} = 0, \bar{\omega}|_{x=l} = 0, \\ \bar{\omega}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

З того, що $\bar{f} \in L^\infty(Q)$, і з теореми 3.3, [9], випливає, що існує константа $\bar{c} = \bar{c}(\bar{f}) > 0$ така, що

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{\omega}(t)\|_{H_0^1} \leq \bar{c} \quad \text{and} \quad \|\bar{\omega}(t_1) - \bar{\omega}(t_2)\| \leq \bar{c} |t_1 - t_2|. \quad (23)$$

З того, що $d_i, \dot{d}_i \in L^\infty(Q)$, легко бачити, що ті ж нерівності (з іншою константою) виконуються для ω . Тепер можна побудувати сім'ю m -напівпроцесів. Для $d = \{h, d_1, d_2\} \in D$ позначимо через $W(d)$ множину всіх ω таких, що $\omega \in C([0, +\infty]; H_0^1(0, l))$ і задовольняють (11), (23). Зокрема, розв'язок (10) належить множині $W(d)$. Для всіх $\omega \in W(d)$ і h таких, що

$$\max\{\text{ess sup}_{t>0} \|h(t)\|, \|\omega\|_\infty\} \leq R, \quad (24)$$

ми розглядаємо множину

$$\Sigma(\omega, h) = cl_{C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)} \{ \{ \omega(\cdot + \tau), h(\cdot + \tau) \} | \tau \geq 0 \},$$

де замикаання береться в добутку топологій: топології $C(\mathbb{R}_+; X)$, породженій рівномірною збіжністю на компактних інтервалах, і топології $L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)$, породженою слабкою збіжністю на компактних інтервалах. Завдяки компактному вкладенню $H_0^1(0, l) \subset X$ маємо, що $\Sigma(\omega, h)$ є інваріантною відносно зсувів та компактною в $C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)$.

Завдяки побудові $\Sigma(\omega, h)$ для всіх $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ існує $\tau_n \geq 0$ таке, що з точністю до підпоследовності

$$\omega(\cdot + \tau_n) \rightarrow p(\cdot) \text{ в } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ м.с.на } Q,$$

$$h(\cdot + \tau_n) \rightarrow l(\cdot) \text{ в } L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X).$$

Зокрема, це означає, що кожне $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ належить $L^\infty(Q) \times L^\infty(\mathbb{R}_+; X)$ і задовольняє (11), (24). Отже, задача (12) з правою частиною $f(v + p) + l$ є глобально розв'язуваною завдяки Лемі 1.

Позначимо через $K_\sigma^\tau \subset C([\tau, +\infty); X)$ сім'ю всіх розв'язків (12) на $[\tau, +\infty)$ з правою частиною $f(v + p) + l$ та початковими даними $v|_{t=\tau} = y_\tau$.

Лекко бачити, що виконуються наступні властивості:

$$\forall y \in X, \forall \tau \geq 0, \forall \sigma \in \Sigma(\omega, h) \exists v \in K_\sigma^\tau : v(\tau) = y;$$

$$v|_{[s, +\infty)} \in K_\sigma^s, \forall v \in K_\sigma^\tau, \forall s \geq \tau;$$

$$v(\cdot + s) \in K_{\sigma(\cdot+s)}^\tau, \forall v \in K_\sigma^{\tau+s}, \forall s \geq 0;$$

$$\forall s \geq \tau, \forall \psi \in K_\sigma^\tau, \forall \varphi \in K_\sigma^s \text{ з } \psi(s) = \varphi(s) \text{ функція}$$

$$\theta(p) = \begin{cases} \psi(p), & p \in [\tau, s], \\ \varphi(p), & p \geq s \end{cases} \text{ належить } K_\sigma^\tau;$$

$$\forall s \geq 0, \forall v \in K_{\sigma(\cdot+s)}^\tau \text{ функція } v(\cdot - h) \text{ належить } K_\sigma^{\tau+s}.$$

Покладемо для $y \in X, t \geq \tau \geq 0, \sigma \in \Sigma(\omega, h)$

$$U_\sigma(t, \tau, y) := \{v(t) \mid v \in K_\sigma^\tau, v(\tau) = y\}. \quad (25)$$

Тоді легко перевірити [14], що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ породжує строгу сім'ю m -напівпроцесів, тобто, $\forall \sigma \in \Sigma(\omega, h), \forall t \geq s \geq \tau \geq 0, \forall y \in X, \forall \tau \geq 0$

$$\begin{aligned} U_\sigma(t, \tau, y) &= y, \quad U_\sigma(t, \tau, y) = U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, y)), \\ U_\sigma(t + s, \tau + s, y) &= U_{\sigma(\cdot+s)}(t, \tau, y). \end{aligned}$$

Легко перевірити, що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ задовольняє властивість коциклу:

$$U_\sigma(t + s, 0, y) = U_{\sigma(\cdot+s)}(t, 0, U_\sigma(s, 0, y)).$$

Більш того, $\forall v \in K_\sigma^\tau$ виконується $v(t) \in U_\sigma(t, s, v(s))$, і $v(t+s) \in U_{\sigma(\cdot+s)}(t, 0, v(s))$, $\forall v \in K_\sigma^0$, $\forall t, s \geq 0$.

У випадку $d \equiv 0$ отримуємо $W(0) = \{0\}$, $\Sigma(0) = \{0\}$ та $U_0(t + s, 0, y) = U_0(t, 0, U_0(s, 0, y))$, тобто, $S_0(t)y = U_0(t, 0, y)$ є строгим m -напівпотоким, породженим незбуреною задачею (4).

Зауваження 3. Якщо ω є розв'язком задачі (10), то для розв'язку (4) маємо

$$y(t, y_0, d) = v(t) + \omega(t), \text{ де } v \in K_{\{\omega, h\}}^0, \quad v(0) = y_0. \quad (26)$$

Лема 2. Сімя m -напівпотоків $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$, означена в (25), має рівномірний аттрактор, тобто існує компактна множина $\Theta_{\Sigma(\omega, h)} \subset X$ така, що для $U_{\Sigma(\omega, h)} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)} U_\sigma$

$$\forall r > 0 \quad \sup_{\|y_0\| \leq r} \text{dist}(U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0), \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (27)$$

та $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$ є мінімальною серед усіх замкнених множин, що задовольняють (27).

Більш того, $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$ є від'ємно інваріантною в тому сенсі, що

$$\Theta_{\Sigma(\omega, h)} \subset U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) \quad \forall t \geq 0. \quad (28)$$

Доведення. Згідно [14] потрібно довести, що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ задовольняє наступним властивостям

1) дисипативність: існує обмежена множина $B_0 \subset X$ така, що для будь-якої обмеженої $B \subset X$

$$\exists T = T(B) \quad \forall t \geq T(B) \quad U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, B) \subset B_0; \quad (29)$$

2) асимптотична компактність: для кожної $\{t_n \nearrow \infty\}$, для будь-якої обмеженої $\{y_n\} \subset X$

$$\text{кожна послідовність } \{\xi_n \in U_{\Sigma(\omega, h)}(t_n, 0, y_n)\} \text{ передкомпактна}; \quad (30)$$

3) замкнений граф: $\forall t > 0 \quad \forall y_n \rightarrow y \quad \forall \sigma_n \rightarrow \sigma \quad \forall \xi_n \in U_{\sigma_n}(t, 0, y_n) \quad \text{з } \xi_n \rightarrow \xi$ маємо

$$\xi \in U_\sigma(t, 0, y). \quad (31)$$

Доведемо 1). Для кожного $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ та кожного $v(\cdot) \in K_\sigma^0$, $v(0) = y_0$ згідно (16) маємо: $\forall t \geq 0$

$$\|v(t)\|^2 \leq \|y_0\|^2 e^{-\delta_1 t} + C_{\delta_1}(\delta_1)^{-1}(1 + l \|p\|_\infty^2 + \text{ess sup}_{t>0} \|l(t)\|^2), \quad (32)$$

де δ_1, C_{δ_1} не залежить від d . Тому, для кожного $d \in D$, $\omega \in W(d)$, $\sigma \in \Sigma(\omega, h)$ ми отримуємо (29) з

$$B_0 = \left\{ u \in X \mid \|u\| \leq \sqrt{1 + C_{\delta_1}(\delta_1)^{-1}(1 + (l+1)R^2)} \right\}.$$

Доведемо 2). Нехай $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n)$, де $t_n \nearrow \infty$, $\|y_n\| \leq r$, $\sigma_n \in \Sigma(\omega, h)$. Тоді

$$\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n - 1 + 1, t_n - 1, U_{\sigma_n}(t_n - 1, 0, y_n)) \subset U_{\sigma_n(\cdot + t_n - 1)}(1, 0, U_{\sigma_n}(t_n - 1, 0, y_n)).$$

Згідно доведеного пункту 1) про дисипацію і компактності $\Sigma(\omega, h)$ отримуємо, що

$$\xi_n = v_n(1) \in U_{\bar{\sigma}_n}(1, 0, \bar{y}_n), \quad \bar{\sigma}_n = \{\bar{p}_n, \bar{l}_n\} \in \Sigma(\omega, h),$$

де з точністю до підпослідовності

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_n \rightarrow \bar{\sigma} \text{ в } C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X), \\ \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \text{ слабо в } X. \end{cases} \quad (33)$$

Отже, для $T > 1$ маємо, що $v_n(\cdot)$ є розв'язком задачі (13),(14) з початковими умовами $\bar{y}_n$ та правими частинами $g_n(t, x) + \bar{l}_n(t, x)$, $g_n(t, x) \in f(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x))$.

Ми використаємо наступний результат, який є прямим наслідком Теорема 3.1 з [9].

Лема 3. *Нехай $\{v_n\}$ нехай будуть розв'язками (13) на $(0, T)$ початковими умовами $\{y_n\}$ і правою частиною $\{g_n + l_n\}$. Припустимо, що $y_n \rightarrow y$ слабо в X , $g_n + l_n \rightarrow g + l$ слабо в $L^2(0, T; X)$. Тоді з точністю до підпослідовності $v_n \rightarrow v$ в $C([\varepsilon, T]; X)$, $\forall \varepsilon \in (0, T)$, де v розв'язок рівняння (13) з початковими умовами y і правою частиною $g + l$. Якщо, додатково, $y_n \rightarrow y$ в X сильно, то $v_n \rightarrow v$ в $C([0, T]; X)$.*

З того, що $\{\bar{\sigma}_n\}$ обмежена, з оцінок (6) та (16) ми приходимо до висновку, що послідовність $\{g_n\}$ є обмеженою в $L^2(0, T; X)$. Отже, з точністю до підпослідовності $g_n \rightarrow g$ слабо в $L^2(0, T; X)$, $\bar{l}_n \rightarrow \bar{l}$ слабо в $L^2(0, T; X)$ і Лема 3 забезпечує, що $\xi_n = v_n(1) \rightarrow v(1)$ in X .

Доведемо тепер 3). Нехай $\xi_n \in U_{\bar{\sigma}_n}(\bar{t}, 0, \bar{y}_n)$, де $\bar{\sigma}_n \rightarrow \bar{\sigma}$, $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$, і $\bar{t} \in (0, T)$. Повторюючи попередні міркування та використовуючи Лему 3, отримуємо, що $\xi_n = v_n(\bar{t})$, де $\{v_n, g_n\}$ задовольняють (13),(14), і з точністю до підпослідовності маємо

$$g_n \rightarrow g \text{ слабо в } L^2(0, T; X) \quad \text{і} \quad v_n \rightarrow v \text{ в } C([0, T]; X),$$

де v є розв'язком (13) з правою частиною $g + \bar{l}$ і початковими умовами $\bar{y}$. Далі, згідно з включенням (14), збіжністю $v_n + \bar{p}_n$ до $v + \bar{p}$ в $C([0, T]; X)$, і напівнеперервністю зверху f , ми отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$, для м.в. $(t, x) \in Q_T$ та $n \geq N(t, x)$ виконуються наступні нерівності

$$\begin{aligned} f_-(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) - \varepsilon &< f_-(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) \leq g_n(t, x) \leq \\ &\leq f_+(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) < f_+(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (34)$$

З слабкої збіжності g_n до g в $L^2(Q_T)$ і теореми Мазура виводимо, що деяка опукла комбінація $\{g_n\}$ збігається до g сильно та майже всюди на Q_T . Переходячи до границі в (34), отримуємо

$$f_-(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) - \varepsilon \leq g(t, x) \leq f_+(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) + \varepsilon.$$

Остання нерівність означає, що $g(t, x) \in f(v(t, x) + \bar{p}(t, x))$ м.в., і ми виводимо $\xi_n = v_n(\bar{t}) \rightarrow \xi = v(\bar{t}) \in U_{\bar{\sigma}}(\bar{t}, 0, \bar{y})$. Лема доведена.

Тепер сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (5)-(7), (9). Нехай Θ — глобальний аттрактор незбуреної задачі (4) (при $d \equiv 0$). Тоді існує $\gamma \in K$ така, що для всіх $y_0 \in X$ і $d \in D$ довільний розв'язок $y(t, y_0, d)$ задачі (4) задовольняє робастну оцінку*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}). \quad (35)$$

Доведення. Згідно (26) $y(t, y_0, d) = v(t) + \omega(t)$, де $\omega \in$ розв'язком (10), $v(t) \in U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0)$. Доведемо, що $\exists \tilde{\gamma} \in K$ таке, що

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} \leq \tilde{\gamma}(\|d\|_{\infty}).$$

Тоді із включення $\{\omega, h\} \in \Sigma(\omega, h)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} &\leq \|U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} + \|\omega(t)\| \\ &\leq \|U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} + \sqrt{l}\|d\|_{\infty}, \end{aligned}$$

і ми отримуємо (35) з $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) + \sqrt{l}s$.

Згідно Лемми 2 для кожного $d \in D$ і для відповідного розв'язку ω задачі (10) сім'я $\{U_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ має рівномірний аттрактор $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$, який задовольняє (28). Відмітимо, що $\Sigma(0) = \{0\}$, $U_0(t, 0, y_0) = S(t)y_0$, та $\Theta_{\Sigma(0)} = \Theta \in$ глобальним аттрактором m -напівпотoku $S(t)$, породженого незбуреною ($d \equiv 0$) задачею (4).

Далі доведемо від супротивного, що

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega, h)}, \Theta) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|d\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Припустимо, що $\exists \varepsilon > 0$ та $d_n \in D$, $\|d_n\|_{\infty} \rightarrow 0$, такі, що для розв'язків ω_n задачі (10) для деяких $z_n \in \Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)}$

$$\text{dist}(z_n, \Theta) \geq \varepsilon.$$

Згідно (32) дисипативна множина B_0 в (29) одна й та ж для всіх $n \geq 1$. Тоді з (29) отримуємо $\Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)} \subset B_0$ for $n \geq 1$. За (28), (29) та властивістю коциклу отримуємо

$$z_n \in U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(n, 0, \Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)}) \subset U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(1, 0, B_0).$$

Отже, $z_n = v_n(1) \in U_{\bar{\sigma}_n}(1, 0, \bar{y}_n)$, де $\bar{y}_n \in B_0$, $v_n(\cdot) \in$ розв'язком (13), (14) на Q_T , $T > 1$, і згідно з (11)

$$\|\bar{\sigma}_n\|_{\infty} \leq \|d_n\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, з точністю до підпоследовності маємо, що

$$\bar{p}_n \rightarrow 0 \text{ в } L^{\infty}(Q_T), \quad \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \in B_0 \text{ слабо в } X,$$

$$g_n(t, x) \in f(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) \text{ м.в. на } Q_T.$$

Оскільки $\{v_n\}$ задовольняє (32), останнє включення та умова (6) гарантують, що послідовність $\{g_n\}$ є обмеженою в $L^2(Q_T)$. Отже $g_n \rightarrow g$ слабо в $L^2(0, T; X)$. Тоді ми можемо застосувати Лему 3 і отримати, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$v_n \rightarrow v \text{ in } C([\varepsilon, T]; X). \quad (37)$$

Це означає, що $v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x) \rightarrow v(t, x)$ м.с. на $(\varepsilon, T) \times (0, l)$.

Після цього ми можемо повторити міркування (34) і з напівнеперервності f вивести, що

$$g(t, x) \in f(v(t, x)) \text{ м.с. на } (\varepsilon, T) \times (0, l).$$

Нарешті, довільність вибраного ε веде до висновку

$$z_n = v_n(1) \rightarrow v(1) \in U_0(1, 0, \bar{y}) = S(1)\bar{y}. \quad (38)$$

Тепер, використовуючи означення глобального атрактора Θ , обираємо $t > 0$ так, щоб

$$\text{dist}(S(t)B_0, \Theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із (29) виводимо, що $\exists \eta_n \in \Theta_{\Sigma(\omega_n)}$ таке, що

$$z_n \in U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(t, 0, \eta_n). \quad (39)$$

Повторюючи для $\{\eta_n\}$ попередні міркування, отримуємо, що $\eta_n \rightarrow \eta \in B_0$ в X . Тоді, застосовуючи знову міркування (37), (38) та другу частину Лему 3 до пари $\{z_n, \eta_n\}$ з (39), виводимо, що

$$z_n \rightarrow z \in U_0(t, 0, \eta) = S(t)\eta \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, (36) має місце. Покладемо $\gamma_0(s) := \sup_{\|d\|_\infty \leq s} \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega)}, \Theta)$. Тоді

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega)}, \Theta) \leq \gamma_0(\|d\|_\infty).$$

Крім того, $\forall s > 0 \gamma_0(s) < \infty$. Справді, $\gamma_0(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega_n)}, \Theta)$, $\|\omega_n\|_\infty \leq \|d_n\|_\infty \leq s$. Тоді завдяки (32) існує обмежена множина B_s such that $\Theta_{\Sigma(\omega_n)} \subset B_s$. Звідси, $\gamma_0(s) \leq \text{dist}(B_s, \Theta) + 1 < \infty$ і функція $\gamma_0 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ є незростаючою з $\gamma_0(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$. Тоді відомо [20], що існує $\gamma \in K$ така, що $\forall s \geq 0$, $\gamma_0(s) \leq \gamma(s)$. Включення $\{\omega, h\} \in \Sigma(\omega, h)$ та нерівність

$$\text{dist}(U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0), \Theta) \leq \text{dist}(U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0), \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) + \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega, h)}, \Theta),$$

гарантують виконання (35) завдяки властивості рівномірного притягання. Теорему доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі обґрунтована робастна оцінка, що визначає величину відхилення траєкторій параболічного включення з многозначною напівнеперервною зверху функцією взаємодії за наявності неавтономних обмежених збурень в правій частині та в крайових

умовах від глобального атрактору незбуреної системи в фазовому просторі L^2 . Наявність такої оцінки говорить про стійкість глобального атрактору щодо збурень. Ми використали підхід, що полягає у дослідженні відповідного сімейства неавтономних напівпроцесів, які мають рівномірний атрактор, що залежить від збурень, як від параметру, та переході до границі по цьому параметру. Методи роботи відкривають широкі можливості для дослідження робастної стійкості різних класів еволюційних нелінійних нескінченновимірних дисипативних систем зі збуреннями. Зокрема, природно узагальнити методи роботи на випадок багатомірних областей з використанням відповідного апарату теорії нелінійних крайових задач.

5. Подяка. Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння з багатозначною та стохастичною динамікою"

Список використаної літератури

1. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. USA: Prentice Hall.
2. Sontag, E. D., & Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5), 351–359. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(94\)00050-6](https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00050-6)
3. Sontag, E. D. (1998). *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems*. USA: Springer.
4. Dashkovskiy, S., Rüffer, B. S., & Wirth, F. R. (2007). An ISS small gain theorem for general net works. *Math. Control Signals Systems*, 19(2), 93–122. <https://doi.org/10.1007/s00498-007-0014-8>
5. Dashkovskiy, S., & Feketa, P. (2017). Input-to-state stability of impulsive systems and their networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 26, 190–200. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2017.06.004>
6. Dashkovskiy, S., & Mironchenko, A. (2013). Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Con. Sign. Syst.*, 25, 1–35. <https://doi.org/10.1007/s00498-012-0090-2>
7. Karafyllis, I., & Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs*. USA: Springer.
8. Mironchenko, A., & Priour, Ch. (2020). Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions. *SIAM Review*, 62, 529–614. <https://doi.org/10.1137/19M1291248>
9. Temam, R. (1997). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. USA: Springer.
10. Schmid, J., Kapustyan, O., & Dashkovskiy, S. (2022). Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 12(3), 763–788. <https://doi.org/10.3934/mcrf.2021044>
11. Dashkovskiy, S., & Kapustyan, O. (2022). Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 11(5), 1565–1577. <https://doi.org/10.3934/eect.2021054>
12. Zgurovsky, M. Z., Kasyanov, P. O., Kapustyan, O. V., Valero, J., & Zadoianchuk, N. V. (2012). *Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. Long-Time Behavior of Evolution Inclusions Solutions in Earth Data Analysis*. USA: Springer.
13. Gorban, N. V., Kapustyan, O. V., & Kasyanov, P. O. (2014). Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction-diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity. *Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications*, 98, 13–26. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.12.004>
14. Kapustyan, O. V., Sobchuk, V. V., & Yussyipiv, T. V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*, 30(2), 1–13. <https://doi.org/10.15421/142208>
15. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O., & Slynko, V. (2023). Robust stability of a nonli-

- near ODE-PDE system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 61 (3), 1760–1777. <https://doi.org/10.1137/21M1467535>
16. Denkowski, Z., & Mortola, S. (1993). Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *J. Optim. Theory Appl.*, 78, 365–391. <https://doi.org/10.1007/BF00939675>
 17. Kapustyan, O. V., & Valero, J. (2000). Attractors of differential inclusions and their approximation. *Ukrainian Math. Journal*, 52, 1118–1123. <https://doi.org/10.1023/A:1005237902620>
 18. Valero, J. (2000). Finite and infinite-dimensional attractors of multivalued reaction-diffusion equations. *Acta Math. Hungar.*, 88, 239–258. <https://doi.org/10.1023/A:1006769315268>
 19. Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1998). *Set-Valued Analysis*. USA: Springer.
 20. Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J. (1998). Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *J. Dif. Eqs.*, 149(1), 69–114. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3476>

Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y. Stability of the parabolic inclusion attractor with respect to external and boundary perturbations.

The paper considers the problem of studying the asymptotic behavior of solutions of a parabolic inclusion with a multivalued upper semicontinuous interaction function in the presence of non-autonomous bounded perturbations in the right-hand side and in boundary conditions. In the absence of perturbations, the trajectories of this problem in the phase space L^2 are uniformly attracted over time by the bounded initial data to a compact connected invariant set - the global attractor. We study the asymptotics of a perturbed problem by establishing a robust estimate that determines the deviation of the trajectories of the perturbed problem from the global attractor of the unperturbed problem due to the magnitude of the perturbations. The presence of such an estimate indicates the stability of the global attractor with respect to perturbations. We use an approach that consists in studying the corresponding family of non-autonomous semi-processes that have a uniform attractor that depends on the perturbations. Based on the property of its upper semicontinuity, conditions are established that guarantee the desired robust stability of the attractor.

Keywords: stability, parabolic inclusion, global attractor, nonautonomous boundary conditions, perturbations.

Одержано 18.08.2025