

УДК 519.23

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).72-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).72-81)**Г. І. Сливка-Тилищак¹, О. М. Ліба², М. О. Тилищак³**

¹ Ужгородський національний університет,
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

² Мукачівський державний університет,
доцентка кафедри теорії та методики початкової освіти,
кандидат педагогічних наук
Liba_oksana@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6278-913X>

³ Ужгородський науковий ліцей,
здобувач
marichkatlk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4379-1423>

ПОБУДОВА ВИБІРОК З МНОЖИНИ МІРИ НУЛЬ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок із множин на площині, що мають міру нуль. У процесі дослідження було побудовано дві серії вибірок із множин міри нуль: одна з них відповідає трикутнику Серпінського, інша — деякому спеціально сконструйованому фракталу на площині.

Аналіз вибірових характеристик показав, що вибірові середні значення точок, отриманих із трикутника Серпінського, практично збігаються з точкою перетину медіан початкового трикутника. Подібна закономірність виявлена і для вибірок, побудованих із фрактала: їхні вибірові середні розташовані поблизу центра початкового правильного трикутника, на основі якого було здійснено побудову. Додатково досліджувалася динаміка зміни середньоквадратичних відхилень для серій вибірок. Було встановлено, що для рівних початкових правильних трикутників послідовність цих відхилень стабілізується вже на другому кроці побудови як для трикутника Серпінського, так і для розглянутого фрактала. Водночас отримані значення для трикутника Серпінського є дещо більшими, ніж для іншої фрактальної множини.

Ключові слова: множини міри нуль, трикутник Серпінського, фрактал на площині, числові характеристики вибірки.

1. Вступ. Поняття міри у математиці є узагальненням таких базових числових характеристик множин, як довжина, площа та об'єм. У різних просторах та для різних класів множин ці характеристики можуть мати власні особливості, проте їх об'єднують спільні властивості: вони завжди невід'ємні та володіють адитивністю, тобто для об'єднання двох неперетинних множин значення характеристики дорівнює сумі їхніх окремих значень. Саме завдяки цим універсальним рисам у математичному аналізі замість вивчення довжини, площі чи об'єму окремо розглядають більш загальне поняття – міру, що визначається на певному абстрактному класі множин і задовольняє вказані властивості.

Водночас існують множини, які хоч і підпорядковуються строгим математичним правилам побудови, проте мають так звану міру нуль. Іншими словами, вони не «займають простору» у звичному розумінні, хоч і складаються з нескінченної кількості елементів.

У роботі [1] розглянуто два способи побудови вибірок з множини Кантора та проаналізовано їх числові характеристики. Дана робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок із множин на площині, що мають міру нуль, та аналізу їхніх числових характеристик. Актуальність теми зумовлена тим, що вивчення подібних множин дозволяє глибше зрозуміти природу міри як математичного поняття, а також розкрити властивості об'єктів, що здаються «невидимими» з точки зору традиційних понять довжини, площі чи об'єму. Методи побудови вибірок із таких множин досі залишаються мало дослідженими, що відкриває перспективи для подальших наукових пошуків у галузі теорії міри та її застосувань.

2. Трикутник Серпінського. Множина Кантора є одним з простих прикладів фракталів. Фрактал (від лат. *fractus* — подрібнений) — у загальновживаному розумінні фігура, що складається з частин, які в певному сенсі подібні до цілого. В геометричному сенсі фігура, яка відображається на свою підмножину (самоподібна) за допомогою деяких перетворень прямої, площини чи простору, залежно від того де розглядається фігура. Множина Кантора є самоподібною, оскільки її можна представити як об'єднання двох множин $K = ([0; \frac{1}{3}] \cap K) \cup ([\frac{1}{3}; 1] \cap K)$ кожна з яких $[0; \frac{1}{3}] \cap K$ та $[\frac{1}{3}; 1] \cap K$ подібна до всієї множини K . Множина $[0; \frac{1}{3}] \cap K$ отримується з множини K за допомогою гомотетії з центром в точці 0 та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, а множина $[\frac{2}{3}; 1] \cap K$ отримується з множини K за допомогою гомотетії з центром в точці 1 та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Трикутник Серпінського — один із двовимірних аналогів множини



Рис. 1. Множина Кантора.

Кантора. Його математичний опис був запропонований польським математиком Вацлавом Серпінським в 1915 році [2]. Цей трикутник є одним з найбільш ранніх прикладів фракталів, відомих з середньовіччя [3].

Розглянемо найпростіший спосіб побудови трикутника Серпінського. Беремо довільний трикутник (краще виглядає рівносторонній трикутник, для якого утвориться більш симетрична фігура). На першому кроці видаляється трикутник з вершинами в середині сторін початкового трикутника. На другому кроці аналогічні трикутники із трьох менших трикутників, які залишилися після першого кроку, і т. д. Після нескінченного повторення цієї процедури, від суцільного трикутника залишається підмножина початкового трикутника — трикутник Серпінського. Цікавим є той факт, що площа фігури, яка залишається на кожному кроці формування трикутника Серпінського, зменшується. Оскільки на кожному кроці відкидаються один з кожних чотирьох трикутників рівних за площею, то після кожного кроку лишається $\frac{3}{4}$ від попередньої площі. Таким чином при $n = 1$ — це $\frac{3}{4}$, $n = 2$ — це $\frac{9}{16}$ а для довільного n — $(\frac{3}{4})^n$. Якщо n спрямувати до нескінченності, то площа фігури, яка залишається, прямує до 0. Таким чином, площа трикутника Серпінського рівна 0.

3. Генерація вибірки точок трикутника Серпінського методом ха-

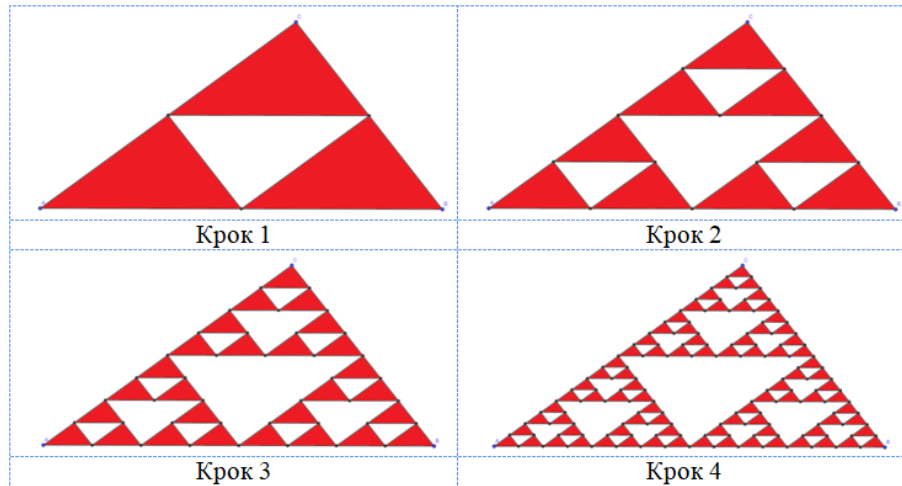


Рис. 2. Побудова трикутника Серпінського.

оса. Нехай (x, y) випадкова точка рівномірно розподілена всередині деякого трикутника ABC . Тобто ймовірність попадання у підмножину цієї множини пропорційна її площі.



Рис. 3. Рівномірний розподіл випадкової величини на першому кроці побудови.

Перемістимо точку (x, y) вдвічі ближче до A або вдвічі ближче до B або вдвічі ближче до C . Тобто для дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, розглянемо

$$(x', y') = f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x+x_A}{2}, \frac{y+y_A}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 0 \\ \left(\frac{x+x_B}{2}, \frac{y+y_B}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 1 \\ \left(\frac{x+x_C}{2}, \frac{y+y_C}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що якщо при кожному зверненні до $f(x, y)$ незалежно генерується δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, то

(x', y') є рівномірно розподіленою випадковою точкою на множині, зображеній на малюнку. Якщо б (x, y) була б рівномірно розподіленою випадковою

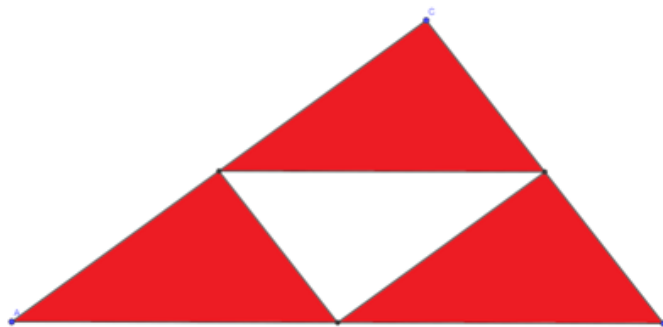


Рис. 4. Рівномірний розподіл випадкової величини на другому кроці побудови.

точкою на останній зображеній множині, то $f(x, y)$ була б рівномірно розподіленою випадковою величиною на такій множині. І так далі. Побудуємо в де-

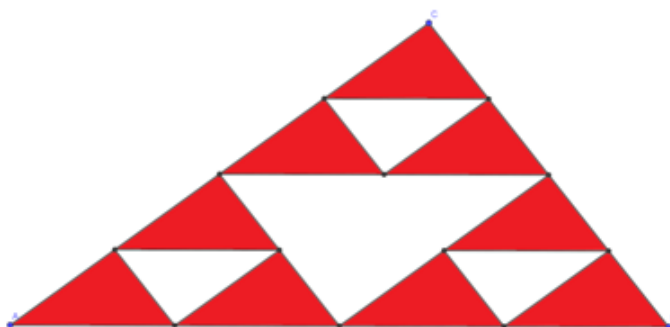


Рис. 5. Рівномірний розподіл випадкової величини на третьому кроці побудови.

якому наближені вибірку з трикутника Серпінського. Можна використати метод хаосу. На початку задамо довільний трикутник і генеруємо вибірку точок $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$, $(i = 1, \dots, k)$ рівномірно розподілену всередині трикутника. Для цього ми поступово вибираємо точки рівномірно розподілені на квадраті, який охоплює даний трикутник і відкидаємо точки, які не попадають в середину трикутника, довівши їх кількість до k . На кожному кроці обчислюємо нову вибірку $(x_i^{(j+1)}, y_i^{(j+1)}) = f(x_i^{(j)}, y_i^{(j)})$, $(i = 1, \dots, k)$ застосовуючи до кожної точки попередньої вибірки функцію f .

Проаналізуємо характеристики утворених вибірок. Дві середні арифметичні одноіменних координат вершин трикутника є, очевидно, координатами точки перетину медіан трикутника. В механічних задачах вважають, що в цій точці зосереджена вся маса фігури, яку називають центром мас. При цьому

обчислення координат центру мас системи матеріальних точок знаходиться за формулою:

$$x_{сер} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$$

та аналогічна формула для y . Тому й далі можна вважати, що в середині зосереджена маса $m_1 + m_2 + \dots + m_k$, але основне — результат обчислення не залежить від порядку заміни системи точок на одну, в якій зосереджена вся маса. А на першому кроці видаляється саме трикутник із тим же центром, що й початковий. Тому центр мас фігури, що отримується на першому кроці такий саме, як на початку та такий саме, як у видаленого трикутника. Якщо розглядати кожен з трьох рівних трикутників, які залишилися на наступному кроці то їх центри не змінюються і на другому кроці. Маси міняються з кроку на крок, але між собою залишаються рівними в межах одного кроку. Тому центр мас системи трьох трикутників, що буде також центром початкового трикутника, не зміниться і на другому кроці. І так далі. Отже, центр фігури, яка лишається на кожному кроці видалення, незмінна.

Запуск коду, що починає з вибірки в $k = 200$ елементів рівномірно розподілених у рівносторонньому трикутнику зі стороною 0,8 з вершинами $(0, 5; 0, 9 - 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 1; 0, 9)$, $(0, 9; 0, 9)$ генерує вибірки поданих характеристик та зображує точки поточної вибірки червоними точками, а всіх попередніх вибірок — жовтими, дає наочний рисунок. Точка перетину медіан трикутника знахо-

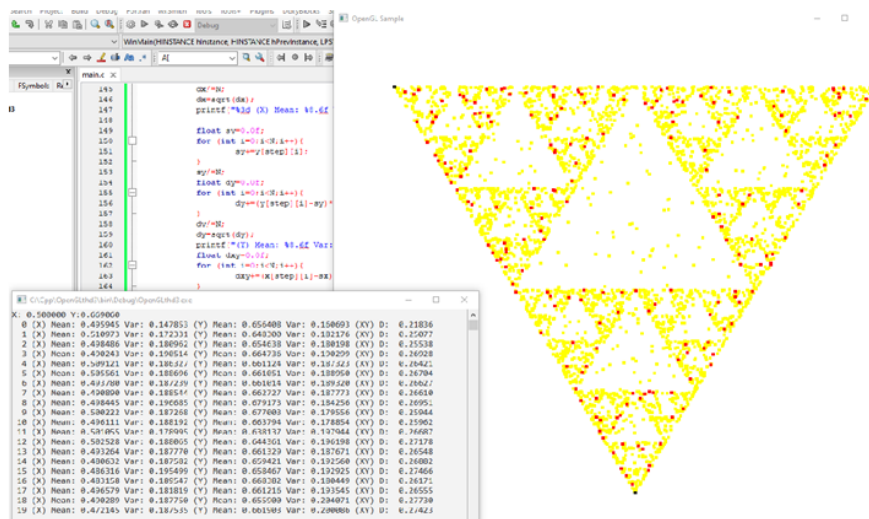


Рис. 6. Генерація вибірки з трикутника Серпінського методом хаоса.

диться, як середнє арифметичне їх відповідних координат $(0, 5; 0, 66906)$ і має відповідати вибіркового середнім x та y на кожному кроці.

Аналіз таблиці показує, що вибірконе середнє x та y , дійсно знаходиться завжди біля 0,5 та 0,66906 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,03, а середньо квадратичне відхилення знаходиться завжди біля 0,18 та 0,19 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,033.

Таблиця 1.

Характеристики вибірки.

I	Вибіркове середнє X	Середньо квадратичне відхилення X	Вибіркове середнє Y	Середньо квадратичне відхилення Y	Середньо квадратичне відхилення
0	0,495945	0,147853	0,656408	0,160693	0,21836
1	0,510973	0,172331	0,648300	0,182176	0,25077
2	0,498486	0,180962	0,654638	0,180198	0,25538
3	0,490243	0,190514	0,664736	0,190299	0,26928
4	0,509121	0,186327	0,661124	0,187323	0,26421
5	0,505561	0,188696	0,661051	0,188950	0,26704
6	0,493780	0,187239	0,661014	0,189320	0,26627
7	0,490890	0,188544	0,662727	0,187773	0,26610
8	0,498445	0,196685	0,679173	0,184256	0,26951
9	0,500222	0,187268	0,677003	0,179556	0,25944
10	0,496111	0,188192	0,663794	0,178854	0,25962
11	0,501055	0,178995	0,638137	0,197944	0,26687
12	0,502528	0,188065	0,644361	0,196198	0,27178
13	0,493264	0,187770	0,661329	0,187671	0,26548
14	0,480632	0,187582	0,659421	0,192560	0,26882
15	0,486316	0,195499	0,658467	0,192925	0,27466
16	0,483158	0,189547	0,668382	0,180449	0,26171
17	0,496579	0,181819	0,661216	0,193545	0,26555
18	0,490289	0,187750	0,655900	0,204071	0,27730
19	0,472145	0,187535	0,661903	0,200086	0,27423

Цікавим є середньо квадратичне відхилення в сукупності обох координат, що обчислюємо за формулою:

$$D_i = \sqrt{\left(x^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2},$$

або

$$D_i = \sqrt{\frac{\left(x_1^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y_1^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2 + \dots + \left(x_k^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y_k^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2}{k}}.$$

Середньо квадратичне відхилення, крім першого значення, знаходиться завжди біля 0,26 відрізняється не більше ніж на 0,018.

4. Генерація вибірки точок деякого фрактала методом хаоса. Нехай (x, y) випадкова точка рівномірно розподілена всередині правильного трикутника ABC . Перемістимо точку (x, y) втричі ближче до прямої AB , залишаючи її на перпендикулярі проведеному до прямої AB (стиск до прямої AB з коефіцієнтом $1/3$). Тоді вона попаде всередину трикутника AMB , де M центр трикутника ABC , а, отже, і точка перетину його медіан. При виборі замість AB

інших прямих: BC або CA , то точка попадає відповідно в трикутники BMC або CMA . Тобто нове положення точки (x, y) може знову бути довільною точкою трикутника ABC (Рис. 7). Тому продовжуючи з коефіцієнтом $1/3$, аналогічно до попередньої побудови трикутника Серпінського, ми не отримаємо фрактал. Зменшимо коефіцієнт до $1/4$. Перемістимо точку (x, y) в чотири рази ближ-

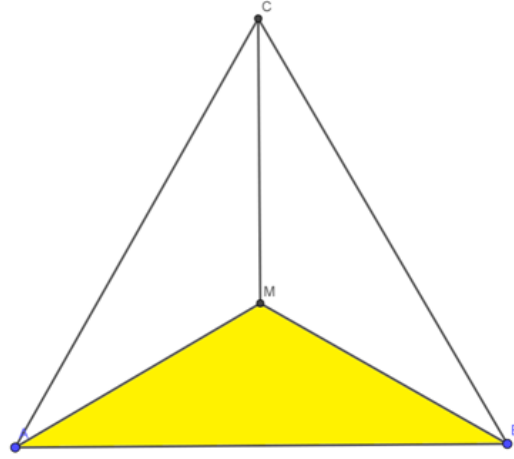


Рис. 7. Ілюстрація стиску до сторони трикутника з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$.

че до прямої AB або в чотири рази ближче до прямої BC або в чотири рази ближче до прямої CA залишаючи її на перпендикулярі проведеному до відповідної прямої. Для реалізації таких стисків нам буде потрібно знайти формули для проекції точки $T(x, y)$ на пряму M_1M_2 , $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (Рис.8). Нехай

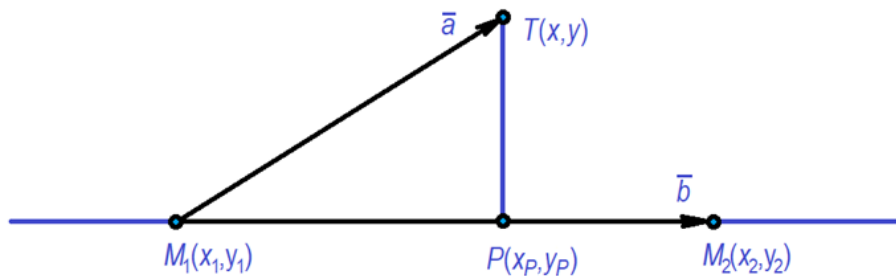


Рис. 8. Ілюстрація стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{4}$.

$\vec{a} = \overline{M_1T} = (x - x_1, y - y_1)$, $\vec{b} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Для проекції P точки T на пряму M_1M_2 одержимо:

$$M_1P = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \overline{M_1P} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b}^2} \cdot \vec{b}.$$

Таким чином $(x_p, y_p) = (x_1, y_1) + \overline{M_1P}$. Для знаходження точки на перпендикулярі TP , що в 4 рази ближча до P ніж T до P шукаємо точку $(\frac{3x_p + x}{4}, \frac{3y_p + y}{4})$, яка в 3 рази ближча до P ніж вона ж до T . Тобто для дискретної рівномірно

розподіленої випадкової величини δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, розглянемо

$$(x', y') = f(x, y) = \left(\frac{3x_P + x}{4}, \frac{3y_P + y}{4} \right),$$

де

$$(x_P, y_P) = f(x, y) = \begin{cases} \text{проекція } (x, y) \text{ на } AB, & \text{якщо } \delta = 0 \\ \text{проекція } (x, y) \text{ на } BC, & \text{якщо } \delta = 1 \\ \text{проекція } (x, y) \text{ на } CA, & \text{якщо } \delta = 2. \end{cases}$$

Запуск коду, що починає з вибірки в $k = 200$ елементів, рівномірно розподілених у рівносторонньому трикутнику зі стороною 0,8 та з вершинами в точках $(0, 5; 0, 9 - 0, 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 1; 0, 9)$, $(0, 9; 0, 9)$ генерує вибірки поданих характеристик та зображує точки поточної вибірки червоними точками, а всіх попередніх вибірок — жовтими, дає наочний рисунок. Проаналізуємо характеристики

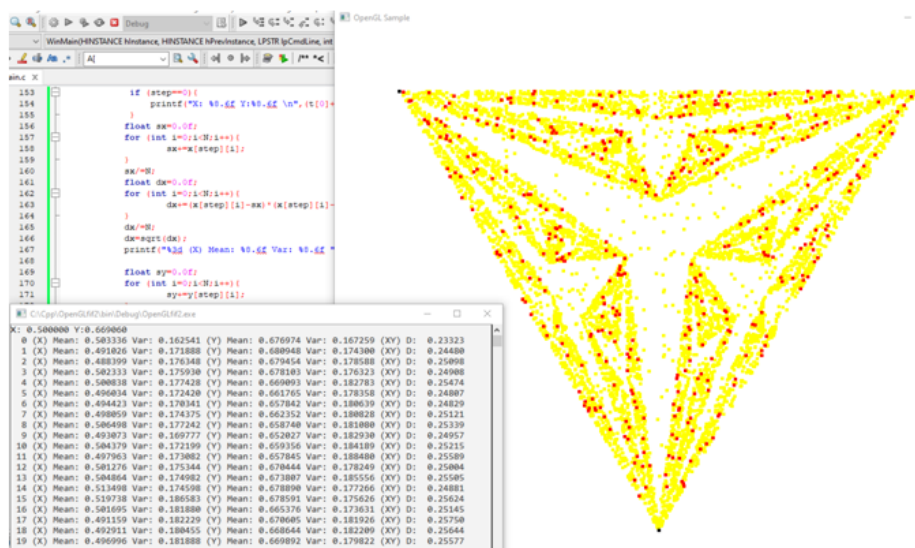


Рис. 9. Генерація вибірок з деякого фрактала методом хаоса.

утворених вибірок. Дві середні арифметичні одноіменних координат вершин трикутника є, очевидно, координатами точки перетину M медіан трикутника, яка є центром трикутника. Трикутник не змінюється при повороті навколо точки M на кут 120° та 240° . Крім того такі повороти мініяють ролями сторони трикутника, що не впливає на розподіл ймовірностей при перетворенні f . Отже, $M(0, 5; 0, 66906)$ залашиться центром мінімальних областей в яких можуть знаходитися точки вибірок на кожному кроці їх формування. Точка перетину медіан трикутника знаходиться, як середнє арифметичне їх відповідних координат. Аналіз таблиці показує, що вибіркове середнє x та y , дійсно знаходиться завжди біля 0,5 та 0,66906 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,02 а середньо квадратичне відхилення знаходяться завжди біля 0,175 та 0,18 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,013.

Середньо квадратичне відхилення крім першого значення знаходиться завжди біля 0,25 та відрізняється не більше ніж на 0,0075. Таким чином, середньо

Таблиця 2.

Характеристики вибірки.

I	Вибіркове середнє X	Середньо квадратичне відхилення X	Вибіркове середнє Y	Середньо квадратичне відхилення Y	Середньо квадратичне відхилення
0	0,503336	0,162541	0,676974	0,167259	0,23323
1	0,491026	0,171888	0,680948	0,174300	0,24480
2	0,488399	0,176348	0,679454	0,178588	0,25098
3	0,502333	0,175930	0,678103	0,176323	0,24908
4	0,500838	0,177428	0,669093	0,182783	0,25474
5	0,496034	0,172420	0,661765	0,178358	0,24807
6	0,494423	0,170341	0,657842	0,180639	0,24829
7	0,498059	0,174375	0,662352	0,180828	0,25121
8	0,506498	0,177242	0,658740	0,181080	0,25339
9	0,493073	0,169777	0,652027	0,182930	0,24957
10	0,504379	0,172199	0,659356	0,184189	0,25215
11	0,497963	0,173082	0,657845	0,188480	0,25589
12	0,501276	0,175344	0,670444	0,178249	0,25004
13	0,504864	0,174982	0,673807	0,185556	0,25505
14	0,513498	0,174598	0,678890	0,177266	0,24881
15	0,519738	0,186583	0,678591	0,175626	0,25624
16	0,501695	0,181880	0,665376	0,173631	0,25145
17	0,491159	0,182229	0,670605	0,181926	0,25750
18	0,492911	0,180455	0,668644	0,182209	0,25644
19	0,496996	0,181888	0,669892	0,179822	0,25577

квадратичне відхилення в сукупності обох координат трохи менше ніж середньо квадратичне відхилення 0,26 вибірок побудованих для трикутника Серпінського з тим же початковим трикутником.

5. Висновки. У роботі побудовано серії вибірок з множин міри 0:

- трикутник Серпінського (одна серія);
- деякий фрактал на площині (одна серія).

Вибіркові середні вибірок трикутника Серпінського майже не відрізняються від точки перетину медіан початкового трикутника. Аналогічно, вибіркові середні вибірок побудованого фрактала не відрізняються від центра початкового правильного трикутника. Для рівних початкових правильних трикутників послідовність середньоквадратичних відхилень вибірок для трикутника Серпінського та побудованого фрактала стабілізується на другому кроці. Для трикутника Серпінського ці значення є трохи більшими.

Таким чином, проведені експерименти засвідчують наявність чіткої тенденції: вибіркові середні для множин міри нуль, побудованих на основі правильних трикутників, відображають геометричні центри вихідних фігур, а дисперсійні характеристики стабілізуються вже на початкових етапах побудови.

Список використаної літератури

1. Slyvka-Tylyshchak, H. I., Madi, M. V., & Tylyshchak, M. O. (2025). Construction of a sample from a measure-zero set and its characteristics. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics*, 46(1), 104–108. [in Ukrainian].
2. Sierpinski, W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris*, 160, 302–305.
3. Bevz, V. H. (2006). *History of Mathematics*. Kharkiv: Osnova [in Ukrainian].
4. Turchyn, V. M. (1999). *Mathematical Statistics*. Kyiv: Akademiia [in Ukrainian].

Slyvka-Tylyshchak G. I., Liba O. M., Tylyshchak M. O. Construction of samples from a measure-zero set in the plane and their numerical characteristics.

The study is devoted to the investigation of methods for constructing samples from sets of measure zero in the plane. Two series of such samples were generated: one corresponding to the Sierpiński triangle and the other to a specially constructed fractal set in the plane.

Analysis of the sample characteristics showed that the sample means obtained from the Sierpiński triangle are almost identical to the intersection point of the medians of the original triangle. A similar pattern was observed for the constructed fractal: the sample means are located near the centroid of the initial equilateral triangle on which the fractal construction was based. Additionally, the dynamics of the mean square deviations of the samples were examined. It was found that, for equal initial equilateral triangles, the sequence of these deviations stabilizes already at the second iteration step, both for the Sierpiński triangle and for the constructed fractal. At the same time, the values for the Sierpiński triangle are slightly larger than those for the other fractal set.

Keywords: measure-zero sets, Sierpiński triangle, fractal in the plane, numerical characteristics of a sample.

Одержано 16.08.2025