

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).118-125](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).118-125)**С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², Ю. Ю. Млавець³**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
nayaretska@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ

У статті представлено чисельний розв'язок контактної задачі для двох пружних півпросторів з початковими напруженнями та попередньо напруженого кільцевого штампа без врахування сил тертя. Вважаємо, що поверхні поза межею контакту попередньо напружених кільцевого штампа та півпросторів залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Математичну модель та її дослідження представлено у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. З певним ступенем точності, припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружних півпросторів однорідні та рівні. Вважаємо, що контакт пружних тіл з початковими напруженнями знаходиться в умовах просторової деформації. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами. Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану півпросторів. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У результаті, проведено чисельні розрахунки та знайдено методом утинання розв'язки нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь, через які виражаються компоненти переміщення та напруження у контактуючих тілах. Побудовані графіки у випадку гармонічного потенціалу для нормальних контактних напружень та радіальних переміщень у кільцевому циліндрі та півпросторах у безрозмірних координатах. Графік зв'язку між осіданням та рівнодіючою навантаження має дискретний характер, враховуючи складність обчислень. Отже, за допомогою отриманих числових результатів можна вивчити вплив початкових напружень на розподіл контактних напружень та переміщень у двох пружних півпросторах і пружному кільцевому штампі.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір, інтегральні рівняння.

1. Вступ. Числовий аналіз задач сучасної контактної механіки є важливим аспектом дослідження та розв'язку проблем механіки твердого деформованого тіла з урахуванням початкових напружень.

Залучення додаткових сил, таких як залишкові чи початкові напруження, суттєво ускладнює математичне моделювання задач взаємодії пружних тіл, які перебувають у контакті. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває розвиток цього наукового напрямку із застосуванням методів математичного аналізу та інструментів комп'ютерного моделювання та чисельних методів.

Практична значущість досліджуваних задач обумовлена тим, що залишкові (технологічні) напруження справляють істотний вплив на високі об'єкти — наприклад, димові труби, водонапірні башти, градирні, — особливо в тих випадках, коли ґрунтова основа або перекриття моделюються у вигляді пружного півпростору чи шару. Крім того, цей вплив необхідно враховувати при проектуванні деталей машин, конструкцій і механізмів, які широко використовуються в промисловості та суміжних сферах діяльності.

Початкові (залишкові або технологічні) напруження можуть бути наслідком різних факторів, серед яких: вітрові навантаження на споруди; навантаження від власної маси конструкцій; технологічні процеси виробництва матеріалів; попередня обробка матеріалів або елементів конструкцій; етапи монтажу конструкцій; геостатичні та геодинамічні впливи земної кори; деформації, викликані мерзлими ґрунтами; розвантаження пластичних тіл; процеси, що відбуваються у кровоносних судинах біологічних організмів, а також інші аналогічні ситуації.

Із метою зменшення контактних напружень, які виникають у процесі експлуатації конструктивних елементів, доцільно в окремих випадках спеціально створювати початкові напруження. Це дозволяє підвищити міцність як матеріалів, так і конструкцій загалом. Згідно з результатами, поданими у [1], встановлено, що при наявності стискаючих або розтягуючих початкових напружень поведінка контактних напружень і переміщень істотно змінюється у кількісному вимірі.

Актуальність дослідження впливу початкових напружень на тіла, які перебувають у стані контакту, підтверджується широким спектром наукових галузей, до яких належать: механіка композитних матеріалів, механіка матеріалів і конструктивних елементів, методи неруйнівного контролю навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика тощо. Отже, дослідження контактної взаємодії тіл з урахуванням початкових напружень є важливою складовою комплексного вивчення зазначених наукових проблем.

Аналізуючи наукові напрацювання у галузі контактної механіки, слід зазначити, що моделі, які враховують складну фізичну та механічну природу тіл, розглядалися у працях [2–5]. Загалом, для дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл необхідним є застосування нелінійної теорії пружності [4–6]. Водночас, якщо величина початкових напружень є достатньо значною, доцільно обмежитися використанням її лінеаризованого варіанту.

Однією з перших публікацій, в якій було запропоновано розв'язання задачі для колової тріщини у пружному нестисливому тілі за наявності початкових напружень і для конкретного типу пружного потенціалу, є робота [10]. Подальші дослідження, в яких задачі контактної взаємодії розв'язувалися для заданих форм потенціалу, подані у працях [11]. У цих дослідженнях одні й ті самі задачі

взаємодії попередньо напружених тіл аналізувалися різними авторами — кожен з використанням певного типу потенціалу. Такий підхід, на жаль, не сприяє уніфікації та спрощенню загального процесу розв'язання контактних задач.

З огляду на це, автори вважають більш ефективним підхід, що передбачає розв'язання задачі контактної взаємодії у загальному вигляді — як для стисливих, так і для нестисливих тіл, при довільній структурі пружного потенціалу. До таких фундаментальних робіт можна віднести праці [1, 2–5, 7–9, 12], які суттєво розвивають цей напрям досліджень.

Запропонований метод базується на використанні теорії потенціалу — для просторових контактних задач. Такий підхід надає можливість формулювати та розв'язувати контактні задачі в єдиній загальній постановці, як для стисливих, так і для нестисливих тіл, без обмеження на конкретну структуру пружного потенціалу. При цьому числові результати для конкретних варіантів потенціалу одержують уже на завершальному етапі розв'язання. Основні припущення, що лежать в основі лінеаризованої теорії пружності та запропонованого підходу, наведено у праці [12].

Враховуючи вище сказане, дослідження контактної задачі для двох попередньо напружених півпросторів, які тиснуть на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями було представлено в аналітичному та чисельному варіантах. Аналітичний розв'язок опублікований у [13]. А чисельний розв'язок — представимо у даній статті.

Дослідження контактної взаємодії двох попередньо напружених півпросторів та кільцевого штампу виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності без врахування сил тертя [13]. Задача сформульована у вигляді розв'язку потрійних інтегральних рівнянь, що зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки задача є вісесиметричною, то ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Для аналітичного розв'язку в [13] була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у подвійну суму добутків гіпергеометричної функції на функцію Бесселя. Це дозволило звести задачу до функціонального рівняння. Це рівняння пов'язує переміщення штампа з невідомими коефіцієнтами розподілу контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведене до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дану систему розв'язуємо методом редукції (утинання) [14]. При дії навантаження на кільцевий циліндр розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді ряду добутків приєднаних функцій Лежандра з вагою, що відповідає особливостям у контактних напруженнях на межах штампів.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного кільцевого штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однакові. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [15].

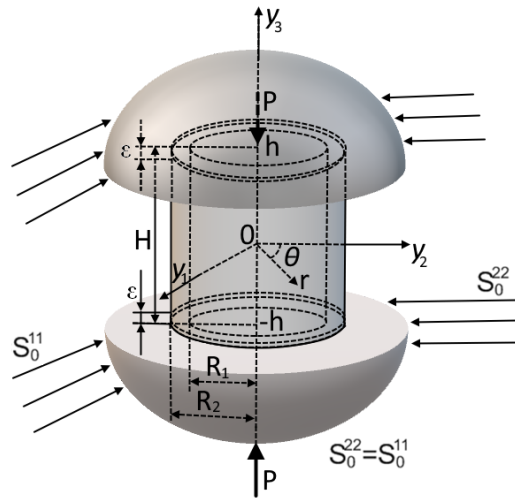


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями.

2. Постановка задачі. Нехай пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки ненавантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним кільцевим штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R_1 та R_2 — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кільцевого штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1. величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні розглядаємо пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. Причому, пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [8]. Крім того, дія штампа викликає у півпросторах мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану Oy_i , які пов'язані з лагранжевими координатами (початкового стану) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

Припускаємо, що початкові стани півпросторів і штампа є однорідними та рівними й для них виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i \quad (i, m = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

де δ_{mi} — символ Кронекера.

Всі величини, що відносяться до верхнього, нижнього півпросторів будемо позначати верхнім індексом (1) та (2) відповідно, а величини, що відносяться до кільцевого штампа — верхнім індексом (3).

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1}y_3$; $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i = 1, 2$); $n_1 = \xi_2^2$; $n_2 = \xi_3^2$ такієї постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного кільцевого штампа в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{33}^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad U_3^{(i)} - U_3^{(3)} = \varepsilon \quad (R_1 \leq r \leq R_2); \quad (3)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad U_3^{(i)} = 0 \quad (r > R_2, 0 < r < R_1) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4)$$

3) на боковій поверхні пружного штампа $r = R_1, r = R_2$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0; \quad Q_{3r}^{(3)} = 0 \quad (|z_i| \leq h/v_i), \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження P , має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(3)}| = |Q_{3r}^{(3)}|_{z_i = \pm \frac{h}{v_1}} \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Умова (6) завершує постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного кільцевого циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Основні співвідношення та метод розв'язання даної контактної задачі детально описаний у статті [13]. Розглянемо чисельні результати розв'язання задачі.

3. Числові результати. В статті проведений числовий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{\alpha}_k T_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} T_n = \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

де $\tilde{\beta}_k$, $\tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\alpha}_{kn}$ — коефіцієнти, що залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу, радіусів кільцевого штампа та висоти пружного штампа [13].

Система (7) розв'язана методом редукції (утинання) та побудовані графіки (рис. 2–3) у випадку гармонічного потенціалу при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 1, R_2 = 2, H = 10, \varepsilon = 10^{-3}, E^{(i)} = 5 \cdot 10^{-2}$ ГПа (гума) ($i = 1, 2, 3$), $\lambda_1 = 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$.

Нормальні контактні напруження та радіальні переміщення у кільцевому циліндрі представлені на рис. 2, рис. 3 у безрозмірних координатах при $\rho = \frac{r-R_1}{R_2-R_1}, 0 \leq \rho \leq 1$. Тут $\rho = 0$ при $r = R_1$, а $\rho = 1$, при $r = R_2$.

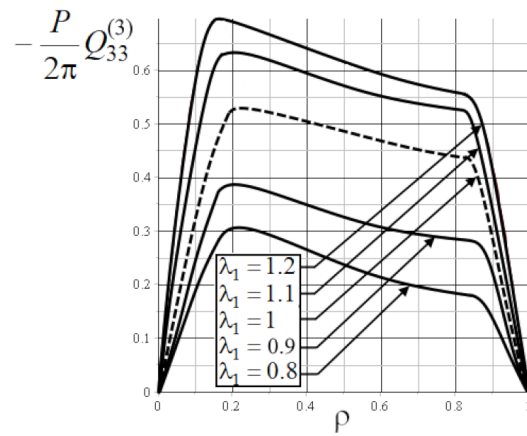


Рис. 2. Нормальні контактні напруження у кільцевому циліндричному штампі.

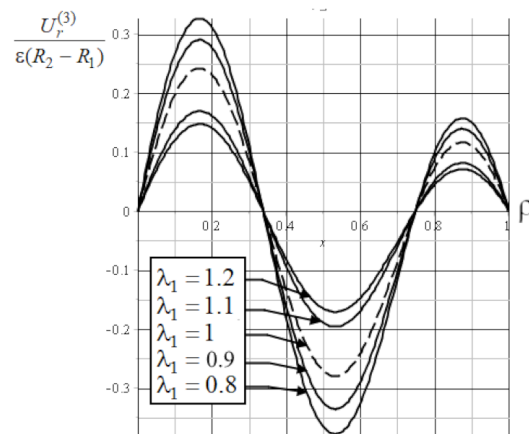


Рис. 3. Радіальні напруження у штампі в області контакту.

З рис. 2 видно, що контактні напруження у штампі приймають найбільші свої значення по абсолютній величині ближче до внутрішніх твірних кільцевого циліндра, ніж до зовнішніх. Причому при розтягу контактні напруження більші ніж при стиску.

З рис. 3 видно, що піки радіальних переміщень $\frac{U_r^{(3)}}{\varepsilon(R_2-R_1)}$ у штампі в області контакту затухають ближче до зовнішніх твірних кільцевого циліндра. Причому при стиску радіальні переміщення більші по абсолютній величині, ніж при розтягу.

Використавши умову рівноваги (6), зв'язок між осіданням та рівнодією навантаження

$$P = 4\pi\varepsilon C_{44}(1 + m_2)l_2(R_1^2 - R_2^2)\tilde{A}_0T_0.$$

Представимо у вигляді графіка (рис. 4) дискретним чином, залежно від коефіцієнта видовження λ_1 .

На рис. 4 видно, що при стиску на одну й ту саму величину, необхідно застосувати більшу за абсолютною величиною силу, ніж при розтягу. Також, чим ближче коефіцієнт видовження λ_1 до свого критичного значення, тим більшу силу по абсолютній величині потрібно прикладати.

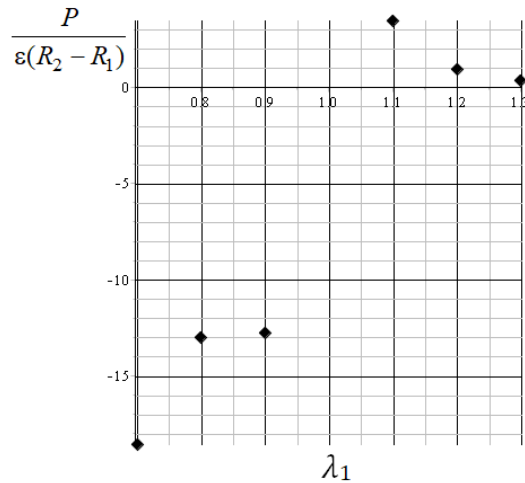


Рис. 4. Залежність сили $\frac{P}{\varepsilon(R_2 - R_1)}$ від коефіцієнта видовження λ_1 .

4. Висновок. В розглянутій задачі було зроблене припущення, що додаткове зовнішнє навантаження (по відношенню до початкового стану) викликає у попередньо напружених тілах значно менше збурення напружено-деформованого стану порівняно із відповідними величинами початкового напруженого стану. Але в околі точок зміни граничних умов це припущення може порушуватись. Це явище обговорено у працях [1, 16].

Також, коректність використання методу редукції (утинання) при розв'язку нескінченної алгебраїчної системи (7) пояснюється тим, що в дослідженні [1] доведено, що спосіб використання ортогональних многочленів [13] веде до квазірегулярних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Отже, враховуючи проведене числове та аналітичне [13] дослідження задачі, можна зробити висновок про те, що запропонований розв'язок контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями можна використовувати для розрахунку фундаментів (грунтових основ) або перекриттів з підшвами кільцевої форми.

Список використаної літератури

1. Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2006). *Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses*. Khmelnytskyi: vyd. PP Melnyk.
2. Altenbach, H., Bogdanov, V., Bulat, A., Guz, A., & Nazarenko, V. (2023). A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine: *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
3. Guz, A. N., Bogdanov, V. L., & Nazarenko, V. M. (2020). Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. *Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. Advanced Structured Materials*. (Vol. 138). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
4. Guz, A. N. (2021). *Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics*. Springer: Cham.
5. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph "Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics". *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29.
6. Hutchinson, J. W., & Thompson, J. M. T. (2017). Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. *Journal of Applied Mechanics*, 84(6), 061001. <https://doi.org/10.1115/1.4036355>
7. Guz, A. N., Babych, S. Iu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for an elastic foundation*

- with initial stresses*. Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing.
8. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 38(1), 23–59. <https://doi.org/10.1023/A:1015379824503>
 9. Guz, A. N., & Guz, I. A. (2004). Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions. *International Applied Mechanics*, 40(1), 1–29. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000023808.08859.48>
 10. Kurashige, M. (1969). Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*, 49(8), 671–678.
 11. Dhaliwal, R. S., Singh, B. M., & Rokne, J. G. (1980). Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.*, 18(1), 169–179.
 12. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences* : Collective monograph. Riga, Latvia: “Baltija Publishing”, 261–295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
 13. Babich, S. Yu., Yaretska, N. O., Lazar, V. F., & Mlavets, Yu. Yu. (2024). Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 45(2), 126–138. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).126-138](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).126-138) [in Ukrainian].
 14. Bobyk, O. I., Bobyk, I. O., & Lytvyn, V. V. (2010). *Equations of mathematical physics*. Lviv: «Novyi svit-2000» [in Ukrainian].
 15. Hrylytskiy, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity and thermoelasticity*. Lviv: Vyshcha shk. [in Ukrainian].
 16. Guz, O. M., Babich, S. Yu., & Rudnytskyi, V. B. (1995). *Contact interaction of elastic bodies with initial stresses: Textbook*. Kyiv: Higher School [in Ukrainian].

Babich S. Yu., Yaretska N. O., Mlavets Yu. Yu. Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp.

The article presents a numerical solution of the contact problem for two elastic half-spaces with initial stresses and a prestressed annular die without taking into account friction forces. We assume that the surfaces outside the contact boundary of the prestressed annular die and half-spaces remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary of displacement and stress are continuous. The problem is solved in the case of equal roots of the determining equation. The mathematical model and its study are presented in a general form for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. With a certain degree of accuracy, it is assumed that the initial states of the elastic annular die and elastic half-spaces are homogeneous and equal. We assume that the contact of elastic bodies with initial stresses is under conditions of spatial deformation. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates. In addition, the effect of the ring stamp causes small perturbations of the corresponding values of the main stress-strain state of the half-spaces. It is also assumed that the elastic ring stamp and the elastic half-spaces are made of various isotropic, transversely-isotropic or composite materials. As a result, numerical calculations were carried out and the solution of an infinite quasi-regular system of algebraic equations was found by the truncation method, through which the components of displacement and stress in the contacting bodies are expressed. Graphs were constructed in the case of a harmonic potential for normal contact stresses and radial displacements in the ring cylinder and half-spaces in dimensionless coordinates. The graph of the relationship between settlement and resultant load is discrete, taking into account the complexity of the calculations. Therefore, using the obtained numerical results, it is possible to study the influence of initial stresses on the distribution of contact stresses and displacements in two elastic half-spaces and an elastic ring die.

Keywords: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, ring stamp, half-space, integral equations, numerical methods, graph.

Одержано 28.07.2025