НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

випуск № 2 (37)

2020

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (37)

Ужгород 2020

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. Вип. №2 (37). 188 с.
DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 7 від 27 жовтня 2020 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.). Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)
Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (37)

Uzhhorod 2020

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2020. Issue 2 (37). 188 p.
DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 7 dated by October 27.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by March 17, 2020). Category: ”B”. Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)
Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

КОЗАЧЕНКО ЮРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ — ДО 80-ТИ РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ

1. Вступ. Постать професора Київського національного університету ім. Тараса Шевченка Юрія Васильовича Козаченка (01.12.1940–05.05.2020) не буде обділена увагою дослідників історії математики. Йому будуть присвячені змістовні наукові статті, монографії, проаналізовані різні аспекти його науково-педагогічної творчості. Науково-педагогічна та організаційна діяльність професора Ю.В. Козаченка має великий вплив на розвиток математичної освіти та наукових досліджень в Україні. Благотворний вплив математичної творчості професора Ю.В. Козаченка відчули студенти та викладачі математичного факультету Ужгородського національного університету під час лекційних та семінарських занять, на яких він щедро ділився своїми багатими математичними ідеями.

2. Життєвий шлях Юрія Васильовича Козаченка. Юрій Васильович Козаченко був відомим та авторитетним фахівцем у галузі теорії і моделювання випадкових процесів у функціональних просторах, одним із творців теорії субгауссових випадкових процесів та процесів із просторів Орліча. Він створив новий науковий напрямок — моделювання випадкових процесів у різних функціональних просторах із заданою точністю та надійністю. Професор Козаченко Ю.В. отримав також вагомі наукові результати у дослідженні аналітичних властивостей випадкових процесів, рівнянь математичної фізики із випадковими умовами, статистиці випадкових процесів, вейвлет-аналізі.

Юрій Васильович Козаченко народився в 1940 році у місті Києві. Освіту здобув у Київському державному університеті імені Тараса Шевченка, який закінчив 1963 року за спеціальністю теорія ймовірностей та математична статистика. У 1968 році в Інституті математики АН УРСР, під керівництвом Михайла Йосиповича Ядренка, захистив кандидатську дисертацію «Про рівномірну збіжність стохастичних інтегралів, рядів і властивості неперервних випадкових полів». З 1967 року до останнього дня життя працював в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики, яка з 2009 році стає кафедрою теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики. Протягом 1974–1975 років працював в Інституті нафти та газу м. Бумердес, Алжир. Протягом 1988–2003 років він очолював кафедру теорії ймовірностей та математичної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У 1985 році Юрій Васильович захистив докторську дисертацію «Випадкові процеси у просторах Орліча. Властивості траєкторій, збіжність рядів та інтегралів».

Основні напрямки наукової діяльності Козаченка Юрія Васильовича:

- аналітичні властивості випадкових процесів. Оцінка розподілів функціоналів від випадкових процесів;
- випадкові процеси в просторах Орліча;
- передгаусівські та субгаусівські випадкові процеси;
- рівняння математичної фізики гіперболічного та параболічного типів математичної фізики з випадковими факторами;
- моделювання випадкових процесів;
- вейвлет-розклади випадкових процесів.

Ю.В. Козаченко є автором понад 300 наукових праць, низки навчальних посібників та 13 монографій [1–13], включаючи монографію «Метрические характеристики случайных величин и процессов» (1998, спільно з Булдигіним В.В.), яку перекладено в США Американським математичним товариством у 2000 р.

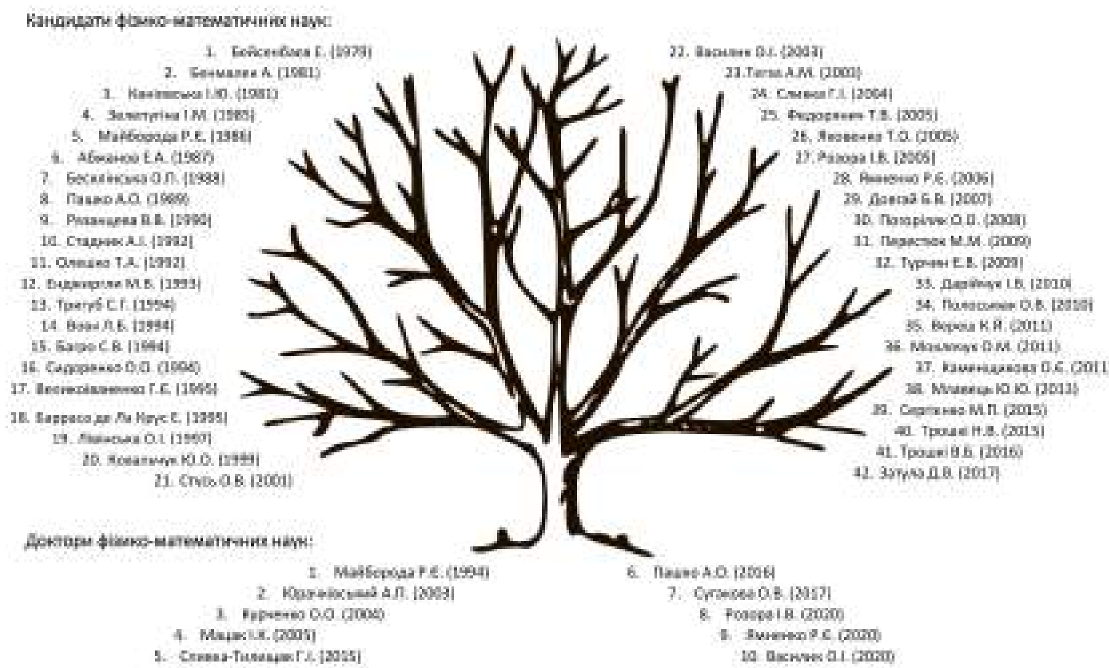

Рис. 1. Дерево наукових учнів Юрія Васильовича Козаченка (1940–2020)

Як науковий керівник та консультант Юрій Васильович підготував 42 кандидатські та 10 докторських дисертацій (див. рис. 1). Його учні продовжують активну наукову діяльність у провідних університетах та установах світу. Професор Ю.В. Козаченко підтримував численні міжнародні зв'язки з відомими науковцями Австралії, Великобританії, Канади, США, Італії, Фінляндії, Швеції та ін. Його багато разів запрошували для участі у міжнародних наукових програмах та проектах.

Наукові досягнення Юрія Васильовича неодноразово були відзначені нагородами:

- Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, 2003.
- Грамота Міністерства освіти і науки України, 2007.
- Заслужений діяч науки і техніки України, 2010.
- Лауреат премії НАН України імені М. М. Крилова за цикл праць «Фрактальні та апроксимаційні схеми в теорії випадкових процесів та їхні застосування» (у співавторстві), 2012.
- Орден «За заслуги» III ступеня, 2018.

Ю.В. Козаченко вів активну наукову, організаційну, педагогічну і громадську діяльність: він був заступником голови спеціалізованої вченої ради механіко-математичного факультету, членом Експертної ради Міністерства освіти і науки України, членом редколегій 7 наукових журналів, зокрема заступником головного редактора наукового журналу «Теорія ймовірностей та математична статистика».

Всі, хто спілкувався та співпрацював з Юрієм Васильовичем, бачили доброзичливу, щиру та глибоко порядну, авторитетну Людину з великої літери.

3. Юрій Васильович Козаченко в Ужгородському національному університеті. Юрій Васильович Козаченко протягом 2000–2015 рр. працював за сумісництвом на 0,25 штатної одиниці на посаді професора кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Ужгородського національного університету. Це був період плідної наукової та педагогічної роботи Ю.В. Козаченка з студентами IV–V курсів математичного факультету УжНУ, що спеціалізувалися з теорії ймовірностей та математичної статистики, а також з молодими викладачами кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу в межах кафедральної наукової теми «Аналіз і стохастика теорії випадкових процесів і випадкових полів». Результатом цієї роботи була підготовка студентів до навчання в аспірантурі зі спеціальності «Теорія ймовірностей і математична статистика». Так, випускники математичного факультету УжНУ Тегза (Мигалега) А.М., Сливка-Тилищак Г.І., Гудивок (Федорянич) Т.В., Кучінка (Вереш) К.Й., Погоріляк О.О., Млавець Ю.Ю., Трошкі (Федорянич) Н.В., Трошкі В.Б., які працювали над своїми науковими темами під керівництвом Ю.В. Козаченка успішно захистили свої кандидатські дисертації у визначений термін і продовжують далі розвивати наукові дослідження з теорії випадкових процесів та полів і їх застосувань в різних галузях сучасної науки. Яскравим підтвердженням цього є підготовка і успішно захищена 2 червня 2015 року докторська дисертація Сливки-Тилищак Г.І. «Задачі математичної фізики з випадковими факторами», яка є продовженням дослідження, що були в кандидатській дисертації «Крайові задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами» захищеної 14 червня 2004 року.

Неоцінима робота Ю.В. Козаченка по підготовці наукових монографій [6, 8–12] співавторами яких є не лише науковці-математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Довгай Б.В., Розора І.В., Моклячук О.М., але й викладачі математичного факультету УжНУ Сливка-Тилищак Г.І., Погоріляк О.О., Тегза А.М., Гудивок Т.В., Млавець Ю.Ю., Трошкі В.Б., Трошкі Н.В.

Останнім часом теорія випадкових процесів знаходить нові галузі застосувань в природничих науках, в радіотехніці, електроніці, оптиці, фінансовій математиці і т.д. При цьому виникають актуальні задачі побудови математичних моделей, дослідження їх властивостей, а також знаходження точності та надійності побудованих моделей. Під науковим керівництвом Ю.В. Козаченка, Тегза А.М., будучи в аспірантурі, вивчає проблему обґрунтування оцінок точності та надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів. В роботах А.М. Тегзи досліджувалися надійність та точність моделі гауссового процесу в різних функціональних просторах, зокрема в $C([0,\ T])$, $L_p[0,\ T]), p > 1$, та деяких просторах Орліча [14–16].

Заслуговують на увагу дослідження проведені Сливкою-Тилищак Г.І. з рівнянь математичної фізики гіперболічного та параболічного типів з випадковими факторами. Предметом дослідження є основні властивості розв'язків, в тому числі і узагальнених, задач гіперболічного та параболічного типів з випадковими факторами та моделювання наближень цих розв'язків із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці, а також знаходження оцінок розподілу супремуму деяких класів випадкових полів [17–25].

Основними науковими результатами досліджень є такі:

- Досліджено крайові задачі гіперболічного типу математичної фізики з випадковими початковими умовами. Для таких задач, знайдені достатні умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку, узагальненого розв'язку та одержано оцінки для розподілу супремуму розв'язку даної задачі, коли початкові умови є випадкові процеси з простору Орліча. Вперше знайдені умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку в термінах кореляційних функцій.
- Запропоновано новий метод моделювання розв'язків задач гіперболічного типу математичної фізики з випадковими початковими умовами. Побудовано моделі розв'язків рівняннь гіперболічного типу математичної фізики з строго субгауссовими випадковими початковими умовами.
- Знайдено оцінки для розподілу супремуму випадкових полів з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ і простору Орліча в нескінченній області, а також для випадкових полів з простору $L_p(\Omega)$. Швидкість росту випадкових полів в нескінченній області раніше не досліджувалися. Розглянуто приклад застосування отриманих оцінок до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики.
- Вперше знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ та з простору Орліча.
- Досліджено оцінки для розподілу супремуму розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ (на компакті і в нескінченній області) і коли права частина є випадковим полем з простору Орліча.

Вивченням критеріїв для перевірки гіпотез про вигляд кореляційної функції гауссових випадкових процесів та полів займалася аспірантка Ю.В. Козаченка Федорянич (Гудивок) Т.В. [26–28].

Розвитку теорії моделювання просторово-точкових випадкових процесів, деякі характеристики яких породжуються гауссовими процесами чи полями, а також розширюють коло теоретичних та практичних застосувань даної теорії до задач стохастичної геометрії, фінансової математики, теорії масового обслуговування була присвячена робота аспіранта Погоріляка О.О. [29–31].

Об'єктом досліджень Вереш (Кучінка) К.Й. було застосування теорії випадкових процесів із простору Орліча випадкових величин до дослідження диференціальних рівнянь в частинних похідних з випадковими факторами. В даних дослідженнях було обґрунтовано застосування методу Ф'урє до задач математичної фізики для однорідного параболічного рівняння з випадковими початковими умовами із просторів Орліча випадкових величин, а також до параболічного рівняння з випадковою правою частиною з простору Орліча випадкових величин та нульовими початковими та крайовими умовами. Досліджені оцінки розподілу супремуму розв'язків однорідного рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча випадкових величин та неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною. Встановлено достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку та узагальненого розв'язку для однорідного гіперболічного рівняння математичної фізики у багатовимірному випадку з випадковими початковими умовами [32–34].

Простори випадкових величин з моментними нормами $F_\psi(\Omega)$ та випадкових процесів з цих просторів були об'єктом дослідження аспіранта Млавця Ю.Ю. Основними науковими результатами, одержаними в його працях є такі:

- досліджено основні властивості просторів $F_\psi(\Omega)$ та знайдено умови, за яких для незалежних центрованих випадкових величин із цих просторів виконується умова H;
- знайдені оцінки розподілів супремумів випадкових процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$ на компакті;
- умови вибіркової неперервності цих процесів з імовірністю одиниця;
- знайдені оцінки розподілу супремуму на R випадкових процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$ та умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів процесів з простору $F_\psi(\Omega)$;
- встановлено зв'язок між просторами Орліча експоненціального типу та просторами $F_\psi(\Omega)$ та умови, за яких до просторів Орліча експоненціального типу виконується умова H;
- отримані оцінки розподілів норм в просторі $L_p(T)$ випадкових процесів з просторів $F_\psi(\Omega)$.

З використанням теорії просторів Орліча та $F_\psi(\Omega)$ знайдено надійність та точність підрахунку інтегралів методом Монте-Карло, надійність та точність в $C(T)$ та $L_p(T)$ підрахунку інтегралів залежних від параметра методом Монте-Карло [35–37].

Метою і завданням дослідження аспірантки Трошки (Федорянич) Н.В. є розробка теоретичних основ побудови методів моделювання випадкових процесів та полів, побудова моделей, що наближають випадкові процеси та поля із заданою надійністю та точністю в просторах $C(T)$ та $L_p(T)$. Зокрема, розв'язані такі задачі: побудовані моделі гауссових нестаціонарних випадкових процесів та полів за допомогою методу розбиття та рандомізації спектру та моделі одноріідного та ізотропного випадкового поля з дослідженою точністю та надійністю в $C(T)$; отримані умови збіжносьті моделей деяких дробових випадкових процесів з ймовірністю в просторі $C(T)$; досліджені точності та надійності побудованих моделей гауссових нестаціонарних процесів та полів в $L_p(T)$; побудовано моделі однорідного та ізотропного поля із заданою надійністю та точністю в просторі $L_p(T)$ [38, 39].

Основними результатами аспіранта Трошкі В.Б., що виносилися на захист кандидатської дисертації є такі [40–42]:

- досліджено основні властивості повного класу випадкових величин, а саме класу квадратично φ-субгауссових випадкових величин;
- знайдено достатні умови того, що випадкова величина належить класу квадратично φ-субгауссових випадкових величин; отримано оцінки для експоненціальних моментів квадратично φ-субгауссових випадкових величин;
- отримано нові оцінки розподілів норм просторі $L_p(T)$, $p \geq 1$ для випадкових процесів з просторів квадратично гауссових випадкових величин;
- з використанням розробленої теорії побудовано нові матриці вимірювань та встановлено, що ці матриці задовільняють властивість обмеженої ізометрії;
- на основі отриманих нових оцінок побудовано схему фільтрації шумів «хвости» розподілів яких «легші» («важчі») за гауссові;
- запропоновано нові критерії для перевірки гіпотез про вигляд коваріаційних функцій гауссових стаціонапрних, нестаціонарних процесів та однорідних і ізотропних випадкових полів.

Результати досліджень Трошкі В.Б. мають не лише теоретичне, а і практичне застосування в багатьох природничих, соціальних та економічних науках, зокрема в фінансовій математиці, інформатиці, геофізиці, геології, радіотехніці, асторономічних дослідженнях та в теорії кодування інформації.

До наукових досліджень з теорії випадкових процесів і теорії випадкових полів була залучена і викладач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу Дзямко В.Й. У її спільних роботах з Козаченком Ю.В. було побудовано модель випадкових процесів з простору Орліча, що наближають ці процеси із заданою надійністю та точністю в нормах простору $L_p(T)$. Також побудовано модель лінійного ізотропного поля з простору Орліча $L_u(\Omega)$, причому ці моделі наближають ізотропні поля на сфері із заданою надійністю та точністю в нормах простору $L_p(S_d)$. Досліджувалися умови та швидкість рівномірної збіжності зображень φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді тригонометричних рядів. Отримано умови існування φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів та апроксимація таких процесів у просторі $L_2([0;\pi],\ \mu)$ [43–45].

Список використаної літератури

1. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. Київ: ТВіМС, 1998. 290 с.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Моделювання випадкових процесів. Київ: ВПЦ «Київський університет», 1999. 223 с.
3. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. 257 p.
4. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів і полів. Київ: Задруга, 2007. 230 с.

5. Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ-субгауссові випадкові процеси: монографія. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2008. 231 с.
6. Довгай Б. В., Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами: монографія. К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. 173 с.
7. Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. Випадкові процеси з просторів Орліча. Чернівці: Видавництво «Золоті литаври», 2011. 212 с.
8. Козаченко Ю. В., Погоріляк О. О., Тегза А. М. Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса. Ужгород: «Карпати», 2012. 194 с.
9. Козаченко Ю. В., Млавець Ю. Ю., Моклячук О. М. Квазібанахові простори випадкових величин. Ужгород: «Карпати», 2015. 212 с.
10. Kozachenko Y., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A. Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, 2016. 346 p.
11. Kozachenko Y. V., Hudyvok T. V., Troshki V. B., Troshki N.V. Estimation of covariance functions of gaussian stochastic fields and their Simulation. Uzhhorod: «Shark», 2017. 232 p.
12. Козаченко Ю. В., Кучінка К. Й., Сливка-Тилищак Г. І. Випадкові процеси в задачах математичної фізики. Монографія. Ужгород: Вид-во ТОВ «РІК-У», 2017. 256 с.
13. Козаченко Ю. В., Курченко О. О., Синявська О. О. Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування: Монографія. Ужгород: «Шарк», 2018. 228 с.
14. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu. V., Tegza A. M. Accuracy of simulation in L_p of Gaussian random processes. *Bulletin of the University of Kiev, Series: Physics & Mathem.* 2002. Vol. 5. P. 7–14.
15. Giuliano Antonini R., Kozachenko Yu. V., Tegza A. M. Inequalities for the norms of sub-Gaussian vectors and the accuracy of the modelling of random processes. *Theory Probab. Math. Stat.* 2003. Vol. 66. P. 63–72.
16. Kozachenko Yu. V., Tegza A. M. Applications of the theory of $Sub_\varphi(\Omega)$ spaces of random variables for modelling stationary Gaussian processes. *Theory Probab. Math. Stat.* 2003. Vol. 67. P. 79–96.
17. Kozachenko Yu. V., Slyvka G. I. Boundary-value problems of mathematical physics with random initial conditions from the $Sub_\varphi(\Omega)$ space. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky.* 2003. No. 12. P. 7–10.
18. Kozachenko Yuriy, Slivka Anna Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly $Sub_\varphi(\Omega)$ random initial conditions. *Theory Stoch. Process.* 2004. Vol. 10(26), No. 1-2. P. 60–71.
19. Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами. *Теорія ймов. та матем. статист.* 2003. Вип. 69. P. 67–83.
20. Kozachenko Yu. V., Slyvka G. I. Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions. *Theory Probab. Math. Stat.*. 2004. Vol. 69. P. 63–78.
21. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly random initial conditions. *Theory of Stochastic Processes.* 2004. № 1-2. P. 60–71.
22. Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. Про моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами. *Теорія ймов. та матем. статист.* 2006. Вип. 74. С. 52–67.
23. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. The Cauchy problem for the heat equation with a random right side. *Random Oper. and Stoch. Equ.* 2014. Vol.22, Iss. 1. P. 53–64.
24. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. On the increase rate of random fields from space on unbounded domains. *Statistics, optimization and information computing.* 2014. Vol. 2. P. 79–92.
25. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ *Applied Mathematics.* 2014. Vol. 5. P. 2318–2333.
26. Kozachenko Yu. V., Fedoryanych T. V. Criteria for testing of hypotheses about a covariance function. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky.* 2004. No. 5 P. 11–16.
27. Kozachenko Yu. V., Fedoryanych T. V. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a Gaussian stationary process. *Theory Probab. Math. Stat.* 2004. Vol. 69. P. 85–94.
28. Kozachenko Yu. V. Fedoryanich T. V. Estimates for the distribution of the supremum of

square-Gaussian stochastic processes defined on noncompact sets. *Theory Probab. Math. Stat.* 2006. Vol. 73. P. 81–97.

29. Kozachenko Yu. V., Pogorilyak O. O. Simulation of Cox processes controlled by a random field. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky.* 2006. No. 10. P. 20–23.
30. Kozachenko Yu. V., Pogorilyak O. O. Modelling log Gaussian Cox processes with a given reliability and accuracy. *Theory Probab. Math. Stat.* 2008. Vol. 76 P. 77–91.
31. Kozachenko Yu. V., Pogorilyak O. O. A method of modelling log Gaussian Cox processes. *Theory Probab. Math. Stat.* 2008. Vol. 77. P. 91–105.
32. Козаченко Ю. В., Вереш К. Й. Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча. *Теорія ймовір. та матем. статист..* 2009. Вип. 80. С. 48–62.
33. Вереш К. Й. Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з просторів Орліча. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика і інформатика.* 2009. Вип. 18. С. 39–45.
34. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. Boundary-value problem for nonhomogeneous parabolic equation with Orlicz right side *Random Operators and Stochastic Equations.* 2010. Vol. 18, Iss. 2. P. 97–119.
35. Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. Probability of large deviations of sums of random processes from Orlicz space. *Monte Carlo Methods and Applications.* 2011. Vol. 17, Iss. 2. P. 155–168.
36. Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. The Banach spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2013. Vol. 86. P. 92–107.
37. Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. Reliability and accuracy in the space $L_p(T)$ for the calculation of integrals depending on a parameter by the Monte Carlo method. *Monte Carlo Methods and Applications.* 2015. Vol.21, Iss.3. P. 233–244.
38. Kozachenko Yu. V., Troshki N. V. Accuracy and reliability of a model of Gaussian random processes in $C(T)$ space. *International Journal of Statistics and Management System.* 2015. Vol. 10, Iss. 1-2. P. 1–15.
39. Kozachenko Yu. V., Tegza A. M., Troshki N. V. The accuracy of modeling of Gaussian stochastic processes in some Orlicz space. *Statistics Optimization and information computing.* 2020. Vol.8, Iss.7. P. 127–135.
40. Kozachenko Yu. V., Troshki V. B. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process. *Modern Stochastics: Theory and Applications.* 2014. Vol. 1, Iss.2 P. 139–149.
41. Kozachenko Yu. V., Troshki V. B. The restricted isometry property for random matrices with φ-subgaussian entries. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2015. Vol. 23, Iss. 3 P. 169–178.
42. Kozachenko Yu. V., Troshki V. B. Construction of criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean. *Communication in Statistics. Theory and Methods.* 2018. Vol. 47, Iss. 18. P. 4556–4567.
43. Козаченко Ю. В., Дзямко В. Й., Моца А. І. Про зображення φ-субгауссових періодичних випадкових процесів у вигляді рядів. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика і інформатика.* 2012. Вип. 23, № 1. С. 42–54.
44. Козаченко Ю. В., Дзямко В. Й., Моца А. І. Умови рівномірної збіжності зображень φ-субгауссових випадкових процесів у вигляді тригонометричних рядів. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія математика і інформатика.* 2012. Вип. 23, № 2. С. 42–50.
45. Козаченко Ю. В., Дзямко В. Й., Моца А. І. Про побудову моделей випадкових процесів з простору Орліча. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. Науковий журнал Донецького національного університету.* 2010. № 1-2. С. 125–134.

А. І. Моца (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)
Г. І. Сливка-Тилищак (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)
Ю. Ю. Млавець (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)
Р. Є. Ямненко (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

Одержано 08.09.2020

УДК 519.2:519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).15-25

А. О. Пашко[1], І. В. Розора[2], О. І. Василик[3]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри теоретичної кібернетики,
доктор фізико-математичних наук
aap2011@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6944-8477

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафери прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
rozora.iryna@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8733-7559

[3] Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
ovasylyk@univ.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0880-3751

НАПРЯМКИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ Ю.В. КОЗАЧЕНКА: СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

В роботі висвітлюються наукові здобутки доктора фізико-математичних наук професора Юрія Васильовича Козаченка в галузі статистичного моделювання. Козаченко Ю.В. працював на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики КНУ імені Тараса Шевченка. Професор Козаченко Ю.В. стояв біля витоків статистичного моделювання в Київському університеті. Козаченком Ю. В. та його учнями розроблені наукові основи теорії моделювання гауссових та близьких до них випадкових процесів і полів в різних функціональних просторах із заданими точністю і надійністю. При розробці методів статистичного моделювання значна увага приділялась дослідженню збіжності статистичних моделей випадкових процесів та полів в різних функціональних просторах. До результатів наукової школи Козаченка Ю.В. належить і розробка теорії функціональних просторів випадкових величин. Значне місце в цих дослідженнях займають простори Орліча.

Ключові слова: субгауссові процеси, простори Орліча, статистичне моделювання, точність, надійність

1. Вступ. 5 травня 2020 року пішов із життя видатний вчений-математик, доктор фізико–математичних наук, професор Юрій Васильович Козаченко. Козаченко Юрій Васильович пройшов шлях від студента Київського національного університету імені Тараса Шевченка до професора, завідувача кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики, яку він очолював з 1998 по 2003 рік. Для сотень студентів та десятків аспірантів він був дорогим Вчителем і провідником у світ науки. Професор Козаченко Ю. В. був одним з лідерів української школи з теорії ймовірностей та математичної статистики, визнаним в світі фахівцем у галузі теорії і методів моделювання випадкових процесів та полів у функціональних просторах. Ю. В. Козаченко є одним із творців теорії субгауссових випадкових процесів та процесів із просторів Орліча. Він створив новий науковий напрямок – моделювання випадкових процесів у різних функціональних просторах із заданою точністю та надійністю. Професор Козаченко Ю. В.

отримав також вагомі наукові результати у дослідженні аналітичних властивостей випадкових процесів, рівнянь математичної фізики із випадковими початковими умовами, статистиці випадкових процесів, вейвлет-аналізі.

У 2003 році він став лауреатом Державної премії України в галузі науки та техніки.

У 2005 році удостоєний звання "Почесний доктор Ужгородського національного університету", у 2009 році – звання "Заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка", у 2010 році – звання "Заслужений діяч науки і техніки України" та Відзнаки Вченої ради Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

В 2013 році відзначений премією ім. М.М. Крилова президії НАН України.

У 2018 році за визначний особистий внесок у розвиток вітчизняної математичної науки, плідну багаторічну педагогічну працю професор Ю.В.Козаченко був нагороджений орденом "За заслуги" III ступеня.

Юрій Васильович передав своє захоплення науковими проблемами теорії ймовірностей та математичної статистики своїм учням, колегам, студентам, які будуть продовжувати і розвивати наукові дослідження ним започатковані.

Світлій пам'яті Юрія Васильовича Козаченка – нашого Вчителя і присвячена стаття.

2. Основний результат. В даній статті досліджується лише один напрямок наукової діяльності Ю.В. Козаченка – розробка теорії та методів статистичного моделювання випадкових процесів та полів. А коло його наукових інтересів дуже широке, це і

– аналітичні властивості випадкових процесів. Оцінка розподілів функціоналів від випадкових процесів,

– випадкові процеси в просторах Орліча,

– передгауссові та субгауссові випадкові процеси,

– моделювання випадкових процесів та полів,

– задача Коші для рівнянь математичної фізики з випадковими початковими умовами,

– статистика випадкових процесів,

– вейвлет-розклади випадкових процесів.

Розвиток методів статистичного моделювання бере початок з перших післявоєнних років, коли в лабораторії Лос-Алам результати моделювання вперше були використані для розрахунків. Під статистичним моделюванням розуміють відтворення на ЕОМ реалізацій випадкових величин, процесів та полів із заданими характеристиками.

Методи статистичного моделювання розглядаються як альтернатива до існуючих чисельних методів.

Розвиток комп'ютерної техніки став каталізатором для розвитку методів статистичного моделювання, зокрема, чисельного моделювання випадкових процесів та полів. Використання обчислювальної техніки дало поштовх для широкого застосування статистичного моделювання в різних областях природничих та соціальних наук, таких, як метеорологія, радіотехніка, соціологія, фінансова математика, при випробуванні технічних систем і засобів та інше.

Задача моделювання випадкових процесів формулюється так. За відомими характеристиками випадкового процесу такими, як математичне сподівання, дисперсія, кореляційна функція чи спектральна щільність, необхідно побудувати обчислювальний алгоритм, що дозволяє отримувати на ЕОМ реалізації випадкових процесів $X(t)$ чи послідовностей $\{\xi_k, k = 0, 1, ...\}$ із заданими властивостями. В гауссовому випадку модель процесу повністю визначається математичним сподіванням і кореляційною функцією.

Важливе місце в статистичному моделюванні займають дослідження точності і надійності моделей випадкових процесів та полів в різних функціональних просторах.

Одними з перших робіт в цьому напрямку в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка були роботи [1], [2], [3], [4], [5]. Козаченко Ю.В. та Ядренко М.Й. були першими хто започаткував цей напрямок досліджень на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики.

Існує багато методів моделювання випадкових процесів та полів. В більшості з них не визначається точність та надійність моделювання. При моделюванні випадкових процесів, як правило, намагаються відтворити процеси, що є сумою великого числа випадкових факторів, тобто, згідно з центральною граничною теоремою, гаусові або близькі до них випадкові процеси. Отже, однією із основних задач статистичного моделювання випадкових процесів є отримання такої моделі випадкового процесу, яка є реалізацією гауссового процесу.

Потрібно також зауважити, що ніколи не вдається отримати модель, що дійсно є гауссовим процесом. На результат моделювання впливає багато факторів, серед них – використання псевдовипадкових послідовностей, точність представлення дійсних чисел в обчислювальних системах (впливає на якість генераторів випадкових чисел), використання різних моделей для побудови реалізацій випадкових процесів та полів.

В теорії методів Монте-Карло важливе значення має вивчення швидкості збіжності статистичних моделей випадкових процесів та полів. При оцінюванні швидкості збіжності методів статистичного моделювання використовуються результати дослідження аналітичних властивостей випадкових процесів та полів.

В якості оцінки точності моделювання можна розглядати оцінки моментів, оцінку кореляційної функції, слабку збіжність. Так, в роботах М.Й. Ядренка та його учнів [5], [6] досліджувались методи моделювання ізотропних та однорідних випадкових полів на площині та на сфері. Для оцінки точності використовуються оцінки моментів.

У зв'язку з широким застосуванням стохастичного моделювання випадкових процесів і полів у різних областях природничих та соціальних наук актуальними є саме дослідження точності і надійності моделей випадкових процесів і полів в нормах різних функціональних просторів.

Козаченко Ю.В. та його учнями започатковано дослідження збіжності статистичних моделей за ймовірністю в різних функціональних просторах. Була розроблена теорія моделювання випадкових процесів та полів із заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах. А саме в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій.

Нехай випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ може бути зображений у вигляді ряду $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, який збігається у середньому квадратичному.

Моделлю процесу X називатимемо суму $X_M(t) = \sum_{k=1}^{M} \xi_k f_k(t)$.

Нехай випадковий процес X та всі $X_M = \{X_M(t), t \in T\}, M = 1, 2, \ldots$ належать деякому функціональному банаховому простору $A(T)$ з нормою $\| \cdot \|$. Нехай задано два числа $\delta > 0$ та $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Говоритимемо, що модель X_M наближає X з надійністю $1 - \varepsilon$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$P\{\| X(t) - X_M(t) \| \geq \delta\} \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Отже, для побудови моделі потрібно знайти такі M, для яких при заданих δ та ε виконується нерівність (1).

Розглянемо простір R^d з метрикою $\rho(\vec{t}, \vec{s})$, $\vec{t}^T = (t_1, \ldots, t_d)$, $\vec{s}^T = (s_1, \ldots, s_d)$, де $\rho(\vec{t}, \vec{s})$ – це звичайна евклідова метрика або будь-яка метрика еквівалентна евклідовій метриці.

Нехай T – множина вигляду $T = \{\vec{t} : \rho(\vec{t}, 0) \leq L\}$, де $L > 0$ деяке число, $\{R^d, \Xi, \nu\}$ – вимірний простір, Ξ – борелівська σ–алгебра, ν – скінчена міра. Нехай $X = \{X(\vec{t}), t \in T\}$ – центроване випадкове поле, що може бути зображене у вигляді

$$X(\vec{t}) = \sum_{r=1}^{N} \int_{R^d} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) dZ_r(\vec{\lambda}), \tag{2}$$

де $Z_r(S)$, $S \in \Xi$ – некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі ν, а $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$ такі функції, що при кожному $\vec{t} \in T$, $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda}) \in L_2(R^d, \nu)$, а при кожному $\vec{\lambda} \in R^d$ функція $f_r(\vec{t}, \vec{\lambda})$ неперервна по $\vec{t}$.

Нехай A – однозв'язна, з кусково–гладкою межею область в R^d, D_n – розбиття області A на n однозв'язних областей $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ з кусково–гладкими межами, $\vec{\lambda_i}, i = 1, 2, \ldots, n$ – фіксовані точки в R^d такі, що $\vec{\lambda_i} \in \Delta_i$.

Позначимо

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t}, \vec{\lambda_i}) Z_r(\Delta_i). \tag{3}$$

Випадкове поле $X_n(\vec{t}, A)$ називатимемо апроксимаційною моделлю поля $X(\vec{t})$ (A-моделлю).

Апроксимаційна модель $X_n(\vec{t}, A)$ наближає $X(\vec{t})$ з надійністю $1 - \varepsilon$ та точністю δ у нормі простору $A(T)$, якщо для цієї моделі має місце нерівність

$$P\{\| X(\vec{t}) - X_n(\vec{t}, A) \| \geq \delta\} \leq \varepsilon. \tag{4}$$

Результати досліджень були систематизовані та викладені в багатьох монографіях, основні з них [7]– [14].

Козаченко Ю.В. та його учнями розроблені теоретичні основи побудови субгауссових та φ – субгауссових моделей випадкових процесів та полів, що зображуються у вигляді випадкових рядів, із заданими точністю і надійністю в нормах різних функціональних просторів ([8], [10], [13], [14], [15], [16]). Знайдено оцінки швидкості збіжності та розроблено обчислювальні алгоритми для моделювання випадкових процесів та полів, що зображуються у вигляді стохастичних інтегралів, із заданими точністю і надійністю в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій ([8], [10], [13], [14], [17]-[20], [21], [22]). Знайдено оцінки швидкості збіжності та розроблено обчислювальні алгоритми побудови із заданими точністю і надійністю моделей випадкових процесів, що використовують зображення Карунена-Лоєва та зображення Фур'є, процесів з дискретним спектром в різних функціональних просторах, а саме, в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій ([8], [10], [13], [14], [16]). Знайдено оцінки швидкості збіжності та розроблено обчислювальні алгоритми для моделювання випадкових полів, що зображуються у вигляді кратних рядів, із заданими точністю і надійністю в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій ([23], [24]). Знайдено оцінки швидкості збіжності та розроблено обчислювальні алгоритми для моделювання субгауссових та φ – субгауссових випадкових полів на сфері із заданими точністю і надійністю в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та просторі неперервних функцій ([11], [25], [26], [27]).

В результаті проведених досліджень покращено оцінки швидкості збіжності субгауссових та φ-субгауссових випадкових рядів та кратних випадкових рядів у просторах $L_p(T), p \geq 1$, просторах Орліча та в просторі неперервних функцій, оцінки швидкості збіжності субгауссових стохастичних інтегралів у просторах $L_p(T), p \geq 1$, просторах Орліча та в просторі неперервних функцій. Набули подальшого розвитку методи дослідження властивостей субгауссових, φ-субгауссових та строго субгауссових випадкових процесів та полів в просторах $L_p(T), p \geq 1$, в просторах Орліча та в просторі неперервних функцій.

Зупинимось на деяких основних роботах. В роботах [28], [29], [30], [31] досліджувались умови та оцінки збіжності гауссових моделей за ймовірністю в різних функціональних просторах. Це дозволяє будувати моделі, що наближають гауссові випадкові процеси із заданими точністю та надійністю в різних функціональних просторах. В роботах [32], [33] вивчалась модель рандомізації спектру гауссового випадкового процесу, що була введена в роботах Г.А. Михайлова, і досліджено точність та надійність даної моделі в деяких функціональних просторах. В роботах [34], [35], [36], [37] досліджено алгоритм моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху $Z^H(t)$. Побудовано модель, що наближає процес $Z^H(t)$ із заданою надійністю та точністю в $C([0,1])$ та $L_p(T), p \geq 1$.

В цих роботах розв'язується актуальна проблема розробки теоретичних основ побудови субгауссових моделей випадкових процесів і полів, що наближають випадкові процеси та поля із заданими точністю і надійністю, досліджуються оцінки швидкості збіжності моделей в різних функціональних просторах. Отримані оцінки швидкості збіжності випадкових рядів та стохастичних інтегралів можна застосувати для дослідження розв'язків стохастичних задач математичної фізики, зокрема, для статистичного моделювання розв'язків еліптичних, гіперболічних та параболічних рівнянь математичної фізики з випадковими факторами. Розроблені у вказаних роботах обчислювальні алгоритми для побудови реалізацій випадкових процесів та полів із заданими точністю і надійністю в різних функціональних просторах базуються на реалізації моделі у вигляді субгауссових випадкових рядів.

Починаючи з 60-х років, з'являються роботи, в яких вивчалися більш широкі класи випадкових величин і процесів, ніж гауссові випадкові величини і процеси.

Дослідження субгауссових випадкових величин почалося з робіт Дж. Кахана [38]. В 1968 році в роботі [39] Козаченко Ю.В. ввів поняття субгауссівських випадкових процесів. Ці дослідження активно розвивалось Ю.В. Козаченко та В.В. Булдигіним.

В роботі Булдигіна В.В. та Козаченка Ю.В. [40] було доведено, що простір субгауссових випадкових величин є банаховим відносно субгауссового стандарту. Властивості та різні сфери застосування субгауссових та строго субгауссових випадкових величин розглядались в роботах Булдигіна В.В. та Козаченка Ю.В. ([40] – [42]). Основні теоретичні результати були узагальнені, систематизовані та викладені в монографії [7] та її англомовному варіанті [9].

Козаченко Ю.В. та його учнями отримані нові результати пов'язані з теорією випадкових процесів та полів, що належать до різних функціональних просторів випадкових величин. В 1985 році в роботі [43] введено поняття банахових просторів типу субгауссових, а саме, простори $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових величин та процесів, які природним чином узагальнюють простори субгауссових випадкових величин. Простори $Sub_\varphi(\Omega)$ (простори φ-субгауссових випадкових величин) – це простори центрованих випадкових величин з певним ростом експоненціальних моментів.

В книзі [11] розглядаються властивості просторів $Sub_\varphi(\Omega)$, властивості сум незалежних випадкових величин з цих просторів, випадкові процеси з просторів $Sub_\varphi(\Omega)$, умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений в просторі з псевдометрикою, що породжена цим процесом. Властивостям φ-субгауссових просторів випадкових величин присвячено також роботи [26], [27]. Класи φ-субгауссових та строго φ-субгауссових випадкових процесів, як більш загальні, ніж класи гауссових та субгауссових випадкових процесів, є дуже цікавими з точки зору моделювання реальних випадкових процесів, які зустрічаються в системах масового обслуговування та в фінансовій математиці ([11]). Отримані результати використовуються для дослідження швидкості збіжності статистичних моделей випадкових процесів та полів.

Розроблені під керівництвом Козаченка Ю.В. алгоритми побудови реалізацій випадкових процесів і полів із заданими точністю і надійністю використовувались при розробці інформаційно-вимірювальних систем для стендових випробувань сільськогосподарської техніки [44], [45]. Розроблені обчислювальні алгоритми для моделювання вінерівського і узагальненого вінерівського процесів використовувались для оцінки трафіка комп'ютерних мереж ([46] – [49]), в задачах чисельного розв'язування стохастичних диференціальних та різницевих рівнянь, крайових задач, при статистичному моделюванні дифузійних процесів.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Наукові досягнення Ю.В. Козаченка не обмежуються розглянутими результатами. В роботі приділена увага статистичному моделюванню, його теоретичним основам і методам практичної реалізації.

У Юрія Васильовича залишилось багато учнів і послідовників. І кожен має можливість поділитись та висвітлити напрямки їх спільних досліджень.

Козаченка Юрія Васильовича немає з нами. Але залишились його роботи, його ідеї, його бачення нових цікавих задач в теорії випадкових процесів, зокрема, і в галузі статистичного моделювання випадкових процесів та полів. В память про Велику Людину і Вчителя ми будемо продовжувати ці дослідження, розв'язувати залишені задачі, розвивати надані ідеї.

Кажуть, людина живе стільки – скільки її пам'ятають. Вічна пам'ять!

Список використаної літератури

1. Зелепугина И. Н., Козаченко Ю. В. К вопросу о моделировании гауссовских случайных процесов. Некоторые вопросы теории случайных процессов. К.: Наукова думка, 1982. С. 47–56.
2. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. Modeling the Gaussian stationary stochastic processes representable in the form of stochastic integrals. Theory and applications of statistical modelling, Collect. Sci. Works, Novosibirsk, 1988. P. 10–24.
3. Zelepugina I. N., Kozachenko Yu. V. On accuracy estimations in modelling random fields in spaces $Lp, p > 1$. *Issled. Oper. ASU* 1988. Вип. 32. P. 10–14.
4. Донченко В. С. Моделювання $L2$ -процесів. *Доповіді Академії наук УРСР.* 1982. № 5. С. 60–62.
5. Ядренко М. Й., Рахімов Г. К. Статистичне моделювання однорідного та ізотропного поля на площині. *Теорія ймовірностей та математична статистика.* 1993. Вип. 49. С. 245–251.
6. Yadrenko M. Y., Yadrenko O. M., Grikh Z. O. About Approximation and Statistical Simulation of Izotropic Fields. *Random Operators and Stochastic Equations.* 1993. Vol. 1, № 1. P. 37–45.
7. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. К.: ТВіМС, 1998. 290 с.
8. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Моделювання випадкових процесів. К.: ВПЦ Київський університет, 1999. 223 с.
9. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. xii, 2000. 257 p.
10. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів і полів. К.: Задруга, 2007. 230 с.
11. Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси: монографія. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. 231 с.
12. Козаченко Ю. В., Погоріляк О. О., Тегза А. М. Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса. Ужгород: Карпати, 2012.
13. Kozachenko Yu., Pogoriliak O., Rozora I. and Tegza A.Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd. 2016.
14. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Точність і надійність моделювання випадкових процесів та полів в рівномірній метриці: монографія. Київ: ТОВ СІК ГРУП Україна, 2016. 216 с.
15. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces.I. *Theor. Probability and Math. Statist.* 1999. No. 58. P. 51–66.
16. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces.II. *Theor. Probability and Math. Statist.* 1999. No.59. P. 77–92.
17. Козаченко Ю. В., Козаченко Л. Ф. О точности моделирования в $L2(0, T)$ гауссовских случайных процессов. *Вычислительная и прикладная математика.* 1991. No74. С. 108–115.
18. Козаченко Ю. В., Козаченко Л. Ф. О точности моделирования в $L2(0, T)$ гауссовских случайных процессов. *Вычислительная и прикладная математика.* 1992. No75. С. 88–93.
19. Козаченко Ю. В., Козаченко Л. Ф. Про моделювання гауссових стаціонарних процесів з абсолютно неперервним спектром. *Теорія ймовірностей та математична статистика.* 1992. Вип.47. С. 47–54.
20. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Зєлєпугіна І. М. Про точність моделювання субгауссових випадкових полів в деяких функціональних просторах. *Доповіді НАН України.* 2001. No1. С. 11–17.
21. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields.I. *Theor. Probability*

and Math. Statist. 2000. No.61. P. 61–74.
22. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. On the simulation of random fields.II. *Theor. Probability and Math. Statist.* 2001. No.62. P. 51–63.
23. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Оцінка точності моделювання в Lp субгауссових випадкових полів на сфері. *Вісник Київського університету. Серія:Математика. Механіка.* 2002. No7-8. C. 26–32.
24. Пашко А. А., Козаченко Ю. В. Оценка скорости сходимости моделей субгауссовских случайных процессов в пространствах Орлича. *Известия Национальной академии наук Республики Казахстан. Серия физико-математическая.* 2013. No6(292). C. 60–65.
25. Козаченко Ю. В., Розора І. В. Точність та надійність моделювання випадкових процесів з простору $Sub_{\varphi}(\Omega)$ / // Теорія ймовірностей та математична статистика. - 2004. - Вип. 71. - C.93-105.
26. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. On simulation of stochastic processes from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика.* 2004. No1. C. 72–79.
27. Kozachenko Yu. V., Vasilik O. I. On the distribution of suprema of $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random processes. *Theory of Stochastic Processes.* 1998. Vol.4(20), No1-2. P. 147–160.
28. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2003. Vol.11. No3. P. 275–296.
29. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. Simulation of Gaussian Stochastic Fields. *Theory of Stochastic Processes.* 2004. Vol.10(26). No.1-2. P. 48–60.
30. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. Application of the theory of Square-Gaussian Processes to simulation of Stochastic Processes. *Theory of Stochastic Processes.* 2006. Vol.12(28). No3-4. P. 43–54.
31. Kozachenko Yu. V., Pashko A. A. Accuracy of Simulation of the Gaussian random processes with continuous spectrum. *Computer Modelling and New Technologies.* 2014. Vol.18. No3. P. 7–12.
32. Antonini R. G., Kozachenko Yu. V., Tegza A. M. Accuracy of simulation in Lp od Gaussian random processes. *Bulletin of the University of Kiev. Series: Physics & Mathematik.* 2002. Vol.5. P. 7–14.
33. Antonini R. G., Kozachenko Yu. V., Sorokulov V. V. On accuracy and reliability of simulation of some random processes from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Theory of Stochastic Processes.* 2003. Vol.9(25). No3-4. P. 50–57.
34. Kozachenko Yu. V., Sottinen T., Vasylyk O. I. Simulation of weakly self-similar stationary increment $Sub_{\varphi}(\Omega)$ -processes: a serias expansion approach. *Methodology and Computing in Applied Probability.* 2005. Vol.7, No3. P. 379–400.
35. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Pashko A. Simulation of generalized fractional Brownion motion in $C([0,T])$. *Monte Carlo Methods and Applications.* 2018. Vol.24, Iss.3. P. 179–192.
36. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Василик О. І. Моделювання дробового броунівського руху у просторі $Lp([0,T])$. *Теорія ймовірностей та матем. статистика.* 2017. Vol.97. C. 97–108.
37. Pashko A. A. Simulations of standart Brownian motion. *Computer modelling and new Technologies.* 2014. Vol.18. No10. P. 516–521.
38. Kahane J. P. Propri'et'es locales des fonctions 'a series de Fouries al'eatories. *Studia Math.* 1960. 19, No 1. P. 1–25.
39. Козаченко Ю. В. Достатні умови неперервності з ймовірністю одиниця субгауссовських випадкових процесів. *Доповіді АН УРСР.* 1968. No2. C. 109–116.
40. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. О субгауссовских случайных величинах. *Украинский математический журнал.* 1980. T.32, No 6. C. 723–730.
41. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Субгауссовские случайные векторы и процессы. *Теория вероятностей и математическая статистика.* 1987. Вып.36. C. 10–22.
42. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Оценки для распределения супремума одного класса случайных процессов. *Украинский математический журнал.* 1993. T.45, No5. C. 596–608.
43. Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. *Теория вероятностей и математическая статистика.* 1985. Вып.32. C. 42–53.
44. Пашко А. А. Моделирование на ЭВМ гауссовских стационарных случайных процессов

при испытаниях сельскохозяйственных машин. *Системные методы испытаний техники для животноводства и кормопроизодства. Сборник научных трудов ВНИИМОЖ.* Новокубанск. 1989. С. 7–14.
45. Пашко А. А. Математическое и программное обеспечение цифровых методов анализа случайных процессов в информационно-измерительных системах для автоматизации стендовых испытаний. *Новое в методах испытаний сельскохозяйственной техники. Сборник научных трудов ВНИИМОЖ.* Новокубанск.1990. С. 19–28.
46. Pashko A. Simulation of telecommunication traffic using statistical models of fractional Brownian motion. *4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T).* Kharkov, 2017. P. 414–418. doi: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246429.
47. Pashko A. O., Rozora I. V. Accuracy of simulation for the network traffic in the form of fractional Brownian motion. *14th International Conference on Advanced Trends in Radioelecrtronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET).* Slavske, 2018. P. 840–845. doi: 10.1109/TCSET.2018.8336328.
48. Pashko A., Vasylyk O. Statistical Simulation of Size Behavior for TCP Windows. *IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications, Science and Technology (PIC S&T).* Kyiv, 2019. P. 617–620, doi:10.1109/PICST47496.2019.9061332.
49. Pashko A. O., Lukovych O. V., Rozora I. V., Oleshko T. A., Vasylyk O. I. Analysis of simulation methods for fractional Brownian motion in the problems of intelligent systems design. *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory.* Kyiv, 2019. P. 373–378. doi: 10.1109/ATIT49449.2019.9030478.

Pashko A. A., Rozora I. V., Vasylyk O. I. Directions of scientific research Yu. V. Kozachenko: statistical simulation.

The paper highlights the scientific achievements of Doctor in Physics and Mathematics, Professor Yuriy Kozachenko in the field of statistical simulation. Kozachenko Yu.V. worked at the Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv. He stood at the origins of statistical simulation at his home University. Kozachenko Yu.V. and his students developed the scientific background of the simulation theory of Gaussian and similar random processes as well as fields in different functional spaces with a given accuracy and reliability. Developing the methods of statistical modeling, considerable attention was paid to the study of the convergence of statistical models to stochastic processes and fields in different functional spaces. One of the great results that belongs to the scientific school of Kozachenko Yu.V. is the investigation of the theory of functional spaces of random variables. A significant place in these studies is occupied by the Orlicz space.

Keywords: sub-Gaussian processes, Orlicz space, statistical simulation, accuracy and reliability.

References

1. Zelepugina, I.P., & Kozachenko, Yu.V. (1982). On the question of the simulation of Gaussian stochastic processes *Some questions of the theory of stochastic processes, Collect. sci. Work.* (pp. 47–56). Kiev. [in Russian]
2. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.A. (1988). Modeling the Gaussian stationary stochastic processes representable in the form of stochastic integrals. *Theory and applications of statistical modelling, Collect. Sci. Works.* (pp. 10–24). Novosibirsk.[in Russian]
3. Zelepugina, I.N., & Kozachenko, Yu.V. (1988). On accuracy estimations in modelling random fields in spaces $Lp, p > 1$. *Issled. Oper. ASU. 32.* 10–14.[in Russian]
4. Donchenko, V.S. (1982). Simulation of $L2-$processes. *Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR. 5.* 60–62. [in Ukrainian]
5. Yadrenko, M.Y., & Rahimov, G.K. (1993). Statistical simulation homogeneous and isotropic field on plane. *Theor. Probability and Math. Statist. 49.* 245–251.[in Russian]
6. Yadrenko, M.Y., Yadrenko, O.M., & Grikh, Z.O. (1993). About Approximation and Statistical Simulation of Izotropic Fields. *Random Operators and Stochastic Equations. 1, 1.* 37–45.

7. Buldygin, V.V., & Kozachenko, Yu. V. (1988). Metric characterization of random variables and random processes. *K.: TViMS.* [in Russian]
8. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A.O.(1999). Simulation of random processes. *K.: Kyiv University Publishing House.* [in Ukrainian]
9. Buldygin, V.V.,& Kozachenko, Yu.V. (2000). Metric characterization of random variables and random processes. *Translations of Mathematical Monographs. 188. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society. xii.*
10. Kozachenko, Yu.V., Pashko, A.O., & Rozora, I.V. (2007). Simulation of random processes and fields. *K.: Zadruga.* [in Ukrainian]
11. Vasylyk, O.I., Kozachenko, Yu.V., & Yamnenko, R.E. (2008). φ – suggaussian random processes. *K.: Kyiv University Publishing House.* [in Ukrainian]
12. Kozachenko, Yu.V., Pogorilyak, O.O., & Tegza, A.M. (2012). Simulation of random processes and Kox–processes. *Uzgorod: Karpaty.* [in Ukrainian]
13. Kozachenko, Yu., Pogoriliak, O., Rozora, I., & Tegza, A. (2016). Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. *London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd.*
14. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.O. (2016). Accuracy and reliability of simulation of random processes and fields in uniform methrics. *K: TOV SIK GROUP Ukraine.* [in Ukrainian]
15. Kozachenko, Yu.V.,& Pashko, A.A. (1999). Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces.I. *Theor. Probability and Math. Statist. 58.* 51–66. [in Ukrainian]
16. Kozachenko, Yu.V.,& Pashko, A.A. (1999). Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces.II. *Theor. Probability and Math. Statist. 59.* 77–92. [in Ukrainian]
17. Kozachenko, Yu.V., & Kozachenko, L.F. (1991). Accuracy of modeling stationary Gaussian stochastic processes in L2(0 T). *Vychisl. Prikl. Mat. 75.* 108–115. [in Ukrainian]
18. Kozachenko, Yu.V., & Kozachenko, L.F. (1992). On accuracy of modeling of Gaussian stochastic processes in L2(0 T). *Vychisl. Prikl. Mat. 74.* 88–93. [in Ukrainian]
19. Kozachenko, Yu.V., & Kozachenko, L.F. (1992). On the modelling of Gaussian stationary processes with absolutely continuous spectrum. *Teor. Jmovirn. Mat. Stat. 47.* 47–54. [in Ukrainian]
20. Kozachenko, Yu.V., Pashko, A.O., & Zelepugina, I.M. (2001). The accuracy of simulation of sub-Gaussian random fields in some functional spaces.*Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky. 1.* 11–17. [in Ukrainian]
21. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.A. (2000). On the simulation of random fields.I. *Theor. Probability and Math. Statist. 61.* 61–74. [in Ukrainian]
22. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.A. (2001). On the simulation of random fields.II. *Theor. Probability and Math. Statist. 62.* 51–63. [in Ukrainian]
23. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.O. (2002). Estimation of accuracy of simulation of random fields on the sphere in $Lp, p \geq 2$. *Visn., Mat. Mekh., Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka. No.7–8.* 26–32. [in Ukrainian]
24. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.O. (2013). The estimation of the speed of the models of the sub-Gaussian random processes in the Orliz space. it Development of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Type of physical-mathematical. No6(292). 60–65.[in Russian]
25. Kozachenko, Yu.V., & Rozora, I.V. (2004). Accuracy and reliability of models of stochastic processes of the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Teor. Jmovirn. Mat. Stat. 71.* 93–104.
26. Kozachenko, Yu.V., & Rozora, I.V. (2004). On simulation of stochastic processes from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$. *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat. 1.*72–78.
27. Kozachenko, Yu.V., & Vasylyk, O.I. (1998). On the distribution of suprema of $Sub_{\varphi}(\Omega)$ random processes. *Theory of Stochastic Processes. 4(20), No1-2.* 147–160.
28. Kozachenko, Yu.V., & Rozora, I.V. (2003). Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Operators and Stochastic Equations. 11, No3.* 275–296.
29. Kozachenko, Yu.V., & Rozora, I.V. (2004). Simulation of Gaussian Stochastic Fields. *Theory of Stochastic Processes. 10(26), No.1-2.* 48–60.
30. Kozachenko, Yu.V., & Rozora, I.V. (2006). Application of the theory of Square-Gaussian Processes to simulation of Stochastic Processes. *Theory of Stochastic Processes. 12(28), No3-4.* 43–54.
31. Kozachenko, Yu.V., & Pashko, A.A. (2014). Accuracy of Simulation of the Gaussian random processes with continuous spectrum. *Computer Modelling and New Technologies. 18, No 3.*

7–12.

32. Antonini, R.G., Kozachenko, Yu.V., & Tegza, A.M. (2002). Accuracy of simulation in Lp od Gaussian random processes. *Bulletin of the University of Kiev. Series: Physics & Mathematik. 5.* 7–14. [in Ukrainian]
33. Antonini, R.G., Kozachenko, Yu.V., & Sorokulov, V.V. (2003). On accuracy and reliability of simulation of some random processes from the space $Sub_\varphi(\Omega)$. *Theory of Stochastic Processes. 9(25), No3-4.* 50–57.
34. Kozachenko, Yu.V., Sottinen, T., & Vasylyk, O.I. (2005). Simulation of weakly self–similar stationary increment $Sub_\varphi(\Omega)$ –processes: a serias expansion approach. *Methodology and Computing in Applied Probability. 7, No3.* 379–400.
35. Kozachenko, Yu., Vasylyk, O., & Pashko, A. (2018). Simulation of generalized fractional Brownion motion in $C([0,T])$. *Monte Carlo Methods and Applications. 24, Iss.3.* 179–192.
36. Kozachenko, Yu., Vasylyk, O., & Pashko, A. (2017). Simulation of generalized fractional Brownion motion in $Lp([0,T])$. *Teor. Jmovirn. Mat. Stat. 97.* 97–108. [in Ukrainian]
37. Pashko, A.A. (2014). Simulations of standart Brownian motion. *Computer modelling and new Technologies. 18, No10.* 516–521.
38. Kahane, J.P. (1960). Propri'et'es locales des fonctions 'a series de Fouries al'eatories. *Studia Math. 19, No 1.* 1–25.
39. Kozachenko, Yu.V. (1968). Sufficient conditions of continuity with unity probability of subgaussian random processes. *Dopov. Akad. Nauk Ukr. RSR, Ser. A. 2.* 113–115. [in Ukrainian]
40. Buldygin, V.V., & Kozachenko, Yu.V. (1980). Sub-Gaussian random variables. *Ukr. Mat. Zh. 32.* 723–730. [in Ukrainian]
41. Buldygin, V.V., & Kozachenko, Yu.V. (1987). Subgaussian random vectors and processes. *Teor. Veroyatn. Mat. Stat. 36.* 10–22.[in Russian]
42. Buldygin, V.V., & Kozachenko, Yu.V. (1993). Estimates of the supremum distribution for a certain class of random processes. *Ukr. Mat. Zh. 45, No.5.*596–608. [in Ukrainian]
43. Kozachenko, Yu.V., & Ostrovskij, E.I. (1985). Banach spaces of random variables of sub-Gaussian type. *Teor. Veroyatn. Mat. Stat. 32.* 42–53. [in Russian]
44. Pashko, A.A. (1989). Computer simulation of Gaussian stationary random processes during testing of agricultural machines. *System test methods for livestock and forage production. Collection of scientific papers VNIIMOZH. Novokubansk.* 7–14.[in Russian]
45. Pashko, A.A. (1990). Mathematical and software support for digital methods of analysis of random processes in information-measuring systems for the automation of bench tests. *New in test methods for agricultural machinery. Collection of scientific papers VNIIMOZH. Novokubansk.* 19–28. [in Russian]
46. Pashko, A.O. (2017). Simulation of telecommunication traffic using statistical models of fractional Brownian motion. *4th International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T).* 414–418. doi: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246429.
47. Pashko, A.O., Rozora, I.V. (2018). Accuracy of simulation for the network traffic in the form of fractional Brownian motion. *14th International Conference on Advanced Trends in Radioelecrtronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET).* 840–845. doi: 10.1109/TCSET.2018.8336328.
48. Pashko A., Vasylyk O. (2019). Statistical Simulation of Size Behavior for TCP Windows. *IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications, Science and Technology (PIC S&T).* 617–620. doi:10.1109/PICST47496.2019.9061332.
49. Pashko, A.O., Lukovych, O.V., Rozora, I.V., Oleshko, T.A., & Vasylyk, O.I. (2019). Analysis of simulation methods for fractional Brownian motion in the problems of intelligent systems design. *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory.* 373–378. doi: 10.1109/ATIT49449.2019.9030478.

Одержано 03.10.2020

УДК 512.643.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).26-35

Г. І. Сливка-Тилищак[1], К. Й. Кучінка[2]

[1] Пряшівський університет в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент,
доктор фізико-математичних наук
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7129-0530

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ф. Ракоці ІІ,
завідуюча кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
vereskati@kmf.uz.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8129-9937

НАПРЯМКИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ Ю. В. КОЗАЧЕНКА: ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ З ВИПАДКОВИМИ ФАКТОРАМИ

Присвячено світлій пам'яті Юрія Васильовича Козаченка

Одним з напрямків наукових досліджень Ю. В. Козаченка є рівняння математичної фізики з випадковими факторами. Ці фактори можуть мати різну природу: випадкові початкові умови, випадкові крайові умови, випадкова права частина, випадкові коефіцієнти і т. д. Умови та оцінки збіжності за ймовірністю випадкових рядів знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичної фізики з випадковими умовами. Фізичні постановки таких задач розглядав Кампе де Фер'є. Він розглядав крайову задачу для рівняння коливання струни з випадковими початковими умовами. У роботах В. В. Булдигіна показано, що вимога, щоб майже всі реалізації випадкової початкової функції задовольняли умови, при яких є розв'язуваною детермінована задача, значно звужує клас випадкових умов, за яких розв'язок існує в класичному розумінні. Є багато робіт, в яких вивчались задачі математичної фізики з випадковими умовами, які базуються на дослідженні збіжності за ймовірностю в функціональних просторах послідовності випадкових функцій, що апроксимують розв'язки крайових задач. Зауважимо, що у більшості з цих робіт, для знаходження умов рівномірної збіжності випадкових рядів застосовується метод, що ґрунтується на ідеї Ж. Канаха. Булдигіним В. В. та Козаченком Ю. В. був запропонований метод, який дозволяє обґрунтовувати застосування методу Фур'є до задач математичної фізики у багатовимірному випадку. Метод, що ґрунтується на ідеї Кахана для цього випадку не підходить. У роботах Козаченка Ю. В. та його учнів досліджувалися рівняння гіперболічного та параболічного типів математичної фізики з випадковими факторами. Зокрема, вивчалися властивості класичних та узагальнених розв'язків таких задач, було обґрунтувано застосування методу Фур'є, знайдено оцінок для розподілу супремуму розв'язків, та побудовано моделі розв'язків деяких задач, що наближають розв'язок із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці. Всі ці результати мають не лише теоретичне, але й практичне застосування для подальшого вивчення та розвинення теорії гіперболічних і параболічних рівнянь математичної фізики з випадковими факторами. Крім того, ці результати дозволяють моделювати розв'язки крайових задач математичної фізики із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці, що може застосовуватися в наукових дослідженнях в галузі радіотехніки, фізики, геофізики, фінансової математики, математичної економіки, в технічних науках та в механіці, зокрема, де використовуються методи комп'ютерного моделювання випадкових процесів.

Ключові слова: випадкові процеси, гіперболічні рівняння математичної фізики, стохастичні процеси, параболічні рівняння математичної фізики.

1. Вступ. Коло інтересів Юрія Васильовича Козаченка було надзвичайно широким. Міжнародній науковій спільноті він був відомий як один з творців теорії субгауссових випадкових процесів, випадкових процесів з просторів Орліча. Професор Юрій Васильович Козаченко отримав вагомі наукові результати у дослідженні рівнянь гіперболічного та параболічного типів математичної фізики з випадковими факторами. У даній статті міститься огляд його робіт у цьому напрямку.

2. Основні результати. Дослідження властивостей випадкових рядів у різних функціональних просторах є одним з важливих напрямків розвитку теорії випадкових процесів. Це обумовлюється тим, що багато випадкових процесів можуть бути зображені у вигляді випадкових функціональних рядів. Тому є можливість вивчати властивості випадкових процесів, досліджуючи властивості їх зображень. Зокрема, актуальним є питання про умови та швидкість збіжності стохастичних рядів у нормах різних функціональних просторах.

З іншого боку, зображення випадкових процесів у вигляді збіжних випадкових рядів відкриває додаткові можливості для використання цих зображень як у самій теорії випадкових процесів, так і у її застосуваннях у споріднених математичних дисциплінах: при розв'язуванні практичних задач математичної фізики з випадковими початковими умовами, математичному моделюванні тощо.

Багато науковців-математиків досліджували властивості випадкових процесів, що зображуються у вигляді функціональних рядів. Можливість зображення деяких випадкових процесів у вигляді випадкових функціональних рядів є класичним прикладом в теорії випадкових процесів. Теорія таких рядів починається з робіт Пелі А. та Зігмунда А. [43], Пелі А., Вінера Н. та Зігмунда А. [44]. Додаткова інформація про такі зображення міститься в працях Талаграна [45], Іто і Нісіо [32], Джайна та Маркуса [33], а також у роботах українських математиків Ядренка М. Й. [28], Козаченка Ю. В. [12–15], Булдигіна В. В. [2–4].

При розв'язуванні практичних задач важливе значення має швидкість збіжності випадкових рядів. У 60-і роки почались дослідження збіжності випадкових рядів зі значеннями у банахових просторах. Булдигін В. В. у роботі [5] заклав основи загальної теорії збіжності випадкових рядів з незалежними членами зі значеннями в топологічних просторах. Огляд результатів у цьому напрямку наведений ним у монографії [2].

У 70-их роках дана теорія була розвинута і доповнена роботами, у яких вивчалась збіжність за ймовірністю випадкових рядів із залежними членами у різних функціональних просторах. У роботах [2, 4] Булдигіна В. В. досліджується збіжність за ймовірністю випадкових рядів із членами, що належать до банахових просторів, в праці Козаченка Ю. В. та Бейсенбаева Е. [1] розглядаються умови збіжності випадкових рядів з залежними членами у нормах різних функціональних просторів.

У статтях [9, 10, 13, 14, 27] розглядалися умови та швидкості збіжності випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча. Козаченко Ю. В. та Зелепугіна І. Н. в статтях [9, 10] отримали умови збіжності та загальні оцінки швидкості збіжності гауссових випадкових рядів у нормах деяких просторів Орліча. Цими ж авторами були обґрунтовані оцінки швидкості збіжності у просторах Орліча для субгауссових випадкових рядів та рядів субгауссового типу [9, 10].

Загальні оцінки отримані в [9, 10] були поліпшені в роботах [34, 35] на основі методу, що ґрунтується на ідеї Ж. Кахана, суть якої полягає в застосуванні нерівності Бернштейна для знаходження умов рівномірної збіжності випадкових рядів. Цей метод був запропонований Козаченком Ю. В. і застосований у його роботах [12, 17], а також у роботах [9, 27, 29].

У роботах Ковальчука Ю. О. та Козаченка Ю. В. і Ковальчука Ю. О. [21, 22] були знайдені умови збіжності строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових рядів у нормах простору $L_p(\Omega)$ та простору Орліча $L_U(\Omega)$.

Умови та оцінки збіжності за ймовірністю випадкових рядів знаходять широке застосування при розв'язанні задач математичної фізики з випадковими початковими умовами. Фізичні постановки таких задач розглядав Кампе де Фер'є [11]. Він розглядав крайову задачу для рівняння коливання струни з випадковими початковими умовами. У роботі В. В. Булдигіна [5] обґрунтовано, що вимога, яка обмежує реалізації випадкової початкової функції рамками, в межах якої розв'язується детермінована задача, значно звужує клас випадкових початкових умов, за яких розв'язок існує в класичному розумінні.

У роботах Бейсенбаєва Є. та Козаченка Ю. В. [1] отримані умови рівномірної збіжності за ймовірністю і в середньому квадратичному випадкових рядів і інтегралів, а також умови почленного диференціювання з імовірністю одиниця випадкових рядів. Отримані умови були використані при обґрунтуванні застосування методу Фур'є для задачі параболічного однорідного рівняння математичної фізики.

Булдигіним В. В. та Козаченком Ю. В. [6] запропоновано підхід, який ґрунтується на дослідженні збіжності за ймовірністю у функціональних просторах послідовності часткових сум, що апроксимують розв'язок крайової задачі. Цей підхід був використаний у роботах [6, 17, 18, 20, 27, 42] для обґрунтування можливості застосування методу Фур'є до розв'язання крайової задачі.

У роботі [6] розглядається перша крайова задача для однорідного гіперболічного рівняння, коли початкові випадкові умови є гауссовими випадковими процесами. Також обґрунтовано можливість застосування методу Фур'є до знаходження розв'язку першої крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння та розглянуто існування розв'язку в частинному випадку, що формулюється у термінах кореляційних функцій.

У роботі Козаченка Ю. В. та Енджиргли М. В. [17] знайдено умови та оцінки швидкості рівномірної збіжності за ймовірністю випадкових рядів із просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, отримано умови існування та оцінки розподілу супремуму розв'язків деяких крайових задач із випадковими початковими умовами.

Умови, за якими узагальнений розв'язок крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння математичної фізики, коли початкові умови є строго субгауссовими випадковими процесами, належить до простору Соболєва, були отримані Козаченком Ю. В. і Тригуб С. Г. [27].

Козаченком Ю. В. та Баррасою де Ла Крус Е. у працях [29] вивчалась крайова задача для гіперболічних рівнянь з випадковими початковими умовами для істотно більш широкого класу випадкових процесів, а саме, для строго орлічевих випадкових процесів. Авторами були знайдені умови існування класичних розв'язків гіперболічного диференціального рівняння в частинних похідних з випадковими строго орлічевими початковими умовами, отримані оцінки для розподілу супремуму розв'язку такої задачі.

У роботах Козаченка Ю. В. і Ковалючука Ю. О. [19, 20, 42] одержані умови існування узагальненого розв'язку крайової задачі для однорідного гіперболічного рівняння математичної фізики з початковими умовами, які є строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадковими процесами та оцінки швидкості збіжності зображень цього розв'язку, отриманих методом Фур'є в нормах просторів Соболєва.

У роботах Козаченка Ю. В. та Сливка Г. І. [24,25] було досліджено однорідне рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку, коли початкові умови є $Sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкові поля. Для даної задачі було обґрунтовано застосування методу Фур'є та отримано оцінку розподілу супремуму розв'язку.

Достатні умови існування з імовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку задачі про коливання неоднорідної струни з сумісно строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ з випадковими початковими умовами, задачі про коливання круглої мембрани з сумісно строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ з випадковими початковими умовами, задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з сумісно строго $Sub_{\varphi}(\Omega)$ з випадковими початковими умовами були сформульовані та обґрунтовані в роботах [7]. Для таких задач були отримані оцінки розподілу супремуму розв'язку.

Козаченко Ю. В. та Довгай Б. В. вивчали крайову задачу математичної фізики для неоднорідного гіперболічного рівняння з φ-субгауссовою правою частиною. Для такої задачі доведені теореми про достатні умови існування з імовірністю одиниця двічі неперервно диференційовного розв'язку, існування з імовірністю одиниця розв'язку для часткового випадку рівняння коливання струни з випадковою правою частиною, що зображується через однорідне строго φ-субгауссове випадкове поле. Авторами знайдені умови існування узагальненого розв'язку, оцінки розподілу супремуму розв'язку для гіперболічного рівняння з φ-субгауссовою правою частиною. А також для такої задачі побудована модель, яка наближає розв'язок із заданою надійністю та точністю. Дані результати містяться в роботах [7, 31].

Достатні умови існування класичного та узагальненого розв'язків для однорідного гіперболічного рівняння у багатовимірному випадку з випадковими початковими умовами із просторів Орліча були отримані у роботах Козаченка Ю.В., Кучінка (Вереш) К. Й. та Сливка-Тилищак Г. І. [23].

У книзі Довгай Б. В., Козаченка Ю. В. та Розори І. В. [8] розглядаються нові методи моделювання випадкових процесів, які зустрічаються у фізичних явищах. Вивчаються φ-субгауссові випадкові процеси. Для гауссового процесу, що розглядається як процес на вході деякої системи, будується модель з урахуванням процесу на виході системи та знаходяться умови, при яких модель наближує вказаний випадковий процес зі заданою надійністю та точністю. Побудована модель розв'язку гіперболічного рівняння математичної фізики з нульовими початковими та крайовими умовами та φ-субгауссовою правою частиною, що наближає цей розв'язок із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами є класичною задачею математичної фізики. В праці Козаченка Ю. В. та Леоненко Г. М. [36] досліджується задача Коші для рівняння теплопровідності, коли початкова умова є строго субгауссовим випадковим процесом. У статті Бегін І., Козаченка Ю. та ін. [30] досліджувалось лінійне рівняння теплопровідності непарного порядку з випадковими початковими умовами.

У роботах Козаченка Ю. В. та Вереш К. Й. [37, 38] обґрунтовано застосування методу Фур'є для однорідного параболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча, знайдені оцінки розподілу супремуму розв'язку однорідного рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з простору Орліча, а також неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною із просторів Орліча.

У працях Козаченка Ю. В. та Сливка-Тилищак Г. І. для задачі про коливання неоднорідної струни, задачі про коливання круглої мембрани та задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда знайдені достатні умови існування з ймовірністю одиниця двічі неперервно диференційовних розв'язку, узагальненого розв'язку та одержані оцінки для розподілу супремуму розв'язку задач, коли початкові умови є випадкові процеси з простору Орліча [23]. Побудовано модель розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку з строго субгауссовими випадковими початковими умовами [26]. Побудовано моделі, що реалізуються на комп'ютері, які наближають розв'язки задачі про коливання однорідної струни та задачі про коливання прямокутної мембрани з строго субгауссовими випадковими початковими умовами із заданими надійністю та точністю в рівномірній метриці. Обґрунтовано достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ та із простору Орліча. Досліджено оцінки для розподілу супремуму розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ і коли права частина є випадковим полем з простору Орліча [40, 41].

В монографіях [7, 23] (див. рис. 1) можна знайти посилання на інші роботи, що проводилися в даному напрямку.

Рис. 1. Монографії Ю.В. Козаченка

Список використаної літератури

1. Бейсенбаев Е., Козаченко Ю. В. Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями. *Теория вероятн. и мат. статистика.* 1979. Вып. 21. С. 9–23.
2. Булдыгин В. В. Сходимость случайных элементов в топологических пространствах. К.: Наукова думка, 1980. 237 с.
3. Булдыгин В. В. К вопросу о сходимости случайных рядов в банаховых пространствах. *Теория случайных процессов.* 1983. Вып. 2. С. 28–34.
4. Булдыгин В. В. Субгауссовские процессы и сходимость случайных рядов в функциональных пространствах. *Укр. мат. журнал.* 1977. Т. 29, № 4. С. 443–454.
5. Булдыгин В. В. О статистическом подходе к вопросу о существовании классического решения у краевой задачи для однородного гиперболического уравнения. *Теория случайных процессов.* 1983. Вып. 11. С. 12–19.
6. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями. Случайные процесы в задачах математической физики. – К.: Ин-т. Математики АН УССР, 1979. С. 4–35.
7. Довгай Б. В.Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. К.: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 2008. – 175 с.
8. Довгай Б. В.,Козаченко Ю. В.,Розора І. В. Моделювання випадкових процесів у фізичних системах. Київ, 2010. – 230 с.
9. Зелепугина И. Н., Козаченко Ю. В. Об оценках точности моделирования случайных полей в пространствах. *Исслед. Операций и АСУ.* 1988. Вып. 32. С. 10–14.
10. Зелепугина И. Н.,Козаченко Ю. В. О скорости сходимости разложений Карунена-Лоэва гауссовских случайных процессов *Теория вероятн. и мат. статистика.* 1988. Вып. 38. С. 41–51.
11. Кампе де Ферье. Статистическая механика непрерывных сред. Гидродинамическая неустойчивость. М.: ИЛ, 1964. С. 189–230.
12. Козаченко Ю. В. О равномерной сходимости стохастических интегралов в норме пространства Орлича. *Теория вероятн. и мат. статист.* 1983. Вып. 29. С. 52–64.
13. Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича I. *Теория вероятн. и мат. статист.* 1984. Вып. 30. С. 92–107.
14. Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича II. *Теория вероятн. и мат. статист.* 1984. Вып. 31. С. 44-50.
15. Козаченко Ю. В. Свойства случайных процессов типа субгауссовских. *Доклады АН УССР.* 1984. № 9. С. 14–16.
16. Козаченко Ю. В., Вереш К. Й. Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча. *Теорія ймов. та матем. статист.* 2009. Вип. 80. С. 56–69.
17. Козаченко Ю. В., Енджияглі М. В. Обгрунтування застосування методу Фур'є до крайових задач з випадковими початковими умовами. *Теорія ймовірн. і мат. статистика.* 1994. Вып. 51. С. 78–89.
18. Козаченко Ю. В., Енджиглі М. В. Обгрунтування застосування методу Фур'є до крайових задач з випадковими початковими умовами. II. *Теорія ймовірн. і мат. статистика.* 1994. Вып. 53. С. 58–68.
19. Козаченко Ю. В.,Ковальчук Ю. А. Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_{\varphi}(\Omega)$. I. *Укр. мат. журнал.* 1998. Т. 50, № 4. С. 504–515.
20. Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А. Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_{\varphi}(\Omega)$. II. *Укр. мат. журнал.* 1998. Т. 50, № 5. С. 897–906.
21. Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А. Про збіжність у просторах Орлича деяких випадкових рядів. *Наукові записки Ніжинського педінституту ім. М. В. Гоголя.* 1996. Т. XVI, вип. 1. С. 16–20.
22. Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А. Про збіжність строго $sub_{\varphi}(\Omega)$ випадкових рядів в нормах просторів Орлича. *Доповіді НАН України.* 1997. № 11. С. 12–15.
23. Козаченко Ю. В., Кучінка К. Й., Сливка-Тилищак Г. І. Випадкові процеси в задачах

математичної фізики. Монографія. Вид-во ТОВ "РІК-У". 2017. 256 с.
24. Козаченко Ю. В., Сливка Г. І. Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами. *Теорія ймов. та матем. статист.* 2003. Вип. 69. С. 48–63.
25. Козаченко Ю. В.,Сливка Г. І. Крайові задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами із простору $Sub_\varphi(\Omega)$. *Доповіді НАН України.* 2003. №12. С. 34–40.
26. Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І. Про моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами. *Теорія ймов. та матем. статист.* 2006. Вип. 74. С. 52–67.
27. Козаченко Ю. В., Тригуб С. Г. Застосування методу Фур'є до до крайових задач з випадковими початковими умовами. *Теорія ймов. та мат. статистика.* 1996. Вип. 54. С. 51–66.
28. Ядренко М. И. Спектральная теория случайных полей К.: Вища школа, 1980. 270с.
29. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions. *Random Oper. And Stoch. Eq.* 1995. 3, № 3. P. 201–220.
30. Beghin L.,Kozachenko Yu., Orsingher E.,Sakhno L. On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial. *Journal of Statistical Physics.* 2007. Vol. 127, No. 4. P. 721–739.
31. Dovgay B. V, Kozachenko Yu. V. The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side. *Random Oper. And Stoch. Eq.* 2005. Vol. 13, № 3. P. 281–296.
32. Ito K., Nisio M. On the convergence of sums independent Banah space valued random variables. *Osaka J. Math.* 1968. Vol. 5. № 1. P. 35–48.
33. Jain N. C., Marcus M. B. Continuity of sub-Gaussian processes *Adv. Probab.* 1978. Vol. 4. P. 81–196.
34. Kahane J. P. Properties locales des fonctions a series de Fouries aleatories *Studia Math.* 1960. Vol. 19, № 1. P. 1–25.
35. Kahane J. P. Sur la divergence presque sure presque partout de certaines series de Fouries aleatories *Ann. Univ. Scient., Budapest., Sect. Math.* 1961. Vol. 3–4. P. 101–108.
36. Kozachenko Yu. V., Leonenko G. M. Extremal behavior of the heat random field. *Extremes.* 2006. **8**. P. 191–205.
37. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. The heat equation with random initial conditions from Orlicz space. *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.* 2009. **80**. P. 63–75; English transl. in *Theory Probab. Mathem. Statist.* 2010. **80**. P. 71–84.
38. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2010. № 18. P. 97–119.
39. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly random initial conditions. *Theory of Stochastic Processes.* 2004. № 1–2. C. 60–71.
40. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. The Cauchy problem for the heat equation with a random right side. *Random Oper. and Stoch. Equ.* 2014. 22(1). P. 53–64.
41. Kozachenko Yu. V.,Slyvka-Tylyshchak A. I. The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ *Applied Mathematics.* 2014. 5. P. 2318–2333.
42. Kovalchuk Yu. O., Kovalchuk Yu. O. The Boundary-Value Problems for Equations of Mathematical Physics with Strictly $sub_\varphi(\Omega)$ Random Initial Conditions. *The Second Scandinavian-Ukrainian Conference in Mathematical Statistics. Abstracts. Sweden, Umea.* 1997. P. 45.
43. Paley A. C., Zygmund A. On some series functions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1930. **23**, № 4. P. 190–205.
44. Paley A. C., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions. *Math. Z.*. 1932. 37, № 4. P. 647–668.
45. Talagrand M. Regularite des processes gaussien. *C. R. Acad. Sc.* 1932. **37**, № 4. P. 647–668.

Slyvka-Tylyshchak G. I., Kuchinka K. J. Directions of scientific research Yu.V. Kozachenko: investigation of solutions of problems of mathematical physics with random factors.

One of the research areas of Yu. V. Kozachenko is equations of mathematical physics with random factors. These factors can be of different nature: random initial conditions, random boundary conditions, random right-hand side, random coefficients, etc. Conditions and estimates of convergence on the probability of random series are widely used in solving problems of mathematical physics with random conditions. Physical formulations of such problems were considered by Kampe de Ferier. He considered a boundary value problem for the equation of string oscillations with random initial conditions. In the papers of V. V. Buldygin it is shown that the requirement that almost all implementations of a random initial functions satisfied the conditions under which a deterministic problem is solved, which significantly narrows the class of random ones conditions under which the solution exists in the classical sense. There are many papers that deals with problems of mathematical physics with random conditions, which are based on the study of convergence in probability in the functional spaces of a sequence of random functions that approximate the solutions of boundary value problems. Note that in most of these papers, a method based on the ideas of J. Kanakh is used to find the conditions for uniform convergence of random series. By Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V. a method was proposed that allows to substantiate the application of the Fourier method to the problems of mathematical physics in the multidimensional case. The method based on Kahan's idea is not suitable for this case. In the papers of Kozachenko Yu. V. and his disciples the equations of hyperpbolic and parabolic types of mathematical physics with random factors were studied. In particular, we studied the properties of classical and generalized solutions of such problems, substantiated the application of the Fourier method, found estimates for the distribution of the supremacy of solutions, and built models of solutions of some problems that approximate the solution with given reliability and accuracy in the uniform metric. All these results have not only theoretical but also practical application for further study and development of the theory of hyperbolic and parabolic equations of mathematical physics with random factors. In addition, these results allow to model solutions of boundary value problems of mathematical physics with a given reliability and accuracy in the uniform metric, which can be used in research in the fields of radio engineering, physics, geophysics, financial mathematics, mathematical economics, technical sciences and in mechanics, in particular, there, where methods of computer modeling of random processes are used.

Keywords: Stochastic processes, hyperbolic equation of mathematical physics, parabolic equation of mathematical physics.

References

1. Beysenbayev Ye., Kozachenko Yu. V. (1979). Ravnomernaya skhodimost sluchaynykh ryadov po veroyatnosti i resheniyu krayevykh so sluchaynymi nachalnymi usloviyami *Teoriya veroyatn. i mat. statistika*, 21, 9–23. (in Russian)
2. Buldygin V. V. (1980). Skhodimost sluchaynykh elementov v topologicheskikh prostranstvakh K.: Naukova dumka. (in Russian))
3. Buldygin V. V. (1983). K voprosu o skhodimosti sluchaynykh ryadov v banakhovykh prostranstvakh *Teoriya sluchaynykh protsessov*, 2, 28–34. (in Russian)
4. Buldygin V. V. (1977). Subgaussovskiye protsessy i skhodimost sluchaynykh ryadov v funktsional'nykh prostranstvakh *Ukr. mat. zhurn.*, 29(4), 443–454. (in Russian)
5. Buldygin V. V. (1983). O statisticheskom podkhode k voprosu o sushchestvovanii klassicheskogo resheniya u krayevoy zadachi dlya odnorodnogo giperbolicheskogo uravneniya *Teoriya sluchaynykh protsessov*, 11, 12–19 (in Russian)
6. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. (1979). K voprosu primenimosti metoda Furye dlya resheniya zadach so sluchaynymi krayevymi usloviyami Sluchaynyye protsesy v zadachakh matematicheskoy fiziki. K.: In-t. Matematiki AN USSR, 4–35. (in Russian)
7. Dovgay B. V., Kozachenko Yu. V, Slyvka-Tylyshchak G. I. (2008). Krayovi zadachi matematy-

chnoyi fizyky z vypadkovymy faktoramy. Monohrafiya. K.: Vydavnycho-polihrafichnyy tsentr Kyyivs?kyy universytet. (in Ukrainian)

8. Dovgay B. V., Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. (2010). Modelyuvannya vypadkovykh protsesiv u fizychnykh systemakh. Kyyiv. (in Ukrainian)
9. Zelepugina I. N., Kozachenko Yu. V. (1988). Ob otsenkakh tochnosti modelirovaniya sluchaynykh poley v prostranstvakh *Issleduy. Operatsiy i ASU*, 32, 10–14. (in Russian)
10. Zelepugina I. N., Kozachenko Yu. V. (1988). O skorosti skhodimosti razlozheniy Karunena-Loeva gaussovskikh sluchaynykh protsessov *Teoriya veroyatn. i mat. statistika*, 38, 41–51. (in Russian)
11. Kampe de Fer'ye. (1964). Statisticheskaya mekhanika nepreryvnykh sred Gidrodinamicheskaya neustoychivost. M. IL. 189–230. (in Russian)
12. Kozachenko Yu. V. (1983). O ravnomernoy skhodimosti stokhasticheskikh integralov v norme prostranstva Orlicha *Teoriya veroyatn. i mat. statist.*, 29, 52–64. (in Russian)
13. Kozachenko Yu. V. (1984). Sluchaynyye protsessy v prostranstvekh Orlicha I. *Teoriya veroyatn. i mat. statist.*, 30, 92–107. (in Russian)
14. Kozachenko Yu. V. (1984). Sluchaynyye protsessy v prostranstvekh Orlicha II. *Teoriya veroyatn. i mat. statist.*, 31, 44-50. (in Russian)
15. Kozachenko Yu. V. (1984). Svoystva sluchaynykh protsessov tipa subgauussovskikh *Doklady AN USSR*, 9, 14–16. (in Russian)
16. Kozachenko Yu. V., Veresh K. Y. (2009). Rivnyannya teploprovidnosti z vypadkovymy pochatkovymy umovamy iz prostoriv Orlicha *Teoriya ymov. ta matem. statist.* 80, 56–69. (in Ukrainian)
17. Kozachenko Yu. V., Yendzhirgli M. V. (1994). Obgruntuvannya zastosuvannya metodu Fure do krayovikh zadach z vipadkovimi pochatkovimi umovami. *Teoriya ymovirn. i mat. statistika.* 51, 78–89. (in Ukrainian)
18. Kozachenko Yu. V., Yendzhirgli M. V. (1994). Obgruntuvannya zastosuvannya metodu Fure do krayovikh zadach z vipadkovimi pochatkovimi umovami. II *Teoriya imovirn. i mat. statistika.* 53, 58–68. (in Ukrainian)
19. Kozachenko Yu. V., Kovalchuk Yu. A. (1998). Krayevyye zadachi so sluchaynymi nachalnymi usloviyami i funktsionalnyye ryady iz $Sub_\varphi(\Omega)$. I *Ukr. mat. zhurnal.* 50(4), 504–515. (in Russian)
20. Kozachenko Yu. V., Kovalchuk Yu. A. (1998). Krayevyye zadachi so sluchaynymi nachal'nymi usloviyami i funktsional'nyye ryady iz $Sub_\varphi(\Omega)$. II *Ukr. mat. zhurnal.* 50(5), 897–906. (in Russian)
21. Kozachenko Yu. V., Kovalchuk Yu. A. (1996). Pro zbizhnist' u prostorakh Orlycha deyakykh vypadkovykh ryadiv *Naukovi zapysky Nizhyns'koho pedinstytutu im. M. V. Hoholya, T. KHVI*, vyp. 1, 16–20. (in Ukrainian)
22. Kozachenko Yu. V., Kovalchuk Yu. A. (1997). Pro zbizhnist' stroho $Sub_\varphi(\Omega)$ vypadkovykh ryadiv v normakh prostoriv Orlycha. *Dopovidi NAN Ukrayiny*, 11, 12–15. (in Ukrainian)
23. Kozachenko Yu. V., Kuchinka K. Y., Slyvka-Tylyshchak G. I. (2017). Vypadkovi protsesy v zadachakh matematychnoyi fizyky. Monografiya. Vid-vo TOV "RIK-U". (in Ukrainian)
24. Kozachenko Yu. V., Slyvka G. I. (2003). Obhruntuvannya metodu Fur'ye dlya hiperbolichnoho rivnyannya z vypadkovymy pochatkovymy umovamy *Teoriya ymov. i matem. statist.*, Vip. 69, 48–63. (in Ukrainian)
25. Kozachenko Yu. V., Slyvka G. I. (2003). Krayovi zadachi matematychnoyi fizyky z vypadkovymy pochatkovymy umovamy iz prostoru $Sub_\varphi(\Omega)$ *Dopovidi NAN Ukrainu,* 12, (in Ukrainian)
26. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak G. I. (2006). Pro modelyuvannya rozv'yazku hiperbolichnoho rivnyannya z vypadkovymy pochatkovymy umovami *Teoriya imov. i matem. statist.*, Vip. 74, 52–67. (in Ukrainian)
27. Kozachenko Yu. V., Trigub S. G. (1996). Zastosuvannya metodu Fure do krayovikh zadach z vipadkovimi pochatkovimi umovami *Teoriya ymov. i mat. statistika*, Vip. 54, 51–66. (in Ukrainian)
28. Yadrenko M. I. (1980). Spektralnaya teoriya sluchaynykh poley K .: Vishcha shkola, 270. (in Russian)
29. Barrasa de la Krus E., Kozachenko Yu. V. (1995). Boundary-value problems for equations of

mathematical physics with strictly Orlicz Random initial conditions *Random Oper. And Stoch. Eq.*, 3, 3, 201–220.

30. Beghin L.,Kozachenko Yu., Orsingher E., Sakhno L. (2007). On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial *Journal of Statistical Physics.*, Vol. 127, No. 4. 721–739.
31. Dovgay B. V, Kozachenko Yu. V. (2005). The condition for application of Fourie method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ-subgaussian right hand side *Random Operators and Stochastic Equations.*, Vol. 13, 3, 281–296.
32. Ito K., Nisio M. (1968). On the convergence of sums independent Banah space valued random variables *Osaka J. Math.*, Vol. 5. 1, 35–48.
33. Jain N. C., Marcus M. B. (1978). Continuity of sub-Gaussian processes *Adv. Probab.*, Vol. 4, 81–196.
34. Kahane J. P. (1960). Properties locales des fonctions a series de Fouries aleatories *Studia Math.*, Vol. 19, 1, 1–25.
35. Kahane J. P. (1961). Sur la divergence presque sure presque partout de certaines series de Fouries aleatories *Ann. Univ. Scient., Budapest., Sect. Math.*, 3–4, 101–108.
36. Kozachenko Yu. V., Leonenko G. M. (2006). Extremal behavior of the heat random field *Extremes*, 8, 191–205.
37. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. (2009). The heat equation with random initial conditions from Orlicz space *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.* **80**, 63–75; English transl. in *Theory Probab. Mathem. Statist.**80***, 2010. 71–84.
38. Kozachenko Yu. V., Veresh K. J. (2010). Boundary-value problem for nonhomogeneous-parabolic equation with Orlicz right side *Random Operators and Stochastic Equations,* 18, 97–119.
39. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. (2004). Boundary-value problems for equations of mathematical physics with strictly random initial conditions *Theory of Stochastic Processes*, 1-2, 60–71.
40. Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I. (2014). The Cauchy problem for the heat equation with a random right side *Random Oper. and Stoch. Equ.*, 22(1), 53–64.
41. Kozachenko Yu. V.,Slyvka-Tylyshchak A. I. (2014). The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$ *Applied Mathematics,* 5, 2318–2333.
42. Kovalchuk Yu. O., Kovalchuk Yu. O. (1997). The Boundary-Value Problems for Equations of Mathematical Physics with Strictly $sub_{\varphi}(\Omega)$ Random Initial Conditions *The Second Scandinavian-Ukrainian Conference in Mathematical Statistics. Abstracts. – Sweden, Umea*, 45.
43. Paley A. C., Zygmund A. (1930). On some series functions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 23(4), 190–205.
44. Paley A. C., Wiener N., Zygmund A. (1932). Notes on random functions. *Math. Z.* 37 (4), 647–668.
45. Talagrand M. (1932). Regularite des processes gaussien. *C. R. Acad. Sc.* 37(4), 647–668.

Одержано 02.10.2020

УДК 512.544
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).36-44

Д. Ю. Білецька[1], І. В. Шапочка[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрантка 2-го року навчання,
biletskadiana27@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2907-4690

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри алгебри,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0904-7879

ПРО ЦЕНТРАЛЬНІ РЯДИ ДЕЯКИХ ЧЕРНІКОВСЬКИХ p-ГРУП

В цій роботі досліджується структура центрального ряду черніковської p-групи G, яка містить максимальну повну абелеву підгрупу M індексу p. Добре відомо, що така група є гіперцентальною групою. З іншого боку із теорії розширень груп також добре відомо, що будову цієї групи можна визначити за допомогою певного цілочислового p-адичного матричного зображення Γ фактор-групи G/M та елементом із другої групи гомологій $H^2(G/M, M)$. Якщо група G має центральний ряд $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G$, який є композиційним рядом, то число трансфінітних чисел множини індексів членів цього ряду будемо називати трансфінітною довжиною цього композиційного ряду. Вважатимемо, що G є адитивною групою, а Γ — матричне цілочислове p-адичне зображення фактор-групи G/M, індуковане гомоморфізмом $f : g \to f_g$, $g \in G$, із групи G в групу автоморфізмів $\operatorname{Aut} M$, де $f_g(m) = -g+m+g$, $m \in M$. Нами показано, що трансфінітна довжина композиційного ряду групи G дорівнює кратності незвідної компоненти $g+M \to 1$ зображення Γ, якщо G є абелевою групою, і на одиницю більше цього числа, якщо ж G — неабелева група.

Нехай $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — адитивна квазіциклічна p-група, а $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ для деякого натурального числа n. Добре відомо [1], що група $\operatorname{Aut} \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ ізоморфна повній лінійній групі $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ та довільного елемента $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ через $A(c)$ позначатимемо образ елемента c при автоморфізмі, що відповідає матриці A. Нехай $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ — множина всіх твірних елементів групи C_{p^∞}, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причому $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ для довільного $r \in \mathbb{N}$. Розглянемо циклічну адитивну групу H порядку p з твірним елементом h і деяке матричне зображення Γ цієї групи степеня n над кільцем $\mathbb{Z}_p$. Образ будь-якого елемента h' групи H позначатимемо через $\Gamma_{h'}$. Визначимо дію $\cdot$ групи H на групі $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ за правилом $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ для довільних елементів $h' \in H$ і $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Підкреслимо, що ядро $\operatorname{Ker} \Gamma$ є підгрупою стабілізатора кожного елемента із $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Нескладно переконатися, що множина

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$. Для матричного зображення Γ групи H та деякого елемента $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ побудуємо групу $G(\Gamma, c)$ наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{p^\infty}^n,$$

а бінарна операція $+$ задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\ \mu_{i,j} c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

де $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i+j < p, \\ 1, & \text{якщо } i+j \geq p. \end{cases}$$

В [2] доведено, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ за допомогою групи H, а як наслідок, є черніковською p-групою.

В [3] описані з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p. Вони вичерпуються наступними групами:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

де

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення циклічної групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ — відповідно $(p-1)\times(p-1)$- та $(p-1)\times 1$-матриці над кільцем $\mathbb{Z}_p$ вигляду:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ — розкладне матричне зображення групи H з n_i екземплярами нерозкладного зображення Γ_i для $i \in \{1,2,3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \dots, a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

В роботі для кожної з груп

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

побудовано композиційний центральний ряд.

Ключові слова: черніковська група, гіперцентральна група, центральний ряд, матричне зображення групи, незвідна компонента зображення.

1. Вступ. Нехай надалі всюди p — натуральне просте число, $\mathbb{C}_{p^\infty}$ — адитивна квазіциклічна p-група, а $\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ — зовнішня пряма сума n екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$ для деякого натурального числа n. Символом 0 завжди будемо позначати нульовий елемент відповідної структури. Добре відомо [1], що група $\operatorname{Aut}\mathbb{C}_{p^\infty}^n$ ізоморфна повній лінійній групі $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}_p)$ та довільного елемента $c \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ через $A(c)$ позначатимемо образ елемента c при автоморфізмі, що відповідає матриці A. Нехай $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ — множина всіх твірних елементів групи C_{p^∞}, де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, причому $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ для довільного $r \in \mathbb{N}$. Якщо $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n,\mathbb{Z}_p)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}_{p^\infty}^n$ і

$$\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)}p + x_{ij}^{(2)}p^2 + \dots \in \mathbb{Z}_p,$$
$$c_k = y_0^{(k)}a_0 + y_1^{(k)}a_1 + \dots + y_{l_k}^{(k)}a_{l_k} \in \mathbb{C}_{p^\infty},$$

де $x_{ij}^{(r)}$, $y_l^{(k)} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $l_k \in \mathbb{N}_0$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$A(c) = (c_1', c_2', \dots, c_n'),$$

де

$$c_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(c_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{l_k} \sum_{l=0}^{l_k} x_{ij}^{(r)} y_l^{(j)} p^r a_l. \tag{1}$$

Розглянемо циклічну адитивну групу H порядку p з твірним елементом h і деяке матричне зображення Γ цієї групи степеня n над кільцем $\mathbb{Z}_p$. Образ будь-якого елемента h' групи H позначатимемо через $\Gamma_{h'}$. Визначимо дію $\cdot$ групи H на групі $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ за правилом $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ для довільних елементів $h' \in H$ і $c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Підкреслимо, що ядро $\operatorname{Ker}\Gamma$ є підгрупою стабілізатора кожного елемента із $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Нескладно переконатися, що множина

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty} \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ і що для будь-яких елементів $h' \in H$ та $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ справджується рівність $h' \cdot c = c$. Для матричного зображення Γ групи H та деякого елемента $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ побудуємо групу $G(\Gamma, c)$ наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}^n_{p^\infty},$$

а бінарна операція $+$ задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h,\ \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2), \tag{2}$$

де $i,\ j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i + j < p, \\ 1, & \text{якщо } i + j \geq p. \end{cases}$$

В [2] доведено, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ за допомогою групи H, а як наслідок, є черніковською p-групою.

В [3] описані з точністю до ізоморфізму всі черніковські p-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p. Вони вичерпуються наступними групами:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)}) \tag{3}$$

де

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— всі попарно нееквівалентні нерозкладні матричні зображення циклічної групи H над кільцем $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ — відповідно $(p-1) \times (p-1)$- та $(p-1) \times 1$-матриці над кільцем $\mathbb{Z}_p$ вигляду:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$n_1,\ n_2,\ n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ — розкладне матричне зображення групи H з n_i екземплярами нерозкладного зображення Γ_i для $i \in \{1, 2, 3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k \text{ раз}}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Відомо [4], що всяка черніковська p-група є гіперцентральною групою. Знайдемо верхні центральні ряди вище перерахованих черніковських p-груп (див. 3) і доповнимо їх до композиційних рядів цих груп, якщо вони не є такими.

2. Центр групи $G(\Gamma, c)$. Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$. Почнемо з загальної характеристики центру $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ групи $G(\Gamma, c)$. Нехай $(h', c') \in \mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$. Тоді

$$(h', c') + (0, c'') = (0, c'') + (h', c')$$

для будь-якого елементна $c'' \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$. Звідси $h' \cdot c'' = c''$, а тому $\Gamma_{h'}(c'') = c''$ для всіх $c'' \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$, тобто $\Gamma_{h'}$ є одиничною матрицею порядку n. Як наслідок h' є елементом ядра $\operatorname{Ker}\Gamma$. З іншого боку

$$(h', c') + (h'', 0) = (h'', 0) + (h', c')$$

для будь-якого елементна $h'' \in H$, зокрема для h. Через це $h \cdot c' = c'$. Звідси $c' \in \mathfrak{z}(\Gamma)$. Таким чином, $(h', c') \in \operatorname{Ker}\Gamma \times \mathfrak{z}(\Gamma)$. Навпаки, очевидно, що будь-який елемент вигляду (h', c'), де $h' \in \operatorname{Ker}\Gamma$, $c' \in \mathfrak{z}(\Gamma)$, міститься у центрі групи $G(\Gamma, c)$. Нами доведено наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, c — елемент із $\mathfrak{z}(\Gamma)$. Тоді центр $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ групи $G(\Gamma, c)$ дорівнює $\operatorname{Ker}\Gamma \times \mathfrak{z}(\Gamma)$.*

Наслідок 1. *Нехай Γ — деяке матричне зображення групи H, c — елемент із $\mathfrak{z}(\Gamma)$. Тоді група $G(\Gamma, c)$ є абелевою тоді і тільки тоді, коли Γ — одиничне матричне зображення групи H.*

Наслідок 2. *Якщо ж Γ є точним матричним зображенням групи H, то центр $\mathfrak{Z}(G(\Gamma, c))$ дорівнює $\{0\} \times \mathfrak{z}(\Gamma)$.*

Надалі підгрупу $\{0\} \times \mathfrak{z}(\Gamma)$ групи $G(\Gamma, c)$ позначатимемо через $\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma)$.

3. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_1, c)$. Із [3] слідує, що $\mathfrak{z}(\Gamma_1) = \langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle$. Отже, центр як групи $G(\Gamma_1, 0)$, так і групи $G(\Gamma_1, \mathfrak{c}^{(0)})$ дорівнює $\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$. Введемо позначення

$$c_{ij} = (0, \dots, 0, a_j, 0, \dots, 0), \tag{5}$$

де ненульовою компонентою є лише $(i+1)$-ва, $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Тому

$$\mathfrak{c}^{(0)} = (p-1)c_{10} + (p-2)c_{2\,0} + \dots + c_{p-1\,0}.$$

Знову ж таки, як $G(\Gamma_1, 0)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$, так і фактор-група $G(\Gamma_1, \mathfrak{c}^{(0)})/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$ породжується множиною елементів

$$\{(h, 0) + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1),\ c_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1),\ (p-1)c_{1\,j+1} + (p-2)c_{2\,j+1} + \dots + c_{p-1\,j+1} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1) \mid \\ i \in \{1, 2, \dots, p-2\},\ j \in \mathbb{N}_0\},$$

причому ця фактор-група є також черніковською p-групою, фактор-група якої за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p.

Оскільки із (2) слідує, що $p(h,0) = (0, \mathfrak{c}^{(0)})$, то фактор-група $G(\Gamma_1, c)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_1)$ ізоморфна $G(\Delta, 0)$, де Δ — матричне зображення групи H вигляду

$$\Delta : h \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 3 & -3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p-2 & -(p-2) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p & -(p-1) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Розглянемо матрицю

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -(p-4) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -(p-3) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -(p-2) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -(p-1) & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриця S є оборотною $\mathbb{Z}_p$-матрицею і $S^{-1}\Delta(h)S = \Gamma_1(h)$. Як наслідок

$$G(\Delta, 0) \cong G(\Gamma_1, 0).$$

Застосовуючи метод математичної індукції одержуємо, що верхній центральний ряд групи G де $G = G(\Gamma_1, 0)$ або $G = G(\Gamma_1, \mathfrak{c}^{(0)})$ має вигляд

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 = \{0\} \times \langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset Z_{\omega+1} = G, \tag{7}$$

де множина індексів членів цього ряду є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω. Причому для кожного скінченного ординального числа i фактор Z_{i+1}/Z_i ізоморфний циклічній групі $\langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle$, $Z_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$, а фактор $Z_{\omega+1}/Z_\omega$ ізоморфний циклічній групі H. Це показано засобами теорії груп у роботі [5] і узагальнено для ширшого класу гіперцентральних груп із застосуванням теорії зображень у роботі [6]. Очевидно, ряд (7) є композиційним рядом групи G.

4. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_2, 0)$. Із наслідку 1 випливає, що верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_2, 0)$ складається лише з двох членів $\{0\} = Y_0 \subset Y_1 = G(\Gamma_2, 0)$. Доповнимо цей ряд до композиційного ряду

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset Z_{\omega+1} = G(\Gamma_2, 0), \tag{8}$$

де множина індексів членів цього ряду є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω. Причому для кожного скінченного ординального числа i член Z_i цього ряду є циклічною групою $\langle (0, a_{i-1}) \rangle$, а $Z_\omega = \{0\} \times \mathbb{C}^1_{p^\infty}$. Підкреслимо, що композиційний ряд (8) є і центральним рядом групи G, у якого множина індексів його членів є ординалом, що містить єдине трансфінітне ординальне число ω.

5. Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_3, 0)$**.** Із [3] слідує, що

$$\mathfrak{z}(\Gamma_3) = \{((p-1)u, (p-2)u, \ldots, u, pu) \mid u \in \mathbb{C}_{p^\infty}\}. \tag{9}$$

Очевидно $\mathfrak{z}(\Gamma_3) \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. Фактор-група $G(\Gamma_3, 0)/\bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3)$ породжується множиною елементів (див. позначення (5))

$$\{(h, 0) + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3),\ c_{ij} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3),\ (p-1)c_{1\,j+1} + (p-2)c_{2\,j+1} + \cdots + c_{p-1\,j+1} + \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3) \mid \\ i \in \{1, 2, \ldots, p-2\},\ j \in \mathbb{N}_0\},$$

причому ця фактор-група є також черніковською p-групою, яка є розширенням групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^{p-1}$ за допомогою циклічної групи порядку p. Аналогічно випадку групи $G(\Gamma_1, c)$ можна показати, що ця фактор-група ізоморфна групі вигляду $G(\Delta, 0)$, де Δ — матричне зображення групи H вигляду (6), а отже, ізоморфна і групі $G(\Gamma_1, 0)$.

Із вище одержаних результатів слідує, верхній центральний ряд групи $G = G(\Gamma_3, 0)$ має вигляд

$$\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G, \tag{10}$$

де $Y_1 = \bar{\mathfrak{z}}(\Gamma_3)$ (див. (9)), для кожного натурального i фактор Y_{i+1}/Y_i ізоморфний циклічній групі $\langle \mathfrak{c}^{(0)} \rangle$, $Y_\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$, а фактор $Y_{\omega+1}/Y_\omega$ ізоморфний циклічній групі H. Доповнимо верхній центральний ряд (10) до композиційного ряду

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\gamma \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G, \tag{11}$$

де $Z_{j+1} = \langle \mathfrak{c}_j^{(1)} \rangle$,

$$\mathfrak{c}_j^{(1)} = (p-1)c_{1j} + (p-2)c_{2j} + \cdots + c_{p-1\,j} + pc_{p\,j}, \qquad j \in \mathbb{N}_0,$$

$Z_\gamma = Y_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$. Ряд (11) є центральним рядом групи G, у якого множина індексів його членів є ординалом, що містить два трансфінітні ординальні числа γ і ω.

6. Верхній центральний ряд групи $G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0)$**.** Із теорії розширень абелевих груп [7] випливає, що якщо матричне $\mathbb{Z}_p$-зображення Γ є розкладним вигляду $\Gamma = n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$, де n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$, то

$$\mathfrak{z}(\Gamma) \cong \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_1)}_{n_1 \text{ раз}} \dotplus \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_2) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_2)}_{n_2 \text{ раз}} \dotplus \underbrace{\mathfrak{z}(\Gamma_3) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{z}(\Gamma_3)}_{n_3 \text{ раз}}.$$

Тому структуру кожного фактору верхнього центрального ряду групи $G = G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0)$ можна легко визначити за допомогою попередньо розглянутих випадків. Зокрема центр Y_1 цієї групи ізоморфний прямій сумі елементарної абелевої p-групи рангу n_1 та групи $\mathbb{C}_{p^\infty}^{n_2+n_3}$, що в свою чергу є прямою сумою $n_2 + n_3$ екземплярів квазіциклічної p-групи $\mathbb{C}_{p^\infty}$. Аналогічно випадку групи $G(\Gamma_3, 0)$ фактор-група G/Y_1 ізоморфна групі $G((n_1 + n_3)\Gamma_1, 0)$. Через кожен наступний фактор верхнього центрального ряду

$$\{0\} = Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_\omega \subset Y_{\omega+1} = G \tag{12}$$

групи G є елементарною абелевою p-групою рангу $n_1 + n_3$. Доповнюючи його до композиційного ряду, одержимо центральний ряд, множина індексів якого є ординалом, що містить $n_2 + n_3 + 1$ трансфінітних ординальних числа.

Верхній центральний ряд групи $G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$ аналогічний ряду (12).

Означення 1. *Нехай G — гіперцентральна група, що має центральний ряд*

$$\{0\} = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G, \tag{13}$$

який є композиційним рядом. Число трансфінітних чисел множини індексів членів цього ряду будемо називати трансфінітною довжиною композиційного ряду (13).

Оскільки будь-які два композиційні ряди групи ізоморфні, то трансфінітна довжина композиційного ряду групи G не залежить від вибору цього ряду. Отже, із вище одержаних результатів слідує наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай G є адитивною черніковською p-групою, фактор-група G/M якої за максимальною повною абелевою підгрупою M є циклічною групою порядку p. Якщо Γ — матричне цілочислове p-адичне зображення фактор-групи G/M, індуковане гомоморфізмом $f : g \to f_g$, $g \in G$, із групи G в групу автоморфізмів $\operatorname{Aut} M$, де $f_g(m) = -g + m + g$, $m \in M$, то трансфінітна довжина композиційного ряду групи G дорівнює кратності незвідної компоненти $g + M \to 1$ зображення Γ, якщо G є абелевою групою, і на одиницю більше цього числа, якщо ж G — неабелева група.*

Список використаної літератури

1. Курош А. Г. Теория групп. Москва: Наука, 1967. 648 с.
2. Холл М. Теория групп. Москва: Мир, 1966. 543 с.
3. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп. *Український математичний журнал.* 1992. Том 44, №6. С. 742–753.
4. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. Москва: Наука, 1980. 384 с.
5. Baumslag G., Blackburn N. Groups with cyclic upper central factors. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1960. 10. P. 531–544.
6. Hartley B. A dual approach to Chernikov modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Socciety.* 1977. P. 215–239.
7. Маклейн С. Гомология. Москва: Мир, 1966. 543 с.

Biletska D. Yu., Shapochka I. V. On central series of some Chernikov p-groups.

In this paper, we study the structure of the central series of the Chernikov p-group G, which contains the maximum complete Abelian subgroup M of the index p. It is well known that such a group is a hypercental group. On the other hand, it is also well known from the theory of group extensions that the structure of this group can be determined by means of a certain integer p-adic matrix image Γ of the factor group G/M and an element from the second group of homologies $H^2(G/M, M)$. If the group G has a central series $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_\omega \subset \ldots \subset G$, which is a composition series, the number of transfinite numbers of the set of indices of the members of this series will be called the transfinite length of this composition series. Assume that G is an additive group, and Γ is a matrix representaion over the ring of p-adic integers of the factor group G/M induced by the homomorphism $f : g \to f_g$, $g \in G$, from the group G to the group of automorphisms

$\mathrm{Aut}\, M$, where $f_g(m) = -g + m + g$, $m \in M$. We have shown that the transfinite length of the composition series of the group G is equal to the number of the irreducible component $g + M \to 1$ of the representation Γ, if G is an Abelian group, and one more of this number, if G — non-Abelian group.

Let $\mathbb{C}_{p^\infty}$ be an additive quasicyclic p-group, and let $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ be an external direct sum n instances of the quasicyclic p-group $\mathbb{C}_{p^\infty}$ for some positive integer n. It is well known [1] that the group $\mathrm{Aut}\, \mathbb{C}^n_{p^\infty}$ isomorphic to the complete linear group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, where $\mathbb{Z}_p$ the ring of p-adic integers. Therefore, in the future for an arbitrary matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ and an arbitrary element $c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$ through $A(c)$ denote the image of the element c in the automorphism that corresponds to the matrix A. Let $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$ be the set of all generators of the group C_{p^∞}, where $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$ for all $r \in \mathbb{N}$.

Consider a cyclic additive group H of order p with a generating element h and some matrix image Γ of this group of degree n over the ring $\mathbb{Z}_p$. The image of any element h' of the group H is denoted by $\Gamma_{h'}$. Determine the action $\cdot$ of the group H on the group $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ by the rule $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$ for arbitrary elements $h' \in H$ and $c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$. We emphasize that the kernel $\mathrm{Ker}\, \Gamma$ is a subgroup of the stabilizer of each element with $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$. It is easy to see that the set

$$\mathfrak{z}(\Gamma) = \{c \in \mathbb{C}^n_{p^\infty} \mid h \cdot c = c\}$$

is a subgroup of $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$. For the matrix image Γ of the group H and some element $c \in \mathfrak{z}(\Gamma)$ we construct the group $G(\Gamma, c)$ as follows:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}^n_{p^\infty},$$

and the binary operation $+$ is set as follows

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i + j)h,\ \mu_{i,j} c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

where i, $j \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}^n_{p^\infty}$,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{if } \ i + j < p, \\ 1, & \text{if } \ i + j \geq p. \end{cases}$$

In [2] it is proved that the group constructed in this way is a cyclic extension of the group $\mathbb{C}^n_{p^\infty}$ by the group H, and, as a consequence, is a Chernikov p-group.

In [3], all Chernikov p-groups are described up to the isomorphism, the factor group of which by the maximum complete Abelian subgroup is a cyclic group of order p. They are limited to the following groups:

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

where

$$\Gamma_1 : h \to \tilde{\varepsilon}, \qquad \Gamma_2 : h \to 1, \qquad \Gamma_3 : h \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are all pairwise non-equivalent indecomposable matrix images of the cyclic group H over the ring $\mathbb{Z}_p$; $\tilde{\varepsilon}$, $\langle 1 \rangle$ are respectively $(p-1) \times (p-1)$- and $(p-1) \times 1$-matrices over the ring $\mathbb{Z}_p$ of the form:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}_0$; $n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3$ is a decomposable matrix representation of the group H with n_i instances of the indecomposable component Γ_i for $i \in \{1, 2, 3\}$;

$$\mathfrak{c}^{(k)} = ((p-1)a_0, (p-2)a_0, \ldots, a_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k\text{times}}), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

In the work for each of the groups

$$G(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, 0), \quad G(\Gamma_1 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3, \mathfrak{c}^{(n_1(p-1)+n_2+n_3p)})$$

the composition central series is build.

Keywords: Chernikov group, hypercentral group, central series, matrix representation of group, irreducible component of representation.

References

1. Kurosh, A. G. (1967). Teoriia grupp [Group theory]. *Moskva: Nauka* [in Russian]
2. Kholl, M. (1966). Teoriia grupp [Group theory]. *Moskva: Mir* [in Russian]
3. Gudivok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikovskiye p-gruppy i tselochislennyye p-adicheskiye predstavleniya konechnykh grupp [Chernikov p-groups and integral p-adic representations of finite groups], *Ukrain. Mat. Zh., 44*, 742–753. [in Russian]
4. Chernikov, S. N. (1980). Gruppy s zadannymi svoystvami sistemy podgrupp [Groups with given properties of systems of subgroups]. *Moskva: Nauka* [in Russian]
5. Baumslag, G., & Blackburn, N. (1960). Groups with cyclic upper central factors. *Proceedings of the London Mathematical Society, 10*, 531–544.
6. Hartley, B. (1977). A dual approach to Chernikov modules. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Socciety*, 215–239.
7. Makleyn, S. (1966). Gomologiya [Homology]. *Moskva: Mir* [in Russian].

Одержано 27.09.2020

УДК 519.214.4
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).45-53

В. Ю. Богданський[1], О. І. Клесов[2]

[1] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
аспірант
myemailaddress4567@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5334-8471

[2] Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук
klesov@matan.kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0365-7716

ДО СТАТТІ БАССА І ПАЙКА

Присвячено світлій пам'яті Юрія Васильовича Козаченка

В 1984 році Р. Пайк та Р. Басс [1] запропонували вивчати рівномірні по класу множин граничні теореми для випадкових величин, які залежать від множин з певного класу. У цій роботі доводиться природне узагальнення теореми Басс-Пайка про рівномірний підсилений закон великих чисел для випадкових процесів, індексованих множинами. Замість сум випадкових величин по множинах, як у Басса–Пайка, ми розглядаємо більш загальну ситуацію випадкових зарядів та мір. Оскільки рівномірний закон великих чисел для випадкових зарядів та мір не може виконуватись для довільного класу множин, то ми використовуємо умову Басса-Пайка про рівномірну малість міри Лебега δ-околів множин класу. У випадку випадкових зарядів ми використовуємо додаткову умову про існування мажорантної міри. Цю умову у випадку випадкових мір можна, звичайно, опустити. Метод доведення основного результату цієї статті в цілому є модифікацією методу Басса-Пайка.

У ряді наслідків основного результату ми наводимо відповідні результати для конкретних ситуацій. Зокрема, у наслідку 2 ми показуємо як можна позбутися додаткової умови для випадкових зарядів. У наслідку 4 розглянуто випадок не обов'язково незалежних або однаково розподілених випадкових величин. Виявляється, що замість цього можна лише припустити, що виконується не рівномірний підсилений закон великих чисел. Більше того, гранична константа у цьому результаті не обов'язково має бути невипадковою. Для такої ж постановки у наслідку 5 показано як можна позбутися додаткової умови, яку ми накладаємо на випадкові заряди. Нарешті у наслідку 6 розглянуто випадок, коли випадкова міра породжується певним випадковим процесом.

Ще один основний результат цієї статті стосується рівномірного підсиленого закону великих чисел для аналога процесу відновлення. Як і у випадку сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, цей результат справджується у припущенні існування першого моменту. Жодного результата стосовно такого узагальненого процесу відновлення раніше відомо не було.

Ключові слова: посилений закон великих чисел, випадковий заряд, процес відновлення, рівномірний посилений закон великих чисел, випадковий процес, індексований множинами.

1. Вступ. Підсилений закон великих чисел для однаково розподілених випадкових величин Бернуллі було доведено у 1909 році Е. Борелем. Загальний випадок незалежних випадкових величин було розглянуто Колмогоровим, який довів, що у випадку існування першого моменту

$$\frac{S_n}{n} \to E[X_1] \qquad \text{майже напевно,}$$

де $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ – кумулятивні суми незалежних однаково розподілених випадкових величин X_k, $k \geq 1$, з скінченим математичним сподіванням. У подальшому цей результат узагальнювали у різних напрямках. Відома теорема Марцинкевича–Зігмунда – це фактично результат про швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел Колмогорова. Особлива увага приділялася сумам залежних випадкових величин, а також сумам випадкових елементів в абстрактних банахових просторах. Новий напрямок з'явився у 80-их роках XX сторіччя, який стосувався кратних сум випадкових величин. Цей випадок відрізнявся від усіх попередніх тим, що множини, за якими здійснюються підсумовування (прямокутники $[1, n_1] \times \cdots \times [1, n_d]$), не утворюють зростаючу послідовність. Наслідком цієї особливості є більш обмежливі моментні умови (див. [2]). Ще більш загальна конструкція сум за множинами з певного класу з'явилася в роботах Басса та Пайка (див., наприклад, [1]). При цьому твердження Басса та Пайка виконувались рівномірно за класом множин, що спричиняло необхідність накладати певні обмеження на класи множин. Аналоги теореми Басса–Пайка про підсилений закон великих чисел для так званих керованих сум доведено в [3], де знайдені достатні умови для

$$\frac{S_{(n)}}{n} \to E[X_1] \qquad \text{майже напевно,}$$

де $S_{(n)}$ – це суми (не обов'язково кумулятивні) незалежних однаково розподілених випадкових величин X_k, $k \geq 1$. Низку результатів, аналогічних теоремі Басса–Пайка, можна знайти в [4] та [5].

В цій роботі ми продовжуємо дослідження, розпочаті в [5]. Основним результатом статті стосовно рівномірного підсиленого закону великих чисел для сум за множинами є теорема 2. Оскільки рівномірний закон великих чисел для випадкових зарядів та мір не може виконуватись для довільного класу множин, то ми використовуємо умову Басса-Пайка про рівномірну малість міри Лебега δ-околів множин класу. У випадку випадкових зарядів ми використовуємо додаткову умову про існування мажорантної міри. Цю умову у випадку випадкових мір можна, звичайно, опустити.

Іншим основним результатом цієї статті є теорема 3 про рівномірний підсилений закон великих чисел для аналога процесу відновлення, а не для сум. Як і у випадку сум незалежних однаково розподілених випадкових величин, цей результат справджується у припущенні існування першого моменту. Жодного результата стосовно такого узагальненого процесу відновлення раніше відомо не було.

2. Теорема Басса–Пайка. У статті [3] розглядається версія ПЗВЧ для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин з наборів, що не обов'язково містять один одного.

У статті [4] наводиться версія ПЗВЧ для випадкових зарядів.

У статті [1] Р. Басс і Р. Пайк довели наступне твердження (яке є версією рівномірного ПЗВЧ):

Теорема 1. *Позначимо:*
kB – *множина* $\{kx : x \in B\}$, *де* $k \in \mathbb{R}$, $B \subset R^d$;
$\mathbb{R}^d_+$ – *множина точок з додатними координатами в* $\mathbb{R}^d$;
$J = \{1, 2, \ldots\}^d$ – *множина точок з цілими координатами в* $\mathbb{R}^d_+$.

Нехай $\mathcal{A}$ – *деяка сукупність борелевських підмножин* $[0,1]^d \subset R^d$, *така, що*

$$r(\delta) \equiv \sup_{A \in \mathcal{A}} |A(\delta)| \to 0, \ \delta \to 0, \tag{1}$$

де $A(\delta) = \{x : \rho(x, \partial A) < \delta\}$ – δ-*окіл границі множини* A; $|A|$ – *міра Лебега множини* $A \in \mathbb{R}^d$.

Нехай $\{X_j\}, j \in J$, – *сукупність незалежних і однаково розподілених випадкових величин зі скінченним математичним сподіванням* $EX_j = \mu < \infty$. *Позначимо* $S(B) = \sum_{j \in B} X_j$. *Тоді*

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{S(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \to 0, n \to \infty, \text{м.н.}$$

У цій статті наводиться його природне узагальнення і декілька наслідків з цього узагальнення. Також доводиться аналогічне твердження для процесу відновлення.

3. Основний результат.

Теорема 2. *Нехай:*

$\mathcal{A}$ – *деяка сукупність борелевських підмножин* I, *де* $I = (0,1]^d$ - *півінтервал в* R^d;

X – *деякий випадковий заряд. Тут під "випадковим зарядом" розуміємо функцію, задану на* $\overline{\mathbb{B}} \times \Omega$, *де* $\overline{\mathbb{B}}$ – *сукупність обмежених борелевських підмножин* $\mathbb{R}^d_+$, *що є зарядом при фіксованому* $\omega \in \Omega$, *а при фіксованому* $B \in \overline{\mathbb{B}}$ – *випадковою величиною. Аналогічно визначаємо випадкову міру.*

Припустимо, що на $\mathcal{A}$ *та* X *накладені наступні умови:*

1) Для $\mathcal{A}$ *виконується* (1).

2) Існує Y – *випадкова міра, задана на обмежених борелевських підмножинах* $\mathbb{R}^d_+$, *така, що* $Y \geq |X|$, *і майже напевно* $\exists\ \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, *що* $\forall B \in \mathcal{C}$ *виконується:*

$$\frac{X(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty, \tag{2}$$

$$\frac{Y(nB)}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty. \tag{3}$$

Тут $\mathcal{C}$ – *сукупність множин* $\left(0, \dfrac{j}{m}\right] \subset I$, *де* $j \in J$, $m \in \mathbb{N}$; $(x, y]$ – *півінтервал в* $\mathbb{R}^d$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ *і всі координати* y *більші за відповідні координати* x.

Позначимо через $\mu(\omega)$ *і* $\lambda(\omega)$ *відповідні майже напевно визначені функції* $\Omega \to \mathbb{R}$.

Тоді

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \to 0, n \to \infty, \text{м.н.} \tag{4}$$

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теореми 1 з [1].

Позначимо $C_j^m = \frac{1}{m}(j-1, j]$, де $j \in J, m \in \mathbb{N}$ і $j \in mI$; $\mathcal{B}$ – сукупність всіх можливих множин, які є об'єднаннями деяких C_j^m при фіксованому m.

Спочатку покажемо, що якщо для деякого ω існує таке μ, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується (12), тоді умова (12) виконується також для $\forall\, B \in \mathcal{B}$.

Дійсно, помітимо, що якщо (12) виконується для двох множин B_1 і B_2, що не перетинаються, тоді умова (12) також виконується для $B_1 \cup B_2$. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1 \cup B_2))}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1))}{n^d} + \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2))}{n^d} =$$

$$= \mu \cdot |B_1| + \mu \cdot |B_2| = \mu \cdot |B_1 \cup B_2|.$$

Аналогічно, якщо (12) виконується для B_1 і B_2, причому $B_1 \subset B_2$, то (12) виконується для $B_2 \backslash B_1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2 \backslash B_1))}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_2))}{n^d} - \lim_{n\to\infty} \frac{X(n(B_1))}{n^d} = \mu \cdot |B_2| - \mu \cdot |B_1| = \mu \cdot |B_2 \backslash B_1|.$$

Покажемо, що кожну множину $B \in \mathcal{B}$ можна отримати за декілька кроків з множин $\mathcal{C}$ шляхом застосування цих двох операцій. Оскільки $B \in \mathcal{B}$ є об'єднанням множин C_j^m, то достатньо довести, що кожну множину вигляду $(x, y] = \left(\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right] \subset I$, де $j_1, j_2 \in J$, можна отримати з множин $\mathcal{C}$ шляхом застосування другої з цих операцій за скінченну кількість кроків.

Позначимо $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$, де $x_i \in \{0, 1, ..., m-1\}$, $y_i \in \{1, 2, ..., m\}$. Скористаємося індукцією за k, де $k \in \{0, 1, ..., d\}$ – найменше число, для якого $x_l = 0, \forall k < l \le d$. При $k = 0$ твердження очевидне. Якщо твердження виконується для $k = s < d$, то воно також виконується для $k = s+1$, оскільки якщо $x = (x_1, ..., x_{s+1}, 0, ..., 0)$, $x' = (x_1, ..., x_s, 0, ..., 0)$, то $(x, y] = (x', y] \backslash (x', (y_1, y_2, ..., y_s, x_{s+1}, y_{s+2}, ..., y_d)]$.

Застосовуючи аналогічні міркування для (3), отримаємо, що майже напевно $\exists\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, що $\forall\, B \in \mathcal{B}$ виконуються (12) і (3).

Позначимо $B'_m = \bigcup\limits_{\mathbf{j}\,:\,C_j^m \subseteq B} C_j^m$, $B''_m = \bigcup\limits_{\mathbf{j}\,:\,C_j^m \cap B \neq \varnothing} C_j^m$, де $B \subset R_+^d$, $m \in \mathbb{N}$.

Помітимо, що для всіх ω, для яких визначено μ і λ, і для всіх $m \in \mathbb{N}$ виконується

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A| \right| \le X_m + Y_m + Z_m,$$

де

$$X_m = \limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA) - X(nA'_m)}{n^d} \right|,$$

$$Y_m = \limsup_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{A}} \left| \frac{X(nA'_m)}{n^d} - \mu|A'_m| \right|,$$

$$Z_m = |\mu| \cdot \sup_{A \in \mathcal{A}} |A \backslash A'_m|.$$

Отже, для доведення (4) достатньо показати, що для всіх ω, для яких визначено μ і λ (а μ і λ визначені майже напевно), виконується $X_m, Y_m, Z_m \to 0$, $m \to \infty$.

$Z_m \to 0, m \to \infty$, оскільки $Z_m \le |\mu| \cdot r(\sqrt{d}/m) \to 0, m \to \infty$, внаслідок (1).

Оскільки $A'_m \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall m \in \mathbb{N}$, то внаслідок (12) отримаємо, що $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{X(nA'_m)}{n^d} - \mu|A'_m| \right| = 0$, і, оскільки $\{A'_m \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ містить скінченну кількість елементів, то $Y_m = 0$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Помітимо, що $X_m \le \limsup\limits_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{A}} \left| \dfrac{Y(n(A''_m \backslash A'_m))}{n^d} \right|$. Оскільки $(A''_m \backslash A'_m) \in \mathcal{B}$, $\forall A \in \mathcal{A}, \forall m \in \mathbb{N}$, то внаслідок (3) $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{Y(n(A''_m \backslash A'_m))}{n^d} \right| = \lambda \cdot |A''_m \backslash A'_m|$, і, оскільки $\{A''_m \backslash A'_m \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ містить скінченну кількість елементів, то $X_m \le \lambda \cdot \sup_{A\in\mathcal{A}} |A''_m \backslash A'_m| \le \lambda \cdot r(\sqrt{d}/m) \to 0, m \to \infty$.

Наслідок 1. *Якщо X – випадкова міра, то додаткова умова на існування Y, звісно, не вимагається.*

Наслідок 2. *Нехай $\{X_j \,|\, j \in J\}$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини з $E[|X_j|] < \infty$ і $E[X_j] = \mu$, $S(B) = \sum_{j\in B} X_j$, $T(B) = \sum_{j\in B} |X_j|$. Тоді якщо $X(B) \equiv S(B)$, то при $Y(B) \equiv T(B)$, $\lambda = E[|X_j|]$ виконується умова теореми* (2).

Доведення. Дійсно, оскільки $\mathcal{C}$ є зліченою множиною, то достатньо довести, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ твердження (12) і (3) виконуються майже напевно. Це є наслідком закона великих чисел: $\dfrac{X(nB)}{n^d} = \dfrac{X(nB)}{W(nB)} \cdot \dfrac{W(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$, м.н.; для (3) аналогічно. Тут через $W(A)$ ми позначаємо кількість цілих точок, що належать множині $A \subset \mathbb{R}^d_+$.

У статті [5] показується, що твердження теореми 1 залишається еквівалентним при заміні умови «$\mathcal{A}$ – деяка сукупність борелевських підмножин $[0,1]^d \subset R^d$» на умову «$\mathcal{A}$ - деяка сукупність борелевських підмножин $(0,1]^d \subset R^d$». Отже, теорема 1 є наслідком теореми 2.

Наслідок 3. *Якщо $X(B) \equiv \sum_{j\in J} |B \cap C^1_j| \cdot X_j$, де $\{X_j \,|\, j \in J\}$ – незалежні і однаково розподілені випадкові величини з $E[|X_j|] < \infty$ і $E[X_j] = \mu$, то при $Y(B) = \sum_{j\in J} |B \cap C^1_j| \cdot |X_j|$, $\lambda = E[|X_j|]$ виконується умова теореми* (2).

Доведення. Знову ж, для (12) достатньо довести, що $\forall\, B \in \mathcal{C}$ виконується $\dfrac{X(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$, м.н. Покажемо це.

Скористаємося позначеннями $S(B)$ і $T(B)$ з наслідка (2). Помітимо, що $|X(nB) - S(nB)| \le T(n(0, x + \frac{1}{n}]) - T(nB)$, де $B = (0, x]$. Оскільки $\dfrac{S(nB)}{n^d} \to \mu \cdot |B|$, $\dfrac{T(nB)}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty$, м.н., то достатньо довести, що $\dfrac{T(n(0, x + \frac{1}{n}])}{n^d} \to \lambda \cdot |B|, n \to \infty$, м.н. Нехай $B_m = (0, x + \frac{1}{m}]$, де $m \in \mathbb{N}$, $B_0 = B$. Тоді майже напевно справедливо, що $\forall m \ge 0$ виконується $\dfrac{T(nB_m)}{n^d} \to \lambda \cdot |B_m|, n \to \infty$. Неважко зрозуміти, что для цих ω $\forall m \in \mathbb{N}$ виконується $\lambda \cdot |B| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{T(nB)}{n^d} \le$

$\liminf \dfrac{T(nB_n)}{n^d} \le \limsup \dfrac{T(nB_n)}{n^d} \le \limsup \dfrac{T(nB_m)}{n^d} = \lambda \cdot |B_m|$. Оскільки m береться довільно, то отримуємо потрібне твердження. (3) доводиться аналогічно.

Наслідок 4. *Якщо $X(A) = S(A)$, як у наслідку 2, але $\{X_j\}$ не обов'язково незалежні і однаково розподілені, проте на них накладена умова*

$$\frac{S(k)}{|k|} \to \mu(\omega), |k| \to \infty, \text{м.н.}, \tag{5}$$

де $S(x) \equiv S((0,x])$, $k \in J$, і T також задовольняє аналогічній умові, то умова теореми 2 виконується, оскільки якщо для ω виконується (5), то для нього $\forall\, B = (0,x] \in \mathcal{C}$ виконується $\dfrac{S(nx)}{n^d} = \dfrac{S([nx])}{|[nx]|} \cdot \dfrac{|[nx]|}{n^d} \to \mu \cdot |B|, n \to \infty$; тут $[y] = ([y_1],[y_2],...,[y_d])$, якщо $y = (y_1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Наслідок 5. *Якщо $X(A) = S(A)$, як у наслідку 2, але $\{X_j\}$ не обов'язково незалежні і однаково розподілені, проте $\exists\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, що для будь-якої послідовності $\{X_{j_i}\}$, $i \ge 1$, виконується, що $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_{j_i} \to \mu$, $n \to \infty$, м.н. і $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_{j_i}| \to \lambda$, $n \to \infty$, м.н., то умова теореми 2 виконується.*

Доведення цього таке ж саме, як у наслідку 2.

Наслідок 6. *Нехай $f(x)$ – випадкова функція $\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}$, така, що вона породжує випадковий заряд $X((0,x]) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d_+$, який є обмеженим на борелевських підмножинах $\mathbb{R}^d_+$. Якщо покласти $\mathcal{A} = \{(0,x] | x \in I\}$, то, очевидно, умова (1) теореми 2 буде виконуватись. Нехай при цьому заряд, що породжується функцією f, є невід'ємним, і існує така випадкова величина μ, що $\forall x \in I \cap Q$ виконується*

$$\frac{f(nx)}{n^d} \to \mu|x|, n \to \infty, \text{м.н.},$$

де Q – множина точок $\mathbb{R}^d$ з раціональними координатами.

Тоді

$$\sup_{x\in I}\left|\frac{f(nx)}{n^d} - \mu|x|\right| \to 0, n \to \infty, \text{м.н.}$$

Теорема 3. *Нехай $X(B)$ і $\mathcal{A}$ задовольняють умову теореми 1. Припустимо додатково, що:*

$$X(nA) \to +\infty, n \to \infty, \forall A \in \mathcal{A}, \text{м.н.} \tag{6}$$

і

$$X(B) \le X(C), \forall B, C, B \subset C, \text{м.н.} \tag{7}$$

Позначимо через $N_t(A)$ найменше натуральне число, починаючи з якого для всіх натуральних чисел виконується $X(nA) > t$ (для кожного $A \in \mathcal{A}$ і $t > 0$ це буде випадкова величина, що згідно з (6) визначена м.н.).

Тоді

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0, t\to\infty, \textit{м.н.}$$

Доведення.

З теореми 2 маємо (4). З (4) і умов (6) і (7) випливає, що майже напевно виконуються всі наступні твердження:

$$X(nA)\to+\infty, n\to\infty, \forall A\in\mathcal{A}, \tag{8}$$

$$X(B)\le X(C), \forall B,C,B\subset C, \tag{9}$$

і

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X(nA)}{n^d}-\mu|A|\right|\to 0, n\to\infty. \tag{10}$$

Покажемо, що для всіх ω, для яких виконуються ці три твердження, виконується також наступне твердження:

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0, t\to\infty. \tag{11}$$

Очевидно, що внаслідок (8) і (9) виконується $X(nI)\to+\infty, n\to\infty$, тобто можна казати про $N_t(I)$. Помітимо, що якщо $t>X(I)$, то внаслідок (9) $\forall A\in\mathcal{A}$ $N_t(A)\ge N_t(I)\ge 2$. Для таких t $\forall A\in\mathcal{A}$ виконується:

$$X(N_t(A)\cdot A)>t\ge X((N_t(A)-1)\cdot A),$$

а тому

$$\left|\frac{t}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\le\max\left\{\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|,\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\right\}\le$$
$$\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|+\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|=I_1+I_2.$$

$$I_2\le\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|\cdot\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d+\mu\cdot|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|\le$$
$$\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|+\mu\cdot|A|\cdot\left|1-\left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right|=I_3+I_4.$$

Отже, потрібно довести, що:

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d}-\mu|A|\right|\to 0,\ t\to\infty; \tag{12}$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}}\left|\frac{X((N_t(A)-1)\cdot A)}{(N_t(A)-1)^d}-\mu|A|\right|\to 0,\ t\to\infty; \tag{13}$$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} |A| \cdot \left|1 - \left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right| \to 0,\ t\to\infty. \tag{14}$$

Внаслідок (10) $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N$

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A|\right| \leq \varepsilon,$$

що рівносильно тому, що $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N\ \forall\, A \in \mathcal{A}\ \left|\frac{X(nA)}{n^d} - \mu|A|\right| \leq \varepsilon$. Якщо взяти таке K, що $N_K(I) \geq N$, то, так як $\forall t \geq K$, $\forall A \in \mathcal{A}$ виконується $N_t(A) \geq N_t(I) \geq N_K(I) \geq N$, то $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, K > 0\ \forall\, t \geq K\ \forall\, A \in \mathcal{A}$ $\left|\frac{X(N_t(A)\cdot A)}{(N_t(A))^d} - \mu|A|\right| \leq \varepsilon$, що доводить (12). Умова (13) доводиться аналогічно. Умова (14) виконується, оскільки

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} |A| \cdot \left|1 - \left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right| \leq \sup_{A\in\mathcal{A}} \left|1 - \left(\frac{N_t(A)-1}{N_t(A)}\right)^d\right| \leq$$
$$\left|1 - \left(\frac{N_t(I)-1}{N_t(I)}\right)^d\right| \to 0,\ t\to\infty.$$

Наслідок 7. *З теореми 3 також випливає, що*

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{t^{1/d}}{(N_t(A))} - (\mu|A|)^{1/d}\right| \to 0, t\to\infty, \textit{м.н.} \tag{15}$$

Дійсно, якщо для $\omega \in \Omega$ виконується (11), то для нього виконується і (15):

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{t^{1/d}}{N_t(A)} - (\mu|A|)^{1/d}\right| \leq \left|\frac{t}{(N_t(A))^d} - \mu|A|\right|^{1/d} =$$
$$\left(\sup_{A\in\mathcal{A}} \left|\frac{t}{(N_t(A))^d} - \mu|A|\right|\right)^{1/d} \to 0,\ t\to\infty.$$

4. Перспективи подальших досліджень. Від умови (2) теореми 2 відмовитись у загальному випадку неможливо, але можна сподіватись, що її можна замінити на більш просту. Пошук більш простої умови замість умови (2) є одним з напрямків подальших досліджень. Іншим напрямком є розширення сфери застосувань наслідка 4 для залежних випадкових величин.

Список використаної літератури

1. Bass R. F., Pyke R. Strong Law of Large Numbers for Partial-Sum Processes Indexed by Sets. *Ann. Probab.* 1984. Vol. 12, No. 1. P. 268–271.
2. Klesov O. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2014. 501 p.
3. Baum L. E., Katz M., Stratton H. H. Strong laws for ruled sums. *Ann. Math. Statist.* 1971. Vol. 42, No. 2. P. 625–629.

4. Klesov O. I., Molchanov I. Uniform strong law of large numbers for random signed measures, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). Switzerland:Springer International Publishing AG, Cham, 2019. 335–350 pp.
5. Bogdanskii V. Y., Klesov O. I., Molchanov I. Uniform Strong Law of Large Numbers. *Methodol Comput. Appl. Probab.* 2019. `https://doi.org/10.1007/s11009-019-09711-x`

Bogdanskii V. Yu., Klesov O. I. To the article of Bass and Pyke.

In 1984, R. Pyke and R. Bass [4] proposed to study the limit theorems uniformly with respect to classes of sets for random variables that depend on sets of a certain class. This paper provides a natural generalization of the Bass–Pike theorem on the uniform law of large numbers for random processes indexed by sets. Instead of the sums of random variables indexed by sets, as in the Bass–Pike setting, we consider in Theorem 2 a more general situation of random charges and measures. Since the uniform law of large numbers for random charges and measures does not hold for an arbitrary class of sets, we use the Bass–Pyke condition imposed on the class. This condition means the uniform smallness of the Lebesgue measure of δ-neighborhoods of the sets. In the case of random charges, we use the additional condition on the existence of a majorant measure. This condition can, of course, be omitted in the case of random measures. The method of the proof of the main results of this article resembles the on in the Bass–Pyke paper.

In a number of corollaries of the main result, we present the corresponding results for special cases. In particular, in Corollary 2 we show how to get rid of the additional condition for random charges. In Corollary 4, the case of not necessarily independent or equally distributed random variables is considered. It turns out that instead we can assume that the non-uniform strong law of large numbers is fulfilled. Moreover, the limit constant in this case is not necessarily random. does not have to be accidental. For the same setting, Corollary 5 shows how we can get rid of the additional condition that we impose on random charges. Finally, Corollary 6 considers the case where a random measure is generated by a certain stochastic process.

Another main result of this paper, Theorem 3, applies to the uniform strong law of large numbers for an analogue of the renewal process. As in the case of sums of independent identically distributed random variables, this result holds under the assumption of the existence of the first moment. No results were previously known for such a generalized renewal process.

Further studies of the uniformly strong law of large numbers will be concentrated in searching a condition simpler than the existence of a majorant measure. Some examples of situations in which this condition can be omitted, are given in the corollaries to Theorem 1. However, in the general case, this condition cannot be omitted.

Keywords: strong law of large numbers, random signed measure, renewal process, uniform strong law of large numbers, random processes indexed by sets.

References

1. Bass, R. F., & Pyke, R. (1984). Strong Law of Large Numbers for Partial-Sum Processes Indexed by Sets. *Ann. Probab., 12, 1*, 268–271.
2. Klesov, O. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. (2014). *Springer, Berlin–Heidelberg–New York*.
3. Baum, L. E., Katz, M., & Stratton, H. H. (1971). Strong laws for ruled sums. *Ann. Math. Statist., 42, 2*, 625–629.
4. Klesov, O. I., & Molchanov, I. (2019). Uniform strong law of large numbers for random signed measures, in book Modern Mathematics and Mechanics: Fundamentals, Problems and Challenges (editors V. A. Sadovnichiy and M. Z. Zgurovsky). *Switzerland:Springer International Publishing AG, Cham.* 335–350.
5. Bogdanskii, V. Y., Klesov, O. I., & Molchanov, I. Uniform Strong Law of Large Numbers. (2019). *Methodol Comput. Appl. Probab.* `https://doi.org/10.1007/s11009-019-09711-x`

Одержано 28.09.2020

UDC 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).54-65

A. V. Ivanov[1], O. V. Mitrofanova[2]

[1] National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Professor at the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
ivanov@matan.kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5250-6781

[2] National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Student
alena.mitrofanova05@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7509-1726

CONSISTENCY OF THE LEAST SQUARES ESTIMATES OF TRIGONOMETRIC REGRESSION MODEL PARAMETERS IN THE PRESENCE OF LINEAR RANDOM NOISE

This contribution is dedicated to the 80th anniversary of Professor Yuriy Vasyliovych Kozachenko.

Regression analysis is a huge part of mathematical and applied statistics. Nonlinear regression analysis is a significant extension and complication of classical linear regression analysis, due to the use of nonlinear or partially nonlinear in parameters models that describe more adequately than linear model phenomena requiring statistical analysis. A large number of applied problems in the numerical scientific, technical, and humanitarian fields of knowledge give impetus to the development of nonlinear regression analysis.

The task of estimation the vector signal parameter in the «signal + noise» observation models is a well-known problem of statistics of stochastic processes, and in the case of a nonlinear signal parameter is the problem of nonlinear regression analysis.

Among the variety of nonlinear regression analysis problems the problem of estimating amplitudes and angular frequencies of the sum of harmonic oscillations that are observed against the background of a random noise, takes significant place due to its numerous applications. Statistical model of such a type is said to be trigonometric regression, and the problem of statistical estimation is called the problem of detecting hidden periodicities.

The paper is devoted to the study of time continuous trigonometric regression model where the random noise is a linear Lévy driven stationary of the fourth order stochastic process with zero mean, integrable and square integrable impulse transmission function. This assumption leads to the integrability of the noise covariance function and cumulant function of the fourth order.

To estimate unknown amplitudes and angular frequencies of such a trigonometric model we use the least squares estimators in the Walker sense, that is special parametric set are considered to distinguish properly different angular frequencies in the sum of harmonic oscillations.

Theorem on strong consistency of the least squares estimators is proved in the paper under the assumption on the random noise described above.

To obtain such a result a very important lemma was proved on the uniform tending to zero almost surely of the average value of Lévy-driven linear stochastic process Fourier transform.

This Lemma is the main tool of the strong consistency Theorem proof. To prove the Theorem we, firstly, find some expressions for the least squares estimates of amplitudes via corresponding estimates of angular frequencies. Secondly, we substitute these formulas into the functional of the least squares method. The last step of the proof consists of the L_2-norm transformation of the difference between empirical trigonometric regression function and true regression function such that this norm tends to zero almost surely if and on if the estimators are strongly consistent.

Keywords: The detection of hidden periodicities, least squares estimator, consistency, Lévy-driven linear stochastic process.

1. Introduction. Let a stochastic process

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

be observed, where

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} (A_k^0 cos\varphi_k^0 t + B_k^0 sin\varphi_k^0 t), \tag{2}$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta^0, \dots, \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, \dots, A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0), \tag{3}$$

$(A_K^0)^2 + (B_K^0)^2 > 0, k = \overline{1, N}$; here $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}^1$, is a stochastic process defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ and satisfying the condition introduced below.

The statistical estimation of unknown amplitudes and angular frequencies (3) of a sum of harmonic oscillations (2) observed in a random noise $\varepsilon(t)$ is a probabilistic setting of the hidden periodicities detection problem. Investigations of this problem as well as of its deterministic counterpart $\varepsilon(t) \equiv 0$ are initiated by Lagrange. Many applications of this problem in numerous scientific fields up to the middle of the 20-ies century are described in [1]. More recent applied aspects of the problem of detecting hidden periodicities are considered, for example, in the review [2] and monograph [3].

The literature on this problem is quite extensive. We mention only a few publications [4–9], where the consistency and asymptotic normality are studied for various statistical estimators of unknown amplitudes and angular frequencies under different assumptions concerning the stationary random noise $\varepsilon(t)$ in the model of observation (1), (2) with $N \geq 1$. Both cases of discrete and continuous time are studied in those papers.

To introduce the conditions on the stochastic process ε in (1) we need in some preliminary remarks [10].

A Lévy process $L(t), t \geq 0$, is a stochastic process, with independent and stationary increments, continuous in probability, with sample-paths which are right-continuous with left limits (*cádlág*) and $L(t) = 0$.

Let (a, b, Π) denote a characteristic triple of the Lévy process $L(t), t \geq 0$, that is for all $t \geq 0$

$$\log E \exp\{izL(t)\} = tk(z)$$

for all $z \in \mathbb{R}$, where

$$k(z) = iaz - \frac{1}{2}bz^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{izu} - 1 - iz\tau(u)\right) \Pi(du), z \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

where $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$, and

$$\tau(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq 1; \\ \frac{u}{|u|}, & |u| > 1. \end{cases}$$

The Lévy measure Π in (4) is a Radon measure on $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, such that $\Pi(\{0\}) = 0$, and

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \min(1, u^2)\, \Pi(du) < \infty.$$

It is known that $L(t)$ has finite p-th moment for $p > 0$ ($E|L(t)|^p < \infty$), if and only if

$$\int\limits_{|u|\geq 1} |u|^p\, \Pi(du) < \infty, \tag{5}$$

see, i.e., Sato [11], Theorem 25.3.

If $L(t), t \geq 0$ is a Lévy process with characteristics (a, b, Π), then process $-L(t)$, $t \geq 0$ is also a Lévy process with characteristics $(-a, b, \breve{\Pi})$, where $\breve{\Pi}(A) = \Pi(-A)$ for each Borel set A, modifying it to be *cáglád* [12].

We introduce a two-sided Lévy process $L(t), t \in \mathbb{R}$, defined for $t < 0$ to be equal to independent copy of $-L(-t)$.

Let $\hat{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ be a measurable function. We consider the Lévy-driven continuous time linear (or moving average) stochastic process

$$\varepsilon(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{a}(t - s)\, dL(s), t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

For causal process (6) $\hat{a} = 0, t < 0$.

In the sequel we assume that

$$\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}),\ EL(1) = 0. \tag{7}$$

Under the condition (7) and

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2\, \Pi(du) < \infty,$$

the stochastic integral in (6) is well-defined in $L_2(\Omega)$ in the sense of stochastic integration introduced in Rajput and Rosinski [13].

The popular choices for the kernel in (6) are Gamma type kernels:

1. $\hat{a}(t) = t^\alpha e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(t), \lambda > 0, \alpha > -\frac{1}{2}$;
2. $\hat{a} = e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{[0,\infty)}(t), \lambda > 0$ (Ornstein-Uhlenbeck process);
3. $\hat{a} = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$ (well-balanced Ornstein-Uhlenbeck process).

A. The process ε in (1) is a measurable causal linear process of the form (6), where a two-sides Lévy process L and $\hat{a}$ satisfy (7). Moreover the Łévy measure Π of $L(1)$ satisfies (5) for p=4.

From the condition ***A*** it follows [12] for $r = 1, 2, 3, 4$

$$\log E \exp\{i \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon(t_j)\} = \int_{\mathbb{R}} k\left(\sum_{j=1}^{r} z_j \hat{a}(t_j - s)\right) ds. \tag{8}$$

In turn from (8) it can be seen that the stochastic process ε is stationary of the 4th order.

Denote by

$$m_r(t_1,\dots,t_r) = E\varepsilon(t_1)\dots\varepsilon(t_r),$$
$$c_r(t_1,\dots,t_r) = i^{-r}\frac{\partial^r}{\partial z_1\dots\partial z_r}\log E\exp\{i\sum_{j=1}^{r} z_j\varepsilon(t_j)\}|_{z_1=\dots=z_r=0}$$

the moment and cumulant functions correspondingly of order r of the process ε. Thus $m_2(t_1,t_2) = B(t_1-t_2)$, where

$$B(t) = d_2\int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t-s)\hat{a}(s)\,ds, t\in\mathbb{R},$$

is a covariance function of ε, and the 4th moment function

$$m_4(t_1,t_2,t_3,t_4) = c_4(t_1,t_2,t_3,t_4) + m_2(t_1,t_2)m_2(t_3,t_4)+ \\ +m_2(t_1,t_3)m_2(t_2,t_4) + m_2(t_1,t_4)m_2(t_2,t_4). \tag{9}$$

The explicit expression for cumulants of the stochastic process ε can be obtained from (8) by direct calculations:

$$c_r(t_1,\dots,t_r) = d_r\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^{r}\hat{a}(t_j-s)\ ds, \tag{10}$$

where d_r is the r-th comulant of the random variable $L(1)$. In particular,

$$d_2 = EL^2(1) = -k^{(0)}, \qquad d_4 = EL^4(1) - 3(EL^2(1))^2.$$

2. Setting of the problem. The consistency of the least squares estimator (LSE) of the parameter θ^0 in the model (1) –(3) is studied in the paper under condition $\boldsymbol{A}$.

We arrange the frequencies $\varphi^0 = (\varphi_1^0,\dots,\varphi_N^0)$ in ascending order. In other words, we assume that the parametric set where we search an estimator of unknown angular frequencies is of the following form:

$$\Phi(\underline{\varphi},\overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_N)\in\mathbb{R}^N : 0\le\underline{\varphi}<\varphi_1<\dots<\varphi_N<\overline{\varphi}<+\infty\}.$$

Let

$$Q_T(\theta) = T^{-1}\int_0^T [X(t)-g(t,\theta)]^2\ dt. \tag{11}$$

According to the standard definition, the LSE of the parameter θ^0 constructed from observation $\{X(t), t\in[0,T]\}$ is any random vector

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T},\dots,A_{NT},B_{NT},\varphi_{NT}) \tag{12}$$

that minimizes the functional $Q_T(\theta)$ in the set of parameters such that $\Theta\subset\mathbb{R}^{3N}$ the amplitudes $A_k, B_k, k=\overline{1,N}$, can take arbitrary values in Θ and $\varphi\in\Phi^c$, where Φ^c is the closure of the set $\Phi(\underline{\varphi},\overline{\varphi})$.

When proving the consistency of the estimator θ_T (see theorem below) we face the problem of studying the behavior, as $T \to \infty$, of the ratios

$$\frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_{jT})}{T(\varphi_{kT} - \varphi_{jT})}, \quad \frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_j^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_j^0)}, \quad k \neq j, \quad \frac{\sin T\varphi_{kT}}{T\varphi_{kT}}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{13}$$

However the above definition of the estimator $\varphi_T = (\varphi_{1T}, \ldots, \varphi_{NT})$ makes it impossible to determine the behavior of the differences $\varphi_{kT} - \varphi_{jT}$ and $\varphi_{kT} - \varphi_j^0$, $j \neq k$, as $T \to \infty$. Therefore the question of the behavior of ratios (13) remains open.

Walker [5] proposed a modification of the definition of the estimator φ^0 which guarantees the convergence to zero of the ratios (13). In turn, this implies the consistency of the LSE.

The Walker idea is to define the estimator (12) as a point of minimum of the functional (11) in a set where one can well distinguish the parameters φ_k.

Consider a nondecreasing family of open sets

$$\Phi_T \subset \Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}), \qquad T \geq T_0 > 0.$$

We assume that these sets contain the true value of the parameter φ^0 and satisfy the following conditions:

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{1\leq j<k\leq N} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \tag{14}$$

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \tag{15}$$

In view of the above remark, we say that a vector θ_T is the LSE, if θ_T is a point of minimum of the functional $Q_T(\theta)$ in the set Θ_T for which (in contrast with Θ) $\varphi \in \Phi_T^c$.

Condition (15) obviously holds if $\underline{\varphi} > 0$. If $\Phi_T \subset \Phi(0, \overline{\varphi})$, then one can consider, for example, parametric sets such that

$$\inf_{1\leq j<k\leq N} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T(\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2}, \qquad \inf_{\varphi\in\Phi_T} T\varphi_1 = T^{-1/2}$$

in order to satisfy (14), (15).

Theorem 1. *Let assumption* $\boldsymbol{A}$ *holds. Then LSE* θ_T *is a strongly consistent estimator of the parameter* θ^0*, namely:*

$$A_{kT} \to A_k^0, B_{kT} \to B_k^0, T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0) \to 0 \qquad a.s., \tag{16}$$

as $T \to \infty, k = \overline{1, N}$.

3. Lemma. The next lemma is the main part of the convergence (16) proof.

Lemma 1. *Under condition* $\boldsymbol{A}$

$$\xi(T) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left| T^{-1} \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t)\, dt \right| \to 0 \quad a.s., \quad as \quad T \to \infty. \tag{17}$$

Proof. Since

$$\left|\int\limits_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\ dt\right|^2 = \int\limits_{-T}^{T} e^{-i\lambda t} \int\limits_0^{T-|u|} \varepsilon(t+|u|)\varepsilon(t)\ dt\ du =$$

$$= 2\int\limits_0^T \cos\lambda u \int\limits_0^{T-u} \varepsilon(t+u)\varepsilon(t)\ dt\ du,$$

then

$$E\xi^2(t) \le 2T^{-2}\int\limits_0^T E\left|\int\limits_0^{T-u} \varepsilon(t+u)\varepsilon(t)dt\right| du \le 2T^{-2}\int_0^T K^{1frm-e}(u)du.$$

By formula (9)

$$K(u) = \int_0^{T-u}\int_0^{T-u} E\varepsilon(t+u)\varepsilon(s+u)\varepsilon(t)\varepsilon(s)dtds =$$

$$= \int_0^{T-u}\int_0^{T-u} c_4(t+u,s+u,t,s)dtds + (T-u)^2B^2(u)+$$

$$+\int_0^{T-u}\int_0^{T-u} B^2(t-s)dtds + \int_0^{T-u}\int_0^{T-u} B(t-s+u)B(t-s-u)dtds \le$$

$$\le K_1(u) + K_2(u) + K_3(u) + |K_4(u)|,$$

and

$$E\xi^2(T) \le 2T^{-2}\int_0^T (K_1^{\frac{1}{2}}(u) + K_2^{\frac{1}{2}}(u) + K_3^{\frac{1}{2}}(u) + |K_4(u)|^{\frac{1}{2}})du. \tag{18}$$

Accordind to (10)

$$K_1(u) = d_4\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{T-u} \hat{a}(t+u-r)\hat{a}(t-r)dt\right)^2 dr \le$$

$$\le d_4\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^{T-u} \hat{a}^2(t+u-r)\int_0^{T-u} \hat{a}^2(t-r)dt\right) dr \le$$

$$\le d_4\|\hat{a}\|_2^2\int_0^{T-u} dt\int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t+u-r)dr \le d_4\|\hat{a}\|_4^2(T-u),$$

that is

$$T^{-2}\int_0^T K_1^{\frac{1}{2}}(u)du \le d_4^{\frac{1}{2}}\|\hat{a}\|_2^2T^{-2}\int_0^T \sqrt{T-u}du = \frac{2}{3}d_4^{\frac{1}{2}}\|\hat{a}\|_2^2T^{-\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

From condition $\boldsymbol{A}$ it follows $\|B\|_1 = \int_{\mathbb{R}}|B(t)|dt < \infty$. Then

$$T^{-2}\int_0^T K_2^{\frac{1}{2}}(u)du = T^{-2}\int_0^T (T-u)|B(u)|du \le \|B\|_1T^{-1}. \tag{20}$$

Moreover,

$$K_3(u) \le B(0) \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} |B(t-s)| dt ds \le B(0) \|B\|_1 (T-u),$$

$$T^{-2} \int_0^T K_3^{\frac{1}{2}}(u) du \le \frac{2}{3} B^{\frac{1}{2}}(0) \|B\|_1^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Similarly,

$$T^{-2} \int_0^T K_4^{\frac{1}{2}}(u) du \le \frac{2}{3} B^{\frac{1}{2}}(0) \|B\|_1^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

From the inequalities (18) – (22) we get $E\xi^2(T) = O(T^{-\frac{1}{2}})$, as $T \to \infty$.
Let $T_n = n^{2+\delta}$ for some $\delta > 0$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi^2(T_n) < \infty,$$

that is

$$\xi(T_n) \to 0 \ a.s., as \ n \to \infty.$$

Consider a sequence of random variables

$$\zeta_n = \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} |\xi(T) - \xi(T_n)| =$$

$$= \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \left| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| - \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt - \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \left[\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| + \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_{T_n}^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \right] \le$$

$$\le \frac{T_{n-+1} - T_n}{T_n} \xi(T_n) + \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\xi(t)| dt = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)}.$$

It is clear that $\zeta_n^{(1)} \to 0$ a.s., as $n \to \infty$.
Consider

$$E(\zeta_n^{(2)})^2 = \frac{1}{T_n^2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} E|\xi(t_1)\xi(t_2)| dt_1 dt_2 \le$$

$$\le B(0) \left(\frac{T_{n-+1} - T_n}{T_n} \right)^2 = O(n^{-2}), \ as \ n \to \infty.$$

Thus, $\zeta_n^{(2)} \to 0$ a.s., as $n \to \infty$, also.

4. The proof of the Theorem. The proof of the theorem uses the ideas of the paper [8].

Let

$$x_{kT} = \frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0))}, \qquad y_{kT} = \frac{1 - \cos T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0))}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}.$$

We show that

$$A_{kT} = A_k^0 x_{kT} - B_k^0 y_{kT} + o(1), \qquad B_{kT} = A_k^0 y_{kT} - B_k^0 x_{kT} + o(1), \tag{23}$$

for $k = \overline{1, N}$, where $o(1)$ denotes, generally speaking, different stochastic processes approaching zero a.s., as $T \to \infty$.

Differentiating the functional $Q_T(\theta)$ with respect to the variables $A_1, \ldots, A_N$ and $B_1, \ldots, B_N$ we obtain the following system of linear equations for the LSE A_{kT} and B_{kT}, $k = \overline{1, N}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{kj}^{(1)}(T) A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kj}^{(1)}(T) B_{kT} = c_j^{(1)}(T), & j = \overline{1, N}, \\ \sum_{k=1}^N a_{kj}^{(2)}(T) A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kj}^{(2)}(T) B_{kT} = c_j^{(2)}(T), & j = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{24}$$

where we used the notation

$$\langle u(t), v(t) \rangle = T^{-1} \int_0^T u(t) v(t) dt,$$

$$a_{kj}^{(1)}(T) = \langle \cos \varphi_{kT} t, \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad a_{kj}^{(2)}(T) = \langle \cos \varphi_{kT} t, \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$b_{kj}^{(1)}(T) = \langle \sin \varphi_{kT} t, \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad b_{kj}^{(2)}(T) = \langle \sin \varphi_{kT} t, \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$c_j^{(1)}(T) = \langle X(t), \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad c_j^{(2)}(T) = \langle X(t), \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$k, j = \overline{1, N}.$$

Considering the properties (14) and (15) of the parametric set Φ_T (whose closure contains the value of the LSE $\varphi_T = (\varphi_{1T}, \ldots, \varphi_{NT})$) we derive the following relations:

$$a_{kj}^{(1)}(T) = o(1), \qquad k \neq j,$$

$$a_{kk}^{(1)}(T) = \frac{1}{2} + o(1), \qquad a_{kj}^{(2)}(T) = o(1), \qquad k, j = \overline{1, N}, \tag{25}$$

and

$$b_{kj}^{(1)}(T) = a_{kj}^{(2)}(T) = o(1),$$

$$b_{kj}^{(2)}(T) = o(1), \qquad k \neq j, \qquad b_{kk}^{(2)}(T) = \frac{1}{2} + o(1), \qquad k, j = \overline{1, N}. \tag{26}$$

Further,

$$c_j^{(1)}(T) = \langle \varepsilon(t), \cos \varphi_{jT} t \rangle + \langle g(t, \theta^0) m \cos \varphi_{jT} t \rangle = d_j^{(1)}(T) + d_j^{(2)}(T),$$

and moreover, $d_j^{(1)}(T) = o(1)$ by Lemma. Then

$$d_j^{(2)}(T) = A_j^0\langle\cos\varphi_j^0 t, \cos\varphi_{jT}t\rangle + B_j^0\langle\sin\varphi_j^0 t, \cos\varphi_{jT}t\rangle + o(1) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{2}[A_j^0 y_{jT} - B_j^0 x_{jT}] + o(1), \qquad j = \overline{1,N}.$$

Similarly

$$c_j^{(2)}(T) = \frac{1}{2}[A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT}] + o(1), \qquad j = \overline{1,N}. \tag{28}$$

Now relations (23) follow from (24) –(28).

Since $|x_{kT}|, |y_{kT}| \le 1$, relations (23) imply that

$$|A_{kT}|, |B_{kT}| \le |A_{kT}| + |B_{kT}| + o(1), \qquad k = \overline{1,N}. \tag{29}$$

Let $\Delta g(t;\theta_1,\theta_2) = g(t;\theta_1) - g(t;\theta_2)$ and $G_T(\theta_1,\theta_2) = \langle\Delta g(t;\theta_1,\theta_2), \Delta g(t;\theta_1,\theta_2)\rangle$. By the definition of the LSE

$$Q_T(\theta_T) \le Q_T(\theta^0). \tag{30}$$

On the other hand,

$$Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = G_T(\theta_T,\theta^0) + 2\langle\varepsilon(t), \Delta g(t;\theta^0,\theta_T)\rangle, \tag{31}$$

where

$$\langle\varepsilon(t), \Delta g(t;\theta^0,\theta_T)\rangle = o(1) \tag{32}$$

in view of Lemma and bounds (29). Taking into account inequality (30), we obtain from (31) and (32) that

$$G_T(\theta_T,\theta^0) \to 0 \quad a.s., \quad as \quad T \to \infty. \tag{33}$$

Put

$$g_{kT}(t) = A_{kT}\cos\varphi_{kT}t + B_{kT}\sin\varphi_{kT}t - A_k^0\cos\varphi_k^0 t - B_k^0\sin\varphi_k^0 t.$$

Then

$$G_T(\theta_T,\theta^0) = \sum_{k=1}^{N}\langle g_{kT}(T), g_{kT}(T)\rangle + 2\sum_{k<j}\langle g_{kT}(T), g_{jT}(T)\rangle.$$

Using the above reasoning and bounds (29), we find that

$$\langle g_{kT}(t), g_{jT}(t)\rangle = o(1), \qquad k \ne j, \tag{34}$$

$$\langle g_{kT}(t), g_{kT}(t)\rangle = \frac{1}{2}[A_{kT}^2 + B_{kT}^2 + (A_k^0)^2 + (B_k^0)^2] - (A_{kT}A_k^0 + B_{kT}B_k^0)x_{kT} + \tag{35}$$

$$+(A_{kT}B_k^0 - A_k^0 B_{kT})y_{kT} + o(1), \qquad k = \overline{1,N}.$$

Substituting relations (23) into (35) and considering (34), we deduce that

$$G_T(\theta_T,\theta^0)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)(1-x_{kT}^2-y_{kT}^2)+o(1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}((A_k^0)^2+(B_k^0)^2)\left(1-\left(\frac{\sin\frac{1}{2}T(\varphi_{kT}-\varphi_k^0)}{\frac{1}{2}T(\varphi_{kT}-\varphi_k^0}\right)^2\right)+o(1).$$

Thus relation (33) holds if and only if

$$T(\varphi_{kT}-\varphi_k^0)\to 0 \quad a.s., \quad as \quad T\to\infty,\ k=\overline{1,N}. \tag{36}$$

Relation (36) obviously imply that

$$x_{kT}\to 1,\quad y_{kT}\to 0 \quad a.s., \quad as \quad T\to\infty,\ k=\overline{1,N}.$$

The strong consistency of the estimators A_{kT} and B_{kT} follows from equalities (23).

5. Conclusions. In the paper strong consistency of the least squares estimators in Walker sense of the trigonometric regression parameters provided that the parametric set contains the true value of the vector parameter and in which the least squares estimate is sought, separates the angular frequencies in some way, and random noise is a Lévy-driven stochastic process with zero mean that satisfies some regularity conditions. An important feature of this work is rejection of any assumptions related to the Gaussianity of the random noise.

The natural direction of further research is to obtain conditions for the asymptotic normality of the least squares estimators in trigonometric regression model under our assumptions about random noise. A very important task is also to obtain the properties of strong consistency and asymptotic normality of periodogram estimates of the parameters in the model considered in the paper.

References

1. Serebrennikov, M. G., & Pervozvanskii, A. A. (1965). Vyiyavlenie skryityih periodichnostey [The detection of hidden periodicities]. *Mosow:Nauka.* [in Russian]
2. Artis, M., Hoffman, M., Nachane, D., & Toro J. (2004). The detection of hidden periodicities: a comparison of alternative methods. *EUI Working paper ECO, 10*, 26.
3. Quinn, B. G., & Hannan, E. J. (2001). The estimation and tracking of frequency. *Cambridge Univ. Press.*
4. Whitle, P. (1952). On the estimation of a time series harmonic components and covariance structure. *Trabajos Estadistica, 3*, 43–57.
5. Walker, A. M. (1973). On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals. *Adv. Appl. Probab., 5, 2*, 217–241.
6. Hannan, E. J. (1973). The estimation of frequency. *J. Appl. Probab., 10, 3*, 510–519.
7. Ivanov, A. V. (1980). A solution of the problem of detecting hidden periodicities. *Theor. Probab. Math. Statist., 20*, 51–68.
8. Ivanov, A. V. (2010). Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations i models with long-range dependence. *Theor. Probab. Math. Statist., 80*, 61–69.
9. Ivanov, A. V., Leonenko, N. N., Ruiz-Medina, M. D., & Zhurakovsky, V. M. (2015). Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 49, 1*, 156–186.
10. Ivanov, A. V., Leonenko, N. N., & Orlovsky, I. V. (2020). On the Whittle estimation for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models. *Stat. Inference Stoch. Process, 23*, 129–169.

11. Sato, K. (1999). Lévy processes and infinitely divisible distributions. *Cambrige: Cambridge University Press.*
12. Anh, V. V., Heyde, C. C., & Leonenko, N. N. (2002). Dynamic models of long-memory processes driven by Lévy nose. *J. Appl. Prob., 39, 4*, 730–747.
13. Rajput, B., & Rosinski, J. (1989). Spectral representations of infinitely divisible processes. *Prob. Theory Rel. Fields, 82*, 451–487.

Іванов О. В., Митрофанова О. В. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму.

Регресійний аналіз є істотною частиною математичної та прикладної статистики. Нелінійний регресійний аналіз є значним розширенням та ускладненням класичного лінійного регресійного аналізу, завдяки використанню нелінійних або частково нелінійних за параметрами моделей, які адекватніше описують, ніж лінійні моделі, явища, що потребують статистичного аналізу. Велика кількість прикладних проблем у численних наукових, технічних та гуманітарних галузях знань дають поштовх розвитку нелінійного регресійного аналізу.

Задача оцінювання векторного параметра сигналу в моделях спостереження «сигнал + шум» є добре відомою проблемою статистики випадкових процесів, та у випадку нелінійного параметра сигналу – задачею нелінійного регресійного аналізу.

Серед різноманітності задач нелінійного регресійного аналізу оцінювання амплітуд та кутових частот суми гармонічних коливань, що спостерігається на фоні випадкового шуму, займає значне місце, завдяки її численним застосуванням. Статистичні моделі такого типу називаються тригонометричними моделями регресії, а проблема статистичного оцінювання її параметрів називається задачею виявлення прихованих періодичностей.

Статтю присвячено вивченню тригонометричної моделі регресії, в якій випадковий шум є лінійним Леві-керованим стаціонарним четвертого порядку випадковим процесом із нульовим середнім, інтегровную та інтегровную з квадратом імпульсною перехідною функцією. Це припущення призводить до інтегровності коваріаційної функції та кумулянтної функції 4-го порядку.

Для оцінювання амплітуд та кутових частот такої тригонометричної моделі ми використовуємо оцінки найменших квадратів у сенсі Уолкера, тобто розглянуто спеціальну множину параметрів, щоб розрізнити належним чином різні кутові частоти в сумі гармонічних коливань.

У статті доведено теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів за описаними вище припущеннями щодо випадкового шуму.

Для отримання такого результату було доведено дуже важливу лему про рівномірну збіжність майже напевно середнього значення перетворення Фурьє лінійного Леві-керованого випадкового процеса.

Ця лема є головним інструментом доведення теореми про сильну консистентність. Для доведення теореми, по-перше, знаходимо деякі представлення оцінок найменших квадратів амплітуд через відповідні оцінки кутових частот. По-друге, ми підставляємо ці формули у функціонал методу найменших квадратів. Останній крок доведення полягає у перетворенні L_2-норми різниці між емпіричною тригонометричною функцією регресії та істиною функцією регресії таким чином, що ця норма прямує до нуля майже напевно тоді і тільки тоді, коли оцінки є сильно консистентними.

Ключові слова: Виявлення прихованих періодичностей, оцінка найменших квадратів, консистентність, Леві-керований лінійний випадковий процес.

Список використаної літератури

1. Серебренников М. Г., Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. Москва: Наука, 1965. 244 с.
2. Arti M., Hoffman M., Nachane D., Toro J. The detection of hidden periodicities: a comparison of alternative methods. EUI Working paper ECO, 10, 2004. 26 p.

3. Quinn B. G., Hannan, E. J. The estimation and tracking of frequency. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. 280 p.
4. Whitle P. On the estimation of a time series harmonic components and covariance structure. *Trabajos Estadistica*. 1952. Vol. 3. P. 43–57.
5. Walker A. M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals. *Adv. Appl. Probab.* 1973. Vol. 5, Iss. 2. 217–241.
6. Hannan E. J. The estimation of frequency. *J. Appl. Probab.*. 1973. Vol. 10, No. 3. P. 510–519.
7. Ivanov A. V. A solution of the problem of detecting hidden periodicities. *Theor. Probab. Math. Statist.* 1980. Vol. 20. P. 51–68.
8. Ivanov A. V. Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations i models with long-range dependence. *Theor. Probab. Math. Statist.* 2010. Vol. 80. P. 61–69.
9. Ivanov A. V., Leonenko N. N., Ruiz-Medina M. D., Zhurakovsky V. M. Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 2015. Vol. 49, Iss. 1. P. 156–186.
10. Ivanov A. V., Leonenko N. N., Orlovsky I. V. On the Whittle estimation for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models. *Stat. Inference Stoch. Process.* 2020. Vol. 23. P. 129–169.
11. Sato K. Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambrige: Cambridge University Press. 1999. 500 p.
12. Anh V. V., Heyde C. C., Leonenko N. N. Dynamic models of long-memory processes driven by Lévy nose. *J. Appl. Prob.* 2002. Vol. 39, No. 4. P. 730–747.
13. Rajput B., Rosinski J. Spectral representations of infinitely divisible processes. *Prob. Theory Rel. Fields.* 1989. Vol. 82. P. 451–487.

Recived 02.10.2020

УДК 517.9, 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).66-74

І. І. Король[1], Р. М. Блажівська[2]

[1] Ужгородський національний університет,
професор кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики,
доктор фізико-математичних наук
ihor.korol@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7826-0249

[2] Ужгородський національний університет,
аспірантка кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики,
roksolana.blazhivska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2557-533X

ІНТЕГРУВАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

При математичному описанні різного роду процесів і явищ в електроніці, радіотехніці, економіці, біології часто приходять до необхідності дослідження вироджених систем диференціальних рівнянь, зокрема, систем з виродженою матрицею при похідній. Частина науковців називає такі системи диференціально-алгебраїчними. Вони вирізняються складністю при дослідженнях, оскільки навіть у випадку лінійних систем і неперервних функцій задача Коші може не мати розв'язків. У лінійному випадку для дослідження таких систем розроблено низку методів - за допомогою досконалих пар і трійок матриць, псевдообернених за Муром-Пенроузом матриць та шляхом зведення до центральної канонічної форми. Суттєво складнішою є проблема встановлення конструктивних достатніх умов існування та розробка і обгрунтування методів побудови розв'язків задачі Коші для нелінійних систем з виродженою матрицею при похідній. Більшість науковців використовують для цього модифікації різного роду числових методів. Суттєво складнішою є задача розробки методів наближеного інтегрування крайових задач для таких систем. Важливою є проблема розробки методів побудови розв'язків задачі Коші для нелінійних систем з виродженою матрицею при похідній. Більшість науковців використовують для цього модифікації різного роду числових методів. Суттєво складнішою є проблема встановлення конструктивних достатніх умов існування та розробка і обгрунтування методів наближеного інтегрування крайових задач для таких систем. Свою ефективність для дослідження надзвичайно широкого класу крайових задач показав чисельно-аналітичний метод А.М.Самойленка. Останнім часом розроблено його модифікації для наближеного інтегрування крайових задач для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній. У даній роботі використовується апарат псевдообернених за Муром-Пенрозуом матриць та ортопроекторів. Запропоновано модифікацію чисельно-аналітичного методу з метою розширення його використання на дослідження існування та наближену побудову розв'язків нелінійних диференціальних систем з виродженою матрицею при похідній, які піддаються імпульсному впливу і підпорядковані лінійним нерозділеним двоточковим крайовим обмеженням. Розглянуто критичний випадок - коли відповідна лінійна однорідна вироджена крайова задача має ненульові розв'язки. Встановлено необхідні та конструктивні достатні умови існування розв'язків, знайдено оцінки похибки побудованих наближених розв'язків.

Ключові слова: крайова задача, вироджені диференціальні системи, імпульсна дія.

1. Вступ. При дослідженні різноманітних процесів приводить до необхідності дослідження нелінійних алгебраїчно-диференціальних рівнянь. У лінійному випадку такі системи вивчалися в роботах А.М. Самойленка, О.А.Бойчука, В.П.Яковця, S.L.Campbell [1]- [3] за допомогою зведення до центральної канонічної форми, використання псевдооберненої матриці. При дослідженні розв'язків крайових задач для нелінійних систем диференціальних рівнянь широко застосовується чисельно-аналітичний метод послідовних періодичних наближень А.М. Самойленка [4]. Г.Я.Семчишин [5] вивчала можливість застосування чисельно-аналітичного методу послідовних наближень до інтегрування крайових задач для нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній.

2. Постановка задачі. Розглянемо вироджену нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$J\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t,x), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x(\tau_i) + b_i, \tag{2}$$

яка задовольняє крайові умови

$$A_1 x(a) + A_2 x(b) = d, \quad d \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3}$$

де $J - n$-вимірна клітка Жордана, яка відповідає нульовому власному значенню, $A(t)$ – $(n \times n)$-вимірна матриця з неперервними на $[a,b]$ коефіцієнтами, $f(t,x)$ – n- вимірна неперервна на $[a;b]$ вектор-функція; A_1, A_2 – $((n-1) \times n)$- вимірні матриці, d – $(n-1)$- вимірний сталий вектор, $a \leq \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p \leq b$, B_i – $(n \times n)$- вимірні матриці, $b_i \in \mathbb{R}^n$– сталі вектори, $i = \overline{1,p}$.

Функцію $x \in C^1_{loc}([a,b]\backslash\{\tau_i\}_{i=1}^p, \mathbb{R}^n)$ будемо називати розв'язком крайової задачі (1)–(3) якщо вона задовольняє систему (1), імпульсні умови (2) та крайові умови (3).

Представимо матриці $A(t)$, A_1, A_2 так:

$$A(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{n,1}(t) & D_3(t) \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

де $D_1(t), A_{11}, A_{21}$ – $(n-1)$-вимірні вектор-стовпці, $D_2(t), A_{12}, A_{22})$ – $((n-1) \times (n-1))$-вимірні сталі матриці, $D_3(t)$ – $(n-1)$-вимірний вектор-рядок.

Нехай $x(t) = col\,[x_1(t), v(t)]^\top$, де $v(t) = col(x_2(t), \ldots, x_n(t))$ – $(n-1)$-вимірна вектор-функція.

Тоді вироджену систему рівнянь (1) можна записати наступним чином

$$v' = D_1(t)x_1 + D_2(t)v + J_1 f(t,x), \tag{4}$$

$$0 = a_{n,1}(t)x_1 + D_3(t)v + f_n(t,x), \tag{5}$$

а лінійні двоточкові крайові умови (3):

$$A_{11}x_1(0) + A_{12}v(0) + A_{21}x_1(T) + A_{22}v(T) = d. \tag{6}$$

Припустимо, що

$$f_n(t,x) = f_n(t, x_2, \ldots, x_n) = f_n(t,v). \tag{7}$$

Будемо вважати, що $a_{n,1}(t) \neq 0 \; \forall t \in [0,T]$.

Тоді з (5) можемо виразити x_1:

$$x_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(t)} \left(D_3(t)v + f_n(t,v) \right),$$

та підставити його в систему (4) та крайові умови (6).

В результаті цього одержимо наступну нормальну нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{f}(t,v), \tag{8}$$

підпорядковану нелінійним двоточковим крайовим умовам з виділеною лінійною частиною

$$C_1 v(a) + C_2 v(b) = \widehat{d}, \tag{9}$$

де $\widehat{A}(t)$ – $((n-1)\times(n-1))$-вимірна матриця, $\widehat{f}(t,v)$ – $(n-1)$-вимірна вектор-функція вигляду

$$\widehat{A}(t) = D_2(t) - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) D_3(t),$$

$$\widehat{f}(t,v) = \left(J_1 - \frac{1}{a_{n,1}(t)} D_1(t) J_2 \right) f(t,x),$$

C_1, C_2 – $((n-1)\times(n-1))$-вимірні сталі матриці, $\widehat{d}$ – $(n-1)$-вимірний вектор-стовпець сталих вигляду

$$C_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(a)} A_{11} D_3(a) + A_{12}, \qquad C_2 = -\frac{1}{a_{n,1}(b)} A_{21} D_3(b) + A_{22},$$

$$\widehat{d} = d + \frac{1}{a_{n,1}(a)} A_{11} f_n(a, v(a)) + \frac{1}{a_{n,1}(b)} A_{21} f_n(b, v(b)),$$

J_1 – $((n-1)\times n)$-вимірна матриця, J_2 – n-вимірний вектор-рядок вигляду

$$J_1 = [E_{n-1}, 0_{n-1,1}], \quad J_2 = [0_{1,n-1}, 1],$$

E_k – $(k \times k)$-вимірна одинична матриця, $0_{k,l}$ – $(k\times l)$-вимірна нульова матриця.

Розглянемо імпульсні умови (2). Припустимо, що $\forall i = \overline{1,p}$ матриці B_i мають таку структуру

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & \widehat{B}_i \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{b}_i \end{bmatrix}, \quad \widehat{b}_i \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad det \widehat{B}_i \neq 0. \tag{10}$$

Тоді імпульсні умови (2) можемо записати у вигляді:

$$\Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v(\tau_i) + \widehat{b}_i. \tag{11}$$

Отже першопочаткову вироджену імпульсну систему (1)–(3) можемо записати у вигляді:

$$x_1 = -\frac{1}{a_{n,1}(t)}\left(D_3(t)v + f_n(t,v)\right),$$

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{f}(t,v), \tag{8}$$

$$C_1 v(a) + C_2 v(b) = \widehat{d}, \tag{9}$$

$$\Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v(\tau_i) + \widehat{b}_i. \tag{11}$$

3. Лінійна крайова задача. Розглянемо спочатку лінійну невироджену імпульсну систему

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v(t) + \widehat{h}(t), \quad t \neq \tau_i, \quad v, \widehat{h} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t, \tau_i \in [a,b], \tag{12}$$

яка підпорядкована крайовим умовам (9). Відомо [6], що її розв'язок $v(t, v_0)$, $v(a, v_0) = v_0$ має вигляд

$$v(t, x_0) = V(t)v_0 + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds + \sum_{a \leq \tau_i < t} V(t, \tau_i + 0)\widehat{b}_i, \tag{13}$$

де $V(t)$ – матрицант відповідної лінійної однорідної системи з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v, \quad t \neq \tau_i, \quad t, \tau_i \in [a,b], \quad \Delta v|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v, \tag{14}$$

$V(t) = V(t,a)$, $V(a) = \mathbb{E}_n$, $V(t,s) = V(t)V^{-1}(s)$, $V(t, \tau_i + 0) = (\mathbb{E}_{n-1} + \widehat{B}_i)^{-1} V(t, \tau_i)$.

Підставляючи (13) в крайові умови (9) бачимо, що необхідною умовою розв'язності крайової задачі (12), (9) є існування розв'язку алгебраїчної системи

$$G v_0 = \widehat{d} - C_2 \left\{ \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^{p} V(b, \tau_i + 0) b_i \right\}, \tag{15}$$

де

$$G = C_1 V(a) + C_2 V(b). \tag{16}$$

У некритичному випадку алгебраїчна система (15) має єдиний розв'язок

$$v_0 = G^{-1}\left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^{p} V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right),$$

який є початковим значенням єдиного розв'язку задачі (12), (9)

$$v(t) = V(t)G^{-1}\left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^{p} V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right) +$$
$$+ \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds + \sum_{a \leq \tau_i < t} V(t, \tau_i + 0)\widehat{b}_i.$$

У критичному випадку алгебраїчна система (15), і, відповідно, крайова задача (12), (9) може не мати розв'язків. Покажемо, що праву частину лінійної імпульсної диференціальної системи завжди можна змінити так, щоб "збурена"лінійна імпульсна крайова задача мала розв'язки.

Припустимо, що $rank(G) = n-1-k$, $1 \le k \le n-2$, де G — матриця вигляду (16). Тоді для довільних векторів $\widehat{d}, \widehat{b}_i \in \mathbb{R}^n$ і функції $\widehat{h}(t) \in C_{loc}([a,b] \setminus \{\tau_i\}_{i=1}^p, \mathbb{R}^n)$ існує функція $H(t) \in C_{loc}([a,b] \setminus \{\tau_i\}_{i=1}^p, \mathbb{R}^n)$ така, що збурена лінійна неоднорідна диференціальна система з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt} = \widehat{A}(t)v + \widehat{h}(t) + H(t), \quad t \neq \tau_i, \quad t, \tau_i \in [a,b], \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = \widehat{B}_i v + \widehat{b}_i \tag{17}$$

матиме k-параметричну сім'ю розв'язків, які задовольняють крайові умови (9).

Безпосередня перевірка показує, що умова (9) буде виконана, якщо функцію $H(t)$ вибрати наступним чином

$$H(t) = V^\top(b,t) C_2^\top P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top} \left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right),$$

де G^+ — єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до G матриця, $P_{G_k^\top}$ – $(k \times (n-1))$-вимірна матриця-ортопроектор, P_{G_k} – $((n-1) \times k)$-вимірна матриця-ортопроектор, $\xi \in \mathbb{R}^k$ – вектор довільних сталих,

$$R_1 = P_{G_{d,k}^\top} R_2, \qquad R_2 = C_2 \int_0^b V(b,s) V^\top(b,s) B_2^\top ds. \tag{18}$$

При цьому розв'язок імпульсної системи (17) має вигляд

$$v(t, v_0) = V(t,0)v_0 + \int_0^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds + \tag{19}$$

$$+ \int_0^t V(t,s) V^\top(b,s) C_2^\top P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top} \left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right) ds$$

Підставляючи (19) в (9) бачимо, що $v(t)$ задовольняє крайові умови (9) тоді і тільки тоді, коли початкове значення v_0 є розв'язком алгебраїчної системи

$$G v_0 = \left(\mathbb{E}_n - R_2 R_1^{-1} P_{G_{d,k}^\top} \right) \left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right). \tag{20}$$

Оскільки $P_{G_{d,k}} \left(\mathbb{E}_n - R_2 R_1^{-1} P_{G_{d,k}^\top} \right) = 0$, то система (20) сумісна і її загальний розв'язок має вигляд

$$v_0 = P_{G_{d,k}} \xi + G^+ \left(\mathbb{E}_n - R_2 R_1^{-1} P_{G_{d,k}^\top} \right) \left(\widehat{d} - C_2 \left\{ \int_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds - \sum_{i=1}^p V(b, \tau_i + 0)\widehat{b}_i \right\} \right), \tag{21}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^k$ — довільний вектор, $P_{G_{d,k}}$, $P_{G_{d,k}^\top}$ – відповідні ортогональні проектори, G^+ – псевдообернена матриця. Знаходимо початкове значення v_0 таке, при якому розв'язок буде задовольняти крайові умови, і, підставляючи його в загальний розв'язок, після певних перетворень одержуємо k-параметричну сім'ю розв'язків крайової задачі (9),

$$v(t,\xi)=V(t,a)P_{G_k}\xi+\int\limits_a^t V(t,s)\widehat{h}(s)ds+\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\Big)+R(t)\Big)\widehat{d}-$$

$$-\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\Big)+R(t)\Big)C_2\left\{\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{h}(s)ds+\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right\},$$

де

$$R(t)=\int\limits_0^t V(t,s)V^\top(b,s)C_2^\top dsP_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}.$$

4. Основний результат. Припускаємо, що в замкненій обмеженій області $(t,v)\in[a,b]\times D$, $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ для нелінійної крайової задачі (8), (9), (11) виконуються припущення:

A) лінійна однорідна двоточкова крайова задача з імпульсною дією

$$\frac{dv}{dt}=\widehat{A}(t)v(t),\quad \Delta v|_{t=\tau_i}=\widehat{B}_ix(\tau_i),\quad C_1v(a)+C_2v(b)=0, \tag{22}$$

має k лінійно незалежних розв'язків, тобто $rankG=n-1-k$, $1\le k\le n-2$.

B) матриця $\widehat{A}(t)$ і вектор-функція $\widehat{f}(t,v)$ неперервні по своїм змінним і виконуються покоординатні оцінки:

$$|\widehat{f}(t,v)|\le M(t),\quad |\widehat{f}(t,v')-\widehat{f}(t,v'')|\le K(t)|v'-v''|, \tag{23}$$

де $M(t)$ і $K(t)$ неперервні відповідно вектор-функція і матрична-функція з невід'ємними інтегровними компонентами;

C) область $D_\beta\equiv\left\{v_0\in\mathbb{R}^{n-1},\ \xi\in\mathbb{R}^k\ |B(v_0(t,\xi),\beta)\subseteq D\right\}$ не порожня, де $B(v_0(t,\xi),\beta)$ – β-окіл функції $v_0(t,\xi)=V(t,a)P_{G_k}\xi$,

$$\beta=\max_{t\in[a,b]}\left\{\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\Big)+R(t)\Big)\widehat{d}\right|+\int\limits_a^t|V(t,s)|M(s)ds+\right.$$

$$\left.+\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\Big)+R(t)\Big)C_2\right|\left(\int\limits_a^b|V(b,s)M(s)|\,ds+\sum_{i=1}^p\left|V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right|\right)\right\};$$

D) найбільше додатне власне значення матриці Q менше за одиницю:

$$Q=\max_{t\in[a,b]}\left\{\int\limits_a^t|V(t,s)|K(s)v(s)ds+\right.$$

$$\left.+\left|\Big(V(t,a)G^+\Big(\mathbb{E}_{n-1}-R_2P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1}P_{G_k^\top}\Big)+R(t)\Big)C_2\right|\int\limits_a^b|V(b,s)|K(s)v(s)ds\right\}.$$

Лема 1. *Нехай лінійна однорідна двоточкова крайова задача (22) має k лінійно незалежних розв'язків, $1 \le k \le n-2$. Вектор-функція $\varphi \in C^1([a,b],\mathbb{R}^{n-1})$ є розв'язком двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) тоді і тільки тоді, коли φ є розв'язком системи рівнянь*

$$v = L_\xi v, \tag{24}$$

$$\mu(v) := P_{G_k^\top}\left(\widehat{d} - C_2\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v(s))ds\right) = 0, \tag{25}$$

де

$$\begin{gathered}(L_\xi v)(t) = V(t,a)P_{G_k}\xi + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{f}(s,v(s))ds + \\ + \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)\widehat{d} - \\ - \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)C_2\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v(s))ds - \\ - \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)C_2\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i.\end{gathered}$$

При цьому початковим значенням розв'язку є

$$\begin{gathered}\varphi(0) = P_{G_k}\xi + G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right)\times \\ \times\left(\widehat{d} - C_2\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v(s))ds - C_2\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i\right).\end{gathered} \tag{26}$$

Доведення проводиться аналогічно до [7].

Для дослідження питання існування і наближеної побудови розв'язків двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) побудуємо послідовність функцій вигляду

$$\begin{gathered}v_0(t,\xi) = V(t,a)P_{G_k}\xi, \quad m = 0,1,2,\ldots, \\ v_{m+1}(t,\xi) = v_0(t,\xi) + \int\limits_a^t V(t,s)\widehat{f}(s,v_m(s,\xi))ds + \\ + \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)\widehat{d} - \\ - \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)C_2\int\limits_a^b V(b,s)\widehat{f}(s,v_m(s,\xi))ds - \\ - \left(V(t,a)G^+\left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2P^\top_{G_k^\top}R_1^{-1}P_{G_k^\top}\right) + R(t)\right)C_2\sum_{i=1}^p V(b,\tau_i+0)\widehat{b}_i.\end{gathered} \tag{27}$$

Кожна з цих функцій задовольняє крайові умови (9) при будь-яких ξ.

Аналогічно до [7] можемо довести наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для виродженої двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) виконується умова $a_{n,1}(t) \neq 0 \; \forall t \in [a, b]$ та справедливі припущення* ***A-D***. *Тоді*

1) послідовність функцій $v_m(t, \xi)$ вигляду (27) при $m \to \infty$ рівномірно збігається відносно області $(t, \xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ до граничної функції $v^*(t, \xi)$.

При всіх $m \in \mathbb{R}$, $(t, v_0, \xi) \in \mathbb{R} \times D_\beta$ виконуються оцінки

$$|v^*(t, \xi) - v_m(t, \xi)| \leq (\mathbb{E}_{n-1} - Q)^{-1} Q^m \beta; \tag{28}$$

2) функція $x^*(t) = (x_1^*(t), v^*(t))$, де $v^*(t) = v^*(t, \xi^*)$,

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{a_{n,1}(t)} \left(D_3(t) v^*(t) + f_n(t, v^*(t)) \right),$$

є розв'язком виродженої двоточкової крайової задачі (1)-(3) тоді і тільки тоді, коли точка $\xi = \xi^*$ є розв'язком визначального рівняння

$$\widehat{\triangle}(\xi) = 0,$$

де

$$\widehat{\triangle}(\xi) = P_{G_k^\top} \left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b, s) \widehat{f}(s, v^*(s, \xi)) ds \right);$$

3) початковим значенням розв'язку $x^*(t) = (x_1^*(t), v^*(t))$ виродженої двоточкової крайової задачі (8), (9) (11) є

$$\begin{gathered} x_1^*(a, \xi) = -\frac{1}{a_{n,1}(a)} \left(D_3(a) v^*(a, \xi) + f_n(a, v^*(a, \xi)) \right), \\ \varphi(0) = P_{G_k} \xi + G^+ \left(\mathbb{E}_{n-1} - R_2 P_{G_k^\top}^\top R_1^{-1} P_{G_k^\top} \right) \times \\ \times \left(\widehat{d} - C_2 \int\limits_a^b V(b, s) \widehat{f}(s, v(s)) ds - C_2 \sum_{i=1}^p V(b, \tau_i + 0) \widehat{b}_i \right). \end{gathered} \tag{29}$$

Список використаної літератури

1. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. К. Ін-т матем. НАН України, 1995. 318 с.
2. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. К.: Вища школа., 2000. 294 с.
3. Campbell S.L. Singular systems of differential equations. SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman, 1982. 188 p.
4. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1992. — 279 с.
5. Г. Семчишин *Дослідження розв'язності триточкових крайових задач для алгебро-диференціальних систем рівнянь у критичному випадку* Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана, 16-19 вересня 2020 р., Чернівці. С. 187.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.: Вища школа, 1987. 288 с.
7. Король І.І. Дослідження розв'язків вироджених диференціальних систем з імпульсною дією. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2009 Вип. 18, С. 73–84.

Korol I. I., Blazhivska R. M. Solving of a two-point boundary value problem for singular differential systems with impulse action.

It is often necessary to study degenerate systems of differential equations, in particular, systems with degenerate matrix at the derivative, in the mathematical description of various processes and phenomena in electronics, radio engineering, economics and biology. Some scientists call such systems differential-algebraic. These systems are difficult to study because, even in the case of linear systems and continuous functions, the Cauchy problem may have no solutions. A number of methods have been developed for the analysis of such systems in the linear case such as analysis with the help of pairs and triplets of matrices, by the Moore-Penrose Pseudoinverse matrices and by reduction to the central canonical form. The problem of finding constructive sufficient conditions of the existence and developing of methods for constructing solutions of the Cauchy problem for nonlinear systems with a degenerate matrix at the derivative is much more complicated. Most scientists use modifications of various numerical methods for this purpose. The task of developing methods for the approximate integration of boundary value problems for such systems is much more complex. An important problem is the development of methods for constructing solutions of the Cauchy problem for nonlinear systems with a degenerate matrix at the derivative. Most scientists use modifications of various numerical methods for this purpose. The problem of establishing constructive sufficient conditions of existence and development of methods of approximate solution of boundary value problems for such systems is much more complicated. The numerical-analytical method of A.M. Samoilenko has shown the efficiency for the research of extremely wide class of boundary value problems. Recently, the modifications of this method have been developed for the approximate solution of boundary value problems for nonlinear systems of ordinary differential equations with a degenerate matrix at the derivative. In this paper we use methods of the Moore-Penrose Pseudoinverse matrices and orthoprojectors. A modification of the numerical-analytical method is proposed in order to expand its use to study the existence and approximate construction of solutions of nonlinear differential systems with a degenerate matrix at the derivative, with impulse action and under a linear undivided boundary restriction. A critical case, when the corresponding linear homogeneous degenerate boundary value problem has nonzero solutions, is considered. Necessary and constructive sufficient conditions for the existence of solutions have been established, and the error estimates of the constructed approximate solutions have been found.

Keywords: singular differential system, boundary conditions, impulse action.

References

1. Boichuk, A.A., Zuravlev, V.F., & Samoilenko, A.M. (1995). Generalized inverse operators and Noetherian boundary value problems. Kyiv. Institute of math Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine [in Russian].
2. Samoilenko, A.M., Skil, M.I., & Yakovets, V.P. (2000). Linear systems of differential equations with degenerations. Kyiv. Higher school [in Ukrainian].
3. Campbell, S.L. (1982). Singular systems of differential equations. SanFrancisko, London, Melbourne. Pitman.
4. Samoilenko, A.M., & Ronto, N.I. (1992). Numerical and analytical methods in the theory of boundary value problems of ordinary differential equations. Kyiv. Scientific thought [in Russian].
5. Semchyshyn, H. (2020). Investigation of solvability of three-point boundary value problems for algebro-differential systems of equations in the critical case. Modern problems of differential equations and their application. Chernivtsi, 187 [in Ukrainian].
6. Samoilenko, A. M., & Perestiuk, N.A. (1987). Differential equations with pulse action.Kyiv. Higher school [in Russian].
7. Korol, I.I. (2009). Investigation of solutions of degenerate differential systems with pulsed action. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and In- formatics, 18, 73–84 [in Ukrainian].

Одержано 23.09.2020

UDC 512.628.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).75-81

I. O. Melnyk

Ivan Franko National University of Lviv,
Associate professor at Department of Algebra and Logic,
Candidate of Sciences in Physics and Mathematics
ivannamelnyk@yahoo.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7650-5190

ON QUASI-PRIME DIFFERENTIAL SEMIRING IDEALS

The notion of a quasi-prime ideal, for the first time, was introduced in differential commutative rings, i.e. commutative rings considered together with a derivation, as differential ideals maximal among those not meeting some multiplicatively closed subset of a ring. The notion of a semiring derivation is traditionally defined as an additive map satisfying the Leibnitz rule. Due to rapid development of semiring theory in recent years, the need of considering ideals in semirings defined by similar conditions arose.

The present paper is devoted to investigating the notion of a quasi-prime ideal of differential semiring (which is defined as a semiring together with a derivation on it), not necessarily commutative. It aims to show, how quasi-prime ideals are related to prime differential ideals, primary ideals, maximal ideals and other types of ideals of semirings. The paper consists of two main parts. In the first part, the author investigates some properties of quasi-prime differential ideals, and gives some examples of such semiring ideals, such as prime differential, maximal differential ideals, or ideal obtained by derivation operator acting on a prime ideal of a semiring. It contains a theorem, which gives equivalent conditions for a quasi-prime semiring ideal to be prime.

The second part of the paper is devoted to considering chains of quasi-prime ideals. In this part, the interrelation between quasi-prime ideals and other types of differential ideals of semirings is established. It contains a theorem, which gives a characterization of such ideals in case of a commutative semiring. This characterization involves the notion of the radical of an ideal of a semiring and a derivation operator for semirings. The paper ends with a theorem, which states that every chain of quasi-prime ideals of a semiring has the least upper bound and the greatest lower bound. It is also proven that every quasi-prime ideal containing some differential ideal contains a quasi-prime ideal minimal among all the quasi-prime ideals of the given semiring, which contain the above mentioned differential ideal.

Keywords: differential semiring, differential ideal, semiring ideal, quasi-prime ideal.

1. Introduction. Semirings were introduced by Vandiver [9] as a generalization of associative rings and distributive lattices. The notion of a semiring derivation is defined in [4] as an additive map satisfying the Leibnitz rule. Thierrin [8] studied a semiring of languages over some alphabet and showed that it forms a differential additively idempotent semiring under the operations of union as the addition and catenation as the product, proving that differential semirings are of great interest due to their possible applications. Recently Chandramouleeswaran and Thiruveni [2] investigated different properties of semiring derivations and differential semiring ideals. This motivates a further study into properties of differential semirings, not necessarily idempotent, commutative, or connected with formal languages. Quasi-prime ideals were introduced by Keigher [6] for differential commutative rings. The objective of this paper is to investigate quasi-prime ideals of differential semirings, not nesessarily commutative, and their interrelation with prime differential ideals.

For the sake of completeness some definitions and properties used in the paper will be given here. For more information on semirings see [4] or [5].

Let R be a nonempty set, and let $+$ and $\cdot$ be binary operations on R. An algebraic system $(R, +, \cdot)$ is called a *semiring* if $(R, +, 0)$ is a commutative monoid, $(R, \cdot)$ is a semigroup and multiplication distributes over addition from either side. A semiring $(R, +, \cdot)$ is said to be *commutative* if $\cdot$ is commutative on R.

Zero $0 \in R$ is called (*multiplicatively*) *absorbing* if $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ for all $a \in R$. An element $1 \in R$ is called an *identity* if $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in R$.

An element $a \in R$ is called *additively cancellable* if $a + b = a + c$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. Denote by $K^+(R)$ the set of all additively cancellable elements of R. A semiring R is called *additively cancellative* if $K^+(R) = R$.

An element $a \in R$ is called *additively idempotent* if $r + r = r$. Denote by $I^+(R)$ the set of all additively idempotent elements of R. A semiring R is called *additively idempotent* if $I^+(R) = R$.

A semiring is called *entire* if $ab = 0$ implies that either $a = 0$ or $b = 0$ for all $a, b \in R$. A subset S of R closed under addition and multiplication is called a *subsemiring* of R. The *center* of a semiring R is a set $Z(R) = \{r \in R | rs = sr \text{ for all } s \in R\}$. It is a subsemiring of R. Since $0 \in Z(R)$, $Z(R) \neq \varnothing$.

A *left ideal* of a semiring R is a nonempty set $I \neq R$ which is closed under addition and satisfies the condition $ra \in I$ for all $a \in I$, $r \in R$. Similarly we can define a right ideal and a (two-sided ideal) of a semiring. An ideal I of a semiring R is called *subtractive* (or *k-ideal*) if $a \in I$ and $a + b \in I$ follow $b \in I$ for any $a, b \in R$. An ideal I of the semiring R is called *strong* if $a + b \in I$ implies $a \in I$ and $b \in I$ for any $a, b \in R$. Every strong ideal is subtractive. The *k-closure* $cl(I)$ of an ideal I is the set $cl(I)$ of all elements $a \in R$ such that $a + b \in I$ for some $b \in I$. It is an ideal of R satisfying $I \subseteq cl(I)$ and $cl(cl(I)) = cl(I)$. An ideal I of R is subtractive if and only if $I = cl(I)$.

The *zeroid* $Zr(R)$ of a semiring R is the set of elements a of R such that there exists $b \in R$ such that $a + b = b$. The zeroid of a ring consists of 0 only. The zeroid of a semiring is a (two-sided) ideal. [1]

A *prime ideal* of R is an ideal $P \neq R$ such that whenever $IJ \subseteq P$ for any ideals I and J of R then either $I \subseteq P$ or $J \subseteq P$. An ideal P of a commutative semiring R is prime if and only either $a \in P$ or $b \in P$ whenever $ab \in P$ for any $a, b \in R$. A *primary ideal* of a commutative semiring R is a proper ideal P of R for which either $a \in P$ or $b \in \sqrt{P}$ whenever $ab \in P$. An ideal P is primary if and only if $IJ \subseteq P$ implies that either $I \subseteq P$ or $J \subseteq \sqrt{P}$. If Q is a primary ideal of a commutative semiring R, then $\sqrt{Q}$ is a prime ideal of R [4].

Throughout the paper R denotes a semiring in the above sense, not nesessarily commutative, with identity 1 and absorbing zero $0 \neq 1$, unless stated otherwise. $\mathbb{N}$ denotes the set of positive integers, and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

2. Quasi-prime and prime differential ideals. A map $\delta \colon R \to R$ is called a *derivation* [4] on R if $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a) b + a \delta(b)$ for any $a, b \in R$. A semiring R equipped with a derivation δ is called *differential* with respect to the derivation δ, or a *δ-semiring*, and denoted by (R, δ) [2].

For an element $a \in R$ denote $a^{(0)} = a$, $a' = \delta(a)$, $a'' = \delta(\delta(a))$, $\ldots a^{(n)} = \delta(a^{(n-1)})$, $n \in \mathbb{N}_0$, and $a^{(\infty)} = \{a^{(n)} | n \in \mathbb{N}_0\}$.

Let (R, δ) be a differential semiring. For a subset A of R we define its *differential*

$A_\#$ to be the set

$$A_\# = \left\{ a \in R \,\middle|\, a^{(n)} \in A \,\text{for all}\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

An ideal I of the δ-semiring R is called *differential* [4] if $\delta(a) \in I$ whenever $a \in I$. A subsemiring S of the δ-semiring R is called *differential* if $a \in S$ follows $\delta(a) \in S$.

$\{0\}$ is a differential k-ideal of any differential semiring R. As noted in [2], in a differential semiring R with absorbing zero the set $V(R)$ of all additively invertible elements of R is a differential ideal.

The set $I^+(R)$ of all additively idempotent elements of R is a differential ideal of R. Every multiplicatively idempotent two-sided ideal I of a differential semiring R is differential. If I is a differential ideal of R, then its k-closure $cl(I)$ is a differential k-ideal of R [7].

Proposition 1. *The zeroid $Zr(R)$ of a differential δ-semiring R is a differential ideal of R.*

Proof. For $a \in Zr(R)$ solvability of the equation $a + x = x$ for $x \in R$ implies $\delta(a) + \delta(x) = \delta(x)$, which in turn gives $\delta(a) \in Zr(R)$.

Proposition 2. *If R is an additively cancellative differential semiring, then its center $Z(R)$ is a differential subsemiring of R.*

Proof. For $a \in Z(R)$ and $b \in R$ we have $ab = ba$. Then $\delta(ab) = \delta(a)b + \delta(b)a$ and $\delta(ba) = \delta(b)a + a\delta(b)$ follows $\delta(a)b = a\delta(b)$. Therefore, $\delta(a) \in Z(R)$.

A non-empty subset S of the semiring R is called an *m-system* [4] of R if for every $a, b \in S$ there exists an element $r \in R$ such that $arb \in S$. An ideal I of R is prime if and only if $R \setminus I$ is an m-system [4]. Any maximal ideal of a semiring is prime [4].

A differential ideal Q of R is called *quasi-prime* if it is maximal among differential ideals of R disjoint from some m-system of R.

Proposition 3. *Any prime differential ideal of R is quasi-prime.*

Proof. For any prime ideal P of R the complement $R \setminus P = S$ is an m-system [4]. The result follows by definition.

Proposition 4. *Every maximal differential ideal of R is quasi-prime.*

Proof. Let Q be a maximal among differential ideals of R, $S = U(R)$ be the set of units of R. Then S is an m-system and no differential ideal I contains a unit of R, so $Q \cap U(R) = \emptyset$. Therefore, Q is a quasi-prime ideal.

Proposition 5. *In any differential semiring R for any prime ideal P of R the differential ideal $P_\#$ is quasi-prime.*

Proof. Suppose P is a prime ideal of R and $S = R \setminus P$. Then S is an m-system and $S \cap P = \emptyset$. By Propositions 10 and 11 from [7], $P_\#$ is a differential ideal of R disjoint from S. If I is any differential ideal disjoint from S, then $I \subseteq P$. Thus $I = I_\# \subseteq P_\#$. Hence $P_\#$ is a quasi-prime ideal of R.

Theorem 1. *For a differential semiring R the following conditions are equivalent:*

1) *Any quasi-prime ideal I in R is prime.*
2) *If I is a prime ideal of R, then $I_\#$ is a prime differential ideal of R.*

3) Any prime ideal, minimal over some differential ideal, is differential.

4) If $S \subseteq R$ is an m-system of R ($0 \notin S$) and I is a differential ideal of R disjoint from S, then every differential ideal of R which is maximal among differential ideals containing I and not meeting S is prime.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) If I is prime then by Proposition 5 $I_{\#}$ is quasi-prime. Therefore, $I_{\#}$ is a prime differential ideal.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Let I be a differential ideal of R, and let P be a prime ideal minimal among prime ideals containing I. Then $I = I_{\#} \subseteq P_{\#} \subseteq P$. Since $P_{\#}$ is prime, then $P_{\#} = P$. Therefore, P is a prime differential ideal.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Obvious.

(2) $\Longrightarrow$ (4) Obvious.

(4) $\Longrightarrow$ (2) Suppose $S \subseteq R$ is an m-system of R ($0 \notin S$), I is a differential ideal of R such that $I \cap S = \varnothing$, and every differential ideal K of R, maximal among those containing I and not meeting S is prime. Let P be any prime ideal. Under given conditions $S = R \setminus P$ is an m-system of R and $\{0\}$ is a differential ideal disjoint from S. Moreover, $P_{\#} \subseteq P$ follows $S \cap P_{\#} = \varnothing$. Thus $P_{\#}$ is a differential ideal of R disjoint from S. If I is an arbitrary differential ideal of R such that $P_{\#} \subseteq I$ and $I \cap S = \varnothing$, then $I \subseteq P$. It follows that $I = I_{\#} \subseteq P_{\#}$. Thus $P_{\#}$ is prime.

3. Chains of quasi-prime ideals. Many interesting results on quasi-prime ideals can be obtained in commutative case.

Let A be a subset of R. Denote the smallest differential ideal containing the set A by $[A]$, the smallest radical differential ideal containing A by $\{A\}$, the smallest differential subtractive ideal containing the set A by $|A|$, and the smallest radical differential subtractive ideal containing A by $\langle A \rangle$.

Lemma 1. *Let $a, b \in R$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\delta \colon R \longrightarrow R$ be a semiring derivation. Then $a^{n+1}\delta^n(b) \in |ab|$.*

Proof. By induction on n. The lemma is obviously true for $n = 0$. Let $n \geq 1$. Assume the assertion is true for all $k < n$.

Consider $\delta(a^n \cdot b^{(n-1)}) = na^{n-1}a'b^{(n-1)} + a^n b^{(n)}$, and multiply it by a. Then $a \cdot \delta(a^n \cdot b^{(n-1)}) = na^n a'b^{(n-1)} + a^{n+1}b^{(n)}$. By induction hypothesis, since $|ab|$ is a differential ideal, then $a \cdot \delta(a^n \cdot b^{(n-1)}) \in |ab|$, moreover $na^n a'b^{(n-1)} + a^{n+1}$. Therefore by subtractivity of $|ab|$, $a^{n+1}b^{(n)} \in |ab|$, as needed.

Theorem 2. *Every quasi-prime ideal of R is primary.*

Proof. Let Q be a quasi-prime ideal of R, and let $a \notin Q$ and $b^n \notin Q$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Prove that Q is primary by showing that $ab \notin Q$. There exists a multiplicatively closed subset S of R such that $S \cap Q = \emptyset$ and $I \cap Q \neq \emptyset$ for every $I \neq Q$ such that $Q \subset I$. Then $Q \subset Q + \sum_{k=1}^{n} R\delta^k(a) = I$ for some $n \in \mathbb{N}_0$ and $Q \neq I$, and by maximality of Q, $I \cap S \neq \emptyset$. So there exists $s \in S \cap Q + \sum_{k=1}^{n} R\delta^k(a)$ for some $m \in \mathbb{N}_0$. Similarly, there exists an element $t \in S \cap Q + \sum_{l=1}^{m} R\delta^l(b^{n+1})$. Then by Lemma 1 $s^r t \in |ab| + Q$ for some $r \in \mathbb{N}_0$. Hence $ab \notin Q$, for if $ab \in Q$, then $|ab| \subseteq Q$, and $|ab| + Q = Q$, so $s^r t \in Q$, and $S \cap Q \neq \emptyset$ which would contradict to the assumption.

In a commutative semiring R the *radical* of an ideal I is denoted by $\sqrt{I}$ and defined to be the set $\sqrt{I} = \{r \in R | r^n \in I \text{ for some } n \in \mathbb{N}_0\}$. According to [3] $I \subseteq \sqrt{I}$. If I is a subtractive ideal of R, then so is $\sqrt{I}$. Moreover, $\sqrt{I}$ is an intersection of all the prime ideals of R containing I, whenever $1 \in R$.

Theorem 3. *Let R be a commutative semiring. For a differential ideal Q of R the following conditions are equivalent:*

1) Q is quasi-prime;
2) Q is primary and $Q = (\sqrt{Q})_\#$;
3) $\sqrt{Q} \in Spec(R)$ and $Q = (\sqrt{Q})_\#$;
4) There exists $P \in Spec(R)$ such that $Q = P_\#$.

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2) Let Q be a quasi-prime ideal of R. Q is primary by Proposition 2. Moreover, Q is maximal among differential ideals of R disjoint from some multiplicatively closed subset S. Prove that $\sqrt{Q} \cap S = \emptyset$. If $a \in \sqrt{Q} \cap S$, then there exists $n \in \mathbb{N}_0$ such that $a^n \in Q$, and $a \in S$. Therefore, the $Ra^n \subseteq Q$, and $Ra^n \subseteq Q \cap S$, which contradicts to the assumption.

Since $Q \subseteq \sqrt{Q}$ then by [7] $Q = Q_\# \subseteq (\sqrt{Q})_\#$. Then $\sqrt{Q} \cap S = \emptyset$ and $(\sqrt{Q})_\# \subseteq \sqrt{Q}$ follow $(\sqrt{Q})_\# \cap S = \emptyset$. Since Q is the maximal among differential ideals of R not meeting S, then $Q = (\sqrt{Q})_\#$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Let Q be a primary ideal of R. Then $\sqrt{Q}$ is a prime ideal of R [4].

(3) $\Longrightarrow$ (4) $P = \sqrt{Q}$ is the prime ideal of R satisfying the condition $Q = P_\#$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Let P be a prime differential ideal of R such that $Q = P_\#$. Then by Proposition 5 Q is quasi-prime.

Proposition 6. *Let $f\colon R_1 \to R_2$ be a differential semiring homomorphism. If Q is a quasi-prime ideal of R_2, then $f^{-1}(Q)$ is a quasi-prime ideal of R_1.*

Proof. Let Q be a quasi-prime ideal of R_2. By Theorem 5 there exists $P \in Spec(R)$ such that $Q = P_\#$. Then $f^{-1}(Q) = f^{-1}(P_\#) = (f^{-1}(P))_\#$ by Proposition 13 [7]. Then again since $f^{-1}(P) \in Spec(R)$, by Theorem 3 $f^{-1}(Q)$ is quasi-prime in R_1.

Let $Spec(R)$ denote the spectrum of R. Denote by $Quas(R)$ the set of all quasi-prime differential ideals of R, and call it a quasi-prime spectrum of R. Then the map $\alpha\colon Spec(R) \to Quas(R)$ given by $\alpha(P) = P_\#$ for any $P \in Spec(R)$ is surjective, and the map $\beta\colon Quas(R) \to Spec(R)$ given by $\beta(Q) = \sqrt{Q}$ for any $Q \in Quas(R)$ is injective. Moreover, $\alpha\beta = id$ is the identity on $Quas(R)$.

A differential homomorphism $f\colon R_1 \to R_2$ induces a function $f^{-1}\colon Quas(R_2) \to Quas(R_1)$.

Theorem 4. *Let R be a commutative semiring. If $\{Q_i\}_{i\in I}$ is a chain of quasi-prime ideals of R, then $\bigcap_{i\in I} Q_i$ is a quasi-prime ideal of R and there is a unique smallest quasi-prime ideal of R containing $\bigcup_{i\in I} Q_i$.*

Every chain of quasi-prime ideals of R has the least upper bound and the greatest lower bound.

Proof. If $\{Q_i\}_{i\in I}$ is a chain of quasi-prime ideals of R, then by Proposition 2, $\{\sqrt{Q_i}\}_{i\in I}$ is a chain of prime ideals of R. Since $\bigcap_{i\in I}\sqrt{Q_i}$ and $\bigcup_{i\in I}\sqrt{Q_i}$ are prime ideals of R. By Proposition 10 from [7] $(\bigcap_{i\in I}\sqrt{Q_i})_\# = \bigcap_{i\in I}(\sqrt{Q_i})_\# = \bigcap_{i\in I} Q_i$. The ideal $\bigcap_{i\in I}\sqrt{Q_i}$ being prime follows that $(\bigcap_{i\in I}\sqrt{Q_i})_\#$ is quasi-prime, by Proposition 5, so is $\bigcap_{i\in I} Q_i$.

If Q is any quasi-prime ideal of R containing the prime ideal $\bigcup_{i\in I} Q_i$, then $\sqrt{\bigcup_{i\in I} Q_i} = \bigcup_{i\in I}\sqrt{Q_i} \subseteq \sqrt{Q}$. Thus $(\bigcup_{i\in I}\sqrt{Q_i})_\# \subseteq (\sqrt{Q})_\# = Q$.

Theorem 5. *Let R be a commutative semiring. Let I be a differential ideal of R and Q be a quasi-prime ideal of R such that $I \subseteq Q$. Then Q contains a quasi-prime* *ideal minimal among all quasi-prime ideals of R containing I.*

Proof. Embed Q in a maximal chain $\{Q_i\}_{i\in I}$ of quasi-prime ideals of R containing I. Thus, $\bigcap_{i\in I} Q_i$ is a quasi-prime ideal of R and is clearly minimal.

References

1. Bourne, S., & Zassenhaus, H. (1858). On the semiradical of a ring. *Proc. Nath. Acad. Sci. USA*, 44, 907–914.
2. Chandramouleeswaran, M., & Thiruveni, V. (2010). On derivations of semirings. *Advances in Algebra*, 1, 123–131.
3. Dubei, M.K. (2012). Prime and weakly prime ideals in semirings. *Quasigroups and related systems*, 20, 197–202.
4. Golan, J. S. (1999). Semirings and their Applications. *Kluwer Academic Publishers.*
5. Hebisch, U., & Weinert, H. J. (1998). Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science, *World Scientific.*
6. Keigher, W. (1977). Prime differential ideals in differential rings. Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, *Academic Press*, 239–249.
7. Melnyk, I. (2016). On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.*, 82, 163–173.
8. Thierrin G. (2001). Insertion of languages and differential semirings. Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet. *Kluwer Academic*, 287–296.
9. Vandiver H.S. (1934). Note on a simple type of algebras in which the cancellation law of addition does not hold. *Bull. Am. Math. Soc.*, 40 , 916–920.

Мельник І. О. Про квазіпервинні диференціальні ідеали напівкілець.

Поняття `квазіпервинного ідеалу` було вперше введено в комутативних диференціальних кільцях, тобто комутативних кільцях, які розглядаються разом із заданим на них диференціюванням, як диференціальний ідеал, максимальний серед диференціальних ідеалів, які не перетинаються із деякою мультиплікативно-замкненою підмножиною кільця. Поняття диференціювання у напівкільці традиційно визначають як адитивне відображення, яке задовольняє правило Лейбніца. У зв'язку з швидким розвитком теорії напівкілець в останні роки, виникла потреба у вивченні ідеалів, які визначаються подібними властивостями у напівкільцях.

Ця стаття присвячена дослідженню поняття `квазіпервинного ідеалу` в диференціальних напівкільцях (які означаються як напівкільця разом із диференціюванням, заданому на них), які не обов'язково комутативні. Метою статті є показати, як `квазіпервинні ідеали` пов'язані з первинними диференціальними ідеалами, примарними ідеалами, максимальними ідеалами та іншими типами ідеалів у напівкільцях. Стаття складається з двох основних частин. У першій частині автор досліджує деякі властивості квазіпервинних диференціальних ідеалів, а також подає деякі приклади таких ідеалів, зокрема первинні диференціальні, максимальні диференціальні та ідеали, які можна отримати в результаті дії оператора диференціювання на первинні ідеали напівкільця. У цій частині подано теорему, у якій даються еквівалентні умови того, що квазіпервинний ідеал є первинним.

У другій частині статті розглядаються ланцюги `квазіпервинних ідеалів`. У цій частині встановлено взаємозв'язки між `квазіпервинними ідеалами` та іншими типами диференціальних ідеалів напівкілець. В одній з теорем подано характеризацію таких ідеалів у випадку комутативних напівкілець. У цій характеризації використовуються поняття радикалу ідеалу напівкільця та оператор диференціювання в напівкільцях. На завершення статті подано теорему про те, що кожний ланцюг `квазіпервинних ідеалів` напівкільця має точну верхню і точну нижню межу. Також доведено, що кожний `квазіпервинний ідеал`, який містить деякий диференціальний ідеал, містить квазіпервинний ідеал, мінімальний серед усіх квазіпервинних ідеалів даного напівкільця, які містять вищезгаданий диференціальний ідеал.

Ключові слова: диференціальне напівкільце, диференціальний ідеал, ідеал напівкільця, квазіпервинний ідеал.

Список використаної літератури

1. Bourne S., Zassenhaus H. On the semiradical of a ring. *Proc. Nath. Acad. Sci. USA*. 1858. No. 44. P. 907–914.
2. Chandramouleeswaran M., Thiruveni V. On derivations of semirings. *Advances in Algebra*. 2010. No. 1. P. 123–131.
3. Dubei M. K. Prime and weakly prime ideals in semirings. *Quasigroups and related systems*. 2012. No. 20. P. 197–202.
4. Golan J. S. Semirings and their Applications, Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
5. Hebisch U., Weinert H. J. Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science, World Scientific, 1998. 362 p.
6. Keigher W. Prime differential ideals in differential rings. Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press, 1977, 239–249.
7. Melnyk I. On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.* 2016. No. 82. P. 163–173.
8. Thierrin G. Insertion of languages and differential semirings, Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet, Kluwer Academic, 2001. P. 287–296.
9. Vandiver H. S. Note on a simple type of algebras in which the cancellation law of addition does not hold. *Bull. Am. Math. Soc.* 1934. No. 40. P. 916–920.

Recived 06.10.2020

УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).82-90

Ю. Ю. Млавець[1], О. О. Синявська[2]

[1] ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

[2] ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

УМОВИ РІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ВЕЙВЛЕТ РОЗКЛАДІВ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПРОСТОРІВ $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$

Ця стаття присвячена знаходженню умов рівномірної збіжності з ймовірністю одиниця вейвлет розкладів класу випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Вивчення загальних властивостей таких випадкових процесів, отримання оцінок розподілу функціоналів від процесів з тих чи інших просторів випадкових величин, встановлення умов рівномірної збіжності випадкових функціональних рядів є одними із поширених задач теорії випадкових процесів.

Вейвлет аналіз є достатньо молодою галуззю математики з багатьма цікавими проблемами й задачами. Однак дану теорію, зокрема вейвлет розклади функцій, на даний час широко використовують як у теорії випадкових процесів, так і у різних областях науки. Наприклад, вейвлет аналіз активно застосовується для фільтрації і попередньої обробки даних, аналізу стану і прогнозування ситуації на фондових ринках, розпізнавання образів, при обробці і синтезі різних сигналів, зокрема при обробці мовних сигналів, біомедичних сигналів, для розв'язання завдань стиснення і обробки зображень, при навчанні нейромереж і в багатьох інших випадках. Тому є актуальною задача знаходження умов рівномірної збіжності вейвлет розкладів класу випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

У даній роботі ми зосереджуємося на основних властивостях просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та деяких елементах теорії вейвлетів.

На початку статті наведено основні означення, теореми, приклади випадкових величин з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та поняття і властивості мажоруючої характеристики цього простору. Далі подано необхідні відомості з вейвлет аналізу, зокрема: означення f-, m-вейвлетів та умови S, а також умови розкладу функцій по цим базисам. Також наведено умови рівномірної збіжності з імовірністю одиниця вейвлет розкладів деяких функцій.

Основним результатом статті є умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Дані умови базуються на оцінках розподілу супремуму на $\mathbb{R}$ випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ та рівномірної неперервності сепарабельного вимірного випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ з простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ на деякому відрізку. Також, наведено приклади функцій, для яких виконується одна із умов теореми про оцінку мажоруючої характеристики $\varkappa(n)$ простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Ключові слова: Простори випадкових величин $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, мажоруюча характеристика, випадкові процеси, вейвлети, вейвлет розклади.

1. Вступ. У 90-х роках XX століття почав розвиватися такий напрямок в теорії випадкових процесів, як вейвлет аналіз. Вейвлет аналіз – це нова, цікава галузь математики з своїми проблемами й задачами, багато з яких до цього часу не вирішені. Вейвлет аналіз вивчає умови, за яких функції можуть бути розкладені в ряди по базисам вейвлетів, тобто по ортогональним системам, що породжуються однією функцією $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$, а саме, по системам функцій $\varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k)$ та $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)$.

Крім того, цю теорію ефективно можна застосовувати на практиці. Наприклад: при записах інформації, записах звуку та зображенні на компакт диски та комп'ютери. Як показують дослідження, що запис та збереження інформації за допомогою вейвлетів набагато ефективніший, ніж інші, наприклад, ніж використання розкладів Фур'є. Ефективно використовуються вейвлети також при кодуванні інформації.

Світові дослідження пропонують новий науковий підхід – нечіткі вейвлети. Інновація полягає в тому, що за допомогою вейвлетів отримують множину інформативних коефіцієнтів, що розглядають за допомогою теорії нечіткої логіки та нечітких множин [1]. За допомогою цього підходу розв'язують складні задачі класифікації сигналів, використовуючи знання, досвід та міркування експертів або експериментальні дані [2].

Вагомий внесок у створення теорії вейвлет аналізу належить вченим Західної Європи та Північної Америки, таким як С. Маллат [3], І. Мейер [4], І. Добеші [5] та Ч. Чуі [6].

Майже одночасно з першими роботами по вейвлет аналізу з'явились роботи, де вейвлет розклади застосовувались до задач теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів. Розклади випадкових процесів по системам вейвлетів використовуються для їх моделювання та збереження траєкторії цих процесів з метою їх подальшого відновлення.

На основі вейвлет розкладів побудовано оцінки щільностей розподілів випадкових величин та спектральні функції стаціонарних випадкових процесів [7]. Дослідженням швидкості зростання супремуму випадкових процесів та умов рівномірної збіжності з імовірністю одиниця на обмеженому інтервалі вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів Орліча випадкових величин займалися Ю. В. Козаченко і М. М. Перестюк [8, 9].

В даній роботі знаходяться умови, за яких вейлет розклади випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ збігаються рівномірно на обмеженому інтервалі з імовірністю одиниця.

Робота складається із вступу та трьох розділів. В другому розділі наведені необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. В третьому розділі розглядаються вейвлети, вейвлет розклади невипадкових функцій та умови, за яких розклади функцій рівномірно збігаються на певному скінченному інтервалі. В четвертому розділі знаходяться загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

2. $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – простори.

Означення 1 (див. [10])**.** *Нехай $\psi(u) > 0$, $u \geq 1$ – монотонно зростаюча неперервна функція, така що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо виконується умова:*

$$\sup_{u \geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Подібне означення сформульоване в роботі С. В. Єрмакова та Є. І. Островського [11]. Але там вимагалось, щоб $E\xi = 0$, якщо $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Крім того розглядались випадкові величини, такі що $E\left|\xi\right|^u = \infty$ при певному $u > 0$.

Доведемо наступну теорему.

Теорема 1. *Простір $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ є простором Банаха з нормою*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)}.$$

Доведення. Доведемо спочатку, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – лінійний нормований простір. Очевидно, що $\|\xi\|_\psi = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\xi = 0$ з імовірністю одиниця. Справедлива рівність

$$\|\alpha\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\alpha\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geq 1}\frac{\left|\alpha\right|\left(E\left|\xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \left|\alpha\right|\|\xi\|_\psi .$$

Очевидна і нерівність трикутника. Дійсно,

$$\|\xi_1+\xi_2\|_\psi = \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\xi_1+\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u}+\left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq$$

$$\leq \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\xi_1\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} + \sup_{u\geq 1}\frac{\left(E\left|\xi_2\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \|\xi_1\|_\psi + \|\xi_2\|_\psi .$$

Покажемо тепер, що $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ – повний простір, тобто, якщо $\xi_n \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\|\xi_n-\xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то існує випадкова величина ξ, така що $\xi \in \mathbf{F}_\psi(\Omega)$ і $\|\xi_n-\xi_l\|_\psi \to 0$. З означення норми випливає, що для будь-якого $u \geq 1$

$$\left(E\left|\xi_n-\xi_l\right|^u\right)^{1/u} \leq \psi(u)\|\xi_n-\xi_l\|_\psi . \tag{1}$$

Оскільки $\|\xi_n-\xi_l\|_\psi \to 0$ при $n, l \to \infty$, то і $\left(E\left|\xi_n-\xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n, l \to \infty$. Простір $L_u(\Omega)$, $u \geq 1$ – повний, тому що існує випадкова величина $\xi \in L_u(\Omega)$, що $\xi_n \to \xi$ при $n \to \infty$ в нормі цього простору. Легко бачити, що існує $\xi \in L_u(\Omega)$ при всіх $u \geq 1$, що $\left(E\left|\xi_n-\xi_l\right|^u\right)^{1/u} \to 0$ при $n \to \infty$. Дійсно, коли $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_u(\Omega)$, то $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $L_v(\Omega)$, де $v < u$.

Позначимо η_s, $s = 1, 2, ...$ такі випадкові величини, що $\xi_n \to \eta_s$ в нормі просторів $L_u(\Omega)$, де $s-1 < u \leq s$. Тоді існують підпослідовності ξ_{n_s}, що збігаються до η_s з імовірністю одиниця. Нехай A_s множина $P\left(A_s\right) = 1$, на якій ξ_{n_s} збігається до η_s. Тоді на множині $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$ всі η_s рівні та $P\left\{\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s\right\} = 1$.

Нехай тепер ξ – випадкова величина рівна η_s на множині $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$. Зрозуміло, що $P\left\{\eta_s \neq \xi\right\} = 0$. Тому $\xi_n \to \xi$ в $L_u(\Omega)$, тоді ж коли $\xi_n \to \eta_s$ в цьому ж просторі.

Отже, при всіх $u \geq 1$ з нерівності (1) випливає, що

$$\left(E\left|\xi_n-\xi_l\right|^u\right)^{1/u} \leq \psi(u)\sup_{r>n}\|\xi_n-\xi_r\|_\psi < \infty.$$

Якщо в останній нерівності спрямувати l до нескінченності, тоді отримаємо, що при всіх $n \geq 1$ та $u \geq 1$

$$\left(E\left|\xi_n - \xi\right|^u\right)^{1/u} \leq \psi(u) \sup_{r>n} \left\|\xi_n - \xi_r\right\|_\psi < \infty. \tag{2}$$

Отже,

$$\sup_{u\geq 1} \frac{\left(E\left|\xi_n - \xi\right|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Тобто випадкові величини $\xi_n - \xi$ при $n \geq 1$ належать простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Оскільки $\|\xi\|_\psi \leq \|\xi - \xi_n\|_\psi + \|\xi_n\|_\psi < \infty$, то випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. З нерівності (2) випливає, що $\|\xi_n - \xi\|_\psi \leq \sup\limits_{r>n} \|\xi_n - \xi_r\|_\psi \to 0$ при $n \to \infty$. Тобто $\xi_n \to \xi$ в нормі простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Теорему доведено.

Наведемо приклади випадкових величин із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Приклад 1. *Випадкова величина ξ, для якої з імовірністю одиниця виконується умова $|\xi| < C$, де $C > 0$ – деяка константа, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, що породжений будь-якою функцією ψ з означення 1:*

$$\|\xi\|_\psi = \sup_{u\geq 1} \frac{\left(\mathsf{E}\,|\xi|^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} \leq \sup_{u\geq 1} \frac{\left(C^u\right)^{1/u}}{\psi(u)} = \sup_{u\geq 1} \frac{C}{\psi(u)} = \frac{C}{\psi(1)}.$$

Приклад 2. *Випадкова величина ξ, що має розподіл Лапласа з щільністю $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u$, що встановлюється еквівалентністю $\sqrt[k]{\mathsf{E}\,|\xi|^k} = \sqrt[k]{k!} \sim k$ при $k \geq 1$.*

Приклад 3. *Нормальна випадкова величина $\xi = N(0,1)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, де $\psi(u) = u^{1/2}$, оскільки $\sqrt[2l]{\mathsf{E}\,|\xi|^{2l}} = \sqrt[2l]{\frac{(2l)!}{2^l l!}} \sim l^{1/2}$ при $l \geq 1$.*

Означення 2 (див. [10])**.** *Неспадна числова послідовність $\varkappa(n) > 0, n \geq 1$ називається M-характеристикою (мажоруючою характеристикою) простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-яких випадкових величин ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ із цього простору, виконується нерівність:*

$$\left\|\max_{1\leq i\leq n} |\xi_i|\right\|_\psi \leq \varkappa(n) \max_{1\leq i\leq n} \|\xi_i\|_\psi.$$

Теорема 2 (див. [10])**.** *Послідовність*

$$\varkappa(n) = \sup_{u\geq 1} \inf_{v>0} n^{\frac{1}{u+v}} \frac{\psi(u+v)}{\psi(u)}$$

є мажоруючою характеристикою простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Означення 3 (див. [12])**.** *Скажемо, що випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, де T – деяка параметрична множина, належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, якщо для будь-якого $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.*

3. Вейвлет базиси та розклади функцій по цим базисам. Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\} \in L_2(\mathbb{R})$, а $\widehat{\varphi}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iyx}\varphi(x)dx$ – перетворення Фур'є функції $\varphi : \varphi_{0k}(x) = \varphi(x-k)$.

Означення 4 (див. [5,13]). *Функція φ називається f-вейвлетом, якщо виконуються такі умови:*

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(y+2\pi k)|^2 = 1$ *майже скрізь;*

2) існує така 2π-періодична функція $m_0(x) \in L_2([0;2\pi])$, що майже скрізь $\widehat{\varphi}(y) = m_0\left(\frac{y}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right)$;

3) $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ *та* $\widehat{\varphi}(y)$ *неперервні в нулі.*

Означення 5 (див. [5, 13]). *Функція $\delta(x)$ називається m-вейвлетом, що відповідає f-вейвлету φ, якщо її перетворення Фур'є має вигляд:*

$$\widehat{\delta}(y) = \overline{m_0\left(\frac{y}{2}+\pi\right)} \exp\left\{-i\frac{y}{2}\right\} \widehat{\varphi}\left(\frac{y}{2}\right).$$

Нехай $\varphi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi\left(2^j x - k\right)$, $\delta_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\delta\left(2^j x - k\right)$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

Відомо (див. [7, 13]), що система функцій $\{\varphi_{0k}, \delta_{jk}, j = 0, \ldots, k \in \mathbb{Z}\}$ є ортонормованим базисом в $L_2(\mathbb{R})$. Будь-яка функція $f \in L_2(\mathbb{R})$ може бути зображена у вигляді ряду, що збігається у середньому квадратичному

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\delta_{jk}(x), \tag{3}$$

де

$$\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx, \ \beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx \tag{4}$$

та

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_{0k}|^2 + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\beta_{jk}|^2 < \infty.$$

Зображення (3) називається вейвлет зображенням.

Зауваження 1. *Оскільки інтеграли, що визначені у рівностях (4) для α_{0k} і β_{jk}, існують не лише для функцій із $L_2(\mathbb{R})$, то можна отримати вейвлет розклади для більш широкого класу функцій, ніж простір $L_2(\mathbb{R})$, які будуть збігатися в певних нормах.*

Означення 6 (див. [5, 13]). *Нехай φ – f-вейвлет. Для φ – виконується умова S, якщо існує парна функція $\Phi = \{\Phi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ така, що $\Phi(0) < \infty$, $\Phi(x)$ – монотонно спадає при $x \geq 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \Phi(|x|) < \infty$ та $|\varphi(x)| \leq \Phi(|x|)$ для $x \in \mathbb{R}$.*

Лема 1 (див. [14]). *Нехай для f-вейвлету φ виконується умова S з функцією Φ, а $\delta(x)$ – m-вейвлет, що відповідає φ. Тоді при всіх $x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність*

$$|\delta(x)| \leq B\Phi\left(\left|\frac{2x-1}{4}\right|\right),$$

де $0 < B < \infty$ – деяка константа.

Теорема 3 (див. [14]). *Нехай для f-вейвлету φ виконується умова S із функцією Φ, $c = \{c(x),\ x \in \mathbb{R}\}$ – така парна функція, що $c(x) > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $c(x)$*

– монотонно зростає при $x > 0$ та $\int\limits_{\mathbb{R}} c(x)\Phi(|x|) < \infty$. Крім того, існує така функція $0 < A(u) < \infty$, $u > 0$, що для досить великих x

$$c(ax) \le c(x) \cdot A(a), \; a > 0.$$

Якщо $f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$ – така вимірна на $\mathbb{R}$ функція, що $|f(x)| \le c(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x)$ – неперервна на інтервалі (a,b), $-\infty < a < b < +\infty$, тоді

$$f_m(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_{jk}\delta_{jk}(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x),$$

$$\alpha_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{0k}(x)}dx, \; \beta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\delta_{jk}(x)}dx,$$

рівномірно на кожному відрізку $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

4. Умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Наступна теорема дає загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Теорема 4. *Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ – сепарабельний, вимірний, випадковий процес з $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, $T_k = [a_k, a_{k+1}]$, $-\infty < a_k < a_{k+1} < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$. Для кожного T_k існує неперервна строго монотонна зростаюча функція $\sigma_k(h)$, $0 \le h \le (a_{k+1} - a_k)$, $\sigma_k(0) = 0$, така, що*

$$\sup_{\substack{|t-s|\le h \\ t,s\in T_k}} \big\|X(t) - X(s)\big\|_\psi \le \sigma_k(h).$$

Нехай, також виконуються умови:

1) *$\int\limits_0^{\gamma_k} \varkappa\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty$, де $\varkappa(n)$ – мажоруюча характеристика, $\gamma_k = \sigma_k\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2}\right)$;*
2) *існує деяка неперервна функція $c = \{c(t), \; t \in \mathbb{R}\}$, що*

$$c(t) > 1, \; r_k = \inf_{t\in T_k} c(t);$$

3) *для будь-якого $\varepsilon > 0$ збігається ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \inf\limits_{u\ge1} \frac{B_k^u(\psi(u))^u}{(\varepsilon r_k)^u}$,*

   де $B_k = \inf\limits_{t\in T_k} \|X(t)\|_\psi + \frac{1}{p_k(1-p_k)} \int\limits_0^{\gamma_k p_k} \varkappa\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right) du$, p_k – будь-які числа, $0 < p_k < 1$;
4) *функція $\psi(u)$ така, що для мажоруючої характеристики простору $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ виконується умова*

$$\varkappa(n^2) \le C_\varkappa \varkappa(n), \tag{5}$$

   де $C_\varkappa > 0$ – деяка константа;
5) *для процесу X з деякого інтервалу (a,b) виконується умова:*

$$\sup_{\rho(t,s)\le h} \big\|X(t) - X(s)\big\|_\psi \le \sigma(h),$$

   де $\sigma(h)$, $0 \le h \le b-a$, – така неперервна, монотонно зростаюча функція, $\sigma(0) = 0$ та для будь-якого $z > 0$ виконується умова $\int\limits_0^z \varkappa\left(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right) du < \infty$;

6) *нехай* φ – *деякий* f*-вейвлет, а* δ – *відповідний* m*-вейвлет, причому для* φ *має місце умова* S *з функцією* Φ*;*
7) *для функції* $c(x)$ *існує функція* $0 < A(u) < \infty$*,* $u > 0$*, що для досить великих* x*,* $a > 0$*,* $c(ax) \leq c(x)A(a)$ *та* $\int\limits_R c(x)\Phi(|x|) < \infty$*.*

Тоді для будь-якого відрізку $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ $X_n(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *рівномірно по* $t \in [\alpha, \beta]$ *з імовірністю одиниця, де*

$$X_n(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{0k}\varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{jk}\delta_{jk}(x),$$

$$\xi_{0k} = \int\limits_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\varphi_{0k}(t)}dt, \ \eta_{jk} = \int\limits_{\mathbb{R}} X(t)\overline{\delta_{jk}(t)}dt.$$

Доведення. Доведення теореми випливає з теореми 3. Оскільки, за теоремою 5.5.19 [12] існує функція $c(t)$ і випадкова величина ξ, що з імовірністю одиниця $|X(t)| < c(t)\xi$. Крім того, згідно з теоремою 4 [15] випадковий процес $X(t)$ з імовірністю одиниця рівномірно неперервний на відрізку $[a, b]$.

Зауваження 2. *Умова* (5) *теореми* 4 *виконуються для функцій* $\psi(u) = u^\alpha$, $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$*. Якщо* $\psi(u) = u^\alpha$*, тоді* $\varkappa(n^2) = 2^\alpha\varkappa(n)$*, тобто* $C_\varkappa = 2^\alpha$*, а коли* $\psi(u) = (\ln(u+1))^\lambda$*, тоді* $\varkappa(n^2) \leq 2^\lambda\varkappa(n)$*, тобто* $C_\varkappa = 2^\lambda$*.*

5. Висновки. Вейвлети й засновані на них інтегральні вейвлет-перетворення були запропоновані на початку 90-х років минулого століття (хоча перший найпростіший тип вейвлета, був описаний А. Хааром ще в 1909 році) і надалі інтенсивно розвиваються. Найбільший внесок у розробку теоретичних основ вейвлетів внесли Ю. Мейер, І. Добеші, С. Маллат та інші вчені, що опублікували перші теоретичні роботи в цьому напрямку і змогли донести їх до широкої наукової спільноти.

Вейвлети є порівняно новими математичними поняттями й об'єктами, застосування яких може теоретично строго наблизити будь-яку функцію або будь-який сигнал. Тому вони досить перспективні у вирішенні багатьох математичних завдань наближення (інтерполяції, апроксимації, регресії і т.д.) функцій, сигналів і зображень. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість досить ефективного стиску сигналів та їхнього відновлення з малими втратами інформації, а також розв'язання завдань фільтрації сигналів.

В роботі наведено необхідні відомості з теорії просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. Розглянуто вейвлети, вейвлет розклади невипадкових функцій та умови, за яких розклади функцій рівномірно збігаються на певному скінченному інтервалі. Знайдено загальні умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів для випадкових процесів із просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Список використаної літератури

1. Polishchuk V. Fuzzy Method for Evaluating Commercial Projects of Different Origin. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, Issue 12. P. 60–73. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.60
2. Поліщук В. В., Маляр М. М., Волошин О. Ф., Шаркаді М. М. Інформаційне моделювання нечітких знань. *Радіоелектроніка, інформатика, управління.* 2018. № 4. С. 84–95. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-4-8

3. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. San Diego: Academic Press, 1998. 577 p.
4. Meyer Y. Ondelettes et Opérateurs. Paris: Hermann, 1990. 216 p.
5. Daubechies I. Ten lecture on wavelets. Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math., 1992. 324 p.
6. Chui C. An introduction to wavelets. New York: Academic Press, 1992. 266 p.
7. Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, approximation and statistical applications. New York: Springer, 1998. 265 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-2222-4.
8. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M. On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables I. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2007. Vol. 59, No. 12. P. 1850–1869. DOI: 10.1007/s11253-008-0030-y
9. Kozachenko Yu. V., Perestyuk M. M. On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables II. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2008. Vol. 60, No. 6. P. 876–900. DOI: 10.1007/s11253-008-0106-8
10. Kozachenko Yu. V., Mlavets Yu. Yu. The Banach spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2013. Vol. 86. P. 92–107. DOI: 10.1090/S0094-9000-2013-00892-8
11. Ермаков С. В., Островский Е. И. Условия непрерывности, экспоненциальные оценки и центральная предельная теорема для случайных полей. *Деп. в ВИНИТИ.* 1986. № 752-В.86.0. С. 42.
12. Kozachenko Yuriy, Mlavets Yuriy Stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces. *Contemporary Mathematics and Statistics.* 2014. Vol. 2., No. 1. P. 55–75. DOI: 10.7726/cms.2014.1004
13. Козаченко Ю. В. Лекції з вейвлет аналізу. Київ: ТВіМС, 2004. 147 с.
14. Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. Випадкові процеси з просторів Орліча. Чернівці: Золоті литаври, 2011. 212 с.
15. Млавець Ю. Ю. Про розподіл супремумів приростів випадкових процесів з просторів $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.* 2012. Вип. 23., № 1. С. 79–88.

Mlavets Yu. Yu., Syniavska O. O. Conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces.

This paper is devoted to the search of conditions for uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from the spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ with probability one.

The most common problems in the theory of stochastic processes are the study of the general properties of such stochastic processes, obtaining estimates for the distribution of some functionals of processes from some spaces of random variables, establishing conditions for uniform convergence of random functional series.

Wavelet analysis is a relatively young field of mathematics with plenty of curious problems and challenges. However, this theory, in particular, wavelet expansions of functions is frequently used in the theory of stochastic processes and other areas of science. For instance, wavelet analysis is widely used for data filtering and data preprocessing, analysis of the state, and forecasting the situation in the stock markets, pattern recognition, synthesis, and signal processing, namely speech signals processing and biomedical signals. Likewise, wavelets are used for solving image compression problem and image processing, training neural networks, and in many other cases. Therefore, today topical is the task of finding conditions for uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$.

Our focus in this paper is on the basic properties of spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ and some elements of wavelet theory. At the beginning of the article the basic definitions, theorems, examples of random variables from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$, concept, and properties of majorizing characteristic such space are given. Then we introduce the necessary background from wavelet theory, in particular, f- and m- wavelet definitions, the condition S, and the conditions on the expansion of functions on these bases. We also provide the conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of some functions.

The main result of the paper are the conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$. These conditions are based on estimates for the distribution of suprema on $\mathbb{R}$ for the stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces and uniform convergence of separable measurable stochastic process $X = \{\, X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ from the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ on some segment. There were also given several examples of functions, in which case one of the conditions of the theorem on the estimation of the majorizing characteristic $\varkappa(n)$ of the space $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ holds.

Keywords: Spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables, majorant characteristic, stochastic processes, wavelets, wavelet expansions.

References

1. Polishchuk, V. (2018). Fuzzy Method for Evaluating Commercial Projects of Different Origin. *Journal of Automation and Information Sciences, 50, 12*, 60–73. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i5.60
2. Polishchuk, V. V., Malyar, M. M., Voloshyn, O. F., & Sharkadi, M.M. (2018). Informatsiine modeliuvannia nechitkykh znan [Information modeling of fuzzy knowledge]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia, 4*, 84–95. DOI: 10.15588/1607-3274-2018-4-8 [in Ukrainian]
3. Mallat, S. (1988). A wavelet tour of signal processing. *San Diego: Academic Press.*
4. Meyer, Y. (1990). Ondelettes et Opérateurs. *Paris: Hermann.*
5. Daubechies, I. (1992). Ten lecture on wavelets. *Philadelphia: Soc. Industrial and Appl. Math.*
6. Chui, C. (1992). An introduction to wavelets. *New York: Academic Press.*
7. Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D., & Tsybakov, A. (1998). Wavelets, approximation and statistical applications. *New York: Springer.* DOI: 10.1007/978-1-4612-2222-4.
8. Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2007). On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables I. *Ukrainian Mathematical Journal, 59, 12*, 1850–1869. DOI: 10.1007/s11253-008-0030-y
9. Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2008). On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables II. *Ukrainian Mathematical Journal, 60, 6*, 876–900. DOI: 10.1007/s11253-008-0106-8
10. Kozachenko, Yu. V., & Mlavets, Yu. Yu. (2013). The Banach spaces $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ of random variables. *Theory of Probability and Mathematical Statistics, 86*, 92–107. DOI: 10.1090/S0094-9000-2013-00892-8
11. Ermakov, S. V., & Ostrovskyi, E. Y. (1986). Uslovija nepreryvnosti, jeksponencial'nye ocenki i central'naja predel'naja teorema dlja sluchajnyh polej [Conditions for the continuity, exponential bounds, and central limit theorem for random fields]. *Dep. VINITI, 752-V.86.0.*, 42. [in Russian].
12. Kozachenko, Yuriy, & Mlavets, Yuriy. (2014). Stochastic processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces. *Contemporary Mathematics and Statistics, 2, 1*, 55–75. DOI: 10.7726/cms.2014.1004
13. Kozachenko, Yu. V. (2004). Lektsii z veivlet analizu [Lectures on Wavelet Analysis]. *Kyiv: TViMS.* [in Ukrainian]
14. Dariychuk, I. V., Kozachenko, Yu. V., & Perestyuk, M. M. (2011). Vypadkovi protsesy z prostoru Orlicha [Stochastic processes from Orlicz space]. *Chernivtsi: Zoloti lytavry.* [in Ukrainian]
15. Mlavets, Yu. Yu. (2012). Pro rozpodil supremumiv pryrostiv vypadkovykh protsesiv z prostoriv $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ [On the distribution of supremums increments of stochastics processes from $\mathbf{F}_\psi(\Omega)$ spaces]. *Naukovyi visnyk uzhhorodckoho universytetu. Seriia matematyka i informatyka, 23, 1*, 79–88. [in Ukrainian]

Одержано 25.09.2020

УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).91-100

А. О. Пашко[1], І. В. Розора[2], Т. О. Яневич[3]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри теоретичної кібернетики,
доктор фізико-математичних наук
aapashko@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6944-8477

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
доцент кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
irozora@bigmir.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8733-7559

[3] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
доцент кафедри теорії ймовірності, статистики та актуарної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yata452@univ.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8550-8062

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ТОЧНІСТЮ ТА НАДІЙНІСТЮ В ПРОСТОРІ $L_P([0,T])$

В останні часи теорія стохастичних процесів та полів широко використовується в різних галузях науки і не тільки в природничих сферах, а саме її використання є важливим у фізиці, радіофізиці, інформатиці, програмній інженерії, соціології, біології, океаналогії, метеорології, фінансовій математиці, теорії прийняття рішень, системах масового обслуговування тощо. Тому актуальною проблемою для ймовірносників є побудова математичної моделі випадкового процесу або поля та вивчення її аналітичних властивостей. Проблеми чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють створювати програмні засоби для моделювання та для передбачення поведінки випадкового процесу. Під статистичним моделюванням ми розуміємо комп'ютерну реалізацію спочатку випадкової величини, а потім вже випадкового процесу або поля при заданих характеристиках даних об'єктів моделювання.

Стаття присвячена моделюванню випадкового процесу із наперед заданою точністю та надійністю в банаховому просторі $L_p([0,T])$. Припускається, що випадковий процес є стаціонарним гауссовим із відомою скінченною коваріаційною функцією. Якщо випадковий процес подано як збіжний у середньому квадратичному ряд із випадковими доданками, то, зазвичай, у якості моделі можна розглядати скінченну суми перших доданків, тобто зрізку ряду. Тому, перша проблема, яка виникає у статті, як розкласти випадковий процес у ряд при відомій коваріаційній функції. Для цього у статті використовується Теорема Карунена-Лоєва і для побудови моделі застосовуємо розклад Карунена-Лоєва випадкового процесу. У даній роботі особливу увагу приділено точності та надійності побудованої моделі. Це означає, що спочатку ми будуємо модель, а потім її перевіряємо за допомогою певних тестів на адекватність із заданими вхідними параметрами. Отже, знаючи наперед точність та надійність та з використанням доведених у статті результатів для перевірки адекватності, можна стверджувати, що побудова модель буде гарно описувати початковий випадковий процес.

Ключові слова: гауссовий процес, модель, точність, надійність, спектральна щільність.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі випадкового процесу та вивчення її властивостей. Проблеми чисельного моделювання стають особливо важливими завдяки потужним можливостям комп'ютерних технологій, що дозволяють використовувати програмне забезпечення як інструмент моделювання та прогнозувати поведінку випадкового процесу. Існують різні методи моделювання випадкових процесів і полів. У [1, 2] така проблематика вивчалась для різних стохастичних процесів і полів, зокрема для гауссівських та субгауссівських випадкових процесів.

Розглянемо стаціонарний гауссовий випадковий процес $X(t), t \in \mathbb{R}$, для якого $\mathbf{E}X(t) = 0$, коваріаційна функція для всіх $t \in \mathbb{R}$ має вигляд

$$R(\tau) = \mathbf{E}X(t+\tau)X(t) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|), \quad \sigma, \alpha > 0. \tag{1}$$

Якщо існує спектральна щільність $f(\cdot)$ процесу X, то за теоремою Бохнера-Хінчина коваріаційну функцію дійсного стаціонарного процесу можна подати у вигляді

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau) f(\lambda) d\lambda.$$

Для процесу з коваріаційною функцією (1) спектральна щільність дорівнює

$$f(\lambda) = \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2}.$$

А отже,

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda\tau) \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2} d\lambda$$

та випадковий процес зображається так:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

де $\xi_1(\lambda)$ і $\xi_2(\lambda)$ — незалежні центровані гауссові випадкові процеси з ортогональними приростами, тобто для $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\mathbf{E}(\xi_i(\lambda_1) - \xi_i(\lambda_2))^2 = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} f(\lambda) d\lambda \quad i = 1, 2.$$

Коваріаційну функцію (1) можна подати у вигляді суми двох інтегралів

$$R(t,s) = R(t-s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(t,\lambda) f_1(s,\lambda) d\lambda + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2(t,\lambda) f_2(s,\lambda) d\lambda,$$

де

$$f_1(t,\lambda) = \cos(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2}, \tag{3}$$

$$f_2(t,\lambda) = \sin(\lambda t) \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2}. \tag{4}$$

Сформулюємо теорему із статті [3], доведення якої спирається на відому теорему Карунена-Лоєва.

Теорема 1. *Нехай* $X(t)$, $t \in \mathbf{T}$, *центрований комплексний випадковий процес зі скінченною дисперсією та коваріаційною функцією* $R(t,s) = \mathbf{E}X(t)\overline{X(s)}$. *Нехай* $(\Lambda, \mathcal{B}_\Lambda, \mu)$ *— вимірний простір з* σ*-адитивною мірою* μ. *Припустимо, що* $f(t,\lambda)$, $t \in \mathbf{T}$, *належать простору* $L_2(\Lambda,\mu)$, $\{g_k(\lambda),\ k \in \mathbb{Z}\}$ *— ортонормований базис (ОНБ) в* $L_2(\Lambda,\mu)$. *Коваріаційна функція* $R(t,s)$ *зображається як*

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Lambda} f_i(t,\lambda)\overline{f_i(s,\lambda)}d\mu(\lambda),$$

тоді і тільки тоді, коли сам випадковий процес допускає розклад $X(t)$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{ik}(t)\xi_{ik}, \tag{5}$$

де

$$a_{ik}(t) = \int\limits_{\Lambda} f_i(t,\lambda)\overline{g_k(\lambda)}d\mu(\lambda),$$

ξ_{ik} *— центровані некорельовані випадкові величини ,* $\mathbf{E}\xi_{ik} = 0$, $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{il} = \delta_{kl}$ *та* $\mathbf{E}\xi_{ik}^2 = 1$ *для всіх* i.

Із (2) випливає, що випадковий процес $X(t)$ дорівнює сумі двох процесів

$$X(t) = X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t), \tag{6}$$

де

$$X_\Lambda(t) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t)d\xi_1(\lambda) + \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(\lambda t)d\xi_2(\lambda), \tag{7}$$

$$X^\Lambda(t) = \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \cos(\lambda t)d\xi_1(\lambda) + \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \sin(\lambda t)d\xi_2(\lambda). \tag{8}$$

Легко показати, що коваріаційна функція для $X_\Lambda(t)$ записується так:

$$R_\Lambda(t,s) = \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} f_1(t,\lambda)f_1(s,\lambda)d\lambda + \int\limits_{-\Lambda}^{\Lambda} f_2(t,\lambda)f_2(s,\lambda)d\lambda,$$

де функції $f_1(t,\lambda)$ і $f_2(t,\lambda)$ визначені в (3)-(4).

Застосуємо теорему 1 для процесу $X_\Lambda(t)$ з викоританням тригонометричного ОНБ в просторі $L_2([-\Lambda,\Lambda])$

$$\left\{a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}}, a_{k1} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right), a_{k2} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right), k \ge 1\right\}$$

і отримаємо наступний розклад в ряд процесу $X_\Lambda(t)$ у сенсі збіжності у середньому квадратичному

$$X_\Lambda(t) = a_0(t)\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_{1k\Lambda}(t)\xi_{1k} + a_{2k\Lambda}(t)\xi_{2k}], \tag{9}$$

де випадкові величини $\{\xi_0, \xi_{1k}, \xi_{2k},\ k = 1, 2\ldots\}$ такі, що $\mathbf{E}\xi_{ik} = 0$, $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{il} = \delta_{kl}$ для $i = 1, 2$ та $\mathbf{E}\xi_{ik}\xi_{jl} = 0$ для $i \neq j$,

$$a_{0\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t)\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2} d\lambda;$$
$$a_{1k\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \cos(\lambda t)\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2} \cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right) d\lambda;$$
$$a_{2k\Lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \sin(\lambda t)\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi}} \frac{\sigma}{\alpha^2+\lambda^2} \sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right) d\lambda.$$

Зауваження 1. *Оскільки випадковий процес $X(t)$ є гауссовим, то і величини $\{\xi_0, \xi_{1k}, \xi_{2k},\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ в розкладі (9) є гауссовим та незалежними.*

2. Побудова моделі випадкового процесу. Зображення (5) можна використати для побудови моделі випадкового процесу X із наперед відомою точністю та надійністю в різних банахових просторах. В даній статті розглядається моделювання в просторі $L_p([0, T])$.

Припутимо, що гауссовий випадковий процес $X(t), t \in \mathbb{R}$ можна розкласти у середньому квадратичному в ряд

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)\xi_k,$$

де ξ_k, $k = 0, 1, 2\ldots$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини з $\mathbf{E}\xi_k = 0$, $\mathbf{E}\xi_k^2 = 1$.

Означення 1. *Будемо говорити, що випадковий процес $X_N(t)$ є моделлю процесу $X(t)$, якщо*

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t)\xi_k.$$

Через $||\cdot||$ позначимо норму у функціональному банаховому просторі $\mathcal{B}$. Наприклад, в $L_p([0, T])$ нормою буде $||f(t)|| = (\int_0^T |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$, в просторі неперервних функцій $C[0, T]$ нормою є $||f(t)|| = \sup\limits_{t\in[0,T]} |f(t)|$ тощо.

Означення 2. *Модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ із наперед заданою точністю $\delta > 0$ та надійністю $1-\nu$, $\nu \in (0, 1)$ в банаховому просторі $\mathcal{B}$, якщо*

$$P\{||X_N(t) - X(t)|| > \delta\} \leq \nu. \tag{10}$$

Для того, щоб побудувати модель з точністю δ та надійністю $1-\nu$ у заданому просторі, необхідно знайти таке N, для якого виконується нерівність (10). Більш детально про моделювання із заданою точністю та надійністю можна прочитати у [2], [1] тощо.

Для процесу $X(t)$ з коваріаційною функцією (1) на відрізку $[0, T]$ як модель будемо використовувати таку скінченну суму

$$X_N(t) = a_{0\Lambda}(t)\xi_0 + \sum_{k=1}^{N}[a_{1k\Lambda}(t)\xi_{1k} + a_{2k\Lambda}(t)\xi_{2k}]. \tag{11}$$

Насправді, дана модель є сумою перших N доданків з розкладу (9).

3. Точність та надійність моделі в просторі $L_p([0,T])$. В роботі Козаченко Ю.В., Каменщикова О. [4] доведено таку теорему про оцінку норми для φ-субгауссових та субгауссових процесів в просторі $L_p(\mathbf{T})$. Оскільки гауссовий процес є частковим випадком субгауссового, то можна використати теорему і для гауссового випадку.

Теорема 2. *Нехай $\{\mathbf{T},\mu\}$— вимірний простір, $\xi = \{\xi(t),\, t \in \mathbf{T}\}$ — строго субгауссовий випадковий процес з $E\xi^2(t) < \infty$. Нехай існує інтеграл Лебега*

$$\int_{\mathbf{T}} \left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) < \infty,$$

тоді з імовірністю одиниця існує $\int_{\mathbf{T}} |\xi(t)|^p d\mu(t)$ та

$$P\left\{\int_{\mathbf{T}} |\xi(t)|^p d\mu(t) > \varepsilon\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^{2/p}}{2c^{2/p}}\right\} \tag{12}$$

при $\varepsilon > cp^{p/2}$, де $c = \int_{\mathbf{T}} \left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t)$.

Доведемо допоміжну лему.

Лема 1. *Для центрованого стаціонарного гауссового процесу $X(t), t \in [0,T]$, з коваріаційною функцією $R(\tau) = \sigma^2 \exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|)$, $\sigma, \alpha > 0$ та моделі $X_N(t)$, визначеної в (11), справедлива нерівність:*

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(\mathbf{E}[X(t) - X_N(t)]^2\right)^{1/2} \le B_{N,\Lambda},$$

де

$$B_{N,\Lambda} = \left[\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right) - \frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{8\Lambda\alpha}{N\pi^2}\left(T\arctan\frac{\Lambda}{\alpha} + \frac{\Lambda^2}{\alpha(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2\right)\right]^{1/2}. \tag{13}$$

Доведення. Із співвідношення (6) випливає, що

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X(t) - X_N(t)]^2 &= \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X_\Lambda(t) + X^\Lambda(t) - X_N(t)]^2 = \\ &= \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X^\Lambda(t)]^2 + \sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X_\Lambda(t) - X_N(t)]^2. \quad (14)\end{aligned}$$

Оцінимо кожний доданок (14) окремо.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^\Lambda(t)]^2 &= \mathbf{E}\left[\int_{|\lambda|\ge\Lambda} \cos(\lambda t) d\xi_1(\lambda) + \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \sin(\lambda t) d\xi_2(\lambda)\right]^2 = \\ &= \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \cos^2(\lambda t)\mathbf{E}d\xi_1(\lambda) + \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \sin^2(\lambda t)\mathbf{E}d\xi_2(\lambda) = \\ &= \int_{|\lambda|\ge\Lambda} dF(\lambda) = \int_{|\lambda|\ge\Lambda} f(\lambda)d\lambda = \int_{|\lambda|\ge\Lambda} \frac{2\sigma^2\alpha^3}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^2} d\lambda\end{aligned}$$

Наступний інтеграл візьмемо частинами

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2} &= \left|\begin{matrix} u &=& \frac{1}{\lambda}; \quad du=-\frac{1}{\lambda^2}d\lambda \\ dv &=& \frac{\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}d\lambda \\ v &=& \frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha^2+\lambda^2)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}\end{matrix}\right| = \\
&= -\frac{1}{2\lambda(\alpha^2+\lambda^2)}\Big|_{\Lambda}^{\infty}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{2\lambda^2(\alpha^2+\lambda^2)} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2(\alpha^2+\lambda^2)}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda^2}-\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\Lambda(\alpha^2+\Lambda^2)}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\Lambda}-\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}-\frac{\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

Тому,

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X^{\Lambda}(t)]^2=\frac{4\sigma^2\alpha^3}{\pi}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}=\frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}\right).$$

Варто зауважити, що $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X^{\Lambda}(t)]^2\to 0$ при $\Lambda\to\infty$.

Для другого доданку у (14) маємо

$$\mathbf{E}[X_{\Lambda}(t)-X_N(t)]^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}[a_{1k\Lambda}^2(t)+a_{2k\Lambda}^2(t)].$$

Спочатку оцінимо $|a_{1k\Lambda}^2(t)|$.

$$\begin{aligned}
|a_{1k\Lambda}(t)| &= \sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}2\sigma\left|\int_0^{\Lambda}\frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}\cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)d\lambda\right| = \\
&= \left|\begin{matrix} v &=& \frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2} \\ dv &=& \left[-t\frac{\sin(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}-2\lambda\frac{\cos(\lambda t)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right]d\lambda \\ du &=& \cos\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)d\lambda \\ u &=& \frac{\Lambda}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\end{matrix}\right| =
\end{aligned}$$

$$=2\sigma\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}\left|\frac{\Lambda\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)}{k\pi}\frac{\cos(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}\Big|_0^{\Lambda}+\int_0^{\Lambda}\frac{\Lambda\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)}{k\pi}\left[\frac{t\sin(\lambda t)}{\alpha^2+\lambda^2}+\frac{2\lambda\cos(\lambda t)}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right]d\lambda\right|\le$$

$$\le 2\sigma\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\Lambda\pi}}\frac{\Lambda}{k\pi}\left(t\int_0^{\Lambda}\frac{|\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\sin(\lambda t)|}{\alpha^2+\lambda^2}d\lambda+\int_0^{\Lambda}\frac{2\lambda|\sin\left(\frac{k\pi}{\Lambda}\lambda\right)\cos(\lambda t)|}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}d\lambda\right)\le$$

$$\le\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(t\int_0^{\Lambda}\frac{d\lambda}{\alpha^2+\lambda^2}+\int_0^{\Lambda}\frac{2\lambda d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(\frac{t}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)+\frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right).$$

Якщо виконати схожі перетворення, то отримаємо оцінку для $|a_{2k\Lambda}(t)|$. Таким чином,

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbf{E}[X_\Lambda(t)-X_N(t)]^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\left[\sqrt{\frac{2\alpha^3\Lambda}{\pi}}\frac{2\sigma}{k\pi}\left(\frac{t}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)+\frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)\right]^2 \leq$$

$$\leq \frac{16\Lambda\alpha^3\sigma^2}{\pi^3}\left(\frac{T}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)+\frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\cdot\frac{16\Lambda\alpha^3\sigma^2}{\pi^3}\left(\frac{T}{\alpha}\arctan\left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)+\frac{\Lambda^2}{\alpha^2(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2.$$

Очевидно, що $\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X_\Lambda(t)-X_N(t)]^2 \to 0$ при $N\to\infty$.

Отже,

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbf{E}[X(t)-X_N(t)]^2 \leq \frac{2\sigma^2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\Lambda}{\alpha^2+\Lambda^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N}\cdot\frac{8\Lambda\alpha}{\pi^2}\left(T\arctan\frac{\Lambda}{\alpha}+\frac{\Lambda^2}{\alpha(\alpha^2+\Lambda^2)}\right)^2\right) =: B_{N,\Lambda}^2$$

Теорема 3. *Нехай $X(t), t\in[0,T]$,— стаціонарний центрований гауссовий випадковий процес з коваріаційною функцією $B(\tau)=\sigma^2\exp\{-\alpha|\tau|\}(1+\alpha|\tau|)$, $\sigma,\alpha>0$. Модель $X_N(t)$ з (11) наближає випадковий процес $X(t)$ із наперед заданою точністю $\delta>0$ та надійністю $1-\nu$, $\nu\in(0,1)$ в банаховому просторі $L_p([0,T])$, якщо*

$$B_{N,\Lambda} \leq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}},\sqrt{p}\right)}, \tag{16}$$

де $B_{N,\Lambda}$ визначено в (13).

Доведення. Оскільки гауссові процеси є строго субгауссовими, то ми маємо право використати результати теореми 2 для процесу, що характеризує похибку моделювання, а саме для $\xi(t)=X(t)-X_N(t)$.

Розглянемо вимірний простір $\{\mathbf{T},\mu\}=\{[0,T],dt\}$. Покажемо спочатку, що виконуються умови теореми 2. Потрібно довести, що існує інтеграл

$$\int_{\mathbf{T}}\left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}}d\mu(t)<\infty.$$

Дійсно, з леми 1 випливає

$$c=\int_{\mathbf{T}}\left(E\xi^2(t)\right)^{\frac{p}{2}}d\mu(t)=\int_0^T\left(E(X(t)-X_N(t))^2\right)^{\frac{p}{2}}dt\leq$$

$$\leq\int_0^T\left(\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{E(X(t)-X_N(t))^2}\right)^p dt\leq\int_0^T(B_N)^p\,dt\leq B_{N,\Lambda}^p\cdot T<\infty. \tag{17}$$

Із нерівності (12) та оцінки (17) для c маємо

$$P\left\{\left(\int_{\mathbf{T}}|X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}>\delta\right\}=P\left\{\int_{\mathbf{T}}|X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t)>\delta^p\right\}\leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2c^{2/p}}\right\}\leq 2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2(B_{N,\Lambda}^p\cdot T)^{2/p}}\right\}=2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{N,\Lambda}^2T^{2/p}}\right\}. \quad (18)$$

З теореми 2 випливає, що остання нерівність розглядається тільки у випадку, якщо

$$\varepsilon>cp^{p/2} \quad \Leftrightarrow \quad \delta^p>B_{N,\Lambda}^p T p^{p/2} \quad \Leftrightarrow \quad B_{N,\Lambda}<\frac{\delta}{\sqrt{p}T^{\frac{1}{p}}}.$$

Дана умова виконується, так як за умовою теореми

$$B_{N,\Lambda}\leq\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}},\sqrt{p}\right)}\leq\frac{\delta}{\sqrt{p}T^{\frac{1}{p}}}.$$

З означення (2) модель $X_N(t)$ наближає випадковий процес $X(t)$ із точністю δ та надійністю $1-\nu$, якщо

$$P\left\{\left(\int_{\mathbf{T}}|X(t)-X_N(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}>\delta\right\}\leq\nu.$$

Якщо підставити у дану нерівність оцінку (18), то отримаємо

$$2\exp\left\{-\frac{\delta^2}{2B_{N,\Lambda}^2T^{2/p}}\right\}<\nu \quad \Leftrightarrow \quad B_{N,\Lambda}\leq\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}}. \quad (19)$$

Співвідношення (19) справедливе, оскільки за умовою (16)

$$B_{N,\Lambda}\leq\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\max\left(\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}},\sqrt{p}\right)}\leq\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}\sqrt{-2\ln\frac{\nu}{2}}}.$$

На рисунку 1, як приклад, зображено дві траєкторії моделі $X_N(t)$, що визначено у (11), з параметрами $\Lambda=500$, $N=500000$.

Зауваження 2. *Значення $B_{N,\Lambda}$ пов'язує параметр моделі N та Λ. За допомогою нього балансується довжина інтегрування $[-\Lambda,\Lambda]$ в* (6) *та число доданків у моделі* (11).

Зауваження 3. *Із* (13) *видно, що*

$$B_{N,\Lambda}\to 0, \quad \textit{коли} \quad \frac{\Lambda}{N}\to 0,\ N,\Lambda\to\infty.$$

Тому завжди можна знайти N, для якого виконується нерівність (16).

У випадку, коли $\sigma=1$ для заданих точності δ та надійності $1-\nu$ в таблиці 1 підраховано окремі значення Λ і N.

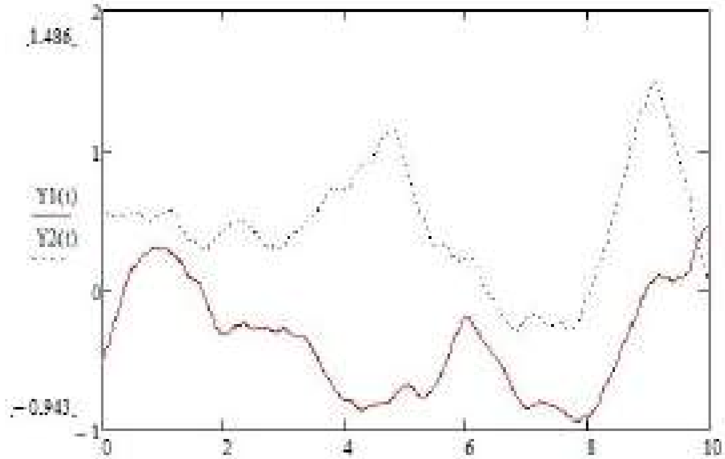

Рис. 1. Траєкторії моделі при $\Lambda = 500,\ N = 500000$

Таблиця 1.

Параметри моделі із заданою точністю та надійністю

δ	ν	α	Λ	N
0.1	0.1	1	600	$11 \cdot 10^5$
0.1	0.05	1	800	$2 \cdot 10^6$
0.1	0.01	1	4000	$3.5 \cdot 10^6$
0.1	0.01	2	20000	$2 \cdot 10^7$

Список використаної літератури

1. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів та полів. Київ: ВПЦ "Задруга", 2007. 230 с.
2. Kozachenko Yu. V., Pogoriliak O. O., Rozora I. V., Tegza A. M. Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd, 2016. 346 p.
3. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V., Turchyn Ye. V. Properties of some Random series. *Communication in Statistics –Theory and Methods.* 2011. Vol. 40, Iss. 19-20. P. 3672–3683.
4. Kozachenko Yu. V., Kamenshchikova O. E. Approximation $SSub_\varphi(\Omega)$ of stochastic processes in the space $L_p(\mathbf{T})$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics.* 2009. Vol. 79. P. 83–88.

Pashko A. O., Rozora I. V., Ianevych T. O. On modelling of Gaussian process with accuracy and reliability in the space $L_p([0,T])$.

Nowadays the theory of stochastic processes and fields is widely used in different branches of science and not only in natural science, such as Physics, Radio-Engineering, Computer Science and Program Engineering, Sociology, Oceanology, Meteorology, Financial mathematics, Decision Making and Queuing theory as well. That's why one of the relevant problems for the scientists is to build a mathematical model of the stochastic process and study its analytical properties. The problems of numerical simulations become especially important due to the powerful possibilities of computer technologies that allow us to create software modeling tools and predict the behavior of a random process. Under statistical simulation we understand the computer realization of random variables, processes and fields under a given their characteristics. Methods of statistical simulation are considered as an alternative to existing numerical methods. In the article, we study the simulation of the Gaussian stationary process with given accuracy and reliability in

Banach space $L_p([0,T])$. It's supposed that the correlation function of stochastic process is known. If a random process is given as a convergent in mean square series with random terms, then, usually as a model of this process we can consider a cut-off series. The first problem that arises in the article is how can we expand a stochastic process in the series. The Karhunen-Loeve decomposition of stochastic process is used to construct the model of the process. In this paper the issue on accuracy and reliability of the constructed model is considered, it means that at first we construct the model and then verify it using some adequacy tests with known accuracy and reliability.

Keywords: Gaussian process, model, accuracy, reliability, spectral density.

References

1. Kozachenko, Yu. V., Pashko, A. O., & Rozora, I. V.(2007). Modeliuvannia vypadkovykh protsesiv ta poliv [Simulation of Stochastic Processes]. *Kyiv: VPC Zadruga.* [in Ukrainian]
2. Kozachenko, Yu. V., Pogoriliak, O. O., Rozora, I. V., & Tegza, A. M. (2016). Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. *London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd.*
3. Kozachenko, Yu. V., Rozora, I. V., & Turchyn, Ye. V. (2011). Properties of some Random series. *Communication in Statistics – Theory and Methods, 40, 19-20*, 3672–3683.
4. Kozachenko, Yu. V., & Kamenschykova, O. E. (2009). Approximation of $SSub_\varphi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p(\mathbf{T})$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics, 79,* 83–88.

Одержано 27.09.2020

УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113

В. М. Петечук[1], Ю. В. Петечук[2]

[1] Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, Ужгород,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
vasil.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5663-8789

[2] Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II, Берегово,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук
yuliia.petechuk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3670-9671

ГОМОМОРФІЗМИ З УМОВОЮ (*), ЯКЩО 2 – ОБОРОТНИЙ ЕЛЕМЕНТ

Вивчення гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями розпочалося майже 100 років тому роботами Шраєра і Ван-дер-Вардена і в подальшому розвивалися в працях Дьєдоне, Хуа Ло-гена, Райнера, О'Міри, Хана, Ю.І. Мерзлякова, Уотерхауса, О.В. Міхальова, Ю.І. Зельманова, І.З. Голубчика, В.М. Петечука та інших авторів.

В основі вивчення знаходяться групові властивості повної лінійної групи $GL\,(n, R)$ – множини всіх оборотних матриць над асоціативним кільцем R з 1.

При $n \geq 3$ у всіх відомих випадках, незважаючи на відмінність методів, які застосовувалися, автоморфізми повної лінійної групи виявлялись добутком стандартних автоморфізмів. Саме оборотність елемента 2 давала можливість розглядати все більш широкі класи кілець над якими можливий стандартний опис гомоморфізмів матричних груп.

Якщо 2 – необоротний елемент, то при $n \geq 3$ В.М. Петечук зробив опис автоморфізмів групи $GL\,(n, R)$ у випадку, коли R – комутативне локальне кільце. Виявилося, що при $n \geq 4$ всі автоморфізми таких груп є добутком стандартних автоморфізмів, а при $n = 3$ їх можна виразити через стандартні і деякий нестандартний автоморфізми. Спираючись на цей результат, В.М. Петечук [2] отримав опис ізоморфізмів групи $GL\,(n, R)$, $n \geq 3$, якщо R – довільне комутативне кільце.

Зокрема, він здійснив опис гомоморфізмів $\Lambda : PE\,(n, R) \to PGL\,(m, K)$, $m \geq 3$, $n \geq 3$ таких, що $\Lambda PE\,(n, R) = PH$ і $H \supseteq E\,(m, K)$ над довільними комутативними кільцями R і K.

І.З. Голубчик і О.В. Міхальов [3], використовуючи системи ідемпотентів, і незалежно Ю.І. Зельманов [4], використовуючи методи йорданових алгебр, отримали опис ізоморфізмів групи $E\,(n, R)$, $n \geq 3$, $2 \in R^*$ на групу $E\,(m, K)$, $2 \in K^*$ над довільними асоціативними кільцями R і K з 1. В.М. Петечук [5] зробив опис гомоморфізмів групи $PE\,(n, R)$, $n \geq 3$ в групу $GL\,(m, K)$, $m \geq 2$, $2 \in K^*$ у випадку, коли нерухомі підмодулі деяких елементів четвертого порядку збігаються з нерухомими підмодулями їх квадратів. З нього випливають результати І.З. Голубчика, О.В. Міхальова і Ю.І. Зельманова.

Розвиваючи техніку, пов'язану з ідемпотентами, І.З. Голубчик [6] здійснив опис ізоморфізмів груп $GL\,(n, R)$ і $GL\,(m, K)$ при $n, m \geq 4$ над асоціативними кільцями R і K. Виявилося, що вони допускають стандартний опис на групі $E\,(n, R)$.

Авторами В.М. Петечук, Ю.В. Петечук [7, 8] описані гомоморфізми з умовою (*) з чого зокрема випливає і опис ізоморфізмів повних лінійних груп над асоціативними кільцями. У даній роботі удосконалюються і розширюються методи опису гомоморфізмів з умовою (*), якщо елемент 2 є оборотним в кільці K і $n \geq 3$. Основним результатом роботи є наступна теорема. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$,

$E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.

Ключові слова: асоціативні кільця, 2 – оборотний елемент, гомоморфізми лінійних груп, гомоморфізми з умовою (*), інволюції, елементарні трансвекції, група елементарних трансвекцій, формальні матриці, стандартні гомоморфізми.

1. Вступ. В роботі авторів [1] показано зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями на мові лишкових і нерухомих модулів. Якщо формальними матрицями зображаються образи елементів матричних груп відносно їх гомоморфізмів в групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями, то це дає можливість в такий спосіб описувати гомоморфізми. Рівень опису залежить від форми опису гомоморфізмів і умов, які на них накладаються та множини елементів, образи яких відносно гомоморфізмів вдається таким чином задати.

Проблема опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями $\Lambda : G \to GL(W)$, де $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, R – асоціативне кільце з 1, $n \geq 2$, W – лівий (не обов'язково вільний) модуль над асоціативним кільцем K з 1 в загальному випадку не розв'язана. Локалізацією по степенях 2 і 3 кільця K вона зводиться до опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями, в яких елементи 2 або 3 в кільці K є оборотними.

Однак, не всякі гомоморфізми матричних груп можуть бути в такий спосіб описані. Зокрема, якщо розглядаються гомоморфізми з деякими умовами, то для застосування вищеописаного підходу необхідно, щоб умови на гомоморфізми зберігалися при локалізаціях по степенях 2 і 3.

Найбільш системно теорія гомоморфізмів лінійних груп над асоціативними кільцями викладена в [9].

Основним результатом даної статті є така теорема:

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.*

2. Загальні поняття і означення. Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотних елементів кільця R, R_n – кільце матриць $n \times n$ над R, $n \geq 2$, $GL(n,R) = R_n^*$ – повна лінійна (матрична) група оборотних $n \times n$ матриць над кільцем R.

Означення 1. *Відображення δ кільця R в асоціативне кільце R_1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо*

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1)\delta(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R, а відображення ν кільця R в асоціативне кільце R_1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \nu(r_1 r_2) = \nu(r_2)\nu(r_1)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R.

Очевидно, що якщо δ і ν – кільцеві гомоморфізм і антигомоморфізм відповідно, то $\delta(0) = 0$, $\delta(1) = 1$ в кільці $\delta(R)$ і $\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$ в кільці $\nu(R)$.

Означення 2. *Нехай R^0 означає кільце R у якому задана операція множення за правилом $x \circ y = yx$, де x, y – довільні елементи кільця R. Кільце R^0 називається опозитом кільця R.*

Відображення $\nu_0 : R \to R^0$, задане за правилом $v_0(r){=}r$, $r\epsilon R$, є кільцевим антигомоморфізмом R в R^0.

Звуження кільцевого гомоморфізму на мультиплікативну групу кільця породжує груповий гомоморфізм, а кільцевий антигомоморфізм породжує груповий антигомоморфізм мультиплікативної групи кільця.

Груповий антигомоморфізм породжує груповий гомоморфізм, якщо кожному елементу групи поставити у відповідність елемент, який обернений до його антигомоморфного образу.

Кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує кільцевий гомоморфізм $\overline{\delta} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\delta}\,(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, де $r_{ij} \in R$, $1 \leq i, j \leq n$.

Кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ індукує кільцевий антигомоморфізм $\overline{\nu} : R_n \to (R_1)_n$ за правилом $\overline{\nu}\,(r_{ij}) = (\nu\, r_{ji}) = \text{т}(\nu\, r_{ij})$, де т – означає класичне транспонування.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм $\delta : R \to R_1$ індукує груповий гомоморфізм $\overline{\delta}{:}GL\,(n, R) \to GL\,(n, R_1)$ за правилом $\overline{\delta}g = \left(\overline{\delta}g\right)$, $g \in GL\,(n, R)$, а кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \to R_1$ груповий гомоморфізм $\overline{\nu}{:}GL\,(n, R) \to GL\,(n, R_1)$ за правилом $\overline{\nu}g = (\overline{\nu}g)^{-1}$, $g \in GL\,(n, R)$.

Означення 3. *Нехай 1 – одиниця, e – ідемпотент кільця R_1 і e_1 – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця R_1. Відображення Λ_e групи $GL\,(n, R)$ визначається за правилом*

$$\Lambda_e\,(x) = \overline{\delta}xe + \overline{v}x^{-1}\,(1 - e) + e_1, x \in GL\,(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL\,(n, R)$ у групу $diag(GL\,(n, R_1), 1)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кілець δR, νR.

Означення 4. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K-модуль, L та P – ліві K-модулі, $g : W \to \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$– ізоморфізм K-модулів, $\overline{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\overline{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n, індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$.*

Відображення Λ_0 групи $GL\,(n, R)$ визначається за правилом

$$\Lambda_0\,(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}\,(x)\,e + \overline{\nu}\,(x)^{-1}\,(1 - e) + e_1\right] g, x \in GL\,(n, R)\,,$$

і є гомоморфізмом групи $GL\,(n, R)$ у групу $g^{-1}diag(GL\,(n, EndL), 1)\,g \subseteq GL\,(W)$, якщо e комутує з елементами кілець δR і νR.

Якщо в Λ_e кільце R_1 є кільцем $EndL$, то $\Lambda_0\,(x) = g^{-1}\Lambda_e\,(x)\,g$, де $x \in GL\,(n, R)$.

Означення 5. *Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \to GL\,(W)$ групи G, $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$ допускає стандартний опис на групі $E\,(n, R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі і e – центральний ідемпотент кільця $EndL$.*

Означення 6. *У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2, а елемент $[g_1, ..., g_t] = [[g_1, ..., g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів $g_1, ..., g_t$ групи G, де $t > 2$.*

Позначимо через e_{ij} матрицю кільця R_n, у якої на місці (i, j) стоїть одиниця, а на решті місць нулі. Очевидно, що $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$, де δ_{jk} – символ Кронекера. Одиничну матрицю кільця R_n будемо позначати 1 або E.

Означення 7. *Елементи $t_{ij}(r) = 1 + r e_{ij}$, де $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$, e_{ij} – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями, а діагональні елементи $d_i = 1 - 2e_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, елементарними інволюціями, трансвекції $t_{ij}(1)$ будемо називати одиничними елементарними трансвекціями. Групу, яка породжена всіма елементарними трансвекціями $t_{ij}(r)$, $r \in R$ будемо називати групою елементарних трансвекцій і позначати $E(n, R)$, $t_{ij} = t_{ij}(-1) t_{ji}(1) t_{ij}(-1) = t_{ji}(1) t_{ij}(-1) t_{ji}(1)$.*

Мають місце рівності $t_{ij} t_{ji} = t_{ji} t_{ij} = 1$, $t_{ij}^2 = t_{ji}^2 = d_i d_j$, $d_k^2 = 1$, $d_k e_{ij} d_k^{-1} = -e_{ij}$, якщо $i \neq j$, $k \in \{i, j\}$. В інших випадках d_k комутує з e_{ij}. Тому $[d_k, t_{ij}(r)] = t_{ij}(-2r)$, якщо $k \in \{i, j\}$, $r \in R$. В решті випадків d_k комутує з $t_{ij}(r)$.

Виконуються наступні матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq j \leq n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R. Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно різні довільні числа, $r \in R$.

Лема 1. *Якщо G – група така, що $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, де R – асоціативне кільце з 1, $n \geq 3$, а $\Lambda : G \to GL(W)$ – довільний гомоморфізм, то з рівності $\Lambda t_{ij} = 1$ або $\Lambda t_{ij} t_{ij}(-1) = 1$ для деяких, а значить для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, то Λ – одиничний гомоморфізм групи $E(n, R)$.*

Доведення. Дане твердження випливає з формул

$$[t_{ij}, t_{jk}(1), t_{ij}(1)] = t_{ik}(-1), [t_{ij} t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ij}(1)] = t_{ik}(-1),$$

$$[t_{ik}(1), t_{kj}(r)] = t_{ij}(r),$$

де $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно різні числа, $r \in R$.

Лема 2. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, e – діагональний елемент кільця R_n, $n \geq 2$ з нулями і одиницями на діагоналі, d – довільний діагональний елемент групи $GL(n, R)$ з ± 1 на діагоналі, x – елемент групи $GL(n, R)$, який комутує з $2e$. Тоді комутатор $[x, d]$ комутує з e.*

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що, з точністю до спряження, $e = diag(1, ..., 1, 0, ..., 0)$. Оскільки x комутує з $2e$, то $2x$ і $2x^{-1}$ комутують з e. За умовою $d = E + 2d'$, де d' – діагональна матриця. Тому $[x, d] = (E + 2xd'x^{-1})\, d$ блочно-діагональна матриця, яка комутує з e.

Зокрема, якщо x комутує з інволюцією t_{ii+1}^2, $1 \leq i \leq n-1$, то x комутує з елементом $2e = E - t_{ii+1}^2$, де $e = e_{ii} + e_{i+1i+1}$. Тому комутатор $[x, d]$ комутує з e і, як наслідок, $[x, d] \in diag(R_{i-1}, R_2, R_{n-i-1})$.

Означення 8. *Елемент m деякого кільця називається нільпотентним, якщо існує натуральне число k таке, що $m^k = 0$. Найменше з таких k називається ступенем нільпотентності елемента m. Сума одиничного і нільпотентного елементів називається уніпотентним елементом відповідного ступеня.*

Означення 9. *Нехай G – група така, що $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, $n \geq 2$, R – асоціативне кільце з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) модуль над асоціативним кільцем K з 1, $\Lambda : G \to GL(W)$ – груповий гомоморфізм. Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $m \in EndW$, $m^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2, які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 m$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A$, B/inG випливає, що $A^{s_2}B = BA^{s_2}$.*

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент m, то передбачається, що він існує. Зрозуміло, що гомоморфізми з умовою (*) є неодиничними.

Ізоморфізми задовольняють умову (*), якщо покласти $s_1 = s_2 = 1$ і скористатися тим, що $1 + m$ є оборотним елементом.

Умова (*) забезпечує існування прообразів деяких уніпотентних елементів і комутування їхніх степенів з прообразами матриць, образи яких комутують з цими уніпотентними елементами. Використання співвідношень між елементами скінченного порядку і елементарними трансвекціями дає можливість доводити, що гомоморфізми з умовою (*) допускають стандартний опис на групі елементарних трансвекцій.

Відмітимо, що якщо Λ гомоморфізм з умовою (*) і $\Lambda A = 1 + s_1 m$ комутує із скінченною кількістю елементів ΛB_i, $B_i \in G$, $1 \leq i \leq t$, то існує натуральне число s_2, яке оборотне в K таке, що A^{s_2} комутує з елементами $B_1, \ldots, B_t$ одночасно.

Загальний підхід до опису гомоморфізмів з умовою (*) матричних груп над асоціативними кільцями з 1 базується на тому, що автоморфізми модулів можна зображати формальними матрицями і виконувати дії над ними, як із звичайними матрицями, враховуючи, що елементи цих матриць на нерухомих підмодулях задаються одиницями, а нульові елементи на відповідних місцях зображаються нулями.

Нехай R *і* K – асоціативні кільця з 1, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль. Опис гомоморфізмів $\Lambda : G \to GL(W)$ відбувається за таким алгоритмом:

1) визначається розклад модуля W у пряму суму n ізоморфних між собою підмодулів, які ізоморфні модулю L і деякого підмодуля, який ізоморфний модулю P;

2) будується модуль $W_g = \underbrace{L \oplus \cdots \oplus L}_{n} \oplus P$ і відповідний ізоморфізм $g : W \to W_g$;

3) розглядаються відображення:

$\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ за правилом $\Lambda_g(x) = gxg^{-1}$, $x \in GL(W)$;

$\Lambda_0 : GL(n,R) \to GL(W)$ за правилом $\Lambda_0(x) = g^{-1}\left[\overline{\delta}(x)e + \overline{\nu}(x)^{-1}(1-e) + e_1\right]g$;

$\Lambda_e : GL(n,R) \to GL(W_g)$, $\Lambda_e = \Lambda_g \Lambda_0$ за правилом $\Lambda_e x = \overline{\delta}(x)e + \overline{v}(x)^{-1}(1-e) + e_1$, де $x \in GL(n,R)$, $\overline{\delta}-$ кільцевий гомоморфізм і $\overline{v}-$ кільцевий антигомоморфізм

кільця R_n , індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \to EndL$ і кільцевим анти гомоморфізмом $v : R \to EndL$ відповідно в кільце $(EndL)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $EndL$, а e_1 – одиниця кільця $EndP$, яка ортогональна з елементами кільця $EndL$;
$\Lambda_1 : GL(n,R) \to GL(W_g)$, $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$ за правилом $\Lambda_1(x) = g\Lambda(x)g^{-1}$, $x \in GL(n,R)$;

4) доводиться, що якщо Λ – гомоморфізм з умовою (*), то гомоморфізм Λ_1 відображає групу $E(n,R)$ в підгрупу $diag(GL(n,EndL),1)$ групи $GL(W_g)$, e – центральний ідемпотент кільця $EndL$ і $\Lambda_1 = \Lambda_e$ на довільних елементарних трансвекціях. Тому гомоморфізм $\Lambda = \Lambda_g^{-1}\Lambda_e = \Lambda_0$ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$;

5) визначаються властивості відображення $\gamma : G \to GL(W)$, яке задане за правилом $\Lambda(x) = \gamma(x)\Lambda_0(x), x \in G$.

3. Дія гомоморфізмів на інволюціях. В роботі [1] авторами доведена

Лема 3. *Нехай K – асоціативне кільце з 1, $2 \in K^*$, W – лівий K-модуль, a, b, c, d – елементи групи $GL(W)$ такі, що $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba, ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a \neq 1$. Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, який індукує ізоморфізм $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ такий, що елементи $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1), \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_g d = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1),$$

де $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL$, $\gamma, \gamma_1 \in EndP$.

В якості елементів *a, b, c, d,* які визначені у лемі 3, можна вибрати образи інволюцій і елементів четвертого порядку відносно гомоморфізма Λ .

Лема 4. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)-$ довільний неодиничний гомоморфізм групи $E(n,R)$. Тоді в групі $GL(W)$ в якості елементів a,b,c,d, які визначені у лемі 3, за умови $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$ можна вибрати*

$$a = \Lambda diag(-1,-1,1,\ldots,1),\ b = \Lambda diag(1,-1,-1,1,\ldots,1),$$

$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1\right),\ d = \Lambda diag(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1)$$

При цьому $c^2 = a$, $d^2 = b$.

Якщо $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ для деяких, а значить і для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, то в якості елементів a,b,c,d можуть бути вибрані елементи

$$a = \Lambda t_{12}(1), b = \Lambda t_{13}(1), c = \Lambda t_{32}(-1), d = \Lambda t_{23}(-1)$$

При цьому $c^2 = 1, d^2 = 1$.

Виявляється, що якщо $\Lambda : G \to GL(W)-$ гомоморфізм з умовою (*), то останній випадок леми 4 $\Lambda t_{ij}^2 = 1$ неможливий. Більше того, має місце більш загальне твердження.

Лема 5. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*), W_0 – лівий K-підмодуль модуля W, який інваріантний відносно елементів $\Lambda t_{ij}(1)$, і $\Lambda t_{ij}^2|_{W_0} = 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$. Тоді $\Lambda t_{ij}(1)|_{W_0} = 1$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq 3$.*

Доведення. Проведемо від супротивного. Нехай $\Lambda t_{ij}(1)|_{W_0} \neq 1$. Оскільки $\Lambda t_{ij}^2|_{W_0} = 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$, то згідно з лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L, P і ізоморфізм $g : W_0 \to L \oplus L \oplus L \oplus P$ такі, що
$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag(-1,-1,1,1)$, $\Lambda_1 t_{13}(1) = diag(1,-1,-1,1)$, де $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$.

За умовою (*) існують натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ і матриця $A \in G$ така, що має місце рівність $\Lambda_1 A = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1\right)$, і A^{s_2} комутує з $t_{12}(1)$. Тому $[A^{s_2}, t_{13}(1), t_{13}(1)] = 1$ і, як наслідок,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & s_1s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = 1$$

Рівність $4s_1s_2 = 0$ суперечить оборотності елементів $2, s_1, s_2$ у кільці K.

4. Дія гомоморфізмів з умовою (*) на інволюціях. Опис гомоморфізмів з умовою (*) починається з визначення їхньої дії на інволюціях. Покажемо, що образи елементарних інволюцій відносно гомоморфізмів з умовою (*) мають вигляд формальних діагональних матриць.

Лема 6. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм і гомоморфізм $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$ такі, що $\Lambda_1 t_{ii+1}^2, \quad 1 \leq i < n-$ формальні діагональні матриці.*

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$ ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм Λ_1 такі, що $a = \Lambda t_{12}^2, b = \Lambda t_{23}^2, c = \Lambda t_{12},\ d = \Lambda t_{23}$,

$$\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1),\ \Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_g d = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1),$$

де $\beta^2 = \beta_1^2 = 1,\ \gamma^2 = \gamma_1^2 = 1$. І, як наслідок,

$$\Lambda_1 t_{12}^2 = diag(-1,-1,1,1),\ \Lambda_1 t_{23}^2 = diag(1,-1,-1,1),$$

$$\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),\ \Lambda_1 t_{23} = diag(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1).$$

Таким чином, для $i = 1, 2$ лема доведена.

Доведемо, що вона має місце для $3 \leq i < n$. Очевидно, що елементи t_{11+1}^2, де $1 \leq i < n$, комутують між собою.

Нехай $n = 4$. Тоді існує елемент t_{34}^2. Враховуючи, що t_{34}^2 комутує з t_{12}, t_{23}^2 і $(t_{34}^2 t_{23})^2 = 1$, отримуємо, що $\Lambda_1 t_{34}^2 = diag(\alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3, x_3)$, де $\alpha_3 \in EndL, x_3 \in EndP$, що доводить лему при $n = 4$.

При $n \geq 5$ існують елементи $t_{45}^2, \ldots, t_{n-1n}^2$, які комутують із t_{12} і t_{23}. Тому

$$\Lambda_1 t_{ii+1}^2 = diag(\alpha_i, \alpha_i, \alpha_i, x_i),$$

де $\alpha_i \in EndL$, $x_i \in EndP$, $4 \leq i < n$.

Мають місце рівності $\alpha_i^2 = 1, x_i^2 = 1, \alpha_i\beta = \beta\alpha_i, \gamma x_i = x_i\gamma, \alpha_i\beta_1 = \beta_1\alpha_i, \gamma_1 x_i = x_i\gamma_1$, де $n \geq 4,\ 3 \leq i < n$.

Таким чином, визначена дія гомоморфізму Λ_1 на елементах $t_{12}^2, \ldots, t_{n-1n}^2$, де $n \geq 4$. Їхні образи відносно гомоморфізму Λ_1 виявилися формальними діагональними матрицями.

Доведемо існування у прообразі відносно гомоморфізму з умовою (*) деяких блочно-діагональних матриць, які відображаються у формальні елементарні трансвекції.

Лема 7. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді існують ліві K-модулі L і P та ізоморфізм модулів $g : W \to W_g$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм $\Lambda_1 = \Lambda_g \Lambda$ такі, що в групі G існують матриці A_1, A_2, які містяться в $diag(R, R_2, R_{n-3})$ і*

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

де α – оборотний елемент кільця $EndL$.

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм Λ_1. Доведемо існування матриць A_1 і A_2.

Нехай $n \geq 3$ і $n \neq 4$. Відповідно до умови (*) у групі G існують елементи A_1, A_2 і натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ такі, що

$$\Lambda_1 A_1 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),\quad \Lambda_1 A_2 = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_1 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

де $A_1^{s_2}, A_2^{s_2}$ комутують із елементом t_{23}^2. Якщо $n \geq 5$, то елементи $A_1^{s_2}$ і $A_2^{s_2}$ комутують також з елементами $t_{45}^2, \ldots, t_{n-1n}^2$. Згідно з лемою 2 мають місце включення $[A_i^{s_2}, t_{12}^2] \in diag(R, R_2, R_{n-3})$, $i = 1, 2$. При цьому

$$\Delta_1 \left[A_i^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & -2s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right), \Delta_1 \left[A_i^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2s_1 & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

Без обмеження загальності (замінивши $[A_i^{s_2}, t_{12}^2]$ на A_i), отримуємо твердження леми при $n \geq 5$ і $n \neq 4$.

Доведемо, що твердження леми виконуються і при $n = 4$. Нехай $n = 4$. Згідно з умовою (*) існують натуральні числа $s_1, s_2 \in K^*$ і матриця $A \in G$ така, що $\Lambda_1 A = diag\left(\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1\right)$ і A^{s_2} комутує з t_{12}^2. Відповідно до леми 2 $[A^{s_2}, t_{23}^2] \in diag(R_2,\ R_2)$ і елементи $t_{34}(1), t_{43}(1)$, а також t_{12} комутують з $[A^{s_2}, t_{23}^2, t_{12}]$.

Оскільки $\Lambda_1 t_{12} = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right)$, $\Lambda_1 t_{12}^2 = diag(-1, -1, 1, 1)$, то мають місце рівності

$$\Lambda_1 \left[A^{s_2}, t_{23}^2\right] = diag(\begin{pmatrix} 1 & 2s_1 s_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1, 1),$$

$$\Lambda_1\left[A^{s_2},t_{23}^2,t_{12}\right]=diag(\left[\left(\begin{array}{cc}1 & 2s_1s_2\\ 0 & 1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right)\right],1,1).$$

Тому $\Lambda_1 t_{34}\left(1\right)=diag\left(x_1,y_1\right),\ \Lambda_1 t_{43}\left(1\right)=diag(x_2,y_2)$, де $x_i,\ i=1,2$ містяться в $End(L\oplus L)$ і комутують із матрицями

$$\left(\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right)\quad i\quad \left[\left(\begin{array}{cc}1 & 2s_1s_2\\ 0 & 1\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}0 & -1\\ 1 & 0\end{array}\right)\right].$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо, що $x_i=diag\left(\alpha_i,\alpha_i\right)$, $i=1,2$. Без обмеження загальності (замінивши елемент $[A^{s_2},t_{23}^2,t_{12}]$ на A), можна вважати, що A^{s_2} комутує з $t_{34}(1)$ і $t_{43}(1)$. Тому

$$A^{s_2}\in diag(R_2,\ R,R)\quad i\quad \left[A^{s_2},t_{23}^2\right]\in diag(R_2,\ 1,1).$$

Нехай $A_1=t_{12}t_{23}\left[A^{s_2},t_{23}^2\right]t_{23}^{-1}t_{12}^{-1}$ і $A_2=t_{23}A_1t_{23}^{-1}$. Неважко бачити, що A_1, A_2 належать $diag(1,R_2,\ 1)$. Тим самим доведено, що

$$\Lambda_1 A_1=diag\left(1,\left(\begin{array}{cc}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{array}\right),1\right),\ \Lambda_1 A_2=diag\left(1,\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ -\alpha & 1\end{array}\right),1\right),$$

де A_1,A_2 містяться в $diag(1,R_2,\ 1)$, α – оборотний елемент кільця $EndL$.

5. Дія гомоморфізмів з умовою (*) на елементарних трансвекціях. Визначимо дію гомоморфізма Λ на елементарних трансвекціях $t_{ij}(r)\in G$, $1\leq i\neq j\leq 3, r\in R$.

Лема 8. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2\in K^*$, $E\left(n,R\right)\subseteq G\subseteq GL\left(n,R\right),n\geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda:G\to GL\left(W\right)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ збігається з Λ_0 на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1\leq i\neq j\leq 3$.*

Доведення. За лемами 3 і 4 існують ліві K-модулі L і P, $W_g=L\oplus L\oplus L\oplus P$, ізоморфізм Λ_g і гомоморфізм $\Lambda_1=\Lambda_g\Lambda$.

З'ясуємо дію гомоморфізма Λ_1 на елементарних трансвекціях.

Елементи $t_{pq}(r)$, де $1\leq p\neq q\leq 2$, $r\in R$ комутують з t_{12}^2. Тому $\Lambda_1 t_{pq}\left(r\right)=diag(a,b)$, де $a=\left(\begin{array}{cc}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{array}\right)$, $b=\left(\begin{array}{cc}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{array}\right)$, елементи a_1,a_2,a_3,a_4,b_4 містяться в $EndL$, $b_2\in Hom(L,P)$, $b_3\in Hom(P,L)$, $b_4\in EndP$. Зрозуміло, що елементи a і b залежать від $r\in R$.

З рівності $\left[t_{23}^2t_{pq}(r)\right]^2=1$ випливає, що $\left(\begin{array}{cc}a_1 & a_2\\ -a_3 & -a_4\end{array}\right)^2=1$ і $\left(\begin{array}{cc}-b_1 & -b_2\\ b_3 & b_4\end{array}\right)^2=1$.

Тому мають місце рівності $a_1^2-a_2a_3=a_4^2-a_3a_2=1$, $a_1a_2=a_2a_4$, $a_3a_1=a_4a_3$, $b_1^2-b_2b_3=1,\ b_4^2-b_3b_2=1,\ b_1b_2=b_2b_4,b_3b_1=b_4b_3$.

Нехай A_1,A_2 – матриці, визначені в лемі 7. Оскільки

$$\left[A_i^{s_2},t_{12}^2,t_{12}(r)\right]\in diag\left(\left(\begin{array}{ccc}1 & * & *\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right),1,\ldots,1\right),$$

$$\left[A_i^{s_2},t_{12}^2,t_{21}(r)\right]\in diag\left(\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ * & 1 & 0\\ * & 0 & 1\end{array}\right),1,\ldots,1\right),$$

то має місце рівність $\left([A_i^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]\, t_{23}^2\right)^2 = 1,\ i = 1,2$ і елементи $[A_1^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]$, $[A_2^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)]$ комутують між собою. Згідно з лемою 7

$$\Lambda_1 \left[A_1^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & -s_1\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right),$$

$$\Lambda_1 \left[A_2^{s_2}, t_{12}^2\right] = diag\left(1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s_1\alpha & 1 \end{pmatrix}, 1\right).$$

Введемо позначення

$$T_1 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s_1\alpha & 0 \end{pmatrix} b^{-1},\quad T_2 = -\begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & s_1\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a^{-1}.$$

У цих позначеннях елементи

$$\Lambda_1 \left[A_1^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)\right] = \begin{pmatrix} E & T_1 \\ 0 & E \end{pmatrix},\ \Lambda_1 \left[A_2^{s_2}, t_{12}^2, t_{pq}(r)\right] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_2 & E \end{pmatrix}$$

комутують між собою.

Тому T_1 і T_2 комутують із елементом $diag(1,-1)$ і $T_1T_2 = 0$, $T_2T_1 = 0$. Із отриманих співвідношень випливає, що $a_2ab_2 = 0, b_3aa_3 = 0, a_4ab_1 = \alpha = b_1aa_4, a_2a_3 = a_3a_2 = 0, b_2b_3 = b_3b_2 = 0$ Зіставляючи їх з раніше отриманими рівностями знаходимо, що $a_1^2 = a_4^2 = 1, b_1^2 = 1, b_4^2 = 1, b_1 = b_4$ і $\alpha b_1 = b_1\alpha$. Застосовуючи вищевикладені міркування до елемента $t_{qp}(r) = t_{12}t_{pq}(-r)t_{12}^{-1}$ отримуємо, що

$$\Lambda_1 t_{qp}(r) = diag\left(\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 & -\alpha b_2\beta \\ -\beta b_3\alpha & \beta b_4\beta \end{pmatrix}\right).$$

Як і у випадку з елементом $\Lambda_1 t_{pq}(r)$ отримуємо, що $a_3\alpha b_2 = 0, b_3\alpha a_2 = 0, b_1 = a_1 = a_4$ комутує з a_2 і a_3.

Розглянемо випадок $r = 1, p = 1, q = 2$. З рівності $t_{12}(1)\, t_{21}(-1) = t_{12}t_{12}(-1)$ випливають співвідношення

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \alpha b_2\beta \\ \beta b_3\alpha & \beta b_1\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ -b_3 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Тому $1 - a_2^2 = -a_3$, $1 - a_3^2 = -a_2$. Домножимо ці рівності на b_2 і b_3. Отримаємо, що $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $1 = b_1^2 = \alpha b_1$, $b_1 = \alpha$ і $\alpha a_2 = a_2\alpha$, $\alpha a_3 = a_3\alpha$, $b_4^2 = 1$, $(b_1\beta)^2 = 1$.

Аналогічно, домноживши вищерозглянуті рівності на a_2 і a_3, отримуємо, що $a_2^2 = a_2$, $a_3^2 = -a_3$, $1 = a_2 - a_3$.
Позначимо $e = a_2$. Тоді $e^2 = e$, $e\alpha = \alpha e$, $a_3 = e - 1$. Тим самим доведено, що

$$\Lambda_1 t_{12}(1) = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & e \\ e-1 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, b_4\right),$$

$$\Lambda_1 t_{13}(1) = \Lambda_1 a_{23} t_{12}(1)\, a_{23}^{-1} = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 & e \\ 0 & \alpha & 0 \\ e-1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \delta b_4\delta\right),$$

$$\Lambda_1 t_{23}(1) = diag\left(\alpha, \begin{pmatrix} \alpha & e \\ e-1 & \alpha \end{pmatrix}, \beta\delta b_4\delta\beta\right).$$

З комутаторної рівності $t_{13}(1) = [t_{12}(1), t_{23}(1)]$ очевидним чином випливає, що $\alpha = 1$, а із леми 5, що $b_4 = 1$ і $\beta = 1$. Тому гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{12}(1)$, $t_{13}(1)$, $t_{23}(1)$.

Враховуючи рівності $t_{12}t_{12}(1)t_{12}^{-1} = t_{21}(-1), t_{23}t_{21}(1)t_{23}^{-1} = t_{31}(1)$, отримуємо, що гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq 3$. Тому Λ збігається з Λ_0 на одиничних елементарних трансвекція $t_{ij}(1)$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Теорема 2. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $2 \in K^*$, $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R), n \geq 3$, W – лівий K-модуль, гомоморфізм $\Lambda : G \to GL(W)$ задовольняє умову (*). Тоді Λ має стандартний опис на групі $E(n,R)$.*

Доведення. Індукцією по n покажемо, що Λ_1 збігається з Λ_e на всіх одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq n,\ n \geq 3$.

У лемі 8 доведено, що Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq 3$.

Нехай $n \geq 4$. Припустимо, що Λ_1 збігається з Λ_e на одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Оскільки елементарна трансвекція $t_{n-1n}(1)$ комутує з елементарними трансвекціями $t_{12}(1), t_{21}(1), \ldots, t_{n-3n-2}(1), t_{n-2n-3}(1)$ і має місце комутаторна формула $[t_{n-1n}(1), t_{n-2n-1}(1), t_{n-1n-2}(1)] = t_{n-1n}(1)$, то мають місце включення

$$\Lambda_1 t_{n-1\ n}(1) \in diag\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, *\Big), \Lambda_1 t_{nn-1}(1) \in diag\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, *\Big).$$

Використовуючи пірсовий розклад елемента $\Lambda_1 t_{n-1n}^2$ можна вважати, що

$$\Lambda_1 t_{n-1n}^2 = diag\Big(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, -1, -1, 1\Big),\ \Lambda_1 t_{n-1n} = diag\left(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, 1\right),$$

Із рівностей $t_{n-1n}^2 = -E$ і $(t_{n-2n-1}^2 t_{n-1n})^2 = E$ випливає, що

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому $x_1 = 0, x_4 = 0, x_2x_3 = -1, x_3x_2 = -1$. Це означає, що з точністю до спряження, можна вважати, що $x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

Тим самим доведено, що Λ_1 збігається з Λ_e на t_{ii+1} для всіх $1 \leq i < n$.

Оскільки одиничні елементарні трансвекції спряжені між собою за допомогою добутків елементів t_{ii+1}, $1 \leq i < n$, то Λ_1 збігається з Λ_e на всіх одиничних елементарних трансвекціях $t_{ij}(1)$, $1 \leq i < n$.

В такому разі, як буде доведено далі, гомоморфізм Λ_1 збігається з Λ_e на всій групі $E(n,R)$. Це буде означати, що Λ допускає стандартний опис на групі $E(n,R)$.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. Задача опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній K-теорії та теорії кілець і модулів, теорії зображень груп. Вона належить до відомої проблеми вивчення матричних груп, яка є важливою складовою загальної теорії груп. Незважаючи на досягнення в описі гомоморфізмів матричних груп над кільцями, залишається чимало актуальних задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача знаходження умов на гомоморфізми матричних груп при яких останні допускають стандартний опис над асоціативними кільцями з 1.

Список використаної літератури

1. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1(36). С. 16 – 29.
2. Петечук В.М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Матем. сб.* 1982. №.4. С. 539–547.
3. Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3 (38). С. 73 – 85.
4. Зельманов Е.И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т.4. С.49–67.
5. Петечук В.М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94.
6. Golubchik I.Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL_n(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.
7. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2 С. 152–171.
8. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). С. 99–114.
9. Hahn A.J., O'Meara O.T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 1989. 578 p.

Petechuk V. M., Petechuk Y. V. Homomorphisms with condition (*) if 2 is a reversible element.

The study of homomorphisms of matrix groups over associative rings began almost 100 years ago with the work of Schreier and Van der Warden and later developed in the works of Dieudonne J., Hua L. K., Reiner I., O'Meara O.T., Hahn A.J., Merzlyakov Yu.I., Waterhouse W.C., Mikhalev O.V., Zelmanov E.I., Golubchik I.Z., Petechuk V.M. and other authors.

The study is based on the group properties of a complete linear group $GL(n, R)$ the set of all reversible matrices over the associative ring R with 1.

Thus, in all known cases $n \geq 3$, despite the difference in the methods used, the automorphisms of the complete linear group were the product of standard automorphisms. It is the reversibility of element 2 that made it possible to consider ever wider classes of rings over which a standard description of homomorphisms of matrix groups is possible.

If 2 is an irreversible element, then when $n \geq 3$ Petechuk V.M. described the automorphisms of the group $GL(n, R)$ in the case when R is a commutative local ring. It turned out that for $n \geq 4$ all automorphisms of such groups are the product of standard automorphisms, and for $n = 3$ them can be expressed through standard and some non-standard automorphisms. Based on this result, Petechuk V.M. [2] obtained a description of the isomorphisms of the group $GL(n, R)$, $n \geq 3$ if R is an arbitrary commutative ring.

In particular, he described homomorphisms $\Lambda : PE(n, R) \to PGL(m, K)$, $m \geq 3$, $n \geq 3$ such $\Lambda PE(n, R) = PH$ and $H \supseteq E(m, K)$ as over arbitrary commutative rings R and K.

From Golubchik I.Z. and Mikhalev O.V. [3], using systems of idempotent, and independently Zelmanov E.I. [4], using the methods of Jordan algebras, obtained a description of the isomorphisms of the group $E(n, R)$, $n \geq 3$, $2 \in R^*$ on the group $E(m, K)$, $2 \in K^*$ over arbitrary associative rings R and K with 1. Petechuk V.M. [5] described the homomorphisms of a group $PE(n, R)$, $n \geq 3$, into a group $GL(m, K)$, $m \geq 2$, $2 \in K^*$ in the case when the fixed submodules of some elements of the fourth order coincide with the fixed submodules of their squares From it follow the results of Golubchik I.Z., Mikhalev O.B. and Zelmanov E.I.

Developing techniques related to idempotents, Golubchik I.Z. [6] described the isomorphisms of the groups $GL\,(n, R)$ and $GL\,(m, K)$ for $n, m \geq 4$ over the associative rings R and K. It turned out that they allow a standard description on the group $E\,(n, R)$.

The authors Petechuk V.M., Yu.V. Petechuk [7, 8] described homomorphisms with condition (*), from which in particular follows the description of isomorphisms of complete linear groups over associative rings. In this paper, methods for describing homomorphisms with the condition (*) are improved and expanded if element 2 is reversible in the ring K and $n \geq 3$. The main result of the work is the following theorem. Let R and K be associative rings with 1, $2 \in K^*$, $E\,(n, R) \subseteq G \subseteq GL\,(n, R)$, $n \geq 3$, W be the left K-module, homomorphism $\Lambda : G \to GL\,(W)$ satisfies the condition (*). Then Λ has a standard description on the group $E\,(n, R)$.

Keywords: associative rings, 2 is a reversible element, homomorphisms of linear groups, homomorphisms with condition (*), involutions, elementary transvections, group of elementary transvections, formal matrices, standard homomorphisms.

References

1. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1(36)*, 16 – 29 [in Russian].
2. Petechuk, V.M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Math. Noties, №.4*, P. 539–547.
3. Golubchik, I.Z., & Mikhalev, A.V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow Univ. Math. Bull. 38 (3)*, 73 – 85.
4. Zelmanov, E.I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Math. J., 4 (26)*, 49 – 67.
5. Petechuk, V.M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. Math.Noties, 2 (45), P. 83–94.
6. Golubchik, I.Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL_n\,(R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics, 131(1)*, P. 123–136.
7. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 2 (25)*, 152 – 171 [in Russian].
8. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 1 (26)*, 99 – 114 [in Russian].
9. Hahn, A.J., & O'Meara, O.T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer, 578 p.

Одержано 22.09.2020

УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).114-121

М. Ю. Петранова

Донецький національний університет імені Василя Стуса,
молодший науковий співробітник
m.petranova@donnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6359-1993

ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО ВИГЛЯД КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

Ця стаття присвячена знаходженню критерія для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією. Питання моделювання випадкових процесів є актуальним у сучасному світі, особливо гауссових випадкових процесів. Таким чином при моделюванні випадкових процесів, зазвичай, намагаються змоделювати процеси, що є сумою великої кількості випадкових факторів, тобто, відповідно до центральної граничної теореми, гауссові або близькі до них випадкові процеси. Також треба зазначити, що ніколи не вдається отримати модель, що дійсно є гауссовим процесом. Для таких процесів є актуальне дослідження умов збіжності моделей та оцінки точності моделювання. В якості оцінки точності моделювання розглядаються оцінки моментів різниці процесу та моделі, кореляційної функції моделі та дослідження слабкої збіжності моделі.

У даній роботі продовжується тема моделювання, яка була розглянута автором у співавторстві з Козаченком Ю. В., а точніше – перевірка гіпотези про те, як буде виглядати коваріаційна функція змодельованного процесу.

В статті розгянуто центрований вимірний дійсний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією, лему про прийняття гіпотези $\mathbb{H}$ для процесу загального виду, теорему про наближення коваріаційної функції корелограмою. А також, сформульовано і доведено лему про прийняття гіпотези $\mathbb{H}$ для процеса, у якого коваріаційна функція стійка і має вигляд $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}$, де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Основним результатом є перевірка гіпотези, яка полягає у тому, що коваріаційна функція центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією має вигляд $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}$, де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Ключові слова: перевірка гіпотез, стійка кореляційна функція, коваріаційна функція, вимірний дійсний гауссовий процес, корелограма.

1. Вступ. Робота є логічним продовженням роботи [1]. У роботі [1] були знайдені оцінки розподілу супремуму гауссових стаціонарних процесів зі стійкою кореляційною функцією, досліджена поведінка на нескінченності та знайдені деякі аналітичні властивості цих процесів. Задачі моделювання та оцінки випадкових процесів були розглянуті у статтях [2], [3] та у книгах [4, 5] та в багатьох інших роботах. Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [6], [7]. Деякі результати щодо властивостей стійкої кореляційної функції представлені в книзі [8]. Також авторами Козаченком Ю. В. та Петрановою М. Ю. були досліджені комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією у роботі [6]. У роботі [9] було знайдено нові верхні та нижні межі для розподілу квадратичних форм гауссових випадкових величин, а також границь квадратичних форм. На основі цих оцінок пропонується критерій для перевірки гіпотези про функцію коваріації $\rho(\tau)$ гауссового стохастичного процесу. У роботі [10] доведено нерівності для розподілів квадратних форм із квадратно-гауссових випадкових величин та розподілів квадратних форм із квадратно-гауссових випадкових процесів. Ці нерівності дозволяють дослідити спільні розподіли оцінок коваріаційних функцій гауссових процесів. Властивості емпіричної корелограми центрованого стаціонарного гауссового процесу розглянуті у [11]. Прикладне застосування згорток функцій розглянуто у [12], а згортка у вигляді двовимірної функції Гауса у [13].

Оскільки кореляційна функція є однією з важливих характеристик випадкових процесів, тоді постає питання оцінювання і вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентинтифікації. Для того, щоб з'ясувати це у статті було побудувано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, де $0 < \alpha \le 2$, $d > 0$.

2. Основний результат. Нехай $\mathbb{H}$ – гіпотеза, яка полягає у тому, що кореляційна функція центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією дорівнює $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, де $0 < \alpha \le 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Наведемо означення дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією.

Означення 1 (див. [6]). *Дійсний стаціонарний гауссів процес* $X_\alpha = \{X_\alpha(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, $0 < \alpha \le 2$, *такий що* $EX_\alpha(t) = 0$, $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 \exp\left\{-d|h|^\alpha\right\}$, $\alpha > 0$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$ *називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.*

Для того, щоб перевірити цю гіпотезу, ми використовуємо наступне твердження зі статті [14].

Нехай S_δ розв'язок рівняння $g(\varepsilon) = \delta, 0 < \delta < 1$, де

$$g(\varepsilon) = 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\sqrt{2}}{C_p^{\frac{1}{p}}}\exp\left\{\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2}C_p^{\frac{1}{p}}}\right\}}$$

та

$$C_p = \int_0^A \left(\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-u)\left(\rho^2(u) + \rho(u+\tau)\rho(u-\tau)\right)du\right).$$

Нехай $S_\delta = max\left\{\varepsilon_\delta, Z_p\right\}$. Очевидно, що $g(S_\delta) = \delta$ та

$$P\left\{\int_0^A \left(\hat\rho(\tau) - \rho(\tau)\right)^p d\tau > S_\delta\right\} \le \delta.$$

Лема 1 ([14]). *Нехай* $\{\mathbb{T}, \mathfrak{A}, \mu\}$ *– вимірюваний простір, де* $\mathbb{T}$ *– параметрична множина,* $p \ge 1$, $0 < A < \infty$. *Для заданого рівня впевненості* δ *гіпотеза* $\mathbb{H}$ *приймається, якщо* $\int_0^A \left(\hat\rho(\tau) - \rho(\tau)\right)^p d\mu(\tau) < S_\delta$, *в іншому випадку гіпотеза відкидається.*

Гіпотезу перевіряємо за спостереженнями $X_\alpha(t), t \in [0, T+A]$. У якості оцінки кореляційної функції ми використовуємо корелограму і наступну теорему (доведення у статті [14]).

Теорема 1 (див. [14]). *Розглянемо вимірний стаціонарний гауссовий стохастичний процес X, визначений для всіх $t \in \mathbb{R}$. Без обмеження загальності можна вважати, що*

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T + A], 0 < T < \infty, 0 < A < \infty\}$$

та $EX(t) = 0$. Коваріаційна функція $\rho(\tau) = EX(t+\tau)X(t)$ цього процесу визначена для будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$ і є парною функцією та неперервна на $\mathbb{T}$.

Нехай корелограма

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)dt,\ 0 \le \tau \le A$$

є оцінкою коваріаційної функції $\rho(\tau)$. Тоді виконується наступна нерівність для усіх $\varepsilon \ge \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\frac{p}{2}+1)p}\right)^p C_p$:

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > \varepsilon\right\} \le g(\varepsilon).$$

На основі теореми і леми наведених вище, сформулюємо наступну лему.

Лема 2. *Нехай $\mathbb{H}$ гіпотеза, яка полягає у тому що коваріаційна функція центрованого вимірного стаціонарного гауссового випадкового процесу $X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T + A], 0 < T < \infty, 0 < A < \infty\}$, $t \in \mathbb{R}, EX(t) = 0$ дорівнює $\rho(\tau) = B^2 \exp\{-d|h|^\alpha\}$, де $0 < \alpha < 2$, $d > 0$. Нехай корелограма $\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T X(t+\tau)X(t)dt, 0 \le \tau \le A$ є оцінкою коваріаційної функції $\rho(\tau)$. Тоді гіпотеза $\mathbb{H}$ для усіх*
$\varepsilon \ge \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{(\frac{p}{2}+1)p}\right)^p C_p$:

$$P\left\{\int_0^A (\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau))^p d\tau > \varepsilon\right\} \le g(\varepsilon),$$

де $g(\varepsilon) = 2\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}\sqrt{2}}{C_p{}^{\frac{1}{p}}}} \exp\left\{\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2}C_p{}^{\frac{1}{p}}}\right\}$ та

$$\begin{aligned} C_p &\le \left(\frac{2B^2}{T^2}\right)^{\frac{p}{2}} \int_0^A \left(\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)^{\frac{p}{2}} d\tau = \\ &= \left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}} \frac{T^{\frac{p}{2}}}{T^p} \cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right) = \\ &= \frac{\left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}}}{T^p} \cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi} + \frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right). \end{aligned}$$

та відхиляється у противному.

Доведення.

Будемо оцінювати C_p для доведення леми. Почнемо з наступного:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^T (T-u)\left(e^{-2du^\alpha} + e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha}\right) du = \\
&= T\int_0^T e^{-2du^\alpha} du + T\int_0^T e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du - \\
&- \int_0^T u e^{-2du^\alpha} du - \int_0^T u e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du = \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}$$

Тепер обчислимо доданки цього виразу:

$$I_1 = T\int_0^T e^{-2du^\alpha} du \le T\int_0^\infty e^{-2du^\alpha} du. \tag{1}$$

Зробимо заміну в інтегралі (1) $2du^\alpha = z$, звідки для інтегралу (1) отримуємо:

$$\begin{aligned}
T\int_0^\infty e^{-2du^\alpha} du &= T\int_0^\infty e^{-z} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1} = \\
&= \frac{T}{\alpha} \cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1} dz = \frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),
\end{aligned}$$

де $\alpha \in (0;2]$. Другий доданок:

$$\begin{aligned}
I_2 &= T\int_0^T e^{-d|u+\tau|^\alpha} e^{-d|u-\tau|^\alpha} du = \\
&= T\left(\int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(\tau-u)^\alpha} du + \int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(u-\tau)^\alpha} du\right).
\end{aligned}$$

Оцінимо кожний з доданків другого доданку:

$$\begin{aligned}
1)\int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(\tau-u)^\alpha} du &= \int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha(1+(\frac{\tau-u}{u+\tau})^\alpha)} du \le \\
&\le \int_0^\tau e^{-d(u+\tau)^\alpha} d(u+\tau).
\end{aligned} \tag{2}$$

Зробимо заміну $u+\tau = z$ в (2):

$$\int_\tau^{2\tau} e^{-dz^\alpha} dz \le \int_\tau^\infty e^{-dz^\alpha} dz \le \int_0^\infty e^{-dz^\alpha} dz. \tag{3}$$

Тепер зробимо заміну в (3) $t = dz^\alpha$:

$$\int_0^\infty e^{-dz^\alpha} dz = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

$$\begin{aligned}
2)\int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha} e^{-d(u-\tau)^\alpha} du &= \int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha(1+(\frac{u-\tau}{u+\tau})^\alpha)} du \le \\
&\le \int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha} d(u+\tau).
\end{aligned} \tag{4}$$

Зробимо заміну $u+\tau=z$ в (4), а потім заміну в ньому $t=dz^{\alpha}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-dz^{\alpha}}dz=\frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{\frac{1}{\alpha}-1}dt=\frac{1}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

з чого отримуємо для другого доданку оцінку

$$I_2\le\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Третій доданок:

$$I_3=\int_0^{T} ue^{-2du^{\alpha}}du\le\int_0^{\infty} ue^{-2du^{\alpha}}du. \tag{5}$$

Зробимо заміну у інтегралі (5) $2du^{\alpha}=z$, звідки отримуємо:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} ue^{-2du^{\alpha}}du&=\int_0^{\infty} 2d^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot z^{\frac{1}{\alpha}}e^{-z}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot 2d^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot z^{\frac{1}{\alpha}-1}=\\&=\frac{4}{\alpha}d^{-\frac{2}{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-z}\cdot z^{\frac{2}{\alpha}-1}dz=\frac{4}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).\end{aligned}$$

Четвертий доданок:

$$\begin{aligned}I_4&=\int_0^{T} ue^{-d|u+\tau|^{\alpha}}e^{-d|u-\tau|^{\alpha}}du\le T\int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{d(u-\tau)^{\alpha}}du+\\&+T\int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(u-\tau)^{\alpha}}du=\\&=T\cdot\left(\int_0^{\tau} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{d(u-\tau)^{\alpha}}du+\int_{\tau}^{T} e^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(u-\tau)^{\alpha}}du\right)=I_2,\end{aligned}$$

звідки отримуємо:

$$I_4\le\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Зауваження 1. *Більш точну оцінку для I_4 можна отримати наступним чином:*

$$\begin{aligned}I_4&=\int_0^{T} ue^{-d|u+\tau|^{\alpha}}e^{-d|u-\tau|^{\alpha}}\,du\\&\le\int_0^{\tau} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{d(u-\tau)^{\alpha}}\,du+\int_{\tau}^{T} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{-d(u-\tau)^{\alpha}}\,du.\end{aligned}\tag{6}$$

Оцінимо кожен з доданків у правій частині (6)*:*

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}}e^{d(u-\tau)^{\alpha}}\,du&=\int_0^{\tau} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}\left(1-\left(\frac{u-\tau}{u+\tau}\right)^{\alpha}\right)}du\le\\&\le\int_0^{\tau} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}}\,du\le\int_0^{\infty} ue^{-d(u+\tau)^{\alpha}}\,du.\end{aligned}\tag{7}$$

В інтегралі у правій частині нерівності (7) *зробимо заміну* $u+\tau=z$:

$$\int_0^\infty (z-\tau)e^{-dz^\alpha}dz=\int_0^\infty ze^{-dz^\alpha}dz-\int_0^\infty \tau e^{-dz^\alpha}dz\le\int_0^\infty ze^{-dz^\alpha}dz \qquad (8)$$

Розглянемо праву частину (8). *У* $\int_0^\infty ze^{-dz^\alpha}dz$ *зробимо заміну* $dz^\alpha=t$ *звідки отримуємо:*

$$\int_0^\infty (z-\tau)e^{-dz^\alpha}dz\le\frac{1}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Розглянемо другий доданок (6):

$$\int_\tau^T e^{-d(u+\tau)^\alpha}e^{-d(u-\tau)^\alpha}du=\int_\tau^T ue^{-d(u+\tau)^\alpha\left(1+\left(\frac{u-\tau}{u+\tau}\right)^\alpha\right)}du\le\int_\tau^T ue^{-d(u+\tau)^\alpha}du$$
$$\le\int_0^\infty ue^{-d(u+\tau)^\alpha}du\le\frac{1}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Звідки отримуємо для I_4 *більш точну оцінку:*

$$I_4\le\frac{2T}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Звідси отримуємо оцінку для I:

$$I\le\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{4T}{\alpha d^{\frac{2}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)+\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$$
$$=\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi}+\frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right).$$

Таким чином, ми отримуємо

$$C_p\le\left(\frac{2B^2}{T^2}\right)^{\frac{p}{2}}\int_0^A\left(\frac{2T}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi}+\frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)^{\frac{p}{2}}d\tau=$$
$$=\left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}}\frac{T^{\frac{p}{2}}}{T^p}\cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi}+\frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)=$$
$$=\frac{\left(2B^2\right)^{\frac{p}{2}}}{T^p}\cdot A\left(\frac{2}{\alpha d^{\frac{1}{\alpha}}}\left(3\sqrt{\pi}+\frac{2}{d^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right).$$

З того, що C_p обмежене деяким дійсним виразом, маємо, що $g(\varepsilon)$ також обмежене, з чого робимо висновок, що гіпотеза $\mathbb{H}$ приймається.

Зауваження 2. *Випадок, коли* $\alpha=1$ *розглянутий у статті [14] у прикладі 1 та* $\alpha=2$ *у прикладі 2 цієї же роботи. В даній статті розглядаються всі інші випадки* $0<\alpha<2$.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Відомо, що кореляційна функція є дуже важливою характеристикою випадкового процесу. Тому задачі оцінювання кореляційної функції, знаходження вигляду цієї функції для випадкового процесу, побудова критеріїв для її ідентинтифікації є дуже актуальними. Для того, щоб з'ясувати це, у статті було побудувано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкою кореляційною функцією $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\{-d|\tau|^\alpha\}$, де $0 < \alpha \leq 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$. В наступних роботах автор планує розглянути гіпотезу про вигляд кореляційної функції центрованого вимірного комплексного гауссового стаціонарного процесу.

Автор висловлює глибоку подяку своєму керівнику і наставнику Юрію Васильовичу Козаченко. З пам'яттю у серці...

Список використаної літератури

1. Козаченко Ю. В., Петранова М. Ю. Дійсні стаціонарні гаусові процеси зі стійкими кореляційними функціями. *Наук. вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2017. Вип. 31, №. 2. С. 90–100.
2. Kozachenko Yu. V., Kamenshchikova O. E. Approximation of $SSub_\psi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p(T)$. *Theory of Probability and Mathematical Statistic*. 2009. Vol. 79. P. 83–88.
3. Kozachenko Yu. V., Rozora I. V. Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Oper. And Stoch. Equations*. 2003. Vol. 11, No. 3. P. 275–296.
4. Kozachenko Yu. V., Pogorilyak O. O., Rozora I. V., Tegza A. M. Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, 2016. 346 p.
5. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Точність і надійність моделювання випадових процесів та полів у рівномірній метриці. Київ: «ТОВ СІК ГРУП УКРАЇНА», 2016. 216 с.
6. Kozachenko Yu. V., Petranova M. Yu. Proper complex random processes. *Stat., Optim. and Inf. Comput.* 2017. Vol. 5, No. 2. P. 137–146.
7. Petranova M. Yu. Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$. *Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2016. Vol. 3, No. 1. P. 44–58.
8. Lukacs E. Characteristic Functions. New York: Hafner Pub. Co., 1970. 350 p.
9. Kozachenko Yu. V., Fedoryanych T. V. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a Gaussian stationary process. *Theor. Probability and Math. Statist.* 2004. Vol. 69. P. 85–94.
10. Kozachenko Y. V., Stus O. V. Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions. *Mathematical Communications*. 1998. Vol. 3, No. 1. P. 83–94.
11. Buldygin V. V. On the properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with square integrable spectral density. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol. 47. P. 1006–1021.
12. Polishchuk V. Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 9. P. 66–76. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60
13. Kelemen M., Polishchuk V., Gavurová B., Szabo S., Rozenberg R., Gera M., Kozuba J., Hospodka J., Andoga R., Divoková A., Blišťan P. Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2019. Vol. 16, 3585. DOI:https://doi.org/10.3390/ijerph16193585
14. Kozachenko Yu. V., Troshki V. B. A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic proses. *Modern Stochastics Theory and Application*. 2014. Vol. 1, No. 2. P. 139–149.

Petranova M. Yu. Testing hypotheses about the type of the correlation function.

This article is devoted to finding a criterion for testing the hypothesis about the form of the correlation function of a centered measurable real Gaussian stationary process with a stable correlation function. The issue of simulation random processes is relevant in today's world, especially Gaussian random processes. So when we used simulation random processes, usually try to simulate processes that are the sum of a large number of random factors, for example, according to the central limit theorem, Gaussian or similar random processes. It should also be noted that it never succeeds get a model that is really a Gaussian process. For such processes there is an actual study of the conditions of convergence of models and estimates of simulation accuracy. Estimates of moments are considered as an estimation of accuracy of simulation differences between process and model, correlation function of model and research weak convergence of the model.

This paper continues the topic of modeling, which was considered by the author in co-authorship with Kozachenko Yu. V. and more precisely – testing the hypothesis that what the covariance function of the simulated process will look like.

The article deals with the centered measurable real Gaussian stationary process stable correlation function, the lemma on the acceptance of the hypothesis $\mathbb{H}$ for a general process, theorem on the approximation of the covariance function by a correlogram. Also, a lemma on the acceptance of the hypothesis $\mathbb{H}$ is formed and proved for a process in which the covariance function is stable and has the form $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, where $0 < \alpha \le 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

The main result is to test the hypothesis that the covariance function of a centered measurable real Gaussian stationary process with a stable correlation function has the form $\rho_\alpha(\tau) = B^2 \exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}$, where $0 < \alpha \le 2$, $d > 0$, $B \in \mathbb{R}$.

Keywords: hypothesis testing, stable correlation function, covariance function, measurable real Gaussian process, correlogram.

References

1. Kozachenko, Yu. V., & Petranova, M. Yu. (2017). Diisni statsionarni hausovi protsesy zi stiikymy koreliatsiinymy funktsiiamy [Real Stationary Gaussian processes with stable correlation functions]. *Scientic Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of mathematics and informatics, 31, 2*, 90–100. [in Ukrainian]
2. Kozachenko, Yu. V., & Kamenshchikova, O. E. (2009). Approximation of $SSub_\psi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p(T)$. *Theory of Probability and Mathematical Statistic, 79*, 83–88.
3. Kozachenko, Yu. V., & Rozora, I. V. (2003). Simulation of Gaussian stochastic processes. *Random Oper. And Stoch. Equations,11*, 275–296.
4. Kozachenko, Yu. V., Pogorilyak, O. O., Rozora, I. V., & Tegza, A. M. (2016). Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. *London: ISTE Press Ltd.*
5. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (2016). Tochnist i nadiinist modeliuvannia vypadovykh protsesiv ta poliv u rivnomirnii metrytsi [Accuracy and reliability of modeling of random processes and fields in a uniform metric]. *Kyiv: «TOV SIK HRUP UKRAINA»*. [in Ukrainian]
6. Kozachenko, Yu. V., & Petranova, M. Yu. (2017). Proper complex random processes. *Stat., Optim. and Inf. Comput., 5, 2*, 137–146.
7. Petranova, M. Yu. (2016). Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$. *Journal of Applied Mathematics and Statistics, 3, 1*, 44–58.
8. Lukacs, E. Characteristic Functions. *New York: Hafner Pub. Co.*
9. Kozachenko, Yu. V., & Fedoryanych, T. V. (2004). A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a Gaussian stationary process. *Theor. Probability and Math. Statist., 69*, 85–94.
10. Kozachenko, Y. V., & Stus, O. V. (1998). Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions. *Mathematical Communications, 3,1*, 83–94.
11. Buldygin, V. V. (1995). On the properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with square integrable spectral density. *Ukrainian Mathematical Journal, 47*, 1006–1021.
12. Polishchuk, V. (2019). Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences, 51, 9*, 66–76. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60
13. Kelemen, M., Polishchuk, V., Gavurová, B., Szabo, S., Rozenberg, R., Gera, M., Kozuba, J., Hospodka, J., Andoga, R., Divoková, A., & Bliš'an, P. (2019). Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health, 16, 3585*. DOI:https://doi.org/10.3390/ijerph16193585
14. Kozachenko, Yu. V., & Troshki, V. B. (2014). A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic proses. *Modern Stochastics Theory and Application, 1, 2*, 139–149

Одержано 02.10.2020

УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).122-129

R. Yamnenko[1], N. Yurchenko[2]

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv,
As. Professor at the Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics,
Ph. D. (Phys.- Math.)
yamnenko@univ.kiev.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9612-7959

[2] Uzhhorod National University,
Department of Algebra, Associate Professor,
Ph. D. (Phys.- Math.)
nataliia.yurchenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2825-8180

ON AN ESTIMATE OF PROBABILITY OF EXCEEDING A LINE BY WEIGHTED AGGREGATE OF SUB-GAUSSIAN RANDOM PROCESS

Sub-gaussian random variables are majorized in distribution by Gaussian random variables, and thus are their natural generalization. This paper considers the problem of estimating the probability of exceeding a level given by a line ct, $c > 0$, by trajectories of the sum of sub-Gaussian random processes X_i, $i = \overline{1,n}$, defined on a compact set B with certain weighting functions $w_i(t)$. Namely, upper estimates of the following type $\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\left(t\right)X_i(t)-ct\right) > x\right\}$, $\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\left(t\right)X_i(t)-ct\right) < -x\right\}$ or $\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left|\sum_{i=1}^{n} w_i\left(t\right)X_i(t)-ct\right| > x\right\}$ are derived. This problem can be applied directly in the queuing theory in estimating the finite size $x > 0$ buffer overflow probability with linear service intensity, as well as in insurance mathematics in estimating the bankruptcy probability for the corresponding risk process. Using the method of metric entropy, the previous results obtained in [1] for a more general class of Φ-sub-Gaussian random processes are generalized and improved. As an example, the derived estimate is applied to the average sum of sub-Gaussian Wiener random processes, i.e. random processes that have the same covariance function as the (Gaussian) Wiener process, but with sub-Gaussian trajectories.

Ключові слова: sub-Gaussian random process, supremum distribution, method of metric entropy, Wiener process.

1. Introduction. In this paper a weighted aggregate of independent sub-Gaussian random processes defined on a compact set are considered and the probability that such its trajectories exceeds some linear function is investigated. The problem of such type was previously studied for random processes from various Orlicz spaces (including sub-Gaussian) in works [1-3].

Definition 1. *([4]) A random variable ξ is called sub-Gaussian if there exists a number $a \in [0,\infty)$ such that the inequality*

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\} \tag{1}$$

holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$. The class of all sub-Gaussian random variables defined on a common probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ is denoted by $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

Recall (see [4, Theorem 1.2]) that the space $\mathrm{Sub}(\Omega)$ is a Banach space with respect to the norm

$$\tau\left(\xi\right) = \inf\left\{a \ge 0 : \ \mathbf{E}\exp\left\{\lambda\xi\right\} \le \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}, \ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \tag{2}$$

and (see [4, Lemma 1.1])

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2\tau(\xi)^2}{2}\right\}. \tag{3}$$

Other properties of sub-Gaussian random variables and processes can be found in the classical monograph of Buldygin V. and Kozachenko Yu. [4] and in the book [2], properties of more general class of φ-sub-Gaussian random variables and processes are reviewed in the book of Vasylyk O., Kozachenko Yu. and Yamnenko R. [5]. Here the results obtained in [1] are improved for the specific case of linear function.

2. Main result. Let (T,ρ) be a pseudometric (metric) separable space with psedometric (metric) ρ. Recall that $N_{(T,\rho)}(\epsilon) = N_T(\epsilon)$ is the metric massiveness of the space (T,ρ), i.e. the number of elements in the minimal ϵ-covering of the set T.

Consider a set of independent separable sub-Gaussian random processes $X_i = \{X_i(t), t \in T\}, i = \overline{1,n}$ satisfying the following assumption.

Assumption 1. *There exist such continuous monotone increasing functions $\sigma_i = \{\sigma_i(h), h > 0\}$ such that $\sigma_i(h) \to 0$ as $h \to 0$ and the following inequality holds true*

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h} \tau\left(X_i(t) - X_i(s)\right) \leq \sigma_i(h), \quad i = \overline{1,n}.$$

Consider the problem of exceeding by mixture of processes X_i a line on a compact set $B \subset T$.

Put $\tau_i(t) = \tau(X_i(t))$, $\sigma(h) = \max_{i=\overline{1,n}} \sigma_i(h)$ and let $\beta > 0$ be such a number that $\beta \leq \sigma(\inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t,s))$.

Theorem 1. *Let $X_i = \{X_i(t), t\in T\}$ be separable sub-Gaussian random processes satisfying Assumption 1 with functions $\sigma_i(h) \leq d_i\sigma(h)$, $0 < d_i \leq 1, i = 1,\dots,n$. Let $r = \{r(u) : u \geq 1\}$ be such a continuous function that $r(u) > 0$ as $u > 1$, $s(t) = r(e^t)$ is a convex function for $t \geq 0$ and the following entropy integral is finite*

$$\int_0^\beta r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) \mathrm{d}u < \infty.$$

Then for all $p \in (0;1)$, $c > 0$ and $x > \max\left\{0, \sigma^{(-1)}(\beta p) - \min_{u\in B} u\right\}$ the following inequalities take places for the random mixture

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\ X_i(t),$$

where $w_i(t) = \{w_i(t), t\in T\}$ are continuous nonnegative weighting functions

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(X(t) - ct) > x\right\} \leq Z(p,\beta,x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}(X(t) - ct) < -x\right\} \leq Z(p,\beta,x),$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|X(t) - ct| > x\right\} \leq 2Z(p,\beta,x),$$

where

$$Z(p,\beta,x)=\inf_{p\in(0,1)}\quad r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\inf_{u\in B}\frac{c^2\left(x+u-\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)^2(1-p)^2}{2\left((1-p)\sum\limits_{i=1}^n w_i^2(u)\,\tau_i^2(u)+\beta^2 p\sum\limits_{i=1}^n d_i^2 \max_{v\in B} w_i^2(v)\right)}\right\}.$$

Proof. Let V_{ϵ_k} denote a set of the centers of closed balls with radii $\epsilon_k=\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)$, $p\in(0,1)\,,k=0,1,2,\ldots$, which forms minimal covering of the compact space (B,ρ). Number of elements in the set V_{ϵ_k} is equal to $N_B(\epsilon_k)$. It follows from [4, Lemma 1.3] and Assumption 1 that for any $\epsilon>0$

$$\mathbf{P}\left\{|X_i(t)-X_i(s)|>\epsilon\right\}$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2\tau^2\left(X_i(t)-X_i(s)\right)}\right\}\leq 2\exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma_i\left(\rho(t,s)\right)}\right\}.$$

Therefore all processes $X_i(t)$ are continuous in probability and the mixture $X==\sum_{i=1}^n w_i(t)X_i(t)$ is continuous in probability as well. Hence the set $V=\bigcup_{k=1}^\infty V_{\epsilon_k}$ is a set of separability of the process X and with probability one

$$\sup_{t\in\ B}(X(t)-ct)\ =\sup_{t\in\ V}(X(t)-ct) \tag{4}$$

Consider a mapping $\alpha_m=\{\alpha_m(t),m=0,1\ldots\}$ of the set V into the subset V_{ϵ_m}, where $\alpha_m(t)\in \mathrm{V}_{\epsilon_\mathrm{m}}$ is such a point that $\rho(t,\alpha_m(t))<\epsilon_m$. If $t\in V_{\epsilon_m}$ then $\alpha_m(t)=t$. If there exist several such points from the set V_{ϵ_m} that $\rho(t,\alpha_m(t))<\epsilon_m$ then we choose one of them and denote it $\alpha_m(t)$.

It follows from [4, Lemma 1.2], Chebyshev's inequality and Assumption 1 that

$$\mathbf{P}\left\{|X_i(t)-X_i(\alpha_m(t))|>p^{\frac{m}{2}}\right\}\leq\frac{\mathbf{E}(X_i(t)-X_i(\alpha_m(t)))^2}{p^m}$$

$$\leq\frac{\tau^2\left(X_i(t)-X_i(\alpha_m(t))\right)}{p^m}\leq\frac{\sigma^2(\epsilon_m)}{p^m}=\beta^2p^m.$$

This inequality implies that

$$\sum_{n=1}^\infty\mathbf{P}\left\{|X_i(t)-X_i(\alpha_m(t))|>p^{\frac{m}{2}}\right\}<\infty.$$

It follows from the Borel-Kantelli lemma that $X_i(t)-X_i(\alpha_m(t))\to 0$ as $m\to\infty$ with probability one. Since the set V is countable, then $[X(t)-ct]-[X(\alpha_m(t))--c\alpha_m(t)]\to\ 0$ as $n\to\infty$ for all t simultaneously.

Let t be an arbitrary point from the set V. Denote by $t_m=\alpha_m(t)$, $t_{m-1}=\alpha_{m-1}(t_m)\,,\ldots,t_1=\alpha_1(t_2)$ for any $m\geq 1$. Since for all $m\geq 2$

$$X(t)-ct=X(t_1)-ct_1+c(t_1-t)+\sum_{k=2}^m\left(X(t_k)-X(t_{k-1})\right)$$

$$+X\left(t\right)-X\left(\alpha_m\left(t\right)\right)$$

we have

$$\sup_{t\in V}\left(X\left(t\right)-ct\right)\ \leq\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\ +c\epsilon_1+\sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))$$

$$+X(t)-X(\alpha_m(t)). \tag{5}$$

It follows from (4) and (5) that with probability one

$$\sup_{t\in T}\left(X\left(t\right)-ct\right)\ \leq c\epsilon_1+$$

$$+\lim_{m\to\infty}\inf\left(\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\ +\sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right))\right). \tag{6}$$

Let $\{q_k, k=1,2,\dots\}$ be such a sequence that $q_k>1$ and $\sum_{k=1}^{\infty}q_k^{-1}\leq 1$. It follows from the Hölder's inequality, the Fatou's lemma and (6) that for all $\lambda>0$

$$\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}\left(X\left(t\right)-ct\right)\right\}$$

$$\leq\mathbf{E}\lim_{m\to\infty}\inf\exp\left\{\lambda\left(c\epsilon_1+\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\ +\sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))\right)\right\}$$

$$\leq\lim_{m\to\infty}\inf\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\left(c\epsilon_1+\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\ +\sum_{k=2}^{m}\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right))\right)\right\}$$

$$\leq\lim_{m\to\infty}\inf\left(\mathrm{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{m}\left(\mathbf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right))\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}\exp\left\{\lambda c\epsilon_1\right\}$$

$$\leq\left(\mathbf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\times$$

$$\times\prod_{k=2}^{\infty}\left(\mathbf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right))\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}\exp\{\lambda c\epsilon_1\}\ . \tag{7}$$

Consider each of the factors in the right-hand side of inequality (6) separately. It follows from inequality (3) that for all $1\leq i\leq n$

$$\mathbf{E}\exp\left\{q_1\lambda w_i(u)X_i\left(u\right)\right\}\ \leq\exp\left\{\frac{q_1^2\lambda^2w_i^2(u)\tau_i^2\left(u\right)}{2}\right\}$$

and

$$\mathbf{E}\exp\left\{q_k\lambda\left(w_i(u)X_i\left(u\right)-w_i\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right)X_i\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right)\right)\right\}\leq\exp\left\{\frac{q_k^2\lambda^2w_i^2(u)\sigma_i^2\left(\epsilon_{k-1}\right)}{2}\right\}.$$

Therefore,

$$\left(\mathbf{E}\exp\left\{q_1\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_1}}\left(X\left(u\right)-cu\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{u\in V_{\epsilon_1}}\mathbf{E}\exp\left\{q_1\lambda\sum_{i=1}^{n}w_i\left(u\right)X_i\left(u\right)\right\}\exp\left\{-q_1\lambda cu\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{u\in V_{\epsilon_1}}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}\exp\left\{q_1\lambda w_i\left(u\right)X_i\left(u\right)\right\}\exp\left\{-q_1\lambda cu\right\}\right)^{\frac{1}{q_1}}\leq$$

$$\leq\left(N_B\left(\epsilon_1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}\exp\left\{\sup_{u\in B}\left(\frac{q_1\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2(u)\tau_i^2\left(u\right)\ -\lambda cu\right)\right\}$$

and

$$\left(\mathbf{E}\exp\left\{q_k\lambda\max_{u\in V_{\epsilon_k}}(X(u)-X(\alpha_{k-1}(u))\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}\leq$$

$$\leq\left(N_B\left(\epsilon_k\right)\max_{u\in V_{\epsilon_k}}\mathbf{E}\exp\left\{q_k\lambda\sum_{i=1}^{n}w_i\left(u\right)\left(X_i(u)-X_i\left(\alpha_{k-1}\left(u\right)\right)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}\leq$$

$$\leq\left(N_B\left(\epsilon_k\right)\right)^{\frac{1}{q_k}}\left(\max_{u\in V_{\epsilon_k}}\exp\left\{\frac{q_k^2\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^2\left(u\right)\sigma_i^2\left(\epsilon_{k-1}\right)\right\}\right)^{\frac{1}{q_k}}$$

$$\leq\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{\frac{1}{q_k}}\exp\left\{\frac{q_k\lambda^2\beta^2p^{2(k-1)}}{2}\sum_{i=1}^{n}d_i^2\max_{u\in B}w_i^2\left(u\right)\right\}.$$

From inequality (7) after substitution of $q_k=p^{1-k}/(1-p)$, $k\geq 1$, we have

$$\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}\left(X\left(t\right)-ct\right)\right\}\leq$$

$$\leq\prod_{k=1}^{\infty}\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{(1-p)p^{k-1}}\exp\left\{\sup_{\mathrm{u}\in\mathrm{B}}\left(\frac{\lambda^2}{2\left(1-\mathrm{p}\right)}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{w}_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)\tau_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)-\lambda\mathrm{cu}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^2\beta^2p^{k-1}}{2\left(1-p\right)}\sum_{i=1}^{n}d_i^2\max_{u\in B}w_i^2\left(u\right)\ +\lambda c\sigma^{(-1)}\left(\beta p\right)\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{(1-p)p^{k-1}}\exp\left\{\sup_{\mathrm{u}\in\mathrm{B}}\left(\frac{\lambda^2}{2\left(1-\mathrm{p}\right)}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{w}_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)\tau_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)-\lambda\mathrm{cu}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda^2\beta^2p}{2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n}d_i^2\max_{v\in B}w_i^2\left(v\right)\ +\lambda c\sigma^{(-1)}\left(\beta p\right)\right\}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{(1-p)p^{k-1}}\exp\left\{\sup_{\mathrm{u}\in\mathrm{B}}\left(\frac{\lambda^2}{2\left(1-\mathrm{p}\right)}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{w}_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)\tau_{\mathrm{i}}^2\left(\mathrm{u}\right)-\lambda\mathrm{cu}\right)+\right.$$

$$+\frac{\lambda^2\beta^2 p}{2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \max_{v\in B} w_i^2(v) \ + \lambda c\sigma^{(-1)}(\beta p)\Bigg\} \tag{8}$$

From (8) and Chebyshev's inequality

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(X(t)-f(t))>x\right\}$$

$$\leq \inf_{\Lambda>0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{(1-p)p^{k-1}}\exp\left\{\sup_{\mathrm{u}\in\mathrm{B}}\left(\frac{\lambda^2}{2(1-\mathrm{p})}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{w}_{\mathrm{i}}^2(\mathrm{u})\,\tau_{\mathrm{i}}^2(\mathrm{u})-\lambda\mathrm{cu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda^2\beta^2 p}{2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\max_{v\in B} w_i^2(v) \ +\lambda c\sigma^{(-1)}(\beta p)-\lambda x\right)\right\}. \tag{9}$$

Polynomial $\lambda^2 A-\lambda B$ attaints its minimum at the point $\lambda=\frac{B}{2A}$, therefore

$$\inf_{\Lambda>0}\left[\lambda^2\left(\frac{1}{2(1-p)}\sum_{i=1}^{n} w_i^2(u)\,\tau_i^2(u)+\frac{\beta^2 p}{2(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} d_i^2\max_{v\in B} w_i^2(v)\right)-\lambda c\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(u+x-\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)\right]=-\frac{c^2\left(x+u-\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)^2(1-p)^2}{2\left((1-p)\sum_{i=1}^{n} w_i^2(u)\,\tau_i^2(u)+\beta^2 p\sum_{i=1}^{n} d_i^2\max_{v\in B} w_i^2(v)\right)}$$

if $x+u>\sigma^{(-1)}(\beta p)$ and 0 otherwise due to the restriction $\lambda>0$.

Since

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)^{(1-p)p^{k-1}}=$$

$$=r^{(-1)}\left(r\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)\,p^{k-1}\ln N_B\ \left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\ \right\}\right)\right)\leq$$

$$\leq r^{(-1)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)\,p^{k-1} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^k\right)\right)\right)\right)$$

$$\leq r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u\right), \tag{10}$$

the assertion of theorem follows from (8) – (10).

Example 1. Consider a mixture of independent sub-Gaussian Wiener processes $W_i=\{W_i(t)\,,\ t\in[a,b]\}$ with constant weighting functions $w_i(t)=\frac{1}{n}$. Recall that a sub-Gaussian Wiener process $W=\{W(t)\,,\ t\in T\}$ is a sub-Gaussian random process with covariance function $R(t,s)=\min(t,s)\ ,\ t,s\in T$.

Let's assume that for $0<d_1\leq\cdots\leq d_n=1$ we have $\tau_i(u)=d_i u^{\frac{1}{2}}$ and $\sigma_i(u)=d_i u^{\frac{1}{2}}$. It is easy to see that $\sigma^{(-1)}(u)=u^2$ and

$$\inf_{u\in B}\frac{c^2\left(x+u-\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)^2(1-p)^2}{2\left((1-p)\sum_{i=1}^{n} w_i^2(u)\,\tau_i^2(u)+\beta^2 p\sum_{i=1}^{n} d_i^2\max_{v\in B} w_i^2(v)\ \right)}\ =$$

$$=\inf_{u\in B}\frac{n^2c^2(1-p)\left(x+u-(\beta p)^2\right)^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2\left(u+\frac{\beta^2 p}{1-p}\right)}=\frac{2n^2c^2(1-p)}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}\left(x-(\beta p)^2-\frac{\beta^2 p}{1-p}\right).$$

Put $r(u) = u^{\alpha}, \alpha < \frac{1}{2}$. Then (see, e.g. [1])

$$\exp\left\{\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\mathrm{d}u\right\} \leq \frac{2\left((b-a)\right)}{(\beta p)^2}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \to$$

$$\to 2(b-a)\left(\frac{e}{\beta p}\right)^2 \text{ as } \alpha \to 0.$$

So, it follows from the Theorem 1 that

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left(X(t) - f(t)\right) > x\right\} \leq$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{e}{\beta p}\right)^2 \exp\left\{-\frac{2n^2c^2(1-p)}{\sum_{i=1}^n d_i^2}\left(x - \beta^2 p\left(p + \frac{1}{1-p}\right)\right)\right\}.$$

It is easy to see that the minimum of the right side of the above inequality is attained when $\beta^2 = \frac{1}{p\left(p+\frac{1}{1-p}\right)}$. Therefore, the following estimate holds true for $x > 1$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i(t) - ct\right) > x\right\} \leq$$

$$\leq 2(b-a)e^2\left(1 + \frac{1}{p(1-p)}\right)\exp\left\{-\frac{2n^2c^2(1-p)}{\sum_{i=1}^n d_i^2}(x-1)\right\}.$$

References

1. Kozachenko, Yu., Vasylyk, O., & Yamnenko, R. (2005). Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Operators and Stochastic Equations, 13, 2*, 111–128.
2. Vasylyk, O., Kozachenko, Yu., & Yamnenko, R. (2008). φ-subgaussovi vypadkovi procesy: monographiya [φ- subgaussian stochastic processes: monograph]. *Kyiv: VPC "Kyivskyi universytet"*. [in Unkrainian]
3. Yamnenko, R., Kozachenko, Yu., & Bushmitch, D. (2014). Generalized sub-Gaussian fractional Brownian motion queueing model. *Queueing Systems, 77, 1*, 75–96.
4. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). Metric characterization of random variables and random processes. *AMS: Providence, Rhode Island.*
5. Kozachenko, Yu. V., Pogoriliak, O. O., Rozora, I.V., & Tegza, A. M. (2016). Simulation of Stochastic processes with given accuracy and reliability. *London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd.*

Ямненко Р.Є., Юрченко Н.В. Про оцінку ймовірності перевищення лінії зваженою сумою субгауссових випадкових процесів

Субгауссові випадкові величини мажоруються за розподілом центрованими гауссовими випадковими величинами, а тому є їхнім природним узагальненням. У цій роботі розглядається задача оцінювання ймовірності перевищенням рівня, що заданий деякою прямою ct, $c > 0$, траєкторіями зваженої суми субгауссових випадкових процесів X_i, $i = \overline{1,n}$, визначених на компактній множині B, із певними ваговими функціями $w_i(t)$. А саме, будуються оцінки зверху імовірностей вигляду $\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left(\sum_{i=1}^n w_i(t)X_i(t) - ct\right) > x\right\}$, $\mathbf{P}\left\{\inf_{t\in B}\left(\sum_{i=1}^n w_i(t)X_i(t) - ct\right) < -x\right\}$ чи $\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}\left|\sum_{i=1}^n w_i(t)X_i(t) - ct\right| > x\right\}$. Така задача має безпосереднє застосування в теорії черг при оцінюванні ймовірності переповнення буфера $x > 0$ скінченного розміру у системі з одиничним сервером і лінійною інтенсивністю обслуговування, а також у страховій математиці при оцінюванні ймовірності банкрутства відповідного процесу ризику. Використовуючи метод метричної ентропії, узагальнено і покращено попередні результати, отримані автором у роботі [4] для більш загального класу Ф-субгауссових випадкових процесів. Як приклад, отриману оцінку застосовано до усередненої суми субгауссових вінерівських випадкових процесів – випадкових процесів, що мають таку саму коваріаційну функцію, як і (гауссівський) вінерівський процес, але із субгауссовими траєкторіями.

Ключові слова: субгауссовий випадковий процес, розподіл супремума, метод метричної ентропії, вінерівський процес.

Список використаної літератури

1. Kozachenko Yu., Vasylyk O., Yamnenko R. Upper estimate of overrunning by $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ random process the level specified by continuous function. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2005. Vol. 13, Iss. 2. P. 111–128.
2. Василик О., Козаченко Ю., Ямненко Р. φ-субгауссові випадкові процеси: монографія. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2008. 231 с.
3. Yamnenko R., Kozachenko Yu., Bushmitch D. Generalized sub-Gaussian fractional Brownian motion queueing model. *Queueing Systems.* 2014. Vol. 77, Iss. 1. P. 75–96.
4. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. AMS: Providence, Rhode Island, 2000. 257 p.
5. Kozachenko Yu. V., Pogorilyak O. O., Rozora I. V., Tegza. A.M. Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. London: ISTE Press Ltd, Elsevier Ltd., 2016. 346 p.

Одержано 25.09.2020

УДК 517.986+517.947
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).130-141

М.І. Яременко

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” , Київ,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент, кандидат фізико-математичних наук
Math.kiev@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9209-6059

КВАЗІЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ДИВЕРГЕНТНІ ФОРМІ З ФОРМ-ОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В роботі досліджуються квазілінійні системи параболічних диференціальних рівнянь в дивергентні формі другого порядку з сингулярними коефіцієнтами за умов форм-обмеженості і лінійного росту нелінійного збурення. Встановлюється існування розв'язку першої крайової задачі для квазілінійної системи параболічних диференціальних рівнянь за умов форм-обмеженості і лінійного росту в просторі Соболева. Розглядаються умови за яких нелінійне збурення параболічного диференціального оператору обмежене лінійною функцією з коефіцієнтами, які можуть бути сингулярними за просторовою зміною, в лінійному випадку ці коефіцієнти належать функціональним класам Като та Неша.

Ключові слова: квазілінійні системи, параболічні системи, простір Соболева, дивергентна форма, форм-обмеженість, сингулярні коефіцієнти, умови сингулярності.

1. Вступ. У всьому Евклідовому просторі R^l, $l \geq 3$ розглянемо квазілінійну систему параболічних диференціальних рівнянь в дивергентні формі

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} - \sum_{i,j=1,\dots,l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x,\vec{u})\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}\right) + \vec{b}(x,\vec{u},\nabla\vec{u}) = 0, \quad l > 2 \tag{1}$$

за умов строгої еліптичності, тобто, що виконується наступна нерівність

$$\nu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2 \leq \sum_{ij=1,\dots,l} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \mu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2 \quad \forall\xi \in R^l.$$

Подібні квазілінійні системи параболічних диференціальних рівнянь другого порядку вивчаються протягом довгого часу. Основні напрями досліджень – регулярність розв'язків та існування розв'язку крайових задач були визначені 19-ою і 20-ою проблемами Гільберта [7], на розв'язання, яких були направлені зусилля багатьох видатних математиків. Зокрема, дослідження С.Н. Бернштейна, Ж. Лере [9], Ж. Ліонса [8], М.І. Вішика, Шаудера [9], Ш. Брезіса [18], А. Пазі [18, 21], Г. Мінті [33, 34], Ф. Браудера [19, 20], Де Джорджі, Д. Неша [38], Ю. Мозера [36], О.А. Ладиженської [9, 10], Н. Н. Уральцевої [9], Ж. Серріна, Трудінгера, Ю. А. Дубинського, С.І. Похожаєва, І.В. Скрипника [12], Н.В. Крилова [1, 6]і інших. У витоків створення основ теорії нелінійних еволюційних рівнянь стояли такі видатні математики, як І. Хілле, Р. Філліпс, К. Іосіда [4], М.І. Вішик, Т.Като [28-30], Й.Комура [31, 32], І. Міядера [35], Ж.Л. Ліонс [8], С.Г. Крейн, М.О. Красносельський [6], П.Є. Соболєвський, В. Барбю [13] і інші.

В даній статті розробляється комбінація методу напівгруп та методу апріорних оцінок [46-50]. Для пояснення цього підходу розглянемо у всьому Евклідовому просторі R^l, $l \geq 3$ рівняння теплопровідності

$$\partial_t u = \Delta u.$$

Фундаментальний розв'язок цього рівняння задається формулою

$$p_0(t,x,y) = (4\pi t)^{-\frac{l}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right), \quad t > 0, \quad x,y \in R^l.$$

Використовуючи фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, можна дослідити більш складний варіант рівняння дифузії у наступному вигляді

$$Lu = \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,k=1,..,l} a_{kj}(t,x)\nabla_k\nabla_j - \sum_{k=1,...,l} b_k(t,x)\nabla_k\right] u(t,x) = 0, \tag{2}$$

за умов $\exists \nu, \mu : \ 0 < \nu \leq \mu < \infty$ такі, що

$$\nu \sum_{i=1}^{l} {\xi_i}^2 \leq \sum_{ij=1,...,l} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^{l} {\xi_i}^2,$$

і лінійне збурення $b_k(t,\cdot) : R^l \mapsto R^l$.

Будемо використовувати наступні позначення

$$\nabla \circ a \circ \nabla u = \sum_{i,j=1,...,l} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u,$$

$$b\nabla u = b \circ \nabla u = \sum_{i=1,...,l} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

Розглянемо фундаментальний розв'язок

$$p_0(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-l} \int \exp\left(ix\eta - \int_\tau^t a(\gamma,y)\,\eta^2 d\gamma\right) d\eta$$

параболічного рівняння

$$[\partial_t - a_{kj}(t,y)\nabla_k\nabla_j]u(t,x) = 0.$$

Можна показати, що

$$p_0(t,x;\tau,y) = (2\pi)^{-l} \int \exp\left(ix\eta - \int_\tau^t a(\gamma,y)\,\eta\cdot\eta d\gamma\right) d\eta =$$

$$= \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-l} \left(\det\left(\int_\tau^t a(\gamma,y)\,d\gamma\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\left(-\int_\tau^t a(\gamma,y)\,d\gamma\right)^{-1} \frac{(x,x)}{4}\right).$$

З умов еліптичності маємо

$$\nu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2(t-\tau)\leq\int\limits_{\tau}^{t}a\left(\gamma,y\right)d\gamma\eta\cdot\eta\leq\mu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2(t-\tau),$$

$$\nu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2(t-\tau)^{-1}\leq\left(\int\limits_{\tau}^{t}a\left(\gamma,y\right)d\gamma\right)^{-1}\eta\cdot\eta\leq\mu\sum_{i=1}^{l}{\xi_i}^2(t-\tau)^{-1},$$

тоді одержуємо оцінку фундаментального розв'язку параболічного рівняння за допомогою Гаусової щільності

$$\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-l}\nu^{\frac{-l}{2}}(t-\tau)^{\frac{-l}{2}}\exp\left(\frac{-\nu\left|x\right|^2}{4(t-\tau)}\right)\leq p_0(t,x;\tau,y)\leq$$

$$\leq\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-l}\mu^{\frac{l}{2}}(t-\tau)^{\frac{-l}{2}}\exp\left(\frac{-\left|x\right|^2}{4\mu(t-\tau)}\right).$$

Фундаментальний розв'язок рівняння (2) може бути представлений у вигляді

$$p_1(t,x;\tau,z)=p_0(t,x-z;\tau,z)+\int\limits_{\tau}^{t}d\eta\int p_0(t,x-y;\eta,y)F(\eta,y;\tau,z)dy$$

де $F(\eta,y;\tau,z)$ - щільність фундаментального розв'язку параболічного рівняння. Остання рівність може бути переписана у вигляді

$$p_1(t,x;\tau,z)=p_0(t,x-z;\tau,z)+\int\limits_{\tau}^{t}d\eta\int p_0(t,x-y;\eta,y)b\circ\nabla p_0(\eta,y;\tau,z)dy.$$

Оскільки клас $PK_\beta(A)$ складається з функцій $f\in L^1_{loc}(R^l,d^lx)$ для яких виконується нерівність

$$\left|\left\langle f\left|h\right|^2\right\rangle\right|\leq\beta\left\langle A^{\frac{1}{2}}h,A^{\frac{1}{2}}h\right\rangle+c\left(\beta\right)||h||_2^2$$

для всіх гладких функцій $h\in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$ тоді, якщо припустити, що $b\circ a^{-1}\circ b\in PK_\beta(A)$ для деяких $\beta<1$, одержимо нерівність

$$\left|\left\langle\nabla h\circ bh\right\rangle\right|\leq\sqrt{\beta}\left\langle Ah,h\right\rangle+c\left(\beta\right)\frac{1}{2\sqrt{\beta}}||h||_2^2,\quad h\in D\left(A^{\frac{1}{2}}\right)$$

і у відповідності з КЛМН-теорем, існує C_0- напівгрупа L^∞- стиску $e^{-t\Lambda_n}$, $\frac{2}{2-\sqrt{\beta}}\leq n\leq\infty$ така, що $\Lambda_2=A+b\circ\nabla$.

В частинному випадку, якщо A є оператором Лапласа отримуємо оцінку

$$\left|\left\langle\nabla h\circ bh\right\rangle\right|\leq\sqrt{\beta}\left\|\nabla h\right\|^2+\frac{c(\beta)}{2\beta}\left\|h\right\|^2\quad\forall h\in D(\Delta).$$

Теорема 1. *Нехай*

$$a(\cdot):\ \Omega \to R^l \otimes R^l, \quad a(\cdot) \in \left[L^1_{loc}(\Omega)\right]^{l\times l},$$

$$\nu \sum_{i=1}^{l} {\xi_i}^2 \le \sum_{ij=1,\dots,l} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j, \quad \textit{для деяких} \quad \nu > 0,$$

при $q > \frac{l}{2}, \quad l > 2$ *і збурення* $b \cdot \nabla$ *задовольняє умову*

$$b \circ a^{-1} \circ b \in L^q + L^\infty.$$

Тоді

1) *Оператор* $B_1 = B_1(b) = \nabla \circ b$ *визначений на області*

$$D(B_1) = \left\{u \in L^1;\ |\nabla u| \in L^1_{loc};\ b \circ \nabla u \in L^1\right\}$$

є A_1 *- обмеженим, тобто,* $D(B_1) \supset D(A_1)$ *і для всіх* $\alpha > 0$, $k(\alpha) < \infty$ *виконується нерівність*

$$\|B_1 h\|_1 \le \alpha \|A_1 h\|_1 + k(\alpha)\|h\|_1, \quad h \in D(A_1).$$

2) *Існують числа* $s > 0$ *і* $\beta(s) < 1$ *такі, що*

$$\int_0^s \left\|B_1 e^{-tA_1} h\right\|_1 dt \le \beta(s)\|h\|_1, \quad h \in D(A_1).$$

3) *Оператор* $A_1 + B_1$ *визначений на множині* $D(A_1)$ *породжує*C_0*- напівгрупу* T_1^t *сумісну з* $T^t = \exp(-t(A + b \circ \nabla))$ *і для якої є справедливою оцінка*

$$\left\|T_1^t\right\|_{1\to 1} \le \frac{1}{1-\beta(s)} \exp\left(-t\frac{\log(1-\beta(s))}{s}\right), \quad t > 0.$$

Контрприклад . Розглянемо лінійний оператор $-\Lambda_p \supset \nabla a \nabla - b\nabla$ з областю визначення $D(A_p)$, який породжує голоморфну напівгрупу в просторі $L^p\left(R^l, d^l x\right)$. Припустимо, що виконується умова $b \circ a^{-1} \circ b \in PK_\beta(A)$ і позначимо $b_n = \chi_n b$, де $b_n = \chi_n b$ індикаторна функція множини $\left\{x \in R^l:\quad (b \circ a^{-1} \circ b)(x) \le n\right\}$, і існує рівномірна на $t \in [0,\ 1]$ границя

$$strong\ L^p - \lim_{n\to\infty} \exp(-t\Lambda_p(b_n)) = \exp(-t\Lambda_p(b)).$$

Тоді,

якщо $\beta < 1, \quad p \in \left[\frac{2}{2-\sqrt{\beta}},\ \infty\right[$ то оператор $A + b\nabla$ породжує C_0- напівгрупу стиску, для якої виконуються нерівності

$$\|\exp(-t\Lambda_p)\|_{p\to p} \le \exp\left(\frac{c(\beta)t}{p-1}\right),$$

$$\|\exp(-t\Lambda_p)\|_{p\to s} \le C\exp\left(\frac{c(\beta)t}{\sqrt{\beta}}\right) t^{\frac{-(s-p)l}{2ps}},\ \frac{2}{2-\sqrt{\beta}} < p < s \le \infty;$$

 ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

якщо $1 \leq \beta < 4, \quad p < s \in \left[\frac{2}{2-\sqrt{\beta}}, \ \infty\right[$ то операторна сума $A + b\nabla$ визначена некоректно, але напівгрупа існує і може бути заданою у вигляді границі

$$\exp(-t\Lambda_p(b)) \equiv strong\ L^p - \lim_{n\to\infty} \exp(-t\Lambda_p(b_n)), \quad t \geq 0,$$

дана границя є означенням напівгрупи.

Основною метою даної роботи є встановлення умов щодо нелінійності за яких перша крайова задача для даної системи (1) буде мати принаймні один розв'язок.

2. Постановка задачі та оцінка енергетичного типу. Розглянемо параболічну систему

$$\frac{\partial}{\partial x} u^k - M(\vec{u}) = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \quad l > 2,$$

де позначено нелінійний диференціальний векторний оператор, вигляду:

$$M(\vec{u}) = \sum_{i,j=1,\ldots,l} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x,\vec{u})\frac{\partial}{\partial x_j}u^k\right) - b^k(x,\vec{u},\nabla\vec{u}) \quad k = 1, \ldots, N, \quad l > 2,$$

за умов: для довільного елементу $\vec{u} \in W_1^p(R^l, d^l x), l > 2$ існують такі постійні додатні величини $v(\vec{u}), \mu(\vec{u})$, що виконується наступні нерівності

1. $v(\vec{u})\sum\limits_{i=1}^{l}\xi_i^2 \leq \sum\limits_{ij=1,\ldots,l} a_{ij}(t,x,\vec{u})\xi_i\xi_j \leq \mu(\vec{u})\sum\limits_{i=1}^{l} \quad \forall\xi \in R^l;$

2. $|a_{ij}(t,x,\vec{u})\xi_i\xi_j - a_{ij}(t,x,\vec{v})\xi_i\xi_j| \leq \mu_6\sum\limits_{i=1}^{l}\xi_i^2 \quad \forall\xi \in R^l;$

3. $b(t,x,y,z)$ є вимірною векторною функцією своїх аргументів і $b \in L^l_{loc}R^l$;

4. вектор-функція $b(t,x,y,z)$ майже скрізь задовольняє нерівності:

$$|b(t,x,u,\nabla u)| \leq \mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x),$$

де $\mu_1^2 \in PK_\beta(A), \mu_2 \in PK_\beta(A)$, функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$;

5. приріст вектор-функції $b(x,y,z)$ майже скрізь задовольняє умову:

$$|b(t,x,u,\nabla u) - b(t,x,v,\nabla v)| \leq \mu_4(x)\left|\nabla(u-v)\right| + \mu_5(x)\left|u-v\right|,$$

де $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, $\mu_5 \in PK_\beta(A)$.

Побудуємо форму $h : \left(\mathop{\times}\limits_1^N W_1^p(R^l, d^l x)\right) \times \left(\mathop{\times}\limits_1^N W_1^q(R^l, d^l x)\right) \to R$:

$$h(u,v) \equiv \langle u(t,u), v(t,u)\rangle\big|_0^T - \int\limits_0^T \left\langle u(t,u), \tfrac{\partial}{\partial t}v(t,u)\right\rangle +$$
$$+\int\limits_0^T \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x_j}u, \tfrac{\partial}{\partial x_i}v\right\rangle dt + \int\limits_0^T \langle b, v\rangle\, dt,$$

яку будемо вважати визначеною для всіх елементів $u \in W_1^p(R^l, d^l x)$ та $v \in W_1^q(R^l, d^l x)$.

Якщо функцію v вибрати $v(t) = u(t)\,|u(t)|^{p-2}$, $\partial_t v = (p-1)\,|u|^{p-2}\,\partial_t u$, тоді отримаємо

$$h(u, u\,|u|^{p-2}) = \|u\|_p^p\Big|_0^T +$$

$$\int_0^T \left(-(p-1)\left\langle u, |u|^{p-2}\,\partial_t u\right\rangle + \left\langle \sum\nolimits_{i,j=1,\dots,l} a_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x_j}u, \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u\,|u|^{p-2}\right)\right\rangle\right) dt+$$

$$+\int_0^T \left\langle b, u\,|u|^{p-2}\right\rangle dt,$$

$$h(u, u\,|u|^{p-2}) = \tfrac{1}{p}\,\|u\|_p^p\Big|_0^T + 4\tfrac{p-1}{p^2}\int_0^T \left\langle \sum\nolimits_{i,j=1,\dots,l} a_{ij}\tfrac{\partial}{\partial x_j}\left(u\,|u|^{\frac{p-2}{2}}\right), \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u\,|u|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle dt+$$

$$+\int_0^T \left\langle b, u\,|u|^{p-2}\right\rangle dt,$$

Покладемо $\left\|u\,|u|^{p-2}\right\|^q = \left\langle |u|^{(p-1)q}\right\rangle = \|u\|^p = \|w\|^2$, тоді отримаємо оцінку енергетичного типу

$$|h(u, u|u|^{p-2})| \le \tfrac{1}{p}\,\|w\|^2\Big|_0^T + 4\tfrac{p-1}{p^2}\int\limits_0^T \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle\, d\tau+$$

$$+\left(\tfrac{1}{q\sigma^q} + \tfrac{c(\beta)}{p}\epsilon^2 + c(\beta) + \tfrac{1}{q\gamma^q}\right)\int\limits_0^T \|w\|^2\, dt+$$

$$+\left(\tfrac{1}{p}\left(\tfrac{1}{\epsilon^2} + \beta\epsilon^2\right) + \beta\right)\int\limits_0^T \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w\rangle\, dt + \tfrac{\gamma^p}{p}\int\limits_0^T \|\mu_3\|^p\, dt.$$

3. Перша крайова задача. Розглянемо першу крайову задачу для квазілінійної системи параболічних диференціальних рівнянь, у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t}u^k - \sum_{i,j=1,\dots,l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x,\vec{u})\frac{\partial}{\partial x_j}u^k\right) + b^k(x,\vec{u},\nabla\vec{u}) = 0, \quad k = 1,\dots,N, \quad l > 2 \tag{3}$$

з граничними умовами

$$\vec{u}\,(S(T)) = 0, \vec{u}\,(0,x) = \vec{\varphi}\,(x)\,.$$

Доведемо існування розв'язку цієї задачі у функціональному просторі V_1^2. Для цього припустимо, що $\{\vec{v}_k\,(x)\}\,,\quad k = 1,2,\dots,$ є ортогональним базисом в просторі $W_{1,0}^m(R^l,\ d^l x)$, $l > 2$, таким, що $\langle \vec{v}_k, \vec{v}_r\rangle = \delta_{kr}$ і $\max|\vec{v}_k, \nabla\vec{v}_k| \le c_k < \infty$. Наближений розв'язок $\vec{u}_n\,(t,x)$ будемо шукати у вигляді $\vec{u}_n = \sum\limits_{i=1,\dots,n} \vec{c}_i^{\,n}\,(t)\,\vec{v}_i\,(x)$, де коефіцієнти $\vec{c}_i^{\,n}\,(t)$ визначаються з системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\langle \partial_t\vec{u}_n, \vec{v}_r\rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}_n, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v}_r\right\rangle + \left\langle \vec{b}, \vec{v}_r\right\rangle = 0, \quad r = 1,\dots,n,$$

і початкових умов

$$\vec{c}_i^{\,n}\,(0) = \langle \vec{\varphi}, \vec{v}_i\rangle\,, \quad i = 1,\dots,n.$$

Оскільки другий і третій доданки є вимірними і обмеженими на всіх множинах $\{t \in [0,T]\,, \quad |\vec{c}_i^n| \leq const\}$ функціями від t, тому, якщо всі можливі розв'язки рівномірно обмежені на $[0,T]$ то на інтервалі $[0,T]$ існує розв'язок $\vec{c}_i^n\,(t)$, який задовольняє початкову умову $\vec{c}_i^n\,(0) = \langle \vec{\varphi}, \vec{v}_i \rangle\,,\ i = 1,\ldots,n$.

Функції $\langle \vec{u}_n, \vec{v}_i \rangle\,, \quad n,\ i = 1,\ldots,$ є неперервними по $t \in [0,T]$. Потрібно показати, що функції $\langle \vec{u}_n, \vec{v}_i \rangle\,, \quad n$ є рівностепенно неперервні по $t \in [0,T]$ для всіх фіксованих i.

Якщо всі можливі розв'язки рівномірно обмежені на $[0,T]$ і функції $\langle \vec{u}_n, \vec{v}_i \rangle$, $n \in \mathbb{N}$ є рівностепенно неперервні по $t \in [0,T]$ для всіх фіксованих i, тоді із послідовності розв'язків $\vec{u}_n\,(t,x)$ можна виділити підпослідовність $\vec{u}_{n(s)}$ таку, що підпослідовність $\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}_{n(s)}\,(t,x)$ збігається до $\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}\,(t,x)$ слабко в просторі Лебега. Позначимо цю підпослідовність $\vec{u}_{n(s)}$ через $\vec{u}_n$, тобто, будемо вважати, що початкова послідовність співпадає з підпослідовністю.

Встановимо апріорну оцінку розв'язків на $[0,T]$, для цього помножимо

$$\int_0^T \langle \partial_t \vec{u}_n, \vec{v}_r \rangle\,dt + \int_0^T \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}_n, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{v}_r \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \vec{b}, \vec{v}_r \right\rangle dt = 0,$$

де $r = 1,\ldots,n$, на $\vec{c}_r^n$ і просумуємо по r від 1 до n, одержимо

$$\frac{1}{2}\,\|\vec{u}_n\|_2^2 + \int_0^T \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}_n, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{u}_{nr} \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \vec{b}, \vec{u}_n \right\rangle dt = 0, \quad r = 1,\ldots,n$$

оцінюємо

$$\tfrac{1}{2}\,\|\vec{u}_n\|_2^2\Big|_0^T + \nu\int\limits_0^T \|\nabla\vec{u}_n\|_2^2\,dt \leq \left(\tfrac{1}{2\sigma^2} + \tfrac{c(\beta)}{2}\varepsilon^2 + c\,(\beta) + \tfrac{1}{2\gamma^2}\right)\int\limits_0^T \|\vec{u}_n\|_2^2\,dt +$$

$$+\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{\varepsilon^2} + \beta\varepsilon^2\right) + \beta\right)\int\limits_0^T \|\nabla\vec{u}_n\|_2^2\,dt + \tfrac{\gamma^2}{2}\int\limits_0^T \|\mu_3\|^2\,dt.$$

З останньої нерівності випливає апріорна оцінка послідовності розв'язків $\vec{u}_n\,(t,x)$. Покажемо, що $\vec{u}\,(t,x)$ є розв'язком, для довільної функції $w = \sum\limits_{i=1,\ldots,n} d_i\,(t)\,\vec{v}_i\,(x)$, де $d_i\,(t)$ неперервні функції узагальнені похідні яких є обмеженими на інтервалі $[0,T]$. Множину таких функцій $\vec{w} = \sum\limits_{i=1,\ldots,n} \vec{d}_i\,(t)\,\vec{v}_i\,(x)$ позначимо $\wp\,(n)$.

Складемо інтегральні тотожності

$$-\int_0^t \langle \vec{u}_n, \partial_t\vec{w} \rangle\,dt + \langle \vec{u}_n, \vec{w} \rangle|_0^t + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}_n, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{w} \right\rangle dt + \int_0^t \left\langle \vec{b}, \vec{w} \right\rangle dt = 0,$$

$$t \in [0,T]\,.$$

Оскільки функція $\vec{u}_n\,(t,x)$ належить множині $\wp\,(n) \quad \forall n \in \mathrm{N}$ то перейдемо до границі при $n \to \infty$, одержимо

$$-\int_0^t \langle \vec{u}, \partial_t\vec{w} \rangle\,dt + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle|_0^t + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{u}, \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{w} \right\rangle dt + \int_0^t \left\langle \vec{b}, \vec{w} \right\rangle dt = 0,$$

де $t \in [0,T]$. Ця тотожність справедлива для довільної функції $w \in \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \wp(n)$.

Отже, функція $\vec{u}(t,x)$ є розв'язком першої крайової задачі. Залишилося довести, що функцій $\langle \vec{u}_n, \vec{v}_i \rangle$, $n \in \mathrm{N}$ є рівностепенно неперервні по $t \in [0,T]$ для всіх фіксованих i, дійсно, одержуємо

$$|\langle \vec{u}_n(t+\Delta t, x) - \vec{u}_n(t,x), \vec{v}_r \rangle| \leq \int\limits_t^{t+\Delta t} \left| \left\langle \sum_{i,j=1,\ldots,l} a_{ij} \tfrac{\partial}{\partial x_j} \vec{u}_n, \tfrac{\partial}{\partial x_i} \vec{v}_r \right\rangle \right| dt +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t} \left| \left\langle \vec{b}, \vec{v}_r \right\rangle \right| dt \leq \left(\tfrac{1}{2\sigma^2} + \tfrac{c(\beta)}{2} \varepsilon^2 + c(\beta) + \tfrac{1}{2\gamma^2} \right) \int\limits_t^{t+\Delta t} \|\vec{u}_n\|_2^2 \, dt +$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{\varepsilon^2} + \beta \varepsilon^2 \right) + \beta + \mu \right) \int\limits_t^{t+\Delta t} \|\nabla \vec{u}_n\|_2^2 \, dt + \tfrac{\gamma^2}{2} \int\limits_t^{t+\Delta t} \|\mu_3\|^2 \, dt.$$

$$\leq const \cdot \Delta t \overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

що доводить рівностепенну неперервність функцій $\langle \vec{u}_n, \vec{v}_i \rangle$, $\quad n \in \mathrm{N}$.

Отже, доведено теорему 1.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1-5. Тоді перша крайова задача для системи (3) для довільної функції $\vec{\varphi}(x) \in L^2$ має принаймні один розв'язок в просторі V_1^2 при $t \in [0,T]$ і виконується умова*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|u(t+\Delta t, x) - u(t,x)\|_2^2}{\Delta t} = 0.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Встановлено, що перша крайова задача для квазілінійної системи параболічних диференціальних рівнянь другого порядку за умов форм-обмеженості і лінійного росту має розв'язок у просторі Соболева. В наступних умовах дані планується розширити клас систем, які можуть бути досліджені за допомогою даного методу.

Список використаної літератури

1. Ахиезер Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Гостехиздат, 1950. 543 с.
2. Самойленко А.М., Бігун Я.Й. Усереднення нелінійних коливних систем вищого наближення із запізненням. Нелінійні коливання. 2002. Т. 5, № 1. С. 77 – 85.
3. Бойчук И.А. Нелинейная нетерова краевая задача в критическом случае. Доповіді НАН України. 2010. № 3. С. 35 – 40.
4. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.
5. Коваленко В.Ф., Кухарчук Н.М., Семенов Ю.А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $\frac{1}{2}\Delta + d\nabla$. Деп. в УкрНИИНТИ. Киев, 1985. №2380-Ук 85.
6. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры. 1962. 394с.
7. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 735 с.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М: Мир, 1972. 587 с.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 579 с.
10. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Физматлит, 1997. 512 с.
11. Семенов Ю.А. Гладкость обобщенных решений уравнения $(\lambda - \sum_{i,j} \nabla_i a_{ij} \nabla_j) u = f$ с непрерывными коэффициентами. Мат. сб. 1982. Т.118 (160), №3 (7). С. 399 – 410.

12. Скрипник И.В. Необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейного параболического уравнения. Матем. сб. 1992. Т.183, №7. С. 3–22.
13. Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Legden: Nordhoff International Publiching, 1976. 352 p.
14. Benjamini I., Chavel I., Feldman E.A. Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash. Proc. London Math. Soc. 1996. V.72. P. 215 – 240.
15. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for families of contraction mappings. Pacific J. Math. 1966. V.18, № 2. P. 213 – 217.
16. Berlyiand A.G., Semenov Yu. A. On the L_p-theory of Schrodinger semigroups. Siberian Math. J. 1990. V.31. P. 16 – 26.
17. Boychuk I. Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case. Studies of the University of Žilina. Mathematical Series. October, 2009. V. 23, № 1. P. 1–8.
18. Brézis H., Pazy A. Semigroups of non-linear contractions on convex sets. J. Func. Anal. 1970. V. 6. P. 237–281.
19. Browder F.E. Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1965. V. 53. P. 1100 – 1103.
20. Browder F.E. Nonlinear equations of evolution type and nonlinear accretive operators in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V.73. P. 867 – 874.
21. Crandall M.G., Pazy A. Nonlinear semi-groups of contractions and dissipative sets. J. Func. Anal. 1969. V. 3. P. 376 – 418.
22. Chichurin A.V. Integration of Chazy equation with constant coefficients. Nonlinear Oscillations. 2003. Vol. 6, № 1. P. 133–143.
23. Chichurin A.V. Integration of special linear equations of the second order. Nonlinear Oscillations. 2003. Vol. 6, № 2. P. 279–287.
24. David E.E., Evans W.D. Hardy operators, functional spaces and embeddings. Berlin: Springer, 2004. 326 p.
25. Fabes E.B. Gaussian upper bounds on fundamental solutions of the parabolic equation: the method of Nash in Dirichlet forms. Lectures Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P.1 – 20.
26. Goldstein J. Semigroups of linear operators and applications. Oxford: Oxford University Press, 1985. 245 p.
27. Kasyanov P., Zadoyanchuk N. Faedo-Galerkin method for the second-order nonlinear evolution equations with the operators of the Volterra type. International Conference on Differential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B.Lopatynsky: Book of Abstracts (Lviv, September 12-17, 2006)/Ivan Franko National University of Lviv. Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, 2006. P.104-105.
28. Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations. J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 3. P. 375 – 402.
29. Kato T. Perturbation theory for linear operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980. 578 p.
30. Kato T. Non-linear semigroups and evolution equations. J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19. P. 508 – 520.
31. Komura Y. Differentiability of nonlinear semigroups. J. Math. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 375–402.
32. Komura Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space. J. Math. Soc. Japan. 1967. V. 19. P. 493 – 507.
33. Minty G. Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. Duke Math. J. 1962. V. 29. P. 341 – 346.
34. Minty G. On the generalization of a direct method of the calculus of variations. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, №3. P. 315 – 321.
35. Miyadera I. On perturbation theory for semi-groups of operators. Tohoku Math. J. 1966. V. 18. P. 299 – 310.
36. J. Moser, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 13 1960. P. 457-468.
37. Nagy B. Spectral mapping theorems for semigroups of operators. Acta Science Math. 1976. V. 38. P. 343-351.

38. Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931 – 954.
39. Naniewicz Z.,Panagiotopoulos P.D. Mathematical theory hemivariational inequalities and applications. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel Hong Kong. 1995. 267 p.
40. Nirenberg L. Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 648–674.
41. Opial Z. Weak convergence of the sequences of successive approximants for non-expansive mappings in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 591 – 597.
42. Pederson R.N. On an inequality of Opial, Beesack and Levinson. Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P.174 – 234.
43. Papageorgiou N.S. Existence of solutions for the second order evolution inclusion. Journal of applied mathematics and stochastic analysis. 1994. Vol.7, № 4. P. 525-535.
44. Papageorgiou N.S. Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set. Acta math. sinica, English series. 2006. Vol. 22 № 1. P. 195-206.
45. Papageorgiou N.S. On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces. Comment. math. unaiv. San. Pauli. 1987. Vol. 36. P. 21-39.
46. Yaremenko M.I. Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p. Матеріали конференції «Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. 15-17 травня 2008 року, Київ». Київ, 2008. С. 473.
47. Yaremenko M.I. Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p. Матеріали конференції «International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008.» 2008. С.43.
48. Yaremenko M.I. The existence of solution of evolution and elliptic equations with singular coefficients. Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2017. Vol.: 15, Issue.: 3. pp. 172- 204.
49. Yaremenko M.I. Quasi-linear evolution and elliptic equations. Journal of Progressive Research in Mathematics. Vol.11., №3. 2017 pp. 1645-1669.
50. Yaremenko M.I. Sequence of semigroups of nonlinear operators and their applications to study the Cauchy problem for parabolic equations. Scientific Journal of the ternopil national technical university № 4 (84). 2016. pp. 149-160.

Yaremenko M. I. Quasilinear system of parabolic differential equations in the divergent form under form-boundary conditions.

In this article we study quasilinear systems of parabolic differential equations in divergent forms of the second order with the singular coefficients under conditions of form-boundedness and linear growth of nonlinear perturbation. The existence of a solution of the first boundary value problem for a quasilinear system of parabolic differential equations under conditions of bounded forms and linear growth in Sobolev space is established. We consider the conditions under which nonlinear perturbation is bounded by a linear function with coefficients that can be spatially singular, in the linear case these coefficients belong to the Kato and Nash functional classes.

Ключові слова: quasilinear system, parabolic system, Sobolev space, divergent form, form-boundedness, singular coefficient, singularity.

References

1. Ahiezer, N.I. (1950). Theory of linear operators in Hilbert space, M., 543 c. [in Russian].
2. Samoilenko, A.M. (2002). Averaging of nonlinear oscillating systems of higher approximation with delay. *Nonlinear oscillations, V. 5, № 1.* P. 77 - 85. [in Russian].
3. Boychuk, I.A. (2010). Nonlinear Noetherian boundary value problem in the critical case. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, № 3.* P. 35 - 40. [in Russian].
4. Iosida, K. (1967). Functional analysis, M .: Mir, - 624 c. [in Russian].
5. Kovalenko, V.F., Kukharchuk, N.M., & Semenov, Yu.A. (1985). On the theory of diffusion processes generated by the operator. Dep. in UkrNIINTI. Kiev, 802380-Uk 85. [in Russian].

6. Krasnoselsky, M.A. (1962). Positive solutions of operator equations. M .: Gos. izd-vo fiz.-mat. litry. 394c. [in Russian].
7. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., & Uraltseva N.N. (1967). Linear and quasilinear equations of parabolic type. M .: Science. 735 c. [in Russian].
8. Lyons J.L. (1972). Some methods for solving nonlinear boundary value problems. M: Мир, 587 c. [in Russian].
9. Ladyzhenskaya, O.A., & Uraltseva, N.N. (1973). Linear and quasilinear equations of elliptic type. M .: Наука, 579 c. [in Russian]
10. Oleynik, O.A., & Samokhin, V.N.(1997). Mathematical methods in the theory of the boundary layer. M .: Fizmatlit, 512 p. [in Russian]
11. Semenov, Yu.A. (1982). Smoothness of generalized solutions of the equation with continuous coefficients. *Mat. Sat. T.118 (160), №3 (7).* P. 399 - 410. [in Russian]
12. Skripnik, I.V. (1992). A necessary condition for the regularity of a boundary point for a quasilinear parabolic equation. *Mat. Sat. T.183, №7.* P. 3–22. [in Russian]
13. Barbu, V. (1976). Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Legden: Nordhoff International Publiching, 352 p.
14. Benjamini, I., Chavel, I., & Feldman, E.A. (1996). Heat kernel lower bounds on Riemannian manifolds using the old ideas of Nash. *Proc. London Math. Soc., V.72.* P. 215 − 240.
15. Belluce, L.P., & Kirk, W.A. (1966). Fixed point theorems for families of contraction mappings. *Pacific J. Math., V.18, № 2.* P. 213 − 217.
16. Berlyiand, A.G., & Semenov, Yu. A. (1990). On the L_p-theory of Schrodinger semigroups. *Siberian Math., J. V.31.* P. 16 − 26.
17. Boychuk I., Starkova, O., & Tchujko, S. (2009). Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case. *Studies of the University of Žilina. Mathematical Series. October, V. 23, № 1.* P. 1–8.
18. Brézis, H., & Pazy, A. (1970). Semigroups of non-linear contractions on convex sets. *J. Func. Anal., V. 6*, P. 237–281.
19. Browder, F.E. (1965). Existence of periodic solutions for nonlinear equations of evolution. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA., V. 53*, P. 1100 − 1103.
20. Browder, F.E. (1967). Nonlinear equations of evolution type and nonlinear accretive operators in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc., V.73*, P. 867 − 874.
21. Crandall, M.G., & Pazy, A. (1969). Nonlinear semi-groups of contractions and dissipative sets. *J. Func. Anal., V. 3*, P. 376 − 418.
22. Chichurin, A.V. (2003). Integration of Chazy equation with constant coefficients. *Nonlinear Oscillations., Vol. 6, № 1.* P. 133–143.
23. Chichurin, A.V. (2003). Integration of special linear equations of the second order. *Nonlinear Oscillations., Vol. 6, № 2.* P. 279–287.
24. David, E.E., & Evans, W.D. (2004). Hardy operators, functional spaces and embeddings. Berlin: Springer,- 326 p.
25. Fabes, E.B. (1993). Gaussian upper bounds on fundamental solutions of the parabolic equation: the method of Nash in Dirichlet forms. Lectures Notes in Math. Berlin: Springer-Verlag, P. 1 – 20.
26. Goldstein, J. (1985).Semigroups of linear operators and applications. Oxford: Oxford University Press, 245 p.
27. Kasyanov, P., & Zadoyanchuk, N. (2006). Faedo-Galerkin method for the second-order nonlinear evolution equations with the operators of the Volterra type. International Conference on Differential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B.Lopatynsky: Book of Abstracts (Lviv, September 12-17, 2006)/Ivan Franko National University of Lviv. - Lviv, Ivan Franko National University of Lviv, P.104-105.
28. Kato, T. (1967). Nonlinear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc. Japan., V. 3.* P. 375 − 402.
29. Kato, T. (1980).Perturbation theory for linear operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 578 p.
30. Kato, T. (1967). Non-linear semigroups and evolution equations. *J. Math. Soc. Japan., V. 19.* P. 508 − 520.
31. Komura, Y. (1969). Differentiability of nonlinear semigroups. *J. Math. Soc. Japan., V. 21.* P.

375–402.

32. Komura, Y. (1967). Nonlinear semi-groups in Hilbert space. *J. Math. Soc. Japan., V. 19.* P. 493 – 507.
33. Minty, G. (1962). Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space. *Duke Math. J., V. 29.* P. 341 – 346.
34. Minty, G. (1967).On the generalization of a direct method of the calculus of variations. *Bull. Amer. Math. Soc., V. 73, №3.* P. 315 – 321.
35. Miyadera, I. (1966). On perturbation theory for semi-groups of operators. *Tohoku Math. J., V. 18.* P. 299 – 310.
36. Moser, J. (1960). A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math. 13*, 457-468.
37. Nagy, B. (1976). Spectral mapping theorems for semigroups of operators. *Acta Science Math., V. 38.* P. 343-351.
38. Nash, J. (1958). Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math., V. 80.* P. 931 – 954.
39. Naniewicz, Z., & Panagiotopoulos, P.D. (1995). Mathematical theory hemivariational inequalities and applications. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel Hong Kong, 267 p.
40. Nirenberg, L. (1955). Remarks on strongly elliptic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math., V. 8.* P. 648–674.
41. Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequences of successive approximants for non-expansive mappings in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc., V. 73.* P. 591 – 597.
42. Pederson, R.N. (1965). On an inequality of Opial, Beesack and Levinson. *Proc. Amer. Math. Soc., V. 16.* P.174 – 234.
43. Papageorgiou, N.S. (1994). Existence of solutions for the second order evolution inclusion. *Journal of applied mathematics and stochastic analysis., Vol.7, № 4.* P. 525-535.
44. Papageorgiou, N.S. (2006).Second order nonlinear evolution inclusions: structure of the solution set. *Acta math. sinica, English series. Vol. 22 № 1.* P. 195-206.
45. Papageorgiou, N.S. (1987). On multivalued evolutions equations and differential inclusions in Banach spaces. *Comment. math. unaiv. San. Pauli., Vol. 36.* P. 21-39.
46. Yaremenko, M.I. (2008). Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi-groups of contraction in L^p. Proceedings of the conference "Twelfth International Scientific Conference named after Academician M. Kravchuk. May 15-17, 2008, Kyiv ". Kyiv, C. 473.
47. Yaremenko, M.I. (2008). Second order quisi-linear elliptic equation with matrix of Gilbarg – Serrin in R^l and nonlinear semi- groups of contraction in L^p. «International Conference on problems of decision making under uncertainties (PDMU-2008). May 12-17, 2008. » C.43.
48. Yaremenko, M.I. (2017). The existence of solution of evolution and elliptic equations with singular coefficients. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research, Vol.: 15, Issue.: 3.* pp. 172- 204.
49. Yaremenko, M.I. (2017). Quasi-linear evolution and elliptic equations. *Journal of Progressive Research in Mathematics. Vol.11., №3*, pp. 1645-1669.
50. Yaremenko, M.I. (2016). Sequence of semigroups of nonlinear operators and their applications to study the Cauchy problem for parabolic equations. *Scientific Journal of the ternopil national technical university № 4 (84)*, pp. 149-160.

Одержано 18.08.2020

УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149

О. В. Варцаба[1], І. А. Мич[2], В. В. Ніколенко[3], В. С. Динис[4]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
vadim02091996@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5952-9326

ЕКВАЦІОНАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ НУЛЬАРНИХ АЛГЕБР, АЛГЕБР БУЛЕВОГО КУБУ ТА КУБУ ЖЕГАЛКІНА

У даній роботі проведені дослідження над булевими універсальними алгебрами, в сигнатуру яких входять нульарні, унарні та частина бінарних булевих операцій. Побудовані еквաціональні та сигнатурні решітки класу тривіальних алгебр. Елементи решіток представляються у вигляді квадрата.

Клас універсальних булевих алгебр складається з восьми алгебр, в сигнатуру яких входять операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення. Вони утворюють сигнатурні і еквաціональні куби. Для тривіальних алгебр і всіх алгебр булевого кубу знайдені повні системи тотожностей. Повнота систем тотожностей доводиться за допомогою алгоритмів, які дозволяють привести формули відповідних алгебр до стандартних канонічних виглядів.

Куб Жегалкіна складається з восьми алгебр, в сигнатуру яких входять операції одиниця, сума та множення за модулем два. Для алгебр кубу Жегалкіна побудована еквաціональна решітка.

Ключові слова: булева алгебра, екваціональна решітка, сигнатурна решітка

1. Вступ. Дана робота є продовженням робіт [1-5], у яких проведені еквաціональні дослідження в універсальних алгебрах, заданих над бінарними квадратними матрицями, в сигнатуру яких входять операції диз'юнкції, кон'юнкції та поворотів.

У запропонованій роботі досліджуються повні системи тотожностей в універсальних булевих алгебрах. Теорія булевих алгебр описується в роботах [5, 6].

В [7] Р. Ліндон показав, що всі двозначні алгебри мають повні скінченні системи тотожностей. Задача знаходження повних систем тотожностей для конкретних булевих алгебр і побудова на їх основі стандартних форм досліджена недостатньо. У цій роботі знайдені повні системи тотожностей і побудовані аналоги досконалих диз'юнктивних нормальних форм для класу нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна.

2. Екваціональна та сигнатурна решітки деяких класів булевих алгебр.

Означення 1. *Універсальною булевою алгеброю називається алгебра* $U = \langle A, \Omega \rangle$*, де* $A = \{0, 1\}$*,* $\Omega-$*деяка множина булевих операцій.*

Позначимо через B_k множину універсальних булевих алгебр $U = \langle A, \Omega \rangle$ арність операцій яких не перевищує k. Алгебра $U_\emptyset = \langle A, \Omega \rangle$ називається виродженою, якщо $\Omega = \emptyset$. Клас вироджених алгебр позначимо через B_0. У вироджених алгебрах, у яких $|A| > 1$, повна система тотожностей має вигляд: $x_i = x_i$, тобто $H\left(U_\emptyset\right) = \{x_i = x_i\}$.

Клас нульарних універсальних булевих алгебр B_0 складається з чотирьох алгебр: $U_\emptyset-$вироджена алгебра; $U_0 = \langle A, \Omega_0 \rangle$, $\Omega_0 = \{0\}$; $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, $\Omega_1 = \{1\}$; $U_{01} = \langle A, \Omega_{01} \rangle$, $\Omega_{01} = \{0, 1\}$, де 0 і 1 – нульарні операції.

У нульарних алгебрах нульарні операції є формулами, тому: $H\left(U_0\right) = \{x_i = x_i;\ 0 = 0\}$; $H\left(U_1\right) = \{x_i = x_i;\ 1 = 1\}$; $H\left(U_{01}\right) = \{x_i = x_i;\ 0 = 0;\ 1 = 1\}$.

Екваціональні і сигнатурні решітки класу B_0 мають вигляд:

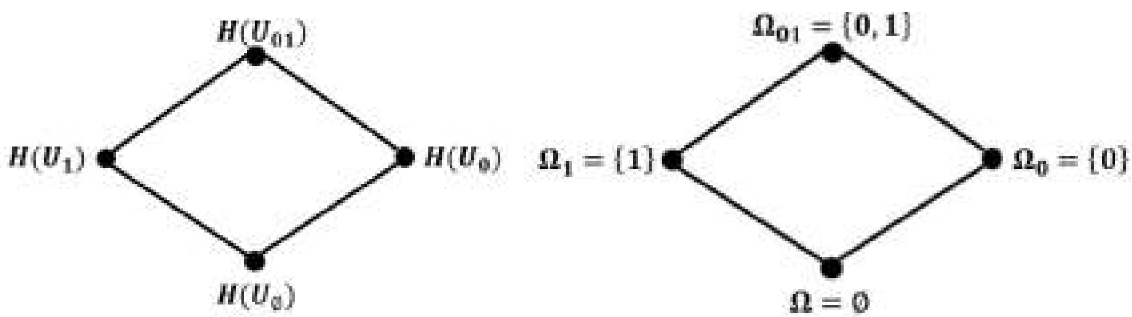

Рис. 1. Екваціональна та сигнатурна решітки класу B_0.

Клас універсальних булевих алгебр B_1 складається з восьми алгебр, які можна задати сигнатурним кубом.

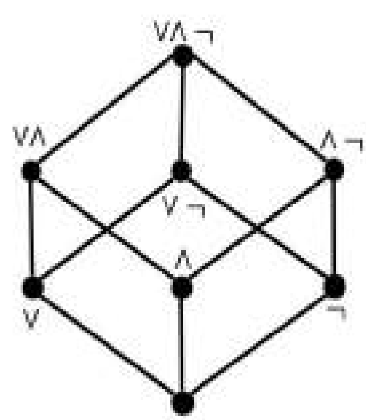

Рис. 2. Сигнатурний куб класу B_1.

Сигнатурна решітка класу B_0 є підрешіткою класу B_1 і для алгебр B_0 знайдено повні системи тотожностей. Побудуємо повні системи тотожностей в інших чотирьох алгебрах куба: для алгебри $U_- = \langle A,\, - \rangle$ −повна система тотожностей $H\left(U_-\right) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$; $H\left(U_{-0}\right) = \left\{\bar{\bar{0}} = 0;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$; $H\left(U_{-1}\right) = \left\{\bar{\bar{1}} = 1;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$; $H\left(U_{-10}\right) = \left\{\bar{\bar{1}} = 1;\ \bar{\bar{0}} = 0;\ \bar{\bar{x}} = x\right\}$.

3. Булевий куб. Розглянемо клас односієвих алгебр M, $U = \langle A,\, \Omega\rangle \in M$, якщо $A = \{0, 1\}$, $\Omega \subset \{\neg,\, \vee,\, \wedge\}$. У клас M входять вісім алгебр, які утворюють сигнатурний куб. Цей куб називається булевим, так як максимальним елементом цього кубу є булева алгебра із сигнатурою $\Omega = \{\neg,\, \vee,\, \wedge\}$.

Тривіальна алгебра $U_0 = \langle A,\, \Omega_0\rangle$, де $\Omega_0 = \emptyset$. У цій алгебрі множина формул має вигляд $F_i = x_i$, тобто повна система тотожностей $\{x_i = x_i\}$.

Алгебра заперечення $U_1 = \langle A,\, \Omega_1\rangle$, де $\Omega_1 = \{\bar{x}\}$. Формули цієї алгебри мають вигляд $\overset{\left.\begin{matrix}-\\-\\-\end{matrix}\right\}k}{x}$. Тотожність $\overline{\overline{x}} = x$ дає можливість отримати формули двох видів: $x = \overset{\left.\begin{matrix}-\\-\\-\end{matrix}\right\}2k}{\overline{\overline{x}}}$, $x = \overset{\left.\begin{matrix}-\\-\\-\end{matrix}\right\}2k+1}{\overline{x}}$. Нехай $F_1\left(x_i\right) = F_2\left(x_i\right)$, застосовуючи $\overline{\overline{x}} = x$, отримаємо формули $\widehat{F_1}\ \left(x_i\right) = \widehat{F_2}\ \left(x_i\right)$, які мають вигляд x_i і $\overline{x_i}$. Отже, повна система тотожностей цієї алгебри: $\{x_i = x_i;\, \overline{\overline{x}} = x\}$.

Алгебра диз'юнкції $U_2 = \langle A,\, \Omega_2\rangle$, де $\Omega_2 = \{\vee\}$. Запишемо тотожності цієї алгебри:

$$
\begin{gathered}
1.\ x_1 \vee x_1 = x_1; \\
2.\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1; \\
3.\ \left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3 = x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right).
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Тотожність $\left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3 = x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right)$ дає можливість опустити всі дужки, формула $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$− лексикографічно впорядкувати доданки в формулах F_1 і F_2, а тотожність $x_1 \vee x_1 = x_1$ дозволяє опустити однакові доданки. Якщо $F_1 = F_2$, то $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ лексикографічно співпадають. Тому має місце твердження.

Твердження 1. *Система тотожностей* (1) *є повною в алгебрі* U_2.

Алгебра кон'юнкції $U_3 = \langle A, \Omega_3\rangle$, де $\Omega_3 = \{\wedge\}$. Наведемо тотожності алгебри U_3:

$$
\begin{gathered}
1.\ x_1 \wedge x_1 = x_1; \\
2.\ x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1; \\
3.\ \left(x_1 \wedge x_2\right) \wedge x_3 = x_1 \wedge \left(x_2 \wedge x_3\right).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Формула $\left(x_1 \wedge x_2\right) \wedge x_3 = x_1 \wedge \left(x_2 \wedge x_3\right)$ дає можливість опустити всі дужки, рівність $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ – лексикографічно впорядкувати множники в формулах F_1 і F_2, а тотожність $x_1 \wedge x_1 = x_1$ дозволяє опустити однакові множники. Аналогічно алгебрі U_2, якщо $F_1 = F_2$, то $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ лексикографічно співпадають. Тому має місце твердження.

Твердження 2. *Система тотожностей* (2) *є повною в алгебрі* U_3.

Алгебра $U_4 = \langle A, \Omega_4 \rangle$, де $\Omega_4 = \{\neg, \vee\}$. Формулами в цій алгебрі є:
1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – формули;
2) $\overline{x_i}$ *і* $(x_i \vee x_j)$ – формули;
3) якщо F_1 і F_2 формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \vee F_2)$ – формули.

Для алгебри U_4 знайдена повна система тотожностей:
1) $x \vee x = x$;
2) $x \vee y = y \vee x$;
3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
4) $\overline{\overline{x}} = x$;
5) $x \vee \overline{x} = y \vee \overline{y}$;
6) $\overline{x \vee \overline{y \vee z}} = \overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x \vee \overline{z}}$;
7) $\overline{x \vee y} = \overline{x \vee y \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee \overline{z}}$;
8) $\overline{y \vee x \vee \overline{x}} = \overline{x \vee \overline{x}}$;
9) $y \vee \overline{x \vee \overline{x}} = y$;
10) $x = \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$.

Означення 2. *Формули вигляду* $\overline{\tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee ... \vee \tilde{x}_{i_k}}$, *де* $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ *або* $\tilde{x}_{i_k} = \bar{x}_{i_k}$ *називаються елементарними доданками. Елементарні доданки, які містять в своєму складі всі змінні формули* F*, називаються повними.*

Алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри U_4:
1) Використовуючи тотожності 4, 6 добиваємось того, що у формулі F над кожною диз'юнкцією заперечення зустрічається не більше одного разу.
2) Тотожність 7 дає можливість зробити всі елементарні доданки повними.
3) Тотожності 8 і 9 поглинають формули типу y або $x \vee \bar{x}$, крім випадку коли $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно дорівнює одиниці.
4) Тотожність 1 поглинає однакові доданки, а тотожності 2, 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних доданках.

Твердження 3. *Повні елементарні доданки приймають значення 1 тільки на одному наборі змінних.*

Твердження 4. *Два повні елементарні доданки співпадають тоді і тільки тоді, коли вони лексикографічно співпадають в лексикографічно-впорядкованих доданках.*

Диз'юнкція повних елементарних доданків є аналогом досконалої диз'юнктивної нормальної форми.

Алгебра $U_5 = \langle A, \Omega_5 \rangle$, де $\Omega_5 = \{\neg, \wedge\}$. Формулами в алгебрі U_5 є:
1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – формули;
2) $\overline{x_i}$ *і* $(x_i \wedge x_j)$ – формули;
3) якщо F_1 і F_2 формули, то $\overline{F_1}$, $(F_1 \wedge F_2)$ – формули.

Для алгебри U_5 побудована повна система тотожностей:
1) $x \wedge x = x$;
2) $x \wedge y = y \wedge x$;
3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
4) $\overline{\overline{x}} = x$;
5) $x \wedge \overline{x} = y \wedge \overline{y}$;
6) $\overline{x \wedge \overline{y \wedge z}} = \overline{x \wedge \overline{y}} \wedge \overline{x \wedge \overline{z}}$;

7) $\overline{x \wedge y} = \overline{x \wedge y \wedge z} \wedge \overline{x \wedge y \wedge \overline{z}}$;
8) $\overline{y \wedge x \wedge \overline{x}} = \overline{x \wedge \overline{x}}$;
9) $y \wedge \overline{x \wedge \overline{x}} = y$;
10) $x = \overline{\overline{x} \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$.

Означення 3. *Формули вигляду $\overline{\tilde{x}_{i_1} \wedge \tilde{x}_{i_2} \wedge ... \wedge \tilde{x}_{i_k}}$, де $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ або $\tilde{x}_{i_k} = \overline{x}_{i_k}$ називаються елементарними множниками. Елементарні множники, які містять в своєму складі всі змінні формули F, називаються повними.*

Алгоритм побудови досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри U_5:
1) Використовуючи тотожності 4, 6 добиваємось того, що у формулі F над кожною кон'юнкцією заперечення зустрічається не більше одного разу.
2) Тотожність 7 дає можливість зробити всі елементарні множники повними.
3) Тотожності 8 і 9 поглинають формули типу y або $x \wedge \bar{x}$, крім випадку коли $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ тотожно дорівнює нулю.
4) Тотожність 1 поглинає однакові множники, а тотожності 2, 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних множниках.

Твердження 5. *Повні елементарні множники приймають значення 0 тільки на одному наборі змінних.*

Твердження 6. *Два повні елементарні множники співпадають тоді і тільки тоді коли вони лексикографічно співпадають в лексикографічно-впорядкованих множниках.*

Кон'юнкція повних елементарних доданків є аналогом досконалої кон'юнктивної нормальної форми.

Алгебра $U_6 = \langle A, \Omega_6 \rangle$, де $\Omega_6 = \{\vee, \wedge\}$. Для цієї алгебри також знайдена повна система тотожностей:
1) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$;
2) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$;
3) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
4) $(x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z$, $x \vee y \wedge z = (x \vee y)(x \vee z)$;
5) $x \vee x \wedge y = x$, $x(x \vee y) = x$.

Теорема 1. *Кожна формула алгебри U_6 може бути представлена єдиною ДНФ.*

Доведення. Нехай $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – формула алгебри U_6. Кожну формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна подати у вигляді: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$, де k_i, $i = \overline{1,\ n}$ – елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Доведення теореми проведемо методом від супротивного. Припустимо, що формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебри U_6 можна подати у вигляді двох ДНФ: $F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = k_1 \vee k_2 \vee ... \vee k_n$ або $F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = k^*{}_1 \vee k^*{}_2 \vee ... \vee k^*{}_m$, де k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$ також елементарні кон'юнкції, побудовані із змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Зауважимо, що усі елементарні кон'юнкції k_i, $i = \overline{1,\ n}$, задовольняють умову, що жодна з них не є власною частиною іншої. Аналогічна умова висувається для усіх елементарних кон'юнкцій k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$.

Прирівняємо праві частини двох формул:

$$k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_n = k^*{}_1 \vee k^*{}_2 \vee \ldots \vee k^*{}_m. \tag{3}$$

Розглянемо значення кон'юнкта $k_i = x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_l}$ на наборах $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Цей кон'юнкт прийме значення 1 тільки на одному наборі $\tilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ у якому $\alpha_{i_k} = 1$, $k = 1, 2, ..., l$, а усі інші компоненти дорівнюють нулеві. На наборі $\tilde{\alpha}_i$ тільки кон'юнкт k_i приймає значення рівне 1, а усі інші кон'юнкти $k_1, k_2, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ..., k_n$ на цьому наборі приймають значення 0. Оскільки виконується рівність (3), то серед доданків k_i^*, $i = \overline{1,\ m}$ існує кон'юнкт k_j^* такий, що $k_j^* \subset k_i$. Для кон'юнкта k_j^*, аналогічно описаним вище міркуванням, будуємо набір $\tilde{\alpha}_j^* = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ на якому тільки він приймає значення 1, а усі інші приймають значення 0. Тоді з рівності (3) отримаємо, що серед кон'юнктів $k_1, k_2, ..., k_n$ існує такий кон'юнкт k_t, який є власною частиною k_j^*, а звідси випливає, що k_t є власною частиною k_i. Отримали протиріччя, яке доводить теорему.

Алгебра $U_7 = \langle A,\ \Omega_7 \rangle$, де $\Omega_7 = \{\vee,\ \wedge,\ \neg\}$. Повна система тотожностей цієї алгебри включає повну систему тотожностей алгебри U_6, до якої додаються тотожності:

1) $\bar{\bar{x}} = x$;
2) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$, $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$.

З проведених вище досліджень випливає справедливість теорем.

Теорема 2. *Екваціональна решітка класу M, ізоморфна сигнатурній решітці.*

Теорема 3. *T-базис класу M складається з восьми алгебр $U_0 - U_7$, які утворюють екваціональну решітку.*

4. Куб Жегалкіна. Розглянемо клас одноносієвих алгебр M, $U = \langle A,\ \Omega \rangle \in M$, якщо $A = \{0, 1\}$; $\Omega \subset \{1,\ \otimes,\ \oplus\}$, де $x \otimes y$, $x \oplus y$ – відповідно операції множення та додавання за модулем два. На рисунку 3 зображено сигнатурний куб Жегалкіна.

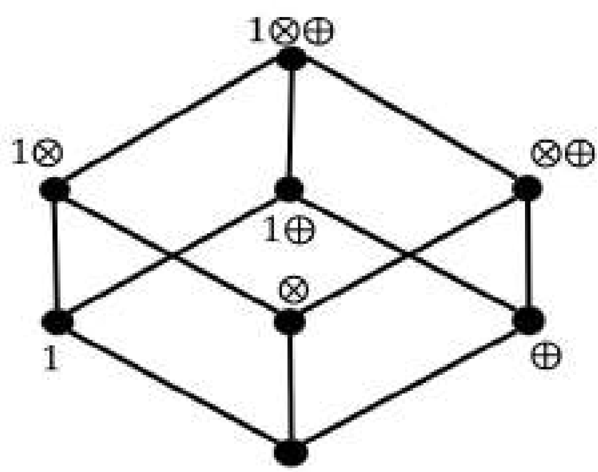

Рис. 3. Сигнатурний куб Жегалкіна.

Алгебри U_0 (тривіальна алгебра) та U_3 (алгебра кон'юнкції) співпадають з алгебрами булевого кубу. Знайдемо повні системи тотожностей усіх інших алгебр кубу Жегалкіна.

Модульна алгебра $U_1 = \langle A, \oplus \rangle$**.** Запишемо повну систему тотожностей цієї алгебри:

1) $x \oplus x = y \oplus y$;
2) $x \oplus y = y \oplus x$;
3) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
4) $y \oplus x \oplus x = y$.

Тотожності 1 і 4 опускають однакові доданки, якщо їхня кількість парна і залишають один – якщо непарна. Тотожності 2 і 3 виконують лексикографічне впорядкування.

Нульарна алгебра $U_2 = \langle A, 1 \rangle$**.** Повна система тотожностей: $\{x=x, 1=1\}$.

Алгебра $U_4 = \langle A, \oplus, 1 \rangle$**.** Наведемо повну систему тотожностей цієї алгебри:

1) $\tilde{x} \oplus \tilde{y} = \tilde{y} \oplus \tilde{x}$;
2) $(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) \oplus \tilde{z} = \tilde{x} \oplus (\tilde{y} \oplus \tilde{z})$;
3) $x \oplus x = 1 \oplus 1$;
4) $x \oplus 1 \oplus 1 = x$.

Тотожність 4 визначає, що формули алгебри U_4 можуть мати не більше одного доданка рівного одиниці. Довільну формулу F можемо звести до вигляду $\hat{F} = 1 \oplus F'$ або $\hat{F} = F'$, де F' – формула алгебри U_2.

Алгебра $U_5 = \langle A, \oplus, \otimes \rangle$**.** Повна система тотожностей цієї алгебри включає в себе повні системи тотожностей алгебр U_1, U_3 і тотожність$(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z$. Ця тотожність дає можливість розкривати всі дужки. Тотожності алгебри U_3 дають можливість впорядкувати множини, а тотожності алгебри U_1 доданки.

Алгебра $U_6 = \langle A, \otimes, 1 \rangle$**.** Знайдена повна система тотожностей цієї алгебри має вигляд:

1) $x \otimes x = x$;
2) $x \otimes y = y \otimes x$;
3) $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$;
4) $x \otimes 1 = x$.

На основі цих тотожностей довільну формулу $F(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$ можна привести до вигляду $\hat{F} = 1$ або $\hat{F} = x_1 x_2 ... x_n$.

Алгебра Жегалкіна $U_7 = \langle A, \oplus, \otimes, 1 \rangle$**.** Повна система тотожностей алгебри U_7 є об'єднанням систем тотожностей алгебр U_4, U_5, U_6. За допомогою цих тотожностей будь-яку формулу алгебри Жегалкіна однозначно можна перетворити у поліном Жегалкіна.

Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 1 (30). С. 79-86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86.
2. Мич І. А., Ніколенко В. В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2017. Вип. 2 (31). С. 123-128. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128
3. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О.В. Досконалі диз'юнктивні нормальні форми алгебри. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 1 (32). С. 124-129. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129
4. Мич І. А., Ніколенко В. В. Еквацональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика».* 2018. Вип. 2(33). С. 109-113. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113

5. Варцаба О.В., Мич І. А., Ніколенко В. В. Сигнатурна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2(33). С. 41-44. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44.
6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. Москва: Наука, 1970. 392 с.
7. Линдон Р. К. Тождества в конечных алгебрах. *Кибернетический сборник*. 1960. №.2. С. 246-248.

Vartsaba O. V., Mych I. A., Nykolenko V. V., Dynys V. S. Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a Zhegalkin cube.

In this paper, investigation of Boolean universal algebras, the signature of which includes zero, unary and part of binary Boolean operations is conducted. Equational and signature lattices of the class of trivial algebras are constructed. Lattice elements are represented as a square.

The class of universal Boolean algebras consists of 8 algebras. The signature of these algebras contains operations of conjunction, disjunction, and negation. They form signature and equational cubes.

Complete systems of identities have been found for trivial algebras and all algebras of a Boolean cube. The completeness of identity systems is proved by algorithms that allow to bring the formulas of the corresponding algebras to standard canonical forms.

The Zhegalkin cube consists of 8 algebras, the signature of which includes element 1, arithmetic operation of addition mod 2 and arithmetic operation of multiplication. An equational lattice of this class have been constructed for the algebras of the Zhegalkin cube.

Keywords: strong law of large numbers, random signed measure, renewal process, uniform strong law of large numbers, random processes indexed by sets.

References

1. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 1(30), 79-86. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86.
2. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Perfect disjunctive normal forms in a class of algebras. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics, 2(31), 123-128. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.2(31).123-128
3. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2018). Perfect disjunctive normal forms of algebra U_2. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 1(32), 124-129. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).124-129
4. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 2(33), 109-113. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113.
5. Vartsaba, O.V., Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Lattice signature of one class of algebra. Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics, 2(33), 41-44. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).41-44.
6. Maltcev, A. Y. (1970). Algebraicheskie sistemy. Moskva: Nauka [in Russian].
7. Lindon, R. K. (1960). Tozhdestva v konechnyh algebrah. *Kiberneticheskij sbornik*. №2, 246-248.

Одержано 02.10.2020

УДК 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).150-156

М. І. Глебена[1], Г. Г. Цегелик[2]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1100-515X

[2] Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук
Hryhoriy.Tsehelyk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5826-0628

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МІНОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ДВОХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

При розв'язуванні прикладних задач, моделюванні складних фізичних процесів, а також при дослідженні математичних моделей оптимальної організації і пошуку інформації у файлах баз даних виникає потреба у розв'язанні систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для розв'язання таких задач не існує, тому великий інтерес становить розробка та дослідження нових, ефективних чисельних методів, за допомогою яких можна було б розв'язувати системи нелінійних рівнянь.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. У роботі [1] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Встановлено необхідні та достатні умови існування міноранти Ньютона. Вивчено властивості міноранти Ньютона та її діаграми, введено основні характеристики міноранти Ньютона та її діаграми, побудовано алгоритми для їхнього відшукання.

У роботі пропонується новий чисельний метод, нульового порядку, який ґрунтується на використанні апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій. Побудований метод використовує властивості числових нахилів міноранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних заданих таблично.

Ключові слова: міноранта Ньютона, система нелінійних рівнянь, метод нульового порядку.

1. Вступ. У роботі [1] побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Встановлено необхідні та достатні умови існування міноранти Ньютона. Вивчено властивості міноранти Ньютона та її діаграми, введено основні характеристики міноранти Ньютона та її діаграми, побудовано алгоритми для їхнього відшукання. У [2,3] розроблено алгоритм для оптимізації логарифмічно опуклих функцій однієї та двох дійсних змінних, в основі яких лежить використання апарату некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. У [4,5] отримано оцінки точності наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона.

В даній роботі, використовуючи апарат некласичних мінорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично, приводиться новий чисельний метод відшукання розв'язку системи двох нелінійних рівнянь.

Основна перевага цього методу над класичними методами полягає в такому:
1) збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;

2) метод відноситься до методів нульового порядку;
3) простота та наглядність методу.

2. Основний результат.

Постановка задачі

Розглянемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Нехай ця система в деякому околі $D=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ має розв'язок $x=\alpha,\ y=\beta$. Оскільки розв'язок системи (1) є розв'язком рівняння

$$|f(x,y)|+|g(x,y)|=0$$

або

$$-\ln(1+|f(x,y)|+|g(x,y)|)=0, \tag{2}$$

то для відшукання розв'язку системи (1) будемо шукати розв'язок рівняння (2).

Для розв'язання рівняння (2) використаємо властивості апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних.

Апарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій двох дійсних змінних

Розглянемо функцію двох дійсних змінних $z=f(x,y)$, яка задана своїми значеннями в точках (x_i,y_j) $(i=0,1,\ldots,n;\quad j=0,1,\ldots,m)$:

$$f(x_i,y_j)=z_{ij}\,(i=0,1,\ldots,n;\quad j=0,1,\ldots,m). \tag{3}$$

Нехай $x_0<x_1<\ldots<x_n,\ \ y_0<y_1<\ldots<y_m$ і

$$|z_{ij}|=a_{ij}\le M\,(i=0,1,\ldots,n;\quad j=0,1,\ldots,m), \tag{4}$$

де $M-$ деяка стала. Будемо вважати, що $a_{00}\cdot a_{0m}\cdot a_{n0}\cdot a_{nm}\ne 0$.

Означення 1. *Точка $P_{ij}(x_i,y_j-\ln a_{ij})$ з координатами $x=x_i$, $y=y_j$, $z=-\ln a_{ij}$ в просторі xyz називається точкою зображення значення функції $z=f(x,y)$ в точці (x_i,y_j).*

Припустимо, що точки зображення P_{ij} значень функції $z=f(x,y)$ в точках (x_i,y_j) $(i=0,1,\ldots,n;\quad j=0,1,\ldots,m)$ в просторі xyz побудовані. З кожної точки P_{ij} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y)\in R$, де $R=\{x_0\le x\le x_n,\ y_0\le y\le y_m\}$, визначимо точку $B(x,y,\chi(x,y))$, де

$$\chi(x,y)=\sup_{(x,y,z)\in C(S)} z\ .$$

Множина точок $B(x,y,\chi(x,y))$, де $(x,y)\in R$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця поверхня є неперервною, вгнутою, і її рівняння має вигляд: $z=\chi(x,y)\,,\ (x,y)\in R$.

Означення 2. *Поверхня δ_f, визначена на R, називається діаграмою Ньютона функції $z=f(x,y)$ на R.*

Діаграма Ньютона δ_f функції $z = f(x, y)$ має такі властивості:

1) кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{ij} значення функції $z = f(x, y)$ в точці (x_i, y_j);
2) кожна точка зображення P_{ij} знаходиться на δ_f або розміщена нижче за неї;
3) кожній точці $(x_i, y_j) \in R$ відповідає $B_{ij}\left(x_i, y_j, \chi_{ij}\right)$ діаграми Ньютона δ_f, де $\chi_{ij} = \chi\left(x_i, y_j\right)$.

Позначимо $m_f\left(x, y\right) = \exp\left(-\chi\left(x, y\right)\right),\ (x, y) \in R$.

Тоді для кожної точки (x_i, y_j) $(i = 0, 1, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m)$ виконується нерівність $m_f\left(x_i, y_j\right) \leq \left|f\left(x_i, y_j\right)\right| = \left|z_{ij}\right| = a_{ij}$. Справді, з побудови δ_f випливає, що $-\ln a_{ij} \leq \chi\left(x_i, y_j\right)$, або $a_{ij} \geq \exp\left(-\chi\left(x_i, y_j\right)\right) = m_f\left(x_i, y_j\right)$. Крім того, $m_f\left(x_0, y_0\right) = \left|f\left(x_0, y_0\right)\right|$, $m_f\left(x_0, y_m\right) = \left|f\left(x_0, y_m\right)\right|$, $m_f\left(x_n, y_0\right) = \left|f\left(x_n, y_0\right)\right|$, $m_f\left(x_n, y_m\right) = \left|f\left(x_n, y_m\right)\right|$.

Означення 3. *Функція $z = m_f\left(x, y\right)$, визначена на R, називається мінорантою Ньютона функції $z = f(x, y)$ на R.*

Нехай $m_f\left(x_i, y_j\right) = t_{ij} \quad (i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, m)$.

Означення 4. *Величини $r_{ij}\left(x\right) = \left(\frac{t_{i-1,j}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}$ $(i = 1, 2, ..., n; j = 0, 1, ..., m;$ $r_{0j} = 0)$ і $r_{ij}\left(y\right) = \left(\frac{t_{i,j-1}}{t_{ij}}\right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}}$ $(j = 1, 2, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, n;\ r_{i0} = 0)$ називаються (i, j)-ми числовими нахилами міноранти Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини $d_{ij}\left(x\right) = \frac{r_{i+1,j}(x)}{r_{ij}(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m;\ d_{0j} = d_{nj} = \infty)$ і $d_{ij}\left(y\right) = \frac{r_{i,j+1}(y)}{r_{ij}(y)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1;$ $i = 0, 1, \ldots, n;\ d_{i0} = d_{im} = \infty)$ називаються (i, j)-ми відхиленнями міноранти Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy.*

Із вгнутості діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$r_{ij}\left(x\right) \geq r_{i+1,j}\left(x\right) \left(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m\right),$$

$$r_{ij}\left(y\right) \geq r_{i,j+1}\left(y\right) \left(j = 0, 1, \ldots, m-1;\ i = 0, 1, \ldots, n\right),$$

$$d_{ij}\left(x\right) \leq 1 \left(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m\right),$$

$$d_{ij}\left(y\right) \leq 1 \left(j = 1, 2, \ldots, m-1;\ i = 0, 1, \ldots, n\right).$$

Означення 5. *Якщо точка зображення P_{ij} знаходиться у вершині δ_f, то пара індексів (i, j) називається вершинною парою індексів; якщо ж на δ_f, то – діаграмною парою індексів.*

Аналогічно як для функції однієї змінної [1] справджуються такі твердження.

Твердження 1. *Для того, щоб для функції $z = f\left(x, y\right)$, заданої таблицею значень (3), існувала діаграма Ньютона, визначена на R, необхідно і достатньо, щоб для неї виконувалась умова (4).*

Твердження 2. *Міноранта Ньютона $m_f\left(x, y\right)$ функції $z = f\left(x, y\right)$, заданої таблицею значень (3), є неперервною і опуклою функцією на R.*

Твердження 3. *Якщо для функції* $z = f(x,y)$, *заданої таблицею значень* (3), *виконується умова* (4), *то*

$$\min_{i,j} |f(x_i, y_j)| = \min_{(x,y)\in R} m_f(x,y).$$

При цьому, якщо

$$\min_{i,j} |f(x_i, y_j)| = |f(x_k, y_s)|,$$

то

$$\min_{(x,y)\in R} m_f(x,y) = m_f(x_k, y_s) = t_{ks}.$$

Алгоритм відшукання розв'язку системи двох нелінійних рівнянь Використовуючи властивості числових нахилів міноранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних побудуємо алгоритм знаходження розв'язку системи нелінійних рівнянь (1). Оскільки розв'язок системи (1) є розв'язком рівняння $|f(x,y)| + |g(x,y)| = 0$, тому в області D виберемо систему точок $x_k = x_0 + kh$, де $k = 0, 1, \ldots, n$, $x_0 = a$, $h = \frac{b-a}{n}$, і $y_l = y_0 + lh$, де $l = 0, 1, \ldots, m$, $y_0 = c$, $h = \frac{d-c}{m}$. Виберемо початкове наближення розв'язку $x = x_0$, $y = y_0$ і від цієї точки будемо рухатись в напрямку спадання значення функції $|f(x,y)| + |g(x,y)|$ доти, доки не знайдем «нульовий мінімум» цієї функції.

Позначимо $a_{kl} = 1 + |f(x,y)| + |g(x,y)|$.

Величини $r_{kl}(x) = \left(\frac{a_{k-1,l}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h}}$, $r_{kl}(y) = \left(\frac{a_{k,l-1}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h}}$ назвемо (k,l)-ми числовими нахилами функції $-\ln(1 + |f(x,y)| + |g(x,y)|)$ відповідно в напрямі осей Ox та Oy. А величину $r_{kl}(x,y) = \left(\frac{a_{k-1,l-1}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h\sqrt{2}}}$ назвемо числовим нахилом цієї функції в напрямі бісектриси кута ABC, де A, B, C точки відповідно з координатами (x_{k-1}, y_l), (x_{k-1}, y_{l-1}), (x_k, y_{l-1}).

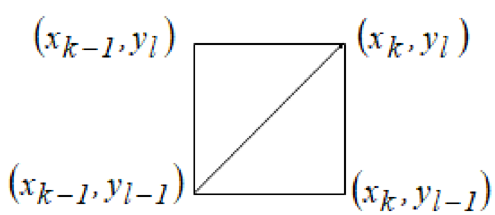

Рис. 1. Схема переходу між точками

Припустимо, що від точки (x_0, y_0) ми прийшли до точки (x_{k-1}, y_{l-1}). Тоді вибираємо напрям подальшого руху. Для цього шукаємо $r_{k,l-1}(x)$, $r_{k-1,l}(y)$, $r_{kl}(x,y)$. Тоді можливі такі випадки:

1) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{k,l-1}(x)$ відбувається перехід до точки (x_k, y_{l-1});
2) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{k-1,l}(y)$ відбувається перехід до точки (x_{k-1}, y_l);
3) $\max(r_{k,l-1}(x), r_{k-1,l}(y), r_{kl}(x,y)) = r_{kl}(x,y$ відбувається перехід до точки (x_k, y_l).

Процес переходу від точки до точки завершується в точці $x = x_i,\ y = y_j$, якщо для деякого $i,\ j$ виконується умови:

$$r_{ij}(x) \geq 1, r_{i+1,j}(x) \leq 1, \tag{5}$$

$$r_{ij}(y) \geq 1, r_{i,j+1}(y) \leq 1, \tag{6}$$

$$r_{ij}(x,y) \geq 1, r_{i+1,j+1}(x,y) \leq 1, \tag{7}$$

$$|f(x,y)| + |g(x,y)| < h. \tag{8}$$

Зауважимо, що у процесі переходу від точки до точки можна зменшувати h для підвищення точності розв'язку.

Приклад 1. Розглянемо систему з двох нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Графік якої зображений на рисунку 2.

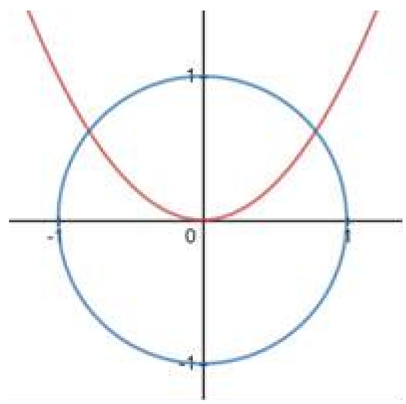

Рис. 2. Графік системи нелінійних рівнянь.

Розв'язок системи (9) є розв'язком рівняння $|y - x^2| + |x^2 + y^2 - 1| = 0$, або розв'язком $-\ln(1 + |y - x^2| + |x^2 + y^2 - 1|) = 0$.

Вищезазначена система (9) має два розв'язки. Знайдемо один із них. У якості області D виберемо $D = \{0,5 \leq x \leq 1,\ 0,5 \leq y \leq 1\}$ і крок $h = 0,01$. За початкову точку візьмемо $(0,5; 0,5)$. У результаті застосування алгоритму отримаємо точку $(0,8; 0,63)$, для цієї точки виконуються умови (5)-(8). Уточнимо точку зменшивши крок. За початкове наближення виберемо точку $(0,75; 0,6)$ і візьмемо крок $h = 0,002$. Одержимо точку $(0,788; 0,62)$ для якої виконуються умови (5)-(8). Для підвищення точності розв'язку застосуємо побудований алгоритм до початкової точки $(0,78; 0,61)$ з кроком $h = 0,00014$. У результаті чого одержимо точку $(0,78658; 0,61784)$, яку приймемо за розв'язок системи (9) з точністю до величини кроку h. Аналогічно поступаємо з відшуканням іншого розв'язку системи нелінійних рівнянь. У результаті застосування одержимо другий розв'язок системи нелінійних рівнянь $(-0,78658; 0,61784)$.

Приклад 2. Розглянемо модель оптимального дворівневого блокового пошуку у впорядкованих файлах у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів [6]. Розглянемо дворівневий блоковий пошук, у випадку використання методу двійкового пошуку у локалізованому блоці. Нехай впорядкований файл містить N записів. Файл розбитий на n блоків, а кожен блок розбивається на m підблоків по $2^l - 1$ записів у кожному, де $m = \frac{N}{n\left(2^l-1\right)}$. Для знаходження n та l, за яких математичне сподівання кількості порівнянь E, необхідних для пошуку запису у файлі досягає мінімуму побудовано систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \left(2^l - 1\right) n^2 = N, \\ \left(2^l - 1\right)^2 = \left(1 + \frac{N}{2n}\right) 2^l \ln 2. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'яжемо систему (10) запропонованим методом при $N = 1000$.

У результаті застосування побудованого у роботі методу одержимо наближений розв'язок задачі $n = 9$, $l = 5$. Тобто кількісь блоків на які повинен бути розбитий файл рівна 9, блоки розбиваються на 4 підблоки по 31 запис у кожному.

3. Висновки. Запропоновано новий чисельний метод відшукання коренів системи двох нелінійних рівнянь. Побудований метод використовує властивості числових нахилів мінoранти Ньютона та їхніх діаграм функції двох дійсних змінних заданих таблично.

Розроблений у роботі алгоритм застосовано до розв'язання тестової задачі. У результаті застосування алгоритму одержимо розв'язок з точністю до величини кроку.

Основна перевага цього методу над класичними методами полягає у такому:

1) збіжність методу не залежить від вибору початкового наближення;
2) розв'язок системи двох нелінійних рівнянь знаходимо з точністю до величини кроку h;
3) метод відноситься до методів нульового порядку, тобто у чисельному методі використовуються тільки значення нелінійних функцій;
4) простота та наглядність методу.

Список використаної літератури

1. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мінорант Ньютона та його використання. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2013. Вип. 24 №1.* С. 16-21.
2. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод нульового порядку оптимізації негладких логарифмічно опуклих функцій. *Наук.вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2013. Вип.24. №2.* С.43–47.
3. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельні методи мінорантного типу відшукання абсолютного екстремуму негладких логарифмічно опуклих функцій. Dynamical system modelling and stability investigation (DSMSI – 2013): XVI International Conference, May 29-31, 2013: Abstracts of conference reports. Kyiv, Ukraine 2013. P.353
4. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Апарат некласичних мінорант Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання для наближення функцій. *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформат. 2014. Вип.21.* С.58–66.
5. Цегелик Г.Г., Глебена М.І. Оцінка похибки наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XIX Всеукраїнська наукова конференція, 3–4 жовтня 2013 року: матеріали конф. Львів, 2013. С.130–131.
6. Фундак Л.І., Цегелик Г.Г. Оптимальний дворівневий блоковий пошук у впорядкованих файлах у випадку рівномірного розподілу ймовірностей звертання до записів. Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: XXV Міжнародна наукова конференція, 24–27 вересня 2019 року: матеріали конференції. Львів, 2019. С.45–48.

Hlebena M. I., Tsehelyk H. H. Numerical method of minorant type of finding the solution to a system of two nonlinear equations.

When solving applied problems, modeling complex physical processes, as well as studying mathematical models of optimal organization and searching for information in database files, there is a need to solve systems of nonlinear equations. There are no universal methods for solving such problems, so it is of great interest to develop and study new, effective numerical methods that could be used to solve systems of nonlinear equations.

We are working on the development of such methods. In [1], the apparatus of nonclassical Newton minorants and their diagrams of functions of one real variable, given in tabular form, are constructed. Necessary and sufficient conditions for the existence of the Newton minorant have been established. The properties of the Newton minorant and its diagram are studied, the main characteristics of the Newton minorant and its diagram are introduced, algorithms for their search are constructed.

The paper proposes a new numerical method of zero order, which is based on the use of the apparatus of nonclassical minorants and Newton diagrams of functions. The constructed method uses the properties of the numerical slopes of the Newton minaret and their diagrams of the function of two real variables given in the table.

Keywords: Newton's minorant, system of nonlinear equations, zero-order method, numerical method.

References

1. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Aparat neklasychnykh minorant Niutona ta yoho vykorystannia [Apparatus of non-classical Newton's minorant and its use] *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. Of mathematics and informatics, 24, 1*, 16−21. [in Ukranian]
2. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Chyselnyi metod nulovoho poriadku optymizatsii nehladkykh loharyfmichno opuklykh funktsii [Numerical zero-order method for optimization of non-smooth logarithmically convex functions] *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. Of mathematics and informatics, 24, 2*, pp. 43−47. [in Ukranian]
3. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Chyselni metody minorantnoho typu vidshukannia absoliutnoho ekstremumu nehladkykh loharyfmichno opuklykh funktsii [Numerical method of the minorant type of finding the absolute extremum of non-smooth logarithmically convex functions] Dynamical system modelling and stability investigation (DSMSI – 2013): XVI International Conference, May 29-31, 2013: Abstracts of conference reports.– Kyiv, Ukraine, 2013, P.353, [in Ukranian]
4. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2014). Aparat neklasychnykh minorant Niutona funktsii, zadanykh tablychno, ta yoho vykorystannia dlia nablyzhennia funktsii [Apparatus of nonclassical minorants of Newton's functions and its use to approximate functions] *Herald of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science, 21*, pp. 58-66., [in Ukranian]
5. Hlebena, M.I., & Tsehelyk, H.H. (2013). Otsinka pokhybky nablyzhennia funktsii neklasychnoiu minorantoiu Niutona [Estimation error of function approximation of nonclassical Newtons minorant] Problems of Applied Mathematics and Informatics: XIX Ukrainian Scientific Conference, pp.130–131. [in Ukranian]
6. Fundak, L.I., & Tsehelyk, H.H. (2019). Optymalnyi dvorivnevyi blokovyi poshuk u vporiadkovanykh failakh u vypadku rivnomirnoho rozpodilu ymovirnostei zvertannia do zapysiv [Optimal two-level block search in ordered files in the case of even distribution of probabilities of access to records] Problems of Applied Mathematics and Informatics: XXV International Scientific Conference, pp. 45–48. [in Ukranian]

Одержано 02.10.2020

УДК 510
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167

І. А. Мич[1], В. В. Ніколенко[2], О. В. Варцаба[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3392-1442

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0071-6896

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9158-2365

ДОСЛІДЖЕННЯ СИГНАТУРНОГО КУБУ УНІВЕРСАЛЬНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У роботі розглядається теорія булевих функцій з точки зору універсальних булевих алгебр. Дана робота використовує термінологію відомих авторів Куроша, Мальцева, Поста та інших. Крім цього у роботі введено нові поняття такі як універсальна булева алгебра, $l-$базисні алгебри, вільні та канонічні алгебри. Також вивчається клас універсальних булевих алгебр M_2, у сигнатуру яких входять всі одно та двомісні операції двозначної логіки. Ввівши поняття порядку порівняння сигнатур алгебр, отримали представлення алгебр M_2 у вигляді 11-місного сигнатурного кубу. У роботі виконано розбиття цього кубу на чотири дев'ятимірні куби M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. У класі M_2^1 знайдена множина функціонально повних алгебр η_0 і побудовано сигнатурний граф даної множини, проведено дослідження цих алгебр. Множину всіх функціонально повних алгебр розбито на п'ятнадцять класів $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$, побудовані сигнатурні графи кожного з цих класів. Вивчена структура і типи алгебр, які входять до складу класів $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$. Всі функціонально повні алгебри класу M_2^1 зображені у вигляді сигнатурного графа.

Встановлено потужність класу M_2^1, побудовано сигнатурний граф канонічних алгебр цього класу і визначено розподіл алгебр по ярусах цього графа. Наведено розподіл 259 вільних алгебр по ярусах Ω-кубу і побудовано сигнатурний граф класу вільних алгебр.

Отримані результати узагальнено на класи M_2^2, M_2^3, M_2^4. На основі цих результатів виконано розподіл 2048 алгебр класу M_2 відносно базисності по ярусах Ω- кубу.

Ключові слова: булеві операції, сигнатурний куб, базиси алгебр.

1. Вступ. Дослідження теорії універсальних алгебр поклала фундаментальна робота Бірггофа [1], і вони були продовжені у працях Мальцева [2], Куроша [3] та інших. Найбільш відомі роботи з теорії булевих алгебр Сікорського [4], Владімірова [5], з теорії булевих функцій роботи Яблонського [6], Глушкова [7, 8, 9], Журавльова [10, 11], сучасні роботи [12, 13, 14] та багато інших.

2. Універсальні булеві алгебри. У даному дослідженні пропонується розглянути теорію булевих функцій з точки зору універсальних булевих алгебр.

Означення 1. *Універсальною алгеброю U називається впорядкована пара $\langle A, \Omega \rangle$ множин A (носій алгебри) і Ω (множина операцій, що задані на A) [1, 2, 3, 14].*

Означення 2. *Універсальною булевою алгеброю $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається універсальна алгебра, у якій $A = \{0, 1\}$, Ω – деяка множина булевих операцій. У подальшому універсальні булеві алгебри будемо називати булевими алгебрами або алгебрами.*

У даній роботі розглядаються множини усіх універсальних булевих алгебр М у сигнатуру яких можуть входити операції $Q = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \uparrow, |\}$, тобто $\mathrm{M} = \{U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \,|\, \Omega_i \subset Q\}$. Зрозуміло, що $|\mathrm{M}| = 2^{11} = 2048$ алгебр, які утворюють 11-мірний куб, який далі називається сигнатурним кубом, або Ω-кубом. Кожній вершині Ω-кубу поставимо у відповідність 11-мірний булевий вектор, одиничні координати якого визначають операції, що входять в сигнатуру відповідної алгебри. Вершини в Ω-кубі позначаються або сигнатурою (переліком операцій), або Ω-вектором, або натуральним числом, розклад якого за модулем два визначає Ω-вектор. Відношення порядку в Ω-кубі задається наступним чином: $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \leq U_j = \langle A, \Omega_j \rangle$, якщо $\Omega_i \subset \Omega_j$. Нулем Ω-кубу є тривіальна алгебра, у якій $\Omega = \emptyset$. На першому ярусі Ω-кубу є $C_n^1 = 11$ алгебр, а на кожному наступному C_n^k, $n = 11$, $k = \overline{1, 11}$. Ребро Ω-кубу, що з'єднує алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle$ і $U_j = \langle A, \Omega_j \rangle$, де $U_j > U_i$ збільшує (зменшує) сигнатуру U_j на одну операцію в порівнянні з U_i, якщо рухатися по ребру знизу вверх (зверху вниз).

Означення 3. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається функціонально повною, якщо множина її функцій, що відповідають операціям з Ω утворюють функціонально повну систему, в іншому випадку алгебра називається функціонально неповною [11].*

Означення 4. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається $l-$базисною, якщо з операцій сигнатури Ω можна побудувати $l-$базисів.*

Означення 5. *Операція $f_i \in \Omega$ називається зв'язаною, якщо вона входить до складу якогось базису, у іншому випадку операція називається вільною.*

Означення 6. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається вільною, якщо в її сигнатурі є вільні операції.*

Означення 7. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається канонічною, якщо вона не має вільних операцій.*

Означення 8. *Рангом вільної алгебри називається число, що дорівнює кількості вільних операцій.*

Означення 9. *Алгебра $U = \langle A, \Omega \rangle$ називається насиченою, якщо її довільне розширення сигнатури збільшує базисність алгебри.*

Означення 10. *Потенціалом ребра, що з'єднує дві суміжні алгебри U_1 і U_2 $\Omega-$кубу з базисністю η_1 і η_2 $(\eta_1 \geq \eta_2)$ називається число $\eta_1 - \eta_2$.*

Означення 11. *Потенціалом алгебри називається сума потенціалів всіх ребер (верхніх), які виходять з даної алгебри.*

3. Сигнатурний куб класу алгебр M_2. Розглянемо множину всіх алгебр $\mathrm{M}_2 = \{U = \langle A, \Omega \rangle\}$, де $A = \{0, 1\}$ і Ω – множина булевих операцій арність яких не перевищує два. Представимо клас алгебр M_2 у вигляді 11-місного сигнатурного кубу (рис. 1).

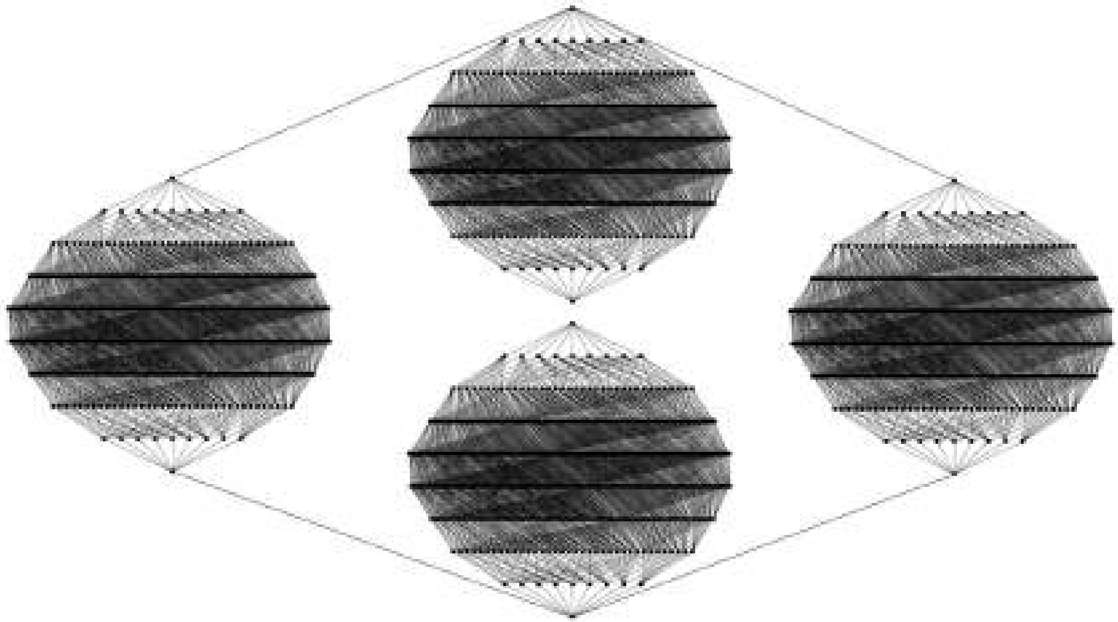

Рис. 1. Сигнатурний куб класу алгебр M_2.

Побудуємо розбиття множини $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2^1 \bigcup \mathrm{M}_2^2 \bigcup \mathrm{M}_2^3 \bigcup \mathrm{M}_2^4$, де M_2^1−множина всіх алгебр із M_2, в сигнатуру яких не входять операції стрілка Пірса ($\uparrow$) і штрих Шеффера ($|$), а M_2^2, M_2^3, M_2^4−множини всіх алгебр із M_2, у які відповідно входять операції $\{\uparrow\}$, $\{\,|\,\}$, $\{\uparrow, \,|\}$.

Розглянемо множину алгебр класу M_2^1, які утворюють 11-мірний сигнатурний куб (Ω−куб) з фіксованими 10-ою і 11-ою нульовими координатами (рис.2).

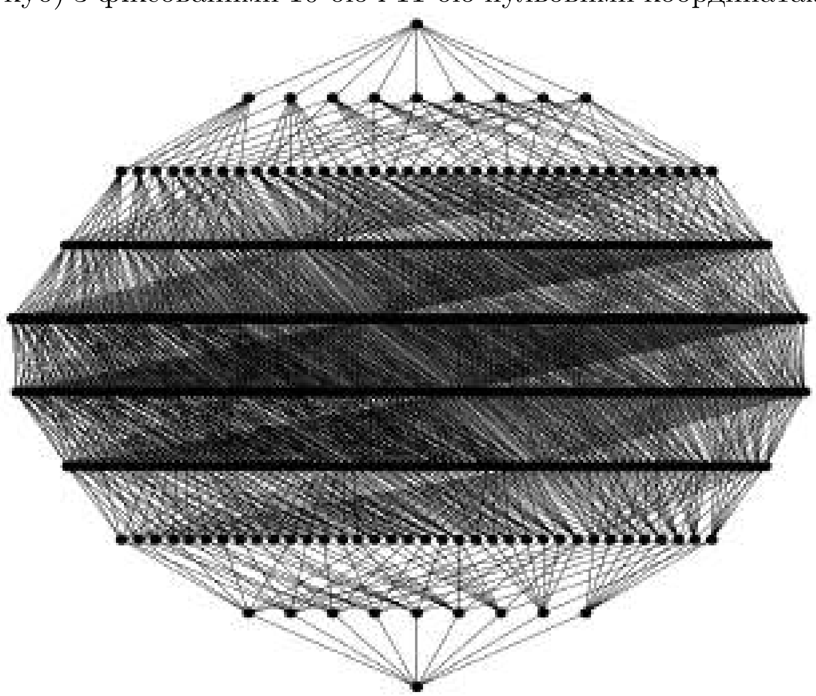

Рис. 2. Сигнатурний куб класу алгебр M_2^1.

 ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Використовуючи критерій Поста, знайдені дев'ять двоопераційні базиси: $a_1 = \{0, \ \Rightarrow\}$, $a_2 = \{0, \Leftarrow\}$, $a_3 = \{\neg, \wedge\}$, $a_4 = \{\neg, \vee\}$, $a_5 = \{\neg, \ \Rightarrow\}$, $a_6 = \{0, \ \Leftarrow\}$, $a_7 = \{\oplus, \ \Rightarrow\}$, $a_8 = \{\Rightarrow, \ \Leftarrow\}$, $a_9 = \{\Leftrightarrow, \ \Leftrightarrow\}$ і шість базисів з трьома операціями: $b_1 = \{0, \wedge, \ \Leftrightarrow\}$, $b_2 = \{0, \vee, \ \Leftrightarrow\}$, $b_3 = \{1, \wedge, \oplus\}$, $b_4 = \{1, \vee, \oplus\}$, $b_5 = \{\wedge, \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $b_6 = \{\vee, \oplus, \ \Leftrightarrow\}$.

4. Клас функціонально неповних алгебр. η_0. Позначимо через η_0 клас нульбазисних алгебр (клас функціонально неповних алгебр). У цей клас входять вісімдесят вісім алгебр, які зображені у вигляді сигнатурного графа (рис. 3).

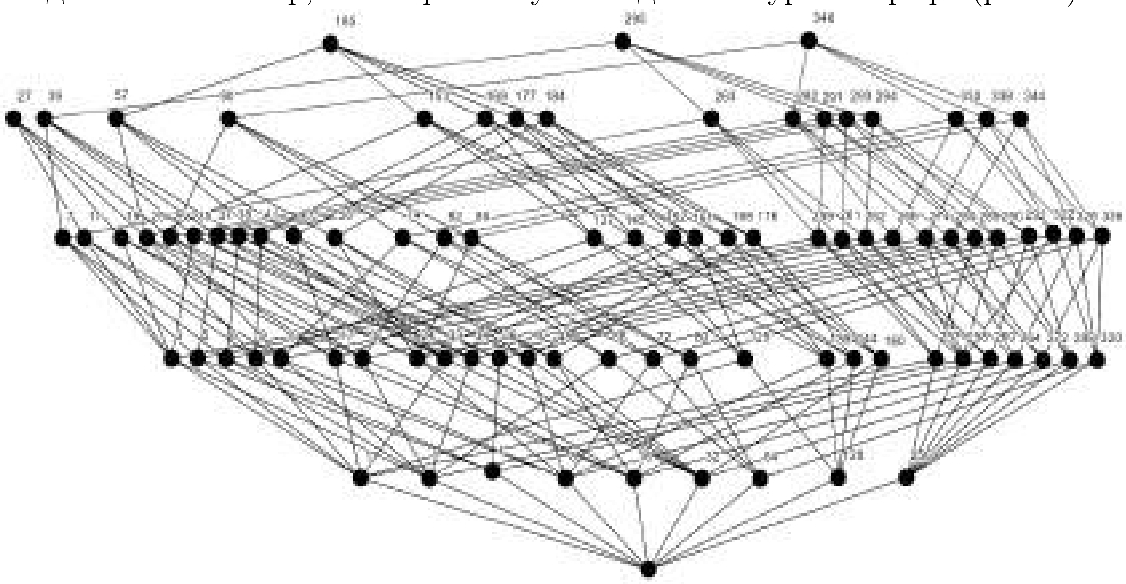

Рис. 3. Функціонально неповні алгебри класу η_0.

З приведених означень 4, 9, 10 випливає наступне твердження.

Твердження 1. *1) $l-$базисність алгебр класу η_0 дорівнює нулеві.*
2) Потенціал всіх ребер графа, зображеного на рис.3, дорівнює нулеві.

До кожної вершини $n-$мірного $\Omega-$кубу веде n ребер ($n = 9$). Кількість ребер, які проведені до кожної вершини графа, представленого на рис. 3, менша ніж 9 (крім тривіальної алгебри). Відсутні ребра зв'язують ці алгебри з функціонально повними алгебрами. Отже, має місце твердження.

Твердження 2. *Тривіальна алгебра є єдиною внутрішньою функціонально неповною алгеброю, а решта вісімдесят сім алгебр є граничними.*

З означення 9 слідує, що в класі η_0 чотири насичені (передповні) алгебри, а саме алгебри 27, 185, 296, 346 з відповідними сигнатурами $\{0, \ 1, \ \wedge, \ \vee\}$, $\{0, \ 1, \ \neg, \ \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $\{0, \ 1, \ \neg, \ \oplus, \ \Leftrightarrow\}$, $\{1, \ \wedge, \ \vee, \ \Rightarrow, \ \Leftrightarrow\}$. З означень 6, 8 випливає твердження.

Твердження 3. *1) Всі алгебри класу η_0 є вільними.*
2) Ранг кожної алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i\rangle \in \eta_0$ дорівнює потужності сигнатури Ω_i або номеру яруса, на якому знаходиться алгебра.

5. Функціонально повні алгебри. Розіб'ємо множину $\mathrm{M}_2^1 = \eta_0 \cup \eta_1 \cup \eta_2 \cup \cup \ldots \cup \eta_{15}$, де η_l-множина $l-$базисних алгебр, $l = 0, 1, \ldots, 15$. Клас функціонально неповних алгебр η_0 розглянутий вище. Дослідимо клас однобазисних алгебр

η_1. Потужність цього класу дорівнює 72. $\Omega-$граф класу η_1, представлений на рис. 4.

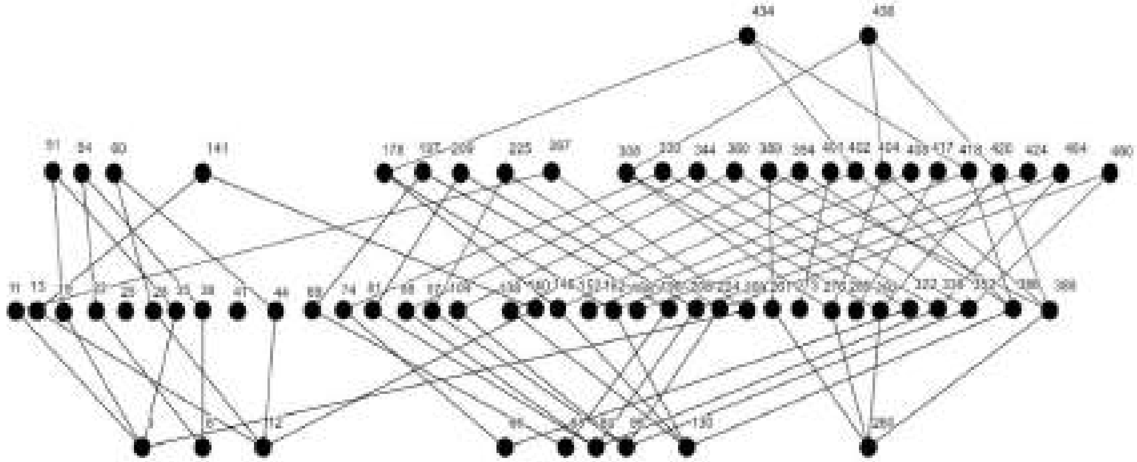

Рис. 4. Граф однобазисних алгебр η_1 класу M_2^1.

Із наведеного рисунка видно, що алгебри розташувались по ярусах наступним чином:

1) другий ярус включає дев'ять канонічних ненасичених алгебр з двоопераційними базисами;
2) третій ярус містить шість канонічних ненасичених алгебр з триопераційними базисами, тридцять вільних алгебр, які отримані з відповідних алгебр другого ярусу шляхом розширення сигнатури на одну операцію. Оскільки базисність цих алгебр така сама як у суміжних алгебр другого ярусу, то ці алгебри мають ранг 1, а ребра, що їх з'єднують мають потенціал 0;
3) четвертий ярус включає двадцять п'ять вільних алгебр, ранг яких рівний двом; насиченими є всі алгебри цього ярусу, крім алгебр з номерами 178, 308, 402, 404, 418, 420;
4) п'ятий ярус містить дві вільні алгебри 434, 436 з рангом три, і ці алгебри є насиченими.

Таким чином, з проведеного аналізу для канонічних алгебр класу η_1 має місце твердження.

Твердження 4. *Клас алгебр η_1 включає сімдесят дві алгебри, серед яких:*

1) п'ятнадцять канонічних алгебр, з яких дві насичені канонічні, двадцять одна насичена вільна алгебра;
2) п'ятдесят сім вільних алгебр, з яких тридцять рангу один, двадцять п'ять рангу два, і дві алгебри рангу три.

На $\Omega-$графах, приведених для класів η_l, $l = 0, 1, \ldots, 6$, тип алгебри легко розпізнати за описаними нижче ознаками.

Канонічні алгебри. Оскільки на рисунках 4-9 зображені тільки ребра з потенціалом 0, які збільшують ранг алгебр, то канонічні алгебри не мають суміжних алгебр нижчого ярусу (до цих алгебр знизу не має ребер). Якщо в канонічній алгебрі є верхні ребра, то вона є ненасиченою. Якщо алгебра не має ребер, то вона зображається як ізольована точка і є канонічною насиченою алгеброю.

Вільні алгебри. Алгебра є вільною, якщо до неї входять ребра з алгебр нижчого ярусу і насиченою, якщо з неї не виходять ребра до алгебр вищого ярусу.

6. $l-$базисні алгебри. Клас η_2 містить сто п'ять алгебр. На третьому ярусі знаходяться чотирнадцять канонічних ненасичених алгебр, на четвертому – чотирнадцять канонічних насичених, дванадцять канонічних ненасичених та тридцять п'ять вільних ненасичених алгебр рангу один. П'ятий ярус містить тридцять вільних насичених алгебр рангу два. На рисунках 5-9 наведені $\Omega-$графи для класів η_l, $l = 2, 3 \ldots, 6$.

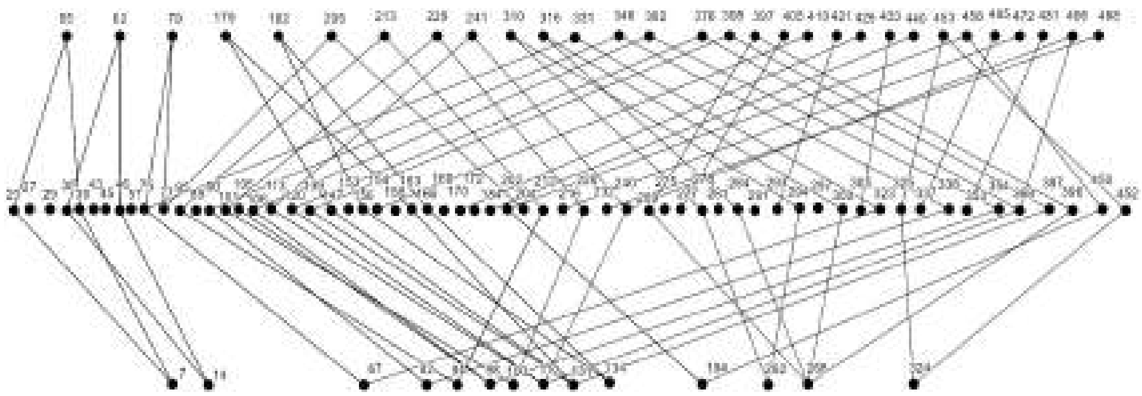

Рис. 5. Граф алгебр η_2 класу M_2^1.

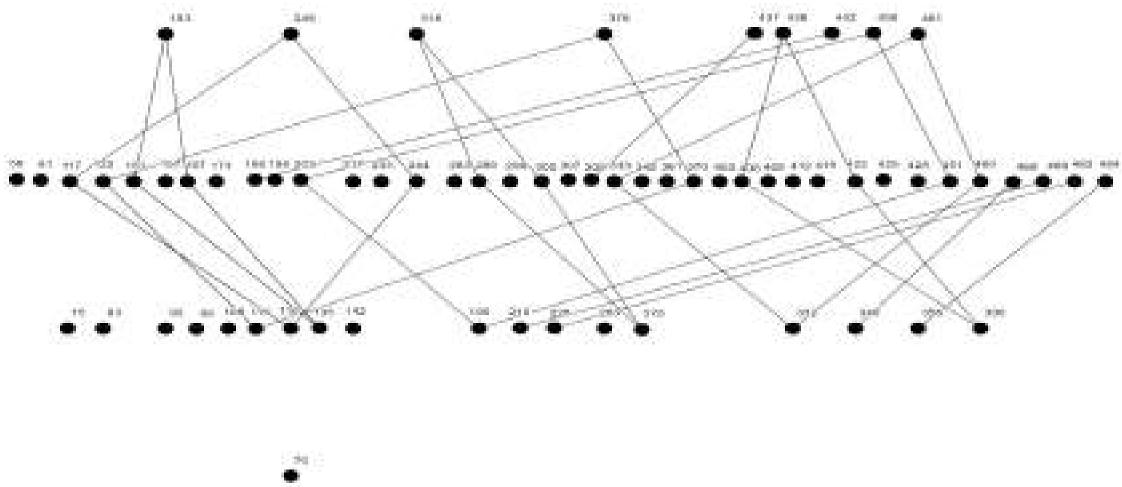

Рис. 6. Граф алгебр η_3 класу M_2^1.

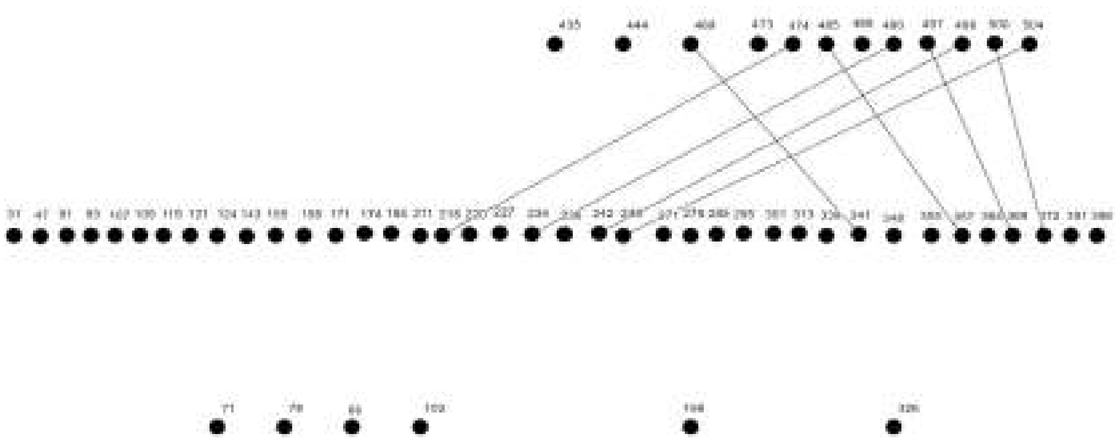

Рис. 7. Граф алгебр η_4 класу M_2^1.

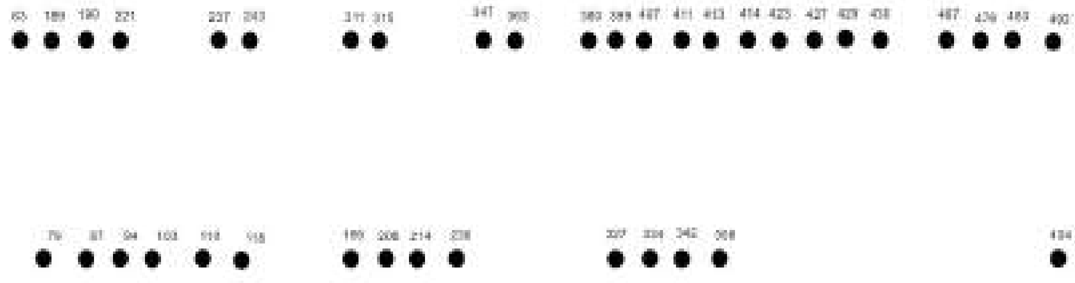

Рис. 8. Граф алгебр η_5 класу M_2^1.

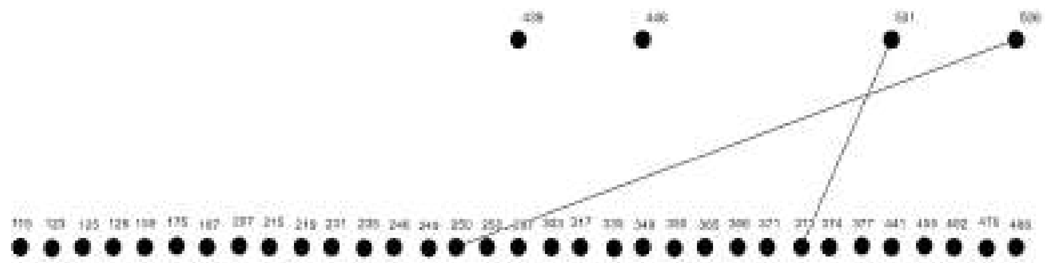

Рис. 9. Граф алгебр η_6 класу M_2^1.

Множини алгебр класів η_7-η_{15} є канонічними насиченими алгебрами і їх графи містять тільки ізольовані точки:

$$\eta_7 = \{95, 111, 222, 238, 343, 359, 247, 382, 463, 475, 477, 491, 493, 499, 502, 508\},$$

$$\eta_8 = \{191, 253, 319, 379, 415, 431, 443, 445, 471, 478, 487, 494, 505\},$$

$$\eta_9 = \{127, 223, 239, 251, 254, 351, 367, 375, 381\}, \ \eta_{10} = \{503, 510\},$$

$$\eta_{11} = \{447, 479, 495, 507, 509\}, \ \eta_{12} = \{255, 383\}, \ \eta_{15} = \{511\}.$$

Із наведених вище результатів випливають твердження.

Твердження 5. *У класі алгебр* M_2^1 *існує чотириста двадцять чотири функціонально повні алгебри.*

У таблиці 1 наведено число $l-$базисних алгебр, $l = 1, 2, \ldots, 15$ і їх розташування по ярусах $\Omega-$кубу.

Таблиця 1

Базис	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**
К-сть/ Ярус	72	105	66	57	39	37	16	13	9	2	5	2	1
2	9												
3	36	14	1										
4	25	61	18	6									
5	2	30	38	39	15								
6			9	12	24	33	6						
7						4	10	13	9				
8										2	5	2	
9													1

Наприклад, на п'ятому ярусі $\Omega-$кубу знаходяться дві однобазисні, тридцять двобазисних, тридцять вісім трибазисних, тридцять дев'ять чотирибазисних і п'ятнадцять п'ятибазисних алгебр. Трибазисні алгебри розташовані наступним чином: одна алгебра на третьому ярусі, вісімнадцять – на четвертому, тридцять вісім – на п'ятому та дев'ять – на шостому ярусі.

Твердження 6. *У класі алгебр* M_2^1 *існує двісті шістдесят п'ять канонічних алгебр.*

Ці алгебри утворюють сигнатурну решітку, яка зображена на рис. 10, і у таблиці 2 наведено їх розподіл за числом базисів.

Таблиця 2

Базис	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**15**
Кількість алгебр	15	40	39	49	39	35	16	13	9	2	5	2	1

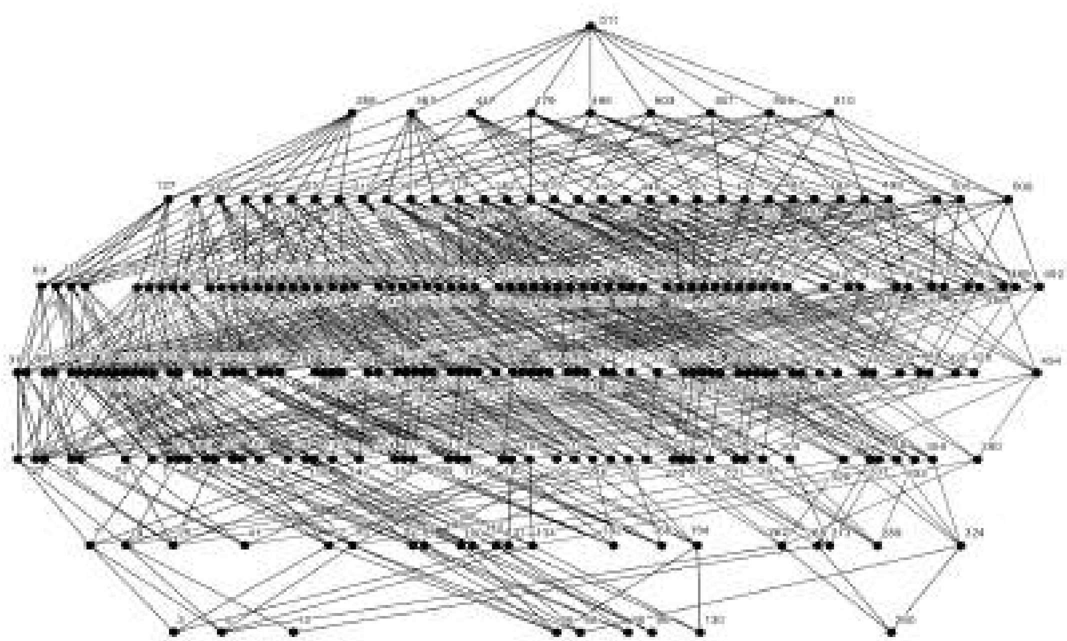

Рис. 10. Канонічні алгебри класу M_2^1.

Всі функціонально неповні алгебри є вільними алгебрами з рангом, що дорівнює потужності сигнатури.

Твердження 7. *У класі алгебр* M_2^1 *існує двісті сорок сім вільних алгебр.*

Розподіл цих алгебр за відповідними рангами наведено у наступній таблиці.

Таблиця 3

Ранг	0	1	2	3	4	5	6
Кількість	88	57	65	27	8	-	2

Вільні алгебри класу M_2^1 утворюють сигнатурний граф (рис. 11), який можемо отримати з сигнатурного кубу множин M_2^1 відтинанням канонічних алгебр.

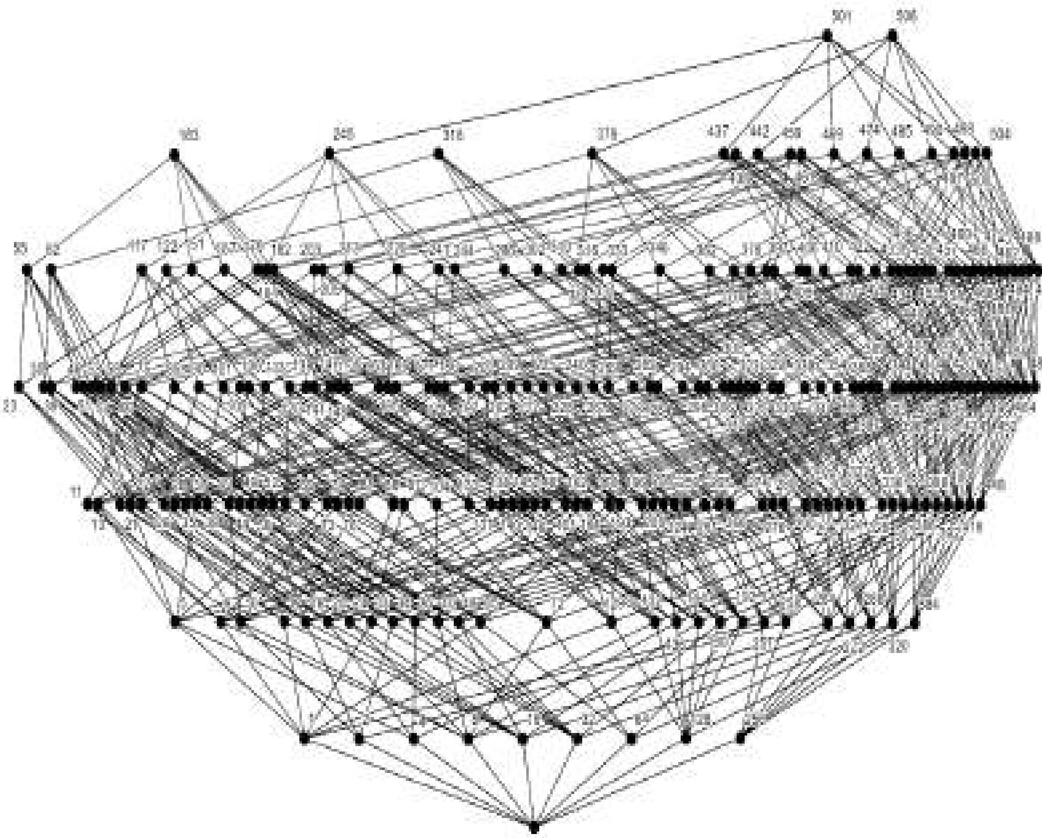

Рис 11. Вільні алгебри класу M_2^1.

Розглянемо узагальнення результатів, отриманих для класу M_2^1 на класи M_2^2, M_2^3, M_2^4, тобто на клас M_2. Клас алгебр M_2^2 утворюють 11-мірні вектори з фіксованими десятою одиничною координатою і одинадцятою нульовою координатою, з яких будується 9-мірний $\Omega-$куб, аналогічний $\Omega-$кубу класу M_2^1. Для кожної $k-$базисної алгебри з класу M_2, існує єдина відповідна $k+1-$базисна алгебра класу M_2^1 (у відповідних алгебрах перші дев'ять координат співпадають).

Аналогічні міркування можна провести і для алгебр класів M_2^3 і M_2^4. Для алгебр класу M_2^3 базисність алгебр у порівнянні з M_2^1 збільшиться на 2. Щоб визначити скільки $k-$базисних алгебр є у класі M_2, потрібно скористатися формулою: $|\eta_k| + 2\,|\eta_{k-1}| + |\eta_{k-2}|$, де $|\eta_k|$ $-$кількість $k-$базисних алгебр у класі M_2^1.

Твердження 8. *У класі алгебр M_2 з 2048 алгебр існує 88 функціонально неповних, а розпроділ функціонально повних алгебр наведений у таблиці 4.*

Таблиця 4

Базис	1	2	3	4	5	6	7	8
К-сть	248	337	348	294	219	172	129	82

Базис	9	10	11	12	13	14	15	16	17
К-сть	51	33	18	14	9	2	1	2	1

7. Висновки. Дослідження теорії булевих функцій є актуальним напрямком у сучасній дискретній математиці. У даній роботі проведені дослідження для класу універсальних алгебр, операції яких мають арність не більше двох. Побудована сигнатурна решітка класу алгебр M_2, потужність якого 2048. Вивчена базисність цих алгебр, побудовані сигнатурні графи для алгебр фіксованої базисності.

Список використаної літератури

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. Proceedings of the Cambridge philosophical society; Vol 31, October 1935. p. 433-454.
2. Мальцев А. И. Алгебраические системы. Москва: Наука, 1970. 392 с.
3. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва: Наука, 1973. С. 3-393.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. Москва: Мир, 1969. 375 с.
5. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. Москва: Наука, 1969. 313 с.
6. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. П. Функции алгебры логики и классы Поста. Москва: Наука, 1966. 120 с.
7. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Москва: Физматгиз, 1962. 476 с.
8. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Из-во АН УССР, 1964. 324 с.
9. Глушков В. М, Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. Киев: Наук. думка, 1974. С. 65-112.
10. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. Кибернетика. 1977. №4. С. 14-21, №6 С. 21-27.
11. Журавлев Ю. И. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Москва: Наука, 1977. С. 9-34.
12. Марченков С. С. Основы теории булевых функций. Москва: Физматлит, 2014. 136 с.
13. Логачев О. А, Сольников А. А. Ященко В. В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. Москва: МЦНМО, 2004. 470 с.
14. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики. Київ: Наукова думка, 2002. 578 с. С. 246-248.

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Investigation of signature cube of universal boolean algebra.

In this paper, the theory of Boolean functions from the point of view of universal Boolean algebras is considered. The present article uses the terminology of well-known authors Kurosh, Maltsev, Post and others. In addition, the paper introduces new concepts such as universal Boolean algebra, $l-$basic algebras, free and canonical algebras. The class of universal Boolean algebras M_2 is also studied, the signature of which includes all single and double operations of two-valued logic. Introducing the concept of the order of equation of algebra signatures were obtained representations of algebras in the form of an 11-digit signature cube. In this paper, cube has been divided into four nine-dimensional cubes M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. A class M_2^1 contains of functionally complete algebras η_0 and a signature graph of this class is constructed, and investigation of these algebras is performed. The class of all functionally complete algebras have been divided into fifteen classes $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{15}$ and the signature graphs of each of these classes were constructed. The structure and types of algebras of these classes were studied. All functionally complete algebras of a class M_2^1 have been represented in the form of a signature graph.

The power of a class M_2^1 and the distribution of algebras in tiers has been established, and a signature graph of canonical algebras of this class has been constructed. The distribution of 259 free algebras on the tiers of the $\Omega-$cube is given and a signature graph of the class of free algebras is constructed.

The obtained results are generalized to classes M_2^1, M_2^2, M_2^3, M_2^4. Based on these results, the distribution 2048 algebras of class M_2 relative to the basicity on the tiers of the $\Omega-$cube is performed.

Keywords: Boolean operations, signature cube, basics of algebras.

References

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. Proceedings of the Cambridge philosophical society; Vol 31, October p. 433-454.
2. Maltcev, A. Y. (1970). Algebraicheskie sistemy. Moskva: Nauka [in Russian].
3. Kurosh, A. H. (1973). Lekcii po obshchej algebre. Moskva: Nauka, 3-393 [in Russian].
4. Sykorskyi, R. (1969). Bulevy algebry. Moskva: Myr [in Russian].
5. Vladymyrov, D. A. (1969). Bulevy algebry. Moskva: Nauka [in Russian].
6. Yablonskyi, S. V., Havrylov, H. P., & Kudriavtsev, V. P. (1966). Funkcii algebry logiki i klassy Posta. Moskva: Nauka [in Russian].
7. Glushkov, V. M. (1962). Sintez cifrovyh avtomatov. Moskva: Fizmatgiz [in Russian].
8. Glushkov, V. M. (1964). Vvedenie v kibernetiku. Kiev: Iz-vo AN USSR [in Russian].
9. Glushkov, V. M, Cejtlin, G. E., & Yushchenko, E. L. (1974). Algebra. Yazyki. Programmirovanie. Kiev: Nauk. dumka, 65-112 [in Russian].
10. Zhuravlev, YU. I. (1977). Korrektnye algebry nad mnozhestvami nekorrektnyh (evristicheskih) algoritmov. Kibernetika, №4, 14-21, №6, 21-27 [in Russian].
11. Zhuravlev, YU. I. (1977). Diskretnaya matematika i matematicheskie voprosy kibernetiki. Moskva: Nauka, 9-34 [in Russian].
12. Marchenkov, S. S. (2014). Osnovy teorii bulevyh funkcij. Moskva: Fizmatlit [in Russian].
13. Logachev, O. A, Sol'nikov, A. A., & Yashchenko, V. V. (2004). Bulevy funkcii v teorii kodirovaniya i kriptologii. Moskva: MCNMO [in Russian].
14. Kapitonova, Yu. V., Kryvyj, S. L., Letychevskyj, O.A., Luczkyj, G.M., & Pechurin, M.K. (2002). Osnovy dyskretnoyi matematyky. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].

Одержано 02.10.2020

УДК 519.8
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).168-175

Н. В. Семенова[1], М. М. Ломага[2]

[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор фіз.-мат. наук
nvsemenova@meta.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5442-5413

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри системного аналізу і теорії оптимізації
mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8813-0464

ПРО ІСНУВАННЯ І ОПТИМАЛЬНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПУКЛОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ КРИТЕРІЇВ

Серед векторних задач лексикографічні задачі утворюють досить широкий і важливий клас задач оптимізації. Лексикографічне впорядкування використовується для встановлення правил субординації й пріоритету. Тому значна кількість задач, в тому числі задачі оптимізації складних систем, задачі стохастичного програмування в умовах ризику, задачі динамічного характеру та ін., можна подати у вигляді лексикографічних задач оптимізації. Встановлено умови існування та оптимальності розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою множиною допустимих розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини, конусу, що лексикографічно впорядковує її відносно критеріїв оптимізації та локальних шатрів, що будуються в граничних точках допустимої множини. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації.

Ключові слова: лексикографічна оптимізація, векторний критерій, існування розв'язків, умови оптимальності, множина Парето, множина Слейтера.

1. Вступ. Лексикографічний підхід до розв'язання багатокритеріальних задач полягає в строгому ранжируванні критеріїв за відносною важливістю і дозволяє домогтися оптимізації більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за всіма іншими менш важливими критеріями. Найчастіше такі багатокритеріальні задачі виникають при послідовному введенні додаткових критеріїв у звичайні скалярні задачі оптимізації, які можуть мати не єдиний розв'язок. Задачі лексикографічної оптимізації виникають також при моделюванні ієрархічних структур, у стохастичному програмуванні, при розв'язанні деяких задач динамічного характеру тощо [1-3]. У лексикографічному вигляді можна подати векторні задачі динамічного характеру, які полягають у послідовному досягненні часткових цілей. У лексикографічній постановці формулюються задачі оптимізації складних систем, які полягають із взаємозалежних підсистем, що відносяться до різних ієрархічних рівнів.

До можливих методів розв'язання таких задач відноситься використання схеми скаляризації або згортки векторного критерію для одноетапного розв'язання [1, 2]. У [2] для відшукання лексикографічного оптимуму лінійних багатокритеріальних задач оптимізації було запропоновано використання симплексметоду. У [4, 5] задача лексикографічної оптимізації з лінійними обмеженнями зводиться до послідовності лінійних лексикографічних задач шляхом апроксимації функцій критеріїв. У [6] представлено алгоритм, що дозволяє звести розв'язання вхідної задачі лексикографічної оптимізації за допомогою апроксимації допустимої множини до розв'язання послідовності лексикографічних задач лінійного програмування. В однокритеріальній оптимізації ряд алгоритмів пошуку екстремуму побудовано на використанні апарата теорії двоїстості. Це питання є цікавим і для задач багатокритеріальної оптимізації. У статті [7] досліджуються опуклі квадратичні задачі лексикографічної оптимізації на множині, заданій системою лінійних нерівностей, і питання побудови двоїстих до них задач. Двоїсті задачі до вхідної будуються за допомогою відображення Лагранжа, де множники Лагранжа – це векторні змінні, множиною значень кожної з яких є множина векторів простору, розмірність якого рівна кількості часткових критеріїв з введеним на ньому лексикографічним порядком. Метою досліджень, представлених в даній статті, є встановлення умов існування оптимальних розв'язків багатокритеріальних задач лексикографічної оптимізації з необмеженою допустимою множиною та умов оптимальності розв'язків на основі використання властивостей рецесивного конусу опуклої допустимої множини [8], конусу, що лексикографічно її впорядковує відносно критеріїв оптимізації [2] та локальних шатрів [9] в граничних точках допустимої множини.

2. Постановка задачі. У критеріальному просторі R^l вводиться бінарне відношення лексикографічного порядку векторів $z = (z_1, z_2, \dots, z_l)$ і $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_l)$ таке, що $z \geq^L z' \Leftrightarrow (z = z') \vee (\exists j \in N_l : \forall i \in N_{j-1} (z_j > z'_j, z_i = z'_i))$, де $N_0 = \emptyset$.

Розглянемо задачу лексикографічної оптимізації наступного вигляду:

$$Z_L(F, X) : \max{}^L \{F(x) \,| x \in X\},$$

де $F(x) = (f_1, f_2, \dots, f_l), l \geq 2, f_k(x) = \langle c_k, x \rangle, c_k \in R^n, k \in N_l = \{1, 2, \dots, l\}$, $X = \{x \in R^n | g^i(x) \leq 0, x \geq 0, i \in N_m\}$, $g^i(x)$, $i \in N_m$, – опуклі функції. В задачі лексикографічної оптимізації часткові критерії впорядковані за важливістю. При цьому виникає поняття лексикографічного оптимуму.

Означення 1. *Вектор x лексикографічно переважає вектор x', коли виконується одна з l умов:*
1) $f_1(x) > f_1(x')$;
2) $f_1(x) = f_1(x')$, але $f_2(x) > f_2(x')$;
. . . .
l) $f_j(x) = f_j(x'), j = 1, 2, \dots, l-1$, але $f_l(x) > f_l(x')$.

Означення 2. *Вектор x еквівалентний вектору x', коли за кожним критерієм вектори x та x' мають однакові оцінки, при цьому $x \neq x'$.*

Під розв'язанням задачі $Z_L(F, X)$ будемо розуміти пошук елементів множини $L(F, X)$ лексикографічних оптимальних розв'язків, яку задамо в такий спосіб:

$$L(F, X) = \{x \in X | \upsilon(x, F, X) = \emptyset\},$$

де $\upsilon(x, F, X) = \{x' \in X | \exists j \in N_l : f_j(x') > f_j(x) \wedge j = \min\{i \in N_l : f_i(x') \neq f_i(x)\}\}$.

Безпосередньо з означення лексикографічно оптимальних розв'язків випливає, що множину $L(F,X)$ можна задати за допомогою рекурентних співвідношень. Таким чином,

$$L_i(F,X) = Arg\max\{f_i(x) : x \in L_{i-1}(F,X), i \in N_l\}, \tag{1}$$

де $Arg\max\{\cdot\}$ – множина всіх оптимальних розв'язків відповідної задачі максимізації, $L_0(F,X) = X$, $L_l(F,X) = L(F,X)$.

Із співвідношень (1) випливає справедливість включень послідовності множин

$$X \supseteq L_1(F,X) \supseteq L_2(F,X) \supseteq \ldots \supseteq L_l(F,X) = L(F,X),$$

тобто кожен наступний частковий критерій звужує множину розв'язків, отриманих з урахуванням всіх попередніх часткових критеріїв.

Як відомо [1, 2], множина $L(F,X)$ може бути визначена, як результат розв'язання послідовності l скалярних задач $Z_{L_i}(F,X), i \in N_l$ опуклого програмування з лінійними цільовими функціями. Отже, задачу $Z_L(F,X)$ можна розглядати як задачу послідовної оптимізації.

Відзначимо важливу властивість задач $Z_{L_i}(F,X), i \in N_l$, [8]: будь-який локальний мінімум (максимум) є глобальним мінімумом (максимумом).

Очевидні наступні властивості.

Властивість 1. *Якщо для допустимого розв'язку $x^0 \in X$ $\forall x \in X \setminus \{x^0\}$ виконується нерівність $f_1(x) < f_1(x^0)$, то $x^0 \in L(F,X)$.*

Властивість 2. *Якщо для допустимого розв'язку $x \in X$ $\exists x' \in X \setminus \{x\}$ такий, що $f_1(x') > f_1(x)$, то $x \notin L(F,X)$.*

Згідно [2] введемо означення.

Означення 3. *Вектор $z \in R^l$ називається лексикографічно додатним, якщо перший його ненульовий компонент у порядку зростання індексів компонентів є додатним.*

Будемо позначати лексикографічну додатність вектора $z \in R^l$ як: $z >^L 0$, тут $(>^L)$ – знак відношення лексикографічно більше.

Вектор $z \in R^l$ лексикографічно більше вектора $y \in R^l$ $z >^L y$, якщо вектор $(z - y)$ лексикографічно додатний, $(z - y) >^L 0$. При такому упорядкуванні будь-які два вектори однієї розмірності порівнювані між собою.

Отже, для будь-яких векторів $a, b \in R^l$ $a >^L b$ тоді й тільки тоді, коли існує індекс $1 \leq i \leq l$, такий, що $a_i > b_i$, і якщо $i > 1$, то $a_k = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, i-1$. Вектор a лексикографічно не менше вектора b, $a \geq^L b$, якщо $a >^L b$ або $a = b$, $(\geq^L)$ – знак відношення лексикографічно не менше.

Означення 4. *Розв'язок $x^* \in X$ задачі $Z_L(F,X)$ будемо називати лексикографічно оптимальним, якщо він не гірше будь-якого іншого допустимого розв'язку $y \in X$ в розумінні відношення $\geq^L$, тобто якщо $F(x^*) - F(y) \geq^L 0$.*

Отже, для довільного $x \in X$ справедливе твердження

$$x \in L(F,X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) >^L F(x)\} = \emptyset.$$

У лексикографічній задачі оптимізації досягають як завгодно малого приросту більш важливого критерію за рахунок будь-яких втрат за іншими менш важливими критеріями.

3. Існування лексикографічно оптимальних розв'язків. Існування оптимальних розв'язків на допустимій множині X і структура множини оптимальних розв'язків залежать від властивостей порядку відношення переваги, структури допустимої області X, природи її елементів та ін. Згідно [2] скінченність множини X є достатньою умовою існування оптимальних розв'язків лексикографічної задачі оптимізації. Також множина $L(F, X)$ не порожня, якщо множина векторних оцінок $Y = \{F(x)|x \in X\}$ обмежена і замкнена. Однак у випадку нескінченної допустимої області X множина лексикографічно оптимальних розв'язків може бути порожньою.

Актуальним є вивчення питань можливості розв'язання лексикографічних задач векторної оптимізації, у яких множина допустимих розв'язків необмежена і опукла.

Необмеженість опуклої множини X означає, що $0^+X \setminus \{0\} \notin \emptyset$, де $0^+X = \{y \in R^n | \forall x \in X : x + ty \in X, t \geq 0\}$ – рецесивний конус множини X. Аналіз задачі $Z_L(F, X)$ проведемо з урахуванням властивостей рецесивного конусу 0^+X [8] й конусу $K^L = \{x \in R^n | Cx >^L 0\}$, що лексикографічно впорядковує допустиму множину відносно критеріїв оптимізації, який назвемо також конусом перспективних [10] лексикографічних напрямків задачі $Z_L(F, X)$, оскільки перехід з будь-якої точки $x_1 \in R^n$ в точку $x_2 = x_1 + y$, де y належить конусу K^L, приводить до нерівності $Cx_2 >^L Cx_1$, тобто до лексикографічного зростання значень векторного критерію задачі.

Конус K^L, що визначає лексикографічний порядок у просторі R^l, є опуклим конусом напрямків лексикографічно додатних векторів і його можна подати у вигляді об'єднання множин, що не перетинаються:

$$K^L = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_{l,}$$

де $K_1 = \{x \in R^n | c_1 x > 0\}$,

$K_2 = \{x \in R^n | c_1 x = 0, c_2 x > 0\}$,

....

$K_l = \{x \in R^n | c_1 x = 0, c_2 x = 0, \ldots, c_{l-1} x = 0, c_l x > 0\}$.

Для довільного $x \in X$ істинне висловлювання [2]:

$$x \in L(F, X) \Leftrightarrow (x + K^L) \cap X = \emptyset. \tag{2}$$

Продовжуючи дослідження питань існування різних видів оптимальних розв'язків векторних задач оптимізації [11-14], розпочаті в роботі [2] для лексикографічних задач, розглянемо необхідні й достатні умови існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F, X)$.

У випадку опуклої замкненої необмеженої допустимої множини X задачі $Z_L(F, X)$ справедлива теорема.

Теорема 1. *Необхідною умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F, X)$ є порожній перетин конуса K^L перспективних лексикографічних напрямків і рецесивного конуса 0^+X, тобто*

$$K^L \cap 0^+X = \emptyset. \tag{3}$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що множина $L(F, X) \neq \emptyset$, але не виконується умова (3), тобто перетин конусів K^L та 0^+X не порожній: $K^L \cap \cap 0^+X \neq \emptyset$. Тоді $\forall x \in X$ справедливі співвідношення:

$$(x + K^L) \cap X \supseteq (x + K^L) \cap (x + 0^+X) = x + (K^L \cap 0^+X) \neq \emptyset.$$

Враховуючи формулу (2), можна зробити висновок, що множина $L(F, X) = \emptyset$. Але це суперечить умові теореми й тим самим доводить її справедливість.

Обернене твердження теореми в загальному випадку не є вірним. У монографії [2:113] наведено приклад, у якому для допустимої множини виконана умова (3), але множина її крайніх точок є необмеженою, і в результаті множина $L(F, X) = \emptyset$.

Напрямок лексикографічно додатного вектора будемо називати лексикографічно додатним напрямком.

Справедлива теорема.

Теорема 2 [2:113]. *Нехай V – непорожня множина крайніх точок опуклої замкненої множини X. Якщо V – обмежена множина, то множина X має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.*

В наших позначеннях за умов теореми 2 множина $L(F, X)$ не порожня тоді й тільки тоді, коли виконується умова (3).

У випадку опуклої необмеженої і багатогранної множини X справедливий наслідок з теореми 2.

Наслідок 1 [2:114]. *Замкнена опукла багатогранна множина має лексикографічний максимум тоді й тільки тоді, коли вона обмежена за всіма лексикографічно додатними напрямками.*

З теореми 1 та наслідку з теореми 2 випливає справедливість наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай допустима множина задачі є замкненою опуклою багатогранною множиною. Необхідною і достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків цієї задачі є виконання рівності* (3).

Зазначимо, що умова багатогранності опуклої замкненої необмеженої множини X є істотною для ствердження того факту, що умова (3) є необхідною й достатньою умовою існування лексикографічно оптимальних розв'язків задачі $Z_L(F, X)$.

4. Умови оптимальності розв'язків. Як відомо [3,10-14], якщо критерії векторної задачі є рівноважливими, під розв'язанням векторної задачі звичайно розуміють знаходження деякої підмножини однієї з таких множин: $P(F, X)$ усіх Парето-оптимальних (ефективних) розв'язків, $Sl(F, X)$ оптимальних за Слейтером розв'язків. Справедливі твердження $\forall x \in X$:

$$x \in P(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\} = \emptyset$$

$$x \in Sl(F, X) \Leftrightarrow \{y \in X | F(y) > F(x)\} = \emptyset.$$

Очевидно, що $L(F, X) \subseteq P(F, X) \subseteq Sl(F, X)$.

Як відомо з теореми 1 з [3:163], у зв'язку з лінійністю функцій критерію задачі $Z_L(F, X)$ та незалежно від структури допустимої множини X Парето-оптимальні і оптимальні за Слейтером розв'язки можуть або складати всю допустиму множину, або знаходитись лише на її границі. Тому, враховуючи включення $L(F,X) \subseteq P(F,X) \subseteq Sl(F,X)$ при встановленні необхідних і достатніх умов лексикографічної оптимальності розв'язків задачі будемо розглядати лише граничні точки множини X.

Позначимо FrB підмножину граничних точок деякої множини B. Нехай $y \in FrX$. Введемо до розгляду такі множини: $N(y) = \{i \in N_m | \ g_i(y) = 0\}$, $X(y) = \{x \in R^n | \ g_i(x) \leq 0, i \ \ \in N(y)\}$. Крім того, якщо $g_i(x), i \in N(y)$, – неперервно диференційовні функції в R^n, визначимо множину

$$Q(y) = \{x \in R^n | \ \langle \nabla g_i(y), \ (x-y) \rangle \leq 0, i \in N(y)\},$$

де $\nabla g_i(y)$ – градієнт функції $f_i(x)$ у точці $y, i \in N(y)$. Очевидно, що $\forall y \in FrX$: $N(y) \neq \emptyset, y + 0^+X \subseteq X \subseteq X(y) \subseteq Q(y)$.

Теорема 4. *Нехай $y \in FrX$. Якщо $g_i(x), i \in N(y)$, – неперервно диференційовні функції, то співвідношення*

$$K^L \cap (Q(y) - y) = \emptyset \tag{4}$$

є достатньою умовою для включення $y \in L(C,X)$. Крім того, якщо $\{\bigtriangledown g_i(y) | \ i \in N(y)\}$ – система лінійно незалежних векторів, то співвідношення

$$K_1 \cap (Q(y) - y) = \emptyset \tag{5}$$

є необхідною умовою для включення $y \in L(C,X)$.

Доведення. *Достатність* умов теореми стає очевидною, враховуючи включення $X \subseteq Q(y)$, а також формулу (2).

Необхідність. Вимога лінійної незалежності векторів $\{\bigtriangledown g_i(y) | i \in N(y)\}$ приводить до виконання співвідношень: $intQ(y) \neq \emptyset$, $intQ(y) = riQ(y)$, де riB – відносна внутрішність деякої множини B.

Нехай $y \in L(C,X)$, тобто згідно формулі (2)

$$(x + K^L) \cap X = \emptyset. \tag{6}$$

Припустимо (від супротивного), що співвідношення (5) не виконується, тобто $K_1 \cap (Q(y) - y) \neq \emptyset$, звідки за наслідком 6.3.2 з [8] $K_1 \cap int(Q(y) - y) \neq \emptyset$. Враховуючи також, що за умов даної теореми сума лінійних оболонок конусів K_1 і $(Q(y) - y)$ збігається з R^n, і згідно з теоремою 3.4 [15:31] робимо висновок про невідокремлюваність конусів $K_1 \cup \{0\}$ та $int(Q(y) - y)$, що є локальними шатрами [9, 15] у точці y множин $(y + K_1) \cup \{y\}$ та X відповідно. Крім того, кожен із цих локальних шатрів не є лінійним підпростором в R^n, оскільки точка $\{0\} \in R^n$ не належить їхнім внутрішностям, а також враховуючи теореми 1.1 та 6.1 з [8]. Тоді відповідно до теореми 1.3 з [15:204] $((y+K_1) \cup \{y\}) \cap X \setminus \{y\} \neq \emptyset$, що суперечить умові (6) і тим самим доводить необхідність виконання співвідношення (5) для будь-якої лексикографічно оптимальної граничної точки $y \in X$ за умов теореми. Доведення теореми завершено.

5. Висновки. Досліджені питання існування та оптимальності розв'язків опуклих задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв та необмеженій допустимій множині. На основі проведеного аналізу зазначених задач з урахуванням властивостей конусів перспективних лексикографічних напрямків, рецесивних напрямків та локальних шатрів у граничних точках допустимої множини встановлено необхідні та достатні умови існування та оптимальності розв'язків досліджених задач. Отримані умови можна успішно використовувати при розробці алгоритмів пошуку оптимальних розв'язків зазначених задач лексикографічної оптимізації.

Список використаної літератури

1. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. радио, 1975. 192 с.
2. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгородський національний університет, 2002. 312 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Физматлит, 2007. 256 с.
4. Ломага М.М., Семенов В.В. Квадратичные задачи лексикографической оптимизации: свойства и решения. *Компьютерная математика.* 2013. № 2. С. 134-143.
5. Семенова Н.В., Ломага М. М., Семенов В.В. Алгоритм решения многокритериальных задач лексикографической оптимизации с выпуклыми функциями критериев. *International Journal "Information Theories and Applications".* Vol. 21, N 3. 2014. P. 254-262.
6. Ломага М. М. Розв'язання задач лексикографічної оптимізації з лінійними функціями критеріїв на опуклій множині. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2015. №2 (27). С. 66-72.
7. Ломага М. М., Семенова Н.В. Квадратичні лексикографічні задачі оптимізації і відображення Лагранжа. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* 2019. №2 (35). С. 127-133.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
9. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач. *Успехи математических наук.* 1975. 30, № 3(183). С. 3–55.
10. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. К.: Наук. думка, 1995. 171 с.
11. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Кононова А. А. Устойчивость и неограниченность задач векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 1997. № 1. С. 3–10.
12. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ.* 2000. № 6. С. 39–46.
13. Сергієнко Т.І. Про існування парето-оптимальних розв'язків задачі векторної оптимізації з необмеженою допустимою областю. *Доповіді НАН України.* 2015, № 10. С. 27-31.
14. Лебєдєва Т.Т., Семенова Н.В., Сергієнко Т.І. Умови оптимальності та розв'язуваності в задачах лінійної векторної оптимізації з опуклою допустимою множиною. *Доповіді НАН України.* 2003, № 10. С. 80–85.
15. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Semenova N. V., Lomaha M. M. On existence and optimality of solutions of a vector problem of lexicographic convex optimization with linear of criteria functions.

Vector problems lexicographic ones constitute a broad and significant class of problems of optimization. Lexicographic ordering is applied to establish rules of subordination and priority. Hence, a lot of problems including the ones of complex system optimization, of stochastic programming under risk, of dynamic character, etc. may be presented in the form of lexicographic problems of optimization. We have revealed conditions of existence and optimality of solutions of multi-criteria problems of lexicographic optimization with an unbounded set of feasible solutions on the basis of applying properties of a recession cone of a convex feasible set, the cone which puts in order lexicographically of a feasible set with respect to optimization criteria and local tent built at the boundary points of the feasible set. Received conditions may be successfully used while developing algorithms for finding optimal solutions of mentioned problems of lexicographic optimization.

Keywords: lexicographic optimization, vector criterion, existence of solutions, optimality conditions, set of Pareto, set of Slater.

References

1. Podinovskiy, V. V., & Gavrilov, V.M. (1975). Optimization on the consistently applied criteria. *Moskow*: *Sov. radio.* [in Russian]
2. Chervak, Y. Y. (2002). Optimizatsiya. Nepokraschuvaniy vibir. *Uzhgorod*: *Uzhgorodskiy natsIonalniy unIversitet* [in Ukrainian].
3. Podinovskiy, V. V., & Nogin, V.D. (2007). Pareto-optimal solutions of multicriteria problems. 2-th publ. *Moscow*: *Fizmatlit* [in Russian].
4. Lomaha, M.M., & Semenov, V.V. (2013). Quadratic problems of lexicographic optimization: properties and solving. *Komp'yuterna mathematica.* N 2. (pp. 134 – 143) [in Ukrainian].
5. Semenova, N.V., Lomaha, M.M., & Semenov, V.V. (2014). Algorithm of solving of multicriteria lexicographic optimization problems with the convex functions of criteria. *International Journal "Information Theories and Applications".* Vol. 21, N 3. (pp. 254–262). [in Russian]
6. Lomaha, M.M. (2015). Solving lexicographic optimization problems with linear functions of criteria on a convex set. *Uzhgorod University Scientific Bulletin. Series*: *Mathematics and Informatics.* N 2(27). (pp. 70 – 75) [in Ukrainian].
7. Lomaha, M.M., & Semenova, N.V. (2019). Quadratic lexicographic problems of optimization and Lagrange's reflection. *Uzhgorod University Scientific Bulletin. Series*: *Mathematics and Informatics.* N 2(35). (pp. 127 – 133) [in Ukrainian].
8. Rockafellar, R. (1973). Convex analysis. *Moscow*: *Mir* [in Russian].
9. Boltyanskyy, V.H. (1975). Tent method in the theory of extreme problems. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk.* 30, N 3(183). (pp. 3–55) [in Russian]
10. Sergienko, T.I., Kozeratska, L. N., & Lebedeva, T. T. (1995). Investigation of stability and parametric analysis of discrete optimization problems. *Kyiv*: *Nauk. dumka.* [in Russian].
11. Sergienko, I.V., Kozeratska, L. N., & Kononova, A.A. (1997). Stability and unboundedness of vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 33, N1. (pp. 1–7) [in Russian].
12. Sergienko, I.V., Lebedeva, T.T., & Semenova, N.V. (2000). Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* Vol. 36, N 6. (pp. 823 –828) [in Russian].
13. Sergienko, T.I. (2015). Existence of Pareto-optimal solutions to the vector optimization problem with an unbounded feasible set. *Dopov. NAN Ukraini.* N 10. (pp. 27 – 31) [in Ukrainian].
14. Lebedeva, T. T., Semenova, N.V., & Sergienko, T.I. (2003). Optimality and solvability conditions in linear vector optimization problems with convex feasible region. *Dopov. NAN Ukraini.* N 10. (pp. 80 – 85) [in Ukrainian].
15. Pshenichny, B. N. (1980). Convex analysis and extreme problems. *Moscow*: *Nauka* [in Russian].

Одержано 03.10.2020

УДК 044.89
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).176-183

М. М. Шаркаді[1], М. М. Маляр[2], Г. В. Мазютинець[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1850-996X

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук, професор
mykola.malyar@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2544-1959

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри інформаційних управляючих систем та технологій
gabbi.maz@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3070-1831

НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ ФІНАНСОВОЇ БЕЗПЕКИ ПІДПРИЄМСТВА

У сучасному глобалізованому світі існування будь-якої держави залежить від її економічної безпеки, яка є однією із важливих компонент національної безпеки країни в цілому. Одним із основних сегментів економічної безпеки, який вагомо впливає на її рівень, виступає фінансовий сегмент, тобто сукупність фінансових показників суб'єкта економічного господарювання, які об'єднуються в глобальний показник. Прогнозування цього показника є складним аналітично-розрахунковим процесом і потребує детального дослідження тенденцій розвитку та передбачення впливу складових досліджуваного фактору на рівень економічної безпеки держави.

Визначення рівня економічної безпеки держави в цілому не мислиме без використання комп'ютерних технологій в основі яких лежить інтелектуальний аналіз даних. Розробка відповідних моделей і методів обробки інформації безпосередньо зв'язана із знаннями про конкретну предметну область, для якої створюється інтелектуальна система, рідко бувають повними й абсолютно достовірними. Навіть кількісні дані, отримані шляхом досить точних експериментів, мають статистичні оцінки вірогідності, надійності, значимості, неточності і т.д. Поряд із кількісними характеристиками в базах знань інтелектуальних систем повинні зберігатися якісні показники, евристичні правила, текстові знання і т.д. При обробці знань із застосуванням механізмів формальної логіки виникає протиріччя між нечіткими знаннями і чіткими методами логічного виведення. Розв'язати це протиріччя можна шляхом використання спеціальних методів подання й обробки нечітких знань.

Метою даної роботи є розроблення моделі подання оцінок показників об'єкта економічного господарювання, враховуючи різні характеристики, що оцінюються за кількісними показниками, і на основі різних нечітких моделей представлення знань у відповідній предметній області.

Ключові слова: фінансова безпека, нечітка модель, функція належності, показники ефективності.

1. Вступ. Застосування комп'ютерних технологій у різних сферах людської діяльності супроводжується розробкою інтелектуальних систем, які використовують зв'язок знань у загальному випадку з навколишнім світом. Постановка і розв'язання будь-якої задачі зв'язана з конкретними предметними областями, які, як звичайно, є погано або слабко структурованими.

Нечітке математичне моделювання являється одним із найбільш перспективних і активних напрямів прикладних досліджень в області управління і прийняття рішень у слабко структурованих системах. З кожним роком діапазон застосування нечітких моделей та методів розширюється, охоплюючи різні нові області. Суть нечіткого математичного моделювання полягає в тому, що елементами дослідження являються не числа, а деякі нечіткі множини або їх поєднання. В основі такого підходу лежить не традиційна логіка, а логіка з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками і нечіткими правилами виводу.

Значна кількість важливих проблем підтримки прийняття управлінських рішень, що виникають у різних сферах людської діяльності, зводиться до задач оцінки різного роду явищ і процесів. При проектуванні і управлінні складною соціо-економічною системою виникає проблема, коли людина не здатна дати точні і саме тоді практичні значення суджень про їх поведінку.

2. Постановка проблеми. На сьогоднішній день відсутнє єдине універсальне визначення сутності та структури економічної безпеки. Категорія «безпека» характеризується як одна з невід'ємних рис стабільного функціонування соціо-економічної системи в цілому її життєдіяльності, стабільного розвитку та стійкості до зовнішніх і внутрішніх подразників. Фінансова безпека – це складова економічної безпеки, яка являє собою такий стан підприємства, що: дозволяє забезпечити фінансову стійкість, платоспроможність, ліквідність і достатню фінансову незалежність підприємства в довгостроковому періоді; забезпечує оптимальне залучення та ефективне використання фінансових ресурсів підприємства; дозволяє ідентифікувати небезпеки і загрози стану підприємства та розробляти заходи для їх вчасного усунення; дозволяє самостійно розробляти та впроваджувати фінансову стратегію; має бути оцінена кількісними та якісними показниками, які мають граничні значення[1].

Проблема забезпечення фінансової безпеки є актуальною для будь-якого суб'єкта господарювання, оскільки він постійно перебуває в стані впливу великої кількості та різноманітності загроз, що здатні зруйнувати стабільне функціонування підприємства через порушення фінансової безпеки. Так, безладне позичання коштів рано чи пізно призведе до того, що обсяг позикових засобів перевищить реальні можливості підприємства розраховуватись із кредиторами. Це означає втрату фінансової стійкості, що може бути виявлено за балансом компанії.

Останнім часом увага вчених все більше зосереджується саме на проблемі забезпечення фінансової безпеки підприємства. Це, передусім, зумовлено тим, що саме підприємства здійснюють безпосередній вплив на формування більшої частини валового внутрішнього продукту держави, а також створюють матеріальне підґрунтя для її розвитку, забезпечуючи формування доходної частини бюджетів через податкову систему. Фінансова безпека компанії є інтегральною характеристикою здатності підприємства протистояти існуючим і виникаючим внутрішнім й зовнішнім небезпекам і загрозам, спроможності системи управління забезпечувати й підтримувати фінансову рівновагу, стійкість, платоспроможність та ліквідність в поточному і перспективному періодах.

Покращення показників економічної діяльності суб'єктів господарювання залежить від складових якісного і кількісного характеру та функціональних складових економічної безпеки. Функціональними складовими вважаються фінансова, інтелектуальна, кадрова, техніко-технологічна, політико-правова, інформаційна, соціальна безпеки. Кожна функціональна складова несе в собі власний зміст, систему критеріїв оцінювання та методи забезпечення своєї мети.

Головним завданням формування структури економічної безпеки є розроблення планів на майбутнє та моніторинг їх реалізації. Для цього необхідно розробити методику аналітичного прогнозування всіх функціональних складових економічної безпеки і зокрема фінансової безпеки об'єкта економічного господарювання.

Для визначення фактичного рівня фінансової економічної безпеки використовується аналітична інформація функціонування підприємства, яка дозволяє побачити стан як на даний момент часу, так і в перспективі.

Загальна постановка проблеми (завдання) може бути представлена наступним чином. Нехай для певного суб'єкта економічного господарювання відома множина кількісних і якісних показників його функціонування, а також відома історія цих показників за певні періоди часу. Виникає завдання передбачити оцінку рівня економічної безпеки даного суб'єкта господарювання.

Для вирішення даної проблеми потрібно вирішити низку задач (завдань). Пропонується наступна схема вирішення проблеми, яка складається із сукупності послідовних етапів, на кожному із яких розв'язується конкретний клас задач.

На першому етапі розв'язується клас задач передбачення. Тобто, на основі історії показників за певні періоди часу прогнозуються значення цих показників на майбутні періоди з використанням моделей та методів регресійного аналізу і машинного навчання [2].

На другому етапі розв'язується задача фазифікації показників (критеріїв) ефективності за допомогою апарату нечіткої математики [3].

Третій етап включає агрегацію показників представлених у вигляді нечітких чисел у певні групи (кластери). Тут використовуються моделі та методи вибору вагових коефіцієнтів і згорток.

На наступному етапі за допомогою методів логічного виведення визначається нечітка оцінка, яка є інтегрованим показником.

На кінцевому етапі отримана нечітка оцінка дефазифікується у чітке значення і визначається її рівень.

У даній роботі пропонується підхід розв'язання задачі фазифікації показників (критеріїв) ефективності господарювання підприємства за допомогою теорії нечітких множин.

3. Огляд літератури. Зараз, під час пандемії коронавірусної інфекції (COVID-19), проблема оцінки рівня фінансової безпеки підприємства є однією з найбільш актуальних. Серед вчених, котрі досліджують фінансовий стан та безпеку підприємств, можна відмітити: К.С. Горячеву [4], А.В. Матвійчука [5,6], Т. О. Меліхову [7], А.О. Недосєкіна [8], Н.Н. Пойда-Носик [9,10], О.П. Ротштейн [11], В.Г. Чернов [12], які у своїх дослідженнях використовують і теорію нечітких множин.

4. Методи і матеріали. Сформулюємо постановку задачі оцінювання наступним чином. Нехай на вході маємо деякий об'єкт дослідження O, який оцінюється за багатьма показниками $K = (K_1, K_2, \ldots, K_m)$. Показники K можуть представляти собою цілу систему критеріїв та моделей. Кожен показник є кількісною оцінкою, отримання якої можливо, наприклад, за допомогою моделей фінансової звітності.

Представимо підхід щодо моделювання показників визначення фінансової безпеки підприємства на основі інструменту нечіткої математики [13.14] і побудови їх функцій належності. Розглядається випадок, коли існують як кількісні, так і якісні критерії оцінок. У такому разі, пропонується методика формалізації критеріїв оцінки за допомогою функцій належності. Приведемо найбільш вживані види функції належності, які можуть задавати множину критеріїв для розглядуваної задачі. Розіб'ємо множину критеріїв на групи відносно описання тим чи іншим видом функції належності. Розробимо інтегральну модель, на основі функцій належності, яка буде визначати рівень економічної безпеки підприємства.

Вхідними даними, які закладені в методику, являється система якісних та кількісних показників акціонерних товариств [10], що були ретельно відібрані на основі нормативних документів та праць вітчизняних і зарубіжних авторів, а також на основі опитування керівників підприємств. Всі критерії несуть у собі певний суб'єктивізм, невизначеність даних та інформації і виникає необхідність об'єднання кількісної та якісної інформації. В результаті цього, стає можливим використовувати апарат нечіткої математики для розкриття невизначеності і формалізації якісної інформації [13]. Такий підхід до побудови функцій належності для кожного критерію дасть можливість більш адекватно підійти до проблеми оцінювання. Пропонується розділити критерії оцінок за групами видів функцій належності наступним чином.

I. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою функції належності, яка включає в себе трикутну, трапецієподібну та дзвіноподібну функції. У нашому випадку кожна з розглядуваних функцій належності буде задаватися на інтервалі значень тих чи інших коефіцієнтів. Загальний вигляд такої функції задається наступною формулою:

$$\mu_1(K;\ a;\ a_1;\ b;\ \alpha;\ \beta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } K \le a; \\ \frac{K-a}{b-a}, & \text{якщо } a < K < a_1; \\ 1, & \text{якщо } a_1 \le K \le b; \\ \frac{1}{1+\left(\frac{b-K}{\alpha}\right)^{2\times\beta}}, & \text{якщо } K > b. \end{cases}$$

де a, a_1, b – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a \le a_1 \le b$, а параметри α і β впливають на форму кривої.

Критерії, які можна представити у вигляді вищевказаної функції належності:

1) ***Показники фінансової стійкості:*** коефіцієнт фінансової незалежності; коефіцієнт фінансової стабільності; коефіцієнт фінансового левериджу; коефіцієнт забезпечення власними коштами; коефіцієнт покриття необоротних активів власним капіталом.
2) ***Показники ліквідності:*** коефіцієнт покриття; коефіцієнт швидкої (проміжної) ліквідності; коефіцієнт абсолютної ліквідності.

II. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної S-подібної функції належності.

Лінійну S-подібну функцію належності задаємо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_3(K;\ a;\ b) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } K \le a; \\ \frac{K-a}{b-a}, & \text{якщо } a < K < b; \\ 1, & \text{якщо } K \ge b. \end{cases},$$

де $a,\ b$ – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a < b$.

Критерії, які можна представити у вигляді лінійної S-подібної функції належності:

1) ***Показники ділової активності:*** середня тривалість одного обороту активів; середня тривалість одного обороту запасів; коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості; середній період погашення кредиторської заборгованості.
2) ***Показники рентабельності:*** коефіцієнт рентабельності продажу за фінансовими результатами від операційної діяльності (EBIT); рівень рентабельності продукції; чистий дохід від реалізації (в динаміці); фінансовий результат від операційної діяльності (в динаміці); фінансовий результат від звичайної діяльності (в динаміці); чистий прибуток (в динаміці); операційний Cash-flow (в динаміці); активи (в динаміці); власний капітал (в динаміці).
3) ***Ринкові показники:*** ринкова ціна акцій; free-float; дивідендна дохідність.

III. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної Z-подібної функції належності.

Лінійну Z-подібну функцію належності подамо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_4(K;\ a;\ b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } K \le a; \\ \frac{b-K}{b-a}, & \text{якщо } a < K < b; \\ 0, & \text{якщо } K \ge b. \end{cases},$$

де $a,\ b$ – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a < b$.

Критерії, які можна представити у вигляді лінійної Z-подібної функції належності:

1) ***Показники ділової активності:*** коефіцієнт оборотності активів; коефіцієнт оборотності оборотних активів; коефіцієнт оборотності запасів; середній період погашення дебіторської заборгованості; коефіцієнт оборотності позикового капіталу за фінансовими результатами від звичайної діяльності (EBITDA).
2) ***Показники рентабельності:*** рівень рентабельності продажу (реалізації); коефіцієнт рентабельності продажу за фінансовими результатами від звичайної діяльності (EBITDA); рівень рентабельності активів; рівень рентабельності власного капіталу.

5. Експерименти. Наведемо приклади подання функцій належності для деяких критеріїв на основі статистичних даних за 2008-2018 роки компанії ПАТ «Мотор Січ».

1) Коефіцієнт фінансової незалежності характеризує ступінь незалежності підприємства від зовнішніх запозичень [15]. Визначається як відношення загальної суми власного капіталу до підсумку балансу. Цей коефіцієнт характеризує частку власного капіталу в загальній сумі засобів, авансованих у його діяльність. Чим вище значення коефіцієнта фінансової автономії, тим більш фінансово стійким і незалежним від зовнішніх кредиторів є підприємство.

Коефіцієнт фінансової незалежності обчислюється за допомогою формули: K_{11} = Власний капітал/Валюта балансу. Функцію належності для величини K_{11} можемо записати:

$$\mu\left(K_{11};\ 0;\ 0,5;\ 0,6;\ 3;\ 3\right)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } K_{11}\le 0;\\ 2K_{11}, \text{ якщо } 0<K_{11}<0,5;\\ 1, \text{ якщо } 0,5\le K_{11}\le 0,6;\\ \frac{1}{1+\left(\frac{0,6-K_{11}}{3}\right)^{2\times 3}}, \text{ якщо } K_{11}>0,6.\end{cases}$$

2) Коефіцієнт покриття необоротних активів власним капіталом характеризує рівень фінансування необоротних активів за рахунок власного капіталу підприємства.

Коефіцієнт покриття необоротних активів власним капіталом обчислюється за допомогою формули: K_{15} = Власний капітал/Необоротні активи. Функцію належності для величини K_{15} можемо записати:

$$\mu\left(K_{15};\ 0;\ 1;\ 1,6;\ 3;\ 3\right)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } K_{15}\le 0;\\ K_{15}, \text{ якщо } 0<K_{15}<1;\\ 1, \text{ якщо } 1\le K_{15}\le 1,6;\\ \frac{1}{1+\left(\frac{1,6-K_{15}}{3}\right)^{2\times 3}}, \text{ якщо } K_{15}>1,6.\end{cases}$$

3) Коефіцієнт фінансового левериджу. Ефект фінансового левериджу – це збільшення рентабельності власних коштів внаслідок використання кредиту, незважаючи на платність останнього [15]. Цей коефіцієнт показує, скільки одиниць власних коштів приходиться на кожну одиницю запозичених.

Коефіцієнт фінансового левериджу обчислюється згідно рівності: K_{13} = Довгострокові зобов'язання/Власний капітал.

Для коефіцієнта фінансового левериджу побудуємо таку функції належності:

$$\mu\left(K_{13};\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 3\right)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } K_{13}\le 0;\\ K_{13}, \text{ якщо } 0<K_{13}<1;\\ 1, \text{ якщо } 1\le K_{13}\le 2;\\ \frac{1}{1+\left(\frac{2-K_{13}}{3}\right)^{2\times 3}}, \text{ якщо } K_{13}>2.\end{cases}$$

6. Висновки. Для ефективного забезпечення фінансово-економічної безпеки на підприємстві необхідно розробити та успішно імплементувати відповідний механізм, який повинен включати в себе інструменти, методи і важелі формування фінансової безпеки підприємства та систему інформаційно-аналітичної складової такої безпеки, функціонуючу на основі сучасних інформаційних технологій.

Список використаної літератури

1. Финансовая безопасность: [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.faito.ru/pages/infresources/fkglossary/add_comment.php?id=259
2. Шаркаді М.М., Роботишин М.В., Маляр М.М. Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2020. № 1 (36).* С. 112-122.
3. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах [Текст]: учеб. пособие. К.: Слово, 2008. 341с.
4. Горячева К.С. Оцінка рівня фінансової безпеки підприємства. URL: http://dspace.uabs.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/3159/1/Gorjacheva.pdf
5. Матвійчук А.В. Моделювання фінансової стійкості підприємств із застосуванням теорій нечіткої логіки, нейронних мереж і дискримінантного аналізу. К.: *Вісн. НАН України.* 2010. №9. С. 24-46.
6. Матвійчук А. В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка: Монографія. К.: КНЕУ, 2011. 439 с.
7. Меліхова Т.О. Оцінка рівня економічної безпеки підприємства за допомогою нейронних мереж та кластерного аналізу. Східна Європа: економіка, бізнес та управління. № 2_2018. URL: http://www.easterneuropeebm.in.ua/index.php/12-2018 (0,75 д.а.).
8. Недосекин А. О. Фондовый менеджмент в расплывчатых условиях. СПб. : Типография "Сезам", 2003. 201 с.
9. Пойда-Носик Н.Н., Мазютинець Г.В. Застосування штучних нейромереж для аналізу рівня фінансової безпеки компаній. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Економіка». 2020. № 1 (55).* С. 112-117.
10. Пойда-Носик Н.Н. Сутність фінансової безпеки суб'єктів підприємництва та її роль в забезпеченні національної економічної безпеки. *Вісник ЖДТУ. 2011. № 1 (55).* С. 340-342.
11. Ротштейн О.П. Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі. Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1999. 320 с.
12. Чернов В.Г. Модели поддержки принятия решений в инвестиционной деятельности на основе апарата нечетких множеств. М.: Горячая линия - Телеком, 2007. 312 с.
13. Маляр М.М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород: РА "АУТДОР-ШАРК", 2016. 222 с.
14. Polishchuk V. Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences. Begell house, Inc, New York, 2019. Volume 51, 2019 Issue 9.* P.66-76. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60.
15. Шило В.П. Аналіз фінансового стану виробничої та комерційної діяльності підприємства: Навч. Посібник. К.: Кондор, 2005. 240 с.

Sharkadi M. M., Malyar M. M., Mazyutynets H. V. Fuzzy simulation of the enterprise's financial security indicators.

In today's globalized world, the existence of any state depends on its economic security, which is one of the important components of national security as a whole. One of the main segments of economic security, which significantly affects its level, is the financial segment, the set of financial indicators of the economic entity, which are combined into a global indicator. Forecasting this indicator is a complex analytical and computational process and requires a detailed study of development trends and prediction of the impact of the components of the studied factor on the level of economic security of the state.

Determining the level of economic security of the state as a whole is inconceivable without the use of computer technology based on data mining. The development of appropriate models and methods of information processing is directly related to the knowledge of the specific subject area for which the intelligent system is created, are rarely complete and completely reliable. Even quantitative data obtained by accurate experiments have statistical estimates of probability, reliability, significance, inaccuracy, etc. Along with quantitative characteristics, qualitative indicators, heuristic rules, textual knowledge, etc. should be stored in the knowledge bases of intelligent systems. When processing knowledge using the mechanisms of formal logic, there is a contradiction between fuzzy knowledge and clear methods of inference. This contradiction can be resolved by using special methods of presenting and processing fuzzy knowledge.

The purpose of this work is to develop a model for presenting estimates of indicators of the object of economic management, taking into account the different characteristics that are assessed by quantitative indicators, and on the basis of various fuzzy models of knowledge in the relevant subject area.

Keywords: financial security, fuzzy model, efficiency indicators.

References

1. Financial security: [Electronic resource]. - Access mode: http://www.faito.ru/pages/infresources/fkglossary/add_comment.php?id=259. [in Russian]
2. Sharkadi, M.M., Robotyshyn, M.V., & Malyar, M.M. (2020). Models and methods of machine learning for prediction tasks. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. Of mathematics and informatics, 36, 1,* 112-122. [in Ukranian]
3. Zaichenko, Yu.P. (2008). Fuzzy models and methods in intelligent systems: textbook. Manual. *Kyiv: Slovo.* [in Ukranian]
4. Goryacheva, K.S. Assessment of the level of financial security of the enterprise. URL: http://dspace.uabs.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/3159/1/Gorjacheva.pdf.[in Ukranian]
5. Matviychuk, A.V. (2010). Modeling of financial stability of enterprises with the use of theories of fuzzy logic, neural networks and discriminant analysis. *Bulletin of the NAS of Ukraine, 9,* 24-46. [in Ukranian]
6. Matviychuk, A.V. (2011). Artificial intelligence in economics: neural networks, fuzzy logic: Monograph. *Kyiv: KNEU.* [in Ukranian]
7. Melikhova, T.O. (2018). Assessment of the level of economic security of the enterprise using neural networks and cluster analysis. *Eastern Europe: Economy, Business and Management, 2.* URL: http://www.easterneuropeebm.in.ua/index.php/12-2018 (0.75 d.a.). [in Ukranian]
8. Nedosekin, A.O. (2003). Stock management in vague conditions. *St. Petersburg: Sesame Printing House.* [in Russian]
9. Poida-Nosik, N.N., & Mazyutinets, G.V. (2020). Application of artificial neural networks for analysis of the level of financial security of companies. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of Economy, 55, 1,* 112-117. [in Ukranian]
10. Poida-Nosik, N.N. (2011). The essence of financial security of business entities and its role in ensuring national economic security. *Bulletin of ZhSTU,55,1,* 340-342. [in Ukranian]
11. Rothstein, O.P. (1999). Intelligent identification technologies: fuzzy sets, genetic algorithms, neural networks. *Vinnytsia: "UNIVERSUM-Vinnytsia".*[in Ukranian]
12. Chernov, V.G. (2007). Models of decision support in investment activities based on the apparatus of fuzzy sets. *Moscow : Hotline - Telecom.* [in Russian]
13. Malyar, M.M. (2016). Models and methods of multicriteria limited-rational choice: Monograph. *Uzhhorod: RA "OUTDOOR-SHARK".*[in Ukranian]
14. Polishchuk, V. (2019). Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences. Begell house, Inc, New York, 51,* 66-76. [in English]
15. Shilo, V.P. (2005). Analysis of the financial condition of production and commercial activities of the enterprise: Textbook. Manual . *Kyiv: Condor.* [in Ukranian]

Одержано 16.09.2020

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті `http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/author/submit/1`.
   Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" `http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions`.
6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті). Об'єм анотації не менше 1800 символів.
10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
    Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал.* 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика.* 2019. Вип. 1(34). С. 94–109. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109.
4. Карпенко С. М. Назва. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor.* 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: https://doi.org/10.1650/7425.

References

1. Kholl, M. (1962). Teoryia grupp [Group theory]. Moskow: Yz-vo ynostr. lit. [in Russian]
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Nazvanie [Title]. *Ukrainian Mathematical Journal, 53(2)*, 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2019). Nazva [Title]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 1(34)*, 94–109. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109 [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva [Title]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications:* Proceedings from '97. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. DOI: https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor, 106(2)*, 363–376. DOI: https://doi.org/10.1650/7425.

11) Рукопис слід старанно вичитати.
12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form `http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1`.
   Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions"`http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions`.
6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
10) Links to sources of materials of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).
    Bibliographic samples description:

    References

    1. Kholl, M. (1962). Teoryia grupp [Group theory]. Moskow: Yz-vo ynostr. lit. [in Russian]
    2. Ivanchuk, I. I. (2001). Nazvanie [Title]. *Ukrainian Mathematical Journal, 53(2)*, 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2019). Nazva [Title]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 1(34)*, 94–109. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109 [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva [Title]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications:* Proceedings from '97. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. DOI: https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor, 106(2)*, 363–376. DOI: https://doi.org/10.1650/7425.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал.* 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика.* 2019. Вип. 1(34). С. 94–109. DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109.
4. Карпенко С. М. Назва. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: https://doi.org/10.1650/7425.

11) The manuscript should be carefully read.
12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (37)

2020

Адреса редакційної колегії: 88020, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського університету».
Серія «Математика і інформатика».
Тел. +380 (312) 642725
E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua