

**НАУКОВИЙ ВІСНИК**  
**Ужгородського університету**

ISSN 2616-7700



*серія*

# **МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*випуск № 1 (36)*

**2020**

ISSN 2616-7700

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Випуск №1 (36)*

Ужгород 2020

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УЖНУ «Говерла», 2020. Вип. №1 (36). 127 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36)).

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с. (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чупов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 3 від 4 червня 2020 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.). Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN (Print) 2616-7700

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: [f-mdt@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mdt@uzhnu.edu.ua).

© М. М. Маляр,  
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2020

© Ужгородський національний університет,  
2020

ISSN 2616-7700

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

**SCIENTIFIC BULLETIN OF  
UZHHOROD UNIVERSITY**

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue no 1 (36)*

Uzhhorod 2020

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2020. Issue 1 (36). 127 p.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36)).

## EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), Lect. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Hulianycky, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O. (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 3 dated by June 4.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine. Category: B. Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN (Print) 2616-7700

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [f-mdt@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mdt@uzhnu.edu.ua).

# ЗМІСТ

## Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами . . . . . 7
2. *Петечук В. М., Петечук Ю. В.* Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями . . . . . 16
3. *Трошки В. Б., Трошки Н. В., Товт П. П.* Оцінки кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу, коли відомі його значення у скінченній множині точок . . . . . 30
4. *Ясинський В. К., Антоноук С. В.* Існування  $l$ -го моменту розв'язку стохастичних динамічних систем Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями та нескінченною післядією . . . . . 41
5. *Ясинський В. К., Антоноук С. В.* Стійкість розв'язку стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми збуреннями, пуассоновими перемиканнями і всією передісторією . . . . . 55

## Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бортош М. Ю., Тилищак О. А.* Розширені бінарні коди Голея за груповою алгеброю однієї групи . . . . . 65
2. *Гуляницький Л. Ф., Коткова А. А.* До класифікації задач маршрутизації транспортних засобів . . . . . 73
3. *Маляр М. М., Кондрук Н. Е.* Структурування критеріального простору за кутовою мірою подібності . . . . . 85
4. *Поліщук В. В., Маляр М. М.* Моделювання оцінки рівня ризику функціонування соціо-економічних систем . . . . . 92
5. *Селютін Є., Козін І.* Порівняльна ефективність використання метаевристичних методів . . . . . 105
6. *Шаркаді М. М., Роботинин М. В., Маляр М. М.* Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення . . . . . 112

# CONTENTS

## Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two mutually annihilating idempotents..... 7
2. *Petechuk V. M., Petechuk Y. V.* Images of formal matrices of elements of matrix groups over associative rings ..... 16
3. *Troshki V. B., Troshki N. V., Tovt P. P.* Estimates of the correlation function of a Gaussian stationary process when its values are known in a finite set of points 30
4. *Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.* Existence of  $l$ -th moment of solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory ..... 41
5. *Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.* Stability of solution of the Ito-Skorokhod stochastic dynamic system of random structure with external random disturbances, Markov switching and all prehistory ..... 55

## Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A.* Extended binary Golay codes by a group algebra of one group ..... 65
2. *Hulianytskyi L. F., Kotkova A. A.* To the classification of vehicles routing problems 73
3. *Malyar M. M., Kondruk N. E.* Structuring of the criterional space by an angle similarity measure ..... 85
4. *Polishchuk V. V., Malyar M. M.* Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning ..... 92
5. *Selyutin Y., Kozin I.* Comparative electiveness of metaheuristic methods ..... 105
6. *Sharkadi, M. M., Robotyshyn, M. V., Malyar, M. M.* Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning ..... 112

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).7-15](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).7-15)В. М. Бондаренко<sup>1</sup>, О. В. Зубарук<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут математики НАН України,  
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,  
доктор фізико-математичних наук  
[vitalij.bond@gmail.com](mailto:vitalij.bond@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

<sup>2</sup> Київський національний університет імені Тараса Шевченка,  
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,  
канд. фіз.-мат. наук  
[sambrinka@ukr.net](mailto:sambrinka@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

## ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАДНАПІВГРУП НАПІВГРУПИ, ПОРОДЖЕНОЇ ДВОМА ВЗАЄМНО АНУЛЬОВНИМИ ІДЕМПОТЕНТАМИ

Матричні зображення скінченних напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, повністю визначено зображувальний тип для довільного поля. Якщо характеристика  $p$  поля  $K$  не ділить порядок групи (класичний випадок), група має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень; така група називається групою скінченного зображувального типу над  $K$ . Якщо ж характеристика  $p$  ділить порядок групи (модулярний випадок), група має скінченний зображувальний тип лише тоді, коли її силовська  $p$ -підгрупа циклічна. В цьому випадку для більшості скінченних груп задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Такі групи називаються дикими, а групи, що допускають явний опис зображень, — ручними. Ручні та дикі групи в модулярному випадку повністю описав перший автор разом з Ю. А. Дроздом.

В теорії зображень напівгруп найбільша кількість робіт присвячена незвідним зображенням. Серед старих результатів є лише окремі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу, а саме для скінченної цілком простої напівгрупи (І. С. Понізовський) та деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини (І. С. Понізовський, К. Рінгель). Щодо випадків, коли число нерозкладних зображень нескінченне, то найбільш відомими є результати з теорії зображень алгебр, які можна переформулювати в термінах зображень напівгруп: опис зображень алгебри  $\langle a, b \mid ab = ba = 0 \rangle$  (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов і Л. О. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко) та алгебри  $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0 \rangle$  (В. М. Бондаренко і К. Рінгель).

Якщо ж говорити не про окремі напівгрупи, а про класи напівгруп, то слід відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (В. М. Бондаренко, О. М. Тертична), зображення напівгруп Ріса (С. М. Дяченко), напівгруп, породжених потентними елементами (В. М. Бондаренко, О. В. Зубарук) і зображення прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (В. М. Бондаренко, Е. М. Костишин). Такі напівгрупи можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень.

В. М. Бондаренко і Я. В. Заціха описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. Ця стаття присвячена дослідженню аналогічних задач для наднапівгруп комутативних напівгруп.

**Ключові слова:** поле, наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупа, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.



**1. Вступ.** Ця робота присвячена матричним зображенням напівгруп спеціального вигляду, які будуються по заданій напівгрупі.

Найпростішими напівгрупами є напівгрупи порядку  $n = 2, 3$ . Напівгрупи порядку 2 (а їх чотири) природним чином вкладаються в напівгрупи третього порядку (шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента) і тому нами не розглядаються.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1]. Г. Е. Форсайт в 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано в термінах таблиць Келі. Пізніше вони вивчалися, зокрема, в [3]–[6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказані в роботі [6].

Напівгрупу назвемо майже циклічною, якщо вона отримується із деякої циклічної напівгрупи (тобто, яка задається одним твірним елементом і одним визначальним співвідношенням) шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента. Такі напівгрупи, як і циклічні, не цікаві з точки зору теорії зображень (по суті її матричне зображення задається однією матрицею). Згідно роботи [6] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні майже циклічними, вичерпуються такими напівгрупами:

- a)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$
- b)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$
- c)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$
- d)  $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c.$

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно [6, Теорема 1] напівгрупи b)–d) є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем  $K$  (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа a) — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу. Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (відповідно дикою), якщо задача про опис її зображень є ручною (відповідно дикою); відносно означення ручних та диких матричних задач див. роботу Ю. А. Дрозда [7].

У цій статті розглядається напівгрупа c), породжена двома взаємно анульованими ідемпотентами, яку позначимо через  $T$ .

Позначимо визначальні співвідношення  $b^2 = b, c^2 = c, bc = 0, cb = 0$  відповідно через  $(b)$ ,  $(c)$ ,  $(bc)$ ,  $(cb)$  і введемо наступні напівгрупи:

- $T^{(b)} := T \setminus (b) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$
- $T^{(c)} := T \setminus (c) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, bc = 0, cb = 0;$
- $T^{(bc)} := T \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, cb = 0;$
- $T^{(cb)} := T \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0.$

Покладемо

$T^{(x,y)} := T \setminus \{(x), (y)\}$  для  $x, y \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$ ,  $x \neq y$ ;

$T^{(x,y,z)} := T \setminus \{(x), (y), (z)\}$  для  $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$ ,  $x \neq y$ ,  $x \neq z$ ,  $y \neq z$ ;

Очевидно, що при перестановці  $x, y, z$  напівгрупи  $T^{(x,y)}$  і  $T^{(x,y,z)}$  не змінюються. Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі  $T$ , тобто є наднапівгрупою напівгрупи  $T$ .

Сформулюємо тепер основний результат цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем  $K$ .

**Теорема 1.** Для довільного поля  $K$  мають місце наступні твердження.

- 1)  $T^{(x)}$  — напівгрупа скінченного зображувального типу для  $x \in \{(bc), (cb)\}$ ;
- 2)  $T^{(x)}$  — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для  $x \in \{(b), (c)\}$ ;
- 3)  $T^{(x,y)}$  — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для  $x, y \in \{(b), (c)\}$  або  $x, y \in \{(bc), (cb)\}$ ;
- 4)  $T^{(x,y)}$  — дика напівгрупа для  $x \in \{(b), (c)\}$ ,  $y \in \{(bc), (cb)\}$  або  $x \in \{(bc), (cb)\}$ ,  $y \in \{(b), (c)\}$ ;
- 5)  $T^{(x,y,z)}$  — дика напівгрупа для довільних  $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$ .

**2. Доведення твердження 1) теореми 1.** Завжди вважаємо (див. у зв'язку з цим [8]), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення, що відповідає твірному елементу  $b, c$  позначається відповідно через  $B, C$ .  $E$  позначає одиничну матрицю будь-якого розміру  $n \times n$  ( $n \geq 0$ ).

Твердження 1) теореми 1 впливає із наступного твердження.

**Теорема 2.** Канонічна форма для матричних зображень напівгруп  $T^{(x)}$  при  $x \in \{(bc), (cb)\}$  така:

$$2.1) T^{(bc)} := T \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, cb = 0;$$

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2.2) T^{(cb)} := T \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0;$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Доведення.** Розглянемо спочатку випадок 2.1.

Матриці  $B, C$  можна приводити одночасними перетвореннями подібності (саме такі перетворення відповідають еквівалентним зображенням). За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю  $B$  до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що матрицю  $C$ , яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через  $C$ , щоб не нагромаджувати індекси (і цим принципом будемо користуватися завжди). Тоді, після розбиття матриці  $C$  на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці  $B$ ), вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

де  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – деякі матриці. Використаємо рівність  $CB = 0$  (яка відповідає визначальному співвідношенню  $cb = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що  $C$  має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $C^2 = C$ , то маємо, що  $C_4 C_2 = C_2$  і  $C_4^2 = C_4$ . Перетвореннями подібності можна привести матрицю  $C_4$  до нормальної форми Жордана у вигляді

$$C_4 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(яка переставно подібна прямій сумі відповідних клітин Жордана).

Розіб'ємо матрицю  $C$  на нові блоки:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З співвідношення  $C^2 = C$  маємо, що  $C_{13} = 0$ .

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення  $R = \{B, C\}$  еквівалентне матричному зображенню  $\bar{R} = \{\bar{B}, \bar{C}\}$  такого ж вигляду, а саме

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{C}_{12} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай  $X$  – оборотна матриця, така що  $\bar{B} = XBX^{-1}$ ,  $\bar{C} = XCX^{-1}$ , що еквівалентно  $\bar{B}X = XB$ ,  $\bar{C}X = XC$ . Зрозуміло, що з подібності матриць  $\bar{B}$  і  $B$  випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність  $\overline{B}X = XB$  (де матриця  $X$  розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць  $B$  і  $C$ ):

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ X_{21} & 0 & 0 \\ X_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши блоки обох матриць, маємо:  $X_{12} = 0$ ,  $X_{13} = 0$ ,  $X_{21} = 0$ ,  $X_{31} = 0$ , а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо рівність  $\overline{C}X = XC$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{C}_{12} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{C}_{12}X_{22} & \overline{C}_{12}X_{23} \\ 0 & X_{22} & X_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{11}C_{12} & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & X_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цієї рівності одержуємо, що  $X_{23} = 0$ ,  $X_{32} = 0$ ,

$$\overline{C}_{12}X_{22} = X_{11}C_{12},$$

тобто (в еквівалентній формі)

$$\overline{C}_{12} = X_{11}C_{12}X_{22}^{-1}.$$

З вище сказаного

$$C_{12} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому треба розбити додатково матрицю  $B$  на нові блоки, відповідно до розбиття матриці  $C$ .

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Випадок 2.2 випливає із випадку 2.1 в силу симетрії напівгрупи  $T$  ( $b \leftrightarrow c$ ).  
Теорема доведена.

**3. Доведення тверджень 2) і 3) теореми 1.** В силу симетрії напівгрупи  $T$  для доведення твердження 2) достатньо розглянути випадок  $x = (b)$ . Доведення проводимо за тією ж схемою, що і для твердження 1).

Матриці  $B, C$  можна приводити одночасними перетвореннями подібності. За допомогою вказаних перетворень приведемо матрицю  $C$  до нормальної форми Жордана в такому вигляді:

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці  $B$  на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці  $C$ ), вона має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

де  $B_1, B_2, B_3, B_4$  – деякі матриці. Використаємо рівність  $BC = 0$  (яка відповідає визначальному співвідношенню  $bc = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що  $B$  має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Використаємо рівність  $CB = 0$  (яка відповідає визначальному співвідношенню  $cb = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цих рівностей отримуємо, що  $B$  має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Далі з'ясуємо, коли матричне зображення  $R = \{B, C\}$  еквівалентне матричному зображенню  $\bar{R} = \{\bar{B}, \bar{C}\}$  такого ж вигляду, а саме

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай  $X$  – оборотна матриця, така що  $\bar{B} = XBX^{-1}$ ,  $\bar{C} = XCX^{-1}$ , що еквівалентно  $\bar{B}X = XB$ ,  $\bar{C}X = XC$ . Зрозуміло, що з подібності матриць  $\bar{C}$  і  $C$  випливає їх рівність.

Спочатку використаємо рівність  $\bar{C}X = XC$  (де матриця  $X$  розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриць  $B$  і  $C$ ):

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, отримуємо:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Прирівнявши блоки обох матриць, маємо:  $X_{12} = 0$ ,  $X_{21} = 0$ , а отже,

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Далі розглянемо рівність  $\overline{B}X = XB$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \overline{B}_4 X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_{22} B_4 \end{pmatrix}.$$

Внаслідок цієї рівності одержуємо, що  $\overline{B}_4 X_{22} = X_{22} B_4$ , тобто (в еквівалентній формі)

$$\overline{B}_4 = X_{22} B_4 X_{22}^{-1}.$$

Отже, задача про еквівалентність зображень напівгрупи  $T^{(b)}$  еквівалентна задачі про подібність однієї матриці (без співвідношень), а значить є ручною нескінченного зображувального типу.

Твердження 3) при  $x, y \in \{(b), (c)\}$  випливає із результатів роботи [9], а при  $x, y \in \{(bc), (cb)\}$  — із результатів роботи [10] (див. 3.6).

#### 4. Доведення тверджень 4) і 5) теореми 1.

В силу симетрії напівгрупи  $T$  для доведення твердження 4) достатньо розглянути випадок  $x = (b)$ ,  $y = (bc)$ . Доведення таке ж, як і доведення твердження 2 (при  $x = (b)$ ). Якщо в ньому ігнорувати співвідношення  $bc = 0$ , то матриця  $B$  матиме вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

а матриця  $X$  не зміниться.

Отже, задача про еквівалентність зображень напівгрупи  $T^{(b, bc)}$  еквівалентна задачі про еквівалентність зображень сагайдака, що має вершини 1, 2 і стрілки  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  (першій стрілці відповідає матриця  $B_3$ , а другій —  $B_4$ ), а цей сагайдак є диким згідно робіт [11], [12].

Твердження 5) випливає із твердження 4).

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** В роботі вивчаються матричні зображення наднапівгруп спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними ідемпотентами. Описано їх зображувальний тип над довільним полем, а у випадку наднапівгруп скінченного зображувального типу вказана канонічна форма їхніх матричних зображень.

Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

### Список використаної літератури

1. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
2. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
6. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2018. – **32**, № 1. – С. 36–49.
7. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
8. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи  $T_2$  // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.
9. *Гельфанд И. М., Пономарьев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
10. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra Discrete Math. – 2016. – **21**, no. 1. – P. 18–23.
11. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – Т. **37**, №4. – С. 752–791.
12. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

### **Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.** On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two mutually annihilating idempotents.

Matrix representations of finite semigroups over fields are studied not so well as for finite groups. Representations of finite groups over fields are studied sufficiently well; in particular, the criteria of representation type are fully defined for an arbitrary field. If the characteristic  $p$  of a field  $K$  does not divide the order of a group (classical case), then the group has, up to equivalence, finite number of non-decomposable representations; such group is called a group of finite representation type. If the characteristic  $p$  divides the order of a group (modular case), then the group has finite representation type only if its Sylow  $p$ -subgroup is cyclic. In this case for most finite groups the problems of describing their representations includes the problem on classification, up to similarity, of the pairs of matrices. Such groups are called wild, and groups that allow explicit descriptions of representations are called tame. The tame and wild groups in modular case are fully described by the first author together with Yu. A. Drozd.

In the theory of representations of semigroups, the largest number of works are devoted to irreducible representations. Among the old results, there are only some results on semigroups of finite representation type, namely, for a finite quite simple semigroup (I. S. Ponizovsky) and some semigroups of all transformations of a finite set (I. S. Ponizovsky, C. Ringel). In cases, when the numbers of non-decomposable representations is infinite, the most famous are the results from the theory of representations of algebras that can be reformulated in terms of representations of semigroups: the description of representations of the algebra  $\langle a, b \mid ab = ba = 0 \rangle$  (I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev and L. O. Nazarova, A. V. Roiter, V. V. Sergeichuk, V. M. Bondarenko) and the algebra  $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0 \rangle$  (V. M. Bondarenko and C. Ringel).

If we are not talking about individual semigroups, but about semigroup classes, then it should be noted works about on representations of the semigroups generated by idem-

potents with partial zero multiplication (V. M. Bondarenko, O. M. Tertychna), representations of the Rees semigroups (S. M. Dyachenko), semigroups generated by the potential elements (V. M. Bondarenko, O. V. Zubaruk) and representations of direct products of the symmetric second-order semigroup (V. M. Bondarenko, E. M. Kostyshyn). Such semigroups can have both a finite and infinite representation type.

V. M. Bondarenko and Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over a field, and indicate the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. This article is devoted to the study of similar problems for oversemigroups of commutative semigroups.

**Keywords:** field, oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroup, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

## References

1. Tamura T. (1953) Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 3, 1–11.
2. Forsythe G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko V. M., & Zaciha Ja. V. (2013). Pro vyznachalni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tretoho poryadku [On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup]. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics*, 14, 62–67. [in Ukrainian]
4. Chotchaisthit S. (2014). Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, 8, 1261–1269.
5. Bondarenko V. M., & Zaciha Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 20, 1, 32–39.
6. Bondarenko V. M., & Zaciha Ja. V. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics*, 32, 1, 36–49. [in Ukrainian]
7. Drozd Yu. A. (1977) Pro ruchni ta dyki matrychni problemy [On tame and wild matrix problems]. *Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukrain.SSR*, 104–114. [in Russian]
8. Bondarenko V. M., & Kostyshyn E. M. (2011). Modulyarni zobrazhennya napivhrupy  $T_2$  [Modular representations of the semigroup  $T_2$ ]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 22, 1, 26–34. [in Ukrainian]
9. Gelfand, I. M., & Ponomarev V. A. (1968) Nerozkladni zobrazhennya hrupy Lorentsa [Indecomposable representations of the Lorentz group]. *Advances in Math. Sciences*, 23, 2, 3–60. [in Russian]
10. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., & Zubaruk O. V. (2016) On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.* 21, 1, 18–23.
11. Nazarova L. A. (1973) Zobrazhennya kolchaniv neskinchennoho typu [Representations of quivers of infinite type]. *Math. USSR Izvestija*, 37, 4, 752–791. [in Russian]
12. Donovan P., & Freislich M. R. (1973) The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Lecture Notes*, 5, 3–86.

Одержано 05.03.2020



УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29)**В. М. Петечук<sup>1</sup>, Ю. В. Петечук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти, Ужгород,  
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,  
кандидат фізико-математичних наук

vasil.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5663-8789>

<sup>2</sup> Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II, Берегово,  
доцент кафедри математики та інформатики,  
кандидат фізико-математичних наук

yuliia.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3670-9671>**ЗОБРАЖЕННЯ ФОРМАЛЬНИМИ МАТРИЦЯМИ ЕЛЕМЕНТІВ  
МАТРИЧНИХ ГРУП НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ**

В роботі обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (\*) матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Зокрема, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (\*).

**Ключові слова:** нерухомі та лишкові модулі, розклад модулів, ідемпотенти, формальні матриці, трансвекції, комутатори, гомоморфізми лінійних груп над кільцями.

**1. Вступ.** Використання зображень елементів лінійних груп формальними матрицями до опису гомоморфізмів матричних груп вперше було застосовано одним з авторів в [1].

Зображення автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями формальними матрицями у загальному випадку є теоретично відомим і описаним у класичній літературі, зокрема, в [2].

У даній статті обґрунтовується зображення формальними матрицями деяких елементів лінійних груп над асоціативними кільцями шляхом використання властивостей лишкових і нерухомих модулів. Показано вигляд образів елементів лінійних груп відносно їх гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями з 1, в яких елементи 2 або 3 є оборотними, а також поглиблюються і розширюються окремі твердження [3 – 4].

За допомогою даного підходу авторами були описані гомоморфізми з умовою (\*) матричних груп над асоціативними кільцями [3 – 4]. Як відомо, ізоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є гомоморфізмами з умовою (\*) і були описані в [5].

Можливості опису гомоморфізмів шляхом використання зображення елементів формальними матрицями далеко не вичерпані. Тому розвиток техніки, яка дозволяє вивчати гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями є актуальним.

Інші підходи до вивчення матричних груп можна знайти в [6 – 8].

**2. Нерухомі та лишкові модулі.** Нехай  $V$  – довільний  $R$ -модуль над асоціативним кільцем  $R$  з  $1$ ,  $\sigma$  – довільний ендоморфізм модуля  $V$ .

Нерухомими та лишковими підмодулями модуля  $V$  ендоморфізма  $\sigma : V \rightarrow V$  будемо називати підмодулі  $R(\sigma) = (\sigma - 1)V$  і  $P(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$  відповідно.

Тоді

$$R(\sigma) = \{(\sigma - 1)v \mid v \in V\} \text{ і } P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\},$$

а також  $R(1 - \sigma) = \sigma V$  і  $P(1 - \sigma) = \ker \sigma$ .

Якщо  $\sigma$  – автоморфізм модуля  $V$ , то із рівності  $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1)(-\sigma^{-1})$  випливає, що

$$R(\sigma^{-1}) = R(\sigma) \text{ і } P(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

Якщо  $W$  – підмодуль модуля  $V$ , то

$$\sigma W = (\sigma - 1 + 1)W \subseteq R(\sigma) + W, \quad \sigma^{-1}W \subseteq R(\sigma^{-1}) + W = R(\sigma) + W.$$

Зокрема, якщо  $R(\sigma) \subseteq W$ , то  $\sigma^{\pm 1}W \subseteq W$  і, як наслідок,  $\sigma W = W$ .

Якщо  $g$  – довільний ендоморфізм модуля  $V$  такий, що має місце один з випадків  $g\sigma = \sigma^{\pm 1}g$ , то відповідно  $g(\sigma - 1) = (\sigma^{\pm 1} - 1)g$  і  $(\sigma - 1)g = g(\sigma^{\pm 1} - 1)$ . Тому

$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma^{\pm 1}) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) \subseteq P(\sigma^{\pm 1}) = P(\sigma).$$

Зокрема, якщо  $g$  – автоморфізм модуля  $V$  такий, що  $g\sigma g^{-1} = \sigma^{\pm 1}$ , то

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \text{ і } gP(\sigma) = P(\sigma).$$

Цей же результат слідує також із загальних формул

$$gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1}) \text{ і } gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1}),$$

які із-за рівності  $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)g^{-1}$  вірні для будь-якого ендоморфізма  $\sigma$  і будь-якого автоморфізма  $g$  модуля  $V$ .

Мають місце включення

$$R(\sigma_1\sigma_2) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2), \quad P(\sigma_1\sigma_2) \supseteq P(\sigma_1) \cap P(\sigma_2),$$

які випливають із рівностей  $\sigma_1\sigma_2 - 1 = (\sigma_1 - 1)\sigma_2 + \sigma_2 - 1 = \sigma_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_1 - 1$ .

Очевидно, що  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$  комутують тоді і тільки тоді, коли комутують  $\sigma_1 - 1$  і  $\sigma_2 - 1$ . Більше того,  $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1) = 0$  тоді і тільки тоді, коли має місце система

$$\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2), \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1). \end{cases}$$

Зрозуміло, що із даної системи включень випливає комутативність  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Навпаки не завжди вірно.

Виявляється, що нерухомі і лишкові підмодулі елементів скінченного порядку, який є оборотним в кільці, співпадають з пірсовим розкладом ідемпотентів, які вони визначають.

**Лема 1.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце з 1,  $V$  – лівий  $R$ -модуль (не обов'язково вільний),  $\sigma \in GL(V)$ ,  $\sigma^m = 1$ ,  $m \in R^*$ ,  $e = (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})m^{-1}$ . Тоді  $e^2 = e$  – ідемпотент і  $V = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$ , де

$$P(\sigma) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\} = eV$$

$$R(\sigma) = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})v = 0\} = (1 - e)V.$$

**Доведення.** Оскільки  $e\sigma^i = \sigma^i e = e$  для всіх  $i \geq 0$ , то  $e^2 = e(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})m^{-1} = e$  – ідемпотент і має місце пірсовий розклад

$$V = eV \oplus (1 - e)V, \text{ де } v = ev + (1 - e)v, v \in V.$$

З цього розкладу випливає, що

$$eV = \{v \in V \mid (1 - e)v = 0\} = \ker(1 - e) \text{ і } (1 - e)V = \{v \in V \mid ev = 0\} = \ker e.$$

Оскільки  $e(1 - \sigma) = (1 - \sigma)e = 0$  і  $1 - e = (1 - \sigma)t$ , де  $t \in \text{End}V$  і  $\sigma t = t\sigma$ , то

$$eV \subseteq P(\sigma) \subseteq \ker(1 - e) \subseteq eV \text{ і } (1 - e)V \subseteq R(\sigma) \subseteq \ker e \subseteq (1 - e)V.$$

Тим самим доведено, що

$$P(\sigma) = eV = \ker(1 - e) = \{v \in V \mid (\sigma - 1)v = 0\},$$

$$R(\sigma) = (1 - e)V = \ker e = \{v \in V \mid (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})v = 0\}.$$

**Лема 2.** Нехай  $K$  – асоціативне кільце з 1,  $m \in K^*$ ,  $a, b \in \text{End}V$ ,  $a^m = b^m = 1$ ,  $ab = ba$ . Тоді

$$P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) = P(b) \cap P(ab), P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b),$$

$$P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a), R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b),$$

$$R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a).$$

Зокрема, якщо  $m = 2 \in K^*$ , то  $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$ . Якщо  $m = 3 \in K^*$ , то  $b = a$  на  $R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$  і  $b = a^2$  на  $R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$ .

**Доведення.** З властивостей нерухомих і лишкових підмодулів елементів скінченного порядку випливають рівності

$$\begin{cases} P(a) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \\ P(b) \cap P(ab) = P(a) \cap P(b) \end{cases}, \quad \begin{cases} P(a) \cap R(ab) = P(a) \cap R(b) \\ P(b) \cap R(ab) = P(b) \cap R(a) \end{cases}.$$

Нехай  $v \in P(ab)$ . Тоді  $abv = v$  і  $av = b^{-1}v$ ,  $bv = a^{-1}v$ . За індукцією  $a^l v = b^{-l}v$ ,  $b^l v = a^{-l}v$  для всіх  $l \geq 0$ . Тому  $R(a) \cap P(ab) \subseteq R(a) \cap R(b)$ ,  $R(b) \cap P(ab) \subseteq R(b) \cap R(a)$ .

Якщо  $m = 2 \in K^*$ , то включення леми перетворюються в рівності. Адже, в цьому випадку

$$R(a) \cap R(b) = \{v \in V \mid av = -v, bv = -v\} \subseteq \{v \in V \mid abv = v\} \subseteq P(ab).$$

Тому  $R(a) \cap R(b) = R(a) \cap P(ab) = R(b) \cap P(ab)$ . Зокрема,

$$R(a) \cap R(b) \cap R(ab) = 0, R(a) \cap R(b) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b).$$

У випадку  $m = 3 \in K^*$  виявляється, що  $bv = av$ , якщо  $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$  і  $bv = a^2v$ , якщо  $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$ .

Дійсно, якщо  $v \in R(a) \cap R(b) \cap R(ab)$ , то

$$(a^2 + a + 1)v = (b^2 + b + 1)v = ((ab)^2 + ab + 1)v = 0.$$

В такому разі

$$(a^2 + ab + a)(a - b)v = a(a + b + 1)(a - b)v = a(a^2 - b^2 + a - b)v = 0.$$

З отриманих рівностей випливає, що  $(ab - 1)(a - b)v = 0$ . Оскільки  $0 = ((ab)^2 + ab + 1)(a - b)v = 3(a - b)v$ , то  $bv = av$ . Якщо  $v \in R(a) \cap R(b) \cap P(ab)$ , то  $abv = v$  і  $bv = a^2v$ .

**3. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (загальний випадок).** Нехай  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  – розклад лівого  $R$ -модуля  $V$  в пряму суму своїх підмодулів  $V_1, \dots, V_n$ . Це означає, що будь-який елемент  $v \in V$  однозначно зображається у вигляді суми  $v = v_1 + \dots + v_n$ , де  $v_i \in V_i$ . Із однозначності розкладу модуля  $V$  випливає, що існує відображення  $e_i$  модуля  $V$  на модуль  $V_i$ , яке кожному елементу  $v$  модуля  $V$  ставить у відповідність його  $i$ -ту компоненту розкладу  $v_i$ . Отже,  $v_i = e_i v$ . Насправді  $e_i$  – ендоморфізм модуля  $V$ , який називають проектором модуля  $V$  на підмодуль  $V_i$ .

Адже, якщо  $v = v_1 + \dots + v_n$  і  $v' = v'_1 + \dots + v'_n$  – довільні елементи модуля  $V$ , а  $r \in R$ , то  $v + v' = v_1 + v'_1 + \dots + v_n + v'_n$ ,  $rv = rv_1 + \dots + rv_n$ .

Тому мають місце рівності

$$e_i(v + v') = v_i + v'_i = e_i v + e_i v', e_i(rv) = rv_i = r(e_i v).$$

Більше того,  $e_i v_j = \delta_{ij} v_i$ ,  $e_i e_j v = e_i v_j = \delta_{ij} v_j = \delta_{ij} e_j v$ .

Накінєць,  $(e_1 + \dots + e_n)v = v$  для всіх  $v \in V$ .

Таким чином виконуються співвідношення

$$e_i e_j = \delta_{ij} e_j, 1 = e_1 + \dots + e_n,$$

де  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Тим самим доведено, що елементи  $e_1, \dots, e_n$  утворюють повну систему ідемпотентів кільця  $EndV$ . В такому разі виникає розклад

$$EndV = \bigoplus_{i,j} e_i EndV e_j.$$

Цей розклад називається пірсовим розкладом кільця  $EndV$ . Компоненти пірсового розкладу взагалі-то уже не є ні правими, ні лівими ідеалами. Але цей розклад дає зручну інтерпретацію кільця ендоморфізмів  $EndV$  модуля  $V$  у вигляді формальних матриць. Дійсно, нехай  $\sigma$  – довільний елемент  $EndV$ . Позначимо через  $A_\sigma = (\sigma_{ij})$  формальну матрицю, де  $\sigma_{ij} = e_i \sigma e_j$  – гомоморфізми  $V_j \rightarrow V_i$ .

Якщо  $\sigma$  і  $\sigma'$  – довільні елементи кільця  $EndV$ , то

$$A_{\sigma+\sigma'} = (e_i(\sigma + \sigma')e_j) = A_\sigma + A_{\sigma'},$$

$$A_{\sigma\sigma'} = (e_i(\sigma\sigma')e_j) = (e_i\sigma 1 \cdot 1\sigma'e_j) = \left(\sum_k e_i\sigma e_k \cdot e_k\sigma'e_j\right) = A_\sigma A_{\sigma'}.$$

Якщо  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ ,  $e_i : V \rightarrow V_i$ , то  $1 = e_1 + \dots + e_n$ ,  $e_i e_j = \delta_{ij} e_j$  і відображення  $\sigma \rightarrow A_\sigma \in$  кільцевим гомоморфізмом кільця  $EndV$  у кільце формальних  $n \times n$  матриць із елементами  $\sigma_{ij} = e_i \sigma e_j$ .

Дію ендоморфізма  $\sigma : V \rightarrow V$  на підмодулях  $V_1, \dots, V_n$  можна визначити матрицею  $(a_{ij})$  де  $a_{ij}$  – гомоморфізми  $V_j \rightarrow V_i$  за правилом:

$$\sigma v_i = \sum_k a_{ki}(v_i), v_i \in V_i, a_{ki} \in Hom(V_i, V_k).$$

Тоді  $\sigma_{ij} v_j = e_i \sigma e_j v_j = e_i \sigma v_j = e_i (\sum_k a_{kj}(v_j)) = a_{ij}(v_j)$ ,  $\sigma_{ij} = a_{ij}$ .

Це означає, що  $A_\sigma \in$  формальною матрицею елемента  $\sigma$  на підмодулях  $V_1, \dots, V_n$ . Матриця  $A_\sigma$  будується аналогічно до того, як будуються матриці ендоморфізмів у фіксованій базі шляхом запису у стовпці коефіцієнтів розкладу образів елементів бази відносно ендоморфізма  $\sigma$ . Таким чином, можна вважати, що підмодулі  $V_1, \dots, V_n$  виконують роль своєрідних базисних елементів, а елементами формальної матриці  $A_\sigma \in$  гомоморфізми між ними.

Зокрема, якщо  $V_1, \dots, V_n$  вільні одномірні підмодулі, то елементи формальної матриці  $A_\sigma$  ототожнюються з елементами кільця  $R$ . У цьому випадку формальні матриці є звичайними матрицями над кільцем  $R$ .

Якщо  $V_1 = \dots = V_n = V_0$ , то  $EndV \equiv (EndV_0)_n$ ,  $GL(V) \equiv GL(n, EndV_0)$ .

Це означає, що кільце  $EndV$  можна ототожнювати з кільцем  $n \times n$  матриць, а  $GL(V)$  з повною лінійною (матричною) групою над кільцем  $EndV_0$  шляхом ототожнення  $\sigma$  з  $A_\sigma$ . При цьому тотожні гомоморфізми зручно позначати 1, а нульові 0.

Якщо модулі  $V_1, \dots, V_n$   $R$ -ізоморфні з деяким лівим  $R$ -модулем  $L$  і

$$g : V_1 \oplus \dots \oplus V_n \rightarrow L \oplus \dots \oplus L (n \text{ раз})$$

відповідний ізоморфізм, то має місце внутрішній ізоморфізм

$$i_g : EndV \rightarrow M(n, EndL) \text{ за правилом } i_g : \sigma \rightarrow g\sigma g^{-1},$$

який дає можливість кільце ендоморфізмів  $EndV$  модуля  $V$  ототожнювати з кільцем квадратних  $n \times n$  матриць  $M(n, EndL) \equiv (EndL)_n$ , а групу  $GL(V)$  з групою  $GL(n, EndL)$  над кільцем ендоморфізмів  $EndL$ .

Зокрема, якщо  $V = L \oplus \sigma L$ , де  $\sigma \in GL(V)$ , то ізоморфізми

$$g : L \oplus \sigma L \rightarrow L \oplus L \text{ і } g^{-1} : L \oplus L \rightarrow L \oplus \sigma L$$

задаються за правилом:  $g(l_1 + \sigma l_2) = l_1 + l_2$  (випускання  $\sigma$ ),  $g^{-1}(l_1 + l_2) = l_1 + \sigma l_2$  (дописування  $\sigma$ ), де  $l_1, l_2$  елементи  $L$ . Тому  $i_g : GL(V) \rightarrow GL(L \oplus L)$ ,

$$i_g \sigma l_1 = g\sigma g^{-1}(l_1 + 0) = g\sigma(l_1 + 0) = g(\sigma l_1 + 0) = g(0 + \sigma l_1) = 0 \cdot l_1 + 1 \cdot l_1.$$

Це означає, що  $i_g \sigma = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$ .

Нехай  $e_{ij}$  – стандартна матрична одиниця у якої на місці  $(i, j)$  знаходиться 1, а на решті місць знаходяться нулі. Матриці  $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$ , де  $0 \neq r \in R$  будемо називати елементарними трансвекціями,

$$t_{ij} = t_{ij}(-1) t_{ji}(1) t_{ij}(-1) = t_{ji}(1) t_{ij}(-1) t_{ji}(1).$$

У довільній групі  $G$  елемент  $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  будемо називати комутатором елементів  $g_1, g_2$ , а елемент  $[g_1, \dots, g_t] = [[g_1, \dots, g_{t-1}], g_t]$  – комутатором довжини  $t$  елементів  $g_1, \dots, g_t$  групи  $G$ , де  $t > 2$ .

Мають місце матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де  $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq j \leq n$  – довільні числа,  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера,  $r_1, r_2$  – довільні елементи кільця  $R$ . Зокрема,  $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$ , де  $1 \leq i, j, k \leq n$  – попарно різні довільні числа,  $r \in R$ .

**4. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 2 – оборотний елемент).** Нехай  $K$  – асоціативне кільце з 1,  $W$  – лівий  $K$ -модуль,  $EndW$  – кільце ендоморфізмів модуля  $W$ ,  $GL(W) = EndW^*$  – група автоморфізмом модуля  $W$ .

Скористаємося розкладом модуля  $W$  у суму підмодулів, які породжені нерухомими і лишковими підмодулями.

**Лема 3.** *Нехай  $K$  – асоціативне кільце з 1,  $2 \in K^*$ ,  $W$  – лівий  $K$  – модуль,  $a, b, c, d$  – елементи групи  $GL(W)$  такі, що  $a^2 = b^2 = 1$ ,  $ab = ba$ ,  $ca = ac$ ,  $cbc^{-1} = ab$ ,  $db = bd$ ,  $dad^{-1} = ab$ ,  $a \neq 1$ . Тоді існують ліві  $K$  – модулі  $L$  і  $P$  та ізоморфізм модулів  $g : W \rightarrow W_g$ ,  $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$ , який індукує ізоморфізм  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  такий, що елементи  $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c, \Lambda_g d$  можна зобразити формальними матрицями*

$$\Lambda_g a = \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \Lambda_g b = \text{diag}(1, -1, -1, 1), \Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),$$

$$\Lambda_g d = \text{diag}(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1)$$

де  $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma, \gamma_1 \in EndP$ .

**Доведення.** За умовою  $R(a) \neq 0$ ,  $bR(a) = R(a)$ ,  $bP(a) = P(a)$ . Тому має місце розклад

$$W = R(a) \oplus P(a) = R(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap P(b) \oplus P(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Позначимо  $L = R(a) \cap P(b)$ ,  $P = P(a) \cap P(b)$ . Тоді  $cL = R(a) \cap P(ab) = R(a) \cap R(b)$  і  $dcL = R(ab) \cap R(b) = P(a) \cap R(b)$ .

Оскільки  $R(a) = L \oplus cL \neq 0$ , то  $L \neq 0$  і  $W = L \oplus cL \oplus dcL \oplus P$ , де  $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$ . Розглянемо ізоморфізм модулів  $g : W \rightarrow W_g$ , який визначений за правилом  $g(l_1 + cl_2 + dcl_3 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + p$ , де  $l_i \in L$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $p \in P$

і індукований ним внутрішній ізоморфізм  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ , де  $\Lambda_g \sigma = g \sigma g^{-1}$  для всіх  $\sigma \in GL(W)$ .

Будемо зображати елементи кільця  $End(W_g)$  формальними  $4 \times 4$  матрицями, записуючи дію елементів кільця  $End(W_g)$  на модулі  $W_g$  у стовпчики. Зокрема отримаємо, що

$$\Lambda_g a = \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \Lambda_g b = \text{diag}(1, -1, -1, 1),$$

де 1 – одиниця кільця  $EndL$  або кільця  $EndP$  відповідно.

Адже, дія  $\Lambda_g a$  на довільні елементи  $l_1, l_2, l_3$  модуля  $L$  і довільний елемент  $p$  модуля  $P$  визначається рівностями  $(\Lambda_g a)l_1 = gag^{-1}l_1 = gal_1 = g(-l_1) = -l_1$ ,  $(\Lambda_g a)l_2 = gag^{-1}l_2 = gac l_2 = g(-cl_2) = -l_2$ ,  $(\Lambda_g a)l_3 = gadcl_3 = g dcl_3 = l_3$ ,  $(\Lambda_g a)p = gap = gp = p$ .

Аналогічно визначається дія  $\Lambda_g b$  на довільні елементи  $l_1, l_2, l_3$  модуля  $L$  і довільний елемент  $p$  модуля  $P$

$$(\Lambda_g b)l_1 = gbg^{-1}l_1 = gbl_1 = gl_1 = l_1, (\Lambda_g b)l_2 = g bcl_2 = g(-cl_2) = -l_2,$$

$$(\Lambda_g b)l_3 = gbg^{-1}l_3 = gbdcl_3 = g(-dcl_3) = -l_3, (\Lambda_g b)p = gbp = gp = p.$$

Окрім цього,  $c^2L = cR(a) \cap R(b) = R(a) \cap R(ab) = L$ ,  $cdcL = cdR(a) \cap R(b) = P(a) \cap R(ab) = dcL$ ,  $cP = P(a) \cap P(ab) = P$ ,  $(\Lambda_g c)l_1 = gcl_1 = l_1$ . Тому

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),$$

де  $\alpha, \beta \in EndL, \gamma \in EndP$ .

Аналогічно доводиться, що  $dcL = cL, d^2L = L, dP = P, (\Lambda_g d)l_2 = gdcl_2 = l_2$ ,

$$\Lambda_g d = \text{diag}\left(\beta_1 \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right),$$

де  $\alpha_1, \beta_1 \in EndL, \gamma_1 \in EndP$ .

Зокрема, якщо  $c^2 = a$ , то  $\alpha = -1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$ . Якщо  $c^2 = 1$ , то  $\alpha = 1, \beta^2 = 1, \gamma^2 = 1$ .

В якості елементів  $a, b, c, d$ , які визначені у лемі 3, можна вибрати образи інволюцій і елементів четвертого порядку.

**Теорема 1.** *Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з  $1, 2 \in K^*$ ,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 3$ ,  $W$  – лівий  $K$ -модуль, гомоморфізм  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  – довільний неединичний гомоморфізм групи  $E(n, R)$ . Тоді в групі  $GL(W)$  в якості елементів  $a, b, c, d$ , які визначені у лемі 3, за умови  $\Lambda t_{ij}^2 \neq 1$  можна вибрати*

$$a = \Lambda \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1), b = \Lambda \text{diag}(1, -1, -1, 1, \dots, 1),$$

$$c = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), d = \Lambda \text{diag}\left(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right).$$

При цьому  $c^2 = a, d^2 = b$ .

Якщо  $\Lambda t_{ij}^2 = 1$  для деяких, а значить і для всіх  $1 \leq i \neq j \leq n$ , то в якості елементів  $a, b, c, d$ , можуть бути вибрані елементи

$$a = \Lambda t_{12}(1), b = \Lambda t_{13}(1), c = \Lambda t_{32}(-1), d = \Lambda t_{23}(-1).$$

При цьому  $c^2 = 1, d^2 = 1$ .

**Доведення.** Нехай  $Lt_{ij}^2 \neq 1$ . Безпосередньою перевіркою встановлюється, що елементи  $a, b, c, d$ , які задані в умові теореми, задовольняють співвідношення леми 3  $a^2 = b^2 = 1, ab = ba, ca = ac, cbc^{-1} = ab, db = bd, dad^{-1} = ab, a = Ldiag(-1, -1, 1, \dots, 1) = Lt_{12}^2 \neq 1$ .

Якщо  $Lt_{ij}^2 = 1$ , то з рівності  $[t_{ij}(1), t_{ik}^2] = t_{ij}(2)$  для різних чисел  $1 \leq i, j, k \leq n$  випливає, що  $Lt_{ij}(2) = 1$  і елементи  $a, b, c, d$ , які задані в умові теореми, також задовольняють співвідношення леми 3  $a^2 = b^2 = 1, ab = ba, ca = ac, cbc^{-1} = ab, db = bd, dad^{-1} = ab$ . Якщо при цьому  $a = Lt_{ij}(1) = 1$ , то з рівності  $[t_{ij}(1), t_{jk}(r)] = t_{ik}(r)$  для різних чисел  $1 \leq i, j, k \leq n, r \in R$  випливає, що  $L : G \rightarrow GL(W)$  – одиничний гомоморфізм на групі  $E(n, R)$ . Це протирічить припущенню. Тому  $a = Lt_{ij}(1) \neq 1$ .

Відмітимо, що якщо  $L$  – гомоморфізм з умовою (\*), то в теоремі 1 другий випадок не має місця.

**5. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями (випадок, коли 3 – оборотний елемент).** У довільному асоціативному кільці з 1 мають місце співвідношення, використання яких у матричних кільцях дозволяє зображати ендоморфізми модулів формальними матрицями.

**Лема 4.** Нехай  $a, b$  – елементи деякого асоціативного кільця  $K$  з 1,  $3 \in K^*$ , такі, що  $b^2 = 1, a^2 + a + 1 = 0, bab^{-1} = a^2, e = (1 - a)(1 - b)3^{-1}, e_1 = e - ab$ . Тоді  $e^2 = e, eae = (1 - e)a^2(1 - e) = 0$  і  $e^2 = e_1, e_1ae_1 = (1 - e_1)a^2(1 - e_1) = 0, (a - b)e_1 = 0$ .

**Доведення.** За умовою мають місце рівності  $b(1 - b) = -(1 - b)$ ,

$$(1 - b)^2 = 2(1 - b),$$

$$(1 - b)a(1 - b) = (a - a^2b)(1 - b) = (a + a^2)(1 - b) = -(1 - b),$$

$$(1 - b)a^2(1 - b) = (a^2 - ab)(1 - b) = (a^2 + a)(1 - b) = -(1 - b).$$

Безпосередньою перевіркою отримуємо, що  $e^2 = e$ . Адже,

$$9e^2 = (3e)^2 = (1 - a)(1 - b)(1 - a)(1 - b) = (1 - a)((1 - b)^2 + 1 - b) = 9e.$$

Також  $eae = 0$ . Адже,

$$\begin{aligned} 9eae &= (1 - a)(1 - b)a(1 - a)(1 - b) = (1 - a)(1 - b)(a - a^2)(1 - b) = \\ &= (1 - a)(-1 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Тому  $ea^2e = -e^2 - eae = -e$ .

З другого боку, виконуються рівності

$$ab + ba = ab + a^2b = -b, a^2b + ba^2 = a^2b + ab = -b.$$

Неважко перевірити, що мають місце рівності

$$3(ea + ae) = (1 - a)((1 - b)a + a(1 - b)) = (1 - a)(2a + b),$$

$$3(ea^2 + a^2e) = (1 - a)((1 - b)a^2 + a^2(1 - b)) = (1 - a)(2a^2 + b),$$

$$3(eab + abe) = (1 - a)(1 - b)ab + ab(1 - a)(1 - b) =$$



$$\begin{aligned} &= (1 - a - b + ab) ab + ab(1 - a - b + ab) = \\ &= ab - a^2b - a^2 + 1 + ab - b - a + 1 = 3(1 + ab). \end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, що  $ead + abe = 1 + ab$ .

Як і вище доводиться, що  $(1 - e)a^2(1 - e) = 0$ . Адже,

$$\begin{aligned} 3(1 - e)a^2(1 - e) &= 3(a^2 - (ea^2 + a^2e) + ea^2e) = \\ &= 3a^2 - (1 - a)(2a^2 + b) - 3e = a^2 - b + 2 + ab - 3e = \\ &= 1 - a - b + ab - 3e = 3e - 3e = 0. \end{aligned}$$

Нехай  $e_1 = e - ab$ . З вищеотриманих рівностей слідує, що

$$e_1^2 = (e - ab)^2 = e - (ead + abe) + abab = e - (1 + ab) + 1 = e - ab = e_1.$$

Окрім цього, має місце рівність  $e_1ae_1 = 0$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} 3e_1ae_1 &= 3(e - ab)a(e - ab) = 3(ea - b)(e - ab) = 3(-ea^2b - be + a^2) = \\ &= -(1 - a - b + ab)a^2b - b((1 - a - b + ab) + 3a^2) = \\ &= -a^2b + b + a - a^2 - b + a^2b + 1 - a^2 + 3a^2 = a^2 + a + 1 = 0. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що  $(1 - e_1)a^2(1 - e_1) = 0$ ,  $(a - b)e_1 = 0$ .

З леми 4 випливає, що  $ae = (1 - e)ae$ ,  $a^2(1 - e) = ea^2(1 - e)$ ,  $ae_1 = (1 - e_1) \cdot ae_1$  і  $a^2(1 - e_1) = e_1a^2(1 - e_1)$ .

**Лема 5.** Нехай  $K$  – асоціативне кільце з 1,  $3 \in K^*$ ,  $W$  – лівий  $K$ -модуль,  $a, b$  – елементи  $GL(W)$  такі, що  $a^3 = b^2 = 1$ ,  $bab^{-1} = a^{-1}$ ,  $a \neq 1$ . Тоді існує ізоморфізм модулів  $g : W \rightarrow W_g$ ,  $W_g = L \oplus L \oplus P$ , і ізоморфізм  $\Lambda_g$  такі, що елементи  $\Lambda_g a$ ,  $\Lambda_g b$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де  $\gamma \in \text{End}P$ ,  $\gamma^2 = 1$ .

Зокрема, якщо  $W = R(a)$ , то

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Доведення.** Нехай  $R(a) = (a - 1)W$  і  $P(a) = \ker(a - 1)$ . Оскільки елементи  $a$  і  $b$  комутують, то підмодулі  $R(a)$  і  $P(a)$  є інваріантними відносно  $a$  і  $b$ . Як було зазначено вище

$$R(a) = \{v \in W \mid (a^2 + a + 1)v = 0\}, P(a) = \{v \in W \mid av = v\}, W = R(a) \oplus P(a).$$

Тому  $a^2 + a + 1 = 0$  на підмодулі  $R(a)$  і  $a = 1$  на підмодулі  $P(a)$ .

Нехай  $e = (1 - a)(1 - b)3^{-1}$ ,  $e_1 = e - ab$ , де 1 означає одиницю групи  $GL(W)$ .

Підмодулі  $R(a)$  і  $P(a)$  є інваріантними відносно  $e$ ,  $e_1$ ,  $eP(a) \subseteq (1 - a)P(a) = 0$ . Згідно з лемою 4  $e$ ,  $e_1$  – ідемпотенти на  $R(a)$  і  $e = 0$  на  $P(a)$ .

Ідемпотент  $e_1$  кільця  $EndW$  визначає розклад модуля  $W$ .

$$W = R(a) \oplus P(a) = e_1R(a) \oplus (1 - e_1)R(a) \oplus P(a),$$

де  $R(a) = e_1R(a) \oplus (1 - e_1)R(a)$ .

Позначимо  $L = e_1R(a)$ ,  $P = P(a)$ . Оскільки  $a \neq 1$ , то  $R(a) \neq 0$ . Відповідно до леми 4  $ae_1R(a) \subseteq (1 - e_1)R(a)$  і  $a^2(1 - e_1)R(a) \subseteq e_1R(a)$ ,  $(1 - e_1)R(a) \subseteq ae_1R(a)$ . Отже,  $(1 - e_1)R(a) = ae_1R(a) = aL$ .

Тим самим, доведено, що  $R(a) = L \oplus aL$ ,  $L \neq 0$ ,  $W = L \oplus aL \oplus P$ .

Нехай  $W_g = L \oplus L \oplus P$  і  $g : W \rightarrow W_g$  – ізоморфізм модулів, який визначений за правилом  $g(l_1 + al_2 + p) = l_1 + l_2 + p$ , де  $l_i \in L$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $p \in P$ , а  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  – індукований  $g$  груповий ізоморфізм.

Це означає, що елементи кільця  $End(W_g)$  можна зобразити формальними  $3 \times 3$  матрицями

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_g b = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Враховуючи рівність  $(1 + a + a^2)R(a) = 0$  отримаємо, що  $a_1 = a_2 = -1$ . З рівності  $b^2 = 1$  отримаємо, що  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0$ .

В якості елементів  $a, b$  які визначені у лемі 5, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

**Теорема 2.** *Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з  $1$ ,  $3 \in K^*$ ,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 3$ ,  $W$  – лівий  $K$  – модуль, гомоморфізм  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  – довільний неединичний гомоморфізм групи  $E(n, R)$ . Тоді в групі  $GL(W)$  в якості елементів  $a, b$  які визначені у лемі 5, можна вибрати*

$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right)$ ,  $b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, -1, 1, \dots, 1\right)$ , при  $n \geq 3$

або у випадку  $n \geq 4$

$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right)$ ,  $b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right)$ ,

або у випадку  $n \geq 5$

$$a = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1\right), \quad b = \Lambda \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, 1, -1, \dots, 1\right).$$

**Доведення.** Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення  $a^3 = b^2 = 1$ ,  $bab^{-1} = a^{-1}$ .

З формули  $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$ , де  $1 \leq i, j, k \leq n$  попарно різні числа і  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  – неединичний гомоморфізм групи  $E(n, R)$  випливає, що має місце нерівність  $a \neq 1$ .

Згідно з теоремою 2 неединичний елемент  $a$  групи  $GL(W)$ , що задовольняє рівність  $a^2 + a + 1 = 0$ , при існуванні елемента  $b$ ,  $b^2 = 1$ ,  $bab^{-1} = a^2$ , з точністю до ізоморфізма  $\Lambda_g$ , можна зобразити формальною матрицею  $\text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right)$ .

**Лема 6.** *Нехай  $K$  – асоціативне кільце з  $1$ ,  $3 \in K^*$ ,  $W$  – лівий  $K$  – модуль,  $a, b$  – елементи  $GL(W)$  такі, що  $a, b \in GL(W)$ ,  $a^3 = b^3 = 1$ ,  $ab = ba$ . Тоді*

існує розклад модуля  $W$  в пряму суму підмодулів, ізоморфізм модулів  $g : W \rightarrow W_g, W_g = W$  і ізоморфізм  $\Lambda_g$  такий, що елементи  $\Lambda_g a, \Lambda_g b$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}(z, E, x, y, E), \quad \Lambda_g b = \text{diag}(E, z_1, x, y^2, E),$$

де  $x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0, z^2 + z + 1 = 0, z_1^2 + z_1 + 1 = 0$ .

**Доведення.** Підмодулі  $R(a), R(b), P(a), P(b)$  є інваріантними відносно елементів  $a$  і  $b$  і мають місце розклади  $W = R(a) \oplus P(a), R(a) = R(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap P(b), P(a) = P(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$ . Оскільки  $(ab)^3 = 1$ , то також має місце розклад

$$R(a) \cap R(b) = R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab).$$

Це означає, що має місце розклад модуля  $W$  в пряму суму підмодулів (деякі з яких можуть бути нульовими)

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus P(a) \cap R(b) \oplus R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Тим самим доведено, що елементи  $a$  і  $b$  мають вигляд вказаний в лемі 6.

Відмітимо, що оскільки  $(x-1)(x+2) = -3 = (x^2-1)(x+1)$ , то  $x-1, x^2-1$  і аналогічно  $y-1, y^2-1, z-1, z^2-1, z_1-1, z_1^2-1$  є оборотними на відповідних ненульових підмодулях.

**Лема 7.** Нехай  $K$  – асоціативне кільце з  $1, 3 \in K^*$ ,  $W$  – лівий  $K$ –модуль,  $a, b, c, d$  – елементи групи  $GL(W)$  такі, що  $a^3 = b^3 = 1, ab = ba, sac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^{-1}, c^2 = 1, dad^{-1} = b, d^2 = 1, dc = cd$ .

Якщо  $R(a) \cap P(b) \neq 0$ , то існують ліві  $K$ –модулі  $L$  і  $P$  та ізоморфізм модулів  $g : W \rightarrow W_g, W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$ , який індукує ізоморфізм групи  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  такий, що елементи  $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c, \Lambda_g d$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \text{End}P, \alpha^2 = \beta^2 = 1, \gamma^2 = \delta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, \gamma\alpha = \alpha^2\gamma, \gamma\beta = \beta^2\gamma, \delta\alpha = \beta\delta, E = \text{diag}(1, 1)$ ,  $1$  – одиниця  $\text{End}L$  або  $\text{End}P$ .

Якщо  $R(a) \cap P(b) = 0$ , то існує ізоморфізм групи  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  такий, що елементи  $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \alpha & -1 - 2\alpha \\ 1 + 2\alpha & -1 - \alpha \end{pmatrix}, E\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{End}L, \alpha + \alpha^2 = 0, l, \delta \in \text{End}P, l^2 = \delta^2 = 1, \alpha\beta = (\alpha + 1)\gamma = 0, \beta^2 + \gamma^2 = 1, \alpha = -\gamma^2, \beta\gamma = \gamma\beta = 0, 1$  – одиниця  $\text{End}L, E$  – одиниця  $\text{End}P$ .

**Доведення.** Нехай  $R(a) \cap P(b) \neq 0$ . Як і в лемі 5 позначимо  $e = (1 - a)(1 - c) \cdot 3^{-1} - ac$ ,  $f = (1 - b)(1 - c)3^{-1} - bc$ . Тоді  $e^2 = e$ ,  $eae = 0$ ,  $f^2 = f$ ,  $fbf = 0$ ,  $ded^{-1} = f$ ,  $dfd^{-1} = e$ .

$$W = R(a) \cap P(b) \oplus R(b) \cap P(a) \oplus R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b),$$

$$R(a) = eR(a) \oplus (1 - e)R(a), \quad R(b) = fR(b) \oplus (1 - f)R(b).$$

Як і в лемі 5  $eR(a) = (1 - e)R(a)$ ,  $cfR(b) = (1 - f)R(b)$ . За умовою  $dR(a) \cap P(b) = R(b) \cap P(a)$ .

Позначимо  $L = eR(a) \cap P(b)$ ,  $P = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$ . Тоді  $R(a) \cap P(b) = L \oplus cL$ ,  $L \neq 0$ ,  $dL = fR(b) \cap P(a) \cap R(b) \cap P(a) = dL \oplus dcL$ . Тим самим доведено, що  $W = L \oplus cL \oplus dL \oplus dcL \oplus P$ .

Нехай  $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$ ,  $g : W \rightarrow W_g$  – ізоморфізм модулів, який визначений за правилом  $g(l_1 + cl_2 + dl_3 + dcl_4 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + p$ , де  $l_i \in L$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $p \in P$ , і  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  – індукований ним груповий гомоморфізм.

Зобразимо елементи кільця  $End(W_g)$  формальними  $5 \times 5$  матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right), \quad \Lambda_g b = \text{diag}\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right),$$

$$\Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right), \quad \Lambda_g d = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \delta\right),$$

де  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$  і  $A \in (EndL)_2$  – формальна  $2 \times 2$  матриця, яка комутує з формальними  $2 \times 2$  матрицями  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  і  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $1 \in EndL$ . Тому, з точністю до спряження, формальною матрицею  $\text{diag}(A, 1, 1)$  можна вважати, що  $A = 1$ .

Якщо  $R(a) \cap P(b) = 0$ , то  $R(b) \cap P(a) = d(R(a) \cap P(b)) = 0$ . Тому  $W = R(a) \cap R(b) \oplus P(a) \cap P(b)$ . Як наслідок,

$$W = R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \oplus R(a) \cap R(b) \cap P(ab) \oplus P(a) \cap P(b).$$

Формули  $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$ , де  $1 \leq i, j, k \leq n$  попарно різні числа, показують, що має місце нерівність  $b \neq a^2$  і, як наслідок, виконується нерівність  $R(a) \cap R(b) \cap R(ab) \neq 0$ .

Зауважимо, що згідно з теоремою 2 можна вважати, що  $x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Зобразимо елементи  $a$  і  $b$  формальними матрицями  $a = \text{diag}(x, y, E)$ ,  $b = \text{diag}(x, y^2, E)$ ,  $ab = \text{diag}(x^2, E, E)$ ,  $ab^2 = \text{diag}(E, y^2, E)$ , де  $x^2 + x + 1 = 0$ ,  $y^2 + y + 1 = 0$ .

Неважко бачити, що  $R(a) = R(b)$  і  $P(a) = P(b)$ . За лемою 5 існує ізоморфізм групи  $\Lambda_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$  такий, що елементи  $\Lambda_g a, \Lambda_g b, \Lambda_g c$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g a = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E\right), \quad \Lambda_g c = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, l\right).$$

Оскільки  $ab = ba$ ,  $cbc^{-1} = b^{-1}$ ,  $b^2 + b + 1 = 0$  на  $R(b) = R(a)$ , то

$$A_g b = \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} \alpha & -1 - 2\alpha \\ 1 + 2\alpha & -1 - \alpha \end{array} \right), E \right), \quad A_g d = \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} \beta & \gamma \\ \gamma & \beta \end{array} \right), \delta \right),$$

де  $\alpha, \beta, \gamma \in \text{End}L$ ,  $\alpha + \alpha^2 = 0$ ,  $l, \delta \in \text{End}P$ ,  $l^2 = \delta^2 = 1$ ,  $\alpha\beta = (\alpha + 1)\gamma = 0$ ,  $\beta^2 + \gamma^2 = 1$ ,  $\alpha = -\gamma^2$ ,  $\beta\gamma = \gamma\beta = 0$ ,  $1$  – одиниця  $\text{End}L$ ,  $E$  – одиниця  $\text{End}P$ .

Відмітимо, що якщо  $A$  – гомоморфізм з умовою (\*), то в лемі 7 другий випадок не має місця.

В якості елементів  $a, b, c, d$  які визначені у лемі 7, можна вибрати образи інволюцій і елементів третього порядку.

**Теорема 3.** Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з  $1$ ,  $3 \in K^*$ ,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 3$ ,  $W$  – лівий  $K$ –модуль, гомоморфізм  $A : G \rightarrow GL(W)$  – довільний неединичний гомоморфізм групи  $E(n, R)$ . Тоді в якості елементів  $a, b, c, d$  які визначені у лемі 6, можна вибрати

$a = A \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right)$ ,  $b = A \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), -1, 1, \dots, 1 \right)$ , при  $n \geq 3$  або у випадку  $n \geq 4$

$$a = A \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \quad b = A \text{diag} \left( 1, 1, \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right),$$

$$c = A \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right), \quad d = A \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & E \\ E & 0 \end{array} \right), 1, \dots, 1 \right),$$

де  $E = \text{diag}(1, 1)$  – одинична  $2 \times 2$  матриця.

**Доведення.** Безпосередньою перевіркою встановлюється, що мають місце співвідношення  $a^3 = b^3 = 1$ ,  $ab = ba$ ,  $cac^{-1} = a^{-1}$ ,  $cbc^{-1} = b^{-1}$ ,  $c^2 = 1$ ,  $dad^{-1} = b$ ,  $d^2 = 1$ ,  $dc = cd$ . Тому до перерахованих в теоремі 3 елементів можна застосувати лему 7.

**6. Висновки.** У даній статті знайдено вигляд образів деяких елементів матричних груп над асоціативними кільцями відносно неединичних гомоморфізмів у групу автоморфізмів модулів над асоціативними кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними елементами шляхом зображення їх формальними матрицями.

**7. Перспективи подальших досліджень.** Знаходження умов, подібних до умови (\*) при яких гомоморфізми матричних груп над кільцями допускають стандартний опис.

### Список використаної літератури

1. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки*. 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01158061>
2. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Конечномерные алгебры. Киев: Вища школа, 1980. 192 с.
3. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2. С. 152–171.
4. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфизмы матричных групп над ассоциативными кольцами. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). С. 99–114.
5. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group  $GL_n(R)$ ,  $n \geq 4$  over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*. 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.

6. Hahn A. J. , O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer, 1989. 578 p.
7. Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 188. 2013. P 490 – 550. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7>
8. Bovdi V. A., Rudko V. P. Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra*, Vol. 295. 2006. P. 441 – 451. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005>

**Petechuk V. M., Petechuk Y. V.** Images of formal matrices of elements of matrix groups over associative rings.

The paper substantiates the image by formal matrices of some elements of linear groups over associative rings by using the properties of redundant and fixed modules. The form of images of elements of linear groups with respect to their homomorphisms in the group of automorphisms of modules over associative rings of 1, in which there are reversible elements 2 or 3, is shown.

Using this approach, the authors described homomorphisms with the condition (\*) of matrix groups over associative rings with 1. In particular, the isomorphisms of matrix groups over associative rings are homomorphisms with condition (\*).

**Keywords:** residual and fixed modules, decomposition modules, idempotents, formal matrices, transvections, commutators, homomorphisms of linear groups over rings.

## References

1. Petechuk, V. M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR* 45, 144–151. <https://doi.org/10.1007/BF01158061> [in Russian].
2. Drozd, Yu. A. & Kyrychenko, V. V. (1980). *Konechnomernye algebry* [Finite-Dimensional Algebras]. Kiev: Vyscha shkola [in Russian].
3. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2 (25), 152–171 [in Russian].
4. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1 (26), 99–114 [in Russian].
5. Golubchik, I. Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group  $GL_n(R)$ ,  $n \geq 4$  over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*, 131(1) , P. 123–136.
6. Hahn, A. J., & O'Meara, O. T. (1989). The Classical Groups and K-Theory. Berlin : Springer.
7. Vavilov, N. A. & Stepanov A. V. (2013). Linear groups over general rings. I. Generalities. *Journal of Mathematical Sciences*, 188, 490–550. <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1146-7>
8. Bovdi, V. A. & Rudko V. P. (2006). Extensions of the representation modules of a prime order group. *J. Algebra*, 295, 441–451. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.07.005>

Одержано 08.04.2020

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).30-40](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).30-40)**В. Б. Трошкі<sup>1</sup>, Н. В. Трошкі<sup>2</sup>, П. П. Товт<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін,  
кандидат фізико-математичних наук  
[viktor.troshki@uzhnu.edu.ua](mailto:viktor.troshki@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1309-1151>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри фізико-математичних дисциплін,  
кандидат фізико-математичних наук  
[natalia.troshki@uzhnu.edu.ua](mailto:natalia.troshki@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8152-5663>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
магістр 2-го року навчання кафедри фізико-математичних дисциплін  
[toth.retep.18@gmail.com](mailto:toth.retep.18@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6083-8591>

## ОЦІНКИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ПРОЦЕСУ, КОЛИ ВІДОМІ ЙОГО ЗНАЧЕННЯ У СКІНЧЕННІЙ МНОЖИНІ ТОЧОК

На практиці зазвичай значення процесу спостерігаються в певні моменти часу. І на основі цих даних потрібно робити висновки про поведінку процесу, за яким ведеться спостереження. Саме тому, першочерговою метою роботи є оцінка коваріаційної функції такого процесу. Для цього в даній роботі розглянуто гауссовий стаціонарний випадковий процес  $X$  із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок та поставлено завдання оцінити коваріаційну функцію такого випадкового процесу.

Однією з особливостей оцінки кореляційної функції випадкового процесу при невідомому середньому значенні є те, що використання корелограмм в якості оцінки не є можливим, оскільки корелограма в цьому випадку є зміщеною оцінкою кореляційної функції. Тому для доведення теорем потрібно було побудувати статистику, яка б була незміщеною оцінкою коваріаційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу. Крім цього, як показано в деяких наших попередніх роботах, так і в цій роботі, що при оцінці відхилень кореляційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу від корелограми в  $L_p$ -метриці ми маємо справу вже не з гауссовими випадковими процесами, а з квадратично-гауссовими. Тому для доведення цієї оцінки використано теорію квадратично-гауссових випадкових процесів. За допомогою цієї теорії отримано оцінки відхилень кореляційної функції гауссового стаціонарного випадкового процесу із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок цього процесу від її оцінки в  $L_p$ -метриці.

В роботі також побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції такого випадкового процесу. Цей критерій вдалося сформулювати завдяки отриманим оцінкам.

**Ключові слова:** статистика, гіпотеза, критерій, квадратично-гауссовий процес,  $L_p$ -метрика.

**1. Вступ.** Оцінювання спектральних і кореляційних функцій випадкових процесів та побудова критеріїв для ідентифікації цих характеристик є актуальним напрямком в теорії випадкових процесів. Інтерес до вивчення цих проблем зумовлений широким використанням отриманих результатів, зокрема при розв'язанні різноманітних задач геології та метеорології.

Розділ 1: Математика і статистика

Актуальність даної тематики зумовлює наявність багатьох робіт в цьому напрямку. Зокрема, в роботах [1], [3], [4], [5], [6] та книзі [11] були отримані певні оцінки коваріаційних функцій із заданою точністю в рівномірній метриці. В роботах [10] і [12] Ю. В. Козаченко та Т. В. Федорянич побудували критерії для перевірки гіпотез про вигляд коваріаційної функції гауссового стаціонарного процесу із заданою надійністю та точністю у просторі  $L_2[0, A]$ . У даній роботі для побудови критерію було використано оцінки норми квадратично-гауссових випадкових процесів в просторі  $L_p[0, A]$ ,  $p \geq 1$ , які були отримані в роботі Ю. В. Козаченка та В. Б. Трошкі [8]. Більш детальну інформацію з теорії квадратично-гауссових випадкових величин можна знайти в книзі [2] та статті [7]. Зокрема, в цих роботах було досліджено властивості простору квадратично-гауссових випадкових величин та встановлено їх зв'язок з іншими просторами випадкових величин.

Основною метою даної статті є побудова критерію для перевірки гіпотези про вигляд коваріаційної функції гауссового стаціонарного процесу у випадку, коли відомі його значення у скінченній множині точок. Ми також припускаємо, що середнє значення цього процесу є невідомим. По суті, це продовження досліджень, розпочатих у статті [8] та [9]. Істотною відмінністю даної роботи від роботи [9] є те, що тут ми розглядаємо гауссовий стаціонарний випадковий процес  $X$  з невідомим середнім значенням, коли відомі його значення у скінченній множині точок. За оцінку кореляційної функції цього процесу  $\rho(\tau) = E(X(t + \tau) - m)(X(t) - m)$  ми вибираємо статистику

$$\hat{\rho}_{T,n}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right), \quad (1)$$

де  $X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right)$  та  $X \left( \frac{iT}{n} \right)$  – незалежні, відомі значення випадкового процесу,

$$\hat{a}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) \quad (2)$$

та

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \left( \frac{iT}{n} \right). \quad (3)$$

В роботі також отримано оцінки ймовірності відхилення  $\hat{\rho}_{T,n}(\tau)$  від  $\rho(\tau)$  в нормі простору  $L_p[0, A]$ ,  $p \geq 1$ .

Робота має таку структуру. Другий розділ присвячений відомостям з теорії квадратично-гауссових випадкових процесів. У третьому розділі розглянуто гауссовий стаціонарний процес із невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок та отримано оцінки відхилення кореляційної функції цього процесу від її оцінки в  $L_p$ -метриці. На основі побудованих оцінок у розділі 4 побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції такого процесу. В останньому розділі проаналізовано результати роботи та зроблено висновки.

## 2. Відомості з теорії квадратично-гауссових випадкових величин.

**Означення 1.** ([2], [7]) Нехай  $\mathbb{T}$  – деяка параметрична множина,  $\Xi = \{\xi_t, t \in \mathbb{T}\}$  – сім'я сумісно гауссових випадкових величин,  $E\xi_t = 0$  (напри-



клад,  $\xi_t$  – гауссів випадковий процес). Простір  $SG_{\Xi}(\Omega)$  називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо випадкові величини  $\zeta \in SG_{\Xi}(\Omega)$  можна зобразити у вигляді

$$\zeta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - \mathbb{E} \bar{\xi}^T A \bar{\xi},$$

де:

- $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$  – гауссовий випадковий вектор із  $N \geq 1$ ,  $\mathbb{E} \bar{\xi} = 0$ ;
- випадкові величини  $\xi_i, i = 1, \dots, N$  належать  $\Xi$ ;
- $A$  – довільна симетрична матриця,

або випадкові величини з  $SG_{\Xi}(\Omega)$  – це границі в середньому квадратичному послідовностей випадкових величин  $\zeta_n = \bar{\xi}_n^T A_n \bar{\xi}_n - \mathbb{E} \bar{\xi}_n^T A_n \bar{\xi}_n, n \geq 1$ . Зображення для  $\zeta_n$  такі ж як і зображення  $\zeta$ .

**Означення 2.** ([2]). Випадковий процес  $Y$  називається квадратично-гауссовим випадковим процесом, якщо для кожного  $t \in \mathbb{T}$  випадкова величина  $Y(t)$  належить простору  $SG_{\Xi}(\Omega)$  та  $\sup_{t \in \mathbb{T}} Y^2(t) < \infty$ .

Приклади квадратично гауссових випадкових процесів:

- 1) Нехай  $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t), t \in \mathbb{T}$  – це сім'я сумісно гауссових випадкових процесів, і  $\mathbb{E} \xi_i(t) = 0$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Нехай для кожного  $t \in \mathbb{T}$  матриця  $A(t)$  симетрична і позначимо  $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$ . Тоді випадковий процес  $\zeta(t) = \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t) - \mathbb{E} \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t)$  є квадратично-гауссовим випадковим процесом.
- 2) Нехай  $\bar{\xi}_n(t)$  – центрований гауссовий векторний процес і  $A_n(t)$  симетрична матриця для кожного  $t \in \mathbb{T}$ . Тоді границя в середньому квадратичному послідовності випадкових процесів  $\zeta_n(t) = \bar{\xi}_n^T(t) A_n(t) \bar{\xi}_n(t) - \mathbb{E} \bar{\xi}_n^T(t) A_n(t) \bar{\xi}_n(t)$  є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Наступна лема була сформульована та доведена в шостому розділі книги [2].

**Лема 1.** Нехай  $\xi = \{\xi(t), t \in \mathbb{T}\}$  – центрований стаціонарний гауссовий процес і  $\rho(\tau) = \mathbb{E} \xi(t + \tau) \xi(t)$ . Розглянемо при  $T > 0$  корелограму

$$\hat{\rho}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t + \tau) \xi(t) dt.$$

Тоді  $\hat{\rho}(\tau) - \rho(\tau)$  є квадратично-гауссовим процесом.

**Теорема 1.** ([8]). Нехай  $Y = \{Y(t), t \in \mathbb{X}\}$  – це квадратично-гауссів процес, де  $\{\mathbb{X}, \mathfrak{A}, \mu\}$  – це вимірний простір. Припустимо, що  $Y(t)$  вимірний процес на  $\mathbb{X}$ . Якщо існує інтеграл Лебега  $C_p(\mathbb{X}) = \int_{\mathbb{X}} (\mathbb{E} Y^2(t))^{\frac{p}{2}} d\mu(t), p \geq 1$ , то з імовірністю 1 існує  $\int_{\mathbb{X}} |Y(t)|^p d\mu(t)$  та для  $\varepsilon \geq \left( \frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p} \right)^p C_p(\mathbb{X})$  справджується нерівність

$$P \left\{ \int_{\mathbb{X}} |Y(t)|^p d\mu(t) > \varepsilon \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^{1/p} \sqrt{2}}{C_p(\mathbb{X})}} \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{2} C_p(\mathbb{X})} \right\}.$$

### 3. Оцінки кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу.

Розглянемо неперервний дійсний стаціонарний гауссовий випадковий процес  $X$ , який визначений на ймовірнісному просторі  $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ ,

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{T} = [0, T + A], 0 < A < T < \infty\}$$

та  $\mathbf{E}X(t) = m$ . Припустимо, що значення цього процесу в моменти  $t_i = \frac{iT}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  та  $t_i + \tau \in$  відомі.

Позначимо через

$$\rho(\tau) = E(X(t + \tau) - m)(X(t) - m), \quad 0 \leq \tau \leq A \quad (4)$$

кореляційну функцію цього процесу, яку будемо розглядати на  $[0; A]$ .

Введемо позначення

$$r(\tau) = r(n, \tau) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} X \left( \frac{(i-j)T}{n} - \tau \right). \quad (5)$$

Виберемо за оцінку кореляційної функції  $\rho(\tau)$  статистику  $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$  визначену у (1)

**Зауваження 1.** Оскільки  $X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right)$  та  $X \left( \frac{iT}{n} \right)$  – незалежні, тому справедливими є наступні перетворення:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{iT}{n} \right) - \widehat{a}X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \widehat{a}_\tau X \left( \frac{iT}{n} \right) + \right. \\ &+ \left. \widehat{a}\widehat{a}_\tau \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( \mathbf{E}X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{iT}{n} \right) - \mathbf{E}\widehat{a}X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \mathbf{E}\widehat{a}_\tau X \left( \frac{iT}{n} \right) + \right. \\ &+ \left. \mathbf{E}\widehat{a}\widehat{a}_\tau \right) = \rho(\tau) + m^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}X \left( \frac{jT}{n} \right) X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \\ &- \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}X \left( \frac{jT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{E}X \left( \frac{jT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{iT}{n} \right) = \\ &= \rho(\tau) + m^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) - m^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) - m^2 + \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) + m^2 = \rho(\tau) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) = \\ &= \rho(\tau) - r(\tau). \end{aligned}$$

А це означає, що  $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$  є зміщеною на величину  $r(\tau)$  оцінкою для  $\rho(\tau)$ . Однак величина  $\widetilde{\rho}_{T,n}(\tau) = \widehat{\rho}_{T,n}(\tau) + r(\tau)$  буде незміщеною оцінкою. Більше того, дисперсії оцінок  $\widehat{\rho}_{T,n}(\tau)$  та  $\widetilde{\rho}_{T,n}(\tau)$  однакові.

**Теорема 2.** Нехай  $X(t)$  вимірний стаціонарний гауссовий процес із  $\mathbf{E}X(t) = m$  та кореляційною функцією  $\rho(\tau)$ . І нехай при  $0 < A < \infty$  виконується, що

$C(p, n) < \infty$ ,  $\partial e$

$$\begin{aligned}
C(p, n) = & \int_0^A \left( \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{2T}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{j}{n} \right) \left[ \rho^2 \left( \frac{jT}{n} \right) + \rho \left( \frac{jT}{n} + \tau \right) \rho \left( \frac{jT}{n} - \tau \right) \right] - \\
& - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) + \right. \\
& \left. + 2\rho \left( \frac{(i-j)T}{n} \right) \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} \right) + \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} - \tau \right) \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) \right] \Big)^{\frac{p}{2}} d\tau. \tag{6}
\end{aligned}$$

Тоді при

$$\varepsilon \geq \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} + \left( \frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left( \frac{p}{2} + 1 \right) p} \right) C^{1/p}(p, n),$$

де  $r(\tau)$  визначена у (5), справджується нерівність

$$\begin{aligned}
P \left\{ \left( \int_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq \\
\leq 2 \left( 1 + \frac{\left( \varepsilon - \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \right) \sqrt{2}}{C^{\frac{1}{p}}(p, n)} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\varepsilon - \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}}{\sqrt{2} C^{\frac{1}{p}}(p, n)} \right\}. \tag{7}
\end{aligned}$$

**Доведення.** Спочатку обчислимо

$$\mathbf{D}\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) = \mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}^2(\tau) - (\rho(\tau) - r(\tau))^2. \tag{8}$$

Для цього розглянемо  $\mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}^2(\tau)$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\widehat{\rho}_{T,n}^2(\tau) = & \mathbf{E} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left( X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{kT}{n} \right) - \hat{a} \right) \right) = \\
= & \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right) \times \right. \\
& \times \mathbf{E} \left( X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{kT}{n} \right) - \hat{a} \right) + \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right) \left( X \left( \frac{kT}{n} \right) - \hat{a} \right) + \\ & + \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{kT}{n} \right) - \hat{a} \right) \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right) \times \\ & \times \left( X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \Big] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} [S_1 + S_2 + S_3]. \end{aligned}$$

Розглянемо кожен із доданків окремо. Тоді для  $S_1$  отримаємо:

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbf{E} \left( X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \left( X \left( \frac{iT}{n} \right) - \hat{a} \right) \mathbf{E} \left( X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \hat{a}_\tau \right) \times \\ & \times \left( X \left( \frac{kT}{n} \right) - \hat{a} \right) = \left( \mathbf{E} X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{iT}{n} \right) - \mathbf{E} \hat{a} X \left( \frac{iT}{n} + \tau \right) - \right. \\ & - \mathbf{E} \hat{a}_\tau X \left( \frac{iT}{n} \right) + \mathbf{E} \hat{a} \hat{a}_\tau \left. \right) \left( \mathbf{E} X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) X \left( \frac{kT}{n} \right) - \mathbf{E} \hat{a} X \left( \frac{kT}{n} + \tau \right) - \right. \\ & - \mathbf{E} \hat{a}_\tau X \left( \frac{kT}{n} \right) + \mathbf{E} \hat{a} \hat{a}_\tau \left. \right) = \left[ (\rho(\tau) + r(\tau)) - \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) \right) \right] \left[ (\rho(\tau) + r(\tau)) - \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) \right) \right] = (\rho(\tau) + r(\tau))^2 - (\rho(\tau) + r(\tau)) \times \\ & \times \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) \right) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) \right). \end{aligned}$$

З аналогічних міркувань отримаємо, що

$$\begin{aligned} S_2 &= \left( \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} \right) + r(0) \right)^2 - 2\rho \left( \frac{(i-k)T}{n} \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} \right) + - \right. \\ & \left. \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} \right) \right) - 2r(0) \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \left[ \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} \right) \right)^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} \right) + \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} \right) \right)^2 \right].$$

та

$$\begin{aligned} S_3 = & \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) - \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) \times \\ & \times \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) - \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + \\ & + \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) r(\tau) - \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) \times \\ & \times \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) - r(\tau) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} - \tau \right) - \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) \times \\ & \times \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) - r(\tau) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} + \tau \right) + \\ & + r(\tau) \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) - r(\tau) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-i)T}{n} + \tau \right) - \\ & - r(\tau) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho \left( \frac{(j-k)T}{n} - \tau \right) + r^2(\tau). \end{aligned}$$

Підставивши отримані значення  $S_1, S_2, S_3$  в  $\mathbf{E}\hat{\rho}^2(\tau)$  отримаємо, що

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\hat{\rho}^2(\tau) = & (\rho(\tau) - r(\tau))^2 + r^2(0) + r^2(\tau) + \\ & + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \rho^2 \left( \frac{(i-k)T}{n} \right) + \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) \right] - \\ & - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ 2\rho \left( \frac{(j-i)T}{n} \right) \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} \right) + \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) \times \right. \\ & \times \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} + \tau \right) + \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \rho \left( \frac{(i-k)T}{n} - \tau \right) - \rho \left( \frac{(i-j)T}{n} + \tau \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \rho\left(\frac{(i-k)T}{n} + \tau\right) + \rho\left(\frac{(i-k)T}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} - \tau\right) + \\
& + \rho\left(\frac{(i-k)T}{n} - \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} + \tau\right) - \rho\left(\frac{(i-k)T}{n} - \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} + \tau\right) \Big] = \\
& = \frac{1}{n^4} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right) \right]^2 + \frac{1}{n^4} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau\right) \right]^2 + \\
& \quad + \frac{T}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left[ \rho^2\left(\frac{j}{n}\right) + \rho\left(\frac{j}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{j}{n} - \tau\right) \right] - \\
& - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} + \tau\right) + 2\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right) + \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} - \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} - \tau\right) \right] + (\rho(\tau) - r(\tau))^2.
\end{aligned}$$

Тоді з (8) випливає, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\hat{\rho}(\tau) &= \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau\right) \right]^2 + \\
& + \frac{2T}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left[ \rho^2\left(\frac{jT}{n}\right) + \rho\left(\frac{jT}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{jT}{n} - \tau\right) \right] - \\
& - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} + \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} + \tau\right) + \right. \\
& \left. + 2\rho\left(\frac{(i-j)T}{n}\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n}\right) + \rho\left(\frac{(i-j)T}{n} - \tau\right) \rho\left(\frac{(j-k)T}{n} - \tau\right) \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

З означення 1 та леми 1 випливає, що для кожного  $\tau \geq 0$ ,  $\hat{\rho}_{T,n}(\tau) - \mathbf{E}\hat{\rho}_{T,n}(\tau)$  є квадратично-гауссовою випадковою величиною. Це означає, що для цієї величини справджуються умови теореми 1, що разом з теоремою 3.2 роботи ([9]) дає справедливості оцінки (7) при  $0 < A < \infty$ . З теореми 1 та формули (9) випливає формула (6) для  $C(p, n)$

#### 4. Побудова критерію для перевірки гіпотези.

Нехай  $\mathbb{H}$  – гіпотеза, яка полягає в тому, що при  $0 \leq \tau \leq A$  кореляційна функція дійсного вимірного стаціонарного гауссового процесу  $X$  з невідомим математичним сподіваннями дорівнює  $\rho(\tau)$ . Припустимо, що значення цього процесу відомі в моменти часу  $t_i = \frac{iT}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . За оцінку  $\rho(\tau)$  виберемо величину  $\hat{\rho}_{T,n}(\tau)$ .

Позначимо

$$g(\varepsilon) = 2 \left( 1 + \frac{\left( \varepsilon - \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \right) \sqrt{2}}{C^{\frac{1}{p}}(p, n)} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\varepsilon - \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p}}{\sqrt{2} C^{\frac{1}{p}}(p, T)} \right\}.$$

Тоді з теореми 2 випливає, що якщо

$$\varepsilon \geq z_p := \left( \int_0^A |r(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} + \left( \frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p} \right) C^{1/p}(p, n),$$

то

$$P \left\{ \left( \int_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq g(\varepsilon).$$

Нехай  $\varepsilon_\delta$  – це розв'язок рівняння  $g(\varepsilon) = \delta$ , де  $0 < \delta < 1$ .

Виберемо  $S_\delta = \max\{\varepsilon_\delta, z_p\}$ . Тоді очевидно, що  $g(S_\delta) \leq \delta$  та

$$P \left\{ \left( \int_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} > S_\delta \right\} \leq \delta. \quad (10)$$

А це означає, що для перевірки гіпотези  $\mathbb{H}$  можна використати наступний критерій.

**Критерій 1.** Для заданого рівня довіри  $\delta$  гіпотеза  $\mathbb{H}$  приймається, якщо

$$\left( \int_0^A |\widehat{\rho}_{T,n}(\tau) - \rho(\tau)|^p d\tau \right)^{1/p} \leq S_\delta$$

і відкидається в протилежному випадку.

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** На практиці зазвичай значення процесу спостерігаються в певні моменти часу. І на основі цих даних потрібно робити висновки про поведінку процесу, за яким ведеться спостереження. Саме тому, у роботі розглянуто гауссовий стаціонарний процес з невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок. Оцінено відхилення кореляційної функції цього процесу від її оцінки та побудовано критерій для перевірки гіпотези про вигляд кореляційної функції гауссового стаціонарного процесу з невідомим середнім, коли відомі його значення у скінченній множині точок. В наступних роботах планується побудувати критерії для перевірки гіпотез про вигляд кореляційної функції гауссового процесу за наявної конкретної альтернативної гіпотези.

### Список використаної літератури

1. Buldygin V. *Properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with squar-integrable spectral density*. Ukrain. Math. J. **47**, no. 7. 1995, p. 1006-1024.
2. Buldygin V., Kozachenko Yu. *Metric characterization of random variables and random processes*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
3. Buldygin V., Zayats V. *On asymptotic normality of estimates for correlation functions of stationary Gaussian processes in the spaces of continuous functions*. Ukrain. Math. J. **47**, no.11. 1995, p. 1696-1710.
4. Ivanov A. *A limit theorem for the evaluation of the correlation function*. Theor. Probability and Math. Statist. **19**. 1978, p.76-81.
5. Kozachenko Yu., Oleshko T. *Analytic properties of certain classes of pre-Gaussian stochastic processes*. Theor. Probability and Math. Statist. **48**. 1993, p. 37-51.

6. Kozachenko Yu., Stadnik A. *On the convergence of some functionals of Gaussian vectors in Orlicz spaces*. Theor. Probability and Math. Statist. **44**. 1991, p.80-87.
7. Kozachenko Yu., Stus O. *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*. Math. Communications. **3**, no.1. 1998, p. 83-94.
8. Kozachenko Yu., Troshki V. *A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process*. Modern Stochastics: Theory and Applications. **2**. 2015, p. 1-11.
9. Kozachenko Yu., Troshki V. *Construction of a criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean*. vol. 47, Issue 18. 2018, p. 4556-4567.
10. Kozachenko Yu., Fedoryanych T. *A criterion for testing hypotheses about the covarians function of a Gaussian stationary process*. Theor. Probability and Math. Statist. **69**. 2005, p. 85-94.
11. Leonenko N., Ivanov A. *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer, Dordrecht, 1989.
12. Fedoryanych T. *One estimate of the correlation function for Gaussian stochastic process*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. **2**. 2004, p. 72-76.

**Troshki V. B., Troshki N. V., Tovt P. P.** Estimates of the correlation function of a Gaussian stationary process when its values are known in a finite set of points.

In practice, process values are usually observed at certain points in time. And based on this data, we need to draw conclusions about the behavior of the process that is being monitored. That is why the primary purpose of the paper is to evaluate the covariance function of such a process. For this purpose, in this paper, we consider a Gaussian stationary random process  $X$  with unknown mean, when its values are known in a finite set of points and the task is to estimate the covariance function of such a random process. One feature of estimating the correlation function of a random process with an unknown mean is that the use of correlograms as an estimator is not possible, since the correlogram in this case is a biased estimation of the correlation function. Therefore, to prove the theorems, it was necessary to construct a statistics that would be an unbiased estimate of the covariance function of a Gaussian stationary random process. In addition, as shown in some of our previous papers and in this work, we are dealing with quadratic-Gaussian processes when estimating the deviations of the correlation function of a Gaussian stationary random process from a correlogram in the  $L_p$ -metric. Therefore, to prove this estimate was used the theory of quadratic-Gaussian random processes. Using this theory, we obtain estimates of the deviations of the correlation function of a Gaussian stationary random process with an unknown mean, when its values in the finite set of points of this process from its estimate in  $L_p$ -metric are known.

The paper also builds a criterion for testing the hypothesis of the appearance of the correlation function of such a random process. This criterion was formulated using the obtained estimates.

**Keywords:** statistics, hypothesis, criterion, quadratic-Gaussian process,  $L_p$ -metric.

## References

1. Buldygin, V. (1995). *Properties of an empirical correlogram of a Gaussian process with square-integrable spectral density*. Ukrain. Math. J., 47(7), 1006-1024.
2. Buldygin, V., & Kozachenko, Yu. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
3. Buldygin, V., & Zayats, V. (1995). *On asymptotic normality of estimates for correlation functions of stationary Gaussian processes in the spaces of continuous functions*. Ukrain. Math. J., 47(11), 1696-1710.
4. Ivanov, A. (1978). *A limit theorem for the evaluation of the correlation function*. Theor. Probability and Math. Statist, 19, 76-81.
5. Kozachenko, Yu., & Oleshko, T. (1993). *Analytic properties of certain classes of pre-Gaussian stochastic processes*. Theor. Probability and Math. Statist, 48, 37-51.
6. Kozachenko, Yu., & Stadnik, A. (1991). *On the convergence of some functionals of Gaussian vectors in Orlicz spaces*. Theor. Probability and Math. Statist, 44, 80-87.



7. Kozachenko, Yu., & Stus, O. (1998) *Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions*. Math. Communications, 3(1), 83-94.
8. Kozachenko, Yu., & Troshki, V. (2015) *A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process*. Modern Stochastics: Theory and Applications, 2, 1-11.
9. Kozachenko, Yu., & Troshki, V. (2018). *Construction of a criterion for testing hypothesis about covariance function of a stationary Gaussian stochastic process with unknown mean*. 47(18), 4556-4567.
10. Kozachenko, Yu., & Fedoryanych, T. (2005). *A criterion for testing hypotheses about the covarians function of a Gaussian stationary process*. Theor. Probability and Math. Statist, 69, 85-94.
11. Leonenko, N., & Ivanov, A. (1989). *Statistical Analysis of Random Fields*. Kluwer, Dordrecht.
12. Fedoryanych, T. (2004). *One estimate of the correlation function for Gaussian stochastic process*. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. 2, 72-76.

Одержано 04.04.2020

УДК 519.217; 519.718; 519.837

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).41-54](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).41-54)**В. К. Ясинський<sup>1</sup>, С. В. Антонюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,  
професор,

доктор фізико-математичних наук

yasinsk@list.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5434-6427><sup>2</sup> Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,  
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,  
кандидат фізико-математичних наук

violant78@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5357-8987>

## ІСНУВАННЯ $L$ -ГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ІТО-СКОРОХОДА ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА НЕСКІНЧЕННОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

В статті дано означення сильного розв'язку стохастичної динамічної системи Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями і всією передісторією, доведені основні нерівності, використання яких необхідне для встановлення умов існування і єдиності розв'язку. Доведена глобальна теорема існування та єдиності розв'язку таких динамічних систем.

**Ключові слова:** інтеграл за вінеровим процесом, інтеграл за пуассоновою мірою, стохастичні динамічні системи Іто-Скорохода, стохастична динамічна система випадкової структури, марковські перемикавання.

### 1. Постановка задачі.

Нехай  $R^n$  –  $n$ -вимірний дійсний евклідовий простір і  $1 \leq p < \infty$ .  $X$  є простором історії, тобто простір  $R^n \times D_\rho^p$ , де  $D_\rho^p$  – простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій  $\varphi : R^+ \rightarrow R^n$  таких, що

$$\|\varphi\|_\rho^p \equiv \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норма в просторі  $X$  вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_X \equiv \left( |\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p \right)^{1/p}, \quad \|\varphi\|_\rho^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

**Означення 1.** Функція  $\rho : R^+ \rightarrow R^+$  називається функцією із згладжуючою властивістю, якщо вона задовольняє таким умовам [2]:

1.  $\rho$  – сумовна в  $R^+$ ;
2. для  $\forall z \geq 0$  справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \bar{K}(z) &\equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \leq \bar{K} < \infty; \\ \underline{K}(z) &\equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{aligned} \tag{1}$$

3.  $\rho$  – обмежена в  $R^+$ ;
4.  $\rho > 0$  – строго додатня на  $s \in (0, \infty)$ ;
5.  $s\rho(s) \rightarrow 0$  коли  $s \rightarrow \infty$ .

Наприклад, в якості  $\rho(s)$  можна розглянути функцію  $e^{-s}$ .

Нехай  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$  – ймовірнісний базис [1];  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  – марковський процес із значеннями в метричному просторі  $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$  з перехідною ймовірністю  $\mathbf{P}(s, y, A)$ ,  $A \in \mathfrak{B}_Y$ ;  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  – ланцюг Маркова в метричному просторі з перехідною ймовірністю на  $k$ -му кроці  $\mathbf{P}_k(h, G)$ ;  $\{w(t), t \geq 0\}$  –  $R^n$ -значний вінерів процес, узгоджений з потоком  $\sigma$ -алгебр  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ , а  $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$  незалежна від нього центрована пуассонова міра на  $(\Theta \times R_+, Z \times B_+)$ , для якої  $\mathbf{E} \{\tilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$ , де  $\Pi$  – деяка  $\sigma$ -скінченна міра на  $Z$ .

Розглянемо стохастичну динамічну систему випадкової структури із зовнішніми збуреннями та усією передісторією

$$\begin{aligned} dx(t) = & f_1(\gamma_1)a(t, x^t, \xi(t))dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, \xi(t))dw(t) + \\ & + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, dt), \quad \forall t \geq t_0; \end{aligned} \quad (2)$$

з марковськими перемиканнями

$$\begin{aligned} \Delta x|_{t=t_k} = & x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x^{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k), \\ t_k \in S \equiv & \{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty \end{aligned} \quad (3)$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad x^{t_0} = \varphi \in X, \quad \eta_{k_0} = h. \quad (4)$$

Тут  $\gamma_1, \gamma_2$  – випадкові величини, з функціями розподілу  $F_{\gamma_1}(\cdot), F_{\gamma_2}(\cdot)$  відповідно, незалежні від  $\xi(t)$  і приростів  $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$ ,  $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$ ;  $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$  – деякі борелеві функції; векторнозначний функціонал  $\{a(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \rightarrow R^n$ , матричнозначний функціонал  $\{b(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \rightarrow M_n(R^n)$  та векторнозначний функціонал  $\{c(t, \varphi, \theta, y)\} : R \times X \times \Theta \times \mathbf{Y} \rightarrow R^n$  – вимірні за сукупністю змінних і при кожному  $\varphi \in X$  локально обмежені по  $t$ , а процес  $x^t = (x(t), x_\rho^t)$ , де

$$x_\rho^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \leq s \leq t; \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases}$$

Крім того,  $\varphi^{t_0} \in X$  з ймовірністю 1 і  $\varphi(t)$  не залежить від приростів вінерового процесу  $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$ , центрованої пуассонової міри  $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$  при кожному  $t$  та випадкових величин  $\gamma_1, \gamma_2$ .

**Означення 2.** *Стохастичний процес  $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in (-\infty, T]\}$  назвемо сильним розв'язком задачі (2)-(4), якщо  $x(t)$  прогресивно вимірний відносно  $\mathfrak{F}_t$  при  $t \leq T$ , відрізки траєкторій процесу  $x^t \in X$  при  $t \in [t_0, T]$ ,  $x^{t_0} = \varphi$  з ймовірністю 1 і рівність*

$$\begin{aligned} x(t) = & x(s) + f_1(\gamma_1) \int_s^t a(s, x^s, \xi(t))ds + f_2(\gamma_2) \int_s^t b(s, x^s, \xi(t))dw(s) + \\ & + f_3(\gamma_3) \int_s^t \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, ds) \end{aligned} \quad (5)$$

виконується з ймовірністю 1 для всіх  $s \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $t \in (s, t_{k+1})$  і при  $t_k \geq t_0$ :

$$x(t_k) = x(t_k-) + g(t_k-, x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k). \quad (6)$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що  $\xi(t)$  – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів. Згідно [1]  $\{x^t(s), \xi(t)\}$  є марковським процесом, в якому випадкова складова  $x(t) \in X$  характеризує зміни вектора стану системи, а  $\xi(t)$  – випадкові зміни її структури з врахуванням ланцюга Маркова  $\{\eta_k, k \geq 0\}$ , що входить як аргумент у функцію відображення  $g(\cdot, \cdot, \cdot, \eta_k)$ . Цим і пояснюється означення системи (2) як системи випадкової структури.

## 2. Основні твердження для сильного розв'язку стохастичних динамічних систем без врахування марковських збурень.

Спочатку розглянемо більш просту динамічну систему, що не містить марковських збурень, а саме:

$$\begin{aligned} dx(t) = & f_1(\gamma_1)a(t, x^t)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t)dw(t) + \\ & + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, dt), \quad \forall t \geq t_0; \end{aligned} \quad (7)$$

$$x^{t_0} = \varphi \in X. \quad (8)$$

Встановимо достатні умови існування і єдиності сильного розв'язку спочатку для задачі (7)-(8).

Введемо позначення

$$|x(\cdot)|_{t_0}^*(t) \equiv \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s)|.$$

(іноді  $t_0$  не будемо писати, коли це не суттєво)

При доведенні теореми існування та єдиності сильного розв'язку будемо використовувати нерівності Буркхольдера [2], [9]: для довільного  $l > 1$  існують сталі  $c_{l1}$ ,  $c_{l2}$  такі, що

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^{\bullet} \psi_1(s) dw(s) \right|_{t_0}^{*l} (t) \leq c_{l1} \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t |\psi_1(s)|^2 ds \right)^{l/2}; \quad (9)$$

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^{\bullet} \int_{\Theta} \psi_2(\theta, s) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l} (t) \leq c_{l2} \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t \int_{\Theta} |\psi_2(\theta, s)|^2 \Pi(d\theta) ds \right)^{l/2};$$

для будь-яких  $\mathfrak{F}_t$ -узгоджених процесів  $\psi_1(t, \omega)$  і  $\psi_2(\theta, t, \omega)$ , таких, що

$$\int_0^t \psi_1^2(t) dt < \infty; \quad \int_0^t \int_{\Theta} \psi_2^2(\theta, t) \Pi(d\theta) dt < \infty$$

майже напевне.

Також будемо використовувати сталі, що з'являються в таких елементарних нерівностях

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i \right|^l \leq k_l^{(m)} \sum_{i=1}^m |a_i|^l, \quad l \geq 0, \quad (10)$$

$$\{a_i\} \subset R, \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1.$$

Позначимо

$$R(t, x) \equiv f_1(\gamma_1) \int_{t_0}^t a(s, x^s) ds + f_2(\gamma_2) \int_{t_0}^t b(s, x^s) dw(s) + f_3(\gamma_3) \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(t, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, dt),$$

$$\delta(t) \equiv x(t) - y(t).$$

**Лема 1.** Нехай на ймовірнісному базисі  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$  задано стохастичне функціонально-диференціальне рівняння (7) з початковою умовою (8). Припустимо, що

1) вимірні функціонали  $a, b, c$ , визначені відповідно на  $R \times X, R \times X, R \times X \times Z$  задовольняють умову Ліпшица, а саме, існує стала  $L$ , така, що

$$\begin{aligned} & |a(s, x) - a(s, y)| + |b(s, x) - b(s, y)| + \\ & + \int_{\Theta} |c(s, x, \theta) - c(s, y, \theta)| \Pi(d\theta) \leq L \|x - y\|_X \end{aligned} \quad (11)$$

для довільних  $x, y \in X$ ;

2)  $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$  – деякі борелеві функції такі, що існують  $\mathbf{E} (f_1(\gamma_1))^l, \mathbf{E} (f_2(\gamma_2))^l, \mathbf{E} (f_3(\gamma_3))^l \leq c < \infty, l > 1$ , де  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – незалежні в сукупності випадкові величини;

3)  $x, y \subset X$  –  $\mathfrak{F}_t$ -прогресивно вимірні випадкові процеси, без розривів другого роду, для яких  $x^{t_0}, y^{t_0} \in X$ .

Тоді для  $\forall l > 1$  справедлива нерівність

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ |R(\cdot, x) - R(\cdot, y)|_{t_0}^{*l}(t) \right\} \leq K_1 \mathbf{E} \left\{ \|\delta^{t_0}\|_X^l \right\} + \\ & + K_2 \mathbf{E} \left\{ \int_{t_0}^t |\delta(s)|^l ds + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^u |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^{l/p} du \right\} + \\ & + K_3 \mathbf{E} \left\{ \left( \int_{t_0}^t |\delta(s)|^2 ds \right)^{l/2} + \left( \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^u |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^{2/p} ds \right)^{l/2} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де  $K_1, K_2, K_3$  залежать лише від  $l, p, L, (t - t_0)$  і обмежені при  $t \in [t_0, T]$ . Також  $K_1$  є нескінченно малою  $o(1)$  при  $t \rightarrow t_0$ .

**Доведення.** Використовуючи нерівності (9), а також елементарні нерівності (10) матимемо

$$\begin{aligned}
& |R(\cdot, x) - R(\cdot, y)|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l |f_1(\gamma_1)|^l \left| \int_{t_0}^t (a(s, x^s) - a(s, y^s)) ds \right|_{t_0}^{*l}(t) + \\
& + k_l |f_2(\gamma_2)|^l \left| \int_{t_0}^t (b(s, x^s) - b(s, y^s)) dw(s) \right|_{t_0}^{*l}(t) + \\
& + k_l |f_3(\gamma_3)|^l \left| \int_{t_0}^t \int_{\Theta} (c(s, x^s, \theta) - c(s, y^s, \theta)) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l}(t); \\
\mathbf{E} \left\{ |R(\cdot, x) - R(\cdot, y)|_{t_0}^{*l}(t) \right\} & \leq ck_l \mathbf{E} \left\{ (t - t_0)^{l-1} \int_{t_0}^t |(a(s, x^s) - a(s, y^s))|^l ds + \right. \\
& + cc_{l1} \left( \int_{t_0}^t |(b(s, x^s) - b(s, y^s))|^2 ds \right)^{l/2} + \\
& \left. + cc_{l2} \left( \int_{t_0}^t \int_{\Theta} |c(s, x^s, \theta) - c(s, y^s, \theta)|^2 \Pi(d\theta) ds \right)^{l/2} \right\} \leq \\
& \leq ck_l L^l \mathbf{E} \left\{ (t - t_0)^{l-1} \int_{t_0}^t \|\delta^s\|^l ds + (c_{l1} + c_{l2}) \left( \int_{t_0}^t \|\delta^s\|^2 ds \right)^{l/2} \right\}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Оскільки [2]  $\|\delta^s\|_X^p = |\delta(s)|^p + \|\delta^s\|_\rho^p$  і

$$\begin{aligned}
\|\delta^s\|_\rho^p &= \int_0^\infty |\delta(s-v)|^p \rho(v) dv = \int_{s-t_0}^\infty |\delta(s-v)|^p \rho(v) dv + \int_0^{s-t_0} |\delta(s-v)|^p \rho(v) dv = \\
&= \int_0^\infty |\delta(t_0-v)|^p \rho(v) \frac{\rho(v+s-t_0)}{\rho(v)} dv + \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \leq \\
&\leq \bar{K} \|\delta^{t_0}\|_\rho^p + \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv,
\end{aligned}$$

де  $\bar{K}$  визначене формулою (1).

Позначимо  $\lambda = l/p$ ;  $\tau = 2/p$ . Тоді, одержимо

$$\|\delta^s\|^l = (\|\delta^s\|_\rho^p)^\lambda \leq k_\lambda \left[ |\delta(s)|^l + \bar{K}^\lambda \|\delta^{t_0}\|_\rho^l + \left( \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^\lambda \right];$$

$$\|\delta^s\|^2 = (\|\delta^s\|^p)^\lambda \leq k_\tau \left[ |\delta(s)|^2 + \bar{K}^{\tau} \|\delta_0^t\|_\rho^2 + \left( \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^\tau \right].$$

Інтегруючи, матимемо

$$\int_{t_0}^t \|\delta^s\|^l ds \leq k_\lambda \left[ \int_{t_0}^t |\delta(s)|^l ds + \bar{K}^\lambda (t-t_0) \|\delta_0^t\|_\rho^l + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^\lambda ds \right];$$

$$\left( \int_{t_0}^t \|\delta^s\|^2 ds \right)^{l/2} \leq k_\tau^{l/2} k_{l/2} \times$$

$$\times \left[ \left( \int_{t_0}^t |\delta(s)|^2 ds \right)^{l/2} + \bar{K}^\lambda (t-t_0)^{l/2} \|\delta_0^t\|_\rho^l + \left( \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right)^\tau ds \right)^{l/2} \right].$$

Підставивши останні дві оцінки в (13), одержимо (12), причому

$$K_1 \equiv ck_l L^l \bar{K}^\lambda (k_\lambda (t-t_0)^l + c(c_{l1} + c_{l2}) k_{l/2} k_\tau^{l/2} (t-t_0)^{l/2});$$

$$K_2 = ck_l k_\lambda L^l (t-t_0)^{l-1}; \quad K_3 = c(c_{l1} + c_{l2}) L^l k_l k_{l/2} k_\lambda^{l/2}.$$

Лема 1 доведена.

Надалі будемо користуватися наступним наслідком з леми 1.

**Наслідок 1.** При виконанні умов леми 1 справедлива така нерівність:

$$\mathbf{E} \{ |R(\cdot, x) - R(\cdot, y)|_{t_0}^* (t) \} \leq K_1 \mathbf{E} \{ \|\delta_0^t\|_X^l \} + M_{t_0}^t \mathbf{E} \{ |\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l} (t) \}, \quad (14)$$

де  $K_1$  – те саме, що і вище, а  $M$  залежить від  $(t-t_0)$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  і  $M_{t_0}^t = O(1)$  при  $t \downarrow t_0$ .

**Доведення.** Зауважимо, що  $\int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s |\delta(v)|^p \rho(s-v) dv \right) ds \leq \|\rho\|_{L_1} \int_{t_0}^t |\delta(v)|^p dv$ .

Підставивши  $|\delta(s)| \leq |\delta|_{t_0}^* (t)$  при  $t_0 \leq s \leq t$  в нерівність (12), ми одержимо (14)

$$M_{t_0}^t = K_2 \left[ (t-t_0) + \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s \rho(s-v) dv \right)^{l/p} ds \right] +$$

$$+ K_3 \left[ \left( \int_{t_0}^t ds \right)^{l/2} + \left( \int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^s \rho(s-v) dv \right)^{2/p} ds \right)^{l/2} \right] \leq$$

$$\leq K_2 (t-t_0) (1 + \|\rho\|_{L_1}^{l/p}) + K_3 (t-t_0)^{l/2} (1 + \|\rho\|_{L_1}^{l/p}) = o(1) \text{ при } t \rightarrow t_0,$$

що і доводить наслідок.

Доведення теореми існування та єдиності розв'язку СДФР $_{\infty}$  базується на методі послідовних наближень Пікара, як і у випадку класичних стохастичних рівнянь.

Але, враховуючи норму в просторі  $X$ , доведення відрізняється від доведення в класичному розумінні тим, що, взагалі кажучи, оцінки Гронуолла не виконуються. В процесі доведення використовується [5] Лема 2 і можливість продовжити розв'язок, оскільки  $M_{t_0}^t$  залежить від  $(t - t_0)$  і не залежить від  $t_0$ .

**Теорема 1.** *Нехай на ймовірнісному базисі  $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$  задано стохастичне рівняння (7) з початковою умовою (8). Припустимо, що*

1) *функціонали  $a : R \times X \rightarrow R^n, b : R \times X \rightarrow M_n^n(R^n), c : R \times X \times \Theta \rightarrow R^n$  вимірні за сукупністю змінних;*

2) *існує стала  $L > 0$  така, що*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| + \int_{\Theta} |c(t, x, \theta) - c(t, y, \theta)| \Pi(d\theta) \leq L \|x - y\|_X$$

для  $\forall x, y \in X$ ;

3)  $|a(t, x)| + |b(t, x)| + \int_{\Theta} |c(t, x, \theta)| \Pi(d\theta) \leq L(1 + \|x\|_X)$  для  $\forall t \in [t_0, T]$  і  $\forall x, y \in X$ ;

4)  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)$  – деякі борелеві функції такі, що існують  $\mathbf{E}(f_1(\gamma_1))^l, \mathbf{E}(f_2(\gamma_2))^l, \mathbf{E}(f_3(\gamma_3))^l \leq c < \infty, l > 1$ , де  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – незалежні в сукупності випадкові величини;

5)  $\exists l > 1$  і  $x_-$  – випадковий процес  $x_- \in X_{t_0}$  такий, що

$$\mathbf{E} \|x_-^{t_0}\|_X^l < \infty.$$

Тоді

1) існує єдиний сильний розв'язок  $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$  рівняння (7) такий, що

$$x^{t_0} = x_-^{t_0}; \quad (15)$$

2) для  $\forall t \in [t_0, T]$  і  $l > 1$  існує  $l$  момент розв'язку (7)

$$\mathbf{E} |x(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) < \infty. \quad (16)$$

Тут через  $X_{t_0}$  позначено простір вимірних випадкових процесів  $\varphi(t), t \leq t_0$ , таких, що  $\varphi^{t_0} \in X$  з ймовірністю 1, і таких, що при кожному  $t, \varphi(t)$  не залежить від приростів вінерового процесу  $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$ , пуассонової міри  $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$  та випадкових величин  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

**Доведення. Існування.** Визначимо послідовність  $\{x_n(t), n \geq 0\}$  таким чином:

$$x_n(t) = x_-(t) \text{ при } t \leq t_0 \text{ для всіх } n \geq 0,$$

$$x_0(t) = x_-(t_0) \text{ при } t \geq t_0.$$

При  $n \geq 1, t \geq t_0$

$$x_n(t) = x_-(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, x_{n-1}^s) ds + \int_{t_0}^t b(s, x_{n-1}^s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(s, x_{n-1}^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds).$$



З цього визначення, умов на коефіцієнти впливає [5], що функції  $x_n(t)$ ,  $t \geq t_0$  є прогресивно-вимірні відносно  $\mathfrak{F}_t$ , без розривів другого роду і  $x_n^t \in X$  при  $t \geq t_0$ .

Спочатку покажемо за індукцією, що

$$\mathbf{E} \left\{ \|x_n^{\bullet} \|_{t_0}^{*l}(t) \right\} < \infty, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Для  $n = 0$  маємо  $x_0^{t_0} \in X$  і за вище заданою побудовою для  $t_0 \leq t \leq T$

$$\|x_0^t\| = \|T^{t-t_0} x_0^{t_0}\| \leq \bar{c} \|x_0^{t_0}\| = \bar{c} \|x_-^{t_0}\|,$$

$\bar{c}$  – стала, що залежить від  $\bar{K}$ . Тому  $\mathbf{E} \left\{ \|x_0(\cdot) \|_{t_0}^{*l}(T) \right\} \leq \text{const}$ ,  $\mathbf{E} \left\{ \|x_-^{t_0} \|_X^l \right\} < \infty$ .

Припустимо, що  $\mathbf{E} \left\{ \|x_{n-1}^{\bullet} \|_{t_0}^{*l}(t) \right\} < \infty$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ . Використовуючи Лему 1, нерівності Букхольдера (9), елементарні нерівності (10) та умову 3) теореми, одержимо для  $\forall t_0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \|x_n^{\bullet} \|_{t_0}^{*l}(t) \right\} &\leq ck_l^{(4)} \mathbf{E} \left\{ |x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1} \int_{t_0}^t |a(s, x_{n-1}^s)|^l ds + \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_{t_0}^t |b(s, x_{n-1}^s)| dw(s) \right)^l + \left( \int_{t_0}^t \int_{\Theta} |c(s, x_{n-1}^s, \theta)| \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right)^l \right\} \leq \\ &\leq ck_l^{(4)} \mathbf{E} \left\{ |x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1} \int_{t_0}^t |a(s, x_{n-1}^s)|^l ds + \right. \\ &\quad \left. + c_{l1} \left( \int_{t_0}^t |b(s, x_{n-1}^s)|^2 ds \right)^{l/2} + c_{l2} \left( \int_{t_0}^t \int_{\Theta} |c(s, x_{n-1}^s, \theta)|^2 \Pi(d\theta) ds \right)^{l/2} \right\} \leq \\ &\leq k_l^{(4)} \mathbf{E} \left\{ |x_-(t_0)|^l + (t-t_0)^{l-1} L^l \int_{t_0}^t (1 + \|x_{n-1}^s\|)^l ds + L^l c_{l1} \left( \int_{t_0}^t (1 + \|x_{n-1}^s\|)^2 ds \right)^{l/2} + \right. \\ &\quad \left. + L^l c_{l2} \left( \int_{t_0}^t (1 + \|x_{n-1}^s\|)^2 ds \right)^{l/2} \right\} \leq ck_l^{(4)} \mathbf{E} \left\{ |x_-(t_0)|^l + L^l (T-t_0)^l + L^l (T-t_0)^{l/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times (c_{l1} + c_{l2}) \beta (1 + \|x_{n-1}^{\bullet} \|_{t_0}^*(t)) \right\} \leq ck_l^{(4)} \mathbf{E} \left\{ |x_-(t_0)|^l + L^l (T-t_0)^l + L^l (T-t_0)^{l/2} \times \right. \\ &\quad \left. \times (c_{l1} + c_{l2}) \beta (1 + \|x_{n-1}^{\bullet} \|_{t_0}^{*l}(T)) \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Далі, використовуючи Лему 1 і наслідок 1, матимемо

$$\mathbf{E} \left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot) \|_{t_0}^{*l}(t) \right\} = \mathbf{E} \left\{ |R(\cdot, x_{n-1}) - R(\cdot, x_{n-2})|_{t_0}^{*l}(t) \right\} \leq$$

$$\leq M_{t_0}^t \mathbf{E} \left\{ |x_{n-1}(\cdot) - x_{n-2}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \right\}.$$

Згідно того ж наслідку, можемо обрати  $t_1 > 0$  таке, що  $M_{t_0}^t < 1/2$  для  $t \in [t_0, t_0 + t_1]$ , де  $t_1$  не залежить від  $t_0$ .

Якщо покласти

$$K \equiv \mathbf{E} \left\{ |x_1(\cdot) - x_0(\cdot)|_{t_0}^{*l} \right\} < \infty$$

матимемо  $\mathbf{E} \left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T) \right\} \leq \frac{K}{2^n}$ ,  $t \in [t_0, t_0 + t_1]$ .

Враховуючи нерівність Чебишева, одержимо збіжний ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > \frac{1}{n^2} \right\} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} \mathbf{E} \left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \right\} \leq \\ &\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2l}}{2^n} < \infty. \end{aligned}$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі існує рівномірна збіжність майже напевне на  $[t_0, t_0 + t_1]$  суми  $x_n(t) \equiv x_-(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} |x_k(t) - x_{k-1}(t)|$ .

Тому границя  $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$  існує на  $[t_0, t_0 + t_1]$ .

Покажемо, що  $\{x(t), t \leq t_1\}$  – розв'язок рівняння (7). Проведемо оцінки, використовуючи наслідок 1:

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left\{ \left| x(\cdot) - x_-(t_0) - f_1(\gamma_1) \int_{t_0}^{\cdot} a(s, x^s) ds - f_2(\gamma_2) \int_{t_0}^{\cdot} b(s, x^s) dw(s) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f_3(\gamma_3) \int_{t_0}^{\cdot} \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l}(t) \right\} = \\ &= \mathbf{E} \left| (x(\cdot) - x_n(\cdot)) - \int_{t_0}^{\cdot} f_1(\gamma_1) [a(s, x^s) - a(s, x_{n-1}^s)] ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^{\cdot} f_2(\gamma_2) [b(s, x^s) - b(s, x_{n-1}^s)] dw(s) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^{\cdot} \int_{\Theta} f_3(\gamma_3) [c(s, x^s, \theta) - c(s, x_{n-1}^s, \theta)] \tilde{\nu}(d\theta, ds) \right|_{t_0}^{*l} \leq k_l^{(2)} \mathbf{E} |x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) + \\ &\quad + ck_l^{(2)} \mathbf{E} |R(\cdot, x) - R(\cdot, x_{n-1})|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l^{(2)} \mathbf{E} |x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) + \\ &\quad + ck_l^{(2)} \mathbf{E} |x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t), \end{aligned}$$

нагадаємо, що при  $t \leq t_1$   $M_{t_0}^t < 1/2$ .

Залишилось довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} |x(\cdot) - x_n(\cdot)|^{*l}(t) = 0$ .

Нехай  $b_i = i^{-2/l'}$ ,  $l' = \frac{l}{l-1}$ . Тоді з нерівності Гельдера (при  $l > 1$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |x_n(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t) &\leq \mathbf{E} \left( \sum_{i=n}^{n+k-1} |x_i(\cdot) - x_{i+k}(\cdot)|^*(t) \right)^l = \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=n}^{n+k-1} |x_i(\cdot) - x_{i+k}(\cdot)|^*(t) b_i b_i^{-1} \right)^l \leq \\ &\leq \mathbf{E} \left( \sum_{i=n}^{n+k-1} |x_i(\cdot) - x_{i+1}(\cdot)|^*(t) b_i^{-l} \right) \left( \sum_{i=n}^{n+k-1} b_i^{l'} \right)^{l/l'} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K b_i^{-l}}{2^i} \right) \left( \sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'} \right)^{l-1} \end{aligned}$$

і

$$|x(\cdot) - x_n(\cdot)|^{*l}(t) \leq \liminf_k |x(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t),$$

за лемою Фату

$$\mathbf{E} |x(\cdot) - x_n(\cdot)|^{*l}(t) \leq K \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i^{-l}}{2^i} \right) \left( \sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'} \right)^{l-1} \rightarrow 0 \text{ коли } n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, доведено існування розв'язку (7) для  $t \in [t_0, t_0 + t_1]$ . Продовжимо цей розв'язок за  $t_0 + t_1$ . Для цього досить шукати розв'язок (7) для  $t \geq t_0 + t_1$  з початковими даними

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} x_-(t), & t \leq t_0; \\ x(t), & t \in [t_0, t_0 + t_1]. \end{cases}$$

Очевидно, що  $\varphi_1 \in X_{t_0+t_1}$ . Повторюючи вищеописані викладки, одержимо розв'язок  $x(t)$ ,  $t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + 2t_1$ , і для такого  $t$

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi_1(t_0 + t_1) + f_1(\gamma_1) \int_{t_0+t_1}^t a(s, x^s) ds + f_2(\gamma_2) \int_{t_0+t_1}^t b(s, x^s) dw(s) + \\ &+ f_3(\gamma_3) \int_{t_0+t_1}^t \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) = \\ &= x_-(t_0) + f_1(\gamma_1) \int_{t_0}^{t_0+t_1} a(s, x^s) ds + f_2(\gamma_2) \int_{t_0}^{t_0+t_1} b(s, x^s) dw(s) + \\ &+ f_3(\gamma_3) \int_{t_0}^{t_0+t_1} \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) + \\ &+ f_1(\gamma_1) \int_{t_0+t_1}^t a(s, x^s) ds + f_2(\gamma_2) \int_{t_0+t_1}^t b(s, x^s) dw(s) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_3(\gamma_3) \int_{t_0+t_1}^t \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds) = \\
& = x_-(t_0) + f_1(\gamma_1) \int_{t_0}^t a(s, x^s) ds + f_2(\gamma_2) \int_{t_0}^t b(s, x^s) dw(s) + \\
& + f_3(\gamma_3) \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta) \tilde{\nu}(d\theta, ds)
\end{aligned}$$

і тому  $x(t)$ ,  $t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + 2t_1 \in$  розв'язком (7) з початковими умовами (15). Аналогічно, припускаючи, що побудовано розв'язок  $x(t)$ ,  $t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + kt_1$ ,  $k \geq 1$ , будується розв'язок  $x(t)$ ,  $t_0 + t_1 \leq t \leq t_0 + (k+1)t_1$  з початковою історією до  $t_0 + kt_1$ , заданою процесом

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} x_-(t), & t \leq t_0; \\ x(t), & t \in [t_0, t_0 + kt_1] \end{cases} \in X_{t_0+kt_1}.$$

Далі, рухаючись аналогічно до  $t_0 + kt_1 \geq T$ , одержимо  $\mathfrak{F}_t$ -вимірний розв'язок  $\{x(t), t_0 \leq t \leq T\}$ , що задовольняє (15).

**Єдиність.** Нехай  $\{x_1(t), t \in [t_0, T]\}$  і  $\{x_2(t), t \in [t_0, T]\}$  – два розв'язки рівняння (7), що задовольняють (15) і (16). Позначимо  $\delta(t) \equiv x_1(t) - x_2(t)$ , тоді з наслідку випливає (тут  $\delta_{t_0}^*(t) = |\delta(\cdot)|_{t_0}^*(t)$ )

$$\mathbf{E} \delta_{t_0}^{*l}(t) \leq M_{t_0}^t \mathbf{E} \delta_{t_0}^*(t).$$

Нехай  $\bar{t} \leq T - t_0 \in$  таким, що  $M_{t_0}^{\bar{t}} \leq \alpha < 1$  для  $t_0 \leq t \leq \bar{t} + t_0$ . Тоді,

$$\mathbf{E} \delta_{t_0}^{*l}(t) = 0 \text{ для } t_0 \leq t \leq \bar{t} + t_0.$$

Таким чином,

$$\mathbf{P}(\{x_1(t) = x_2(t), t_0 \leq t \leq t_0 + \bar{t} \equiv \theta_1\}) = 1.$$

Рухаючись далі, одержимо  $\mathbf{E} \delta_{t_0}^{*l}(t) = 0$  для  $t \in [\theta_1, \theta_2]$ ,  $\theta_2 \equiv \theta_1 + \bar{t}_2$  і після скінченної кількості кроків  $\mathbf{P}(\{x_1(t) = x_2(t), t_0 \leq t \leq T\}) = 1$ .

Доведено єдиність сильного розв'язку, що задовольняє лише (15). Нехай  $N > 0$ , і для  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $I_N \in$  індикатором такої множини

$$\Omega_n = \{\omega : |x_1(\cdot)|_{t_0}^*(t) \leq N, |x_2(\cdot)|_{t_0}^*(t) \leq N\}.$$

Оскільки  $I_N(t) = I_N(t)I_s(t)$ ,  $s \leq t$ , то, повторюючи доведення леми 1 та її наслідку, одержимо нерівність  $\mathbf{E} |I_N(\cdot) \delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \leq M_{t_0}^t \mathbf{E} |I_N(\cdot) \delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)$ , і, використовуючи ті ж роздуми, що й раніше, матимемо  $\mathbf{E} |I_N(\cdot) \delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) = 0$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ .

Звідси випливає, що

$$\mathbf{P}\{\delta(t) \neq 0\} \leq \mathbf{P}\{|x_1(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > N\} + \mathbf{P}\{|x_2(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > N\},$$

але  $x_1, x_2$  – локально обмежені, а отже, ймовірності в правій частині нерівності прямують до нуля при  $N \rightarrow \infty$  і, отже,  $\delta(t) = 0$  при  $t \in [t_0, T]$ .

### 3. Теорема існування і єдиності розв'язку стохастичної динамічної системи Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями і всією передісторією.

Опишемо як можна адаптувати теорему 1 для системи (2)-(4) [6].

Припустимо, що зовнішні перемикавання типу (3) відсутні. Тоді на інтервалі  $t \in [t_0, t_1)$ , де  $\xi(t) = y_1 \in \mathbf{Y}$ , розглянемо систему

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y_1)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y_1)dw(t) + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, y_1)\tilde{\nu}(d\theta, dt)$$

з початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad x^{t_0} = \varphi \in X.$$

На основі теореми 1 можна стверджувати, що дана задача має єдиний розв'язок на проміжку  $t \in [t_0, t_1)$ .

Далі, розглянемо інтервал  $t \in [t_1, t_2)$ . Тут  $\xi(t) = y_2 \in \mathbf{Y}$ , а рух відбувається в силу системи

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y_2)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y_2)dw(t) + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, y_2)\tilde{\nu}(d\theta, dt)$$

з початковою умовою  $\xi(t_1) = y_1$ , а в якості початкової функції  $\varphi(\theta)$  слід розглянути відрізок траєкторії  $x(t)$ ,  $t \in [-\infty, t_1]$ . Очевидно, що і тут має місце твердження про існування єдиного розв'язку.

Таким чином, теорема 1, має місце на відрізку  $[0, T] \supset \bigcup_{k=0}^{n-1} [t_k, t_{k+1})$  ( $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ ).

Розглянемо випадок, коли зовнішні перемикавання типу (3) відбуваються в моменти часу  $t_1^* < t_2^* < \dots < t_n^*$ ,  $t_1^* > t_0$ , а значення  $\xi(t) = y$  залишається незмінним.

Тоді замість системи (2) слід розглядати систему

$$\begin{aligned} dx(t) = & f_1(\gamma_1)a(t, x^t, y)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, y)dw(t) + \\ & + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, y)\tilde{\nu}(d\theta, dt), \quad \forall t \geq t_0; \end{aligned} \quad (17)$$

з початковою умовою

$$x^{t_0} = \varphi \in X, \quad \eta_{k_0} = h_0, \quad (18)$$

для інтервалу  $t \in [t_0, t_1^*)$ ; і початковою умовою

$$x^{t_1^*} = x^{t_1^{*-}} + g(t_1^*-, y, h_1, x(t_1^*-)), \quad \eta_{k_1} = h_1, \quad (19)$$

для  $t \in [t_0, t_1^*)$ .

Аналогічно для інтервалу  $t_k^* \leq t \leq t_{k+1}^*$  слід розглядати систему (17) з початковою умовою

$$x^{t_k^*} = x^{t_k^{*-}} + g(t_k^*-, y, h_k, x(t_k^*-)). \quad (20)$$

Для початкових умов (20),  $k \geq 2$  значення початкової функції в точці  $t_k$  слід розуміти як границю зліва.

Враховуючи теорему 1 можна стверджувати, що система (17), (20) має єдиний розв'язок на інтервалі  $[t_{k-1}^*, t_k^*)$  при всіх  $k \geq 1$ .

Отже, на підставі вищесказаного, має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** *Нехай на ймовірнісному базисі  $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$  задана стохастична динамічна система (2)-(4). Припустимо, що*

1) *функціонали  $a : R \times X \rightarrow R^n$ ,  $b : R \times X \rightarrow M_n^n(R^n)$ ,  $c : R \times X \times \Theta \rightarrow R^n$  вимірні за сукупністю змінних;*

2) *існує стала  $L > 0$  така, що*

$$|a(t, \varphi_1, y) - a(t, \varphi_2, y)| + |b(t, \varphi_1, y) - b(t, \varphi_2, y)| +$$

$$+ \int_{\Theta} |c(t, \varphi_1, \theta, y) - c(t, \varphi_2, \theta, y)| \Pi(d\theta) + |g(t, \varphi_1, y, h) - g(t, \varphi_2, y, h)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X, \forall t \in [t_0, T], y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}$ ;

3) *виконується нерівність*

$$|a(t, \varphi, y)| + |b(t, \varphi, y)| + \int_{\Theta} |c(t, \varphi, \theta, y)| \Pi(d\theta) + |g(t, \varphi, y, h)| \leq L(1 + \|\varphi\|_X)$$

для  $\forall t \in [t_0, T], y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}; \varphi \in X$ .

4)  $f_1(\cdot), f_2(\cdot), f_3(\cdot)$  – деякі борелеві функції такі, що існують  $\mathbf{E}(f_1(\gamma_1))^l, \mathbf{E}(f_2(\gamma_2))^l, \mathbf{E}(f_3(\gamma_3))^l \leq c < \infty, l > 1$ , де  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – незалежні в сукупності випадкові величини;

5)  $\exists l > 1$  і  $x_-$  – випадковий процес  $x_- \in X_{t_0}$  такий, що

$$\mathbf{E} \|x_-\|_X^l < \infty.$$

Тоді

1) *існує єдиний сильний розв'язок  $\{x(t), t \in [t_0, T]\}$  рівняння (2) такий, що*

$$x^{t_0} = x_-^{t_0};$$

2) *для  $\forall t \in [t_0, T]$  і  $l > 1$  існує  $l$  момент розв'язку (2)*

$$\mathbf{E} |x(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) < \infty.$$

### Список використаної літератури

1. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
2. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations*. 1984. Vol. 7. Pp. 1–72.
3. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential equations. Sijthoff and Noordhoff, 1980. 175 p.
4. Korolyuk V. S., Korolyuk D. V. Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht. 1999.
5. Антоноук С. В., Ясинский В. К. Существование  $l$ -го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Вып. 4. С. 141–151.
6. Ясинський В. К. Математична теорія процесів випадку. Чернівці: "Родовід", 2014. 272 с.

7. Королюк В. С., Царков Є. Ф., Ясинський В. К. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: "Золоті литаври", 2009. 798 с.
8. Ширяев А. Н., Булинский А. В. Теория случайных процессов. Москва: Физматлит, 2005. 408 с.
9. Лукашів Т. О., Ясинський В. К. Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням. *Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика*. 2013. Вип. 10(191). С. 140–151.

**Yasynskyy V. K., Antonyuk S. V.** Existence of  $l$ -th moment of solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory.

In this article the definition of strong solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all prehistory is presented, important inequalities, which are used to prove Existence and Uniqueness theorems are proved. Global Existence and Uniqueness theorem is proved.

**Keywords:** Wiener integral, Poisson integral, Ito-Skorokhod stochastic dynamic system, stochastic system of random structure, Markov switchings.

### References

1. Tsarkov, Ye.Ph. (1989). Random disturbances of differential-functional equations. *Riga: Zinatne*, 412 p. [in Russian]
2. Mizel, V., & Trutzer, V. (1984). Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations*, 7, 1-72.
3. Ikeda, N., & Watanabe, S. (1980). Stochastic Differential equations. *Sijthoff and Noordhoff*, 175 p.
4. Korolyuk, V.S., & Korolyuk, D.V. (1999). Stochastic Models of Systems. Kluwer, Dordrecht. 1999.
5. Antoniuk, S.V., & Yasinskiy, V.K. (2008). Existence of  $l$ -th moment of solution of stochastic differential-functional equations with all prehistory. *Cybernetics and system Analysis*, 4, 141–151. [in Ukrainian]
6. Yasynskyy, V.K. (2014). Mathematical theory of stochastic processes. *Chernivtsy: Rodovid*, 272 p. [in Ukrainian]
7. Koroliuk, V.S., Tsarkov, Ye.Ph., & Yasynskyy, V.K. (2009). Stochastic process. Theory and computer practice. *Chernivtsy: Zoloti lytavry*, 798 p. [in Ukrainian]
8. Shiriaev, A.N., & Bulinskiy, A.V. (2005). Theory of stochastic process. *Moscow: Fismathlit*, 408 p. [in Russian]
9. Lukashiv, T.O., & Yasynskyy, V.K. (2013). Stability in probability of stochastic dynamic system of random structure with constant after action. *Volynskyy matematychniy visnyk. Seria: Applied Mathematics*, 10(191), 140–151. [in Ukrainian]

Одержано 24.04.2020

УДК 519.217; 519.718; 519.837

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).55-64](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).55-64)**В. К. Ясинський<sup>1</sup>, С. В. Антонюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,

професор,

доктор фізико-математичних наук

yasinsk@list.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5434-6427><sup>2</sup> Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,

доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,

кандидат фізико-математичних наук

violant78@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5357-8987>

## СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ, ПУАССОНОВИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ І ВСІЄЮ ПЕРЕДІСТОРІЄЮ

В даній роботі розглядається стохастична динамічна система Іто-Скорохода з зовнішніми випадковими збуреннями, з марковськими перемиканнями та всією передісторією. Наведені основні означення стійкості сильного розв'язку для такої системи та одержані достатні умови асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому та асимптотичної стійкості в середньому квадратичному в цілому.

**Ключові слова:** стохастичні динамічні системи з нескінченною післядією, марковські перемикання, зовнішні збурення, оператор Ляпунова-Красовського, стійкість за ймовірністю, стійкість в середньому квадратичному.

Нехай  $R^n$  –  $n$ -вимірний дійсний евклідовий простір і  $1 \leq p < \infty$ .  $X$  є простором історії, тобто простір  $R^n \times D_\rho^p$ , де  $D_\rho^p$  – простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій  $\varphi : R^+ \rightarrow R^n$  таких, що

$$\int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норма в просторі  $X$  вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_X \equiv \left( |\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p} \equiv \left( |\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p \right)^{1/p},$$

$$\|\varphi\|_\rho^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

**Означення 1.** Функція  $\rho : R^+ \rightarrow R^+$  називається функцією із згладжуючою властивістю, якщо вона задовольняє таким умовам [4]:

1.  $\rho$  – сумовна в  $R^+$ ;
2. для  $\forall z \geq 0$  справедливі нерівності

$$\begin{aligned} \overline{K}(z) &\equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in R^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \leq \overline{\overline{K}} < \infty; \\ \underline{K}(z) &\equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in R^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty; \end{aligned} \tag{1}$$



3.  $\rho$  – обмежена в  $R^+$ ;
4.  $\rho > 0$  – строго додатня на  $s \in (0, \infty)$ ;
5.  $s\rho(s) \rightarrow 0$  коли  $s \rightarrow \infty$ .

Нехай  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$  – ймовірнісний базис [1];  $\{\xi(t), t \geq 0\}$  – марковський процес із значеннями в метричному просторі  $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$  з перехідною ймовірністю  $\mathbf{P}(s, y, A)$ ,  $A \subset \mathfrak{B}_Y$ ;  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  – ланцюг Маркова в метричному просторі  $\mathbf{H}$  з перехідною ймовірністю на  $k$ -му кроці  $\mathbf{P}_k(h, G)$ ;  $\{w(t), t \geq 0\}$  –  $R^n$ -значний вінерів процес, узгоджений з потоком  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \geq 0\}$ , а  $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$  незалежна від нього центрована пуассонова міра на  $(\Theta \times R_+, Z \times B_+)$ , для якої  $\mathbf{E} \{\tilde{\nu}^2(d\theta \times dt)\} = \Pi(d\theta)dt$ , де  $\Pi$  – деяка  $\sigma$ -скінченна міра на  $Z$ .

Розглянемо стохастичну динамічну систему випадкової структури із зовнішніми збуреннями та усією передісторією

$$\begin{aligned} dx(t) = & f_1(\gamma_1)a(t, x^t, \xi(t))dt + f_2(\gamma_2)b(t, x^t, \xi(t))dw(t) + \\ & + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x^{t-}, \theta, \xi(t))\tilde{\nu}(d\theta, dt), \quad \forall t \geq t_0; \end{aligned} \quad (2)$$

з марковськими перемиканнями

$$\begin{aligned} \Delta x |_{t=t_k} = & x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x^{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k), \\ t_k \in S \equiv & \{t_n \uparrow, n \in \mathbf{N}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty \end{aligned} \quad (3)$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad x^{t_0} = \varphi \in X, \quad \eta_{k_0} = h. \quad (4)$$

Тут  $\gamma_1, \gamma_2$  – випадкові величини, з функціями розподілу  $F_{\gamma_1}(\cdot), F_{\gamma_2}(\cdot)$  відповідно, незалежні від  $\xi(t)$  і приростів  $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$ ,  $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$ ;  $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$  – деякі борелеві функції; векторнозначний функціонал  $\{a(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \rightarrow R^n$ , матричнозначний функціонал  $\{b(t, \varphi, y)\} : R \times X \times \mathbf{Y} \rightarrow M_n(R^n)$  та векторнозначний функціонал  $\{c(t, \varphi, \theta, y)\} : R \times X \times \Theta \times \mathbf{Y} \rightarrow R^n$  – вимірні за сукупністю змінних і при кожному  $\varphi \in X$  локально обмежені по  $t$ , а процес  $x^t = (x(t), x_\rho^t)$

$$x_\rho^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \leq s \leq t; \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases}$$

Крім того,  $\varphi^{t_0} \in X$  з ймовірністю 1 і  $\varphi(t)$  не залежить від приростів вінерового процесу  $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$  та центрованої пуассонової міри  $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0, A \in Z\}$  при кожному  $t$ .

**Означення 2.** *Стохастичний процес  $\{x(t) \equiv x(t, \omega), t \in (-\infty, T]\}$  називається сильним розв'язком задачі (2)-(4), якщо  $x(t)$  прогресивно вимірний відносно  $\mathfrak{F}_t$  при  $t \leq T$ , відрізки траєкторій процесу  $x^t \in X$  при  $t \in [t_0, T]$ ,  $x^{t_0} = \varphi$  з ймовірністю 1 і рівність*

$$x(t) = x(s) + f_1(\gamma_1) \int_s^t a(s, x^s, \xi(t))ds + f_2(\gamma_2) \int_s^t b(s, x^s, \xi(t))dw(s) +$$

$$+ f_3(\gamma_3) \int_s^t \int_{\Theta} c(s, x^s, \theta, \xi(t)) \tilde{\nu}(d\theta, ds) \quad (5)$$

виконується з ймовірністю 1 для всіх  $s \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $t \in (s, t_{k+1})$  і при  $t_k \geq t_0$ :

$$x(t_k) = x(t_k^-) + g(t_k^-, x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k). \quad (6)$$

Для спрощення викладок вважатимемо, що  $\xi(t)$  – однорідний ланцюг Маркова зі скінченною кількістю станів. Згідно [3]  $\{x^t(s), \xi(t)\}$  є марковським процесом, в якому випадкова складова  $x(t) \in X$  характеризує зміни вектора стану системи, а  $\xi(t)$  – випадкові зміни її структури з врахуванням ланцюга Маркова  $\{\eta_k, k \geq 0\}$ , що входить як аргумент у функцію відображення  $g(\cdot, \cdot, \cdot, \eta_k)$ . Цим і пояснюється означення системи (2) як системи випадкової структури.

В роботі [6] встановлені наступні умови існування і єдиності сильного розв'язку задачі (2)-(4):

1) функціонали  $a : R \times X \rightarrow R^n$ ,  $b : R \times X \rightarrow M_n^n(R^n)$ ,  $c : R \times X \times \Theta \rightarrow R^n$  вимірні за сукупністю змінних;

2) існує стала  $L > 0$  така, що

$$|a(t, \varphi_1, y) - a(t, \varphi_2, y)| + |b(t, \varphi_1, y) - b(t, \varphi_2, y)| + \\ + \int_{\Theta} |c(t, \varphi_1, \theta, y) - c(t, \varphi_2, \theta, y)| \Pi(d\theta) + |g(t, \varphi_1, y, h) - g(t, \varphi_2, y, h)| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$ ,  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ;

3) існує стала  $C > 0$  така, що

$$|a(t, \varphi, y)| + |b(t, \varphi, y)| + \int_{\Theta} |c(t, \varphi, \theta, y)| \Pi(d\theta) + |g(t, \varphi, y, h)| \leq C(1 + \|\varphi\|_X)$$

для  $\forall t \in [t_0, T]$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

4)  $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$ ,  $f_3(\cdot)$  – деякі борелеві функції,

$$\exists \mathbf{E} (f_1(\gamma_1))^l, \mathbf{E} (f_2(\gamma_2))^l, \mathbf{E} (f_3(\gamma_3))^l \leq c < \infty, l > 1.$$

Позначимо через  $P_k((y, h), A \times B)$  перехідну ймовірність ланцюга Маркова  $\{\xi(t_k), \eta_k\}$  на  $k$ -кроці:

$$P_k((y, h), A \times B) \equiv \mathbf{P} \{ \xi(t_{k+1}) \in A, \eta(t_{k+1}) \in B | \xi(t_k) = y, \eta(t_k) = h \},$$

для всіх  $t_k \geq t_0$ ,  $(y, h) \in \mathbf{Y} \times \mathbf{H}$ .

Введемо у розгляд наступну функцію

$$P_k((x, y, h), X \times A \times B) \equiv \\ \equiv \mathbf{P} \{ x^{t_{k+1}}(t_k, \varphi, y_0, h_0) \in X_1, \xi(t_{k+1}) \in A, \eta(t_{k+1}) \in B | \\ | x^{t_k}(t_{k-1}, \varphi, y_0, h_0) = x, \xi(t_k) = y, \eta(t_k) = h \}$$

при всіх  $t_k \in S \cup \{t_0\}$ ,  $k \in N \cup \{0\}$ ,  $\varphi \in X$ ,  $A \in \mathfrak{B}_{\mathbf{Y}}$ ,  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{H}}$ .

**Означення 3.** Дискретний оператор Ляпунова-Красовського  $(lv_k)(x, y, h)$  на послідовності вимірних скалярних функцій  $v_k(x, y, h) : X \times Y \times H \rightarrow R$ ,  $k \in N \cup \{0\}$  для динамічної системи (5) визначимо рівністю

$$(lv_k)(x, y, h) \equiv \int_{X \times Y \times H} P_k(x, y, h)(dl \times du \times dz)v_k(l, u, z) - v_k(x, y, h).$$

**Означення 4.** Якщо  $t_k = k\beta$  для всіх  $k \in \mathbf{N}$  і при деякому  $\beta > 0$  відображення  $a, b, g$  не залежать від  $t$ , процес  $\xi(t)$  і ланцюг Маркова  $\{\eta_k, k \geq 0\}$  однорідні, тоді систему (5)-(6) називатимемо автономною.

У випадку автономної системи можна нехтувати індексом  $k$  у функції  $P((x, y, h), X \times A \times B)$  і дискретний оператор Ляпунова-Красовського можна записати у вигляді

$$(lv)(x, y, h) \equiv \int_{X \times Y \times H} P_k(x, y, h)(dl \times du \times dz)v_k(l, u, z) - v_k(x, y, h).$$

**Означення 5.** Функціоналом Ляпунова-Красовського для системи (5) назвемо послідовність невід'ємних функцій  $v_k(\varphi, y, h)$ ,  $k \geq 0$ , для яких виконуються умови:

1) при всіх  $k \geq 0$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$  визначений дискретний оператор Ляпунова-Красовського  $(lv_k)(\varphi, y, h)$ ;

2) при  $r \rightarrow \infty$

$$\bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in N, y \in \mathbf{Y}, \\ h \in \mathbf{H}, \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi, y, h) \rightarrow +\infty;$$

3) при  $r \rightarrow 0$

$$\underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in N, y \in \mathbf{Y}, \\ h \in \mathbf{H}, \|\varphi\|_X \geq r}} v(\varphi, y, h) \rightarrow 0,$$

причому  $\bar{v}(r)$  і  $\underline{v}(r)$  – неперервні і монотонні.

Дослідимо стійкість тривіального розв'язку динамічної системи (2)-(4).

**Означення 6.** Розв'язок задачі (2)-(4) назвемо:

– стійким за ймовірністю, якщо для  $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$  можна вказати таке  $\delta > 0$ , що з  $\|\varphi\|_X < \delta$  випливає, що  $\mathbf{P} \left\{ \sup_{T \geq t} \|x^t\|_X > \varepsilon_1 \right\} < \varepsilon_2$  при всіх  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ;

– асимптотично стійким за ймовірністю, якщо для  $\forall \varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta > 0$ , що з  $\|\varphi\|_X < \delta$  випливає, що  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sup_{T \geq t} \|x^t\|_X > \varepsilon \right\} = 0$ ;

–  $p$ -стійким ( $p > 0$ ), якщо для  $\forall \varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta > 0$ , що з  $\|\varphi\|_X < \delta$  випливає, що  $\mathbf{E} \|x^t\|_x^p < \varepsilon$ ;

– асимптотично  $p$ -стійким, якщо для  $\forall \varepsilon > 0$  можна вказати таке  $\delta > 0$ , що з  $\|\varphi\|_X < \delta$  випливає, що  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \|x^t\|_x^p = 0$ .

При  $p = 2$  будемо мати стійкість в середньому квадратичному і асимптотичну стійкість в середньому квадратичному. Якщо в попередніх означеннях покласти  $\delta = +\infty$ , то до відповідних означень додається термін "в цілому".

Введемо позначення

$$|x(\cdot)|_{t_0}^*(t) \equiv \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s)|.$$

Одержимо спочатку оцінки розв'язку задачі (2)-(4) на інтервалах  $[t_k, t_{k+1})$  по значенням розв'язку в точках  $t_k$ ,  $k \geq 0$ .

При доведенні будемо використовувати сталі, що виникають в наступних нерівностях теореми існування та єдиності сильного розв'язку, будемо використовувати нерівність Буркхольдера [4]: для довільного  $l > 1$  існують сталі  $c_l$  такі, що

$$\mathbf{E} \left| \int_{t_0}^{\bullet} \psi(s) dw(s) \right|_{t_0}^{*l} (t) \leq c_l \mathbf{E} \left( \int_{t_0}^t |\psi(s)|^2 ds \right)^{l/2} \quad (7)$$

для будь-яких  $F_t$ -узгоджених процесів  $\psi(t, \omega)$ , таких, що  $\int_0^T \psi^2(t) dt < \infty$  майже напевне.

Також будемо використовувати сталі, що з'являються в таких елементарних нерівностях

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i \right|^l \leq k_l^{(m)} \sum_{i=1}^m |a_i|^l, \quad l \geq 0, \quad (8)$$

$$\{a_i\} \subset R, \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad k_l^{(m)} = m^{l-1} \vee 1.$$

**Лема 1.** *Нехай для системи (2)-(4) виконуються умови існування та єдиності розв'язку. Тоді при всіх  $k \geq 0$  для сильного розв'язку має місце нерівність:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^2 (t_{k+1}) \} &\leq 15c^2(1 + 2L^2) [\mathbf{E} |x(\cdot)|_{t_0}^2 (t_k) + 2C^2(t_{k+1} - t_k)] \times \\ &\times \exp \{ 5L^2((t_{k+1} - t_k)^2 + 4)(t_{k+1} - t_k) \}. \end{aligned} \quad (9)$$

**Доведення.** При всіх  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ,  $t_k > t_0$  з (5) легко одержати нерівність

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_k)| + c \left( \int_{t_k}^t |a(\tau, x^\tau, \xi(\tau)) - a(\tau, 0, \xi(\tau))| d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{t_k}^t |a(\tau, 0, \xi(\tau))| d\tau + \left( \left| \int_{t_k}^t (b(\tau, x^\tau, \xi(\tau)) - b(\tau, 0, \xi(\tau))) dw(\tau) \right| + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left| \int_{t_k}^t b(\tau, 0, \xi(\tau)) dw(\tau) \right| \right) + \left( \left| \int_{t_k}^t \int_{\Theta} (c(\tau, x^\tau, \theta, \xi(\tau)) - c(\tau, 0, \theta, \xi(\tau))) \tilde{\nu}(d\theta, d\tau) \right| + \right. \\ &+ \left. \left. \left| \int_{t_k}^t \int_{\Theta} c(\tau, 0, \theta, \xi(\tau)) \tilde{\nu}(d\theta, d\tau) \right| \right) \right). \end{aligned}$$

Піднесемо до квадрату обидві частини цієї нерівності, обчислимо  $\sup$  від одержаного виразу, та візьмемо математичне сподівання. Використовуючи нерівності (7), (8) та умови існування та єдиності розв'язку, матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(t_{k+1}) \} &\leq 5c^2 \left[ \mathbf{E} \|x^{t_k}\|_X^2 + 2C^2(t_{k+1} - t_k) + L^2((t_{k+1} - t_k)^2 + 4) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{t_k}^t \mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(\tau) / F_{t_k} \} d\tau. \right. \end{aligned} \quad (10)$$

Використовуючи нерівність Гронуолла легко побачити, що

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(\tau) / F_{t_k} \} &\leq 5c^2 \left[ \mathbf{E} \left\{ \|x^{t_k}\|_X^2 / F_{t_k} \right\} + 2C^2(t_{k+1} - t_k) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp \{ 5L^2((t_{k+1} - t_k)^2 + 4)(t_{k+1} - t_k) \}. \right. \end{aligned} \quad (11)$$

При  $t = t_{k+1}$  сильний розв'язок задачі (2)-(4)

$$x(t_{k+1}) = x(t_{k+1}-) + g(t_{k+1}-, x^{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})$$

задовольняє нерівність

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ |x(t_{k+1})|^2 / F_{t_k} \} &\leq 3 \left[ \mathbf{E} \{ |x(t_{k+1}-)|^2 / F_{t_k} \} + \mathbf{E} \{ |g(t_{k+1}-, x^{t_{k+1}-}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1} - \right. \\ &\quad \left. - g(t_{k+1}-, 0, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})|^2 / F_{t_k} \} + \mathbf{E} \{ |g(t_{k+1}-, 0, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})|^2 / F_{t_k} \} \right] \leq \\ &\leq 3c^2 \left[ (1 + 2L^2) \mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(t_{k+1}) / F_{t_k} \} + C^2 \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Оскільки випадкова величина  $|x(\cdot)|_{t_k}^*(t_{k+1})$  не залежить від  $\sigma$ -алгебри  $F_{t_k}$ , то

$$\mathbf{E} \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(t_{k+1}) / F_{t_k} \} = E \{ |x(\cdot)|_{t_k}^{*2}(t_{k+1}) \}.$$

Підставляючи (11) в (12), одержимо (9). Лема доведена.  
Позначимо через

$$k_0 = \begin{cases} \sup \{ k \in N : t_k \leq t \}, & t \geq t_1, \\ 0, & t \in [0, t_1). \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Нехай*

- 1) виконуються умови існування і єдиності сильного розв'язку задачі (2)-(4);
- 2) існують функціонали Ляпунова-Красовського такі, що в силу системи (5) виконується нерівність

$$(lv_k)(\varphi, y, h) \leq -a_k(\varphi, y, h), \quad k \geq 0, \varphi \in X, y \in \mathbf{Y}, h \in \mathbf{H}; \quad (13)$$

- 3) довжина інтервалів  $[t_k, t_{k+1})$  не перевищує  $\Delta > 0, \forall k \geq 0$ .

Тоді розв'язок задачі (2)-(4) асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому.

**Доведення.** Позначимо через  $F_{t_k}$  мінімальну  $\sigma$ -алгебру, відносно якої вимірні  $\xi(t)$  при всіх  $t \in [t_0, t_k]$  і  $\eta_n$ ,  $n \leq k$ . Тоді умовне математичне сподівання обчислимо за формулою

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\} = \\ & = \int_{X \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H}} P_k((\varphi, y, h)(dl \times du \times dz) v_{k+1}(l, u, z))|_{\varphi=x^{t_k}, y=\xi(t_k), h=\eta_k}. \end{aligned} \quad (14)$$

Далі за означенням дискретного оператора Ляпунова-Красовського одержимо

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\} = \\ & = v_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) + (lv_k)(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \leq \bar{v}(\|x^{t_k}\|_X). \end{aligned} \quad (15)$$

Використовуючи (15), запишемо дискретний оператор Ляпунова-Красовського

$$\begin{aligned} (lv_k)(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) & = \mathbf{E} \{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\} - \\ & - v_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \leq -a_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Тоді при  $k \geq 0$  має місце

$$\mathbf{E} \{v_{k+1}(x^{t_{k+1}}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1})/F_{t_k}\} \leq v_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k).$$

А це означає, що послідовність випадкових величин  $\{v_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\}$  представляє собою супермартиггал відносно  $F_{t_k}$  [3].

Далі, взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (16), просумувавши по  $k$  від  $n \geq k_0$  до  $N$ , матимемо

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \{v_{N+1}(x^{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1})\} - \mathbf{E} \{v_n(x^{t_n}, \xi(t_n), \eta_n)\} = \\ & = \sum_{k=n}^N \mathbf{E} \{(lv_k)(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\} \leq - \sum_{k=n}^N \mathbf{E} \{a_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)\} \leq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Далі легко побачити, що

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{t \geq t_0} \|x^t(t_0, \varphi, y, h)\|_X > \varepsilon_1 \right\} & = \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} \sup_{t_{k_0+n-1} \leq t \leq t_{k_0+n}} \|x^t(t_0, \varphi, y, h)\|_X > \varepsilon_1 \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} x^{t_{k_0+n-1}}(t_0, \varphi, y, h) > \varepsilon_1 \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} v_{k_0+n-1} x^{t_{k_0+n-1}}(x^{t_{k_0+n-1}}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}) > \bar{v}(\varepsilon_1) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Якщо  $\|x^{t_k}\|_X \geq r$ , то

$$\sup_{k \geq k_0, \|x^{t_k}\|_X \geq r} v_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \geq \inf_{\substack{k \geq k_0, y \in \mathbf{Y}, \\ h \in \mathbf{H}, \|\varphi\|_X \geq r}} v_k(\varphi, y, h) = \bar{v}(r).$$

Використовуючи нерівність для невід'ємних супермартингалів [3] для оцінки правої частини (18), матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{n \in \mathbf{N}} v_{k_0+n-1} x^{t_{k_0+n-1}} \left( x^{t_{k_0+n-1}}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1} \right) > \bar{v}(\varepsilon_1) \right\} &\leq \\ &\leq \frac{1}{\bar{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(\varphi, y, h) \leq \frac{\bar{v}(x^t)}{\bar{v}(\varepsilon_1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

З врахуванням (19) нерівність (18) дає можливість гарантувати виконання означення стійкості за ймовірністю в цілому.

З (17) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ v_{N+1}(x^{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}) \right\} &\leq v_{k_0}(\varphi, y, h) - \\ &- \sum_{k=k_0}^N \mathbf{E} \left\{ a_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \right\} \leq v_{k_0}(\varphi, y, h) \end{aligned} \quad (20)$$

при всіх  $N \geq k_0$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

Зауважимо, що послідовність  $\{a_k, k \geq 0\}$  представляє собою функціонали Ляпунова-Красовського. А, отже, існують [1] неперервні строго монотонні функції  $\underline{a}(r)$  і  $\bar{a}(r)$  рівні нулю при  $r = 0$  і такі, що

$$\underline{a}(\|\varphi\|_X) \leq a_k(\varphi, y, h) \leq \bar{a}(\|\varphi\|_X).$$

При  $k \in \mathbf{N}$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

Таким чином із збіжності ряду в лівій частині (20) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=k_0}^N \mathbf{E} \left\{ a_k(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k) \right\}$$

при всіх  $t_0 \geq 0$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

Тоді, з врахуванням  $\underline{a}(r)$  і рівності  $\underline{a}(0) = 0$ , одержимо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{t_k}(t_0, \varphi, y, h)\|_X = 0.$$

Звідси випливає прямування до нуля за ймовірністю послідовності  $\bar{v}(\|x^{t_k}(t_0, \varphi, y, h)\|_X)$  при  $k \rightarrow \infty$  для всіх  $t_0 \geq 0$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

Таким чином з властивостей функціонала Ляпунова-Красовського невід'ємний супермартингал  $v(x^{t_k}, \xi(t_k), \eta_k)$  при  $k \rightarrow \infty$  прямує до нуля за ймовірністю при всіх реалізаціях процесу  $\xi(t)$  і послідовності  $\eta_k$ .

Як відомо [3], невід'ємний і обмежений зверху супермартингал має границю з ймовірністю 1. Використовуючи лему 1, одержимо асимптотичну стійкість за ймовірністю в цілому розв'язку задачі (2)-(4). Теорема 1 доведена.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми 1, причому функціонали Ляпунова-Красовського  $\{v_k, k \geq 0\}$ ,  $\{a_k, k \geq 0\}$  задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} c_1 |\varphi(0)|^2 &\leq v_k(\varphi, y, h) \leq c_2 \|\varphi\|_X^2, \\ c_3 |\varphi(0)|^2 &\leq a_k(\varphi, y, h) \leq c_4 \|\varphi\|_X^2. \end{aligned} \quad (21)$$

При деякій  $c_i > 0$ ,  $i = \overline{1, 4}$  для всіх  $k \in \mathbf{N}$ ,  $y \in \mathbf{Y}$ ,  $h \in \mathbf{H}$ ,  $\varphi \in X$ .

Тоді розв'язок задачі (2)-(4) асимптотично стійкий в середньому квадратичному в цілому.

**Доведення.** Використовуючи (17) для  $n = k_0$  в силу (21) очевидними є наступні нерівності

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \|x^{t_{N+1}}\|_X^2 \right\} &\leq \frac{1}{c_1} \mathbf{E} \left\{ v_{N+1} (x^{t_{N+1}}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} \mathbf{E} \left\{ v_{k_0} (\varphi, \xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}) \right\} \leq \frac{c_2}{c_1} \|\varphi\|_X^2 \end{aligned}$$

для всіх  $N > k_0$ ,  $\varphi \in X$  і початкових розподілах випадкового вектора  $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$ .

Звідси і впливає стійкість в середньому квадратичному розв'язку задачі (2)-(4).

Використовуючи (17) і другу із нерівностей (21), матимемо

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \|x^{t_{N+1}}\|_X^2 \right\} &\leq \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^N \mathbf{E} \left\{ a_k (\varphi, \xi(t_k), \eta_k) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_3} \mathbf{E} \left\{ v_{k_0} (\varphi, \xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}) \right\} \leq \frac{c_2}{c_3} \|\varphi\|_X^2. \end{aligned}$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають  $\mathbf{E} \left\{ \|x^{t_{N+1}}\|_X^2 \right\}$  для будь-яких початкових даних  $x^{t_{k_0}} = \varphi$  і початкових розподілах випадкового вектора  $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$ .

Таким чином,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \|x^{t_k}\|_X^2 \right\} = 0$$

при всіх  $t_0 \geq 0$ , що і завершує доведення теореми 3.

### Список використаної літератури

1. Андреева Б.А. Колмановский В.Б., Шайхет Л.С. Управление системы с последствием. М.: Наука, 1992. 333 с.
2. Гихман И.И. Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. Киев: Наукова думка, 1982. 612 с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.:Физматгиз, 1969. 859 с.
4. Mizel V., Trutzer V. Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations*. 1984. Vol.7. Pp. 1-72.
5. Антонюк С.В. Стійкість стохастичних динамічних систем випадкової структур из марковськими збуреннями з усією переісторією. *Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ.* Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2013. Вип.24, №2. С. 12-20.
6. Антонюк С. В., Ясинский В. К. Существование  $l$ -го момента решения стохастического дифференциально-функционального уравнения со всей предысторией. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. Вып. 4. С. 141-151.

**Yasynsky V. K., Antonyuk S. V.** Stability of solution of the Ito-Skorokhod stochastic dynamic system of random structure with external random disturbances, Markov switching and all prehistory.

The Ito-Skorokhod stochastic dynamical system with external random disturbances, with Markov switching and all prehistory is considered in this paper. Basic definitions of stability of a strong solution for such systems are introduced and sufficient conditions for asymptotic stability in probability in general and the asymptotic mean square stability in general are received.



**Keywords:** Ito-Skorokhod stochastic dynamic system withal prehistory, stochastic system of random structure, Markov switchings, Lyapunov-Krasovsky operator, mean square stability.

## References

1. Andreeva, B.A., Kolmanovskiy, V.B., & Shaikhet, L.S. (1992). Control of systems with after-action. *M: Nauka*, 333 p. [in Russian]
2. Gihman, Y.I., & Skorokhod, A.V. (1982). Stochastic dynamic systems and their applications. *Kyiv: Naukova dumka*, 612 p. [in Russian]
3. Dynkin, Ye.B. (1969). Markov processes. *M: Fismatiz*, 859 p. [in Russian]
4. Mizel, V., & Trutzer, V. (1984) Stochastic hereditary equations: existence and asymptotic stability. *Journal of Integral Equations*, 7, 1–72.
5. Antoniuk, S.V. (2013). Stability of solutions of stochastic dynamic systems of random structure Markov switchings and all prehistory. *Naukovyy visnyk Uzhgorodskogo universytetu. Mathematics and Informatics. Uzhgorod: Goverla*, 24, 2, 12–20. [in Ukrainian]
6. Antoniuk, S.V., & Yasinskiy, V.K. (2008). Existence of l-th moment of solution of stochastic differential-functional equations with all prehistory. *Cybernetics and system Analysis*, 4, 141–151. [in Ukrainian]

Одержано 24.04.2020

УДК 519.725

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).65-72](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).65-72)**М. Ю. Бортош<sup>1</sup>, О. А. Тилищак<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
викладач кафедри алгебри,  
кандидат фізико-математичних наук  
[maria.bortos@uzhnu.edu.ua](mailto:maria.bortos@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри алгебри,  
кандидат фізико-математичних наук  
[alxtrlk@gmail.com](mailto:alxtrlk@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>

## РОЗШИРЕНІ БІНАРНІ КОДИ ГОЛЕЯ ЗА ГРУПОВОЮ АЛГЕБРОЮ ОДНІЄЇ ГРУПИ

Розширені бінарні коди Голя є прикладом екстремальних бінарних самодуальних кодів типу II (лінійних бінарних самодуальних кодів з відстанню Хемінга між довільними кодовими словами кратною 4, що має найбільшу можливу мінімальну відстань Хемінга серед таких кодів з фіксованою розмірністю простору кодових слів та їх довжиною). Такі коди вивчалися довгий період і було встановлено багато різних конструкцій для побудови цих кодів. Крім того, розширені бінарні коди Голя можна легко одержати з бінарних кодів Голя і навпаки. А останні є досконалими і разом з бінарними кодами Хемінга дають всі можливі параметри нетривіальних бінарних досконалих кодів.

У статті розглядається конструкція лінійних бінарних кодів, зокрема, розширених бінарних кодів Голя за груповою алгеброю  $\mathbb{F}_2G$  скінченної групи  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  порядку  $n = 24$  над полем з двох елементів  $\mathbb{F}_2$ . Розширений бінарний код Голя визначається як будь-який бінарний лінійний код, для якого довжина кодових слів рівна 24, розмірність підпростору кодових слів – 12, а мінімальна відстань Хемінга коду – 8, тобто будь-який лінійний бінарний [24,12,8]-код. При дослідженні даних кодів застосовуємо елементи теорії зображень, зокрема розглядаємо регулярне зображення  $v \rightarrow \sigma(v)$  алгебри  $\mathbb{F}_2G$ . Для даного елемента  $v$  визначаємо бінарний код  $C(v)$ , як підпростір простору  $\mathbb{F}_2^n$  породжений рядками матриці  $\sigma(v)$ . Було використано критерія самодуальних кодів  $C(v)$  для довільної скінченної групи  $G$  порядку 24 та знайдено легко вивірювані необхідні умови самодуальності бінарного коду  $C(v)$  для елементів  $v$  групової алгеброю  $\mathbb{F}_2G$  групи  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ . В результаті числових обчислень, що передбачає перевірку знайдених необхідних умов, отримуємо кількість елементів  $v \in \mathbb{F}_2G$ , що  $C(v)$  є самодуальним кодом. Кількісні результати подані для порівняння з кількістю тих же елементів при умові  $v = v^*$ . Раніше в такому вигляді розширені бінарні коди Голя були знайдені тільки для елементів  $v$ , що  $v = v^*$ . При обчисленнях отримано всі 27 648 елементів  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2G$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя.

**Ключові слова:** групова алгебра, розширені бінарні коди, коди Голя, самодуальні коди, коди над полями.

**1. Вступ.** Розглянемо конструкцію лінійних бінарних кодів запропоновану Т. Харлі в [1]. Метод реалізовує піонерський підхід С. Д. Бермана [2] (див. також [11]), що розглядає односторонні ідеали в групових алгебрах скінченних груп над скінченними полями, як коди над тими ж полями.

Нехай  $\mathbb{F}_2$  — поле з двох елементів,  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  — скінченна група порядку  $n$ . Нехай  $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_n}g_n \in \mathbb{F}_2G$  ( $\alpha_i \in \mathbb{F}_2$ ). Визначимо

матрицю  $\sigma(v) \in M(n, \mathbb{F}_2)$  вигляду

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}.$$

Відображення  $v \rightarrow \sigma(v)$  розглядається в теорії зображень скінченних груп над полями, як *регулярне зображення* алгебри  $\mathbb{F}_2G$ , що відповідає такому порядку  $g_1^{-1}, g_2^{-1}, \dots, g_n^{-1}$  елементів групи  $G$ . Для заданого елемента  $v \in \mathbb{F}_2G$  визначаємо бінарний код:  $C(v)$ , як підпростір простору  $\mathbb{F}_2^n$  породжений рядками матриці  $\sigma(v)$ . В просторі  $\mathbb{F}_2^n$  вводиться скалярний добуток  $[(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)] = \sum_{i=1}^n v_i w_i$  і відповідне *ортогональне доповнення*  $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid [v, w] = 0, w \in C\}$ . Бінарний код  $C$  називається *самоортогональним*, якщо  $C \subset C^\perp$  і *самодуальним* — якщо  $C = C^\perp$ . Зрозуміло, що код  $C(v)$  самоортогональний, якщо  $\sigma(v)\sigma(v)^T = 0$ . Для елемента  $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_n}g_n \in \mathbb{F}_2G$  позначимо  $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_n}g_n^{-1} \in \mathbb{F}_2G$ . Легко бачити, що  $\sigma(v)^T = \sigma(v^*)$ .

Розглядаючи лінійний код над полем з двох елементів, використовуватимемо термін  $[n, k, d]$ -код для позначення лінійних бінарних кодів, де  $n$  — довжина кодових слів,  $k$  — розмірність підпростору кодових слів і  $d$  — мінімальна відстань Хемінга коду. Легко бачити, що відстань Хемінга між довільними кодовими словами бінарного самодуального коду парна. Бінарний самодуальний код, для якого відстань Хемінга між довільними кодовими словами кратна 4 називається бінарним самодуальним кодом *типу II*, а в іншому випадку бінарним самодуальним кодом *типу I*. Верхня межа мінімальної відстані бінарних самодуальних кодів була знайдена в [3].

**Теорема 1.** *Нехай  $d_I(n)$  і  $d_{II}(n)$  мінімальна відстань бінарного коду довжини  $n$  типу I і II, відповідно. Тоді*

$$d_{II}(n) \leq 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4$$

і

$$d_I(n) \leq \begin{cases} 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4 & \text{if } n \not\equiv 22 \pmod{24}, \\ 4 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 6 & \text{if } n \equiv 22 \pmod{24}. \end{cases}$$

Тут  $[x]$  позначає цілу частину числа  $x$ .

Бінарний самодуальний код типу I і II, мінімальна відстань якого досягає вказаних в теоремі крайніх значень, називається *екстремальним*. Прикладами екстремальних бінарних самодуальних кодів типу II є розширені бінарні коди Голея (див. [8]), які вперше було розглянуто Марселем Дж. Е. Голеем в статті [4] в 1949 році. З тих пір такі коди вивчали багато разів і були встановлені багато різних конструкцій для побудови цих кодів в [5–7]. *Розширений бінарний код Голея* визначається, як будь-який бінарний лінійний  $[24, 12, 8]$ -код.

У [9] розширений бінарний код Голея було побудовано у вигляді  $C(v)$  для деякого елемента  $v$  з групової алгебри  $\mathbb{F}_2S_4$ , де  $S_4$  — симетрична група порядку 24. У [7] аналогічний результат одержано для групи  $D_{24}$  дієдра порядку 24. При побудові використовувалася таке твердження.

**Теорема 2** ([7]). *Нехай  $G$  скінченна група порядку 24 з елементом  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2G$ . Якщо*

- 1)  $v = v^*$ ,
- 2)  $v^2 = 0$ ,
- 3)  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ ,

*тоді код  $C(v)$  самодуальний.*

У [10] встановлено, що з 15 неізоморфних груп 24-го порядку таким способом можна побудувати код також для груп  $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ ,  $C_3 \times D_8$ ,  $C_2 \times A_4$ . Теорема 2 дає достатню умову, щоб код  $C(v)$  був розширеним бінарним кодом Голя для елемента  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2G$  групи  $G$  порядку 24. В [10] показано, що для решти груп 24-го порядку розширений бінарний код Голя за теоремою 2 побудувати не можна. Скористаємося таким очевидним критерієм.

**Теорема 3.** *Нехай  $G$  скінченна група порядку 24 з елементом  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2G$ . Код  $C(v)$  самодуальний тоді і тільки тоді, коли*

- 1)  $vv^* = 0$ ,
- 2)  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ .

В статті знаходяться всі елементи  $v$  групової алгебри  $\mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голя.

## 2. Побудова кодів за групою $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ .

**Лема 1.** *Нехай  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2 = \langle x, y, z \mid x^3 = 1, y^4 = 1, z^2 = 1, yz = zy^3, xy = yx^2, xz = zx \rangle$ ,*

$$v = \sum_{i=0}^3 (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+5}x + \alpha_{i+9}x^2)y^i + (\alpha_{i+13} + \alpha_{i+17}x + \alpha_{i+21}x^2)y^iz.$$

*Якщо код  $C(v)$  самодуальний, тоді  $\sum_{i=1}^{24} \alpha_i = 0$ ,*

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + \\ & (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}) = 0, \\ & (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7)(\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{21} + \alpha_{23}) + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19}) + \\ & (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8)(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{22} + \alpha_{24}) + (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_{10} + \alpha_{12})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20}) = 0. \\ & (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_{23} + \alpha_{15}) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_{22} + \alpha_{14}) + (\alpha_2 + \alpha_{10})(\alpha_{14} + \alpha_{18}) + \\ & (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_{21} + \alpha_{13}) + (\alpha_3 + \alpha_{11})(\alpha_{13} + \alpha_{17}) + (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_{24} + \alpha_{16}) + \\ & (\alpha_4 + \alpha_{12})(\alpha_{16} + \alpha_{20}) = 0, \\ & \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_1 + \alpha_9) + \alpha_2 + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_2 + \alpha_{10}) + \alpha_3 + (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_3 + \alpha_{11}) + \alpha_4 + \\ & (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_4 + \alpha_{12}) + \alpha_{13} + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{13} + \alpha_{21}) + \alpha_{14} + (\alpha_{14} + \alpha_{18})(\alpha_{14} + \alpha_{22}) + \alpha_{15} + \\ & (\alpha_{15} + \alpha_{19})(\alpha_{15} + \alpha_{23}) + \alpha_{16} + (\alpha_{16} + \alpha_{20})(\alpha_{16} + \alpha_{24}) = 0. \end{aligned}$$



$$\gamma_7 = (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_{21} + \alpha_{13}) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_{13} + \alpha_{17}) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_{24} + \alpha_{16}) + (\alpha_2 + \alpha_{10})(\alpha_{16} + \alpha_{20}) + (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_{23} + \alpha_{15}) + (\alpha_3 + \alpha_{11})(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_{22} + \alpha_{14}) + (\alpha_4 + \alpha_{12})(\alpha_{14} + \alpha_{18});$$

$$\gamma_8 = (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_{23} + \alpha_{15}) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_{22} + \alpha_{14}) + (\alpha_2 + \alpha_{10})(\alpha_{14} + \alpha_{18}) + (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_{21} + \alpha_{13}) + (\alpha_3 + \alpha_{11})(\alpha_{13} + \alpha_{17}) + (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_{24} + \alpha_{16}) + (\alpha_4 + \alpha_{12})(\alpha_{16} + \alpha_{20}).$$

Звідси отримаємо,

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24});$$

$$\gamma_7 + \gamma_8 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7)(\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{21} + \alpha_{23}) + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19}) + (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8)(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{22} + \alpha_{24}) + (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_{10} + \alpha_{12})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20}).$$

Якщо код  $C(v)$  самодуальний, то за умовою 1 теореми 3 виконуються умови:  $vv^* = 0$  і  $\sigma(v)\sigma(v)^T = \sigma(vv^*) = 0$  а, отже,  $\gamma_i = 0$  ( $i = 1, \dots, 8$ ). Тоді  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 = 0$ ,  $\gamma_7 + \gamma_8 = 0$ ,  $\gamma_8 = 0$ ,  $\gamma_3 = 0$ . Звідси отримуємо відповідно рівняння наведені у висновку леми.

Одним з знайдених елементів  $\epsilon$ , наприклад,  $v = y^2 + x^2 + x^2y^2 + yz + xz + xy^3z + x^2y^2z + x^2y^3z$ . Для нього  $v^* = y^2 + x + xy^2 + yz + x^2z + xy^3z + xy^2z + x^2y^3z \neq v^*$ . В таблиці подано добутки всіх доданків з  $v$  на доданки з  $v^*$ .

Таблиця 1. Таблиця добутків доданків з  $v$  на доданки з  $v^*$

	$y^2$	$x$	$xy^2$	$yz$	$x^2z$	$xy^3z$	$xy^2z$	$x^2y^3z$
$y^2$	1	$xy^2$	$x$	$y^3z$	$x^2y^2z$	$xyz$	$xz$	$x^2yz$
$x^2$	$x^2y^2$	1	$y^2$	$x^2yz$	$xz$	$y^3z$	$y^2z$	$xy^3z$
$x^2y^2$	$x^2$	$y^2$	1	$x^2y^3z$	$xy^2z$	$yz$	$z$	$xyz$
$yz$	$y^3z$	$x^2yz$	$x^2y^3z$	1	$xy$	$x^2y^2$	$x^2y^3$	$xy^2$
$xz$	$xy^2z$	$x^2z$	$x^2y^2z$	$xy^3$	1	$x^2y$	$x^2y^2$	$y$
$xy^3z$	$xyz$	$y^3z$	$yz$	$xy^2$	$x^2y^3$	1	$y$	$x^2$
$x^2y^2z$	$x^2z$	$y^2z$	$z$	$x^2y$	$xy^2$	$y^3$	1	$xy^3$
$x^2y^3z$	$x^2yz$	$xy^3z$	$xyz$	$x^2y^2$	$y^3$	$x$	$xy$	1

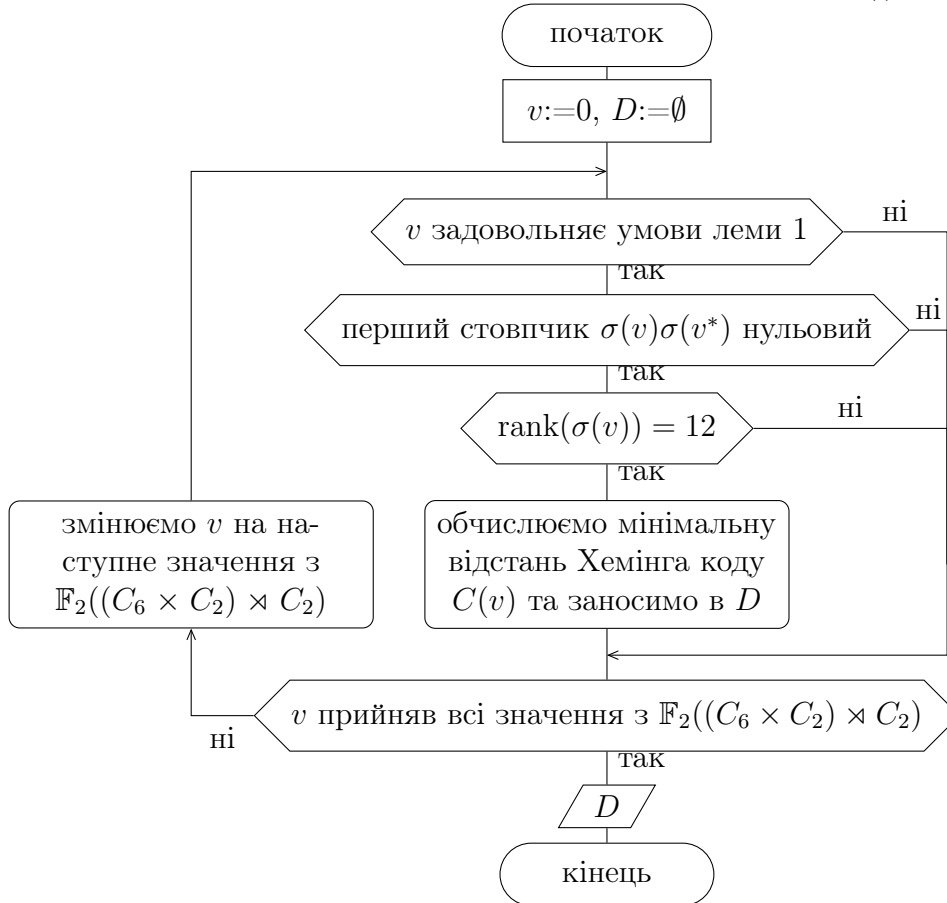
Таким чином,  $vv^* = 0$ . З вигляду  $v$  одержимо, що

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звичайно важко дати теоретичне обґрунтування, але обчислення в GAP пока-

зують, що  $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$ , а мінімальна відстань Хемінга коду  $C(v)$  рівна 8. Тобто  $C(v)$  є розширений бінарний код Голея.

**3. Числові результати.** Групова алгебра  $\mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$  складається, очевидно, з  $2^{24} = 16\,777\,216$  елементів  $v$ . Зрозуміло  $vv^* = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $\sigma(vv^*) = 0$ . Всі інші стовпчики матриці  $\sigma(vv^*) = 0$  отримуються з першого деякою зміною порядку його компонент, тому  $vv^* = 0$  тоді і тільки тоді, коли перший стовпчик  $\sigma(vv^*) = \sigma(v)\sigma(v^*)$  нульовий. Ми організуємо наступний порядок обчислень в GAP при переборі  $v$  з групової алгебри  $\mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$ .



В результаті обчислень одержуємо кількість елементів  $v \in \mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$ , що  $C(v)$  — самодуальний код. Подаємо ці результати для порівняння з кількістю тих же елементів при умові  $v = v^*$ .

Таблиця 2. Кількість елементів з групової алгебри  $\mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$

Мінімальна відстань Хемінга $C(v)$	2	4	6	8
Кількість елементів $v$ , що $v = v^*$	416	4 192	576	576
Кількість елементів $v$	11 520	182 016	27 648	27 648

Таким чином, існує рівно 27 648 елементів  $v \in \mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голея.

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Ця стаття присвячена дослідженню конструкцій розширених бінарних кодів Голея за групою алгеброю  $\mathbb{F}_2G$  групи  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ . Знайдено 27 648 елементів  $v \in \mathbb{F}_2((C_6 \times C_2) \rtimes C_2)$ , що  $C(v)$  є розширеним бінарним кодом Голея. В подальших дослідженнях можна буде розглянути інші групи порядку 24 або групи

вищих порядків для отримання кодів більшої довжини.

Автори щиро вдячні професору Бондаренку В. М. за корисні поради та змістовні дискусії при підготовці роботи.

### Список використаної літератури

1. Hurley T. Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math.* 2006. 31, no. 3. P. 319–335.
2. Берман С. Д. К теории групповых кодов. *Кибернетика.* 1967. № 1. С. 31–39.
3. Rains E. M. Shadow Bounds for Self Dual Codes. *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1998. vol. 44. P. 134–139.
4. Golay M. J. Notes on digital coding. Proc. I.R.E., 1949. 37(6). 657 pp.
5. Peng X. H., Farrell P. G. On construction of the (24, 12, 8) Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2006. 8 (52). P. 3669–3675.
6. Kanemasu M. Golay codes. *MIT Undergraduate J. Math.* 1999. 1. P. 95–99.
7. McLoughlin I., Hurley T. A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2008. 9 (54). P. 4381–4383.
8. Huffman W. C., Pless V. Fundamentals of error-correcting codes. *Cambridge University Press*, Cambridge. 2003.
9. Bernhardt F., Landrock P., Manz O. The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory.* 1990. Ser. A, 55, no. 2. P. 235 - 246.
10. Dougherty S. T., Gildea J., Taylor R., Tylyshchak A. Group rings,  $G$ -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography.* 2018. 86 (9). P. 2115–2138. DOI: 10.1007/s10623-017-0440-7.
11. Zimmerman K.-H. Beiträge zur algebraischen Codierungstheorie mittels modularer Darstellungstheorie. *Bayreuther Math. Schr.* 1994. P. 48.

**Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A.** Extended binary Golay codes by a group algebra of one group.

Extended binary Golay codes are examples of extreme binary self-dual codes of Type II (linear binary self-dual codes with Hamming distance between arbitrary codewords which are multiples of 4 that has the highest possible minimum Hamming distance among such codes with a fixed dimension of codeword space and their length). These codes have been studied for a long time and many different constructions have been established to build these codes. In addition, extended binary Golay codes are easy to obtain from binary Golay codes and vice versa. The latter are perfect codes and together with binary codes they give us all possible parameters of nontrivial binary perfect codes.

In the paper the construction of linear binary codes, in particular of binary Golay codes extended by the group algebra  $\mathbb{F}_2G$  of finite group  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  of order  $n = 24$  over the field of two elements  $\mathbb{F}_2$  has been considered. Extended binary Golay code is defined as any binary linear code, for which the length of the codewords is 24, the dimension of the subspace of the codewords is 12 and the minimum Hamming distance of the code is 8, that is, any [24,12,8]-code. Considering these codes, we apply the elements of the presentation theory, in particular regular presentations  $v \rightarrow \sigma(v)$  of algebra  $\mathbb{F}_2G$ . For the element  $v$  we define the binary code  $C(v)$  as the subspace of  $\mathbb{F}_2^24$  generated by the rows of the matrix  $\sigma(v)$ . The criterion of self-dual codes  $C(v)$  for an arbitrary finite group  $G$  of order 24 was used and easily verified necessary conditions for binary code  $C(v)$  for elements  $v$  of group algebra  $\mathbb{F}_2G$  of the group  $G = (C_6 \times C_2) \rtimes C_2$  to be self-dual was found. As a result of numerical calculations which involves verifying the found necessary conditions, we get the number of elements  $v \in \mathbb{F}_2G$  that  $C(v)$  is self-dual. Quantitative results for comparison with the number of the same elements when  $v = v^*$  are presented. Previously, in this form, extended binary Golay codes were found only for elements  $v$  that  $v = v^*$ . As a result of calculations we obtained all 27 648 elements  $v$  of group algebra  $\mathbb{F}_2G$  that  $C(v)$  is extended binary Golay code.

**Keywords:** group algebra, extended binary codes, Golay codes, self-dual codes, codes over fields.



## References

1. Hurley, T. (2006). Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math*, 31, no. 3, 319–335.
2. Berman, S. D. (1967). K теорія групових кодів [On theory of group codes]. *Kybernetyka*, no. 1, 31-39. [in Russian]
3. Rains, E. M. (1998). Shadow Bounds for Self Dual Codes. *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 44, 134–139.
4. Golay, M. J. (1949). Notes on digital coding. *Proc. I.R.E.*, 37 (6), 657.
5. Peng, X. H., & Farrell, P. G. (2006). On construction of the (24, 12, 8) Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 8 (52), 3669–3675.
6. Kanemasu, M. (1999). Golay codes. *MIT Undergraduate J. Math.*, 1, 95–99.
7. McLoughlin, I., & Hurley, T. (2008). A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 9 (54), 4381–4383.
8. Huffman, W. C., & Pless, V. (2003). Fundamentals of error-correcting codes. *Cambridge University Press*, Cambridge
9. Bernhardt, F. Landrock, P., & Manz, O. (1990). The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55, no. 2, 235 - 246.
10. Dougherty, S. T., Gildea, J., Taylor, R., & Tylyshchak, A. (2018). Group rings,  $G$ -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86 (9), 2115-2138. DOI: 10.1007/s10623-017-0440-7.
11. Zimmerman, K. H. (1994). Contribution to algebraic coding theory by means of modular representation theory. *Bayreuther Math. Schr.* 48. [in Germany]

Одержано 30.04.2020

УДК 519.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).73-84](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).73-84)**Л. Ф. Гуляницький<sup>1</sup>, А. А. Коткова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ,  
завідувач відділу,

доктор технічних наук, старший науковий співробітник

[leonhul.icyb@gmail.com](mailto:leonhul.icyb@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>

<sup>2</sup> НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ,  
магістрант

[kotkova.anhelina@gmail.com](mailto:kotkova.anhelina@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4163-1442>

## ДО КЛАСИФІКАЦІЇ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Суть розглянутих задач полягає у розробці маршрутів для групи гетерогенних транспортних засобів, які базуються у певному місці чи місцях (депо) і мають доставити товари клієнтам згідно їх обсягами замовлень. Класична задача маршрутизації транспортних засобів відноситься до задач комбінаторної оптимізації, які можна подати у вигляді графу, у якого множина вершин відображає як депо, так і точки доставки, тобто клієнтів, а множина ребер відповідає шляхам. У цій задачі вважаються заданими: матриця ваг ребер між вершинами, що визначаються вартостями/довжинами шляхів; кількість транспортних засобів, задіяних у доставці товару; обсяги товару, що має постачатися клієнтам у кожному пункту доставки.

Актуальність задачі маршрутизації транспортних засобів спричинила появу багаточисельних її досліджень, які проводилися протягом останніх десятиліть, та відповідних публікацій. При формуванні наведеного в статті переліку наукових публікацій автори не ставили мету подати історичний ракурс дослідження маршрутизації транспортних засобів (він досить повно відображається в більшості робіт), а надавали перевагу публікаціям останніх років, які дають картину актуальних нині досліджень.

У більшості реальних задач маршрутизації транспортних засобів присутні додаткові обмеження, що породжують цілий спектр нових задач. У роботі наведено низку класів задач маршрутизації транспортних засобів. Основним обмеженням є вантажопідйомність, а критерієм – загальна вартість перевезень. У задачах маршрутизації з часовими обмеженнями або «часовими вікнами» мінімізація загальної вартості перевезень поєднується з мінімізацією кількості задіяних транспортних засобів та загального часу очікування клієнтами транспортних засобів. Мінімізація вартості перевезень і розміру парку залучених транспортних засобів може відбуватися і у випадку, коли ці транспортні засоби вирушають із декількох депо, причому як старт, так і завершення маршруту може відбуватися не у фіксованих, а із/в альтернативних, зокрема, динамічних депо. Розглядаються також проблеми маршрутизації за можливості поверненням і доставкою товарів, маршрутизація з двовимірними обмеженнями завантаження транспортних засобів, максимізація заощаджень від перевезення товару, з різними видами транспорту, періодична маршрутизація, з випадковими даними, з можливістю дозавантаження з дотриманням заданого терміну доставляння. Для кожного типу задач наведено додаткові обмеження, що відрізняють їх від класичної задачі.

**Ключові слова:** оптимізація маршрутів, транспортні засоби, логістика, мультидепо, математична модель, комбінаторна оптимізація.

**1. Вступ.** Економіка завжди була основним акцентом у плануванні діяльності будь-якої компанії, фірми чи підприємства. Логістика не є винятком із

цього правила, що робить дослідження її проблем одним із найбільш досліджуваних напрямів. Оптимізація в економічних процесах є основою розвитку промисловості та економіки будь-якої країни. Ефективний розподіл і використання транспортних засобів та пов'язаних з цим витрат і експлуатаційних обмежень може забезпечити безпечно й стійке майбутнє країни за рахунок економії матеріальних та людських ресурсів.

Задачі маршрутизації транспорту є ключовими задачами в галузі транспортних перевезень. У багатьох сферах транспортної логістики доставка товару може збільшувати його вартість на величину, порівнювану з вартістю самого товару. Тому використання методів оптимізації доставки товару може суттєво зекономити витрати на обслуговування користувачів і, таким чином, зменшити собівартість товару. Однією з ключових функцій систем підтримки прийняття рішень у галузі транспортної логістики є можливість розрахунку й побудови ефективних маршрутів з точки зору вартості об'їзду замовників транспортних засобів різного призначення з урахуванням потреб споживачів послуги [1].

**2. Формулювання проблеми.** Суть досліджуваних задач полягає у розробці маршрутів для групи гетерогенних транспортних засобів, які базуються у певному місці чи місцях (депо) і мають доставити товари клієнтам згідно їх обсягами замовлень та з урахуванням ряду обмежень. Задачі маршрутизації транспортних засобів (ЗМТЗ, Vehicle Routing Problem, VRP) – це загальна назва великого класу задач комбінаторної оптимізації [1-3]. Мета: знайти множину маршрутів для обслуговування клієнтів певною кількістю транспортних засобів у заданому середовищі. Класична ЗМТЗ визначається набором клієнтів, яких потрібно обслужити, місця їх розміщення та їх вимоги, а також іншою первинною інформацією, такою як відстань між двома покупцями, відстань між кожним клієнтом та депо, кількість транспортних засобів та їх вантажопідйомність.

Класична задача маршрутизації транспортних засобів відноситься до задач комбінаторної оптимізації [4], які можна подати у вигляді графу  $G(V, E)$ , де

$V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  – множина вершин ( $v_0$  – депо,  $v_1, \dots, v_n$  – точки доставки, клієнти);

$E$  – множина ребер  $\{(v_i, v_j) | i \neq j\}$ , що відповідають шляхам;

$C$  – матриця ваг ребер  $c_{ij}$  між вершинами. Ваги ребер – це вартості шляхів;

$m$  – кількість транспортних засобів, задіяних у доставці товару;

$R_i$  – маршрут  $i$ -го транспортного засобу ( $i = \overline{1, m}$ );

$C(R_i)$  – вартість маршруту  $R_i$ ;

$q_i$  – обсяг товару, що має постачатися в  $i$ -ту точку доставки.

Кожній вершині  $v_i$  ставиться у відповідність деяка кількість товарів, які мають бути доставлені клієнтам у відповідну точку доставки. Задача маршрутизації полягає у визначенні такої множини маршрутів мінімальної вартості (відповідно до величини  $m$  – кількості транспортних засобів), щоб кожна вершина була відвідана транспортним засобом тільки один раз. Крім того, усі маршрути повинні починатися й закінчуватися в депо  $v_0$ .

Розв'язком задачі є розбиття множини  $V$  на підмножини (маршрути) і задавання порядку обходу вершин на кожній підмножині (перестановка вершин маршруту). Розв'язок задачі є допустимим, якщо всі маршрути задовольняють додатковим обмеженням задачі. Цільовою функцією є сумарна вартість пере-

везень:

$$F_{vrp} = \sum_{i=1}^m \sum C(R_i),$$

де  $C(R_i)$  – сума вартостей шляхів (вага ребер) маршруту  $R_i$ .

У класичному варіанті потрібно знайти допустимий розв'язок з мінімальною такою вартістю. Зазвичай у реальних ЗМТЗ виникає низка додаткових обмежень, які і породжують цілий спектр таких задач. Розглянемо найбільш поширені ЗМТЗ, доповнюючи наведені, наприклад, у [1,5].

**3. Маршрутизація з обмеженням по вантажопідйомності (Saturated VRP, CVRP) [6].** У задачах цього типу вводиться додаткове обмеження: маса товарів на кожному маршруті  $R_i$  не повинна перевищувати заданої величини  $Q_i$  (по суті, це вантажопідйомність транспортних засобів). Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень.

Поширеною підходом до постановки задачі CVRP у міській логістиці є стратегія багатоешелонного розподілу (2E-CVRP), у якій вантажі доставляються клієнтам через проміжні склади, а не використовують прямі поставки [7]. У такій задачі враховуються типи транспортних засобів, пройдений шлях, швидкість руху транспортних засобів, навантаження.

Для розв'язування задач типу CVRP запропоновано використовувати декілька алгоритмів, серед яких алгоритм інтелектуальних крапель (improved intelligent water drops algorithm, IIWDA); алгоритм зозуль (advanced cuckoo search algorithm, ACSA); гібридний алгоритм локального пошуку (local search hybrid algorithm, LSHA); гібридний алгоритм з постоптимізацією (post-optimization hybrid algorithm, POHA) [8].

**4. Маршрутизація з часовими обмеженнями або «часовими вікнами» (VRP with Time Windows, VRPTW) [9].** Ця задача є подібною до VRP з однією додатковою умовою: у точку  $v_i$  можна доставити товар тільки в деякий заданий проміжок часу, визначений як інтервал  $[e_i, l_i]$ .

У задачах даного типу додаються наступні умови та обмеження:

- 1) розв'язок недопустимий, якщо товар був доставлений у точку доставки після верхньої часової границі;
- 2) транспортний засіб, що прибув раніше нижньої часової границі, очікує;
- 3) як варіант, при запізненні транспортного засобу, розв'язок залишається допустимим, але накладаються деякі штрафні санкції.

Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень, розмір парку транспортних засобів, загальний час очікування транспортних засобів.

Отримавши розв'язок VRPTW можна визначити час виїзду транспортних засобів з депо і, таким чином, уникнути їх простоїв.

Подальший розвиток для задачі VRPTW представлено вирішенням задачі маршрутизації транспортного засобу за допомогою зворотних передач та часових вікон (VRP with Backhauls and Time Windows, VRPBW). Ця задача включає в себе вантажопідйомність, повернення товарів, часові вікна та розв'язується за допомогою гібридного метаевристичного алгоритму. Метою є мінімізація загальної відстані перевезень [10].

Ще однією задачею є VRP з м'якими часовими вікнами для декількох типів транспортних засобів з контролем забруднення навколишнього середовища від перевезень. Метою є дослідження взаємозв'язку між вартістю розподілу, задоволеністю споживачів та забрудненістю навколишнього середовища. Для вирішення такої задачі розроблено гібридний генетичний алгоритм, результати якого показують, що швидкість транспортного засобу має сильну кореляцію з експлуатаційними витратами та забрудненням навколишнього середовища, тоді як вантажопідйомність впливає на експлуатаційні витрати, задоволеність споживачів та забруднення навколишнього середовища [11].

**5. Маршрутизація з кількома депо (Multiple Depot VRP, MDVRP) .** [12-20]. Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: кожен маршрут повинен задовольняти стандартним обмеженням VRP, а також починатись і закінчуватись в одному і тому ж депо. Вартість маршруту, зазвичай, розраховується як і в класичному варіанті VRP.

У деяких випадках може бути кілька депо, які обслуговують клієнтів. Якщо клієнти зосереджені біля кожного депо, то задача може бути розбита на кілька незалежних задач. Проте, якщо клієнти і депо розташовані довільним чином, то потрібно шукати розв'язок задачі маршрутизації транспорту з кількома депо (MDVRP).

Ця задача потребує розподілення клієнтів по різним депо. У кожному депо є свій парк транспортних засобів. Кожен транспортний засіб виїжджає зі свого депо, обслуговує клієнтів, що закріплені за депо, і потім повертається назад [13, 14]. У [21] розглядається варіант задачі з депо різних типів.

Найчастіше для розв'язування задач такого типу використовують генетичні алгоритми [22], гібридні генетичні алгоритми, наприклад, із адаптивним локальним пошуком за допомогою часових вікон [23] та алгоритми пошуку мінімального сусідства [24].

**6. Маршрутизація з альтернативними динамічними депо (VRP with Alternative Dynamic Depots, VRPADD) .** [25, 26]. Специфіка прикладних задач, які розв'язуються, може вносити корективи до тлумачення як терміну «вартість перевезень», так і «транспортний засіб». Зокрема, окремий напрям подібних проблем, який бурхливо розвивається в останні роки, є розробка моделей та алгоритмів розв'язування задач маршрутизації, де в якості транспортних засобів виступають безпілотні авіаційні чи інші рухомі роботизовані системи. Найновіші розробки сприяють виникненню задач, у яких ці апарати можуть стартувати із рухомих депо та фінішувати в низці рухомих депо [25, 27]. Такі задачі актуальні, наприклад, у військовій сфері та сфері морської діяльності.

При оптимізації маршрутів у цьому випадку вантажопідйомність може не грату ключову роль (наприклад, при аерофотозніманні), але більш суттєве значення мають обмеження на ресурс системи – обсяг пального чи ємність акумулятора.

**7. Маршрутизація з поверненням і доставкою товарів (VRP with Pick-Ups and Deliveries, VRPPD) .** [28, 29]. Задача маршрутизації з можливістю повернення і доставки товарів розширює стандартну VRP тим, що клієнти в точках доставки можуть повертати деяку кількість товару назад в депо. Таким чином, потрібно бути впевненим, що товари, які хоче повернути клієнт,

не будуть перевантажувати транспортний засіб. Це обмеження робить планування задачі більш складним і може призвести до неефективного використання транспорту, збільшення вартості маршрутів і загальної кількості транспортних засобів в депо.

Для простоти зазвичай розглядають задачі з додатковими обмеженнями. Наприклад, доставка товарів відбувається тільки до точок доставки, а повернення – тільки в депо, тобто немає обміну товарами між точками доставки. Інший спосіб спрощення полягає у відміні обмеження, що всі точки доставки можуть бути відвідані лише один раз. Існує також ще один спосіб – покласти, що транспортний засіб спочатку розвозить усі товари, а лише потім починає забирати товар з точок доставки (VRP with Backhauls, VRPB, що описана нижче).

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: кількість товару, який потрібно доставити до клієнтів, і товару, який потрібно забрати від клієнтів, не повинна перевищувати вантажопідйомність транспортного засобу в жодній точці маршруту.

Однією зі складних задач VRPPD є задача маршрутизації транспортних засобів з гетерогенним флотом, змішаним поверненням та часовими вікнами (HVRPMBTW) [30]. Ця задача характеризується обмеженою кількістю транспортних засобів, різною місткістю та витратами.

**8. Маршрутизація з двовимірними обмеженнями завантаження транспортних засобів (VRP with Simultaneous Pick-ups, Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints, 2L-SPD).** 2L-SPD належить до класу складних задач оптимізації маршрутизації та упаковки.

Попит клієнта в такій задачі – це набір двовимірних, прямокутних, завантажених елементів. Мета полягає в розробці маршрутного набору мінімальних витрат для однорідного парку транспортних засобів, починаючи і закінчуючи в центральному депо, щоб обслуговувати всіх замовників. Усі товари, упаковані в один транспортний засіб, повинні задовольняти двовимірним ортогональним обмеженням упаковки [31].

Однією з таких геометричних задач є маршрутизація транспортних засобів із одночасними поверненнями та доставками предметів, що не складаються та мають двовимірні обмеження на завантаження. Основним обмеженням на завантаження є те, що для кожної дуги, пройденої в плані маршруту, повинні бути визначені можливі схеми завантаження. Досліджено, що одночасне обслуговування повернення та доставки може призвести до значних заощаджень [32].

**9. Маршрутизація з поверненням товарів (VRP with Backhauls, VRPB) [33, 34].** Задачі маршрутизації з поверненням товарів (VRPB) є розширенням VRP, в якому клієнти можуть як замовити, так і повернути деякі товари. В задачі з доставкою і поверненням (VRPPD) необхідно враховувати, що всі товари, які повернуть клієнти, повинні поміститися в транспортному засобі. Відмінність від VRPPD полягає в тому, що всі товари повинні бути доставлені перш, ніж відбудеться будь-яке повернення товарів. Передумовою виникнення цієї вимоги є факт, що більшість транспортних засобів зазвичай завантажуються ззаду або зверху, утворюючи стек. Тому перестановка вантажу під час кожної доставки не є економічно вигідною та прийнятною. Кількість товару, яку необхідно доставити й прийняти, відома перед початком планування.

Ціль задачі: мінімізувати вартості перевезень. Обмеження: повернення від-

бувається лише після того, як була завершена доставка. Об'єм товарів не повинен перевищувати вантажопідйомності транспортного засобу в жодній точці маршруту.

**10. Маршрутизація з різним транспортом (Split Delivery VRP, SDVRP) [35, 36].** Цей вид задачі розширює VRP, дозволяючи обслуговувати одну точку доставки різними транспортними засобами, якщо це зменшує загальну вартість перевезень. Цей випадок є типовим для ситуації, коли об'єм замовленого товару є великим, і порівнюваним з вантажопідйомністю транспортного засобу.

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: на відміну від класичної VRP, у задачах SDVRP знімається обмеження, що клієнт може обслуговуватись лише одним транспортним засобом.

Розширенням SDVRP може бути задача маршрутизації транспортних засобів з роздвоєною доставкою, орієнтована на клієнта (CMVRPSD). Метою такої задачі є мінімізація загального часу очікування клієнтів при розподілі декількох видів товарів кількома ємнісними транспортними засобами. Передбачається, що вимогу замовника може задовольнити більше, ніж один транспортний засіб. У цій задачі беруть участь два класи рішень: маршрутизація транспортних засобів до клієнтів та кількісна оцінка товару для завантаження та вивантаження [37].

**11. Періодична маршрутизація (Periodic VRP, PVRP) [38].** У класичній задачі VRP звичайний період планування – один день. У задачах з періодичною маршрутизацією VRP узагальнюється розширенням періоду планування до кількох днів.

Ціль задачі: мінімізувати вартість перевезень і розмір парку транспортних засобів. Обмеження: ті ж самі, що і для класичної VRP. Крім того, транспортний засіб може повернутися в депо не в той же день, коли виїхав. За  $M$ -денний період кожна точка доставки повинна бути відвідана, як мінімум, один раз.

Запити кожного клієнта повинні бути виконані за один візит одним транспортним засобом. Якщо період планування  $M = 1$ , то задача зводиться до класичної VRP. Кожна точка доставки в задачі з періодичною маршрутизацією має бути відвідана  $k$  раз, причому  $1 \leq k \leq M$ . У класичному варіанті PVRP, щоденне замовлення клієнта завжди фіксоване. PVRP можна розглядати як задачу компонування групи маршрутів на кожен день, причому маршрути повинні задовольняти обмеженням і загальна вартість усіх перевезень повинна бути мінімальна.

**12. Маршрутизація з випадковими даними (Stochastic VRP, SVRP) [39, 40].** У цьому варіанті VRP один або декілька компонентів задачі можуть мати випадкову поведінку. Стохастичність може проявлятися наступним чином:

- 1) випадкові клієнти – кожна точка доставки існує із заданою імовірністю;
- 2) випадкові запити – кількість товарів, яку треба доставити клієнту, є випадковою величиною;
- 3) відстань між точками доставки є випадковою величиною.

Розв'язання SVRP відбувається за два підходи. Перший етап дає розв'язок без урахування випадкових змінних. На другому етапі, коли стають відомі випадкові значення, відбувається корекція розв'язку, який отриманий раніше.

Ціль задачі: мінімізувати загальну вартість перевезень. Обмеження: коли деякі точки доставки невідомі, стає неможливим виконання всіх обмежень для всіх випадкових змінних. Таким чином, може бути необхідним виконання деяких умов із заданою ймовірністю або побудова моделі корекції, що виконується при порушенні деяких обмежень.

Наприклад, у задачі SVRP з поверненням товарів і обмеженню по вантажо-підйомності транспортних засобів способами корекції будуть:

- 1) повернутися в депо, коли транспортний засіб перевантажений, розвантажитися й повернутися на маршрут;
- 2) повернутися в депо, коли транспортний засіб перевантажений, а потім заново оптимізувати залишок маршруту;
- 3) запланувати дострокове повернення в депо, навіть якщо транспортний засіб завантажений не повністю. У такому випадку, рішення може залежати від кількості зібраного товару й відстані до депо. Транспортний засіб може повернутись до депо, якщо відомо, що забирання товару від наступного клієнта призведе до перевищення вантажопідйомності транспортного засобу.

**13. Маршрутизація з можливістю дозавантаження (VRP with Satellite Facilities, VRPSF) [41].** У класичній задачі VRP кожен маршрут починається й закінчується в депо. Однією з причин повернення в депо є обмежена вантажопідйомність. Коли транспортний засіб розвезе всі товари, він повинен повернутися в депо за новою порцією товарів. Але в деяких випадках вигідно організувати дозавантаження на маршруті (без повернення в депо) за допомогою додаткових транспортних засобів. Типовим тут є випадок, коли велика кількість клієнтів очікують регулярних поставок від одного центрального постачальника.

Ціль задачі: мінімізувати витрати на перевезення, уклавшись в певний строк. Можливо, що, враховуючи витрати на додаткові транспортні засоби, загальна вартість розв'язанні задачі в короткостроковій перспективі буде вище, ніж при розв'язанні класичної задачі VRP.

Розширенням класичної задачі маршрутизації є модельований підхід із точним рішенням на основі евристичного відпалу для вирішення зеленої задачі маршрутизації транспортного засобу (G-VRP), де розглядається обмежений діапазон руху транспортних засобів у поєднанні з обмеженою інфраструктурою заправки. Особливо ця проблема виникає в компаній та агентств, які використовують транспортні засоби з альтернативними енергоносіями на транспортних системах для міських територій або для розподілу товарів [42].

**14. Висновки.** Нині проблема маршрутизації транспортних засобів є важливою і актуальною задачею, оскільки має широке застосування на практиці. У деяких випадках, особливо при плануванні великої кількості перевезень, навіть незначне покращення маршрутів транспортних засобів може дати значну економію ресурсів.



Для реальних ЗМТЗ точні методи практично неможливо застосувати через те, що при тій розмірності задач, що існує, та для таких задач, що зазвичай є на практиці, такі алгоритми будуть працювати надзвичайно довго. Тому провідну роль тут відіграють прикладні алгоритми.

Протягом останнього десятиліття було запропоновано досить велику кількість прикладних алгоритмів для ЗМТЗ з часовими вікнами. Але все ж при цьому більшість методів не в змозі забезпечити прийнятний компроміс між точністю оптимального розв'язку й швидкістю його знаходження. Особливо це стосується задач великої розмірності. Удосконалення прикладних алгоритмів маршрутизації як з точки зору ефективності, так і з точки зору швидкості роботи на даний момент є відкритою проблемою й обумовлює актуальність досліджень у цьому напрямі.

### Список використаної літератури

1. Toth, P., & Vigo, D. (Eds.) (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. (MOS-SIAM Series on Optimization; No. 18). Philadelphia: SIAM. – 462 p.
2. Golden B. L., Raghavan S., Wasil, E. A. (Eds.). (2008). *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.
3. Doerner, K., & Schmid, V. (2010). Survey: Matheuristics for rich vehicle routing problems. In M. Blesa, C. Blum, G. Raidl, A. Roli, & M. Sampels (Eds.) *Hybrid metaheuristics. Lecture notes in computer science*. Vol. 6373 (pp. 206–221). Berlin, Heidelberg: Springer.
4. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. *Прикладні методи комбінаторної оптимізації*. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2016. – 142 с.
5. Braekers K., Ramaekers K., & Nieuwenh I. V. (2016). The Vehicle Routing Problem: State of the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313.
6. Eduardo U., Diego P. (2017). New benchmark instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 257, 3, 845 – 858
7. Soysal M., Bloemhof J. M., Bektas T. (2015). The time-dependent two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental considerations. *International Journal of Production Economics*, 164, 366-378
8. Ehsan T., Vahid K. (2016). Enhanced intelligent water drops and cuckoo search algorithms for solving the capacitated vehicle routing problem. *Information Sciences*, 334, 354-378
9. Maurizio B., Ferdinando P. (2015). A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 47, 221-228
10. Ilker K., Nursel O. (2015). An advanced hybrid meta-heuristic algorithm for the vehicle routing problem with backhauls and time windows. *Computers & Industrial Engineering*, 86, 60-68
11. Bin Y., Zhi-Hua Hu (2015). Routing with time-windows for multiple environmental vehicle types. *Computers & Industrial Engineering*, 89, 2015, 150-161
12. Li J., Li Y., & Pardalos, P. M. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31(??), 515 – 532.
13. Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., & Herazo-Padilla, N. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115–129.
14. De Oliveira, F. B., Enayatifar, R., Sadaei, H. J., Guimarães, F. G., Potvin, J. Y. (2016). A cooperative coevolutionary algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. *Expert Systems with Applications*, 43, 117-130.
15. Jairo R. M.-T., Julian L. F., Santiago N. I. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115 – 129
16. Jian Li, Yang Li, Panos M. P. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 2, 515–532
17. Tania R.P.R., Maria I.G., Ana B.P. (2019). Multi-depot vehicle routing problem: a comparative study of alternative formulations. *International Journal of Logistics Research and Applications*, Journal homepage: <https://www.tandfonline.com/loi/cjol20>

18. Chávez, J. J. S., J. W. Escobar, and M. G. Echeverri (2016). A Multi-objective Pareto and Colony Algorithm for the Multi-depot Vehicle Routing Problem with Backhauls. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 7, 35–48
19. Zhang, Y., M. Qi, L. Miao, and G. Wu. (2015). A Generalized Multi-depot Vehicle Routing Problem with Replenishment Based on LocalSolver. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 6, 81–98
20. Braekers, K., K. Ramaekers, and I. V. Nieuwenh (2016). The Vehicle Routing Problem: State the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313
21. Baldacci, R., Battarra, M., & Vigo, D. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In B. L. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3–27). Berlin: Springer. Vol. 43
22. Saso K., Vili P. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. *Applied Soft Computing*, 27, 519-532
23. Li J., Y. Li, & P. M. Pardalos (2016). Multi-depot Vehicle Routing Problem with Time Windows Under Shared Depot Resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 515–532
24. Bezerra, S. N., S. R. De Souza, and M. J. F. Souza. (2018). A GVNS Algorithm for Solving the Multi-depot Vehicle Routing Problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 66, 167 – 174
25. Горбулін В.П., Гуляницький Л.Ф., Сергієнко І.В. Постановки та математичні моделі проблем оптимізації маршрутів літальних апаратів із динамічними депо, *Управляющие системы и машины*, №1, 2019, – С. 3 – 10.
26. Гуляницький Л.Ф., Сторчевий В.В. "Одна спеціальна задача маршрутизації БПЛА *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика*, 34, №1, 2019, С. 60 – 78.
27. В.П.Горбулін, Л.Ф. Гуляницький, І.В. Сергієнко. Оптимізація маршрутів групи БПЛА за наявності альтернативних депо, *Кибернетика и системный анализ*, №2, 2020 (прийнято до друку).
28. Mustafa A., Seyda T. (2015). An adaptive local search algorithm for vehicle routing problem with simultaneous and mixed pickups and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, 83, 15-29
29. Baozhen Y., Bin Y. (2016). An improved particle swarm optimization for carton heterogeneous vehicle routing problem with a collection depot. *Annals of Operations Research*, 242, 2, 303–320
30. Meryem B., Abdelmadjid B. (2016). Quantum Inspired Algorithm for a VRP with Heterogeneous Fleet Mixed Backhauls and Time Windows. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing*, 21
31. Lijun W., Zhenzhen Z. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 16, 798-814
32. Emmanouil E., Christos D. (2016). The Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints. *European Journal of Operational Research*, 251, 2, 369 – 386
33. Cagri K., Gilbert L. (2018). Vehicle routing with backhauls: Review and research perspectives. *Computers & Operations Research*, 91, 79 –91
34. Sebastian R., Andreas B. (2018). Heuristics for vehicle routing problems with backhauls, time windows, and 3D loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 266, 3, 877 – 894
35. Joungsung Lee, Byung-In K. (2015). Industrial ship routing problem with split delivery and two types of vessels. *Expert Systems with Applications*, 42, 22, 9012 – 9023
36. James C., Shangyao Y. (2017). A Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows for Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times. *Networks and Spatial Economics*, 17, 1, 41–68
37. Mohammad M.-J., Seokcheon L. (2016). The customer-centric, multi-commodity vehicle routing problem with split delivery. *Expert Systems with Applications*, 56, 335-348
38. Florent H., Michel G. (2017). Heuristics for tactical time slot management: a periodic vehicle routing problem view. *International Transactions in Operational Research*
39. Ulrike R., Jakob P. (2015). A survey on dynamic and stochastic vehicle routing problems.

*International Journal of Production Research*, 54, 215-231

40. Briseida S., Karl F. (2016). Variable neighborhood search for the stochastic and dynamic vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 236, 2, 425–461
41. Iliya M., Sacha V. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection VRP with intermediate facilities. *Transportation Research Part B: Methodological*, 84, 256-273
42. Cagri K., Ismail K. (2016). The green vehicle routing problem: A heuristic based exact solution approach. *Applied Soft Computing*, 39, 154-164

**Hulianytskyi L. F., Kotkova A. A.** To the classification of vehicles routing problems.

The essence of the problems considered consists in developing routes for a group of heterogeneous vehicles based in a specific place or places (depot) that have to deliver goods to customers according to their volume of orders. The classic vehicle routing problem belongs to combinatorial optimization problems, which can be represented as a graph with the set of vertices representing both the depot and the delivery point, i.e. customers, and the set of edges corresponding to the paths. In this problem, the following data are given: matrix of edges weights between vertices, determined by the value/length of paths; the number of vehicles involved in the delivery of the goods; volumes of goods to be delivered to customers at each delivery point.

The topicality of the vehicle routing problem has led to the emergence of numerous studies conducted over the last decades and relevant publications. While composing the list of scientific publications cited in the article, the authors did not aim to provide a historical perspective on the study of vehicle routing problem (it is quite fully reflected in the majority of works), but preferred the publications of recent years that show the current state of research.

Most real-world vehicle routing problems have additional constraints that give rise to a whole range of new problem formulations. The paper presents a number of classes of vehicle routing problems. The main limitation is the capacity, and the criterion is the total cost of transportation. In routing problems with time constraints or “time windows”, minimizing the total cost of transportation is combined with minimizing the number of vehicles involved and the overall waiting time for vehicle customers. Minimizing the cost of transportation and the size of the park of the involved vehicles can be required even if these vehicles leave from several depots, and both the start and the end of the route may be located not in fixed, but in alternative, in particular, dynamic depots. Beside the above mentioned the following tasks are considered: routing problems for return and delivery of goods, routing with two-dimensional restrictions on vehicle loading, maximization of savings on goods transportation, routing with different modes of transport, periodic routing with random data, routing with the possibility of loading, routing with predefined deadlines. For each problem type additional restrictions that differ from the classical problem are introduced.

**Keywords:** route optimization, vehicles, logistics, depot, mathematical model, combinatorial optimization..

## References

1. Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1), 80–91.
2. Toth, P., & Vigo, D. (Eds.) (2014). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications, Second Edition*. (MOS-SIAM Series on Optimization; No. 18). Philadelphia: SIAM. – 462 p.
3. Golden B. L., Raghavan S., Wasil, E. A. (Eds.). (2008). *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (Vol. 43). Springer Science & Business Media.
4. Doerner, K., & Schmid, V. (2010). Survey: Matheuristics for rich vehicle routing problems. In M. Blesa, C. Blum, G. Raidl, A. Roli, & M. Sampels (Eds.) *Hybrid metaheuristics. Lecture notes in computer science*. Vol. 6373 (pp. 206–221). Berlin, Heidelberg: Springer.
5. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. *Прикладні методи комбінаторної оптимізації*. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет 2016. – 142 с.

6. Braekers K., Ramaekers K., & Nieuwenh I. V. (2016). The Vehicle Routing Problem: State of the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313.
7. Eduardo U., Diego P. (2017). New benchmark instances for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *European Journal of Operational Research*, 257, 3, 845 – 858
8. Soysal M., Bloemhof J. M., Bektas T. (2015). The time-dependent two-echelon capacitated vehicle routing problem with environmental considerations. *International Journal of Production Economics*, 164, 366-378
9. Ehsan T., Vahid K. (2016). Enhanced intelligent water drops and cuckoo search algorithms for solving the capacitated vehicle routing problem. *Information Sciences*, 334, 354-378
10. Maurizio B., Ferdinando P. (2015). A Variable Neighborhood Search Branching for the Electric Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 47, 221-228
11. Ilker K., Nursel O. (2015). An advanced hybrid meta-heuristic algorithm for the vehicle routing problem with backhauls and time windows. *Computers & Industrial Engineering*, 86, 60-68
12. . Bin Y., Zhi-Hua Hu (2015). Routing with time-windows for multiple environmental vehicle types. *Computers & Industrial Engineering*, 89, 2015, 150-161
13. Li J., Li Y., & Pardalos, P. M. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31(??), 515 – 532.
14. Montoya-Torres, J. R., Franco, J. L., Isaza, S. N., Jiménez, H. F., & Herazo-Padilla, N. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115–129.
15. De Oliveira, F. B., Enayatifar, R., Sadaei, H. J., Guimarães, F. G., Potvin, J. Y. (2016). A cooperative coevolutionary algorithm for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem. *Expert Systems with Applications*, 43, 117-130.
16. Jairo R. M.-T., Julian L. F., Santiago N. I. (2015). A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots. *Computers & Industrial Engineering*, 79, 115 – 129
17. Jian Li, Yang Li, Panos M. P. (2016). Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 2, 515–532
18. Tania R.P.R., Maria I.G., Ana B.P. (2019). Multi-depot vehicle routing problem: a comparative study of alternative formulations. *International Journal of Logistics Research and Applications*, Journal homepage: <https://www.tandfonline.com/loi/cjol20>
19. Chávez, J. J. S., J. W. Escobar, and M. G. Echeverri (2016). A Multi-objective Pareto and Colony Algorithm for the Multi-depot Vehicle Routing Problem with Backhauls. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 7, 35–48
20. Zhang, Y., M. Qi, L. Miao, and G. Wu. (2015). A Generalized Multi-depot Vehicle Routing Problem with Replenishment Based on LocalSolver. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 6, 81–98
21. Braekers, K., K. Ramaekers, and I. V. Nieuwenh (2016). The Vehicle Routing Problem: State the Art Classification and Review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 – 313
22. Baldacci, R., Battarra, M., & Vigo, D. (2008). Routing a heterogeneous fleet of vehicles. In B. L. Golden, S. Raghavan, & E. Wasil (Eds.), *The vehicle routing problem: latest advances and new challenges* (pp. 3–27). Berlin: Springer. Vol. 43
23. Saso K., Vili P. (2015). A survey of genetic algorithms for solving multi depot vehicle routing problem. *Applied Soft Computing*, 27, 519-532
24. Li J., Y. Li, & P. M. Pardalos (2016). Multi-depot Vehicle Routing Problem with Time Windows Under Shared Depot Resources. *Journal of Combinatorial Optimization*, 31, 515–532
25. Bezerra, S. N., S. R. De Souza, and M. J. F. Souza. (2018). A GVNS Algorithm for Solving the Multi-depot Vehicle Routing Problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 66, 167 – 174
26. Горбулін В.П., Гуляницький Л.Ф., Сергієнко І.В. Постановки та математичні моделі проблем оптимізації маршрутів літальних апаратів із динамічними депо, *Управляющие системы и машины*, №1, 2019, – С. 3 – 10.
27. Гуляницький Л.Ф., Сторчевий В.В. "Одна спеціальна задача маршрутизації БПЛА *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика*, 34, №1, 2019, С. 60 – 78.
28. В.П.Горбулін, Л.Ф. Гуляницький, І.В. Сергієнко. Оптимізація маршрутів групи БПЛА за

- наявності альтернативних депо, *Кибернетика и системный анализ*, №2, 2020 (прийнято до друку).
29. Mustafa A., Seyda T. (2015). An adaptive local search algorithm for vehicle routing problem with simultaneous and mixed pickups and deliveries. *Computers & Industrial Engineering*, 83, 15-29
  30. Baozhen Y., Bin Y. (2016). An improved particle swarm optimization for carton heterogeneous vehicle routing problem with a collection depot. *Annals of Operations Research*, 242, 2, 303–320
  31. Meryem B., Abdelmadjid B. (2016). Quantum Inspired Algorithm for a VRP with Heterogeneous Fleet Mixed Backhauls and Time Windows. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing*, 21
  32. Lijun W., Zhenzhen Z. (2015). A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 16, 798-814
  33. Emmanouil E., Christos D. (2016). The Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pick-ups and Deliveries and Two-Dimensional Loading Constraints. *European Journal of Operational Research*, 251, 2, 369 – 386
  34. Cagri K., Gilbert L. (2018). Vehicle routing with backhauls: Review and research perspectives. *Computers & Operations Research*, 91, 79 –91
  35. Sebastian R., Andreas B. (2018). Heuristics for vehicle routing problems with backhauls, time windows, and 3D loading constraints. *European Journal of Operational Research*, 266, 3, 877 – 894
  36. Joungsung Lee, Byung-In K. (2015). Industrial ship routing problem with split delivery and two types of vessels. *Expert Systems with Applications*, 42, 22, 9012 – 9023
  37. James C., Shangyao Y. (2017). A Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows for Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times. *Networks and Spatial Economics*, 17, 1, 41–68
  38. Mohammad M.-J., Seokcheon L. (2016). The customer-centric, multi-commodity vehicle routing problem with split delivery. *Expert Systems with Applications*, 56, 335-348
  39. Florent H., Michel G. (2017). Heuristics for tactical time slot management: a periodic vehicle routing problem view. *International Transactions in Operational Research*
  40. Ulrike R., Jakob P. (2015). A survey on dynamic and stochastic vehicle routing problems. *International Journal of Production Research*, 54, 215-231
  41. Briseida S., Karl F. (2016). Variable neighborhood search for the stochastic and dynamic vehicle routing problem. *Annals of Operations Research*, 236, 2, 425–461
  42. Iliya M., Sacha V. (2016). Integrating a heterogeneous fixed fleet and a flexible assignment of destination depots in the waste collection VRP with intermediate facilities. *Transportation Research Part B: Methodological*, 84, 256-273
  43. Cagri K., Ismail K. (2016). The green vehicle routing problem: A heuristic based exact solution approach. *Applied Soft Computing*, 39, 154-164

Одержано 10.01.2020

УДК 519.237.8, 519.852

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).85-91](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).85-91)**М. М. Маляр<sup>1</sup>, Н. Е. Кондрук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,  
доктор технічних наук

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат технічних наук

natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

## СТРУКТУРУВАННЯ КРИТЕРІАЛЬНОГО ПРОСТОРУ ЗА КУТОВОЮ МІРОЮ ПОДІБНОСТІ

Багатокритеріальні задачі прийняття рішень є особливо складним класом задач для системи обробки інформації людиною. Як правило, чим більше побудована модель задачі відображає реальну задачу-проблему, яка її спричинила, тим більше критеріїв вона має враховувати. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних методів та підходів, призначених для структуризації критеріального простору задач великої розмірності.

В даній роботі описано нечітке бінарне відношення та його функцію належності, які визначають кутову міру подібності критеріїв ефективності. Вона характеризує ступінь схожості вектор-градієнтів цільових функцій критеріїв ефективності за кутом між ними. Модифіковано метод однорівневої кластеризації, що заснований на нечітких бінарних відношеннях для використання кутової міри подібності. Це дозволило проводити кластеризацію критеріального простору на конічні кластери за ознакою подібності – несуперечливою сильною зв'язаністю критеріїв ефективності. Представлено комплексний підхід до структуривання критеріального простору векторних задач лінійного програмування. На основі запропонованого математичного апарату розроблено програмне забезпечення, що реалізує кластеризацію конічними кластерами. Проведення практичних експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

Дана робота є розвитком напрямку структуривання множини критеріїв ефективності для класу багатокритеріальних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності в умовах коли утруднене або неможливе групування, порівняння чи впорядкування часткових критеріїв за перевагою для особи, що приймає рішення. Перспективні дослідження полягають у розвитку запропонованого підходу кластеризації методом, що заснований на нечітких бінарних відношеннях за кутовою мірою подібності для розв'язання інших класів прикладних задач.

**Ключові слова:** кластеризація, багатокритеріальна оптимізація, структуривання, кутова міра подібності, міра подібності.

**1. Вступ.** Багатокритеріальні задачі прийняття рішень є особливо складним класом задач для системи обробки інформації людиною. Наявність багатьох критеріїв приводить до великого навантаження на короткочасну пам'ять, примушуючи людину використовувати різні евристичні методи для того, щоб справитися із задачею при обмеженому об'ємі короткочасної пам'яті.

В той же час в практичній діяльності людини багатокритеріальні задачі зустрічаються все частіше, що викликано необхідністю враховувати одночасно

багато різних чинників. Як правило, чим більше побудована модель задачі відображає реальну задачу-проблему, яка її спричинила, тим більше критеріїв вона має враховувати. Крім того, відкидання або неврахування будь-якого із критеріїв може призвести до невідповідності розв'язку задачі-моделі оптимальному розв'язку реальної задачі. З іншого боку, чим більша розмірність критеріального простору тим більше ускладнюється пошук оптимального розв'язку задачі вибору.

Задачі у яких розмірність простору критеріїв перевищує 7 називаються задачами великої критеріальної розмірності [1]. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних методів, призначених для задач великої розмірності критеріального простору.

Крім того, в основі багатьох методів оптимізації застосовується підхід, який використовує призначення вагових коефіцієнтів критеріїв та їх ранжування особами, що приймають рішення (ОПР). Як правило люди дають завищені оцінки тим критеріям, які порівняно мало впливають на вибір, і недооцінюють найбільш суттєві. Тому, для точнішого і обгрунтованішого підбору ваг, проведення ранжування критеріїв ефективності за перевагою для ОПР доцільно встановити взаємозв'язки між критеріями та структурувати критеріальний простір задачі. Реалізувати даний підхід пропонується на основі кутової міри подібності, що визначає міру схожості вектор-градієнтів цільових функцій критеріїв ефективності за кутом між ними.

**2. Постановка задачі.** Надалі будемо розглядати багатокритеріальну задачу лінійного програмування в наступній постановці:

$$y_i = f_i(x) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j \rightarrow \text{extr}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

$$x \in X \subseteq R^n, \quad (2)$$

де  $X$  – множина допустимих розв'язків (альтернатив), яка визначається сукупністю лінійних рівнянь та нерівностей,  $y_i = f_i(x)$  – цільові функції,  $c_{ij}$  – коефіцієнти. Тобто, є деяка сукупність цілей, які відображені критеріями  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , і потрібно знайти таку точку  $x^* \in X \subseteq R^n$ , яка в деякому розумінні мінімізує або максимізує кожен з критеріїв.

Для групування критеріїв ефективності, що описуються цільовими функціями  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$  використаємо зв'язки між ними, які описуються наступними означеннями.

**Означення 1** (див. [1]). *Два критерії назвемо суперечливими відносно деякої множини допустимих альтернатив  $X$ , якщо покращення оцінки по одному з критеріїв на множині  $X$  супроводжується її погіршенням за іншим.*

**Означення 2** (див. [1]). *Два критерії назвемо сильно зв'язаними відносно деякої множини допустимих альтернатив  $X$ , якщо їх оцінки є близькими на різних альтернативах множини  $X$ , або якщо покращення оцінки за одним критерієм на множині  $X$  приводить до її покращення за іншим критерієм.*

Оскільки критерії лінійні, то напрямки до екстремуму співпадають з напрямками  $\pm \text{grad } f_i(x)$ . Якщо сумістити початок вектора  $\text{grad } f_i(x)$  з початком системи координат, то він співпаде з радіус-вектором  $\overline{OC}_i$ , де точка  $O$  – початок

координат, а  $C_i(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тому розділивши вектори  $\overline{OC_i} = \overline{c_i}$  або точки  $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ ,  $i = \overline{1, m}$  на множини, тим самим розділимо і критерії, що їм відповідають  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

При знаходженні оптимальної точки в задачах виду (1)-(2), як зазначалось, враховують тільки напрямки  $grad f_i(x)$ , таким чином, ставиться задача проведення структуризації критеріального простору, на основі групування критеріїв ефективності за ознакою подібності – несуперечливою сильною зв'язаністю критеріїв ефективності.

**3. Огляд літератури.** В наш час все більше уваги приділяється задачі багатоцільової (векторної, багатокритеріальної) оптимізації. Це зв'язано з тим, що при дослідженні складних систем і об'єктів використання скалярної задачі оптимізації приводить до математичної моделі, яка є неадекватна та невідповідна реальній задачі, бо нагальні потреби практики управління, проектування, планування потребують врахування і узгодження різних цілей та потреб.

Слід відзначити, що в різних областях людської діяльності неодноразово виникали і по мірі накопичення досвіду успішно розв'язувались ситуації, в яких прийняті рішення були багатоцільовими [2-5].

Так, прикладами задач великої розмірності „критеріальної” можуть бути задача оптимізації планування роботи виробничої системи, задача складання збалансованого раціону (може враховувати 17 критеріїв) [2, 3], задача автоматизації управління сучасної бібліотеки (враховує 20 критеріїв) [6], задача рейтингування художників (використовує 18 критеріїв) [7], задача формування комплексних цільових соціальних програм, які підтримуються Міжнародним фондом „Відродження” (містить 238 критеріїв) [8] і т. д.

Тому характерною особливістю багатьох практичних задач дослідження є їхня велика розмірність. При такій вимірності класичні методи математичного програмування виявляються малоефективними [9].

Це зумовлює необхідність розвитку спеціальних методів та підходів, призначених для структуризації критеріального простору задач великої розмірності, зокрема представлених в [1, 10].

**4. Матеріали і методи.** Очевидно, що поняття суперечливих та сильно зв'язаних критеріїв тісно пов'язане із кутом між векторами градієнтами цільових функцій критеріїв. Так, якщо цей кут рівний  $180^\circ$ , то критерії будуть суперечливі при будь-якій множині допустимих альтернатив  $X$ , а якщо ж  $0^\circ$ , то критерії будуть сильно зв'язаними. Тому вид множини  $X$  може впливати тільки на міру прояву цих ознак.

Для реалізації процесу кластеризації обрано метод, що заснований на нечітких бінарних відношеннях, п. 6 в [11]. Він дає можливість проводити групування об'єктів кластерами різних геометричних форм змінюючи лише види мір подібності об'єктів. Для визначення кількості кластерів задаються певні величини – пороги кластеризації  $\mu_R^*$ , що характеризують ступінь подібності об'єктів в середині кластеру.

Подібність об'єктів за деяким критерієм характеризується нечітким бінарним відношенням  $R$  на множині векторних ознак  $C = \{ \overline{c_i} \mid i = \overline{1, m} \}$  із функцією належності  $\mu_R(\overline{c_i}, \overline{c_j})$ , де  $\mu_R : C^2 \rightarrow [0, 1]$ .

«Кутове» нечітке бінарне відношення  $R^{ang}$  характеризує кут між векторами градієнтів  $\overline{c_i}$  та  $\overline{c_j}$ . Функція належності даного відношення визначається фор-



мулою (рис. 1):

$$\mu_{Rang}(\bar{c}_i, \bar{c}_j) = e^{-\frac{1 - \frac{\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j}{|\bar{c}_i| \cdot |\bar{c}_j|}}{2}}. \quad (3)$$

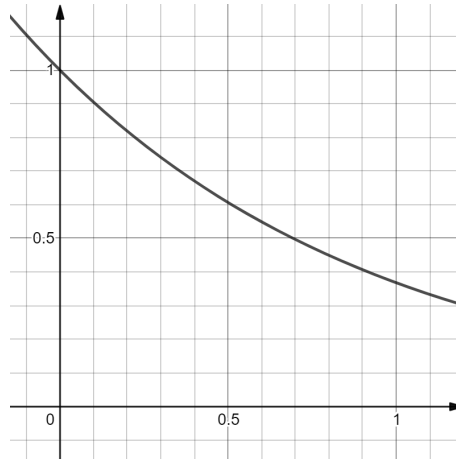


Рис. 1. Графічна інтерпретація функції виду (3)

Аргументом експоненти є нормована величина, яка прямує до 0, коли кут між векторами-градієнтів цільових функцій близький до  $180^\circ$  і наближається до 1, коли кут прямує до  $0^\circ$ . Нехай задана числова величина  $\mu_{Rang}^* \in [0; 1]$  – поріг кластеризації. Він характеризує необхідну ступінь подібності критеріїв ефективності в межах одного кластеру за ознаками несуперечливої сильної зв'язаності. Якщо  $\mu_{Rang}^* = 0$ , то ступінь подібності об'єктів буде найслабшою, що приведе до формування одного кластеру кінченного виду, куди увійдуть всі критерії ефективності. Якщо ж  $\mu_{Rang}^* = 1$ , тоді, навпаки, критерії із різним напрямом векторів градієнтів сформуєть окремі кластери, бо їх ступінь подібності буде найвищою. Отже, ближчому значенню  $\mu_{Rang}^*$  до одиниці буде відповідати більша кількість сформованих кластерів.

Крім того «хороша» чутливість експоненти в околі свого граничного значення ( $\sup \mu_{Rang} = 1$ ) дозволяє проводити кластеризацію об'єктів для всіх можливих порогових величин  $\mu_{Rang}^*$  проміжку  $[0; 1]$  із певною точністю (наприклад, із точністю 0,01).

Проведемо модифікацію чіткого методу однорівневої кластеризації п. 6 в [11] для використання кутової міри подібності. Проведення кластеризації об'єктів із використанням кутового нечіткого бінарного відношення вимагає визначення векторів-центроїдів умовного кластеру  $U^l$  кроків 2 та 3 однорівневого алгоритму [11]. Для двовимірної задачі кластеризації поняття центроїда близьке до поняття бісектриси найбільшого кута між векторами-градієнтів критеріїв ефективності в межах одного кластеру  $U^l$ . Тому в цьому випадку центроїд можна визначити за формулою:

$$\bar{c}_i^* = \frac{\bar{c}_{i^*} + \bar{c}_{j^*}}{2}, \quad (4)$$

де  $\{i^*, j^*\} \in \arg \min_{i, j \in I^l} \left( \frac{\bar{c}_i}{|\bar{c}_i|} \cdot \frac{\bar{c}_j}{|\bar{c}_j|} \right)$  та  $I^l = \{i \mid \bar{c}_i \in U^l\}$ .

Тобто, центроїд визначає бісектрису найбільшого кута між будь-якими векторами кластеру  $U^l$ .

Для задач більшої розмірності пропонується вектор-центроїд розраховувати, як центр ваги точок, які відповідають ортам векторів-градієнтів в межах одного кластеру  $U^l$ :

$$\bar{c}_i^* = \frac{\sum_{c_i \in U^l} \frac{c_i}{|c_i|}}{\|U^l\|}. \quad (5)$$

Використання  $R^{ang}$  дає можливість проводити кластеризацію кінчними кластерами.

Отже, за чітким однорівневим методом п. 6 в [11], та описаними модифікаціями проводиться кластеризація на чіткі кластери  $K^1, K^2, \dots, K^z, z \leq m$  із відповідними представниками  $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*, \dots, \bar{c}_z^*$  знайденими за формулою (4, 5).

Якщо потрібна інформація не тільки про розподіл критеріїв ефективності по кластерам, а й про ступінь їх приналежності кожному з них, то необхідно провести процедуру фазифікації п. 8 [11].

### 5. Комплексний підхід до структурування множини критеріїв ефективності.

*Крок 1. Нормалізація.* Спочатку необхідно провести нормалізацію часткових критеріїв, оскільки в різних моделях можуть використовуватись локальні критерії оптимальності, які мають різні одиниці вимірювання (гривня, грам, калорії та ін.), і виникає проблема їх співрозмірності. Для її усунення потрібно провести нормалізацію критеріїв до однієї шкали, як правило безрозмірної:

$$\bar{f}_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^{\min}(x)}{f_i^{\max}(x) - f_i^{\min}(x)}.$$

*Крок 2. Кластеризація.* Групуємо цільові функції за ознакою несуперечливих сильно зв'язаних критеріїв. Використаємо метод кластеризації заснований на нечітких бінарних відношеннях [11] та кутову міру схожості (3).

*Крок 3. Зменшення потужності критеріального простору.* Надалі в кожному із утворених кластерів представником кластера обираємо центроїди  $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*, \dots, \bar{c}_z^*$  знайдені за формулою (4, 5). Вони є лінійними згортками критеріїв ефективності, що входять до відповідного кластеру, тому повністю забезпечують виконання умов Парето для оптимальної точки знайденої в подальшому.

**6. Експерименти.** Для проведення експериментів була розроблена комп'ютерна програма, що реалізує запропонований підхід при кластеризації критеріїв ефективності за кутовою мірою подібності (3) на кластери кінчної форми. Вона є доповненням до вже існуючого програмного забезпечення для проведення еліпсоїдної кластеризації [11] та кластеризації концентричними сферами [12].

Вхідною інформацією для проведення групування об'єктів є числові величини  $n, m, \mu_{R^{ang}}^*$  та координати векторів  $\bar{c}_i$ . Далі для чіткої кластеризації застосовується метод однорівневої кластеризації із п. 6 [11], адаптований до використання кутової міри подібності (3).

**7. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Дана робота є розвитком напрямку структурування множини критеріїв ефективності для класу багатокритеріальних задач лінійного програмування із критеріальним простором великої розмірності в умовах коли неможливе або утруднене групування, порівняння чи впорядкування часткових критеріїв ОПР.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в тому, що описано нечітке бінарне відношення та його функцію належності, які характеризують кутову

міру подібності критеріїв ефективності. Модифіковано метод однорівневої кластеризації [10] для використання кутової міри подібності. Представлено комплексний підхід до структурування критеріального простору векторних задач лінійного програмування.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробленому програмному забезпеченні, що реалізує кластеризацію кінчними кластерами. Проведення експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

Перспективні дослідження полягають у розвитку підходу кластеризації методом, що заснований на нечітких бінарних [11] за кутовою мірою подібності (3) для розв'язання інших класів прикладних задач.

Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету «Розробка математичних моделей і методів для оброблення інформації та інтелектуального аналізу даних» (номер державної реєстрації 0115U004630).

### Список використаної літератури

1. Кондрук Н. Э., Маляр Н. Н. Некоторые применения кластеризации критериального пространства для задач выбора. *Компьютерная математика*. 2009. № 2. С. 142–149.
2. Кондрук Н. Е. Системы підтримки прийняття рішень для автоматизованого складання дієт. *Управління розвитком складних систем*. 2015. Вип. 23. С. 92–96.
3. Кондрук Н. Е., Маляр М. М. Застосування багатокритеріальних моделей для задач збалансованого харчування. *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: технічні науки*. 2010. №1, Вип. 1 с. 3–7.
4. Воронин А. М., Зиатдинов Ю. К., Козлов О. І., Чабанюк В. С. Векторная оптимизация динамических систем. / за ред. А. М. Воронина. К.: Техніка, 1999. 284 с.
5. Попов И. А., Мицитис А. К. Системная многокритериальная методология построения компромиссного варианта большой технической системы. Алгоритм. Киев: КИ ВВС, 1996. 70 с.
6. Бочаров Б. П. Формирование векторного критерия оценки качества автоматизированного управления современной библиотекой. *Культура народов Причерноморья*. 2005. № 60, Т.1. С. 31–35. URL: [nbuv.gov.ua/Articles/KultNar/knp100/pdf/100t3/100t](http://nbuv.gov.ua/Articles/KultNar/knp100/pdf/100t3/100t).
7. Заграевский С. В. Применение к рейтингованию художников современных математических методов экспертных оценок. *АРТ-газета*. 1999. URL: <http://zagraevsky.com/math.htm>.
8. Тоценко В. Г. Методы и системы поддержки принятия решений. К: Наук. думка, 2002. 377 с.
9. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. К.: Видавничий дім «Слово», 2006. 816 с.
10. Маляр М. М., Цицика Н. Е. Алгоритм зменшення кількості критеріїв в багатокритеріальній задачі лінійного програмування. *Вісник Київського університету. Серія ф.–м. наук*. 2004. Вип. 2. С. 288–292.
11. Kondruk N. Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Т. 2, № 4 (86). С. 10–16. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>
12. Кондрук Н. Е. Використання довжинної міри подібності в задачах кластеризації. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2018. № 3(46). С. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>.

**Malyar M. M., Kondruk N. E.** Structuring of the criterional space by an angle similarity measure.

Multicriteria decision-making is a particularly hard complex of tasks for a person's information processing system. As a rule, the more the problem model is constructed and reflects the real problem or task that caused it, the more criteria it has to take into account. With this dimension, classical methods of mathematical programming are ineffective. This

necessitates the development of specific methods and approaches designed to structure the criterion space of large dimension problems.

This paper describes a fuzzy binary relation and its belonging function that determine the angular measure of similarity of efficiency criteria. It characterizes the degree of similarity between the vector gradients of the objective functions of the efficiency criteria between them. The one-tier clustering method was modified based on fuzzy binary relations to use the angular similarity measure. This allowed clustering of the criterion space into conical clusters on the basis of similarity - a consistent strong link between the performance criteria.

The complex approach to structuring the criterion space of vector linear programming problems is presented. On the basis of the proposed mathematical apparatus, software was developed that implements clustering with conical clusters. Conducting hands-on experiments has shown its effectiveness in solving certain classes of application tasks. This work is an evolution of the direction of structuring the set of efficiency criteria for a class of multicriteria linear programming problems with a large dimensional criterion space in conditions where it is difficult or impossible to group, compare or order partial criteria, preferably for the decision maker. Prospective research is to develop a proposed clustering approach which is based on method of fuzzy binary angular similarity measures for solving other classes of applied problems.

**Keywords:** clustering, multicriteria optimization, structuring, angular similarity measure, similarity measure.

### Список використаної літератури

1. Kondruk, N. E. , & Malyar, N. N. (2009). Nekotoryie primeneniya klasterizatsii kriterialnogo prostranstva dlya zadach vyibora. *Kompyuternaya matematika*, 2, 142–149 [in Russian].
2. Kondruk, N. E. (2015). Systemy pidtrymky pryiniattia rishen dlia avtomatyzovanooho skladannia diiet. *Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*, 23, 92–96 [in Ukrainian].
3. Kondruk, N. E. & Malyar, M. M. (2010). Zastosuvannia bahatokryterialnykh modelei dlia zadach zbalansovanoho kharchuvannia. *Visnyk Cherkaskoho derzhavnoho tekhnolohichnoho universytetu. Seriya: tekhnichni nauky*, 1(1), 3–7 [in Ukrainian].
4. Voronin, A. M., Ziatdinov, Y. K., Kozlov, O. I, & Chabanyuk, V. S. (1999). In A. M., Voronina (Ed.). *Vektornaya optimizatsiya dinamicheskikh sistem*. Kyiv: Tehnika [in Russian].
5. Popov, I. A. & Mitsitis, A. K. (1996). *Sistemnaya mnogokriterialnaya metodologiya postroeniya kompromissnogo varianta bolshoy tehnichey sistemy*. Algoritm. Kiev: KI VVS [in Russian].
6. Bocharov, B. P. (2005). Formirovanie vektornogo kriteriya otsenki kachestva avtomatizirovannogo upravleniya sovremennoy bibliotekoy. *Kultura narodov Prichernomor'ya*, 60(1), 31–35 [in Russian].
7. Zagraevskiy, S. V. (1999). Primenenie k reytingovaniyu hudozhnikov sovremennykh matematicheskikh metodov ekspertnykh otsenok. *ART-gazeta* [in Russian].
8. Totsenko, V. G. (2002). *Metody i sistemy podderzhki prinyatiya resheniy*. Kyiv: Nauk. dumka [in Russian].
9. Zaichenko, Y. P. (2006). *Doslidzhennia operatsii*. Kyiv: Vydavnychiy dim «Slovo» [in Ukrainian].
10. Maliar, M. M., & Tsytsyka, N. E. (2004). Alhorytm zmenshennia kilkosti kryteriiv v bahatokryterialnii zadachi liniinoho prohramuvannia. *Visnyk Kyivskoho universytetu. Seriya f.-m. nauk*, 2, 288–292 [in Ukrainian].
11. Kondruk, N. (2017). Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4(86)), 10–16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>
12. Kondruk, N. E. (2018) Vykorystannja dovzhynnoi miry podobnosti v zadachah klasteryzacii. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnja*. 3 (46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11> [in Ukrainian].

Одержано 17.01.2020

УДК УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).92-104](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).92-104)**В. В. Поліщук<sup>1</sup>, М. М. Маляр<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
доцент кафедри програмного забезпечення систем,  
кандидат технічних наук  
[volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua](mailto:volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,  
доктор технічних наук  
[mykola.malyar@uzhnu.edu.ua](mailto:mykola.malyar@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

## МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНКИ РІВНЯ РИЗИКУ ФУНКЦІОНУВАННЯ СОЦІО-ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Проведено дослідження актуальної задачі розроблення технології оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень від штатного режиму до катастрофи.

У дослідженні вперше представлено вхідні дані оцінювання функціонування системи гібридним чином, на основі досвіду, знань та міркувань експертів, а також інтелектуальним аналізом даних. Продемонстровано структурну схему оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень.

Вперше запропоновано нечітку математичну модель оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень, згідно покрокового алгоритму, що базується на експертних гібридних даних, з використанням лінгвістичних та кількісних змінних. При цьому, здійснюється агрегування критеріальних оцінок системи функціонування з огляду на міркування особи, що приймає рішення (песимістичний/обережний/середній/оптимістичний сценарії розгортання подій). Згідно порогу можливості функціонування системи відбувається оцінювання ризиків для якості прийняття рішень у різних режимах. В результаті оцінювання системи у різних режимах функціонування, отримуємо кількісну оцінку ризику функціонування системи відносно сценарію розгортання подій, лінгвістичний рівень функціонування системи та рівень прийнятності ризику функціонування системи. Це все дозволяє розкривати невизначеності експертних міркувань та отриманих даних, обґрунтовуючи ступінь прийняття рішення та виводити адекватні висновки, враховуючи режим функціонування системи.

У рамках розробленого дослідження сформульовано логічне висловлювання правила належності лінгвістичних оцінок, матрицю та базу знань визначення прийнятності рівня ризику функціонування системи.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним використанням інтелектуального аналізу знань, системного підходу, теорії нечітких множин та нечіткої логіки, що підтверджується результатами досліджень. Проведене дослідження буде корисним інструментом для підтримки прийняття рішень, щодо створення та менеджменту рішень у різних режимах функціонування системи.

**Ключові слова:** нечіткі знання, режими функціонування системи, COVID-19, рівень ризику, прийняття рішень, інтелектуальний аналіз.

**1. Вступ.** Сьогодні існує велика кількість методів, моделей та засобів для аналізу великих даних, видобування з них знань, прогнозування майбутнього і т.д. Суспільство, поступово переходить від інформаційних технологій до інтелектуального аналізу знань. Все частіше з'являються системи підтримки прийняття

рішень засновані на інтелектуальному аналізу даних. Але більшість з них розроблені для прийняття рішень у безпечному режимі функціонування систем. Для умов, коли система швидко змінює режими від безпечної роботи, надзвичайної ситуації до катастрофи, більшість моделей підтримки прийняття рішень не здатні адекватно оцінювати ситуацію. Доказом цього є робота муніципалітету, регіону, держави в умовах, наприклад, пандемії коронавірусної інфекції (COVID-19). Все частіше спостерігаємо ситуацію, коли влада всього світу приймає рішення для забезпечення життя та здоров'я громадян, що мають хаотичний, подекуди хибні характеристики, хоча спираються на відому статистику та теорію системного аналізу. Це стосується превентивних заходів запобігання поширенню вірусу COVID-19, а також заходів після пандемічного періоду для виводу країн з карантину. Про це свідчить різна послідовність кроків та етапів виводу з карантину у різних країнах, навіть статистично схожих. Однозначно, такі рішення мають прийматись системно, враховуючи кожен елемент функціонування системи.

Кожен муніципалітет, регіон та країна, як окремі соціо-економічні системи мають свою специфіку функціонування. І прийняття загальних рішень, навіть у межах держави призводить до неоптимального результату. Заходи для забезпечення безпеки громадян, що добре працюють у великих містах не оправдовуються для малих міст, або навпаки. А переймання досвіду від інших міст чи держав, без системної імплементації, знову ж таки не дасть результату. Для прийняття тих чи інших рішень, необхідно адекватно оцінити систему функціонування, наприклад міста, враховуючи наявні кількісні показники та міркування експертів щодо їх об'єктивності.

У штатному режимі функціонування системи є необхідність оцінити рівень функціонування системи, для підтримки прийняття рішень з превентивних заходів та попередження позаштатного режиму. Коли оцінюємо рівень функціонування системи у позаштатному режимі, наприклад, пандемії COVID-19, тоді на основі такої оцінки повинен бути прийнятий ефективний сценарій (рішення) спрямований на повернення системи у штатний режим функціонування. І в одному, та в іншому випадку – одна ціль: прийняти оптимальний (ефективний) сценарій для забезпечення високого рівня функціонування системи та недопущення нижчого, існуючого, режиму функціонування, або повернення у штатний режим.

В той момент, коли система переходить із безпечного режиму функціонування до катастрофи, ситуація швидко змінюється, а вхідні дані, що впливають на прийняття рішень менш якісніші і приймають все більше нечіткий характер. На прийняття рішення значну роль відіграють наступні фактори: вхідні дані; особа, що приймає рішення (ОПР); режим системи у якій приймається рішення; ризику, що супроводжують те чи інше рішення та впливають на сценарій. Всі ці фактори взаємозалежні та позначаються на якість прийняття рішення. Будь-яка надзвичайна подія (наприклад, пандемія COVID-19) або катастрофа є кінцевим результатом послідовного переходу штатного режиму функціонування системи, відповідно в надзвичайну або катастрофічну ситуацію [1].

Проблему сьогоденних інтелектуальних систем, в умовах пандемії COVID-19, вбачаємо у підході опрацювання даних. Правильне рішення не можна прийняти, коли отримані кількісні дані нечіткі, або зовсім не відповідають дійсності.

Прогнозування ситуації, навіть на дуже швидких та адекватних алгоритмах (нейро-нечітких мереж, кореляційному аналізі, добування знань та машинне навчання), за режиму функціонування системи в позаштатному режимі, не будуть давати адекватних результатів. Крім цього, не завжди такі інтелектуальні системи враховують в опрацюванні вхідних даних думки, досвід та знання експертів, що можуть об'єктивно оцінити ситуацію. Часто за все, на кінцевому етапі відбувається врахування думок експертів для прийняття рішень.

В такому випадку, для адекватного оцінювання функціонування системи та в подальшому якісного прийняття рішення, необхідно наступне:

- 1) розкривати нечіткість у кількісних вхідних даних для прийняття рішень;
- 2) для вхідних показників оцінювання враховувати міркування, досвід та знання експертів, що покращать якість вхідних даних для подальшого обчислення;
- 3) дати можливість особі, що приймає рішення отримувати оцінки відносно сценарію розгортання подій;
- 4) проводити оцінювання враховуючи режим функціонування системи: від безпечного режиму до катастрофи;
- 5) враховувати ризики прийнятого рішення.

З огляду, на викладене вище, постає актуальна задача розробки технології оцінювання функціонування системи (об'єкту досліджень) стосовно її рівня ризику, для підтримки прийняття якісного рішення від штатного режиму до катастрофи.

**2. Огляд літератури.** Оцінка ризику менеджменту будь-якої соціо-економічної системи залежить від поглядів керівництва на поняття небезпеки, його схильності до ризику, емоційного стану та ін. Вибір варіанту поведінки – це результат взаємодії зовнішніх факторів, особливостей та думок ОПР. Цей вибір має передумову в системі особистісних якостей ОПР, до яких належать його світогляд, досвід, знання, а також особливості внутрішньої системи морального і соціального контролю, зокрема і правосвідомості [2]. Тому при розгляді альтернативних варіантів менеджменту рішень, у будь-якій системі функціонування, необхідно розглядати, як мінімум оптимістичний, обережний, середній та песимістичний сценарії розгортання подій. Отже, суб'єктивною причиною існування ризику є прийняття рішення ОПР. Крім цього, існують деякі обставини, що під час системи функціонування приводять до нестандартних, ризикових ситуацій [1].

Ризик – категорія соціальна, оскільки він виникає в процесі осмисленого прийняття рішення, що притаманне тільки людині. Ризик прямо залежить від невизначеності, а тому для зменшення ризику необхідно мінімізувати невизначеності. Для цього, у нашому дослідженні використовуємо теорію нечітких множин та нечіткої логіки. Неодноразово науково доведено [3], що дана теорія може адекватно розкривати невизначеність даних та знань, і найкраще підходить для підтримки прийняття рішень в умовах ризику.

В період отримання та обробки інтелектуальних знань, постає задача формалізації думок експертів щодо об'єкту дослідження. Відсутні універсальні способи перетворення дослідних людських експертних знань у базу знань систем нечіткого виведення. Системи нечіткого виведення можуть використовувати людські експертні знання та виконувати нечітке виведення для отримання вихідної оцінки [4-5].

Крім цього, у нашому дослідженні використовуються експертні відомості, що відображають змістовні особливості досліджуваних систем функціонування і задаються на природній мові. Опис у такому випадку носить нечіткий характер, а для відображення знань про об'єкт дослідження та для зменшення ризику доцільно використовувати теорію нечітких множин [6-7]. Для грамотного оцінювання ризику, необхідно навчитися науково моделювати інформаційну невизначеність, проводячи формально описані межі між достовірними знаннями, знаннями з певним рівнем достовірності та тим чого не знаємо [8]. Для цього з метою моделювання невизначеності у роботі застосовується нечітко-множинні описи та нечіткі логічні виводи [3]. Наприклад, у роботах [9-10] розглянуті загальні ідеї та переваги, на яких базуються сучасні погляди щодо використання нечіткої логіки в системах підтримки прийняття рішень. У працях [11-12] представлено використання нечіткої логіки в різних сферах застосування, що дає змогу визначення оптимальних параметрів за умов невизначеності вхідних даних. У роботі [13] чітко окреслено і введено основи видобутку даних та у роботі [14] розглядаються питання видобутку даних з точки зору статистики. А у роботах [1, 15] науково обґрунтовано переваги дослідження складних об'єктів функціонування в різних режимах та системного аналізу.

Актуальність даного дослідження доводиться значними світовими дослідженнями, науковими публікаціями та його необхідністю в умовах пандемії COVID-19. Наведене вище, аргументує та підтверджує актуальність нашого дослідження із застосування інтелектуального аналізу, системного підходу, опрацювання нечітких даних та застосування нечіткого виведення для розроблення технології оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень від штатного режиму до катастрофи.

**3. Матеріали та методи.** Розглянемо для оцінювання деяку систему функціонування  $S$ . На її основі потрібно оцінити рівень функціонування системи для якісного прийняття рішень в залежності від режимів  $C$ : штатний режим, позаштатна ситуація, критична ситуація, надзвичайна ситуація (пандемія COVID-19) [16-17], аварійна ситуація, аварія, катастрофічна ситуація, катастрофа.

Нехай маємо множину критеріїв, згідно яких будемо оцінювати систему функціонування  $S: K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ . Пропонується оцінювання показників гібридним чином, на основі досвіду експертів для системи функціонування та методами інтелектуального аналізу кількісних даних.

Кожен показник системи функціонування оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної. Терм-множину лінгвістичних змінних представимо, як рівень ситуації в системі функціонування описану критерієм  $K$ . Пропонується наступна терм-множина  $T = \{T_1; T_2; T_3; T_4; T_5\}$ , де:  $T_1$  – «низький рівень»;  $T_2$  – «рівень нижче середнього»;  $T_3$  – «середній рівень»;  $T_4$  – «рівень вище середнього»;  $T_5$  – «високий рівень».



З іншого боку, для кожного критерію отримуємо кількісну оцінку, в межах аналізу „Big data“. В залежності від типу даних, їх структури, періодичності отримання, суб'єктивізму отримання та інших характеристик, досліджується та будується функція належності [18] окремо для кожного критерію. Це дозволить порівнювати отримані оцінки, шляхом переведення у нормовану шкалу, розкрити нечіткість та невизначеність отриманих даних, що підвищить якість прийняття рішень, зроблених з використанням інтелектуального аналізу таких даних. В результаті, для кожного критерію отримаємо кількісну оцінку ситуації  $q$  з інтервалу  $[0; 1]$ , для прийняття рішень.

Вхідні дані, оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень наступні:  $t_i$  – змінна з терм-множини  $T$  для  $i$ -го критерію;  $q_i$  – кількісна оцінка з інтервалу  $[0; 1]$ ,  $i$ -го критерію,  $i = \overline{1, m}$ .

Формально представимо нечітку модель оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень відносно режимів:

$$A(t; q; M; C) \rightarrow R(\mu; L; Y), \quad (1)$$

$A$  – оператор, що ставить у відповідність множину вихідних значень  $R$ , при вхідних змінних  $t; q; M; C$ . Вхідними даними моделі є:  $t$  – експертний показник рівня ситуацій в системі функціонування;  $q$  – кількісна оцінка ситуації;  $M$  – врахування міркування ОПР щодо сценарію розгортання подій;  $C$  – режим функціонування системи. На виході моделі оцінювання маємо:  $\mu$  – оцінка ризику для якості прийняття рішень ОПР;  $L$  – лінгвістичне трактування рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень;  $Y$  – прийнятний рівень ризику функціонування системи  $Y = Z(L, M, C)$ .

Рівень функціонування системи – тривалість періоду функціонування систем у деякому режимі  $C$ , упродовж якого оцінка ризику та рівень функціонування системи внаслідок можливого впливу факторів ризику не перевищують апріорно заданий поріг можливості функціонування системи [1].

Модель отримання прийнятного рівня функціонування системи представимо наступним чином. Оскільки ризик, у загальному випадку, може бути прийнятний або неприйнятний, тоді вихідні дані будуть формулювати логічне висловлювання в залежності від рівня функціонування системи  $Y = \{\text{прийнятний; неприйнятний}\}$ .

Нехай в моделі представлено лінгвістичне трактування п'яти рівнів функціонування системи  $L = \{vls; ls; as; hs; vhs\}$ , де:  $vls$  – дуже низький рівень функціонування системи;  $ls$  – низький рівень функціонування системи;  $as$  – середній рівень функціонування системи;  $hs$  – високий рівень функціонування системи;  $vhs$  – дуже високий рівень функціонування системи.

Пропонується, на основі міркування ОПР, можливість отримувати оцінки відносно чотирьох сценаріїв розгортання подій  $M = \{M_1; M_2; M_3; M_4\}$ , де:  $M_1$  – песимістичний сценарій розгортання подій;  $M_2$  – обережний сценарій розгортання подій;  $M_3$  – середній сценарій розгортання подій;  $M_4$  – оптимістичний сценарій розгортання подій.

Припустимо, що існує вісім станів функціонування системи  $C = (C_1, C_2, \dots, C_8)$ , де:  $C_1$  – штатний режим,  $C_2$  – позаштатна ситуація,  $C_3$  – критична ситуація,  $C_4$  – надзвичайна ситуація,  $C_5$  – аварійна ситуація,  $C_6$  – аварія,  $C_7$  – катастрофічна ситуація,  $C_8$  – катастрофа.

Тоді аналізується об'єкт із трьома входами та одним виходом:

$$Y = Z(L, M, C), \quad (2)$$

де  $Y$  – прийнятний рівень ризику функціонування системи,  $L, M, C$  – вхідні лінгвістичні оцінки.  $Z$  – оператор, що ставить у відповідність вихідну змінну  $Y$ , при вхідних змінних  $L, M, C$  (правило логічного виводу).

Пропонується побудова матриці знань наступним чином. Матриця знань [9] прийнятного рівня функціонування системи – це матриця розмірності  $160 \times 4$  ( $160 = 5 * 4 * 8$ ), де кожний рядок є певною комбінацією значень вхідних змінних, для якої, ОПР вказує одне із можливих значень вихідної змінної. Матриця знань визначає систему логічних висловлювань – “Якщо, Тоді, Інакше”, які пов'язують значення вхідних змінних  $L, M, C$  з одним із можливих значень рівнем ризику функціонування системи  $Y = \{\text{прийнятний}; \text{неприйнятний}\}$ .

Далі експерт, чи група експертів, для кожного рівня прийнятного ризику функціонування системи  $Y$  будує правила належності вхідних лінгвістичних оцінок:

**ЯКЩО** у штатному режимі ( $C_1$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче середнього ( $as$ ) для всіх ( $M_1, M_2, M_3, M_4$ ) міркувань ОПР;

**АБО** у позаштатній ситуації ( $C_2$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче високого ( $hs$ ) для ( $M_4$ ) міркувань ОПР, а для інших ( $M_1, M_2, M_3$ ) міркувань ОПР не нижче середнього ( $as$ );

**АБО** у критичній ситуації ( $C_3$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче високого ( $hs$ ) для ( $M_3, M_4$ ) міркувань ОПР, а для інших ( $M_1, M_2$ ) міркувань ОПР не нижче середнього ( $as$ );

**АБО** у надзвичайній ситуації ( $C_4$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче високого ( $hs$ ) для ( $M_2, M_3, M_4$ ) міркувань ОПР, а для ( $M_1$ ) міркувань ОПР не нижче середнього ( $as$ );

**АБО** у аварійній ситуації ( $C_5$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче високого ( $hs$ ) для всіх ( $M_1, M_2, M_3, M_4$ ) міркувань ОПР;

**АБО** у аварії ( $C_6$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче дуже високого ( $vhs$ ) для ( $M_4$ ) міркувань ОПР, а для інших ( $M_1, M_2, M_3$ ) міркувань ОПР не нижче високого ( $hs$ );

**АБО** у катастрофічній ситуації ( $C_7$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче дуже високого ( $vhs$ ) для ( $M_3, M_4$ ) міркувань ОПР, а для інших ( $M_1, M_2$ ) міркувань ОПР не нижче високого ( $hs$ );

**АБО** у катастрофі ( $C_8$ ) оцінюваний рівень функціонування системи не нижче дуже високого ( $vhs$ ) для ( $M_2, M_3, M_4$ ) міркувань ОПР, а для ( $M_1$ ) міркувань ОПР не нижче високого ( $hs$ );

**ТОДІ** рівень ризику функціонування системи  $Y = \{\text{прийнятний}\}$ ;

**ІНАКШЕ** рівень ризику функціонування системи  $Y = \{\text{неприйнятний}\}$ .

База знань визначення прийнятності рівня ризику функціонування системи зображена на рис.1.

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	1
<i>as</i>	1	1	1	1
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>1</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	1
<i>as</i>	1	1	1	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>2</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	1
<i>as</i>	1	1	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>3</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	1
<i>as</i>	1	0	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>4</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	1
<i>as</i>	0	0	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>5</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	1	0
<i>as</i>	0	0	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>6</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	1	0	0
<i>as</i>	0	0	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>7</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

<i>vhs</i>	1	1	1	1
<i>hs</i>	1	0	0	0
<i>as</i>	0	0	0	0
<i>ls</i>	0	0	0	0
<i>vls</i>	0	0	0	0
C <sub>8</sub>	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>	M <sub>3</sub>	M <sub>4</sub>

Рис. 1. База знань визначення прийнятності рівня ризику функціонування системи (позначення: 1 – прийнятний, 0 - неприйнятний).

Розв'язок даної задачі можемо наглядно продемонструвати у вигляді структурної схеми оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень у різних режимах функціонування (рис. 2.).



Рис. 2. Структурна схема оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень.

Опишемо нечітку математичну модель розв'язання задачі, згідно наступного алгоритму.

**1 крок.** Фазифікація вхідних гібридних даних системи функціонування.

На першому кроці виконається операція фазифікації вхідних гібридних даних. Для цього кожному вхідному значенню ( $t_i; q_i$ ) ставиться у відповідність значення функції належності  $\mu(t_i)$ . Необхідно побудувати правила належності, щоб отримати нормовану оцінку вхідних даних.

Нехай терм-множина лінгвістичних змінних  $T = \{T_1; T_2; T_3; T_4; T_5\}$  представлена на деякому числовому проміжку, для розмежування термів  $[a_1; a_6]$ , де  $T_1 \in [a_1; a_2]$ ,  $T_2 \in [a_2; a_3]$ ,  $T_3 \in [a_3; a_4]$ ,  $T_4 \in [a_4; a_5]$ ,  $T_5 \in [a_5; a_6]$ . Значення розбит-

тя проміжків можуть налаштуватися та змінюватись, у процесі використання реальних даних системи функціонування.

Обчислюються критеріальні оцінки  $O_i$ , використовуючи лінгвістичні змінні  $T$ , кількісні оцінки  $q$  та значення розбиття проміжків  $[a_1; a_6]$ , за допомогою наступної характеристичної функції:

$$O_i = \begin{cases} a_2 \cdot q_i, & \text{якщо } t_i \in T_1; \\ a_3 \cdot q_i, & \text{якщо } t_i \in T_2; \\ a_4 \cdot q_i, & \text{якщо } t_i \in T_3; \\ a_5 \cdot q_i, & \text{якщо } t_i \in T_4; \\ a_6 \cdot q_i, & \text{якщо } t_i \in T_5. \end{cases} \quad i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Це дасть можливість об'єднати кількісні оцінки та думки експертів. В результаті, отримується об'єктивна оцінка щодо функціонування системи, а це призведе до підвищення ступеня якості прийняття рішень.

Для порівняння даних необхідно нормувати отримані оцінки [6]. Не зменшуючи загальності, представимо правило належності за допомогою S-подібної функції належності, або іншої подібного типу [11]:

$$\mu(O_i) = \begin{cases} 0, & O_i \leq a_1 \\ 2 \left( \frac{O_i - a_1}{a_6 - a_1} \right)^2, & a_1 < O_i \leq \frac{a_1 + a_6}{2} \\ 1 - 2 \left( \frac{a_6 - O_i}{a_6 - a_1} \right)^2, & \frac{a_1 + a_6}{2} < O_i < a_6 \\ 1, & O_i \geq a_6 \end{cases} \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Побудована у такий спосіб функція належності говорить про те, що отримане значення  $\mu(O_i)$  буде прямувати до 1, у тому випадку, якщо високий рівень функціонування системи і кількісна оцінка ситуації буде прямувати до 1.

Отже, на першому кроці, розкривається суб'єктивність експертних думок і здійснюється перехід від нечітких експертних лінгвістичних та кількісних оцінок, до нормованих і порівнюваних.

**2 крок.** Агрегування оцінки системи функціонування з огляду на міркування ОПР.

Нехай ОПР за кожним критерієм системи функціонування може задати вагові коефіцієнти  $v_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , з деякого інтервалу  $[1; 10]$ . В іншому випадку, критерії можуть бути рівно важливими і відповідно нормовані вагові коефіцієнти визначаються [6]:

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^m v_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Далі будується функція належності, як одна із запропонованих згорток [3], в залежності від психосоматичного настрою ОПР, щодо розгортання подій:

$$M_1(S) = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\mu(O_i)}} - \text{песимістичний сценарій розгортання подій}; \quad (6)$$

$$M_2(S) = \prod_{i=1}^m (\mu(O_i))^{w_i} - \text{обережний сценарій розгортання подій}; \quad (7)$$

$$M_3(S) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \mu(O_i) - \text{середній сценарій розгортання подій}; \quad (8)$$

$$M_4(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^m w_i (\mu(O_i))^2} - \text{оптимістичний сценарій розгортання подій}. \quad (9)$$

де  $w_i (i = \overline{1, m})$  нормовані вагові коефіцієнти для кожного критерію.

Між ними існує наступна субординація [3]:  $M_1(S) \leq M_2(S) \leq M_3(S) \leq M_4(S)$ .

**3 крок.** Проектування сценарію розгортання подій на «тренд ризику».

На цьому кроці потрібно побудувати функцію належності, що утворює наступну залежність: чим більша агрегована оцінка системи функціонування, тим менший ризик. З огляду на це, розглянемо залежність у вигляді лінійної Z-подібної функції належності [7], яку назвемо «тренд ризику»:

$$M_g(S) = \begin{cases} 1, & R_g < a; \\ \frac{b-R_g}{b-a}, & a \leq R_g \leq b; \\ 0, & R_g > b, \end{cases} \quad (10)$$

де  $a, b$  числові значення. Оскільки оцінюємо ризик, тоді природньо розглядати ризик у відсотковій шкалі:  $a=0, b=100$ . Наприклад, коли йде мова про ризик у 100 % асоціативно розуміється максимально критичний ризик. Так-як, значення функції належності  $M_g(S)$  ( $g = \overline{1, 4}$ ) відомі та ризик розглядаємо у відсотковій шкалі, тоді виразимо  $R_g$ , з формули (10):

$$R_g = 100(1 - M_g(S)), \quad g = \overline{1, 4}. \quad (11)$$

Отримані значення  $R_g$  – це оцінка проєкції «тренду ризику» на агреговану оцінку системи функціонування щодо підтримки прийняття якісного рішення, з огляду на міркування ОПР.

**4 крок.** Оцінювання ризику у різних режимах функціонування системи.

Нехай маємо режими функціонування системи  $C = (C_1, C_2, \dots, C_8)$ . З наростанням надзвичайної ситуації, швидко змінюються величини, що впливають на стійкість функціонування будь-якої системи. Це однозначно впливає на збільшення ризику прийняття рішень. Для цього введемо поняття деяких апріорно заданих допустимих значень – «поріг можливості функціонування системи».

Для того, щоб адекватно інтерпретувати залежність ризику для якості прийняття рішень відносно режимів функціонування системи, пропонується наступна функція:

$$\mu(R_g) = 1 - \begin{cases} 0, & R_g < 0; \\ \left(\frac{R_g}{100}\right)^k, & 0 \leq R_g \leq 100; \\ 1, & R_g > 100, \end{cases} \quad (12)$$

де  $k$  – поріг можливості функціонування системи. Значення даного порогу змінюється в залежності від режимів, в якому ОПР потрібно приймати рішення. Експериментально поставимо:  $k = \frac{11}{9}$  для штатного режиму  $C_1$ ;  $k = \frac{7}{9}$  для позаштатної ситуації  $C_2$ ;  $k = \frac{2}{3}$  для критичної ситуації  $C_3$ ;  $k = \frac{5}{9}$  для надзвичайної ситуації  $C_4$ ;  $k = \frac{4}{9}$  для аварійної ситуації  $C_5$ ;  $k = \frac{1}{3}$  для аварії  $C_6$ ;

$k = \frac{2}{9}$  для катастрофічної ситуації  $C_7$ ;  $k = \frac{1}{9}$  для катастрофи  $C_8$ . Тоді за формулою (12) отримуємо оцінку ризику у різних режимах функціонування системи  $\mu_{C_1}(R_g), \mu_{C_2}(R_g), \dots, \mu_{C_8}(R_g)$ ,  $g = \overline{1, 4}$ .

Отже, отримані значення – це оцінки ризику функціонування системи для якості прийняття рішень за  $g$ -м міркуванням ОПР щодо сценарію розгортання подій у відповідному режимі функціонування системи.

**5 крок.** Визначення рівня функціонування системи та дефазифікація даних для отримання прийнятного рівня ризику.

За отриманими значеннями оцінки ризику  $\mu_C(R_g)$ ,  $g = \overline{1, 4}$  представимо лінгвістичне трактування рівня функціонування системи, з множини  $L$  для підтримки прийняття якісного рішення:  $\mu_C(R_g) \in [0; 0, 2)$  – *vls*: дуже низький рівень функціонування системи;  $\mu_C(R_g) \in [0, 2; 0, 4)$  – *ls*: низький рівень функціонування системи;  $\mu_C(R_g) \in [0, 4; 0, 6)$  – *as*: середній рівень функціонування системи;  $\mu_C(R_g) \in [0, 6; 0, 8)$  – *hs*: високий рівень функціонування системи;  $\mu_C(R_g) \in [0, 8; 1]$  – *vhs*: дуже високий рівень функціонування системи.

Рівень функціонування системи отримується на основі оцінки ризику, тому це можемо розглядати, як розмір збитків від небажаних наслідків впливу будь-яких факторів та менеджменту прийняття рішень у процесі функціонування системи.

Дефазифікацію даних здійснимо на основі представленого правила належності та матриці знань прийнятного рівня ризику функціонування системи. В результаті отримуємо  $Y$  – рівень прийнятності ризику функціонування системи.

В процесі оцінювання системи  $S$  у режимах функціонування  $C = (C_1, C_2, \dots, C_8)$  отримуємо:  $\mu_C(R_g)$  – оцінки ризику функціонування системи відносно сценарію розгортання подій у різних режимах  $C$ ;  $L$  – рівень ризику функціонування системи;  $Y$  – рівень прийнятності ризику функціонування системи.

**4. Обговорення.** Для отримання максимально-корисної інформації з оцінювання, необхідно створити інтелектуальну систему обробки даних, побудов функцій належності щодо змісту, окремо для кожного критерію. Таким чином, для якісного порівняння даних, розмежування термів необхідно проводити для кожного показника окремо, оскільки різні показники несуть у собі свій числовий зміст. Крім цього, не можна використовувати якусь абсолютну оцінку, що є абстрактним поняттям оскільки це не дасть ніякого практичного результату.

Якщо система  $S$  складається із множини підсистем  $S_1, S_2, \dots, S_n$  тоді оцінюємо кожну підсистему окремо, а для агрегування результуючих даних можемо скористатись одним із методів [6, 12]. Для визначення компетентної групи експертів для якісного оцінювання вхідних даних можна використати підходи описані в [19-20]. Для якісного отримання вхідних кількісних оцінок та інтелектуального аналізу даних (знань) з використанням теорії нечітких множин, функцій належності та системного підходу можна використати моделі описані в [6-7].

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Проведено дослідження актуальної задачі розроблення технології оцінювання рівня функціонування системи для підтримки прийняття рішень від штатного режиму до катастрофи.

Раціональність отриманих оцінок ризику, рівня функціонування системи та рівня прийнятності ризику, для якості прийняття рішень у різних режимах функціонування, доводить переваги розробленої моделі. Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним використанням інтелектуального аналізу знань, системного підходу, теорії нечітких множин та нечіткої логіки, що підтверджується результатами досліджень.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо: у розроблені інформаційних моделей представлення нечітких знань із застосування апарату нечітких множин та функцій належності для запропонованих прикладних задач. Проведене дослідження буде корисним інструментом для підтримки прийняття рішень, щодо створення та менеджменту рішень у різних режимах функціонування системи.

### Список використаної літератури

1. Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Основы системного анализа. К.: Видавнича група ВНУ, 2007. 544 с.
2. Кудрявцев В.Н. Право и поведение. Москва: Юридическая литература, 1978. 191 с.
3. Зайченко Ю.П. Нечіткі моделі і методи в інтелектуальних системах: навчальний посібник. Київ: Слово, 2008. 344 с.
4. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Москва: Мир, 1976. 167 с.
5. Ротштейн О.П. Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі. Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця. 1999. 320 с.
6. Волошин О.Ф., Маляр М.М., Поліщук В.В., Шаркаді М.М. Інформаційне моделювання нечітких знань. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2018. 2018/4. С. 84-95. DOI 10.15588/1607-3274-2018-4-8
7. Polishchuk V., Voloshyn O., Malyar M., Sharkadi M. *Fuzzy mathematical modeling financial risks*: IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), 21-25 August 2018. Lviv, 2018. pp. 65-69. DOI: 10.1109/DSMP.2018.8478604
8. Polishchuk V., Kelemen M., Kozuba J. Technology improving safety of crowdfunding platforms functioning in the context of the protection of the start-up investors in the financial and transport sectors. *KONBIN*. 2019, 49, pp. 313–330. DOI: doi.org/10.2478/jok-2019-0016
9. Снитюк В.Е. Эволюционные технологии принятия решений в условиях неопределенности. К: «МПІ Леся», 2015. 347 с.
10. Kuts A.M. Method of presentation of expert information by means of fuzzy logic and obtaining the group assessment of expert opinions. *Technol. Audit Prod. Reserv.* 2015. 2. pp. 17–21.
11. Polishchuk V., Kelemen M., Gavurová B., Varotsos C., Andoga R., Gera M., Christodoulakis J., Soušek R., Kozuba J., Hospodka J., Blišťan P., Szabo Jr. S. A Fuzzy Model of Risk Assessment for Environmental Start-up Projects in the Air Transport Sector. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2019. 16. 3573. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193573>
12. Kelemen M., Polishchuk V., Gavurová B., Szabo S., Rozenberg R., Gera M., Kozuba J., Hospodka J., Andoga R., Divoková A., Blišťan P. Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health* 2019. 16. 3585. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193585>
13. Tan P.-N., Steinbach M., Kumar V. Introduction to Data Mining. New York: Addison-Wesley, Upper Saddle River, 2005. 365 p.
14. Gaber M. M. Scientific Data Mining and Knowledge Discovery – Principles and Foundations. New York: Springer, 2010. 400 p. DOI: 10.1007/978-3-642-02788-8.
15. Згуровський М.З. Сценарний аналіз як системна методологія передбачення. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2002. № 1. С. 7–38.

16. World Economic Forum. (2020). COVID-19. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.weforum.org/agenda/archive/covid-19>.
17. Dhiman Nitesh, Sharma M. Fuzzy Logic Inference System for Identification and Prevention of Coronavirus (COVID-19). *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)*. 2020. 9. pp. 2278-3075. DOI: 10.35940/ijitee.F4642.049620.
18. Zgurovsky M., Zaychenko Yu. Big Data: Conceptual Analysis and Applications. New York: Springer, 2020.
19. Kelemen M., Jevčák J., Andoga R. *Security Management Education and Training of Critical Infrastructure Sectors' Experts: the 13th International Scientific Conference Proceedings New Trends in Aviation Development*. 2018. pp. 68-71.
20. Kelemen M., Polishchuk V. *Information Model of Evaluation and Output Rating of Start-up Projects Development Teams: Proceedings of the Second International Workshop on CMIS-2019, CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353, 2019*. pp. 674-688.

**Polishchuk V. V., Malyar M. M.** Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning.

The research of the actual task of developing the technology of assessing the level of functioning of the system to support decision making from the regular mode to the disaster.

For the first time, the study presents inputs for assessing the functioning of the system in a hybrid manner, based on the experience, knowledge and expertise of experts, as well as data mining. A block diagram of the assessment of the level of functioning of the system to support decision making is demonstrated.

For the first time, a fuzzy mathematical model for evaluating the level of functioning of a system to support decision-making is proposed, according to a step-by-step algorithm based on expert hybrid data, using linguistic and quantitative variables. In doing so, the criterion estimates of the functioning system are aggregated based on the decision maker's judgment (pessimistic / cautious / average / optimistic scenarios). According to the threshold of possibility of functioning of system there is a risk assessment for quality of decision-making in different modes. As a result of evaluating the system in different modes of operation, we obtain a quantitative assessment of the risk of system functioning relative to the scenario of the event deployment, the linguistic level of system functioning and the level of risk acceptance of the system functioning. All this allows to reveal uncertainties of expert opinions and data obtained, substantiate the degree of decision-making and draw adequate conclusions, taking into account the mode of operation of the system.

Within the framework of the developed research, a logical statement of the rule of belonging of linguistic assessments, matrix and knowledge base of determining the acceptability of the level of risk of functioning of the system is formulated.

The validity of the obtained results is ensured by the correct use of intellectual knowledge analysis, systematic approach, fuzzy set theory and fuzzy logic, which is confirmed by the research results. The research conducted will be a useful tool to support decision-making, to create and manage decisions in different modes of system operation.

**Keywords:** fuzzy knowledge, operating modes of the system, COVID-19, risk level, decision making, intellectual analysis.

## References

1. Zhurovskyy, M.Z., & Pankratova, N.D. (2007). *Osnovy systemnoho analizu*. Kiev: Vydavnycha hrupa VNV. [in Ukrainian].
2. Kudryavtsev, V.N. (1978). *Pravo i povedeniye*. Moskva: Yuridicheskaya literatura. [in Russia].
3. Zaychenko, YU.P. (2008) *Nechetkiye modeli i metody v intellektualnykh sistemakh: ucheb. posobiye*. Kiev: Slovo. [in Ukrainian].
4. Zade, L. (1976). *Ponyatiye lingvisticheskoy peremennoy i yego primeneniye k prinyatiyu priblizhennykh resheniy*. Moscow: Mir. [in Russia].
5. Rotshteyn, O.P. (1999). *Intelektualni tekhnolohiyi identyfikatsiyi: nechitki mnozhyny, henetychni alhorytmy, neyronni merezhi*. Vinnytsya: UNIVERSUM. [in Ukrainian].
6. Polishchuk, V.V., Malyar M.M., Voloshyn O.F. & Sharkadi M.M. (2018). *Informatsiye*



- modelyuvannya nechitkykh znan. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2018/4.84-95. DOI:10.15588/1607-3274-2018-4-8 [in Ukrainian].
7. Polishchuk, V., Voloshyn, O., Malyar, M., & Sharkadi, M. (2018). *Fuzzy mathematical modeling financial risks*: IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), 21-25 August 2018. (pp. 65-69). Lviv. DOI: 10.1109/DSMP.2018.8478604 [in English].
  8. Polishchuk, V., Kelemen, M., & Kozuba J. (2019). Technology improving safety of crowdfunding platforms functioning in the context of the protection of the start-up investors in the financial and transport sectors. *KONBIN*. 49 313–330. DOI: doi.org/10.2478/jok-2019-0016 [in English].
  9. Snityuk, V.Ye. (2015). Evolyutsionnyye tekhnologii prinyatiya resheniy v usloviyakh neopredelennosti. *Kiev: MP Lesya*. [in Russian].
  10. Kuts, A.M. (2015). Method of presentation of expert information by means of fuzzy logic and obtaining the group assessment of expert opinions. *Technol. Audit Prod. Reserv.* 2. 17–21. [in English].
  11. Polishchuk, V., Kelemen, M., Gavurová, B., Varotsos, C., Andoga, R., Gera, M., Christodoulakis, J., Soušek, R., Kozuba, J., Hospodka, J., Blišťan, P., & Szabo, Jr. S. (2019). A Fuzzy Model of Risk Assessment for Environmental Start-up Projects in the Air Transport Sector. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 16. 3573. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193573> [in English].
  12. Kelemen, M., Polishchuk, V., Gavurová, B., Szabo, S., Rozenberg, R., Gera, M., Kozuba, J., Hospodka, J., Andoga, R., Divoková, A., & Blišťan, P. (2019). Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 16. 3585. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193585> [in English].
  13. Tan, P.-N., Steinbach, M., & Kumar, V. (2005). Introduction to Data Mining. *New York: Addison-Wesley, Upper Saddle River*. [in English].
  14. Gaber, M.M. (2010). Scientific Data Mining and Knowledge Discovery – Principles and Foundations. *New York: Springer*. DOI: 10.1007/978-3-642-02788-8.
  15. Zhurovsky, M.Z. (2002). Stsenarnyy analiz yak systemna metodolohiya peredbachennya. *Systemni doslidzhennya ta informatsiyni tekhnolohiyi*. № 1. 7-38. [in Ukrainian].
  16. World Economic Forum. (2020). COVID-19. Retrieved from: <https://www.weforum.org/agenda/archive/covid-19>.
  17. Dhiman Nitesh, & Sharma, M. (2020). Fuzzy Logic Inference System for Identification and Prevention of Coronavirus (COVID-19). *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE)*. 9. 2278-3075. DOI: 10.35940/ijitee.F4642.049620. [in English].
  18. Zgurovsky, M., & Zaychenko Yu. (2020). Big Data: Conceptual Analysis and Applications. *New York: Springer*. [in English].
  19. Kelemen, M., Jevčák, J., & Andoga, R. (2018). *Security Management Education and Training of Critical Infrastructure Sectors' Experts*: the 13th International Scientific Conference Proceedings New Trends in Aviation Development. (pp. 68-71). [in English].
  20. Kelemen, M., & Polishchuk, V. (2019). *Information Model of Evaluation and Output Rating of Start-up Projects Development Teams*: Proceedings of the Second International Workshop on CMIS-2019, CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353, (pp. 674-688). [in English].

Одержано 17.04.2020

UDC 338.33

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).105-111](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).105-111)**Y. Selyutin<sup>1</sup>, I. Kozin<sup>2</sup>**<sup>1</sup> Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya,

Post-graduate student

wizz92@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5458-9880><sup>2</sup> Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya,

The professor of the Economic Cybernetics Department,

Doctor of Physics and Math Science

ainc00@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1278-8520>

## COMPARATIVE EFFECTIVENESS OF METAHEURISTIC METHODS

The essence of metaheuristic methods and conditions of their application are considered, in particular, limited amount of knowledge and availability of some candidate for optimality. The formal statement of the traveling salesman problem and its solution are presented with 4 algorithms: genetic, annealing, Lin-Kernigan and the method of jumping frogs.

The advantages and disadvantages of the annealing algorithm are analyzed. A parallel is drawn between the annealing algorithm and the gradient methods. The set tasks of the salesman in the parameters of the genetic algorithm. The principles of operation of the jumping frog method and the Lin-Kernigan algorithm are given.

To perform the experiment, a database of random data was generated that formed a  $1000 \times 1000$  dimension problem with a known exact solution. For the conclusions on the effectiveness of the methods, the rate of convergence of the task was estimated with the maximum approximation to the global extremum and the standard deviation from the exact solution. The genetic algorithm was found to perform best under the given conditions. The further application of the jumping frog algorithm for optimization problems, implemented with a large number of iterations, is promising. One of the ways of using the jumping frog algorithm is the task of placing production.

**Keywords:** discrete optimization, metaheuristics, genetic algorithm, jumping frog algorithm, leap frog method, annealing method, Lin-Kernighan algorithm.

**1. Introduction.** The essence of metaheuristic methods is often difficult to understand precisely because of the specifics of the term itself. Metaheurism is not a heuristic for heuristics as it might seem due to the meta part, it is in some way a black box optimization. Black box optimization is also close to the term “stochastic optimization”. Algorithms use some degree of randomness when searching for the most optimal solutions to complex problems.

In order for the metaheuristics method to be suitable for solving the problem, several conditions must be met:

- knowledge about the task itself is very limited – it is not known in advance what the optimal solution will look like, there is no specific solution method, there is too little information to use heuristics;
- there is a certain “candidate for optimality” – a suitable option for solving the problem.

In this case, the simple enumeration method does not work due to obvious shortcomings: cumbersomeness, significant time and resources. Gradient methods are not

suitable due to similar reasons, in addition, they do not have the right to be applied if it is a discrete problem.

**2. The results of the study.** There are many different types of metaheuristics: combinatorial optimization algorithms (ant colony), parallel (island model), multi-criteria and some others. However, all of them have the above-described properties, according to which they are referred to as metaheuristics.

Let us compare the effectiveness of 4 methods: the classical genetic algorithm [1], the jumping (leap) frog method [1], the annealing method [1] and Lin-Kernighan algorithm [2].

One of the one-state metaheuristic methods is also simulated **annealing**, which also belongs to the group of Monte Carlo methods. The algorithm is based on a simulation of a physical process that occurs during crystallization of a substance, including during annealing of metals. The transition of an atom from one cell to another occurs with some probability, and the probability decreases with decreasing temperature.

The current state of the optimized system is modified according to the normal law. The algorithm may remain at the current point, or may go into a new state. The probability of a transition to a new state depends on the temperature and the energy difference, that is, the value of the optimized function, in the current and possible new state, and is calculated in accordance with some distribution, for example, with the Gibbs distribution.

The Gibbs distribution is used classically, while the application of the Boltzmann distribution gives the method a new name – “Boltzmann annealing”.

The simulated annealing algorithm is similar to gradient descent, but due to the randomness of the choice of an intermediate point, it will have to fall into local minima less often than gradient descent. Using the logarithmic law of lowering the temperature, a global minimum can be guaranteed, with a probability tending to unity, but in practice this requires too many iterations, so this approach is not used directly.

Imagine a formal statement of the problem and its solution.

1. Choose the initial solution  $i_0 \in I$  and put  $f^* := f(i_0)$ ,  $k := 0$ .
2. Until the stopping criterion is met, do the following:
  - 2.1. Randomly select  $j < N(i_k)$ .
  - 2.2. If  $f(j) - f(i_k) < t_k$  then  $i_{k+1} := j$ .
  - 2.3. If  $f^* > f(i_k)$ , then  $f^* := f(i_k)$ .
  - 2.4. Put  $k := k+1$ .

The following quantity is also introduced  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  – random variable with mathematical expectation  $E(t_k) = c_k > 0$  – local search option when arbitrary deterioration in the objective function is allowed, but the probability such a transition is inversely proportional to the magnitude of the deterioration, more precisely, for any  $j \in N(i)$

$$P_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } f(j) \leq f(i), \\ \exp\left(\frac{f(i)-f(j)}{c_k}\right), & \text{if } f(j) \geq f(i). \end{cases}$$

The sequence  $\{c_k\}$  plays an important role in the analysis. Sometimes the parameter  $c_k$  is called the temperature.

There are many heuristic ways to select the final sequence  $\{c_k\}$  in order to increase the probability of detecting a global optimum.

1. The initial value:  $c_0 = D f_{max}$  – the maximum difference between two adjacent solutions.

2. Lowering the threshold:  $c_{k+1} = a c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ , where  $a$  is a positive constant, quite close to 1, for example,  $a \in [0.8; 0.99]$ .

3. Final value:  $c_K > 0$  is determined either by the number of changes made, or as the maximum  $c_k$ , at which the algorithm does not change the current solution within a given number of steps. For each value of  $c_k$ , the algorithm performs the order  $N(i)$  steps without changing the threshold value.

For example, the statement of the traveling salesman problem for a simulation algorithm looks like as follows.

Each city is represented as a pair of coordinates with a corresponding index  $(x_i; y_i)$ .

By condition, the solution is the route between all cities, which means that the set of states  $S$  is all possible routes passing through each city. In other words, the set of all ordered sequences of elements of  $C$ , in which every city occurs exactly once. Obviously, the length of each such sequence  $|C|$ .

As we recall, in order to use the simulated annealing method, we must define two functions that depend on each specific task. This is the energy function  $E$  (or the “objective function” in conventional terminology) and the function  $F$ , generating a new state.

Since we strive to minimize the distance, it will be “energy”. Therefore, our objective function will look like this:

$$E(s_i) = E_i = \left[ \sum_1^{|C|-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} \right] + \sqrt{(x_{|C|} - x_1)^2 + (y_{|C|} - y_1)^2}$$

Consider a **genetic algorithm** – this is a heuristic search algorithm used to solve optimization and modeling problems by sequentially selecting, combining and varying the desired parameters using mechanisms reminiscent of biological evolution. It is a type of evolutionary computation. A distinctive feature of the genetic algorithm is the emphasis on the use of the “crossing” operator, which performs the operation of recombination of candidate solutions, whose role is similar to the role of crossing in wildlife.

A simple and pure genetic algorithm can be defined in the following steps.

Step 1. Create an initial population of  $P$  chromosomes.

Step 2. Evaluate the fitness of each chromosome.

Step 3. Choose  $P/2$  parents from the current population via proportional selection.

Step 4. Randomly select two parents to create offspring using crossover operator.

Step 5. Apply mutation operators for minor changes in the results.

Step 6. Repeat Steps 4 and 5 until all parents are selected and mated.

Step 7. Replace old population of chromosomes with new one.

Step 8. Evaluate the fitness of each chromosome in the new population.

Step 9. Terminate if the number of generations meets some upper bound; otherwise go to Step 3.

Let's consider also **the Lin-Kernighan algorithm**.

The Lin-Kernighan as 2-opt algorithm is a special case of the  $\lambda$ -opt algorithm, where in each step  $\lambda$  links of the current tour are replaced by  $\lambda$  links in such a way that a shorter tour is achieved. In other words, in each step a shorter tour is obtained by deleting  $\lambda$  links and putting the resulting paths together in a new way, possibly reversing one or more of them.

The  $\lambda$ -opt algorithm is based on the concept  $\lambda$ -optimality. A tour is said to be  $\lambda$ -optimal (or simply  $\lambda$ -opt) if it is impossible to obtain a shorter tour by replacing any  $\lambda$  of its links by any other set of  $\lambda$  links.

From this definition it is obvious that any  $\lambda$ -optimal tour is also  $\lambda'$ -optimal for  $1 \leq \lambda' \leq \lambda$ . It is also easy to see that a tour containing  $n$  cities is optimal if and only if it is  $n$ -optimal. In general, the larger the value of  $\lambda$ , the more likely it is that the final tour is optimal. For fairly large  $\lambda$  it appears, at least intuitively, that a  $\lambda$ -optimal tour should be optimal. Unfortunately, the number of operations to test all 1-exchanges increases rapidly as the number of cities increases. In a naive implementation the testing of a  $\lambda$ -exchange has a time complexity of  $O(n^\lambda)$ . Furthermore, there is no nontrivial upper bound of the number of  $\lambda$ -exchanges. As a result, the values  $\lambda = 2$  and  $\lambda = 3$  are the most commonly used. In one study the values  $\lambda = 4$  and  $\lambda = 5$  were used. However, it is a drawback that  $\lambda$  must be specified in advance. It is difficult to know what  $\lambda$  to use to achieve the best compromise between running time and quality of solution. Lin and Kernighan removed this drawback by introducing a powerful variable  $\lambda$ -opt algorithm. The algorithm changes the value of  $\lambda$  during its execution, deciding at each iteration what the value of  $\lambda$  should be. At each iteration step the algorithm examines, for ascending values of  $\lambda$ , whether an interchange of  $\lambda$  links may result in a shorter tour. Given that the exchange of  $r$  links is being considered, a series of tests is performed to determine whether  $r+1$  link exchanges should be considered. This continues until some stopping conditions are satisfied. At each step the algorithm considers a growing set of potential exchanges (starting with  $r = 2$ ). These exchanges are chosen in such a way that a feasible tour may be formed at any stage of the process. If the exploration succeeds in finding a new shorter tour, then the actual tour is replaced with the new tour.

Consider the **jumping (leap) frog method**.

Its name is due to the social behavior of a group of frogs. In this process, unlike evolutionary algorithms, genetic operators are not used, and the interaction of the solutions found is considered taking into account the success of their neighbors in the search space. The statement of the traveling salesman problem for solving it by the jumping frog method, as well as a comparison of the effectiveness of this algorithm with other methods, is described in [1] (Skobtsov, 2008).

The detailed steps of jumping frog method are as follows.

Step 1 (swarm generation): Let  $x_i$  denotes  $i$ -th frog's position and  $f_i$  is its fitness. A frogs population  $X = \{x_i, f_i, i = 1, \dots, F\}$  is initialized with position within the searching space and sorted in descending order of fitness values.

Step 2 (memplexes partition): Partition the population into  $m$  memplexes  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ , each contains  $n$  frogs and

$$Y_i = [(x_j, f_j) | x_j = x_{i+m(j-1)}, f_j = f_{i+m(j-1)}, j = 1, \dots, n].$$

Step 3 (submemplex generation): The selection strategy of a submemplex

(including  $q$  frogs) in each memplex is that the larger coefficients are distributed to the frogs with better positions. A selection method is that the frogs with better positions have bigger weights to be assigned to the submemplex. The weights are assigned with a triangular probability distribution as follows

$$p_i = 2(n + 1 - i)/(n + 1), \quad i = 1, \dots, n.$$

Step 4 (submemplex evolution): Let  $x_B$  denotes the best position and  $x_W$  denotes the worst position in submemplex. Then, local search is started from the worst frog to leap to the best frog in any memplex. The worst frog in submemplex leaps towards to the best frog in the memplex, and thus the new position is obtained by a leaping step. A random position is generated to replace it, that is

$$x_q^{k+1} = a + \text{Int}[r^k(b - a)].$$

where  $[a, b]$  is the boundary of frogs' feasible location. Afterwards, the frogs are sorted in a descending order according to their fitness. Repeat above steps and evolve the submemplexes with  $G_1$  generations.

Step 5 (memplex shuffle): After the local search of each memplex is finished, all memplexes are shuffled in which the frogs are reorganized in descending order of fitness. Repeatedly divide the population into memplexes and carry out local search process, until memetic evolution generation  $G_2$  is reached.

The following subsections show the general information about different metaheuristic methods, and their steps. For numerical experiments we used a single randomly generated task with well-known exact solution and the dimension of the  $1000 \times 1000$  problem. For each of the 4 algorithms 50 trials were performed with different initial solutions. Several tests of the algorithm were carried out with 10, 15, 30 iterations. The result table (Table 1) included averages. Let's compare their effectiveness.

*Table 1.* The effectiveness of metaheuristic methods for travel salesman problem

Metaheuristic Method	The number of tests in which the algorithm found a global extremum	The number of iterations when the global extremum was found	Average algorithm running time	Standard deviation (%)
Annealing algorithm	93%	15, 30	5 minutes	2,5
Genetic algorithm	95%	10, 15, 30	4,5 minutes	1,3
Lin-Kernighan algorithm	90%	15,30	6,3 minutes	1,7
Jumping (leap) frog method	80%	15, 30	6,2 minutes	1,8

Also compare several tests of the jumping frog algorithm that were carried out with different numbers of iterations: 10, 15, 30 (Fig. 1).

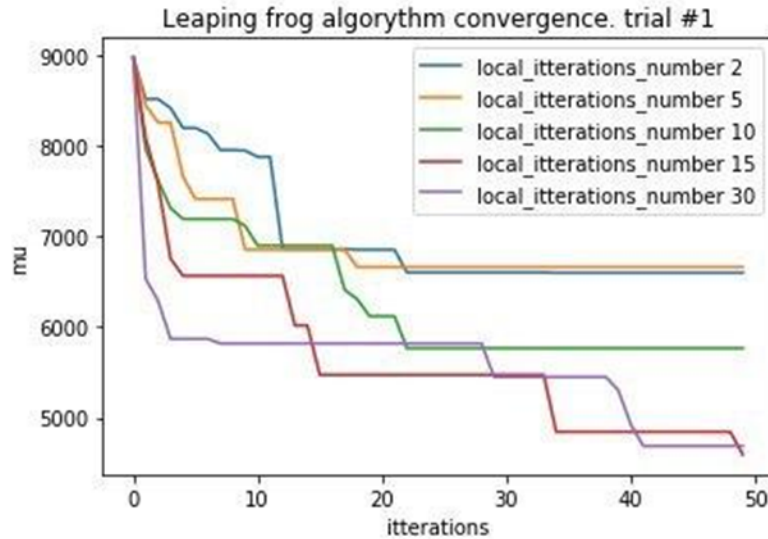


Fig. 1. Comparison of the efficiency of the jumping frog algorithm with a different number of iterations according to the convergence criterion

The best algorithm is considered, implemented with 15 iterations of local search. With an increase in the number of iterations, in most cases the algorithm wins with their maximum number (Fig. 2).

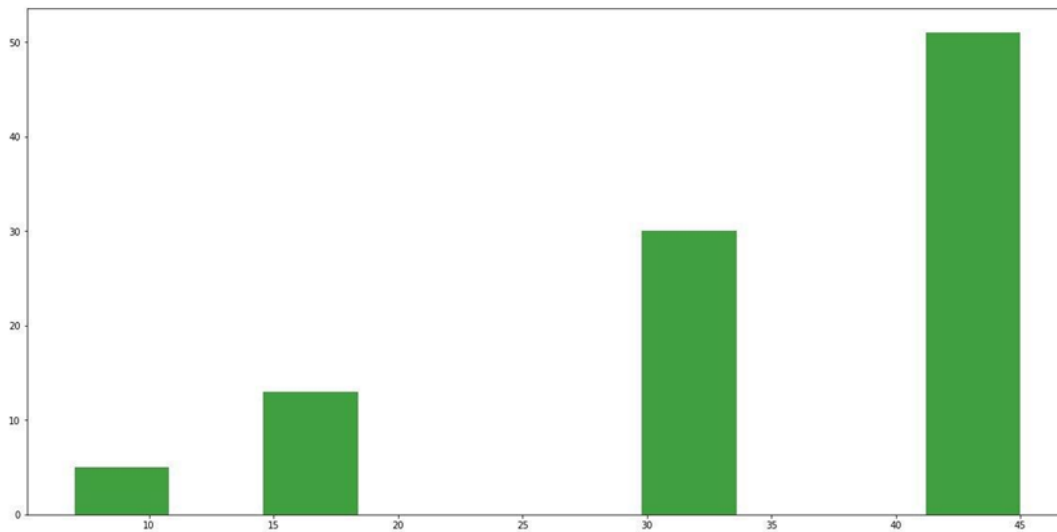


Fig. 2. Comparison of the efficiency of the jumping frog algorithm with a different number of iterations according to the search criterion for the global maximum

Analysis Fig. 2 makes it possible to conclude that its principle of operation of the jumping frog method is outwardly similar to the random search algorithm, which emphasizes its belonging to the category of metaheuristic methods.

**3. Conclusions.** Promising is the further application of a simple hybrid algorithm based on a combination of the jumping frog method and a fragmented algorithm. It is also necessary to investigate methods for evaluating the effectiveness of various metaheuristic algorithms.

## References

1. Skobtsov, Y. (2008). Fundamentals of evolutionary computing: textbook. benefits Donetsk: DonNTU. [in Russian].
2. Lin, S., & Kernighan, B. W. (1973). An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem. *Operations Research*. Vol. 21, No. 2. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.21.2.498>
3. Eusuff, M.M. (2003). Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm. *J. Water Resour. Planning Mgmt.* Vol. 129., 210 – 225. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:3\(210\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:3(210))
4. Narimani, M.R. (2011). A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath. *World Applied Sciences Journal*, 803–814.
5. Khumawala, B.M. (1972). An Efficient Branch-Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem. *Management Science*. v18., 718-731. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.18.12.B718>
6. Krarup, J., & Pruzan, P.M. (1983). The simple plant location problem: Survey and synthesis. *European Journal of Operational Research*. v12, 36-81. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(83\)90181-9](https://doi.org/10.1016/0377-2217(83)90181-9)

**Сєлютін, Є., Козін, І.** Порівняльна ефективність використання метаевристичних методів.

Розглянуто суть метаевристичних методів та умови їх застосування, зокрема, обмежена кількість знань і наявність деякого кандидата на оптимальність. Наведена формальна постановка задачі комівояжера і її рішення 4 алгоритмами: генетичним, відпалу, Лін-Кернігана і методом стрибаючих жаб.

Проаналізовано переваги та недоліки алгоритму відпалу. Проведена паралель між алгоритмом відпалу і градієнтними методами. Задані змінні завдання комівояжера в параметрах генетичного алгоритму. Наведено принципи дії методу стрибаючих жаб та алгоритму Лін-Кернігана.

Для проведення експерименту була згенерована база випадкових даних, які утворили задачу розмірності  $1000 \times 1000$  з наперед відомим точним розв'язком. Для висновків по результативності методів були оцінені швидкість збіжності завдання за умови максимального наближення до глобального екстремуму і середньоквадратичне відхилення від точного розв'язку. Виявлено, що генетичний алгоритм за заданих умов демонструє найкращі результати. Перспективним є подальше застосування алгоритму стрибаючих жаб для задач оптимізації, реалізоване з великим числом ітерацій. Одним з напрямків використання алгоритму стрибаючих жаб є завдання розміщення виробництва.

**Ключові слова:** дискретна оптимізація, метаевристика, генетичний алгоритм, алгоритм стрибаючих жаб, метод відпалу, алгоритм Лін-Кернігана.

## Список використаної літератури

1. Скобцов Ю.А., Федоров Е.Е. Основы эволюционных вычислений. Донецк: Изд-во «Ноу-линдж». 2013. 426 с.
2. Lin S., Kernighan B. W. An Effective Heuristic Algorithm for the Traveling-Salesman Problem. *Operations Research*. 1973. Vol. 21, No. 2. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.21.2.498>
3. Eusuff M.M. Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm. *J. Water Resour. Planning Mgmt.* 2003. Vol. 129. P. 210 – 225. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:3\(210\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:3(210))
4. Narimani M.R. A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath. *World Applied Sciences Journal*. 2011. P. 803–814
5. Khumawala B.M. An Efficient Branch-Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem. *Management Science*. 1972. v18, P. 718-731. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.18.12.B718>
6. Krarup J., Pruzan P.M. The simple plant location problem: Survey and synthesis. *European Journal of Operational Research*. 1983. v12. P. 36-81. DOI: [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(83\)90181-9](https://doi.org/10.1016/0377-2217(83)90181-9).

Recived 03.02.2020



УДК 004.85

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).112-122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).112-122)**М. М. Шаркаді<sup>1</sup>, М. В. Роботишин<sup>2</sup>, М. М. Маляр<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат економічних наук

marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
магістр прикладної математики

mykolaroboteszyn@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6567-6974>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,  
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,  
доктор технічних наук

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

## МОДЕЛІ І МЕТОДИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ЗАВДАНЬ ПЕРЕДБАЧЕННЯ

В процесі еволюції людства змінюється характер діяльності людини і необхідний «інструментарій» для вирішення нових задач. Останнім часом все більшу увагу заслуговують проблеми пов'язані з прийняттям рішень. Особливо актуальними є проблеми підтримки рішень у процесі управління соціально-економічними системами. Приймаючи рішення, як правило, стикаються з проблемами пошуку інформації, невпевненістю, невизначеністю, а в деяких випадках і з конфліктністю у процесі вироблення рішення. При цьому припускається, що реалізація будь-якого з варіантів рішень передбачає настання певних наслідків, аналіз та оцінка яких повністю характеризує обраний варіант. Для оцінювання можливих наслідків традиційно використовуються складні аналітичні розрахунки, знання фахівців-експертів, засоби сучасних інформаційних технологій.

Проведений аналіз існуючої практики управління соціальними та економічними системами дає можливість запропонувати нові напрями її оптимізації, котра, в свою чергу, передбачає орієнтацію на запрограмовані показники розвитку як внутрішніх системних характеристик, так і параметрів зовнішнього середовища з урахуванням прогностичних значень ключових параметрів об'єкта управління. Саме орієнтація на прогностичні показники розвитку дозволяє розробляти та втілювати в життя дієві стратегії управління процесами в соціальних та економічних системах. Важливість володіння інструментарієм та методиками розробки прогнозів для економіста і управлінця в сучасних умовах є беззаперечною.

Мета даної роботи, на основі аналізу літературних джерел зробити висновки щодо особливостей, перспектив використання та можливостей розвитку інтелектуального аналізу даних у сучасних умовах розвитку комп'ютерних технологій.

У роботі розглянуто основні методи машинного навчання і проаналізовано особливості та результати їх застосування до вирішення проблем завдань передбачення. Для вирішення проблеми, що існує потрібно визначити, які напрями розвитку технологій потрібно удосконалювати та досліджувати науковцям.

Машинне навчання являється підрозділом доволі широкої області науки, яка вивчає штучний інтелект. Алгоритми, які відносяться до даного напрямку, використовуються для вирішення завдань, для яких часто складно або неможливо придумати явний алгоритм розв'язку.

**Ключові слова:** передбачення, інтелектуальний аналіз даних, алгоритми машинного навчання.

**1. Вступ.** Управління сучасним бізнесом немислимо без передбачення, прогнозування та аналізу даних. З кожним роком бізнес компанії збирають нові дані і використовують їх для розв'язання задач, щоб збільшувати власний прибуток. Тенденція обробки великих обсягів інформації та їх аналіз неможлива без використання методів інтелектуального аналізу даних та їх подальшого використання у сфері життєдіяльності людини. Вирішення проблем обумовлених великими обсягами даних (*Big Data*), які пов'язані з їх складністю, мережевою природою, динамікою і різноманітністю інформації привели до стрімкого зростання кількості і потужності моделей, методів і засобів інтелектуального аналізу даних.

Інтелектуальний аналіз даних (*Data Mining*) спрямований на виявлення прихованих закономірностей у даних та передбачає безпосереднє виявлення знань [1]. Тобто, на його основі можна отримати моделі, що дозволяють краще розуміти дані і передбачати їх поведінку.

Передбачення це різновиди технологій одержання інформації про майбутнє. Технологічне передбачення це обґрунтоване бачення стану можливої поведінки в майбутньому різного роду явищ, процесів і об'єктів, які невідомі в даний час, але які піддаються виявленню [2]. Розрізняються наукове і ненаукове передбачення. Наукове передбачення базується на наукових методах дослідження, а ненаукове – ґрунтується на передчуттях, інтуїції, міфології, релігії і т. п. Основною формою наукового передбачення є прогнозування, як процес вироблення прогнозів, тобто імовірне судження про стан певного явища в майбутньому, яке базується на статистичній інформації, переважно у кількісному виді. Технологічне передбачення доцільно використовувати у процесі прийняття управлінських рішень складними соціо-економічними системами в основі яких лежить людський фактор.

**2. Постановка задач.** Загальна постановка задачі передбачення може бути сформульована наступним чином.

Відома деяка сукупність об'єктів (ситуацій) і множина відповідей (реакцій, відгуків), а також множина у вигляді пар «об'єкт – відповідь», яка називається навчальною вибіркою. Існує деяка залежність між відповідями і об'єктами, але вона невідома. Потрібно, на основі цих даних відновити залежність, тобто побудувати модель (алгоритм), яка здатна для довільного об'єкта надати досить точну відповідь. Для вимірювання точності відповідей вводиться визначеним чином функціонал якості.

**3. Мета роботи.** Описати підходи, які використовуються для вирішення проблеми передбачення у різних сферах суспільного життя. Представити моделі і методи машинного навчання для різних класів завдань.

**4. Огляд підходів.** Ефективне застосування моделей і методів передбачення не можливе без широкого використання сучасних новітніх інформаційних технологій, яскравим представником яких є інтелектуальний аналіз даних.

Інтелектуальний аналіз даних (ІАД) це інформаційна технологія, яка дозволяє видобувати корисні знання за допомогою обробки інформації та виявлення в ній закономірностей та тенденцій, які, як правило, використовуються для підтримки прийняття управлінських рішень. Технологія ІАД базується на моделях і методах виявлення знань у великих наборах даних.

Основою ІАД є виявлення різних закономірностей у «сирих», необроблених

даних. На сьогоднішній день можна виділити такі найбільш поширені завдання, які найчастіше розв'язуються методами ІАД [1].

Класифікація – це розподіл об'єктів до одного із заздалегідь відомих наперед класів. Вона дає можливість встановити функціональну залежність між вхідними даними і дискретними вихідними змінними, що відповідають певним класам. Класифікація розділяє об'єкти за визначеною заздалегідь ознакою і вважається самим популярним завданням у всьому машинному навчанні.

Кластеризація – це групування об'єктів за подібністю, на основі певних, наперед невідомих, суттєвих властивостей (ознаках). Подібні об'єкти повинні бути віднесені до одного кластеру і відрізнитись від об'єктів з іншого кластеру. При кластеризації класи об'єктів наперед невідомі на відміну від класифікації. Точність кластеризації визначається схожістю об'єктів у середині кластера і відмінностями між кластерами.

Регресія – це встановлення деякої форми функціональної залежності вхідних змінних від вихідних. Вона безпосередньо пов'язана з прогнозуванням. Регресія показує або передбачає взаємозв'язок між процесом та тим, що цей процес може спонукати.

Асоціація – виявлення закономірностей між пов'язаними подіями. До прикладу закономірності слугує правило, що із події  $X$  випливає подія  $Y$ . Якщо події рознесені в часі, тоді асоціативні правила задають послідовні шаблони, тобто, це асоціації, які вказують на закономірності між пов'язаними в часі подіями.

ІАД безпосередньо зв'язаний з машинним навчанням (*Machine Learning*), наукою про мислення (*Cognitive Science*), а великі обсяги даних (*Big Data*), в свою чергу є підрозділом науки про аналіз даних (*Data Science*). Основу ІАД складають методи машинного навчання. Крім того, у підходах і до роботи з великими даними використовується машинне навчання, для того, щоб комп'ютер сам шукав результати опрацьованих даних. Натомість за допомогою *Machine learning* алгоритмів, комп'ютер сам аналізує і видає результат з обробленої інформації.

Машинне навчання (МН) – це підрозділ штучного інтелекту, який розглядає побудову алгоритмів, які можуть навчатися на наявних даних [3,4,5]. Навчання – це річ, знайома будь-якій людині, оскільки люди навчаються щодня і показують у цьому процесі прекрасні результати. Спостерігаючи закономірності в зміні середовища навколо, вони конструюють певну модель зміни цього середовища і приймають ті чи інші рішення. Середовище певним чином реагує на прийняті рішення і люди знову корегують модель світу.

Машинне навчання дозволяє знаходити закономірності в існуючих даних, щоб потім передбачати потрібну інформацію для нових об'єктів. Приблизно так і працює машинне навчання, ідея якого дуже проста: знайти закономірність і поширити її на нові дані. Машинне навчання – це спрощена версія процесу навчання, яке відбувається з людиною. Як правило, в машинному навчанні наявний певний набір прикладів, спостережень, реакцій до цих спостережень. Задача полягає у тому, щоб сконструювати такі моделі, які будуть максимально ефективно описувати наявні дані і робити достовірні прогнози. Машинне навчання є індуктивним навчанням або «навчання за прецедентами» на основі пар «об'єкт – відповідь», оскільки в основному вчимо машину вчитися на прикла-

дах, спостерігати велику кількість прикладів із реального життя, будувати на них моделі, перевіряти та застосовувати їх на подальших прикладах.

**Математична модель та методи машинного навчання.** Завдання МН виглядає так: уявімо собі, що в нас є певний набір об'єктів-прикладів і певний набір міток, тобто, реакцій, відповідей. Між прикладами (спостереженнями) і відповідями (реакціями) є певна прихована залежність. Задача МН – знайти цю приховану залежність для прогнозування відповідей на основі нових даних. Математичне формулювання та модель такої задачі виглядає наступним чином:

Нехай  $X$  – деяка множина, елементи якої називаються об'єктами або прикладами, ситуаціями, входами (samples); а  $Y$  – множина, елементи якої називаються відповідями або відгуками, мітками, виходами (responses). Існує деяка залежність (детермінована і імовірнісна), що дозволяє за елементами  $x \in X$  передбачити  $y \in Y$ . Зокрема, якщо залежність детермінована, то існує функція  $\varphi^* : X \rightarrow Y$ . Залежність відома тільки на об'єктах навчальної вибірки  $\{(x^{(i)}, y^{(i)}) : x^{(i)} \in X, y^{(i)} \in Y (i = 1, \dots, N)\}$ ,  $N$  – кількість об'єктів у навчальній вибірці. Упорядкована пара "об'єкт – відповідь"  $\{(x^{(i)}, y^{(i)}) : x^{(i)} \in X \times Y\}$  називається прецедентом. Потрібно встановити залежність між входом і виходом на основі даних навчальної вибірки.

**Модель задачі машинного навчання за прецедентами.**

*Задано:* множина об'єктів  $X$  і множина відповідей  $Y$ .

*Відомо:* навчальна вибірка  $\{x^{(i)} \in X, (i = 1, \dots, N)\}$  і відповідно відповіді на цій вибірці  $\{y^{(i)} = y(x^{(i)}) : y \in Y (i = 1, \dots, N)\}$ .

*Знайти:* алгоритм  $a : X \rightarrow Y$ , тобто алгоритм побудови вирішальної функції  $\varphi \in \Phi$ , яка наближує, найбільш точно,  $y \in Y$  не тільки на навчальній вибірці, а і на всій множині  $X$ .

Для різних типів задач множина об'єктів  $X$  і відповідей  $Y$  може задаватись по-різному. Наприклад, для задачі класифікації:  $Y = \{-1; +1\}$  – класифікація на два класи;  $Y = \{1, \dots, M\}$  – класифікація на  $M$  класи, які не перетинаються;  $Y = \{0; 1\}^M$  – класифікація на  $M$  класи, які перетинаються. Для задачі регресії:  $Y = R$  або  $Y = R^m$ ; для задачі ранжування  $Y$  – скінченна впорядкована множина. Множина об'єктів  $X$ , як правило, задається не самими об'єктами, а їх описами. Найбільш поширеним є ознаковий опис. Ознака (feature)  $f$  об'єкта  $x \in X$  – це результат вимірювання деякої характеристики об'єкта  $x$ . При такому підході об'єкт  $x \in X$  представляється як вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ,  $k$  – кількість ознак, а  $x_j = f_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Формально ознака це відображення  $f : X \rightarrow D_j$ , де  $D_j$  – множина допустимих значень ознаки.

У МН виділяються чотири види навчання [3-5]:

- 1) *Контрольоване.* Навчання з учителем (*supervised learning*) – найбільш поширений випадок. Кожен прецедент являє собою пару «об'єкт – відповідь». Потрібно знайти функціональну залежність відповідей від описів об'єктів і побудувати алгоритм, який бере на вході опис об'єкта і видає на виході відповідь. Функціонал якості, зазвичай, визначається як середня помилка відповідей, виданих алгоритмом, за всіма об'єктами вибірки. Як правило, вирішуються завдання класифікації та регресії.
- 2) *Неконтрольоване.* Навчання без вчителя (*unsupervised learning*) – тут відповіді не задаються, а потрібно шукати залежності між об'єктами. Для

кожного претендента задається тільки ситуація і потрібно згрупувати об'єкти в кластери, використовуючи дані про парну схожість об'єктів. Функціонали якості можуть визначатися по-різному, наприклад, як відношення середніх міжкластерних і внутрішньокластерних відстаней.

- 3) *Навчання з підкріпленням (reinforcement learning)*. Навчання як окремий випадок контрольованого навчання, але вчителем є певне «середовище», в якому є певний агент (машина), що контролюється комп'ютером. Агент може вчиняти певні дії, які приводять до позитивних чи негативних відкликів «середовища» і тим самим надає агенту дані, які дозволяють йому реагувати на них і вчитися. Таким чином, агент і середовище утворюють систему за зворотнім зв'язком. Задача – максимізувати позитивні і мінімізувати негативні відклики.
- 4) *Напівавтоматичне навчання (semi-supervised learning)* – евристичний спосіб, в якому нерозмічені дані (ті, які не мають міток) також використовуються в тренуванні разом з розміченими даними.

**Процес та алгоритми машинного навчання.** У процесі вирішення завдань МН можна виділити наступні етапи [6].

- Розуміння задачі і даних;
- Попередня обробка даних і винахід (вибір, підбір) ознак;
- Побудова моделі;
- Зведення навчання до оптимізації;
- Вирішення проблеми оптимізації перенавчання;
- Оцінка якості;
- Впровадження і експлуатація.

Кожний із етапів є сам по собі складним процесом, який потребує відповідних знань і компетенції.

До типових задач машинного навчання належать: класифікація (розділяє об'єкти за визначеною заздалегідь ознакою), кластеризація (розділяє об'єкти за невідомою ознакою), регресія (показує або передбачає взаємозв'язок між процесом та його чинниками), прогнозування (знаходить значення часового ряду у майбутньому за попередніми даними), зменшення розмірності ознак (збирає конкретні ознаки у абстракції більш високого рівня), виявлення аномалій (виявлення відхилень від стандартних значень), пошук правил (шукає закономірності в потоці даних).

Результати МН у великій мірі залежать від рівня підготовки даних. Попередня обробка даних це очищення (виділення із загального масиву даних корисну інформацію), консолідація (об'єднання даних із різних джерел інформації) і підготовка їх у зручній для аналізу формат. Дані за різноманітністю діляться на наступні категорії: статистичні, структуровані, напівструктуровані (слабо структуровані), неструктуровані.

Для представлення даних для МН найчастіше використовується метод ознакового описання об'єкту. Якість роботи систем МН досить сильно залежить від множини ознак, які обираються для описання вхідних даних і яким чином вони будуть описуватись. Виокремлення ознак означає перетворення початкових «сирих» даних у придатне представлення на вхід. Описання ознак, як правило, проводиться у певних шкалах таких як: бінарна, номінальна, порядкова, кількісна. Відповідно, якщо  $D_j = \{0, 1\}$ , тоді  $f$  бінарна ознака,  $D_j$  – скінченна множина, тоді  $f$  – номінальна ознака,  $D_j$  – скінченна упорядкована множина, тоді  $f$  – порядкова ознака,  $D_j = R$ , тоді  $f$  – кількісна ознака. Підбір правильних ознак займає більше часу ніж все машинне навчання. Не правильність підбору ознак може приводити до продукування неправильних результатів.

Під моделюванням розуміється використання алгоритму МН для пошуку інформації в існуючих даних для конкретної прикладної задачі. Найбільш поширеними і вживаними у практичному використанні вважаються наступні алгоритми. Алгоритми побудовані на основі регресійного аналізу. Це лінійна, багатомірна, логістична та нелінійна моделі регресії, які, як правило, використовуються для бінарної класифікації [7,8].

Лінійну модель регресії задають у вигляді рівняння прямої, яке найбільш точно показує взаємозв'язок між вхідними і вихідними змінними. Для складання такого рівняння потрібно знайти відповідні коефіцієнти для вхідних змінних. Для ситуації, коли простір ознак – лінійний, ознаки задані певним звичайним числом, простір відповідей (реакцій) – не лінійний, заданий набором класів (наприклад, проміжком), доцільно використовувати логістичну модель регресії. У нелінійній і логістичній моделях регресії вихідні дані перетворюються за допомогою нелінійних або логістичних функцій. Математичний апарат, який використовується у даних моделях – метод Ньютона-Рафсона. Багатомірна модель регресії побудована на основі матричного представлення та його сингулярного розкладу.

Лінійний дискримінаційний аналіз базується на статистичних властивостях даних розрахованих для кожного класу. Для кожної вхідної змінної це включає: середнє значення для кожного класу та дисперсію розраховану за всіма класами. Цей алгоритм доцільно застосовувати якщо класів є більше як два, а дані мають нормальний закон розподілу.

Дерева рішень належать до самих популярних і потужних інструментів, що дозволяють ефективно вирішувати задачі класифікації. В основі роботи дерев рішень лежить процес рекурсивної розбивки вхідної множини спостережень або об'єктів на підмножини, асоційовані із класами [9,10]. Дерево рішень будується на основі навчальної вибірки з використанням поняття інформаційної ентропії. Алгоритм «Дерева рішень» можна представити у вигляді двійкового дерева, де кожний вузол є вхідна змінна і точка розщеплення для даної змінної, при умові, що змінна є число. Існують різні критерії розщеплення. Найбільш відомі – міра ентропії й індекс Gini в основі яких лежить нормований приріст інформації. Листові вузли це вихідна змінна, яка використовуються для передбачення, яке проводиться шляхом проходження по дереву до листового вузла і виводу значення класу в цьому вузлі.

Алгоритм «Наївний Байєсовський класифікатор» [9]. Суть даного алгоритму базується на припущенні, що кожна вхідна змінна є незалежною у теоремі

Байеса. Модель використовує два типи ймовірностей – ймовірність кожного класу і умовну ймовірність для кожного класу для всіх значень вхідної змінної, які розраховуються на тренувальних даних. Після чого дану модель можна використовувати для нових даних згідно теореми Байеса.

Алгоритм «**K** – найближчих сусідів» [10]. Даний алгоритм базується на оцінці подібності об'єктів. Оскільки кожний об'єкт може характеризуватись різнорідними ознаками, то основна проблема даного алгоритму у виборі метрики відстані між об'єктами. Проблему можна вирішити шляхом відбору невеликої кількості інформативних ознак, для кожної з яких будується своя функція близькості і проводиться їх згортка.

Метод опорних векторів [11,12]. У фокусі даного алгоритму лежить ідея використання поняття гіперплощини, тобто лінії, яка розділяє простір вхідних змінних. По суті, це означає провести дві прямі між категоріями так, щоб між ними утворився найбільший зазор. Найкращою гіперплощиною вважається лінія з найбільшою відстанню між гіперплощиною і найближчими точками даних. Ці точки називаються опорними векторами і відіграють головну роль при побудові гіперплощини і класифікатора. Для визначення коефіцієнтів гіперплощини, які максимізують відстань, використовуються спеціальні методи оптимізації. Сьогодні даний алгоритм є найефективним класичним класифікатором і самим популярним для спам-фільтрів.

На сьогоднішній день широке застосування для класифікації отримали нейронні мережі [10,11,13], які добре себе проявили у роботі зі складними даними, типу картинок, відео та незрозумілих бігдат. Навчання нейронних мереж з погляду математики це багато параметрична задача нелінійного програмування.

Останнім часом дедалі більшого поширення набуває клас методів глибокого навчання [12]. Суть даного підходу полягає у навчанні ознак, що дозволяє автоматично відокремлювати особливості із вхідних даних і застерігає модель від «перенавчання». Глибоке навчання характеризується, як клас алгоритмів машинного навчання, який використовує багатопарову систему нелінійних фільтрів для вилучення ознак з перетвореннями, де кожен наступний шар отримує на вході вихідні дані попереднього шару.

Для підвищення точності моделі доцільно застосовувати ансамблеві алгоритми [14-16]. Ансамбль або композиція алгоритмів – це об'єднання декількох алгоритмів у один. Кожний алгоритм може вивчити свої закономірності в даних, а якщо алгоритмів багато, то відповідно є багато закономірностей і це краще. Суть ідеї у тому, щоб навчити алгоритми, а потім усереднити отримані від них відповіді [17-19]. Головні підходи до побудови ансамблевих моделей: стекінг (*stacking*); беггінг (*bagging/bootstrap aggregation*); бустинг (*boosting*).

Стекінг – спершу навчають кілька алгоритмів, потім результати їх роботи показують останньому алгоритму. Саме він і приймає остаточне рішення. Стекінг – хороший, але найменш точний ансамбль серед інших методів.

Беггінг – це тип навчання, коли багато разів навчаємо ансамбль на випадкових вибірках даних. Тобто, тренувальні дані розбиваються на множину вибірок, для кожної із яких створюється модель. В кінцевому підсумку усереднюється відповідь за кожною із моделей. Це виглядає як голосування за найбільш популярну відповідь, де багато моделей працюють паралельно.

Бустинг – включає послідовне навчання алгоритмів. Тобто, спочатку навча-

емо перший алгоритм і відзначаємо місце, де він помилився. Потім навчаємо другий, особливу увагу приділяючи місцям на яких помилявся перший. І так далі до необхідного результату, тобто, добавляються моделі до тих пір поки тренувальні дані не будуть ідеально передбачатись або не буде перевищена максимальна кількість моделей.

Ключовим моментом у досягненні бажаного результату в процесі навчання будь-якої системи машинного навчання є вибір правильного функціоналу якості. Функціонал якості – це певна функція, яка видає нам рівень помилки, яку робить система. В навчанні моделі головна вимога – мінімізувати помилку, яку видає система. Система спочатку видає результати, які дуже відрізняються від того, що очікується. Відповідно по кожному із прикладів ми можемо вирахувати помилку і скорегувати систему таким чином, щоб помилка була меншою. В залежності від того, яку функцію втрат функціоналу якості вибрано, буде залежати яким чином буде навчатися система. Функціонал якості відрізняється у залежності від задачі. Наприклад, для задачі регресії досить доцільне використання так званої функції квадрат помилки, тобто квадрат різниці між очікуваним результатом і результатом, який видала система. Для задачі мультикласової класифікації можна обрати абсолютну помилку, тобто функцією помилки може бути – віднесла система до правильного класу чи не віднесла.

Системи машинного навчання це представлення даних і функцій оцінки цих даних на основі уявлення і узагальнення. Якщо система буде дуже узагальнені або дуже часткові моделі і не генералізує закономірність, то виникає проблема її перенавчання. Явище при якому результат моделі на наборі даних для тестування сильно відрізняється від актуальних даних називається перенавчанням. Суть процесу перенавчання полягає у поділі даних на дані для тренування і дані для тестування моделі. Для навчання використовується лише набір даних для тренування. Тестовий набір даних використовується для перевірки роботи алгоритму на раніше невідомих даних. Процес перенавчання системи залежить від якості тренувальної вибірки.

На сьогоднішній день дані стали таким самим важливим ресурсом у всіх галузях виробництва як трудові ресурси чи виробничі активи. За рахунок їх використання компанії можуть отримувати відчутні конкурентні переваги. Наприклад, у промисловості моделі та методи МН можуть бути використані для вирішення наступних завдань: прогнозування ринкової ситуації, маркетинг і оптимізація продажів, ухвалення управлінських рішень, ефективна логістика, моніторинг стану основних фондів і т.д.

Методи машинного навчання використовуються у системах машинного зору, для аналізу людської мови і текстів, ідентифікації об'єктів на зображеннях, веб-пошуку і фільтрації контенту тощо [20]. Сфери їх застосування медична діагностика, біоінформатика, передбачення відтоку клієнтів, категоризація документів, фінансовий нагляд, технічна діагностика, кредитний скорінг і т.д.

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Машинне навчання — це процес застосування алгоритмів для автоматичного знаходження закономірностей у даних і використання їх для прийняття великої кількості однотипних рішень. У результаті роботи алгоритмів певний відсоток помилок є допустимими. Методів машинного навчання існує дуже багато. Тому, набагато



важливіше розуміти, коли використання тих чи інших методів буде найбільш доцільним. З наукової точки зору машинне навчання – це процес моделювання, настройки параметрів, підготовки даних і оптимізації компонент. Ціль машинного навчання, як дослідницького процесу, це пошук оптимальних відповідей та прогнозів.

Перспективи подальших досліджень полягають у розв’язанні практичних прикладних задач використовуючи методи машинного навчання.

Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету «Розробка математичних моделей і методів для оброблення інформації та інтелектуального аналізу даних» (номер державної реєстрації 0115U004630).

### Список використаної літератури

1. Гладун А.Я., Рогушена Ю.В. Data mining: Пошук знань в даних. – К.: ТОВ «ВД «АДЕФ - Україна», 2016. – 452 с.
2. Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Технологическое предвидение. – Киев: ІВЦ «Вид-во «Політехніка», 2005. – 156 с.
3. Machine learning by Stanford university: веб-сайт. URL: <https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/welcome> (дата останнього звернення 01.06.2019).
4. Машинне навчання. Типи навчання: веб-сайт. URL: [https://courses.prometheus.org.ua/courses/IRF/ML101/2016\\_T3/about](https://courses.prometheus.org.ua/courses/IRF/ML101/2016_T3/about) (дата останнього звернення 01.06.2019).
5. Курс “Машинне навчання” від Prometheus: веб-сайт. URL: [https://courses.prometheus.org.ua/assets/courseware/cdf163c83c64f8357ddbcbdac82f7d624/c4x/IRF/ML101/asset/Тиждень\\_1\\_конспект](https://courses.prometheus.org.ua/assets/courseware/cdf163c83c64f8357ddbcbdac82f7d624/c4x/IRF/ML101/asset/Тиждень_1_конспект) (дата останнього звернення 08.04.2019).
6. Voroncov K. V. Algoritmy klasterizacii i mnogomernogo shkalirovaniya : kurs lekciy [Algorithms for clustering and multidimensional scaling : course of lectures], Moskovskij gosudarstvennyj universitet, Moscow, Russia. – 2007.
7. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning / C.M. Bishop. – NY: Springer. – 2006.
8. Ghamisi P. Advanced Spectral Classifiers for Hyperspectral Images: A review / P. Ghamisi, J. Plaza, Y. Chen et al // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. – Vol. 5, N 1. – 2017. – P. 8–32.
9. Воронцов К.В. Лекции по логическим алгоритмам классификации: веб-сайт. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/LogicAlgs.pdf> (дата останнього звернення 01.10.2019).
10. Hastie T. The Elements of Statistical Learning / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – Springer-Verlag, 2008.
11. Novikov A. The synthesis of information protection systems with optimal properties / Novikov, A. Rodionov // Complexity and Security. – Vol. 37. – 2008. – 307 p.
12. LeCun Y. Deep learning / Y. LeCun, B. Yoshua, H. Geoffrey // Nature. – Vol. 521, N 7553. – 2015. – P. 436–444.
13. Maulik U. Remote Sensing Image Classification: A survey of support-vector-machine-based advanced techniques / U. Maulik, D. Chakraborty // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. – Vol. 5, N 1. – 2017. – P. 33–52.
14. Huang F.J. Large-scale learning with SVM and convolutional nets for generic object categorization / F.J. Huang, Y. LeCun // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2006. – P. 284–291.
15. Pirotti F. Benchmark of machine learning methods for classification of a Sentinel-2 image / F. Pirotti, F. Sunar, M. Piragnolo // International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences. – Vol. 41. – 2016. – P. 335–340.
16. Breiman L. Random forests / L. Breiman // Machine learning. – Vol. 45, N 1. – 2001. – P. 5–32.
17. Chen T. XGBoost: A Scalable Tree Boosting System / Chen T., Guestrin C: веб-сайт. URL: <https://arxiv.org/abs/1603.02754> (дата останнього звернення 15.11.2019)
18. Lior Rokach Ensemble Methods for Classifiers - Boston: Springer. - 2005.

19. Ensemble Methods in Machine Learning: веб-сайт. URL: <https://towardsdatascience.com/ensemble-methods-in-machine-learning-what-are-they-and-why-use-them-68ec3f9fef5f> (дата останнього звернення 15.10.2019).
20. Zgurovsky M.Z. System Analysis: Theory and Applications / M.Z. Zgurovsky, N.D. Pankratova // Springer. — 2007. — 448 p.

**Sharkadi, M. M., Robotyshyn, M. V., Malyar, M. M.** Modeling of risk level of the socio-economic systems functioning.

In the process of human evolution, the nature of human activity changes and it is necessary "tools" are available for solving new problems. Recently, problems related to decision-making have become increasingly important. Particularly relevant are the problems of supporting decisions in the process of managing socio-economic systems. Decision-makers are usually faced with issues of information retrieval, uncertainty, and in some cases, conflict in the decision-making process. At the same time, it is assumed that the implementation of any of the variants of decisions implies the occurrence of certain consequences, the analysis and evaluation of which fully characterizes the chosen variant. Traditionally, complex analytical calculations, expert knowledge, modern information technology tools are used to evaluate the possible consequences.

The analysis of the existing practice of managing social and economic systems makes it possible to propose new directions of its optimization, which, in turn, provides an orientation to the programmed indicators of development of both internal system characteristics and parameters of the external environment, taking into account the forecast values of key parameters of the management object. It is the orientation to the projected development indicators that allows you to develop and implement effective strategies for managing processes in social and economic systems. The importance of owning the tools and techniques of forecasting for the economist and manager in today's context is undeniable.

The purpose of this work, based on the analysis of literature sources, is to draw conclusions about the features, perspectives of use and opportunities for the development of data mining in the current environment of computer technology.

The basic methods of machine learning are considered in the paper and the peculiarities and results of their application to solving problems of prediction problems are analyzed. In order to solve the problem, there is a need to identify what areas of technology development scientists need to improve and research.

Machine learning is a unit of a fairly broad field of science that studies artificial intelligence. Related algorithms are used to solve problems that often make it difficult or impossible to come up with an explicit algorithm for solving them.

**Keywords:** prediction, data mining, machine learning algorithms.

## References

1. Gladun, A.Y., & Rogushena, Y. V. (2016). *Data mining: Search for knowledge in data*. Kiev: ADEF - Ukraine LLC. [in Ukrainian]
2. Zgurovsky, M.Z., & Pankratova, N.D. (2005). *Technological foresight*. Kiev: Publishing House «Polytechnic Publishing House». [in Russian]
3. Machine learning by Stanford university: Website.(2019, June 1). Retrieved from <https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/welcome>.
4. Machine learning. Types of training: Website. (2019, June 1). Retrieved from [https://courses.prometheus.org/en/courses/IRF/ML101/2016\\_T3/about](https://courses.prometheus.org/en/courses/IRF/ML101/2016_T3/about). [in Ukrainian]
5. Machine Training course from Prometheus: website. (2019, April 4). Retrieved from : [https://courses.prometheus.org/assets/courseware/cdf163c83c64f8357ddbdac82f7d624/c4x/IRF/ML101/asset/Week\\_1\\_summary](https://courses.prometheus.org/assets/courseware/cdf163c83c64f8357ddbdac82f7d624/c4x/IRF/ML101/asset/Week_1_summary). [in Ukrainian]
6. Voroncov, K. V. (2007). *Algorithms of clustering and many-dimensional scaling: a course of lessons [Algorithms for clustering and multidimensional scaling: a course of lectures]*. Moscow State University, Moscow, Russia. [in Russian]
7. Bishop, C.M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. NY: Springer.
8. Ghamisi, P., Plaza, J. , Chen, Y., Li, J. & Plaza, A. J. (2017). Advanced Spectral Classifiers

- for Hyperspectral Images: A review. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 5(1), 8–32. 10.1109/MGRS.2016.2616418
9. Vorontsov, K.V. Lectures on logical classification algorithms: website. (2019, october 1) Retrieved from <http://www.ccas.ru/voron/download/LogicAlgs.pdf>.
  10. Hastie, T. Tibshirani, R., & Friedman, J. (2008). *The Elements of Statistical Learning*. Springer-Verlag.
  11. Novikov, & Rodionov, A. (2008). *The synthesis of information protection systems with optimal properties*. Complexity and Security, 37.
  12. LeCun, Y., Yoshua, B., & Geoffrey, H. (2015). Deep learning. *Nature*, 521(7553), 436–444.
  13. Maulik, U. & Chakraborty, D. (2017). Remote Sensing Image Classification: A survey of support-vector-machine-based advanced techniques. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine*, 5(1), 33–52.
  14. Huang F.J. Large-scale learning with SVM and convolutional nets for a generic object categorization / F.J. Huang, Y. LeCun // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. - 2006. P. 284–291.
  15. Pirotti, F., Sunar, F., & Piragnolo, M. (2016). Benchmark of machine learning methods for the classification of a Sentinel-2 image. *International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences*, 41, 335–340.
  16. Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine learning*, 45(1), 5–32.
  17. Chen, T., & Guestrin, C. (2019, November 15). XGBoost: A Scalable Tree Boosting System. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1603.02754>
  18. Rokach, L. (2005). *Ensemble Methods for Classifiers*. Boston: Springer.
  19. Ensemble Methods in Machine Learning: Website. (2019, November 15). Retrieved from <https://towardsdatascience.com/ensemble-methods-in-machine-learning-what-are-they-and-why-use-them-68ec3f9fef5f>.
  20. Zgurovsky, M.Z., & Pankratova, N.D. (2007). *System Analysis: Theory and Applications*. Springer.

Одержано 17.04.2020

## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.  
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

### References

1. Khol, M. (1962). Teoriya grupp [Group theory]. Moskow: Yz-vo ynostr. lit. [in Russian]
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Nazvanie [Title]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2019). Nazva [Title]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 1(34)*, 94–109. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).94-109](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva [Title]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97.* (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor, 106(2)*, 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

#### **Список використаної літератури**

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
  2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал.* 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
  3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика.* 2019. Вип. 1(34). С. 94–109. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).94-109](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109).
  4. Карпенко С. М. Назва. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф. Київ, 1997.* С. 21–22.
  5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
  6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor.* 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.
- 11) The manuscript should be carefully read.
- 12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Одержано 17.04.2020

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/author/submit/1>.  
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті). Об'єм анотації не менше 1800 символів.
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).  
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

## Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика*. 2019. Вип. 1(34). С. 94–109. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).94-109](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109).
4. Карпенко С. М. Назва. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

## References

1. Khol, M. (1962). Teoryia grupp [Group theory]. Moskow: Yz-vo ynostr. lit. [in Russian]
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Nazvanie [Title]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2019). Nazva [Title]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 1(34), 94–109. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1\(34\).94-109](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).94-109) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva [Title]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вичитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск №1 (36)*

2020

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),  
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), М. Ю. Бортош (технічний секретар),  
В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, Ф. Е. Гече, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко,  
К. В. Маринець, М. П. Моклячук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова,  
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88020, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,  
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського  
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: [f-mdt@uzhnu.edu.ua](mailto:f-mdt@uzhnu.edu.ua)