

**НАУКОВИЙ ВІСНИК**  
**Ужгородського університету**

ISSN 2616-7700 (print)  
2708-9568 (online)



*серія*

# **МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*випуск 38 № 1*

**2021**

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск 38 № 1*

Ужгород 2021

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УЖНУ «Говерла», 2021. Вип. 38, № 1. 169 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1)).

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чупов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 7 від 27 травня 2021 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.). Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus ICI Journals Master List. Рейтинг 73.66.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

© М. М. Маляр,  
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2021

© Ужгородський національний університет,  
2021

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

# SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Issue 38 No 1*

Uzhhorod 2021

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2021. Issue 38, No 1. 169 p.  
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1)).

## EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), Lect. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 7 dated by May 27, 2021.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by March 17, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus ICI Journals Master List. Evaluation is 73.66.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

# ЗМІСТ

## Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В.* Про частково впорядковані множини шостого порядку, що мають надсуперкритичний  $MM$ -тип . . . . . 7
2. *Бортош М. Ю.* 2-Спадкова звідність циклічних мономіальних матриць із фіксованими визначальними послідовностями над комутативним локальним кільцем . . . . . 16
3. *Боярищева Т. В., Капустей М. М., Сливка-Тилищак Г. І., Слюсарчук П. В.,* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій . . . . . 22
4. *Горбань Ю. С., Андреева Ю. А., Белік А. О.* Єдиність ентропійного розв'язку задачі Діріхле для модельного рівняння з виродженням . . . . . 33
5. *Зубарук О. В.* Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульованими 2-нільпотентним і 2-потентним елементами . . . . . 48
6. *Когутич О. І.* Дослідження задачі з нелокальною умовою А.М. Нахушева для диференціального рівняння поширення вологи . . . . . 55
7. *Петечук В. М., Петечук Ю. В.* Гомоморфізми матричних груп та кільця над асоціативними кільцями . . . . . 61
8. *Присяжний Х. М.* Граничні теореми гіллястого процесу з міграцією . . . . . 76
9. *Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю.* Локальні майже-кільця на елементарних абелевих групах порядку  $p^3$  . . . . . 85
10. *Щоголев С. А., Каранетров В. В.* Блочне розщеплення системи лінійних матричних диференціальних рівнянь . . . . . 94

## Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл . . . . . 105
2. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В.Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями . . . . . 114
3. *Гуляницький Л. Ф., Дубіна А. В.* Розв'язування задачі розміщення прямокутників на напівскінченній стрічці алгоритмами локального та табуйованого пошуку . . . . . 123
4. *Дяконюк Л.М., Мудрик А.С., Корольчук Я.А., Кондор М.І.* Розпізнавання математичних формул на базі даних СРОНМЕ . . . . . 137
5. *Кондрук Н. Е.* Використання мір подібності в методах класифікації . . . . . 143
6. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Структура сигнатурного кубу булевих алгебр . . . . . 149
7. *Шаркаді М. М.* Нейро-нечітке моделювання у системі управління фінансово-економічною безпекою . . . . . 157

# CONTENTS

## Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On posets of sixth order having oversuper-critical  $MM$ -type ..... 7
2. *Bortos M. Yu.* 2-Hereditary reducibility of cyclic monomial matrices with fixed determining sequences over a commutative local ring ..... 16
3. *Bojarishcheva T. V., Kapustey M. M., Slyvka-Tylyshchak G. I., Slyusarchuk P. V.* The estimate of rate of convergence in the central limit theorem for the sequence of series ..... 22
4. *Gorban Yu. S., Andreieva Yu. A., Belik A. O.* The uniqueness of the entropy solution of the Dirichlet problem for a model degenerate equation ..... 33
5. *Zubaruk O. V.* On the Auslander algebra of a semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements ..... 48
6. *Kohutych O. I.* Investigation of the problem with the non-local condition A.M. Nakhushhev for the differential equation of moisture distribution ..... 55
7. *Petechuk V. M., Petechuk Y. V.* Homomorphisms of matrix groups and rings over associative rings ..... 61
8. *Prysyazhnyk K. M.* Boundary theorems of branching process with migration ..... 76
9. *Raievska I. Yu., Raievska M. Yu.* Local nearrings on elementary Abelian groups of order  $p^3$  ..... 85
10. *Shchogolev S. A., Karapetrov V. V.* Block separation of the system of the linear matrix differential equations ..... 94

## Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F.* Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part1. Surface Rayleigh waves along curvilinear boundaries (cylinder, sphere) of prestressed bodies ..... 105
2. *Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F.* Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 2. Flat dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses ..... 114
3. *Hulianytskyi L. F., Dubina A. V.* Solve problems of placing rectangles on a semi-infinite tape of local and taboo search algorithms ..... 123
4. *Diakoniuk L. M., Mudryk A. S., Korolchuk Y. A., Kondor M. I.* Object detection of the mathematical symbols based on the CROHME dataset ..... 137
5. *Kondruk N. E.* Use of similarity measures in classification methods ..... 143
6. *Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.* Structure of signature cube of boolean algebra ..... 149
7. *Sharkadi M. M.* Neuro-fuzzy modeling in the financial-economic security management system ..... 157

UDC 512.53, 512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).7-15](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).7-15)**V. M. Bondarenko<sup>1</sup>, M. V. Styopochkina<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,  
leading researcher of the department of algebra and topology,  
doctor of physical and mathematical sciences

vitalij.bond@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

<sup>2</sup> Polissia National University,  
associate professor of higher and applied mathematics,  
candidate of physical and mathematical sciences

stmar@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

## ON POSETS OF SIXTH ORDER HAVING OVERSUPERCritical MM-TYPE

Representations of posets (partially ordered sets) were introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter in 1972. In the same year M. M. Kleiner proved that a poset  $S$  is of finite representation type if and only if it does not contain subposets of the form  $K_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  and  $K_5 = (N, 4)$ . These posets are called critical posets relative to the finiteness of type (in the sense that they are minimal posets with an infinite number, up to equivalence, of indecomposable representations) or the Kleiner's posets. In 1974 Yu. A. Drozd proved that a poset  $S$  has finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors). Consequently, the Kleiner's posets are critical relative to weak positivity of the Tits quadratic form, and there are no (up to isomorphism) other such posets. In 2005 the authors proved that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset.

A similar situation takes place for posets of tame representation type. In 1975 L. A. Nazarova proved that a poset  $S$  is tame if and only if it does not contain subsets of the form  $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$  and  $(N, 5)$ . She called these posets supercritical; they are critical relative to weak non-negativity of the Tits quadratic form and there are no other such posets. In 2009 the authors proved that a poset is critical relative to non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset.

The first author suggested to introduce posets (called oversupercritical), which differ from supercritical sets in the same degree as the latter differ from critical ones. Among these posets, there are four of the smallest order, namely 6. In this article, we describe all posets that are minimax isomorphic to them and study some of their combinatorial properties. The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are  $\mathbb{Z}$ -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined  $\mathbb{Z}$ -equivalence of the Tits quadratic forms for posets.

**Keywords:** representation, critical and supercritical poset, oversupercritical poset, Tits quadratic form, finite and tame representation type, positivity and weak positivity, non-negativity and weak non-negativity.



**1. Introduction.** M. M. Kleiner [1] proved that a poset  $S$  is of finite representation type (i.e. has only a finite number of equivalence classes of indecomposable representations) if and only if it does not contain (full) subposets of the form  $K_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  and  $K_5 = (N, 4)$ , which are called *critical posets*. Now they are called (critical) *Kleiner's posets*. On the other hand, Yu. A. Drozd [2] showed that a poset has finite representation type if and only if its Tits quadratic form is weakly positive (i.e., positive on the set of nonnegative vectors). Consequently, the critical posets are also critical relatively to the weak positivity of the Tits quadratic form. In [3] the authors proved that a poset is critical relatively to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset (such isomorphism was introduced by the first author in [4]); in this paper all such posets are fully described (they are named by the authors as  $P$ -critical).

A similar situation takes place for tame posets. A poset  $S$  is tame if and only if it does not contain subsets of the form  $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$ ,  $(N, 5)$  [5], and this is equivalent to the weak non-negativity of the Tits quadratic form of  $S$ ; these posets are called *supercritical*. In [6] the authors proved that a poset is critical relatively to the non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset. In [7] all such posets are fully described (they are named by the authors as  $NP$ -critical).

The importance of studying minimax isomorphic posets (introduced in [4]) is determined by the fact that their Tits quadratic forms are  $\mathbb{Z}$ -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined  $\mathbb{Z}$ -equivalence for posets.

In [8] were introduced *1-oversupercritical posets* which differ from supercritical sets in the same degree as the latter differ from critical ones; often, including in this article, they are simply called *oversupercritical*. Among these posets, namely the posets of the forms

- 1)  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,    2)  $(1, 1, 1, 1, 2)$ ,    3)  $(1, 1, 2, 2)$ ,
- 4)  $(1, 1, 1, 3)$ ,    5)  $(2, 3, 3)$ ,    6)  $(2, 2, 4)$ ,    7)  $(1, 4, 4)$ ,
- 8)  $(1, 3, 5)$ ,    9)  $(1, 2, 7)$ ,    10)  $(N, 6)$ ,

here are four of the smallest order, which is equal to 6 (for posets  $X, Y, Z=(X,Y)$  denotes their direct sum, i.e.  $Z = X \cup Y$  and any elements  $x \in X$  and  $y \in Y$  are incomparable;  $(m)$  denotes the linearly ordered set of order  $m$ ). In this article, we describe all posets that are minimax isomorphic to them and study some of their combinatorial properties.

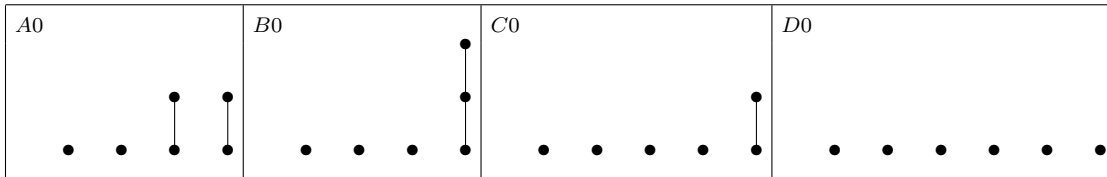
**2. The main result.** Throughout the paper, all posets are finite.

Let  $S$  be a poset. For a minimal (resp. maximal) element  $a$  of  $S$ , denote by  $T = S_a^\uparrow$  (respect.  $T = S_a^\downarrow$ ) the following poset:  $T = S$  as usual sets,  $T \setminus a = S \setminus a$  as posets, the element  $a$  is maximal (resp. minimal) in  $T$ , and  $a$  is comparable with  $x$  in  $T$  if and only if they are incomparable in  $S$ . Two posets  $S$  and  $T$  are called (min, max)-*equivalent* if there are posets  $S_1, \dots, S_p$  ( $p \geq 0$ ) such that, if we put  $S = S_0$  and  $T = S_{p+1}$ , then, for every  $i = 0, 1, \dots, p$ , either  $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$  or  $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$  [4]. Obviously, any poset is (min, max)-equivalent to itself. Since some time we also use the term *minimax equivalence*.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of

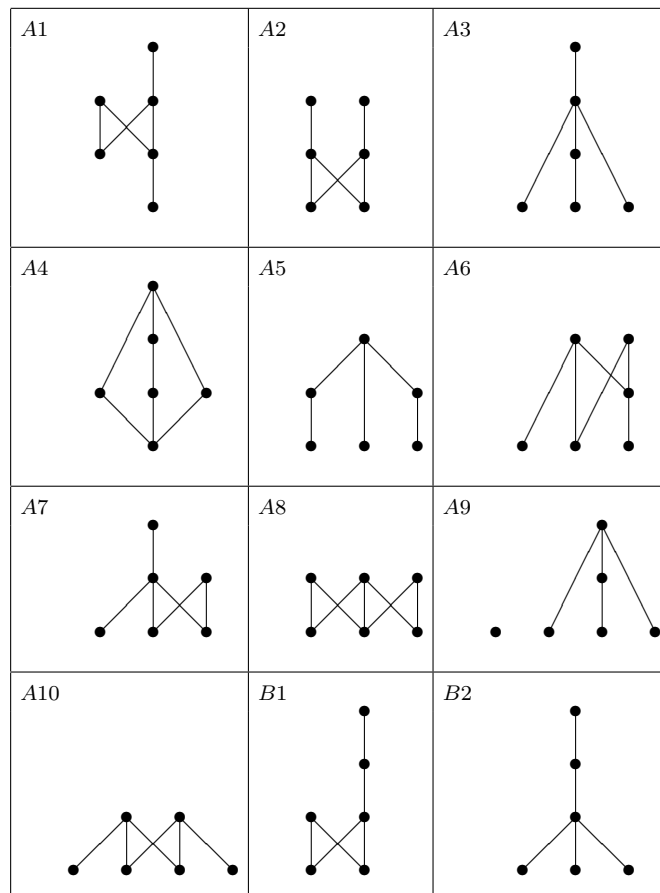
*minimax isomorphism*: posets  $S$  and  $S'$  are minimax isomorphic if there exists a poset  $T$ , which is minimax equivalent to  $S$  and isomorphic to  $S'$ .

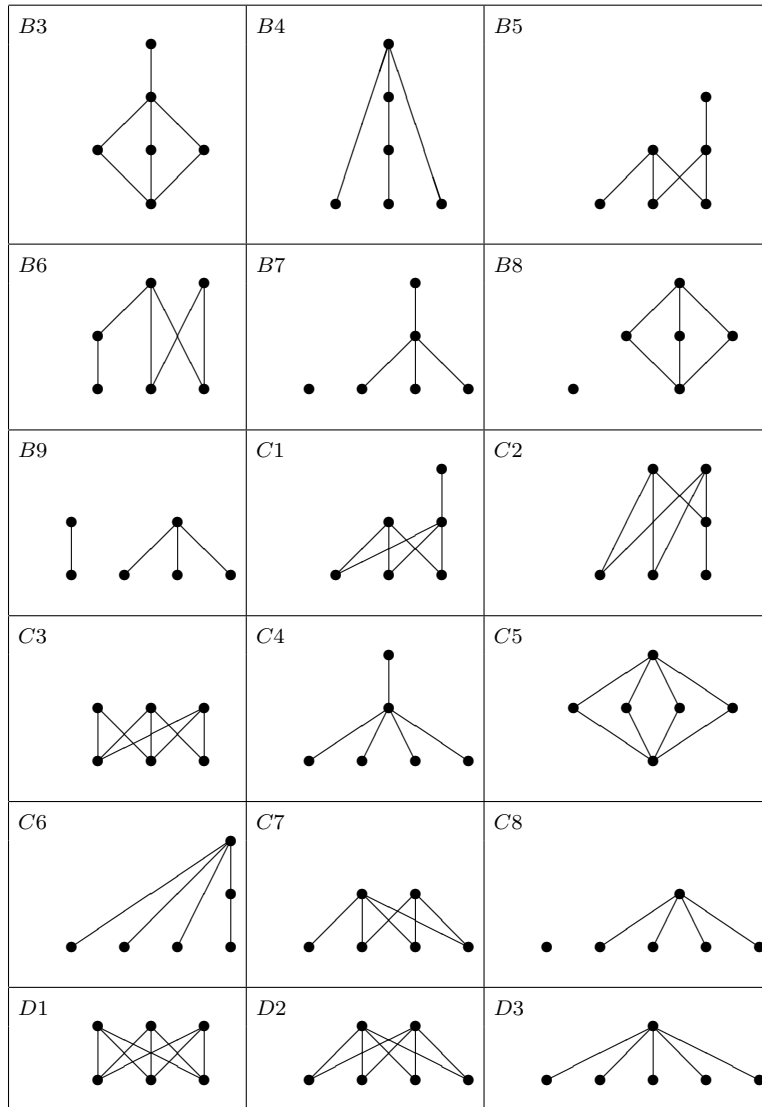
Let  $P$  be a fix poset. A poset  $S$  is called of *MM-type  $P$*  if  $S$  is minimax isomorphic to  $P$  [12]. In the case when the poset  $P$  is an oversupercritical one we say that  $S$  is of *oversupercritical MM-type*. Posets of such type were studied in many papers (see [8] – [14]). In particular, the work [8] describes all posets minimax isomorphic to  $(1, 3, 5)$  and  $(1, 2, 7)$ . The main result of this paper describes all posets of oversupercritical *MM-type* in the case when  $P$  runs through all oversupercritical posets of order 6, i.e. it has (up to isomorphism) one of the following forms  $A0$ – $D0$ :



Recall that a poset  $T$  is called *dual* to a poset  $S$  and is denoted by  $S^{op}$  if  $T = S$  as usual sets and  $x < y$  in  $T$  if and only if  $x > y$  in  $S$ .

**Theorem 1.** *Up to isomorphism and duality, the complete set of posets minimax isomorphic to  $A0, B0, C0, D0$  consists, in addition to  $A0$ – $D0$  themselves, of the posets indicated in the following table ( $A_i, B_j, C_k, D_s$  are, respectively, minimax isomorphic to  $A0, B0, C0, D0$ ):*





**3. Proof of Theorem 1.** The definition of posets of the form  $T = S_a^\uparrow$  can be extended to posets of the form  $T = S_A^\uparrow$ , where  $A$  is a lower subposet of  $S$ , i.e.  $x \in A$  whenever  $x < y$  and  $y \in A$ . Namely,  $T = S_A^\uparrow$  is defined as follows:  $T = S$  as usual sets, partial orders on  $A$  and  $S \setminus A$  are the same as before, but comparability and incomparability between elements of  $x \in A$  and  $y \in S \setminus A$  are interchanged and the new comparability can only be of the form  $x > y$ . In the special case, when  $A = \{a\}$  is a one-element subposet, we identify  $A$  with  $a$ . Instead of  $(S_A^\uparrow)_B^\uparrow$  write  $S_{AB}^{\uparrow\uparrow}$ .

Let  $S$  be a poset. For subposets  $X, Y$  of  $S$ ,  $X < Y$  means that  $x < y$  for any  $x \in X, y \in Y$ . We call subposets  $X$  and  $X'$  of  $S$  *strongly isomorphic* if there exists an automorphism  $\varphi : S \rightarrow S$  such that  $\varphi(X) = X'$  (as equality of subposets). Similarly, pairs  $(Y, X)$  and  $(Y', X')$  of subposets of  $S$  are called *strongly isomorphic* if there exists an automorphism  $\varphi : S \rightarrow S$  such that  $\varphi(Y) = Y'$  and  $\varphi(X) = X'$ .

In [3], the authors propose the following algorithm for finding (up to isomorphism) all posets that are minimax isomorphic to a given one.

**I.** Describe, up to strongly isomorphic, all lower subposets of  $P \neq S$  in  $S$ , and, for every of them, build the poset  $S_P^\uparrow$  ( $P = \emptyset$  is not excluded).

**II.** Describe, up to strongly isomorphic, all pairs  $(Q, P)$  consisting of a proper lower subposet  $Q$  in  $S$  and a nonempty lower subposet  $P$  in  $Q$  such that  $P < S \setminus Q$ ; for every such pair, build the poset  $S_{QP}^{\uparrow\uparrow}$ .

**III.** Among the posets obtained in I and II, choose one from each class of isomorphic posets.

For each poset  $A0, B0, C0, D0$  (see the first table), we denote the partial order by  $\prec$  and number the points with numbers  $1, 2, 3, \dots$  in such a way that  $i < j$  whenever  $i \prec j$  or  $i$  is (in the picture) to the left of  $j$ . Then the posets  $A0, B0, C0, D0$  consist of the numbers  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  and we have  $3 \prec 4, 5 \prec 6$  for  $A0$ ,  $4 \prec 5 \prec 6$  for  $B0$ ,  $5 \prec 6$  for  $C0$ , and the empty set of relations for  $D0$ .

Now we apply our algorithm to the proof of the theorem.

**Step I.** Describe (up to strongly isomorphic) all lower subposets. They are:

for  $A0$  —  $X_0 = \emptyset$ ,  $X_1 = \{1\}$ ,  $X_2 = \{3\}$ ,  $X_3 = \{1, 2\}$ ,  $X_4 = \{1, 3\}$ ,  $X_5 = \{3, 4\}$ ,  $X_6 = \{3, 5\}$ ,  $X_7 = \{1, 2, 3\}$ ,  $X_8 = \{1, 3, 4\}$ ,  $X_9 = \{1, 3, 5\}$ ,  $X_{10} = \{3, 4, 5\}$ ,  $X_{11} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X_{12} = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  $X_{13} = \{1, 3, 4, 5\}$ ,  $X_{14} = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $X_{15} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $X_{16} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ ;

for  $B0$  —  $Y_0 = \emptyset$ ,  $Y_1 = \{1\}$ ,  $Y_2 = \{4\}$ ,  $Y_3 = \{1, 2\}$ ,  $Y_4 = \{1, 4\}$ ,  $Y_5 = \{4, 5\}$ ,  $Y_6 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y_7 = \{1, 2, 4\}$ ,  $Y_8 = \{1, 4, 5\}$ ,  $Y_9 = \{4, 5, 6\}$ ,  $Y_{10} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y_{11} = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $Y_{12} = \{1, 4, 5, 6\}$ ,  $Y_{13} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y_{14} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ ;

for  $C0$  —  $Z_0 = \emptyset$ ,  $Z_1 = \{1\}$ ,  $Z_2 = \{5\}$ ,  $Z_3 = \{1, 2\}$ ,  $Z_4 = \{1, 5\}$ ,  $Z_5 = \{5, 6\}$ ,  $Z_6 = \{1, 2, 3\}$ ,  $Z_7 = \{1, 2, 5\}$ ,  $Z_8 = \{1, 5, 6\}$ ,  $Z_9 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Z_{10} = \{1, 2, 3, 5\}$ ,  $Z_{11} = \{1, 2, 5, 6\}$ ,  $Z_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Z_{13} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ ;

for  $D0$  —  $T_0 = \emptyset$ ,  $T_1 = \{1\}$ ,  $T_2 = \{1, 2\}$ ,  $T_3 = \{1, 2, 3\}$ ,  $T_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $T_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Denote by  $K_{i,j}$  the poset  $S_V^{\uparrow}$  for  $i = 1$ ,  $S = A_0$  and  $V = X_j$ ,  $i = 2$ ,  $S = B_0$  and  $V = Y_j$ ,  $i = 3$ ,  $S = C_0$  and  $V = Z_j$ ,  $i = 4$ ,  $S = D_0$  and  $V = T_j$ . Then it is easy to see that

$K_{1,0} \cong A0$ ,  $K_{1,1} \cong A5$ ,  $K_{1,2} \cong A9$ ,  $K_{1,3} \cong A2^{\text{op}}$ ,  $K_{1,4} \cong A6$ ,  $K_{1,5} \cong A3$ ,  $K_{1,6} \cong A10$ ,  $K_{1,7} \cong A7^{\text{op}}$ ,  $K_{1,8} \cong A1$ ,  $K_{1,9} \cong A8$ ,  $K_{1,10} \cong A7$ ,  $K_{1,11} \cong A10^{\text{op}}$ ,  $K_{1,12} \cong A3^{\text{op}}$ ,  $K_{1,13} \cong A6^{\text{op}}$ ,  $K_{1,14} \cong A2$ ,  $K_{1,15} \cong A9^{\text{op}}$ ,  $K_{1,16} \cong A5^{\text{op}}$ ;

$K_{2,0} \cong B0$ ,  $K_{2,1} \cong B4$ ,  $K_{2,2} \cong B9$ ,  $K_{2,3} \cong B1^{\text{op}}$ ,  $K_{2,4} \cong B6$ ,  $K_{2,5} \cong B7$ ,  $K_{2,6} \cong B2^{\text{op}}$ ,  $K_{2,7} \cong B5^{\text{op}}$ ,  $K_{2,8} \cong B5$ ,  $K_{2,9} \cong B2$ ,  $K_{2,10} \cong B7^{\text{op}}$ ,  $K_{2,11} \cong B6^{\text{op}}$ ,  $K_{2,12} \cong B1$ ,  $K_{2,13} \cong B9^{\text{op}}$ ,  $K_{2,14} \cong B4^{\text{op}}$ ;

$K_{3,0} \cong C0$ ,  $K_{3,1} \cong C6$ ,  $K_{3,2} \cong C8$ ,  $K_{3,3} \cong C2$ ,  $K_{3,4} \cong C7$ ,  $K_{3,5} \cong C4$ ,  $K_{3,6} \cong C1^{\text{op}}$ ,  $K_{3,7} \cong C3$ ,  $K_{3,8} \cong C1$ ,  $K_{3,9} \cong C4^{\text{op}}$ ,  $K_{3,10} \cong C7^{\text{op}}$ ,  $K_{3,11} \cong C2^{\text{op}}$ ,  $K_{3,12} \cong C8^{\text{op}}$ ,  $K_{3,13} \cong C6^{\text{op}}$ ;

$K_{4,0} \cong D0$ ,  $K_{4,1} \cong D3$ ,  $K_{4,2} \cong D2$ ,  $K_{4,3} \cong D1$ ,  $K_{4,4} \cong D2^{\text{op}}$ ,  $K_{4,5} \cong D3^{\text{op}}$ .

**Step II.** Describe (up to strongly isomorphic) all pairs of lower subposets (see the algorithm). They are:

for  $A0$  —  $X'_1 = (X_{15}, \{5\})$ ;

for  $B0$  —  $Y'_1 = (Y_{10}, \{4\})$ ,  $Y'_2 = (Y_{13}, \{4\})$ ,  $Y'_3 = (Y_{13}, \{4, 5\})$ ;

for  $C0$  —  $Z'_1 = (Z_{12}, \{5\})$ ;

for  $D0$ , there are no such pairs.

Denote by  $K'_{i,j}$  the poset  $(S_V^{\uparrow})_W^{\uparrow}$  for  $i = 1$ ,  $S = A_0$  and  $(V, W) = X'_j$ ,  $i = 2$ ,  $S = B_0$  and  $(V, W) = Y'_j$ ,  $i = 3$ ,  $S = C_0$  and  $(V, W) = Z'_j$ . Then it is easy to see that  $K'_{1,1} \cong A4$ ;  $K'_{2,1} \cong B3^{\text{op}}$ ,  $K'_{2,2} \cong B8$ ,  $K'_{2,3} \cong B3$ ;  $K'_{3,1} \cong C5$ .

**Step III.** It is easy to verify that in I and II each of the posets  $Ai, Bk, Cl, Ds$ ,

indicated in the condition of the theorem, and dual to them (in the non-dual cases) occurs only once. And hence the theorem is proved.

**4. Coefficientts of transitivity.** Let  $S$  be a (finite) poset and  $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$ . If  $(x, y) \in S_{<}^2$  and there is no  $z$  satisfying  $x < z < y$ , then we say that  $x$  and  $y$  are *neighboring*. We put  $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$  and denote by  $n_e = n_e(S)$  the number of pairs of neighboring elements. The ratio  $k_t = k_t(S)$  of the numbers  $n_w - n_e$  and  $n_w$  are called the *coefficient of transiteness of  $S$* ; if  $n_w = 0$  (then  $n_e = 0$ ), we assume  $k_t = 0$  (the coefficient of transitivity is introduced in [15]).

In this part of the paper we calculate  $k_t$  for the posets of  $MM$ -type to be  $A0, B0, C0, D0$ .

**Theorem 2.** *The following holds for posets  $Ai, Bj, Ck, Ds$ :*

$N$	$n_e$	$n_w$	$k_t$
$A0$	2	2	0
$B0$	2	3	0,33333
$C0$	1	1	0
$D0$	0	0	0

$N$	$n_e$	$n_w$	$k_t$	$N$	$n_e$	$n_w$	$k_t$	$N$	$n_e$	$n_w$	$k_t$
$A1$	6	11	0,45455	$B1$	6	11	0,45455	$C2$	7	9	0,22222
$A2$	6	10	0,4	$B2$	5	12	0,58333	$C3$	8	8	0
$A3$	5	10	0,5	$B3$	7	12	0,41667	$C4$	5	9	0,44444
$A4$	7	10	0,3	$B4$	5	8	0,375	$C5$	8	9	0,11111
$A5$	5	7	0,28571	$B5$	6	8	0,25	$C6$	5	6	0,16667
$A6$	6	8	0,25	$B6$	6	7	0,14286	$C7$	7	7	0
$A7$	6	9	0,33333	$B7$	4	7	0,42857	$C8$	4	4	0
$A8$	7	7	0	$B8$	6	7	0,14286	$D1$	9	9	0
$A9$	4	5	0,2	$B9$	4	4	0	$D2$	8	8	0
$A10$	6	6	0	$C1$	7	10	0,3	$D3$	5	5	0

The transitivity coefficients are written out with an accuracy of five decimal places. The value is exact if and only if the number of decimal places is less than five, and two values equal to exactly five digits are equal at all.

The proof is carried out by direct calculations.

Recall that the greatest length among the lengths of all linear ordered subsets of a poset  $S$  is called its *height* and the greatest number of pairwise incomparable elements of  $S$  is called its *weight*. An element of a poset is called *nodal*, if it is comparable with all the others elements. A subposet  $X$  of  $T$  is said to be *dense* if there is not  $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$  such that  $x_1 < y < x_2$ .

Note that a poset of  $MM$ -type  $A0$ – $D0$  can have at most three nodal elements.

**Corollary 1.** *The coefficient  $k_t(S)$  of a poset  $S$  is the largest among all the posets of  $MM$ -type  $A0$ – $D0$  if and only if  $S$  contains a dense subposet with three nodal elements.*

**Corollary 2.** *The coefficient  $k_t(S)$  of a poset  $S$  is the smallest among all the posets of  $MM$ -type  $A0$ – $D0$  if and only if  $S$  is a self-dual connected poset of height two.*

**Corollary 3.** For a posets  $S$  of MM-type A0–D0, the following conditions are equivalent:

- (a)  $k_t(S) = \frac{1}{2}$ ;
- (b)  $S$  is a non-self-dual poset of width three with two nodal elements.

**5. Conclusions.** In this article we study combinatorial aspects of oversupercritical posets which differ from supercritical sets in the same degree as the latter differ from critical ones. Namely, we describe, up to isomorphism, all the posets that are minimax isomorphic to oversupercritical posets of the order 6.

The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are  $\mathbb{Z}$ -equivalent. This allowed the authors (earlier)

(1) to prove that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset;

(2) to prove that a poset is critical relatively to the non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset;

(3) to describe all the posets mentioned in (1) and (2),

and also to solve a number of other problems, which were not mentioned in this article and, in particular,

(4) to describe, up to isomorphism, all posets with the Tits quadratic form to be positive.

We also describe the transitivity coefficients for all posets minimax isomorphic to oversupercritical posets of the order 6.

The obtained results (together with the corresponding research methods) will be used in the study of combinatorial aspects of other classes of posets.

## References

1. Kleiner, M.M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 32–41 [in Russian].
2. Drozd, Yu.A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 8, 3, 34–42 [in Russian].
3. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2, 3, 18–58 [in Russian].
4. Bondarenko, V.M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24–25 [in Russian].
5. Nazarova, L.A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39, 5, 963–991 [in Russian].
6. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2008). (Min, max)-equivalence of posets and non-negative Tits forms. *Ukr. Math. J.* 60(9), 1157–1167 [in Russian].
7. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukr. Math. J.*, 61(5), 611–624 [in Russian].
8. Bondarenko, V.V., Bondarenko, V.M., Styopochkina, M.V., & Chervyakov, I.V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. I. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 22, 2, 17–25 [in Russian].
9. Bondarenko, V.V., & Styopochkina, M.V. (2013). Non-primitive 1-oversupercritical partially ordered set and min-equivalence. *Scien. J. of NPU named after Dragomanov. Series 1. Phys.-Math. sciences*, 14, 55–61 [in Russian].
10. Styopochkina, M.V., & Chervyakov, I.V. (2015) The number of partially ordered sets, (min, max)-equivalent to the set (1, 2, 7). *Applied problems of mech. and math.*, 13, 18–21

- [in Ukrainian].
11. Styopochkina, M.V., & Chervyakov, I. V. (2016). The number of partially ordered sets, (min, max)-equivalent to the 1-oversupercritical partially ordered set (1, 3, 5). *Applied problems of mech. and math.*, 14, 12-15 [in Ukrainian].
  12. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2018). On properties of posets of  $MM$ -type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 1(32), 50-53.
  13. Bondarenko, V.M., Orlovskaia, Yu.M., & Styopochkina, M.V. (2018). On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Applied problems of mech. and math.*, 16, 30-32.
  14. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2019). On properties of posets of  $MM$ -type (1, 2, 7). *Applied problems of mech. and math.*, 17, 7-10.
  15. Bondarenko, V.M., & Styopochkina, M.V. (2017). Coefficients of transitiveness of P-critical posets. *Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine*, 1(14), 46-51.

## Бондаренко В. М., Стъпочкіна М. В. Про частково впорядковані множини шостого порядку, що мають надсуперкритичний $MM$ -тип.

Зображення ч. в. множин (частково впорядкованих множин) ввели Л. А. Назарова і А. В. Ройтер в 1972 р. В тому ж році М. М. Клейнер довів, що ч. в. множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вони не містить ч. в. підмножин вигляду  $K_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  і  $K_5 = (N, 4)$ . Ці ч. в. множин називаються критичними ч. в. множин щодо скінченності типу (в тому сенсі, що це мінімальні ч. в. множин з нескінченною кількістю нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності) або ч. в. множинами Клейнера. У 1974 році Ю. А. Дрозд довів, що ч. в. множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

є слабо додатною (тобто додатною на множині невід'ємних векторів). Отже, ч. в. множини Клейнера є критичними щодо слабкої додатності квадратичної форми Тітса, і інших таких ч. в. множин немає (з точністю до ізоморфізму). У 2005 році автори довели що ч. в. множин є критичною щодо додатності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона є мінімаксно ізоморфна деякій ч. в. множині Клейнера.

Подібну ситуацію маємо з ч. в. множинами ручного зображувального типу. У 1975 р. Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина  $S$  є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду  $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$  і  $(N, 5)$ . Вона назвала ці ч. в. множини суперкритичними; вони є критичними щодо слабкої невід'ємності квадратичної форми Тітса, і інших таких ч. в. множин немає. У 2009 році автори довели, що ч. в. множина є критичною щодо невід'ємності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій суперкритичній ч. в. множині.

Перший автор запропонував ввести ч. в. множини (названі надсуперкритичними), які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин в тій самій мірі, що і останні відрізняються від критичних. Серед цих ч. в. множин є чотири найменшого порядку, а саме 6. У цій статті ми описуємо всі ч. в. множини мінімаксно еквівалентні їм, і вивчаємо деякі їхні комбінаторні властивості. Важливість вивчення мінімаксно ізоморфних ч. в. множин визначається тим фактом, що їх квадратичні форми Тітса  $\mathbb{Z}$ -еквівалентні, а сам мінімаксний ізоморфізм є досить загальною конструктивно визначеною  $\mathbb{Z}$ -еквівалентністю для квадратичних форм Тітса ч. в. множин.

**Ключові слова:** зображення, критична та суперкритична ч. в. множина, надсуперкритична ч. в. множина, квадратична форма Тітса, скінченний і ручний зображувальний тип, додатність і слабка додатність, негативність і слабка негативність.

## Список використаної літератури

1. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 32-41.
2. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, Вып. 3. С. 34-42.
3. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, №3. С. 18-58.
4. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*. 2005. No.1. С. 24-25.
5. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР*. 1975. Т. 39, Вып. 5. С. 963-991.
6. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2008. Т. 60, №9. С. 1157-1167.
7. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Ukr. Math. J.*, 2009. Т. 61, №5. С. 734-746.
8. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В. 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2011. Вып. 22, №2. С. 17-25.
9. Бондаренко В. В., Степочкина М. В. Непрimitивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность. *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*. 2013. №14. С. 55-61.
10. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7). *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2015. Вып. 13. С. 18-21.
11. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній частково впорядкованій множині (1, 3, 5). *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2016. Вып. 14. С. 12-15.
12. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.* 2018. Issue No. 1 (32). P. 50-53.
13. Bondarenko V. M., Orlovskaja Yu. M., Styopochkina M. V. On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2018. Вып. 16. С. 30-32.
14. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type (1, 2, 7). *Прикл. проблеми мех. і мат.* 2019. Вып. 17. С. 7-10.
15. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Coefficients of transitivity of P-critical posets. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2017. Т.14, No.1. С. 46-51.

Received 27.04.2021



УДК 512.643.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).16-21](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).16-21)**М. Ю. Бортош**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

старший викладач кафедри алгебри,

канд. фіз.-мат. наук

maria.bortos@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

## 2-СПАДКОВА ЗВІДНІСТЬ ЦИКЛІЧНИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ІЗ ФІКСОВАНИМИ ВИЗНАЧАЛЬНИМИ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ НАД КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

Властивості канонічно циклічних та ланцюгових мономіальних матриць над комутативними кільцями вивчалися в багатьох роботах, зокрема їх звідність та незвідність, розкладність і нерозкладність. Відомі критерії незвідності канонічно циклічних матриць малого порядку  $n$  над комутативним локальним кільцем  $K$  з радикалом  $R = tK \neq 0$  ( $n < 7$  для  $R \neq 0$  і  $n < 5$  для  $R^2 \neq 0$ ), а також необхідна умова незвідності канонічно циклічних матриць довільної ваги, в якій основну роль відіграє зв'язок між порядком та вагою матриці. При дослідженні канонічно циклічних мономіальних матриць порядку  $n$  розглядалися різні типи звідності:  $(*, 2)$ -звідність,  $(*, 3)$ -звідність та 2-спадкова звідність. В роботі розглядається комутативне локальне кільце  $K$  з ненульовим радикалом  $R = \text{Rad}K$  і ненульовий нільпотентний елемент  $t \in R$  такий, що  $t^m = 0$ , де  $m$  – степінь нільпотентності елемента  $t$ . Для канонічно циклічних матриць визначені визначальні та вагові послідовності. Вивчаються достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем  $K$ . Доведена 2-спадкова звідність канонічно  $(t, *)$ -циклічних мономіальних матриць великої ваги порядку  $n$  над комутативним локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду. Під підпослідовністю послідовності завжди розуміється зв'язна (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність. Основними методами дослідження є методи теорії зображень та матричних задач, метод елементарних перетворень матриць з комбінаторними аспектами.

**Ключові слова:** мономіальна матриця, канонічно циклічна матриця, комутативне кільце, визначальна послідовність, звідність, спадкова звідність.

**1. Вступ.** Матриці малих розмірів та канонічно циклічні матриці над локальними кільцями вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1]– [6]).

Нехай  $K$  — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею*  $A = (a_{ij})$  над  $K$  будемо розуміти матрицю порядку  $n$  (тобто, розміру  $n \times n$ ), в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть не більше одного ненульового елемента.

Будь-яка циклічна мономіальна матриця порядку  $n$  над кільцем  $K$  переставно подібна матриці вигляду

$$A = M_t(\bar{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ . Така матриця  $A$  називається *канонічно циклічною*, а послідовність  $\bar{a}$  — її *визначальною послідовністю*.

Відносно вищеприведених означень і позначень див., напр., [5].

Нехай  $K$  позначає комутативне локальне кільце головних ідеалів, що не є полем. Групу оборотних елементів кільця  $K$  (відносно множення) позначатимемо через  $K^*$ . Тоді єдиний максимальний ідеал (радикал)  $R$  кільця  $K$  дорівнює  $tK \neq 0$ , де  $t$  визначається однозначно з точністю до оборотного множника, і будь-який елемент  $x \in K$  має вигляд  $\varepsilon t^s$ , де  $\varepsilon \in K^*$  і  $s \geq 0$ . Число  $s$  (яке не залежить від вибору  $t$ ) називаємо *вагою елемента  $x$* . Якщо  $K$  — комутативне локальне кільце (не обов'язково головних ідеалів) і  $t$  — елемент радикала кільця, то канонічно циклічну матрицю  $M$  з визначальною послідовністю  $\bar{a} = (\varepsilon_1 t^{s_1}, \dots, \varepsilon_{n-1} t^{s_{n-1}}, \varepsilon_n t^{s_n})$  будемо називати *канонічно  $(t, *)$ -циклічною*.

**2. Теореми про 2-спадкову звідність.** Канонічно циклічна матриця  $A$  називається *2-спадково звідною*, якщо подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

де діагональні блоки  $A_{11}$  і  $A_{22}$  є також канонічно циклічними [6].

Далі вважатимемо, що  $K$  — комутативне локальне кільце з радикалом  $R \neq 0$  і  $t$  — ненульовий елемент із  $R$  такий, що  $t^m = 0, t^{m-1} \neq 0$ .

Під підпослідовністю послідовності завжди розуміємо зв'язну (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність.

Введемо позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем  $K$ .  $P_{ij}(a)$  позначає додавання  $i$ -го рядка, помноженого на елемент  $a \in K$ , до  $j$ -го рядка.  $Q_{ij}(a)$  позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через  $[m \xrightarrow{a} s]^+$  позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення  $P_{ms}(a)$ , а потім обернене до нього перетворення  $Q_{sm}(-a)$ , а через  $[m \xrightarrow{a} s]^-$  — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення  $Q_{ms}(a)$ , а потім обернене до нього перетворення  $P_{sm}(-a)$ .

**Теорема 1.** *Канонічно  $(t, *)$ -циклічна матриця 2-спадково звідна над кільцем  $K$ , якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності  $(t^i, t^{p+q}, t^j)$  і  $(1)$ , де  $i + q \geq m, j + p \geq m$ .*

**Доведення.** Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$N = \left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^q & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t^p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right)$$

перетворення  $[r + 3 \xrightarrow{t^q} r + 2]^-$ , маємо матрицю

$$N_1 = \left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^{p+q} & t^p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right).$$

Застосувавши до матриці  $N_1$  перетворення  $[1 \xrightarrow{-t^p} r + 4]^+$ , маємо матрицю

$$N_2 = \left( \begin{array}{cccccc|cccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^{p+q} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду  $M(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^{p+q}, t^j, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$ .

**Теорема 2.** *Канонічно  $(t, *)$ -циклічна матриця 2-спадково звідна над кільцем  $K$ , якщо її визначальна послідовність містить підпослідовності  $(t^i, t^u, t^j, 1, t^v)$  і  $(1, 1, 1)$ , де  $i + u \geq m$ ,  $j + v \geq m$ .*

**Доведення.** Якщо  $u = p + q$  і  $i + q \geq m$ ,  $j + p \geq m$ , то звідність матриці випливає з попередньої теореми. В іншому випадку доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними

блоками)

$$N = \left( \begin{array}{cccccccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t^u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right)$$

послідовно перетворення  $[r + 5 \xrightarrow{t^u} r + 4]^-$ ,  $[1 \xrightarrow{-1} r + 6]^+$ ,  $[2 \xrightarrow{-t^j} r + 7]^+$ ,  $[3 \xrightarrow{-t^j} r + 8]^-$ , маємо матрицю

$$N_1 = \left( \begin{array}{cccccccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t^j & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t^v & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{s-1} & 0 \end{array} \right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду  $M(1, 1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t^i, t^u, t^j, 1, t^v, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$ .

**3. Висновки.** У статті розглядається комутативне локальне кільце  $K$  з ненульовим радикалом  $R = RadK$  і ненульовий нільпотентний елемент  $t \in R$  такий, що  $t^m = 0$ , де  $m$  – степінь нільпотентності елемента  $t$ . Вивчаються достатні умови звідності канонічно циклічних матриць великої ваги над комутативним локальним кільцем  $K$ . Доведена 2-спадкова звідність канонічно  $(t, *)$ -циклічних мономіальних матриць великої ваги порядку  $n$  над комутативним

локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду.

### Список використаної літератури

1. Pizarro A. Similarity Classes of  $3 \times 3$  Matrices over a Discrete Valuation Ring. *Linear Algebra and Its Applications*. 1983. 54. P. 29–51.
2. Avni N., Onn U., Prasad A., Vaserstein L. Similarity Classes of  $3 \times 3$  Matrices over a Local Principle Ideal Ring. *Comm. Algebra*. 2009. 37, no 8. P. 2601–2615.
3. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math*. 2013. 16, no 2. P. 171–187.
4. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Про  $(*, 2)$ -звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2016. Вип. 29, №2. С. 22–30.
5. Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A. Indecomposable and irreducible  $t$ -monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math*. 2016. Вип. 22, № 1, 11–20.
6. Бондаренко В. М., Бортош М. Ю. Достатні умови звідності в категорії мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2017. Вип. 30, № 1. С. 11 – 24.

**Bortos M. Yu.** 2-Hereditary reducibility of cyclic monomial matrices with fixed determining sequences over a commutative local ring.

Properties of canonically cyclic monomial matrices over commutative rings were studied in many works, in particular, their reducibility and irreducibility, properties of decomposable and indecomposable matrices. The criterion of the irreducibility of canonically cyclic small-order matrices over a commutative local ring  $K$  with the radical  $R = tK \neq 0$  ( $n < 7$  for  $R \neq 0$  and  $n < 5$  for  $R^2 \neq 0$ ) is known, as well as the necessary condition for the irreducibility of canonically cyclic matrices of arbitrary weight in which a relation between the order and weight of the matrix plays a major role. In the study of canonically cyclic matrices we considered various types of the reducibilities:  $(*, 2)$ -reducibility,  $(*, 3)$ -reducibility and 2-hereditary reducibility. In the paper we consider a commutative local ring with the radical  $R = tK \neq 0$  and nilpotent element  $t \in R$  such that  $t^m = 0$ , where  $m$  is the degree of nilpotency of the element  $t$ . For the canonically cyclic matrices the determining and weight sequences are defined. We study sufficient conditions for the reducibility of canonically cyclic matrices of larger weight over a commutative local ring  $K$ . It is proved the 2-hereditary reducibility of canonically  $(t, *)$ -cyclic monomial matrices of order  $n$  over a commutative local ring in the case when their defining sequences contain subsequences of a fixed form. The subsequence of the determining sequence is a connected (according to cyclic rearrangement of the sequences) subsequence. The main methods of research are methods of the theory of images and the method of elementary transformations of matrices with combinatorial aspects.

**Keywords:** monomial matrix, canonically cyclic matrix, commutative ring, determining sequence, reducibility, hereditary reducibility.

### Список використаної літератури

1. Pizarro, A. (1983). Similarity Classes of  $3 \times 3$  Matrices over a Discrete Valuation Ring. *Linear Algebra and Its Applications*, 54, 29–51.
2. Avni, N., Onn, U., Prasad, A., & Vaserstein, L. (2009). Similarity Classes of  $3 \times 3$  Matrices over a Local Principle Ideal Ring. *Comm. Algebra*, 37 (8), 2601–2615.
3. Bondarenko, V. M., Bortos, M. Yu., Dinis, R. F., & Tylyshchak, A. A. (2013). Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math.*, 16 (2), 171–187.
4. Bondarenko, V. M., & Bortosh, M. Yu. (2016). Pro  $(*, 2)$ -zvidni monomialni matrytsi nad komutatyvnyumu kilciamy [On  $(*, 2)$ -reducible monomial matrices over commutative rings].

*Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 29 (2), 22–30. [in Ukrainian].*

5. Bondarenko, V. M., Bortos, M. Yu., Dinis, R. F., & Tylyshchak, A. A. (2016). Indecomposable and irreducible  $t$ -monomial matrices over commutative rings. *Algebra Discrete Math.*, 22 (1), 11–20.
6. Bondarenko, V. M., & Bortosh, M. Yu. (2017). Dostatni umovy zvidnosti v katehorii monomialnykh matryts nad komutatyvnyim lokalnym kilcem [Sufficient conditions in the category of monomial matrices over a commutative local ring]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 30 (1), 11 – 24. [in Ukrainian].*

Одержано 13.03.2021

**Т. В. Боярищева<sup>1</sup>, М. М. Капустей<sup>2</sup>, Г. І. Сливка-Тилищак<sup>3</sup>,  
П. В. Слюсарчук<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук  
[tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua](mailto:tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2899-4900>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
здобувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
[m.kapustey@gmail.com](mailto:m.kapustey@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4438-3395>

<sup>3</sup> Пряшівський університет в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент, завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
доктор фізико-математичних наук  
[anna.slyvka@uzhnu.edu.ua](mailto:anna.slyvka@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

<sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,  
кандидат фізико-математичних наук  
[petro.slyusarchuk@uzhnu.edu.ua](mailto:petro.slyusarchuk@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9235-1497>

## ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Граничні теореми теорії ймовірностей мають широке застосування у різних галузях науки і виробництва. Адже вони вивчають властивості різних випадкових величин, що формуються під впливом значної кількості випадкових чинників, кожен з яких, в свою чергу, має незначний вплив на кінцевий результат, але сумарний вплив цих чинників є суттєвим. Задачі, які розв'язуються в межах цієї галузі, можна умовно розділити на два типи. Перші досліджують сам факт збіжності суми випадкових доданків, а другі вивчають швидкість цієї збіжності. Дана робота присвячена якраз другому питанню. Оцінками швидкості збіжності у граничних теоремах займався чимало дослідників. Щоправда, до середини минулого століття ці оцінки формулювалися в термінах абсолютних моментів, що мало принаймні два недоліки. Насамперед, існування абсолютних моментів є досить жорсткою умовою, що суттєво звужує коло випадкових величин, до яких можна застосувати дані оцінки. І по-друге, оцінки, що виражаються через абсолютні моменти, не враховують близькості розподілів доданків до граничного. Незважаючи на це, існує велика кількість оцінок, починаючи з нерівності Беррі – Ессеена і закінчуючи дослідженнями сучасних вчених, що використовують саме абсолютні моменти. Способом, що дозволив уникнути обох недоліків оцінок, стало використання псевдомоментів. Псевдомомент – це числова характеристика, яка за своєю структурою виражається через різницю функцій розподілу досліджуваної та граничної випадкових величин. Тому у випадку рівності цих розподілів псевдомомент рівний нулю, що дозволяє здійснити більш точну оцінку. Структура цих характеристик може бути дуже різноманітною, що дозволяє використати псевдомомент такого вигляду, який зручний саме для даної конкретної задачі. У статті використано характеристики, аналогічні до тих, що введені В. М. Золотарьовим. З їх допомогою вивчається швидкість збіжності розподілів сум незалежних випадкових величин до нормального закону в схемі серій. Обмеження, які при цьому накладаються на випадкові доданки, є не надто суворими – вимагається рівність нулю математичного сподівання

і скінченність дисперсій кожного доданка. Натомість одержано оцінки швидкості збіжності, що виражаються через псевдомоменти різного виду. Також у роботі отримано оцінки для характеристичних функцій, які теж виражаються через вказані характеристики. Вони необхідні для доведення основних результатів, але мають і самостійне значення.

**Ключові слова:** центральна гранична теорема, оцінка швидкості збіжності, послідовність серій випадкових величин.

**1. Вступ.** Серед граничних теорем для розподілів сум випадкових величин особливе місце займають теореми, у яких іде мова про точність наближення розподілів сум граничним розподілом. У центральній граничній теоремі такими результатами є відомі нерівності Ессеена і Беррі-Ессеена. Ці оцінки не враховують фактора близькості розподілів доданків у сумах до відповідних компонент граничного розподілу. Наприклад, якщо доданки мають нормальний розподіл, то ліва частина нерівності Беррі-Ессеена рівна нулю, а права відмінна від нуля, бо виражається через абсолютні моменти. Цей недолік усувається використанням характеристик, які називають псевдомоментами. Вони враховують близькість розподілів доданків у сумах до відповідних компонент граничного розподілу. В оцінках швидкості збіжності у граничних теоремах використовуються псевдомоменти різного вигляду. У даний час існує велика кількість робіт у яких використовуються такі характеристики. У роботі [1] наведені деякі із таких результатів і детальний список літератури. Ми відзначимо важливу, у цьому напрямку, роботу Золотарьова [2], у якій одержано узагальнення нерівності Беррі-Ессеена із використанням різного вигляду псевдомоментів. У роботах [3] і [4] результати роботи [2] узагальнені для нормованих сум незалежних різнорозподілених випадкових величин, а у роботах [4] і [6] розглядаються різні підходи до узагальнення результатів із [2] для послідовності серій незалежних в кожній серії не однаково розподілених випадкових величин. Метою даної роботи є вивчення аналогічної до [4] і [6] задач, але використовуються псевдомоменти іншої структури. У роботі наводяться оцінки швидкості збіжності до нормального закону розподілів сум випадкових величин в термінах псевдомоментів для послідовності серій незалежних в кожній серії випадкових величин. Побудовані нерівності для характеристичних функцій.

**2. Основний результат.** Розглянемо послідовність серій  $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nn}$  незалежних в кожній серії випадкових величин з математичними сподіваннями  $E\xi_{ni} = 0$ , дисперсіями  $E\xi_{ni}^2 = \sigma_{ni}^2$ ,  $\sigma_{ni} > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 = 1$ . Позначимо:  $F_{ni}(x)$  – функція розподілу  $\xi_{ni}$ ,  $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ ,  $\Phi_n(x)$  – функція розподілу  $S_n$ ,  $\Phi(x)$  – функція розподілу стандартного нормального закону,  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$ .

Введемо псевдомоменти вигляду

$$\nu_{ni}^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3) |d(F_{ni}(x\sigma_{ni}) - \Phi(x))|, \quad \nu_n^{(0)} = \max\{\nu_{n1}^{(0)}, \dots, \nu_{nn}^{(0)}\},$$

$$\kappa_{ni}^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) |F_{ni}(x\sigma_{ni}) - \Phi(x)| dx, \quad \kappa_n^{(0)} = \max\{\kappa_{n1}^{(0)}, \dots, \kappa_{nn}^{(0)}\},$$



$$\kappa_{ni} = \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 |F_{ni}(x\sigma_{ni}) - \Phi(x)| dx, \quad \kappa_n = \max \{\kappa_{n1}, \dots, \kappa_{nn}\}.$$

**Теорема 1.** Нехай  $\bar{\sigma}_n = \max \{\sigma_{n1}, \dots, \sigma_{nn}\}$  і  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ . Існують такі сталі  $C_1, C_2, C_3$ , що для всіх  $n \geq 1$  справедливі нерівності

$$\rho_n \leq C_1 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \nu_n^{(0)}, \quad (1)$$

$$\rho_n \leq C_2 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \max \left\{ \kappa_n^{(0)}; \left( \kappa_n^{(0)} \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2(n+1)}} \right\}, \quad (2)$$

$$\rho_n \leq C_3 \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \max \left\{ \kappa_n; \left( \kappa_n \right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2(3n+1)}} \right\}. \quad (3)$$

Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням  $E\xi_i = 0$ , дисперсією  $E\xi_i^2 = \sigma_i^2$ ,  $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Позначимо через  $F_k(x)$  функцію розподілу випадкової величини  $\xi_k$  і покладемо  $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$ . Тоді  $S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}$ ,  $F_{nk}(x) = F_k(xB_n)$ .

$$\nu_i^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3) |d(F_i(x\sigma_i) - \Phi(x))|, \quad \nu^{(0)} = \max \left\{ \nu_1^{(0)}, \dots, \nu_n^{(0)} \right\},$$

$$\kappa_i^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) |F_i(x\sigma_i) - \Phi(x)| dx, \quad \kappa^{(0)} = \max \left\{ \kappa_1^{(0)}, \dots, \kappa_n^{(0)} \right\},$$

$$\kappa_i = \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 |F_i(x\sigma_i) - \Phi(x)| dx, \quad \kappa = \max \left\{ \kappa_1, \dots, \kappa_n \right\}.$$

Тоді будуть справедливі нерівності 1 – 3, де  $\bar{\sigma} = \frac{1}{B_n} \max_{1 < k < n} \sigma_k$ .

Із цих оцінок випливають оцінки Золотарьова [1].

**3. Допоміжні леми.** Будемо використовувати наступні леми.

**Лема 1.** Нехай  $f_{nk}(t)$  – характеристична функція  $\xi_{nk}$ ,  $\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right|$ .

Для всіх  $t \in \mathbb{R}$  мають місце нерівності

$$\omega_{nk}(t) \leq \nu_{nk}^{(0)} \min \left( 1, \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \right), \quad (4)$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk}^{(0)} \min \left( |t| \sigma_{nk}, \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \right), \quad (5)$$

$$\omega_{nk}(t) \leq \kappa_{nk} \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6}. \quad (6)$$

**Доведення.** Враховуючи, що  $E\xi_{nk} = 0$ ,  $E\xi_{nk}^2 = \sigma_{nk}^2$

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{nk}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx \sigma_{nk}} d\Phi(x) \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\
& \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\
& |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| = \\
& |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right|. \tag{7}
\end{aligned}$$

Із нерівностей (7)

$$\begin{aligned}
\omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left( 1, \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3} \right) \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \max (1, |x|^3) |d(F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x))| = \nu_{nk}^{(0)}. \tag{8}
\end{aligned}$$

Використовуючи нерівність ([1], с.372)

$$\left| e^{iz} - \sum_{j=0}^m \frac{(iz)^j}{j!} \right| \leq \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma} \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

із (7)

$$\begin{aligned}
\omega_{nk}(t) &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right| \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|tx|^3}{6} \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3} \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| \leq \\
& \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left( 1, \frac{|x|^3}{\sigma_{nk}^3} \right) \left| d \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) \right| = \nu_{nk}^{(0)} \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Із (8) і (10) одержуємо нерівність (4).

Із нерівностей (7)

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| \leq \\ &|t| \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx} - 1 - itx| \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx \leq \\ &|t| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tx)^2}{2} \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx = \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3 \frac{x^2}{\sigma_{nk}^3} \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx = \\ &\frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx = \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \kappa_{nk}.\end{aligned}$$

Нерівність (6) доведена. Із попередньої нерівності

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &\leq \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx \leq \\ &\frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, 3x^2) |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx = \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \kappa_{nk}^{(0)}\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\omega_{nk}(t) &= |t| \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left( F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right) dx \right| \leq \\ &|t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F_{nk}(x) - \Phi \left( \frac{x}{\sigma_{nk}} \right) \right| dx = |t| \sigma_{nk} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{nk}(x\sigma_{nk}) - \Phi(x)| dx \leq |t| \sigma_{nk} \kappa_{nk}^{(0)}\end{aligned}$$

одержимо нерівність (5).

**Лема 2.** Нехай  $c \in (0, e^{-n\bar{\sigma}_n^2}]$  – довільна стала і для деякого  $s \in [0, 3]$  існує величина  $\theta_{nk}(s)$  така, що для всіх  $t \in R$  і  $k = 1, \dots, n$  мають місце нерівності

$$\omega_{nk}(t) = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq \theta_{nk}(s) \min \left( |t|^s \sigma_{nk}^s; \frac{|t^3| \sigma_{nk}^3}{6} \right), \quad (11)$$

$$\theta_n(s) = \max \{ \theta_{n1}(s), \dots, \theta_{nn}(s) \}.$$

Якщо  $\theta_n(s) \leq c$  і  $|t| \leq T_n^{(1)} = \frac{1}{\sigma_n} \sqrt{-2 \ln \theta_n(s)}$ , то

$$|f_{nk}(t)| \leq e^{-c_1 t^2 \sigma_{nk}^2}, \quad (12)$$

де  $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\sqrt{-2c \cdot \ln c}$ ,  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$ , а при  $\theta_n(s) \leq c$  і  $|t| > T_n^{(1)}$

$$|f_{nk}(t)| \leq (1 + 2^{-\frac{s}{2}}) t^s \sigma_{nk}^s (\theta_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma_n^2}}. \quad (13)$$

Якщо  $\theta_n(s) > c$ ,  $|t| \leq T_n^{(2)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{c}{\theta_n(s)}$ , тоді

$$|f_{nk}(t)| \leq e^{-c_2 t^2 \sigma_{nk}^2}, \quad (14)$$

де  $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{c\sqrt{e}}{6} > 0$ .

**Доведення.**

$$|f_{nk}(t)| = \left| f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t). \quad (15)$$

Нехай  $\theta_n(s) \leq c$  і  $|t| \leq T_n^{(1)}$ . Із умови (11) леми і (15)

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \cdot \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \cdot \theta_{nk}(s) \right) \leq \\ &e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(1)})^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \cdot T_n^{(1)} \cdot \frac{t^2 \sigma_{nk}^3}{6} \cdot \theta_{nk}(s) \right) \leq \\ &e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + \sqrt{-2\theta_n(s) \ln \theta_n(s)} \cdot \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{6} \right). \end{aligned}$$

Оскільки функція  $x \ln x$  є спадною при  $x \in (0; e^{-1}]$  і  $c < e^{-1}$  то

$$|f_{nk}(t)| \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{4}} \left( 1 + \sqrt{-2c \ln c} \cdot \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{6} \right) \leq e^{-c_1 t^2 \sigma_{nk}^2}.$$

Нехай  $\theta_n(s) \leq c$  і  $|t| > T_n^{(1)}$ . Із (15) і (11) отримаємо

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + \omega_{nk}(t) \leq \\ &e^{-\frac{(T_n^{(1)})^2 \sigma_{nk}^2}{2}} + |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s) = (\theta_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma_n^2}} + |t|^s \sigma_{nk}^s \theta_{nk}(s). \end{aligned}$$

Оскільки,  $\theta_n(s) \leq c \leq e^{-1}$  і  $|t| > T_n^{(1)}$ , тоді

$$|t| \bar{\sigma}_n > \bar{\sigma}_n T_n^{(1)} = \sqrt{-2 \ln \theta_n(s)} \geq \sqrt{-2 \ln c} \geq \sqrt{2}.$$

Тому  $|f_{nk}(t)| \leq (1 + 2^{-\frac{s}{2}}) |t|^s \sigma_{nk}^s (\theta_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\sigma_n^2}}$ .

Нехай  $\theta_n(s) > c$ ,  $|t| \leq T_n^{(2)}$  ( $\bar{\sigma}_n T_n^{(2)} \leq 1$ ). Із (11) і (15) одержимо

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)| &\leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \omega_n(t) \right) \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \cdot \theta_{nk}(s) \cdot \frac{|t|^3 \sigma_{nk}^3}{6} \right) \leq \\ &e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + e^{\frac{(T_n^{(2)})^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \cdot \theta_{nk}(s) \cdot \frac{T_n^{(2)} t^2 \sigma_{nk}^3}{6} \right) \leq e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \left( 1 + c\sqrt{e} \cdot \frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{6} \right) \leq e^{-c_2 t^2 \sigma_{nk}^2}. \end{aligned}$$

**Лема 3.** Нехай  $\bar{\sigma}_n = \max \{\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \dots, \sigma_{nn}\}$  і  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  для  $n \geq 2$ . Якщо виконуються умови лемми 2, то існують сталі  $C_4, C_5$ , що для всіх  $n \geq 2$  справедлива нерівність

$$\rho_n \leq C_4 \bar{\sigma}_n \max \{\theta_n(s); (\theta_n(s))^p\}, \quad (16)$$

де  $p = \min \{1, \bar{\sigma}_n^{-2}(sn+1)^{-1}\}$ ,  $\theta_n(s) = \max \{\theta_{n1}(s), \dots, \theta_{nn}(s)\}$ , а при  $s > 0$

$$\rho_1 \leq C_5 \left(1 + \frac{1}{s}\right) \max \left\{ \theta_{11}(s); (\theta_{11}(s))^{\frac{1}{s+1}} \right\}. \quad (17)$$

**Доведення.** Використаємо нерівність ([7], с.299)

$$|F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T |f(t) - g(t)| \frac{dt}{t} + \frac{24 \sup_x |G'(x)|}{\pi T}.$$

Оскільки  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$ , то у попередній нерівності покладемо  $F(x) = \Phi_n(x)$ ,  $G(x) = \Phi(x)$ ,  $f(t) = \prod_{k=1}^n f_{nk}(t)$ ,  $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ . Тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi \sqrt{2\pi T}}. \quad (18)$$

Із нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \left( \prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \left( \prod_{k=i+1}^n |a_k| \right)$$

випливає, що

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &= \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - \prod_{i=1}^n e^{-\frac{t^2 \sigma_{ni}^2}{2}} \right| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \omega_{ni}(t) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n |f_{nk}(t)|. \end{aligned}$$

Нехай  $n \geq 2$ . Із одержаної нерівності (11) лемми 2 (нерівностей (12) і (14) при  $|t| \leq T_n^{(l)}$  ( $l = 1$  при  $\theta_n(s) \leq c$  і  $l = 2$  при  $\theta_n(s) > c$ )) отримаємо

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^n f_{ni}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leq \sum_{i=1}^n \frac{|t|^3 \sigma_{ni}^3}{6} \theta_{ni}(s) \prod_{k=1}^{i-1} e^{-\frac{t^2 \sigma_{nk}^2}{2}} \prod_{k=i+1}^n e^{-c_l t^2 \sigma_{nk}^2} \leq \\ &\frac{|t|^3}{6} \theta_n(s) \bar{\sigma}_n \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{ni}^2 e^{-c_l t^2 (1 - \sigma_{ni}^2)} \leq \frac{|t|^3}{6} \theta_n(s) \bar{\sigma}_n e^{-\frac{c_l t^2}{4}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ми врахували, що  $c_l \leq \frac{1}{2}$  та умову  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$ .

Нехай  $\theta_n(s) > c$ . Покладемо у (18)  $T = T_n^{(2)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \cdot \frac{c}{\theta_n(s)}$ . Тоді, врахувавши (19), при  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \theta_n(s) \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \frac{1}{3\pi} \int_0^T t^2 e^{-\frac{1}{4}c_2 t^2} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi c}} \theta_n(s) \bar{\sigma}_n \leq \\ &\theta_n(s) \bar{\sigma}_n \cdot \left( \frac{2}{3\sqrt{\pi c_2^{\frac{3}{2}}}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi c}} \right) = C_6 \theta_n(s) \bar{\sigma}_n. \end{aligned} \quad (20)$$

У випадку  $n \geq 2$ ,  $\theta_n(s) > c$  нерівність (16) теореми доведена.

Нехай  $n \geq 2$  і  $\theta_n(s) \leq c$ . Покладемо у (18)  $T = \frac{1}{\bar{\sigma}_n} c^5 (\theta_n(s))^{-p}$ ,  $p = \min\{1; \bar{\sigma}_n^{-2}(sn+1)^{-1}\}$  і  $T' = \min\{T; T_n^{(1)}\}$ . Тоді інтеграл у (18)

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} \leq \\ &\frac{2}{\pi} \int_0^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} = \\ &I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Врахувавши, що  $T' \leq T_n^{(1)}$ , аналогічно до оцінки інтегралу у (20)

$$I_1 \leq \theta_n(s) \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \frac{1}{3\pi} \int_0^{T'} t^2 e^{-\frac{1}{4}c_1 t^2} dt \leq \theta_n(s) \cdot \bar{\sigma}_n \cdot \frac{2}{3\sqrt{\pi c_1^{\frac{3}{2}}}}. \quad (22)$$

Будемо вважати, що  $T' = T_n^{(1)}$ , бо інакше  $I_2 = 0$  і  $I_3 = 0$  і справедливність нерівності (16) випливає з (18), (21), (22). Із (13) маємо

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{\pi} \int_{T'}^{T'} \left| \prod_{k=1}^n f_{nk}(t) \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \int_{T'}^T \prod_{k=1}^n \left( 2t^s \sigma_{nk}^s (\theta_n(s))^{\frac{\sigma_{nk}^2}{\bar{\sigma}_n^2}} \right) \frac{dt}{t} = \\ &\frac{2^{n+1}}{\pi} (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \left( \prod_{k=1}^n \sigma_{nk}^s \right) \int_{T_n^{(1)}}^T t^{sn-1} dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Нехай  $s \geq \frac{1}{6}$ . Оскільки  $\theta_n(s) \leq c$ ,  $n\bar{\sigma}_n^2 \geq 1$  і  $n(1-sp) \geq p$ , то

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2^{n+1}}{\pi sn} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot T^{sn} \leq \\ &\frac{2^{n+1}}{\pi sn} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot \left( \frac{1}{\bar{\sigma}_n} c^3 (\theta_n(s))^{\frac{-p}{n\bar{\sigma}_n^2}} \right)^{sn} = \\ &\frac{2^{n+1}}{\pi sn} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2} - \frac{sp}{\bar{\sigma}_n^2}} c^{3sn} \leq \frac{12}{\pi n} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{p}{n\bar{\sigma}_n^2}} \cdot (2\sqrt{c})^n \leq \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_n \cdot (\theta_n(s))^{\frac{p}{n\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \frac{24\sqrt{2}}{\pi} c. \quad (24)$$

Нехай  $s \leq \frac{1}{6}$  і  $n \geq 2$ ,  $p = 1$ . Із цих умов і для  $n \geq 2$  і  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  випливає, що  $\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}(1-s) - \frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2} > 1$ . Тому, враховуючи, що  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$ , ми отримуємо

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{2^{n+1}}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \int_{T_n^{(1)}}^T t^{sn - \frac{8}{9} - \frac{1}{9}} dt \leq \\ &\frac{2^{n+1}}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot (T_n^{(1)})^{-\frac{1}{6}} \cdot T^{sn + \frac{1}{6}} \cdot \frac{1}{sn + \frac{1}{6}} \leq \\ &\frac{2^{n+1} \cdot 6}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \cdot \bar{\sigma}_n^{sn} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\bar{\sigma}_n}\right)^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_n} \cdot c^3 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{-1}{n\bar{\sigma}_n^2}}\right)^{sn + \frac{1}{6}} \leq \\ &\frac{2^{n+\frac{11}{12}} \cdot 6}{\pi} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}(1-s) - \frac{1}{6n\bar{\sigma}_n^2}} \cdot c^{3sn + \frac{1}{2}} \leq \\ &\bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi} \cdot c^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}_n} \left(2^{n\bar{\sigma}_n^2} c\right)^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi} \cdot c^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{n}(2e^{-1})^n \leq \bar{\sigma}_n \cdot \theta_n(s) \cdot \frac{12}{\pi\sqrt{e}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Враховуючи, що  $\theta_n(s) \leq c$  і  $\bar{\sigma}_n T_n^{(1)} > \sqrt{2}$  для  $n \geq 2$  а  $\bar{\sigma}_n^2 \leq \frac{3}{4}$  ми отримуємо

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{2}{\pi} \int_{T_n^{(1)}}^T e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} \cdot (T_n^{(1)})^{-2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(T_n^{(1)})^2} = \frac{2}{\pi} \cdot (T_n^{(1)})^{-2} \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \\ &\frac{1}{\pi} \bar{\sigma}_n^2 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{1}{\bar{\sigma}_n^2}} \leq \frac{1}{\pi} \bar{\sigma}_n^2 \cdot (\theta_n(s))^{\frac{4}{3}} \leq \frac{1}{\pi} \bar{\sigma}_n^2 \cdot \theta_n(s) \cdot c^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Якщо  $n \geq 2$ ,  $\theta_n(s) \leq c$ , то нерівність (16) теореми 1 виконується для (18), (21), (22), (24) – (26).

Нехай  $n = 1$ . Тоді  $\bar{\sigma}_1^2 = 1$ . Якщо  $\theta_n(s) > c$ , тоді  $\rho_1 \leq 1 < \frac{1}{c}\theta_n(s)$ .

У випадку  $\theta_n(s) \leq c$  і  $s > 0$ ,  $p = \frac{1}{s+1}$ . Із леми та визначення  $T$  маємо

$$\begin{aligned} \rho_1 &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_{11}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^2} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \leq \theta_{11}(s) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^T t^{s-1} dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} = \\ &\theta_{11}(s) \cdot \frac{2}{\pi s} T^s + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} = \frac{2c^{5s}}{\pi s} (\theta_{11}(s))^{1-sp} + \frac{24c^{-5}}{\pi\sqrt{2\pi}} \cdot (\theta_{11}(s))^p \leq \\ &C_7 \left(1 + \frac{1}{s}\right) (\theta_{11}(s))^p. \end{aligned}$$

Із одержаних оцінок для  $\rho_1$  випливає нерівність (17).

**4. Доведення теореми 1.** *Доведення.* Із леми 1 випливає, що в лемах 2 і 3 можна покласти  $s = 0$  і  $\theta_{nk}(0) = \nu_{nk}^{(0)}$ . Тоді з леми 3 отримуємо (1) для  $n \geq 2$

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |F_{11}(x) - \Phi(x)| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^x d(F_{11}(u) - \Phi(u)) \right| \leq -3mm$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d|F_{11}(u) - \Phi(u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \max(1, |x|^3) |(dF_{11}(x) - \Phi(x))| = \nu_{11}^{(0)}.$$

Якщо в лемах 2 і 3 покласти  $s = 1$  і  $\theta_{nk}(1) = \kappa_{nk}^{(0)}$ , то із леми 1 та леми 3 одержимо (2). Якщо ж в лемах 2 і 3 покласти  $s = 3$  і  $\theta_{nk}(3) = \kappa_{nk}$ , то із леми 1 і леми 3 одержимо (3).

У роботі одержано оцінку швидкості збіжності у центральній граничній теоремі, що узагальнює результати роботи [2]. Використано метод, що відмінний від методу роботи [2]. Відзначимо окремо нерівність 16 із леми 3, оскільки вона є самостійним результатом.

### Список використаної літератури

1. Золотарев В. М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. Москва: Наука, 1986. 416 с.
2. Zolotarev V. M. Exactness of an approximation in the central limit theorem. Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1973. pp. 531-543.
3. Слюсарчук П. В., Поляк І. Й. Узагальнення одного результату В.М.Золотарьова. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика*. 1998. Вип. 3. С. 184-189.
4. Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика*. 1999. Вип. 4. С. 12–16.
5. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для послідовності серій в термінах середніх псевдомоментів. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Вип. 2(99). 2018. С. 91-100.
6. Капустей М. М., Слюсарчук П. В. Точність наближення в центральній граничній теоремі в термінах усереднених псевдомоментів. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика*. 2018. Вип. № 2(33). С. 78–87.
7. Лозв М. Теория вероятностей. М.: Из-во иностр. лит., 1962. 720 с.

**Bojarishcheva T. V., Kapustey M. M., Slyvka-Tylyshchak G. I., Slyusarchuk P. V.** The estimate of rate of convergence in the central limit theorem for the sequence of series.

Boundary theorems of probability theories are widely applicable in various fields of science and manufacture. It is reasonable as they deal with properties of different random values formed under the influence of a great deal of random factors each of which in its turn has a minor influence on the final result but the total influence of these factors is essential. Problems that are solved within this field may be conditionally divided into two types. The first ones are concerned with the fact of the convergence of a sum of random summands while the second ones deal with the rate of the convergence. The work is devoted to the latter issue. A lot of researchers have studied estimations of convergence rate in boundary theorems. But it should be mentioned that until the middle of the last century the estimations were formed with the help of terms of absolute moments, and that had at least two drawbacks. Firstly, the existence of absolute moments is rather a strict



condition restricting an area of random values a lot to which the given estimations may be applied. Secondly, the estimations that are expressed in terms of absolute moments do not presuppose the proximity of boundary distribution of summands. In spite of it there is a great quantity of estimations beginning from Berry–Esseen inequality and ending with investigations of contemporary scientists using the very absolute moments. The usage of pseudomoments has become the way of allowing to avoid both drawbacks of estimations. A pseudomoment is a numerical characteristic which according to its structure is expressed in terms of the difference of functions of distribution of observable and boundary random values. So, in case of equivalency of these distributions the pseudomoment is equal to zero and it makes possible to receive a more accurate estimation. The structure of the characteristics may vary greatly and it enables to use a pseudomoment which is appropriate to a certain specific problem. In the article we have used analogical characteristics introduced by V.M. Zolotarev. By means of them the rate of convergence of distributions of sums of independent random values to normal law in a series circuit. In this case restrictions imposed on random summands are not too strict - mathematical expectation is to be equal to zero and dispersion of each summand is to be finite. Meanwhile, we have obtained estimations of convergence rate expressed in terms of pseudomoments of different types. We have also received estimations of characteristic functions expressed also in terms of mentioned characteristics. They are essential for proving major results but they are also of independent importance.

**Keywords:** central limit theorem, the estimate of rate of convergence, sequence of series of random variables.

## References

1. Zolotarev, V. M. (1986). The modern theory of summation of independent random variables. Moscow: Izdatelstvo Nauka [in Russian].
2. Zolotarev, V. M. (1973). Exactness of an approximation in the central limit theorem. *Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory*. Berlin: Springer-Verlag. 531-543.
3. Slyusarchuk, P. V., & Polyak, I. Y. (1998). The generalising of some result of V. M. Zolotarev. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 3, 184-189 [in Ukrainian].
4. Boyaryshcheva, T. V., & Slyusarchuk, P. V. (1999). The rate of convergence in the central limit theorem for no indetically distributed random variabls (Ukrainian). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 4, 12-16 [in Ukrainian].
5. Kapustey, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). Estimation of the convergence velocity in the central limit theorem for a seguance of series in the term of mean pseudo-moments *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2(99), 91-100 [in Ukrainian].
6. Kapustey, M. M., & Slyusarchuk, P. V. (2018). The accuracy of the approximation in the central limit theorem in terms of pseudo-moments. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2(33), 78–87 [in Ukrainian].
7. Loeve M.(1962). Probability Theory. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury [in Russian].

Одержано 05.05.2021

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).33-47](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).33-47)Ю. С. Горбань<sup>1</sup>, Ю. А. Андреєва<sup>2</sup>, А. О. Белік<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Донецький національний університет ім. В. Стуса,  
старший викладач кафедри прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук

iu.gorban@donnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3709-4015>

<sup>2</sup> Донецький національний університет ім. В. Стуса,  
студент

andreieva\_i@donnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8868-0498>

<sup>3</sup> Донецький національний університет ім. В. Стуса,  
студент

belik.a@donnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0079-175X>

## ЄДИНІСТЬ ЕНТРОПІЙНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

В роботі розглянуто задачу Діріхле для модельного нелінійного еліптичного рівняння другого порядку з ізотропними та вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами, молодшим членом і  $L^1$ -правою частиною. Вироджуваність за незалежними змінними характеризується наявністю вагової функції в головній частині рівняння. Основним у даній роботі є результат про єдиність ентропійного розв'язку розглянутої задачі. Його встановлено за мінімальних умов на залучену вагову функцію. Це – ті припущення відносно її інтегровності, які потрібні для коректного введення відповідного енергетичного вагового ізотропного простору Соболева.

**Ключові слова:** вироджувані еліптичні рівняння,  $L^1$ -права частина, задача Діріхле, ентропійний розв'язок, єдиність розв'язку.

**1. Вступ.** Дослідження, представлене у роботі, відноситься до одного з актуальних напрямів сучасної теорії нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Цей напрям включає в себе вивчення нелінійних рівнянь і варіаційних нерівностей з  $L^1$ -правими частинами і мірами в якості правих частин. Такого роду дослідження активно проводяться з кінця 80-х років минулого століття. У даний час в цілому побудовано теорію нелінійних ізотропних невироджених (за незалежними змінними) дивергентних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -правими частинами або правими частинами-мірами. В рамках цієї теорії введено поняття слабких, ентропійних та ренормалізованих розв'язків досліджуваних рівнянь, доведено існування та єдиність цих розв'язків і встановлено їх належність певним просторам Лебега та Соболева. Суттєвий внесок у розвиток даної теорії належить Ф. Бенілану, Л. Боккардо, Т. Галлуе, Р. Гаріпі, Ф. Мюра, М. П'єру, Ж.Л. Вазкезу, Ж.-М. Ракотосону, а також А. Альвіно, В. Фероне, А. Меркальдо, Л. Орсіна, А. Порретта, С. Сегура де Леон, Г. Тромбетті, О.А. Ковалевському та іншим.

Основна складність у вивченні розв'язності еліптичних рівнянь з  $L^1$ -правими частинами полягає в тому, що така права частина не породжує лінійного неперервного функціоналу на відповідному енергетичному соболевському просторі.

Внаслідок цього безпосереднє застосування відомої теорії монотонних операторів неможливе і, більше того, потрібне уточнення самого поняття розв'язку таких рівнянь. Природним аналогом поняття узагальненого розв'язку, придатного для випадку достатньо сумовної правої частини, є поняття слабкого розв'язку (розв'язку з  $W^{1,1}$  у сенсі інтегральної тотожності для гладких функцій). Умови існування слабких розв'язків задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь з  $L^1$ -правими частинами встановлені Л. Боккардо і Т. Галлуе (див., наприклад, [1], [2]).

Ефективний підхід до дослідження розв'язності задачі Діріхле для нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -правими частинами було запропоновано Ф. Беніланом, Л. Боккардо, Т. Галлуе, Р. Гаріпі, М. П'єром і Ж.Л. Вазкезом у роботі [3]. В рамках цього підходу введено поняття ентропійного розв'язку досліджуваної задачі і розглянуто більш широкі, ніж відповідні енергетичні соболевські простори, класи функцій, яким такі розв'язки повинні належати. При цьому встановлено, що якщо коефіцієнти рівнянь задовольняють стандартним умовам зростання, коерцитивності і строгої монотонності, то ентропійний розв'язок існує та є єдиним для всього діапазону значень параметра, який характеризує зростання коефіцієнтів рівнянь відносно похідних невідомої функції. Вищезгадані і пов'язані з ними інші дослідження належать до  $L^1$ -теорії нелінійних рівнянь з ізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами. Що стосується нелінійних еліптичних рівнянь другого порядку з  $L^1$ -правими частинами або правими частинами-мірами у випадку анізотропії або виродження (за незалежними змінними) їх коефіцієнтів, то відзначимо таке. Існування слабкого розв'язку задачі Діріхле для модельного еліптичного рівняння з анізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами і мірою в якості правої частини встановлено Л. Боккардо, Т. Галлуе та П. Марчелліні в роботі [4]. Існування слабких розв'язків для деякого класу рівнянь з анізотропними і невироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами і локально інтегровними даними доведено М. Бендамане та К.Х. Карлсеном у [5]. Розв'язність задачі Діріхле для еліптичних рівнянь з ізотропними і вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами та  $L^1$ -правими частинами або правими частинами-мірами вивчалася в роботах Л. Ахаруша, Е. Азрула і А. Бенкіране [6], Й. Атіка і Ж.-М. Ракотосона [7], А.К. Кавалейро [8], Г.Р. Чірмі [9], Ф.К. Лі [10].

Питання про існування і властивості розв'язків анізотропних вироджуваних (за незалежними змінними) рівнянь другого порядку без молодших членів з  $L^1$ -правими частинами розглянуто О.А. Ковалевським і Ю.С. Горбань у [11], [12], з молодшим членом - Ю.С. Горбань у [13], [14].

У даній роботі розглянуто задачу Діріхле для модельного нелінійного еліптичного рівняння другого порядку з ізотропними та вироджуваними (за незалежними змінними) коефіцієнтами, молодшим членом і  $L^1$ -правою частиною. Вироджуваність за незалежними змінними характеризується наявністю вагової функції в головній частині рівняння. Основним результатом є теорема про єдиність ентропійного розв'язку розглянутої задачі. Її встановлено за мінімальних умов на залучену вагову функцію. Це – ті припущення відносно її інтегровності, які потрібні для коректного введення відповідного енергетичного вагового ізотропного простору Соболева.

**2. Функційні простори та множини.** У цьому розділі розглянемо деякі функційні простори та множини, адаптовані до вироджуваних ізотропних рівнянь, які будуть використані в роботі у подальшому. Вони вводяться аналогічно до відповідних просторів та множин для вироджуваних анізотропних рівнянь (див. [15]).

Нехай  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $\Omega$  – обмежена область в  $\mathbb{R}^n$  з межею  $\partial\Omega$ . Нехай  $p \in (1, n)$ . Позначимо

$$\widehat{p} = \frac{n(p-1)}{(n-1)p}.$$

Нехай  $\nu$  – невід’ємна функція на  $\Omega$  така, що  $\nu > 0$  м.с. на  $\Omega$ ,

$$\nu \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad (1/\nu)^{1/(p-1)} \in L^1(\Omega). \quad (1)$$

Через  $W^{1,p}(\nu, \Omega)$  позначимо множину всіх функцій  $u \in L^1(\Omega)$  таких, що для будь-якого  $i \in \{1, \dots, n\}$  існує узагальнена похідна  $D_i u$  із властивістю  $\nu |D_i u|^p \in L^1(\Omega)$ .

Нехай  $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$  відображення  $W^{1,p}(\nu, \Omega)$  в  $\mathbb{R}$  таке, що для довільної функції  $u \in W^{1,p}(\nu, \Omega)$

$$\|u\|_{1,p,\nu} = \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \nu |D_i u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Відображення  $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$  є нормою в  $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ , і з огляду на друге включення (1) множина  $W^{1,p}(\nu, \Omega)$  є банаховим простором відносно норми  $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$ . Крім того, з огляду на перше включення (1) маємо  $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\nu, \Omega)$ .

Через  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  позначимо замикання множини  $C_0^\infty(\Omega)$  у просторі  $W^{1,p}(\nu, \Omega)$ . Очевидно, що множина  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  є банаховим простором відносно норми, індукованої нормою  $\|\cdot\|_{1,p,\nu}$ .

Покладемо

$$c_{p,\nu} = 1 + \|1/\nu\|_{L^{1/(p-1)}(\Omega)}.$$

**Твердження 1.** Простір  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  має такі властивості:

(i)  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \subset \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$  і для довільної функції  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  маємо

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq c_{p,\nu} \|u\|_{1,p,\nu};$$

(ii) якщо  $u_j \rightarrow u$  слабо в  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ , то  $u_j \rightarrow u$  сильно в  $L^1(\Omega)$ ;

(iii)  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  – рефлексивний простір.

**Доведення.** Нехай  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ . Значить,  $u \in L^1(\Omega)$ . Зафіксуємо довільне  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Використовуючи нерівність Юнга, отримаємо

$$|D_i u| = (1/\nu)^{1/p} \nu^{1/p} |D_i u| \leq (1/\nu)^{1/(p-1)} + \nu |D_i u|^p \text{ м.с. на } \Omega.$$

Звідси, враховуючи друге включення (1) і сумовність функції  $\nu |D_i u|^p$  на  $\Omega$ , виводимо, що  $D_i u \in L^1(\Omega)$ . Тепер можна зробити висновок, що  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,1}(\Omega)$ .

Крім того, використовуючи нерівність Гельдера, встановлюємо

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} &= \int_{\Omega} |u| dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (1/\nu)^{1/p} \nu^{1/p} |D_i u| dx \leq \int_{\Omega} |u| dx + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} (1/\nu)^{1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \left( \int_{\Omega} \nu |D_i u| dx \right)^{1/p} \leq c_{p,\nu} \|u\|_{1,p,\nu}. \end{aligned}$$

Звідси впливає справедливість (i). З цього факту і компактності вкладення  $\mathring{W}^{1,1}(\Omega)$  в  $L^1(\Omega)$  впливає справедливість (ii). Доведення (iii) для вагового ізотропного простору  $\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  проводиться аналогічно доведенню твердження 2.2 з [15] для вагових анізотропних соболевських просторів. Твердження доведено.

Далі, нехай для довільного  $k > 0$   $T_k$  – функція на  $\mathbb{R}$  така, що

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{якщо } |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{якщо } |s| > k. \end{cases}$$

Аналогічно відомим результатам для невагових просторів Соболева (див., наприклад, [16, гл.2]) маємо: якщо  $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  і  $k > 0$ , то  $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  і для будь-якого  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \quad \text{м. с. на } \Omega. \quad (2)$$

Через  $\mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$  позначимо множину всіх функцій  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  таких, що для будь-якого  $k > 0$  маємо  $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ .

Ясно, що

$$\mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \subset \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega). \quad (3)$$

Для довільних  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  і  $x \in \Omega$  покладемо

$$k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leq l\}.$$

**Означення 1.** Нехай  $u \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Тоді  $\delta_i u$  – функція на  $\Omega$  така, що для будь-якого  $x \in \Omega$

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x).$$

**Означення 2.** Якщо  $u \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$ , то  $\delta u$  – відображення  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  таке, що для будь-якого  $x \in \Omega$   $\delta u(x)_i = \delta_i u(x)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Твердження 2.** Нехай  $u \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$ . Тоді для довільного  $k > 0$  маємо  $D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}}$  м. с. на  $\Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Доведення.** Доведення цього твердження проводиться аналогічно викладеному в [17] для невагового випадка.

З (2), (3) і твердження 2 випливає, що якщо  $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ , то  $\delta_i u = D_i u$  м. с. на  $\Omega$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Твердження 3.** Нехай  $u \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$  і  $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Тоді  $u - v \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$  і для будь-якого  $k > 0$  маємо

$$D_i T_k(u - v) = \delta_i u - D_i v \quad \text{м.с. на } \{|u - v| < k\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Доведення.** Доведення цього твердження проводиться аналогічно викладеному в [15] для вагового анізотропного випадка.

**Твердження 4.** Нехай  $u \in \mathring{\mathcal{J}}^{1,p}(\nu, \Omega)$  і  $w \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ . Тоді для будь-якого  $k > 0$  маємо  $\nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u - w) \in L^1(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Доведення.** Перш за все відмітимо, що існує множина  $E \subset \Omega$  міри нуль така, що

$$\forall x \in \Omega \setminus E \quad |w(x)| \leq \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Зафіксуємо  $k > 0$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ . З означення зрізаючої функції випливає, що

$$\nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u - w) = 0 \quad \text{м.с. на } \{|u - w| \geq k\}. \quad (4)$$

Покладемо  $k_1 = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$ . Оскільки  $\{|u - w| < k\} \setminus E \subset \{|u| < k_1\}$ , використовуючи твердження 2, виводимо

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \quad \text{м.с. на } \{|u - w| < k\}.$$

З останньої рівності та твердження 3 випливає, що

$$\begin{aligned} \nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u - w) &= \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) (D_i T_{k_1}(u) - D_i w) = \\ &= \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p - \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i w \quad \text{м.с. на } \{|u - w| < k\}, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} |\nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u - w)| &\leq \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p + \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-1} |D_i w| \\ &\quad \text{м.с. на } \{|u - w| < k\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Застосуємо для оцінки другого доданку в правій частині (5) нерівність Юнга:

$$\begin{aligned} \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-1} |D_i w| &= \nu^{1/p} \nu^{(p-1)/p} |D_i T_{k_1}(u)|^{p-1} |D_i w| \leq \\ &\leq \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p + \nu |D_i w|^p \quad \text{м.с. на } \{|u - w| < k\}. \quad (6) \end{aligned}$$

З (5) і (6), враховуючи сумовність функцій  $\nu |D_i T_{k_1}(u)|^p$  та  $\nu |D_i w|^p$  на  $\Omega$ , виводимо, що функція  $\nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u - w)$  є сумовною м.с. на  $\{|u - w| < k\}$ . Цей факт разом з (4) і означає потрібне. Твердження доведено.

**Твердження 5.** Існує додатна стала  $c_0$ , яка залежить тільки від  $n, p$  та  $\|1/\nu\|_{L^{1/(p-1)}(\Omega)}$ , така, що для довільної функції  $u \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$  маємо

$$\left( \int_{\Omega} |u|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq c_0 \prod_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \nu |D_i u|^p dx \right)^{1/np}.$$

**Доведення.** Це твердження є безпосереднім наслідком теореми вкладення для вагових анізотропних соболевських просторів (див., наприклад, [15, твердження 2.9]).

**3. Єдиність ентропійного розв'язку задачі Діріхле.** В цьому розділі сформулюємо і доведемо основний результат даної роботи.

Нехай  $g, f \in L^1(\Omega)$ ,  $g \geq 0$  на  $\Omega$ . Розглянемо таку задачу Діріхле:

$$-\sum_{i=1}^n D_i(\nu(x)|D_i u|^{p-2} D_i u) + g(x)e^u = f(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (7)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (8)$$

**Означення 3.** Ентропійним розв'язком задачі Діріхле (7), (8) називатимемо функцію  $u \in \mathring{\mathcal{T}}^{1,p}(\nu, \Omega)$  таку, що:

(i)  $ge^u \in L^1(\Omega)$ ;

(ii) для будь-яких  $w \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $k \geq 1$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_k(u-w) \right\} dx + \int_{\Omega} ge^u T_k(u-w) dx \leq \int_{\Omega} f T_k(u-w) dx. \quad (9)$$

Відмітимо, що означення 3 коректне. Скінченність першого інтеграла у лівій частині (9) впливає з твердження 4, другого — з (i) та обмеженості  $T_k$ . Нарешті, скінченність інтеграла у правій частині (9) впливає зі включення  $f \in L^1(\Omega)$  й обмеженості  $T_k$ .

Дамо спочатку два допоміжних результата, які будуть використовуватися у доведенні теореми про єдиність ентропійного розв'язку задачі Діріхле (7), (8).

**Лема 1.** Нехай  $u$  — ентропійний розв'язок задачі Діріхле (7), (8). Тоді існує невід'ємне число  $M$  таке, що для будь-якого  $k \geq 1$  справедлива нерівність

$$\text{meas} \{|u| \geq k\} \leq Mk^{-\hat{p}}. \quad (10)$$

**Доведення.** Зафіксуємо довільну  $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  і покладемо

$$M_* = 2 \left\{ (4n)^{n-1} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right) dx + (1 + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}) \left( \int_{\Omega} ge^u dx + \|f\|_{L^1(\Omega)} \right) \right\},$$

$$M = (c_0 M_*^{1/p})^{n/(n-1)}.$$

Нехай  $k \geq 1$ . Покладемо

$$k_1 = k + \|v\|_{L^\infty(\Omega)},$$

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-v| < k_1\}} \nu |\delta_i u|^p dx, \quad J = \sum_{i=1}^n \int_{\{|u-v| < k_1\}} \nu |\delta_i u|^{p-1} |D_i v| dx.$$

В силу (9) маємо

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u D_i T_{k_1}(u-v) \right\} dx \leq \int_{\Omega} (f - ge^u) T_{k_1}(u-v) dx.$$

Звідси, враховуючи твердження 2 та 3, отримуємо

$$I \leq k_1 \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} g e^u dx \right) + J.$$

В свою чергу, використовуючи нерівність Юнга, знаходимо, що

$$J \leq \frac{I}{2} + (4n)^{n-1} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right) dx.$$

З двох останніх оцінок виводимо нерівність

$$I \leq M_* k. \quad (11)$$

Далі, оскільки  $|T_k(u)| = k$  на  $\{|u| \geq k\}$ , маємо

$$k^{n/(n-1)} \text{meas} \{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx, \quad (12)$$

а так як  $T_k(u) \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ , з (11) і тверджень 5 та 2 одержуємо

$$\begin{aligned} & \left( \int_{\Omega} |T_k(u)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq c_0 \prod_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \nu |D_i T_k(u)|^p dx \right)^{1/np} = \\ & = c_0 \prod_{i=1}^n \left( \int_{\{|u| < k\}} \nu |\delta_i u|^p dx \right)^{1/np} \leq c_0 \prod_{i=1}^n \left( \int_{\{|u-v| \leq k_1\}} \nu |\delta_i u|^p dx \right)^{1/np} \leq \\ & \leq c_0 I^{1/p} \leq c_0 (M_* k)^{1/p}. \end{aligned}$$

Звідси і з (12) виводимо нерівність (12). Лему доведено.

**Лема 2.** Нехай  $u$  – ентропійний розв'язок задачі Діріхле (7), (8), і нехай  $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $k \geq 1$ ,  $h \geq 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\{h \leq |u-v| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^p \right\} dx & \leq 2k \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geq h\}} g e^u dx \right) + \\ & + 2(4n)^{n-1} \int_{\{h \leq |u-v| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right\} dx. \quad (13) \end{aligned}$$

**Доведення.** Покладемо

$$w = v + T_h(u - v), \quad k_1 = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

З (9) і твердження 2 випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-v| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i T_{k_1}(u-w) \right\} dx & \leq \\ & \leq k \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geq h\}} g e^u dx \right). \quad (14) \end{aligned}$$



Покладемо

$$G_1 = \{h \leq |u - v| < h + k\}, \quad G_2 = \{|u - v| < h\}.$$

Відмітимо, що

$$\{|u - v| < k\} = G_1 \cup G_2, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset. \quad (15)$$

Маємо

$$T_k(u - w) = T_{k_1}(u) - v - T_h(u - v) \quad \text{м.с. на } G_1, \quad T_k(u - w) = 0 \quad \text{на } G_2.$$

Отже, для довільного  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$D_i T_k(u - w) = D_i T_{k_1}(u) - D_i v \quad \text{м.с. на } G_1, \quad D_i T_k(u - w) = 0 \quad \text{м.с. на } G_2.$$

Звідси та з (14), (15) випливає, що

$$\begin{aligned} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx &\leq \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^{p-2} D_i T_{k_1}(u) D_i v \right\} dx + \\ &+ k \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geq h\}} g e^u dx \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Позначимо через  $I$  перший інтеграл в правій частині нерівності (16). Тоді з (16) виводимо

$$\int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx \leq k \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\{|u-v| \geq h\}} g e^u dx \right) + I. \quad (17)$$

Використовуючи нерівність Юнга, знаходимо, що

$$I \leq \frac{1}{2} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_{k_1}(u)|^p \right\} dx + (4n)^{n-1} \int_{G_1} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right\} dx. \quad (18)$$

Відмітимо, що в силу твердження 2 для довільного  $i \in \{1, \dots, n\}$  маємо  $D_i T_{k_1}(u) = \delta_i u$  м.с.на  $G_1$ . Враховуючи це, з (17) і (18) виводимо оцінку (13). Лему доведено.

Наступна теорема є основним результатом даної роботи.

**Теорема 1.** *Нехай  $u_1$  та  $u_2$  – ентропійні розв'язки задачі Діріхле (7), (8). Тоді  $u_1 = u_2$  м.с. на  $\Omega$ .*

**Доведення.** Через  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , позначатимемо додатні сталі, залежні тільки від  $n$ .

Зафіксуємо довільну функцію  $v \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  і покладемо

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p + |f| + g e^{u_j}, \quad j = 1, 2.$$

З леми 2 випливає, що при  $k \geq 1$ ,  $h \geq k + 1$  маємо

$$\int_{\{h-k \leq |u_j - v| < h+k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^p \right\} dx \leq c_1 k \int_{\{|u_j - v| \geq h-k\}} \Phi_j dx, \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

Зафіксуємо довільні  $k \geq 1$ ,  $h \geq k + 1$ . Покладемо

$$G = \{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - v| < h, |u_2 - v| < h\},$$

$$G_1 = \{|u_1 - v| < h, |u_2 - v| < h\}, \quad G_2 = \{|u_1 - v| \geq h\} \cup \{|u_2 - v| \geq h\},$$

$$w = v + T_h(u_2 - v), \quad l = k + \|w\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

В силу означення 3 і твердження 2 маємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u|^{p-2} \delta_i u_1 D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx = \\ = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx \leq \\ \leq \int_{G_1} (f - ge^{u_1}) T_k(u_1 - u_2) dx + k \left( \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_{G_2} ge^{u_1} dx \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Оцінимо зверху ліву частину нерівності (20). Для цього введемо множини

$$E' = \{|u_1 - w| < k, |u_2 - v| < h\}, \quad E'' = \{|u_1 - w| < k, |u_2 - v| \geq h\}.$$

Легко бачити, що

$$G \subset E'. \quad (21)$$

Крім того, маємо

$$E' \setminus G \subset \{h \leq |u_1 - v| < h + k\} \cap \{h - k \leq |u_2 - v| < h\}, \quad (22)$$

$$E'' \subset \{h - k \leq |u_1 - v| < h + k\}. \quad (23)$$

Дійсно, нехай  $x \in E'$ . Тоді  $|u_1(x) - u_2(x)| < k$ ,  $|u_2(x) - v(x)| < h$ ,  $|u_1(x) - v(x)| \geq h$ . Значить,

$$h \leq |u_1(x) - v(x)| \leq |u_1(x) - u_2(x)| + |u_2(x) - v(x)| < k + |u_2(x) - v(x)| < h + k.$$

Звідси випливає, що включення (20) справедливе.

Нехай тепер  $x \in E''$ . Отже,

$$|u_1(x) - w(x)| < k, \quad |u_2(x) - v(x)| \geq h. \quad (24)$$

В силу другої з цих нерівностей і означення функції  $w$  робимо висновок, що  $w(x) = v(x) + h \cdot \text{sign}(u_2(x) - v(x))$ . Тоді, враховуючи першу з нерівностей (24), одержуємо

$$|u_1(x) - v(x)| \leq |u_1(x) - w(x)| + |w(x) - v(x)| < h + k,$$

$$h = |v(x) - w(x)| \leq |u_1(x) - v(x)| + |u_1(x) - w(x)| < |u_1(x) - v(x)| + k.$$

Значить, включення (23) справедливе.

Далі, оскільки

$$T_k(u_1 - w) = T_l(u_1) - T_l(u_2) \quad \text{м.с. на } E',$$

для будь-якого  $i \in \{1, \dots, n\}$  маємо

$$D_i T_k(u_1 - w) = D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2) \quad \text{м.с. на } E'. \quad (25)$$

Аналогічно,

$$T_k(u_1 - w) = T_l(u_1) - v - T_h(u_2 - v) \quad \text{м.с. на } E'',$$

і, значить, для будь-якого  $i \in \{1, \dots, n\}$  маємо

$$D_i T_k(u_1 - w) = D_i T_l(u_1) - D_i v \quad \text{м.с. на } E''. \quad (26)$$

Враховуючи (25) і (26), одержуємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx = \\ & = \int_{E'} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx + \\ & \quad + \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i v] \right\} dx. \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи (21), виводимо, що

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx \geq \\ & \geq \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx - \\ & \quad - \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-1} |D_i T_l(u_2)| \right\} dx - \\ & \quad - \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-1} |D_i v| \right\} dx. \quad (27) \end{aligned}$$

Позначимо через  $I'$  та  $I''$  відповідно другий і третій інтеграли в правій частині нерівності (27). Використовуючи нерівність Юнга, отримуємо

$$I' = \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^p \right\} dx + \int_{E' \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_2)|^p \right\} dx, \quad (28)$$

$$I'' = \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^p \right\} dx + \int_{E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i v|^p \right\} dx. \quad (29)$$

Зауважимо, що в силу твердження 2, включень (22) і (23) та нерівності (19) маємо

$$\begin{aligned} & \int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^p \right\} dx = \\ & = \int_{(E' \setminus G) \cup E''} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u_1|^p \right\} dx \leq c_1 k \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx, \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{E \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_2)|^p \right\} dx &= \\ &= \int_{E \setminus G} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u_2|^p \right\} dx \leq c_1 k \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx. \end{aligned} \quad (31)$$

З (28)–(31) і (22), (23) випливає, що

$$I' + I'' \leq c_2 k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}.$$

Звідси і з (27) одержуємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) D_i T_k(u_1 - w) \right\} dx &\geq \\ &\geq \int_G \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |D_i T_l(u_1)|^{p-2} D_i T_l(u_1) [D_i T_l(u_1) - D_i T_l(u_2)] \right\} dx - \\ &\quad - c_2 k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Враховуючи, що в силу твердження 2

$$\nabla T_l(u_j) = \delta u_j \quad \text{м.с. на } G, \quad j = 1, 2,$$

з (32) і (20) виводимо, що

$$\begin{aligned} &\int_G \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u_1|^{p-2} \delta_i u_1 [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \right\} dx \leq \\ &\leq \int_{G_1} (f - g e^{u_1}) T_k(u_1 - u_2) dx + c_3 k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Аналогічно цьому маємо

$$\begin{aligned} &\int_G \left\{ \sum_{i=1}^n \nu |\delta_i u_2|^{p-2} \delta_i u_2 [\delta_i u_2 - \delta_i u_1] \right\} dx \leq \\ &\leq \int_{G_1} (f - g e^{u_2}) T_k(u_2 - u_1) dx + c_3 k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Додаючи дві останні нерівності, заключаємо, що для будь-яких  $k \geq 1$ ,  $h \geq k + 1$  справедлива нерівність

$$\begin{aligned} &\int_{\{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - v| < h, |u_2 - v| < h\}} \left\{ \sum_{i=1}^n \nu [|\delta_i u_1|^{p-2} \delta_i u_1 - |\delta_i u_2|^{p-2} \delta_i u_2] [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \right\} dx \leq \\ &\leq \int_{\{|u_1 - v| < h, |u_2 - v| < h\}} g(e^{u_2} - e^{u_1}) T_k(u_1 - u_2) dx + \\ &\quad + c_3 k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Очевидно, що

$$g(e^{u_2} - e^{u_1})T_k(u_1 - u_2) \leq 0 \quad \text{м.с. на } \Omega. \quad (34)$$

Зауважимо, що при  $k \geq 1$  маємо  $\text{meas} \{|u_j - v| \geq h - k\} \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow +\infty$ ,  $j = 1, 2$ . Цей факт є наслідком леми 1. З нього, в свою чергу, випливає, що при  $k \geq 1$

$$\int_{\{|u_j - v| \geq h - k\}} \Phi_j dx \rightarrow 0, \quad h \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2. \quad (35)$$

Враховуючи (34), нерівність

$$\sum_{i=1}^n \nu [|\delta_i u_1|^{p-2} \delta_i u_1 - |\delta_i u_2|^{p-2} \delta_i u_2] [\delta_i u_1 - \delta_i u_2] \geq 0 \quad \text{м.с. на } \Omega,$$

і використовуючи лему Фату, з (33) і (35) виводимо, що

$$\delta u_1 = \delta u_2 \quad \text{м.с. на } \Omega. \quad (36)$$

Нехай знову  $k \geq 1$ ,  $h \geq k + 1$ . Покладемо

$$z = T_h(u_1 - v) - T_h(u_2 - v).$$

Ясно, що  $z \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ . Отже,  $T_k(z) \in \mathring{W}^{1,p}(\nu, \Omega)$ . Тоді в силу твердження 5 і нерівності Юнга маємо

$$\left( \int_{\Omega} |T_k(z)|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq c_0 \sum_{i=1}^n \left( \int_{\Omega} \nu |D_i T_k(z)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (37)$$

Введемо множини

$$\begin{aligned} H_1 &= \{|z| < k, \quad |u_1 - v| < h, \quad |u_2 - v| < h\}, \\ H_2 &= \{|z| < k, \quad |u_1 - v| < h, \quad |u_2 - v| \geq h\}, \\ H_3 &= \{|z| < k, \quad |u_1 - v| \geq h, \quad |u_2 - v| < h\}, \\ H_4 &= \{|z| < k, \quad |u_1 - v| \geq h, \quad |u_2 - v| \geq h\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$H_m \cap H_r = \emptyset, \quad m \neq r, \quad m, r = 1, \dots, 4, \quad \{|z| < k\} = \bigcup_{m=1}^4 H_m. \quad (38)$$

Зафіксуємо довільне  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Враховуючи (2) і (38), одержимо

$$\int_{\Omega} \nu |D_i T_k(z)|^p dx = \sum_{m=1}^4 \int_{H_m} \nu |D_i z|^p dx. \quad (39)$$

В силу твердження 3 і (36) маємо

$$D_i z = 0 \quad \text{м.с. на } H_1. \quad (40)$$

Стосовно множин  $H_2$  і  $H_3$  в першу чергу зауважимо, що

$$H_2 \subset \{h - k < |u_1 - v| < h\}, \quad H_3 \subset \{h - k < |u_2 - v| < h\}. \quad (41)$$

Крім того, в силу тверджень 2 і 3 маємо

$$D_i z = \delta_i u_1 - D_i v \quad \text{м.с. на } H_2, \quad (42)$$

$$D_i z = D_i v - \delta_i u_2 \quad \text{м.с. на } H_3. \quad (43)$$

Використовуючи (41)–(43) і (19), встановлюємо, що

$$\int_{H_2} \nu |D_i z|^p dx \leq 2^n (c_1 + 1) k \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx, \quad (44)$$

$$\int_{H_3} \nu |D_i z|^p dx \leq 2^n (c_1 + 1) k \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx. \quad (45)$$

Нарешті, в силу тверджень 2 і 3 маємо

$$D_i w = 0 \quad \text{м.с. на } H_4. \quad (46)$$

З (39), (40) і (44)–(46) випливає, що

$$\int_{\Omega} \nu |D_i T_k(z)|^p dx \leq 2^n (c_1 + 1) k \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}.$$

Звідси і з (37) виводимо, що для будь-яких  $k \geq 1$ ,  $h \geq k + 1$  справедлива нерівність

$$\left( \int_{\{|u_1 - u_2| < k, |u_1 - v| < h, |u_2 - v| < h\}} |u_1 - u_2|^{n/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \leq \leq c_0 c_4 k \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{\{|u_1 - v| \geq h - k\}} \Phi_1 dx + \int_{\{|u_2 - v| \geq h - k\}} \Phi_2 dx \right\}^{1/p}.$$

Отриманий результат і твердження (35) дозволяють зробити висновок, що для будь-якого  $k \geq 1$

$$\int_{\{|u_1 - u_2| < k\}} |u_1 - u_2|^{n/(n-1)} dx = 0.$$

Значить,  $u_1 = u_2$  м.с. на  $\Omega$ . Тим самим теорему доведено.

### Список використаної літератури

1. Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*. 1989. Vol. 87, No 1. P. 149–169.
2. Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures. *Communications in Partial Differential Equations*. 1992. Vol. 17, No 3–4. P. 641–655.
3. Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J.L. An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze*. (4). 1995. Vol. 22, No 2. P. 241–273.
4. Boccardo L., Gallouët T., Marcellini P. Anisotropic equations in  $L^1$ . *Differential and Integral Equations*. 1996. Vol. 9, No 1. P. 209–212.

5. Bendahmane M., Karlsen K.H. Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in  $\mathbb{R}^N$  with advection and lower order terms and locally integrable data. *Potential Analysis*. 2005. Vol. 22, No 3. P. 207–227.
6. Aharouch L., Azroul E., Benkirane A. Quasilinear degenerated equations with  $L^1$  datum and without coercivity in perturbation terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2006. No 19. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2006.1.19>.
7. Atik Y., Rakotoson J.-M. Local  $T$ -sets and degenerate variational problems. I. *Applied Mathematics Letters*. 1994. Vol. 7, No 4. P. 49–53.
8. Cavalheiro A.C. Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008. Vol. 53, No 10. P. 945–956.
9. Cirimi G.R. On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data. *Ricerche di Matematica*. 1993. Vol. 42, No 2. P. 315–329.
10. Li F.Q. Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. 2007. Vol. 48, No 4. P. 647–658.
11. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with  $L^1$ -data. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013. No 167. P. 1–17. URL: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://ejde.math.unt.edu>.
12. Kovalevsky A.A., Gorban Yu.S. Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with  $L^1$ -data. *Proceedings of IAMM of NASU*. 2013. Vol. 26. P. 76–94.
13. Gorban Yu. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Open Mathematics*. 2017. Vol. 15. P. 768–786.
14. Gorban Yu. On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Matematychni Studii*. 2017. Vol. 47, No 1. P. 59–70.
15. Ковалевский А.А., Горбань Ю.С. Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с  $L^1$ -данными. Донецк : Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, 2007. 92 с. (Препринт. НАН Украины, Ин-т прикладной математики и механики; 2007.01).
16. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения: монография. Москва : Мир, 1983. 256 с.
17. Ковалевский А.А. О точном условии предельной суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с  $L^1$ -правыми частями *Український математичний вісник*. 2005. Т. 2, No 4. С. 507–545.

**Gorban Yu. S., Andreieva Yu. A., Belik A. O.** The uniqueness of the entropy solution of the Dirichlet problem for a model degenerate equation.

In the present paper, we deal with the Dirichlet problem for a model nonlinear second-order equation with isotropic and degenerate (with respect to independent variables) coefficients, lower term and  $L^1$ -right-hand side. The degeneracy with respect to independent variables is described by the presence of a weighted function in the equation's higher term. Our main result is the theorem on the uniqueness of entropy solution of the problem under consideration. It is proved under minimal conditions on the involved weighted function. Namely, we need these assumptions on its integrability for introduction of the corresponding weighted isotropic energy Sobolev space.

**Keywords:** degenerate elliptic equations,  $L^1$ -right-hand side, Dirichlet problem, entropy solution, uniqueness of the solution.

## References

1. Boccardo, L., & Gallouët, T. (1989). Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data. *Journal of Functional Analysis*. Vol. 87, No 1. P. 149–169.
2. Boccardo, L., & Gallouët, T. (1992). Nonlinear elliptic equations with right hand side measures. *Communications in Partial Differential Equations*. Vol. 17, No 3-4. P. 641–655.
3. Bénilan, Ph., Boccardo, L., Gallouët, T., Gariépy, R., Pierre, M., & Vazquez, J.L. (1995). An  $L^1$ -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations. *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze*. (4). Vol. 22, No 2. P. 241–273.

4. Boccardo, L., Gallouët, T., & Marcellini, P. (1996). Anisotropic equations in  $L^1$ . *Differential and Integral Equations*. Vol. 9, No 1. P. 209–212.
5. Bendahmane, M., & Karlsen, K.H. (2005). Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in  $\mathbb{R}^N$  with advection and lower order terms and locally integrable data. *Potential Analysis*. Vol. 22, No 3. P. 207–227.
6. Aharouch, L., Azroul, E., & Benkirane, A. (2016). Quasilinear degenerated equations with  $L^1$  datum and without coercivity in perturbation terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. No 19. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2006.1.19>.
7. Atik, Y., & Rakotoson, J.-M. (1994). Local  $T$ -sets and degenerate variational problems. I. *Applied Mathematics Letters*. Vol. 7, No 4. P. 49–53.
8. Cavalheiro, A.C. (2008). Existence of entropy solutions for degenerate quasilinear elliptic equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*. Vol. 53, No 10. P. 945–956.
9. Cirimi, G.R. (1993). On the existence of solutions to non-linear degenerate elliptic equations with measures data. *Ricerche di Matematica*. Vol. 42, No 2. P. 315–329.
10. Li, F.Q. (2007). Nonlinear degenerate elliptic equations with measure data. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*. Vol. 48, No 4. P. 647–658.
11. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2013). Solvability of degenerate anisotropic elliptic second-order equations with  $L^1$ -data. *Electronic Journal of Differential Equations*. No 167. P. 1-17. URL: <http://ejde.math.txstate.edu> or <http://edje.math.unt.edu>.
12. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2013). Conditions of solvability of the Dirichlet problem for degenerate anisotropic elliptic second-order equations with  $L^1$ -data. *Proceedings of IAMM of NASU*. Vol. 26. P. 76–94.
13. Gorban, Yu. (2017). Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Open Mathematics*. Vol. 15. P. 768–786.
14. Gorban, Yu. (2017). On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations. *Matematychni Studii*. Vol. 47, No 1. P. 59–70.
15. Kovalevsky, A.A., & Gorban, Yu.S. (2007). Degenerate anisotropic variational inequalities with  $L^1$ -data. Donetsk : Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, 92 p. (Preprint. NAS of Ukraine, Institute of Applied Mathematics and Mechanics; 2007.01). [in Russian]
16. Kinderlehrer, D., & Stampacchia, G. (1983). An introduction to variational inequalities and their applications: monography. Moscow: Mir, 256 p. [in Russian]
17. Kovalevsky, A.A. (2005). On a sharp condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with  $L^1$ -right-hand sides. *Ukrainian Mathematical Bulletin*. Vol. 2, No 4. P. 507–545. [in Russian]

Одержано 14.04.2021



УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).48-54](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).48-54)**О. В. Зубарук**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,

канд. фіз.-мат. наук

sambrinka@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>**ПРО АЛГЕБРУ АУСЛЕНДЕРА НАПІВГРУПИ, ПОРОДЖЕНОЇ  
ДВОМА АНУЛЬОВНИМИ 2-НІЛЬПОТЕНТНИМ І  
2-ПОТЕНТНИМ ЕЛЕМЕНТАМИ**

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура, а згодом, у 1955 р. (за допомогою комп'ютерної програми) Г. Е. Форсайт. В обох випадках опис отримано в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму. Існує 18 різних напівгруп третього порядку (напівгрупи  $S$  і  $T$  називаються антиізоморфними, якщо напівгрупа  $S$  ізоморфна напівгрупі  $T^{\text{op}}$ , дуальній до напівгрупи  $T$ ). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані в працях В. М. Бондаренка і Я. В. Заціхи. Зокрема, для комутативних напівгруп вони такі (в круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках вказано мінімальну систему твірних; тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних  $e$  і  $0$ , якщо вони є, не виписуються):

- 1)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$
- 2)  $(0, c^2, c) = \langle c \rangle: c^3 = 0;$
- 3)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0;$
- 4)  $(0, b, e) = \langle b, e \rangle: b^2 = 0;$
- 5)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = cb = 0;$
- 6)  $(0, c^2, c) = \langle 0, c \rangle: c^3 = c^2;$
- 7)  $(0, b, e) = \langle 0, b, e \rangle: b^2 = b;$
- 8)  $(0, e, c) = \langle 0, c \rangle: c^2 = e;$
- 9)  $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = cb = c;$
- 10)  $(c^2, e, c) = \langle e, c \rangle: c^3 = c;$
- 11)  $(c^2, c^3, c) = \langle c \rangle: c^4 = c^2;$
- 12)  $(e, b, b^2) = \langle b \rangle: b^3 = e.$

Вони ж описали зображувальний тип напівгруп третього порядку над полем і вказали канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). Автор, разом з В. М. Бондаренком, описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. У цій статті для єдиної такої (з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) наднапівгрупи скінченного зображувального типу описана їхня матрична алгебра Ауслендера як одна із форм задання категорії зображень.

**Ключові слова:** поле, напівгрупа і наднапівгрупа, антиізоморфізм, визначальні співвідношення, матричні зображення, зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

**1. Вступ.** Згідно з [1, Теорема 1] всі напівгрупи третього порядку є ручними (означення ручних та диких матричних задач приведено в роботі Ю. А. Дрозда [2]). Серед них, якщо не розглядати ні циклічні напівгрупи, ні циклічні з приєднаним одиничним чи нульовим елементом, є лише три комутативних напівгрупи скінченного зображувального типу над довільним полем  $K$  (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень). Однією із таких напівгруп є напівгрупа, породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, матричні зображення якої вивчалися в роботі [1], а матричні зображення її стандартних (пов'язаних із визначальними співвідношеннями відносно мінімальної системи твірних) наднапівгруп – в роботі [3].

Ця робота присвячена опису алгебр Ауслендера для наднапівгруп скінченного зображувального типу.

**2. Попередні відомості.** Розглянемо напівгрупу  $S$ , породжену двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами, тобто напівгрупу з елементами  $0, b, c$ , (мінімальною) системою твірних  $b, c$  і визначальними співвідношеннями  $b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0$ , які в подальшому позначимо відповідно через  $(b), (c), (bc), (cb)$ .

Введемо такі напівгрупи:

$$S^{(b)} := S \setminus (b) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$S^{(c)} := S \setminus (c) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, bc = 0, cb = 0;$$

$$S^{(bc)} := S \setminus (bc) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, cb = 0;$$

$$S^{(cb)} := S \setminus (cb) := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0.$$

Покладемо

$$S^{(x,y)} := S \setminus \{(x), (y)\} \text{ для } x, y \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}, x \neq y;$$

$$S^{(x,y,z)} := S \setminus \{(x), (y), (z)\} \text{ для } x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}, x \neq y, x \neq z, y \neq z.$$

Очевидно, що при перестановці  $x, y, z$  напівгрупи  $S^{(x,y)}$  і  $S^{(x,y,z)}$  не змінюються. Введені таким чином напівгрупи для напівгрупи  $S$  мають фактор-напівгрупу, ізоморфну  $S$ , тобто є наднапівгрупами напівгрупи  $S$ .

В роботі [3] доведена наступна теорема.

**Теорема 1.** Для довільного поля  $K$  мають місце наступні твердження.

- 1)  $S^{(x)}$  – напівгрупа скінченного зображувального типу для  $x \in \{(bc), (cb)\}$ ;
- 2)  $S^{(x)}$  – ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для  $x \in \{(b), (c)\}$ ;
- 3)  $S^{(x,y)}$  – ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для  $x, y \in \{(b), (c)\}$  або  $x, y \in \{(bc), (cb)\}$ ;
- 4)  $S^{(x,y)}$  – дика напівгрупа для  $x \in \{(b), (c)\}, y \in \{(bc), (cb)\}$  або  $x \in \{(bc), (cb)\}, y \in \{(b), (c)\}$ ;
- 5)  $S^{(x,y,z)}$  – дика напівгрупа для довільних  $x, y, z \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$ .

Враховуючи, що  $S^{(cb)op} = S^{(bc)}$ , де  $S^{(cb)op}$  – дуальна до  $S^{(cb)}$  напівгрупа (з

операцією множення  $x \circ y = yx$ ), матричні зображення якої отримуються із матричних зображень  $S^{(cb)}$  транспонуванням всіх матриць, по суті маємо лише одну наднапівгрупу скінченного зображувального типу –  $S^{(cb)}$ . В роботі [3] отримана канонічна форма її матричних зображень.

**Теорема 2.** *Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи  $N = S^{(cb)} := (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0$  така:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут через  $B, C$  позначається відповідно матриця зображення, що відповідає твірному елементу  $b, c$ .  $E$  позначає одиничну матрицю будь-якого розміру  $n \times n$  ( $n \geq 0$ ).

Зауважимо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому елементу напівгрупи, завжди вважається нульовою.

**3. Формулювання основного результату.** Як і раніше, всі зображення розглядаються над полем  $K$ . Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (по одному представнику із кожного класу еквівалентності). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то і алгебра Ауслендера буде реалізовуватись в матричному вигляді і в цьому випадку її природно називати матричною алгеброю Ауслендера. Зауважимо, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників у класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри повної матричної алгебри відповідного порядку, а отже, і ізоморфними.

Нагадаємо, що алгебра ендоморфізмів матричного зображення  $T$  деякої напівгрупи  $S$  – це множина всіх матриць  $X$  таких, що  $T(x)X = XT(x)$  для будь-якого  $x \in T$ . Зрозуміло, що коли напівгрупа задається твірними і визначальними співвідношеннями, то рівності  $T(x)X = XT(x)$  достатньо розглядати лише для твірних елементів.

**Теорема 3.** Матрична алгебра Ауслендера  $\mathcal{A}(N)$  напівгрупи  $N$  над полем  $K$  складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} & 0 \end{pmatrix},$$

де  $x_{ij}$  — елементи поля  $K$ .

**4. Доведення теореми 3.** Розглянемо матричне зображення напівгрупи  $N$ , яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення переставно подібне прямій сумі зображень

- 1)  $B_1 = (0)$ ,  $C_1 = (1)$ ;
- 2)  $B_2 = (0)$ ,  $C_2 = (0)$ ;
- 3)  $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- 4)  $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$$5) B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

кожне з яких є, очевидно, нерозкладне.

Оскільки довільне зображення, що має канонічний вигляд, не містить інших прямих нерозкладних доданків, окрім 1)–5) (бо при наявності клітини  $E$  порядку  $s > 1$  воно еквівалентне прямій сумі двох канонічних зображень меншої розмірності), то матрична алгебра Ауслендера задається рівностями  $B_0X = XB_0$ ,  $C_0X = XC_0$  як рівняннями відносно матриці  $X = (x_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq 5$ .

Легко обчислити, що рівність  $C_0X = XC_0$  еквівалентна рівностям  $x_{ij} = 0$  для  $i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6, 7, 8, 9$  і для  $i = 4, 5, 6, 7, 8, 9, j = 1, 2, 3$  (див., напр., [4, VIII, §2]).

Розглянемо тепер рівність  $B_0X = XB_0$ . Маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ 0 & 0 & 0 & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ 0 & 0 & 0 & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ 0 & 0 & 0 & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ 0 & 0 & 0 & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ 0 & 0 & 0 & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ 0 & 0 & 0 & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ 0 & 0 & 0 & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{32} & 0 & x_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{64} & x_{65} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{74} & x_{75} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{84} & x_{85} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{94} & x_{95} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}.$$

Теорема 3 доведена.

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі розглядаються матричні зображення наднапівгруп спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами. Описано явний вигляд алгебри Ауслендера для наднапівгруп скінченного зображувального типу цієї напівгрупи.

Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

### Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгород. ун-ту. Серія «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 1 (32). С. 36-49.
2. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. *Матричные задачи*. – Киев: Ин-т математики АН УССР. 1977. С. 104-114.
3. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами. *Вісник Київського національного університету. Сер. фіз.-мат. науки*. 2020, № 3. С. 110-114.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1966. 576 с.

**Zubaruk O. V.** On the Auslander algebra of a semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements.

Semigroups of the third order were first described in 1953 by T. Tamura, and later, in 1955 (with the help of a computer program) by G. E. Forsythe. In both cases, the description is obtained in terms of Kelly tables, up to isomorphism and antiisomorphism. There are 18 different semigroups of the third order (semigroups  $S$  and  $T$  are called anti-isomorphic if the semigroup  $S$  is isomorphic to the semigroup  $T^{\text{op}}$  dual to the semigroup  $T$ ). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups are constructed in the works of V. M. Bondarenko and Ya. V. Zaciha. In particular, for commutative semigroups they are as follows (all elements of the semigroup are indicated in parentheses, and the minimal system of generators is indicated in angle brackets; trivial defining relations for unit and zero generators  $e$  and  $0$ , if any, are not written):

- 1)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$ :  $b^2 = 0$ ,  $c^2 = 0$ ,  $bc = cb = 0$ ;
- 2)  $(0, c^2, c) = \langle c \rangle$ :  $c^3 = 0$ ;
- 3)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$ :  $b^2 = 0$ ,  $c^2 = c$ ,  $bc = cb = 0$ ;
- 4)  $(0, b, e) = \langle b, e \rangle$ :  $b^2 = 0$ ;

- 5)  $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = cb = 0;$
- 6)  $(0, c^2, c) = \langle 0, c \rangle: c^3 = c^2;$
- 7)  $(0, b, e) = \langle 0, b, e \rangle: b^2 = b;$
- 8)  $(0, e, c) = \langle 0, c \rangle: c^2 = e;$
- 9)  $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = cb = c;$
- 10)  $(c^2, e, c) = \langle e, c \rangle: c^3 = c;$
- 11)  $(c^2, c^3, c) = \langle c \rangle: c^4 = c^2;$
- 12)  $(e, b, b^2) = \langle b \rangle: b^3 = e.$

They also described the representation type of third-order semigroups above a field and indicated the canonical form of matrix representations for semigroups of finite representation type (i.e., those that have, up to equivalence, a finite number of indecomposable representations). The author, together with V. M. Bondarenko, described the representation type of standard oversemigroups of the semigroup generated by two mutually annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. In this paper, for a single such (up to isomorphism and antiisomorphism) oversemigroup of finite representation type, their Auslander matrix algebra is described as one of the forms of specifying the category of representations.

**Keywords:** field, semigroup and oversemigroup, antiisomorphism, defining relations, matrix representations, representation type, canonical form, Auslander algebra.

## References

1. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 1(32), 36-49 [in Ukrainian].
2. Drozd, Yu. (1977). O ruchnykh i dikykh matrychnykh zadachakh [About tame and wild matrix problems]. *Matrix problems – Institute of Math. of AN of Ukraine. SSR*, 104-114 [in Russian].
3. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzenoyi vzayemno anul'ovnymy 2-potentnym i 2-nil'potentnym elementamy [On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics*, 3, 110-114 [in Ukrainian].
4. Gantmakher, F. (1966). Teoriya matrits [Matrix theory]. *Moskow: Nauka* [in Russian].

Одержано 26.04.2021

УДК 517.946

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).55-60](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).55-60)**О. І. Когутич**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

аспірант

oksana.kohutyach@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3094-2467>**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ А.М. НАХУШЕВА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ**

У роботі узагальнюються результати раніше відомих наукових публікацій по дослідженню та наближеному інтегруванню нелінійного ДРЧП поширення вологи у пористих середовищах.

У статті досліджується крайова задача з нелокальною умовою А.М. Нахушева для диференціального рівняння поширення вологи. Побудовано одну модифікацію двостороннього методу для наближеного розв'язання еквівалентного до крайової задачі інтегро-диференціального рівняння. Визначено функції порівняння до крайової задачі. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку розглядуваної задачі.

Доведено рівномірну збіжність побудованих послідовностей до єдиного розв'язку розглядуваної задачі та виконання диференціальних нерівностей.

**Ключові слова:** умова А.М. Нахушева, диференціальні рівняння в частиних похідних, інтегро-диференціальні рівняння, функції порівняння, модифікація двостороннього методу.

**1. Вступ.** Як показано у роботах [1, 2] процеси фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі, переносу вологи в ґрунтах описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних (ДРЧП) вигляду

$$m(t, x)D^{(1,2)}U(t, x) + \alpha(t, x)D^{(1,1)}U(t, x) + d(t, x)D^{(1,0)}U(t, x) + \eta(t, x)D^{(0,2)}U(t, x) + a(t, x)D^{(0,1)}U(t, x) + b(t, x)U(t, x) = g(t, x). \quad (1)$$

Питанням існування та єдиності розв'язку рівняння (1) при різних вихідних даних присвячені роботи [3, 4].

У випадку нелінійного ДРЧП третього порядку з нелокальними крайовими умовами у роботі [5, 6] будується одна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання розглядуваної задачі.

У даній статті узагальнюються результати, одержані у роботах [3–6].

**2. Постановка задачі та допоміжні твердження і означення.** Нехай у просторі функцій  $C^*(\bar{D}) := C^{(1,2)}(D) \cap C(\bar{D})$ ,  $D = \{(t, x) \mid t \in (0, b), x \in (0, a)\}$  потрібно знайти розв'язок нелінійного ДРЧП вигляду

$$D^{(1,2)}U(t, x) + a_1(t, x)D^{(0,2)}U(t, x) + a_2(t, x)D^{(1,1)}U(t, x) = f(t, x, U(t, x)D^{(0,1)}U(t, x)) := f[U(t, x)], \quad (2)$$



який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} U(a, x) = T(x), x \in [0, a], D^{(0.1)}U(t, a) = \psi(t), t \geq 0, \\ \int_{x_0}^a D^{(1.0)}U(t, \xi)d\xi = \omega(t), t \in [0, b], 0 \leq x_0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $D^{(\kappa)}U(t, x) : D \rightarrow D_\kappa \subset \mathbb{R}, \kappa = (\kappa_1, \kappa_2), f : B \rightarrow \mathbb{R}, B = D \times \prod_{\kappa_1, \kappa_2} D_\kappa \subset \mathbb{R}^4,$   
 $\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 0, 1.$

Надалі будемо вважати, що  $T(x) \in C^2[0, a], \psi(t) \in C^1[0, b], a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(\overline{D}),$   
 $\omega(t) \in C[0, b]$  і виконується умова узгодженості

$$T'(a) = \psi(0), \quad (4)$$

а права частина рівняння (2)  $f[U(t, x)] \in C(\overline{B}).$

Справедлива наступна

**Лема 1.** *Якщо функція  $f[U(t, x)] \in C(\overline{B}), T(x) \in C^2[0, a], \psi(x) \in C^1[0, b],$   
 $a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(\overline{D}), \omega(t) \in C[0, b],$  то крайова задача (2)-(4) та інтегро-дифферен-  
ціальне рівняння вигляду*

$$U(t, x) = \int_0^t \left\{ \mathcal{L}F[U(\eta, \zeta)] - \frac{1}{a - x_0} \int_{x_0}^a \mathcal{L}F[U(\eta, \zeta)]dx \right\} d\eta + \Omega(t, x), \quad (5)$$

де

$$\Omega(t, x) := \frac{1}{a - x_0} \left\{ \int_0^t \omega(\eta)d\eta + \int_{x_0}^a [T(x) - \Phi(t, x)]dx \right\} + \Phi(t, x),$$

$$\Phi(t, x) := \int_0^x T'(\xi) \exp \left( \int_0^t a_1(\eta, \xi)d\eta \right) d\xi +$$

$$+ \int_a^x \int_0^t [a_1(\eta, a)\psi(\eta) + \psi'(\eta)]K(\xi, t; a, \eta)d\eta d\xi,$$

$$K(x, t; \xi, \eta) := \exp \left( \int_x^\xi a_2(\eta, \tau)d\tau + \int_t^\eta a_1(\tau, x)d\tau \right),$$

$$F[U(t, x)] := f[U(t, x)] + [D^{(0.1)}a_1(t, x) + a_1(t, x)a_2(t, x)]D^{(0.1)}U(t, x),$$

$$\mathcal{L}F[U(\eta, \zeta)] := \int_x^a \int_\xi^a K(\xi, t; \zeta, \eta)F[U(\eta, \zeta)]d\zeta d\xi$$

є еквівалентними.

Неважко переконатись, що функція  $\Omega(t, x)$  задовільняє усі крайові умови (3) і  $\Omega(t, x) \in C^{(2.1)}(D) \cap C^{(1.1)}(\overline{D}),$  а отже поклавши  $U(t, x) := U(t, x) - \Omega(t, x)$  ми зводимо крайові умови (3) до однорідних, тому не зменшуючи загальності подальших міркувань будемо вважати, що  $T(x) = \psi(t) = \omega(t) = 0.$

**Означення 1.** Будемо говорити, що функція  $F[U(t, x)] \in C_3(\bar{B})$ , якщо вона задовольняє наступні умови:

- 1)  $F[U(t, x)] \in C(\bar{B})$ ;
- 2) у просторі функцій  $C(\bar{B}_1)$ ,  $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^6$ ,  $\text{Pr}_{x \in \bar{B}_1} \bar{B}_1 = \bar{D}$ , існує така функція  $H(t, x, U(t, x), D^{(0,1)}U(t, x); V(t, x), D^{(0,1)}V(t, x)) := H[U(t, x); V(t, x)]$ , що

(а) для довільної з простору  $C_1^{(1,2)}(\bar{D}) := C^{(1,2)}(D) \cap C^{(0,1)}(\bar{D})$  пари функцій  $U(t, x), V(t, x) \in \bar{B}_1$  які задовольняють умови

$$D^{(0,\kappa_2)}[U(t, x) - V(t, x)] \geq (\leq) 0, \kappa_2 = 0 (\kappa_2 = 1), (t, x) \in \bar{D},$$

в області  $\bar{B}_1$  виконуються нерівність

$$H[U(t, x); V(t, x)] \geq H[V(t, x); U(t, x)], \quad (6)$$

(б)  $H[U(t, x); U(t, x)] \equiv F[U(t, x)]$ ;

- 3) функція  $H[U(t, x); V(t, x)]$  задовольняє умову Ліпшиця, тобто для всяких з простору  $C_1^{(1,2)}(\bar{D})$  функцій  $U_r(t, x), V_r(t, x) \in \bar{B}_1, r = 1, 2$ , виконується умова

$$\begin{aligned} & |H[U_1(t, x); U_2(t, x)] - H[V_1(t, x); V_2(t, x)]| \leq \\ & \leq L \sum_{r=1}^2 (|W_r(t, x)| + |D^{(0,1)}W_r(t, x)|), \end{aligned}$$

де  $W_r(t, x) = U_r(t, x) - V_r(t, x), r = 1, 2$ ,  $L$ —стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція  $F[U(t, x)] \in C(\bar{B})$  і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи із третього, то  $F[U(t, x)] \in C_3(\bar{B})$ . Зворотнє твердження не справедливе.

**3. Побудова методу наближеного розв'язання інтегро-диференціального рівняння (5).** Введемо позначення:

$$\begin{aligned} T_1 F[U(\eta, \zeta)] &:= \int_0^t \mathcal{L} F[U(\eta, \zeta)] d\eta, \\ T_2 F[U(\eta, \zeta)] &:= \frac{-1}{a - x_0} \int_0^t \int_{x_0}^a \mathcal{L} F[U(\eta, \zeta)] dx d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H[Z_p(t, x); V_p(t, x)] &:= f^p(t, x), H[V_p(t, x); Z_p(t, x)] := f_p(t, x), \\ \alpha_p(t, x) &:= Z_p(t, x) - T_1 f^p(\eta, \zeta) - T_2 f_p(\eta, \zeta), \\ \beta_p(t, x) &:= V_p(t, x) - T_1 f_p(\eta, \zeta) - T_2 f^p(\eta, \zeta), \end{aligned} \quad (7)$$

$$R^p(t, x) := T_1 f^p(\eta, \zeta) + T_2 f_p(\eta, \zeta),$$

$$R_p(t, x) := T_1 f_p(\eta, \zeta) + T_2 f^p(\eta, \zeta).$$

Побудуємо послідовності функцій  $\{Z_p(t, x)\}, \{V_p(t, x)\}$  згідно формул

$$Z_{p+1}(t, x) = R^p(t, x), \quad V_{p+1}(t, x) = R_p(t, x), \quad (8)$$

де за нульове наближення  $Z_0(t, x), V_0(t, x) \in \overline{B}_1$  вибираємо довільні з простору  $C^{(1.1)}(\overline{D})$  функції, які задовольняють умови

$$\begin{aligned} D^{(0, \kappa_2)} W_0(t, x) &\geq (\leq) 0, \quad D^{(0, \kappa_2)} \alpha_0(t, x) \geq (\leq) 0, \\ D^{(0, \kappa_2)} \beta_0(t, x) &\leq (\geq) 0, \quad \kappa_2 = 0 (\kappa_2 = 1), \quad (t, x) \in \overline{D}. \end{aligned} \quad (9)$$

**Означення 2.** Довільні із простору  $C^{(1.1)}(\overline{D})$  функції  $Z_0(t, x), V_0(t, x)$ , які в області  $\overline{B}_1$  задовольняють нерівності (9), називаються функціями порівняння крайової задачі (2), (3).

Із (7), (8) маємо:

$$W_{p+1}(t, x) = R^p(t, x) - R_p(t, x) = (T_1 - T_2)(f^p(\eta, \zeta) - f_p(\eta, \zeta)), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x) &= \alpha_p(t, x), \\ V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x) &= \beta_p(t, x), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(t, x) &= T_1[f^p(\eta, \zeta) - f^{p+1}(\eta, \zeta)] + T_2[f_p(\eta, \zeta) - f_{p+1}(\eta, \zeta)], \\ \beta_{p+1}(t, x) &= T_1[f_p(\eta, \zeta) - f_{p+1}(\eta, \zeta)] + T_2[f^p(\eta, \zeta) - f^{p+1}(\eta, \zeta)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Із (10)–(12), враховуючи нерівності (6), (9), при  $p = 0$  маємо

$$\begin{aligned} D^{(0, \kappa_2)} W_1(t, x) &\geq (\leq) 0, \quad D^{(0, \kappa_2)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \geq (\leq) 0, \\ D^{(0, \kappa_2)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] &\leq (\geq) 0, \quad D^{(0, \kappa_2)} \alpha_1(t, x) \geq (\leq) 0, \\ D^{(0, \kappa_2)} \beta_1(t, x) &\leq (\geq) 0, \quad \kappa_2 = 0 (\kappa_2 = 1), \quad (t, x) \in \overline{D}, \end{aligned}$$

тобто мають місце нерівності

$$D^{(0, \kappa_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} V_1(t, x) \leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} Z_1(t, x) \leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} Z_0(t, x),$$

а отже, якщо  $D^{(0, \kappa_2)} Z_0(t, x), D^{(0, \kappa_2)} V_0(t, x) \in \overline{B}_1$ , то і  $D^{(0, \kappa_2)} Z_1(t, x), D^{(0, \kappa_2)} V_1(t, x) \in \overline{B}_1$ . Методом математичної індукції переконаємось у справедливості в області  $\overline{B}_1$  наступних нерівностей

$$\begin{aligned} D^{(0, \kappa_2)} V_p(t, x) &\leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^{(0, \kappa_2)} Z_p(t, x) \end{aligned} \quad (13)$$

для  $\forall p \in \mathbb{N}, \kappa_2 = 0 (\kappa_2 = 1), (t, x) \in \overline{D}$ .

Покажемо, що послідовності функцій  $\{D^{(0, \kappa_2)} Z_p(t, x)\}, \{D^{(0, \kappa_2)} V_p(t, x)\}$  побудовані згідно алгоритму (8), (9) збігаються рівномірно при  $(t, x) \in \overline{D}$  до єдиного розв'язку рівняння (5).

Дійсно, нехай

$$\begin{aligned} \max_{\overline{D} \times \overline{D}} K(x, t; \xi, \eta) &\leq 0, 25K, \\ \max \left\{ \sup_{\overline{D}} |W_0(t, x)|, \sup_{\overline{D}} |D^{(0.1)} W_0(t, x)| \right\} &\leq d. \end{aligned}$$

Тоді методом математичної індукції із (10) одержимо оцінки

$$|D^{(0,\kappa_2)}W_p(t,x)| \leq \frac{(KLqt)^p}{p!}d, \quad (14)$$

де  $q = \max\{a, \frac{2}{3}(a-x_0)^2\}$ ,  $\kappa_2 = 0, 1$ ,  $(t,x) \in \bar{D}$ .

Але тоді на підставі оцінок (14) маємо

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(0,\kappa_2)}W_p(t,x) = 0,$$

тобто

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(0,\kappa_2)}Z_p(t,x) = \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(0,\kappa_2)}V_p(t,x) := D^{(0,\kappa_2)}U(t,x).$$

Щоб показати, що гранична функція  $U(t,x)$  є розв'язком інтегро-диференціального рівняння (5), достатньо у (8) перейти до границі, коли  $p \rightarrow \infty$ .

Має місце наступна

**Теорема 1.** *Нехай права частина ДРЧП (2)  $f[U(t,x)] \in C_3(\bar{B})$  та існують функції порівняння задачі (2)-(4).*

*Тоді послідовності функцій  $\{Z_p(t,x)\}$ ,  $\{V_p(t,x)\}$ , побудовані згідно (8), (9):*

- 1) збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв'язку  $U(t,x) \in C^*(\bar{D})$  крайової задачі (2)-(4),*
- 2) мають місце оцінки (14),*
- 3) при  $(t,x) \in \bar{D}$  справедливі нерівності*

$$\begin{aligned} D^{(0,\kappa_2)}V_p(t,x) &\leq (\geq) D^{(0,\kappa_2)}V_{p+1}(t,x) \leq (\geq) D^{(0,\kappa_2)}U(t,x) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^{(0,\kappa_2)}Z_{p+1}(t,x) \leq (\geq) D^{(0,\kappa_2)}Z_p(t,x), \end{aligned} \quad (15)$$

для  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\kappa_2 = 0$  ( $\kappa_2 = 1$ ).

**Доведення.** Для повного доведення теореми залишилося довести справедливості нерівностей (15). Припустимо супротивне, нехай у деякій точці  $(t_1, x_1) \in D$  для деякого  $p \in \mathbb{N}$  наприклад  $U(t_1, x_1) > Z_p(t_1, x_1)$ . Тоді згідно (13) для всякого  $n \in \mathbb{N}$   $Z_{p+n}(t_1, x_1) \leq Z_p(t_1, x_1) < U(t_1, x_1)$ . Але тоді послідовність  $Z_{p+n}(t_1, x_1)$  при  $n \rightarrow \infty$  не збігається у даній точці до розв'язку рівняння (5), що суперечить доведеному вище. Аналогічно доводиться всі інші нерівності в (15).

Єдиність розв'язку рівняння (5) доводиться методом від супротивного.

**Зауваження 1.** *Функції  $Z_p(t,x)$ , та  $V_p(t,x)$ , задовольняють перші дві крайові умови в (3), а*

$$\int_{x_0}^a D^{(1,0)}Z_p(t,\xi)d\xi = - \int_{x_0}^a D^{(1,0)}V_p(t,\xi)d\xi,$$

*а тому за  $p$ -ве наближення береться функція  $U_p(t,x) = \frac{1}{2}[Z_p(t,x) + V_p(t,x)]$ .*

**4. Висновки.** Побудовано модифікацію двостороннього методу дослідження задачі з нелокальною умовою А.М. Нахушева для диференціального рівняння поширення вологи. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі (2)-(4). Доведено збіжність побудованого ітераційного процесу.

**Список використаної літератури**

1. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. *Дифференци. уравнения*. 1979. Вып. 15, №1. С. 96–105.
2. Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М:Наука, 1976. 352 с.
3. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса. *Дифференци. уравнения*. 1982. Вып. 19, №1. С. 280–285.
4. Шхануков Б.А. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений. *Дифференци. уравнения*. 1983. Вып. 18, №2. С. 145–152.
5. Маринец В.В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями. *Дифференци. уравнения*. 1988. Вып. 24, №8. С. 1393–1397.
6. Маринец В.В., Маринец К.В., Питьовка О.Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла 2019. 288 с.

**Kohutych O. I.** Investigation of the problem with the non-local condition A.M. Nakhushev for the differential equation of moisture distribution.

The paper summarizes the results of previously known scientific publications on the study and approximate integration of nonlinear PDE for moisture distribution in a porous environment.

In the article researching the boundary value problem with non-local condition A.M. Nakhusheva for the differential equation of moisture distribution.

One modification of the two-side method is constructed for the approximate solution equivalent to the boundary value problem of the integral-differential equation. The comparison functions for the boundary value problem are determined. The conditions of existence and uniqueness of the solution to the investigated problem are established.

The uniform convergence of the constructed sequences to a single solution of the considered problem and fulfillment of differential inequalities is proved.

**Keywords:** condition's A.M. Nakhusheva, differential equations in parts of derivatives, integrodifferential equations, comparison functions, modification of the two-way method.

## References

1. Nahushev, A.M. (1979). Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture]. *Differenc. uravneniya.*, 15, 1, 96–105. [in Russian]
2. Chudnovskij, A.F. (1976). Teplofizika pochv [Thermal physics of soils]. *M: Nauka* [in Russian]
3. Vodahova, V.A. (1982). Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A.M. Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa [A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer]. *Differenc. uravneniya.*, 19, 1, 280–285. [in Russian]
4. Shkhanukov, B.A. (1983). O nekotoryh kraevyh zadachah dlya uravneniya tret'ego poryadka i ekstremal'nyh svojstv ego reshenij [On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions]. *Differenc. uravneniya.*, 18, 2, 145–152. [in Russian]
5. Marynets, V.V. (1988). O nekotoryh zadachah dlya sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenii v chastnyh proizvodnyh s nelokal'nymi kraevymi uslovijami [On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions]. *Differenc. uravneniya.*, 24, 8, 1393–1397. [in Russian]
6. Marynets, V.V., Marynets, K.V., & Pytovka, O.Yu. (2019). Analitichni metodi doslidzhennya krajovih zadach [Analytical methods of research of boundary value problems]. *Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla"*. [in Ukrainian]

Одержано 15.04.2021

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).61-75](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75)**В. М. Петечук<sup>1</sup>, Ю. В. Петечук<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти,  
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,  
кандидат фізико-математичних наук

vasil.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5663-8789>

<sup>2</sup> Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,  
доцент кафедри математики та інформатики,  
кандидат фізико-математичних наук

yuliia.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3670-9671>

## ГОМОМОРФІЗМИ МАТРИЧНИХ ГРУП ТА КІЛЕЦЬ НАД АСОЦІАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

У статті з єдиних позицій описані групові гомоморфізми матричних груп і кільцеві гомоморфізми матричних кілець над асоціативними кільцями з 1.

Показано, що опис гомоморфізмів матричних груп  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 2$  у групу автоморфізмів  $GL(W)$  лівого (необов'язково вільного)  $K$ -модуля  $W$  над довільним асоціативним кільцем  $K$  з 1 зводиться до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи в кільці  $K$ . Доведено, що вони допускають стандартний опис гомоморфізмів групи елементарних трансвекцій  $E(n, R)$ , якщо такий опис допускають гомоморфізми матричних груп над кільцями  $K$ , в яких 2 або 3 є оборотними елементами.

Також описано кільцеві гомоморфізми  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$ ,  $n \geq 2$  лівого (необов'язково вільного)  $K$ -модуля  $W$  над довільним асоціативним кільцем  $K$  з 1. Показано, що гомоморфізми  $\Lambda$  допускають стандартний опис на кільці  $R_n$ .

**Ключові слова:** асоціативні кільця з 1, групові гомоморфізми матричних груп, кільцеві гомоморфізми кілець матриць, формальні матриці, стандартний опис.

**1. Вступ.** Стаття присвячена вивченню гомоморфізмів матричних груп та кілець над асоціативними кільцями з 1.

Вводиться поняття стандартного опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Розглядається гомоморфізм  $\Lambda_0$  групи  $GL(n, R)$  у групу автоморфізмів  $GL(W)$  лівого (необов'язково вільного)  $K$ -модуля  $W$  над довільними асоціативними кільцями  $R$  і  $K$  з 1, який визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}(x)^{-1}(1 - e) + e_1]g, \quad x \in GL(n, R),$$

де  $L$  і  $P$  – ліві  $K$ -модулі,  $g : W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$  – ізоморфізм  $K$ -модулів,  $\bar{\delta}$

– кільцевий гомоморфізм і  $\bar{\nu}$  – кільцевий антигомоморфізм кільця  $R_n$ , індуковані кільцевим гомоморфізмом  $\delta : R \rightarrow \text{End}L$  і кільцевим антигомоморфізмом  $\nu : R \rightarrow \text{End}L$  відповідно в кільце  $(\text{End}L)_n$ , 1 – одиниця і  $e$  – центральний ідемпотент кільця  $\text{End}L$ , а  $e_1$  – одиниця кільця  $\text{End}P$ , яка ортогональна з елементами кільця  $\text{End}L$ .

За означенням гомоморфізм  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  групи  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , якщо  $\Lambda$  збігається з  $\Lambda_0$  на цій групі.

У статті показано, що опис гомоморфізмів матричних груп  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 2$  у групу автоморфізмів  $GL(W)$  над асоціативним кільцем  $K$  зводиться до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи в кільці  $K$ . Доведено, що вони допускають стандартний опис на групі елементарних трансвекцій  $E(n, R)$ , якщо такий опис допускають гомоморфізми матричних груп над кільцями  $K$ , в яких 2 або 3 є оборотними елементами.

В роботі також описуються кільцеві гомоморфізми  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$ ,  $n \geq 2$  у кільце  $\text{End}W$  лівого (необов'язково вільного)  $K$ -модуля  $W$  над довільним асоціативним кільцем  $K$  з 1. Показано, що гомоморфізми  $\Lambda$  допускають стандартний опис на кільці  $R_n$ . Це означає, що гомоморфізм  $\Lambda$  на кільці  $R_n$  співпадає з гомоморфізмом  $\Lambda_0$ , який визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + e_1]g, \quad x \in R_n,$$

де  $L$  і  $P$  ліві  $K$ -модулі,  $g : W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$  – ізоморфізм  $K$ -модулів,  $\bar{\delta}$  – кільцевий гомоморфізм кільця  $R_n$ , індукований кільцевим гомоморфізмом  $\delta : R \rightarrow \text{End}L$  в кільце  $(\text{End}L)_n$ , 1 – одиниця і  $e$  – центральний ідемпотент кільця  $\text{End}L$ , а  $e_1$  – нуль кільця  $\text{End}P$ , який ортогональний з елементами кільця  $\text{End}L$ .

Опис групових і кільцевих гомоморфізмів на одиничних трансвекціях спирається на співвідношення, які існують між елементами

$$(t_{ij}(1) - E)(E - t_{ji}(-1)), t_{ij}(1)t_{ji}(-1)t_{ij}(1), t_{ij}(r),$$

$r \in R$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$  в кільці  $R_n$  і переносяться груповими і кільцевими гомоморфізмами на співвідношення між формальними матрицями, якими вони зображаються у кільці  $\text{End}W$ .

**2. Загальні поняття.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце з 1,  $R^*$  – група оборотних елементів кільця  $R$ ,  $R_n$  – кільце матриць  $n \times n$  над  $R$ ,  $n \geq 2$ ,  $GL(n, R) = R_n^*$  – повна лінійна (матрична) група оборотних  $n \times n$  матриць над кільцем  $R$ ,  $E$  – одинична матриця кільця  $R_n$ .

Позначимо через  $e_{ij}$  матрицю кільця  $R_n$ , у якої на місці  $(i; j)$  стоїть одиниця, а на інших місцях нулі.

Виконуються матричні формули

$$e_{ik}e_{lj} = \delta_{kl}e_{ij},$$

де  $1 \leq i, k, l, j \leq n$  – довільні числа,  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера.

Одиницю кільця  $R$  і одиничну матрицю кільця  $R_n$  будемо позначати 1 і  $E$  відповідно.

**Означення 1.** Елементи  $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$ , де  $r \in R$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $e_{ij}$  – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями. Трансвекції  $t_{ij}(1)$  будемо називати одиничними елементарними трансвекціями.

Нехай  $E(n, R)$  – підгрупа групи  $GL(n, R)$ , яка породжена всіма елементарними трансвекціями  $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$ ,  $r \in R$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$ .

**Означення 2.** У довільній групі  $G$  елемент  $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$  будемо називати комутатором елементів  $g_1, g_2$ , а елемент  $[g_1, \dots, g_t] = [[g_1, \dots, g_{t-1}], g_t]$  – комутатором довжини  $t$  елементів  $g_1, \dots, g_t$  групи  $G$ , де  $t > 2$ .

Виконуються матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де  $1 \leq k \neq i, i \neq j, l \neq j \leq n$  – довільні числа,  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера,  $r_1, r_2$  – довільні елементи кільця  $R$ . Зокрема,  $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$ , де  $1 \leq i, j, k \leq n$  – попарно різні довільні числа,  $r \in R$ .

Позначимо

$$t_{ij} = t_{ij}(-1) t_{ji}(1) t_{ij}(-1), \quad t_i = (t_{i+1}(1) - E)(E - t_{i+1}(-1)),$$

$$t(r) = (t_{12}(r) - E) t_{12},$$

де  $r \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n+1$  ототожнюється з 1.

Неважко бачити, що

$$t_i = \text{diag} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0 \right) = e_{ii}, \quad t(r) = \text{diag} (r, 0, \dots, 0) = r e_{11}, \quad t(1) = t_1,$$

$$t(r) t_{21} + t_{21} t(r) + E = \text{diag} \left( \begin{pmatrix} 1 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1 \right).$$

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що має місце

**Лема 1.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце з 1. Тоді  $t_{ij}^{-1} = t_{ji}$ ,

$$t_{ij} e_{kl} t_{ij}^{-1} = \begin{cases} -e_{il} & k = j \neq l \\ -e_{li} & l = j \neq k \\ e_{jk} & k = i \neq l \\ e_{kj} & l = i \neq k \\ e_{ii} & k = l = j \\ e_{jj} & k = l = i \\ e_{kl} & k, l \notin \{i, j\} \end{cases}, \quad t_{ij} t_{kl}(r) t_{ij}^{-1} = \begin{cases} t_{il}(-r) & k = j \neq l \\ t_{li}(-r) & l = j \neq k \\ t_{jk}(r) & k = i \neq l \\ t_{kj}(r) & l = i \neq k \\ t_{kl}(r) & k, l \notin \{i, j\} \end{cases},$$

а також

$$t_i t_j = \delta_{ij} t_i, \quad t_1 + \dots + t_n = E, \quad t_{ii+1}^2 = E - 2t_i - 2t_{i+1},$$

$$t_k(t_{ii+1} - E) = 0, \quad \text{якщо } k \neq i, i+1,$$

$$t_{ii+1} t_k t_{ii+1}^{-1} = \begin{cases} t_{k+1} & k = i \\ t_{k-1} & k = i+1 \\ t_k & k \neq i, i+1 \end{cases},$$

матриці  $t(r)$  комутують з елементами  $t_1, \dots, t_n$ ,

$$t(r_1 + r_2) = t(r_1) + t(r_2), \quad t(r_1 r_2) = t(r_1) t(r_2),$$

для всіх  $r, r_1, r_2 \in R$ .



### 3. Означення стандартного опису групових і кільцевих гомоморфізмів.

**Означення 3.** Відображення  $\delta$  кільця  $R$  в асоціативне кільце  $R_1$  з 1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо  $\delta(0) = 0$ ,

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \quad \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1) \delta(r_2)$$

для довільних елементів  $r_1$  і  $r_2$  кільця  $R$ .

**Означення 4.** Відображення  $\nu$  кільця  $R$  в асоціативне кільце  $R_1$  з 1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо  $\nu(0) = 0$ ,

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \quad \nu(r_1 r_2) = \nu(r_2) \nu(r_1)$$

для довільних елементів  $r_1$  і  $r_2$  кільця  $R$ .

Зрозуміло, що відображення кільця  $R$  в нульовий елемент кільця  $R_1$  є кільцевим і антикільцевим гомоморфізмами одночасно. Такий гомоморфізм прийнято називати нульовим гомоморфізмом.

Якщо  $\delta : R \rightarrow R_1$  – кільцевий гомоморфізм і  $\nu : R_1 \rightarrow R_2$  – кільцевий антигомоморфізм, то  $\nu\delta : R \rightarrow R_2$  є кільцевим антигомоморфізмом. Аналогічно, якщо  $\nu : R \rightarrow R_1$  – кільцевий антигомоморфізм і  $\delta : R_1 \rightarrow R_2$  – кільцевий гомоморфізм, то  $\delta\nu : R \rightarrow R_2$  є кільцевим антигомоморфізмом.

**Означення 5.** Нехай  $R^0$  означає кільце  $R$  у якому задана операція множення за правилом  $x \circ y = yx$ , де  $x, y$  – довільні елементи кільця  $R$ . Кільце  $R^0$  називається опозитом кільця  $R$ .

Відображення  $\nu_0 : R \rightarrow R^0$ , задане за правилом  $\nu_0(r) = r$ ,  $r \in R$ , є кільцевим антигомоморфізмом  $R$  в  $R^0$ .

Якщо  $\delta : R \rightarrow R_1$  – кільцевий гомоморфізм,  $\nu_0 : R_1 \rightarrow R_1^0$  – кільцевий антигомоморфізм, то  $\nu_0\delta : R \rightarrow R_1^0$  – кільцевий антигомоморфізм. І, навпаки. Якщо  $\delta : R \rightarrow R_1$  – кільцевий антигомоморфізм,  $\nu_0 : R_1 \rightarrow R_1^0$  – кільцевий антигомоморфізм, то  $\nu_0\delta : R \rightarrow R_1^0$  – кільцевий гомоморфізм.

Кільцевий гомоморфізм  $\delta : R \rightarrow R_1$  індукує кільцевий гомоморфізм  $\bar{\delta} : R_n \rightarrow (R_1)_n$  за правилом  $\bar{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$ , де  $r_{ij} \in R$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Кільцевий антигомоморфізм  $\nu : R \rightarrow R_1$  індукує кільцевий антигомоморфізм  $\bar{\nu} : R_n \rightarrow (R_1)_n$  за правилом  $\bar{\nu}(r_{ij}) = (\nu r_{ji}) = \tau(\nu r_{ij})$ , де  $\tau$  – означає класичне транспонування.

Зрозуміло, що нульовий гомоморфізм кільця  $R$  індукує нульовий гомоморфізм кільця  $R_n$ .

Гомоморфізм групи, який відображає всі елементи групи в одиничний елемент, прийнято називати одиничним.

Звуження кільцевого гомоморфізму і кільцевого антигомоморфізму, які відображають одиничний елемент у одиничний елемент, на мультиплікативну групу кільця породжують груповий гомоморфізм і груповий антигомоморфізм відповідно.

Груповий антигомоморфізм кільця  $R$  також породжує груповий гомоморфізм мультиплікативної групи кільця, якщо кожному елементу поставити у відповідність елемент обернений до його антигомоморфного образу.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм  $\delta : R \rightarrow R_1$  індукує груповий гомоморфізм  $\bar{\delta} : GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_1)$  (який прийнято називати кільцевим) за правилом  $\bar{\delta}g = (\bar{\delta}g)$ ,  $g \in GL(n, R)$ , а кільцевий антигомоморфізм  $\nu : R \rightarrow R_1$  груповий гомоморфізм  $\bar{\nu} : GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_1)$  (який прийнято називати котраградієнтним) за правилом  $\bar{\nu}g = (\bar{\nu}g)^{-1}$ ,  $g \in GL(n, R)$ .

Нехай  $1$  – одиниця,  $e$  – ідемпотент кільця  $R_1$  і  $e_1$  – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця  $\delta R$ ,  $\nu R$ . Відображення  $\Lambda_e$  групи  $GL(n, R)$  у групу  $diag(GL(n, R_1), 1)$  визначається за правилом

$$\Lambda_e(x) = \bar{\delta}xe + \bar{\nu}x^{-1}(1 - e) + e_1, \quad x \in GL(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи  $GL(n, R)$  у групу  $diag(GL(n, R_1), 1)$ , якщо ідемпотент  $e$  комутує з елементами кільця  $\delta R$ ,  $\nu R$ .

Без обмеження загальності можна вважати, що відображення  $\Lambda_e : E(n, R) \rightarrow diag(E(n, R_1), 1)$  визначається на елементарних трансвекціях  $t_{ij}(r)$ ,  $r \in R$  за правилом

$$\Lambda_e(t_{ij}(r)) = t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\delta r)(1 - e) + e_1,$$

де  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $\delta : R \rightarrow R_1$  – кільцевий гомоморфізм,  $\delta(1) = 1$ ,  $1$  – одиниця кільця  $\delta R$ ,  $e_1$  – деякий ідемпотент кільця  $R_1$ , який ортогональний з елементами  $\delta R$ .

Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з  $1$ ,  $W$  – лівий (не обов'язково вільний)  $K$ -модуль,  $L$  та  $P$  – ліві  $K$ -модулі,

$$g : W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$$

– ізоморфізм  $K$ -модулів,  $\bar{\delta}$  – кільцевий гомоморфізм і  $\bar{\nu}$  – кільцевий антигомоморфізм кільця  $R_n$ , індуковані кільцевим гомоморфізмом  $\delta : R \rightarrow EndL$  і кільцевим антигомоморфізмом  $\nu : R \rightarrow EndL$  відповідно в кільце  $(EndL)_n$ ,  $1$  – одиниця і  $e$  – ідемпотент кільця  $EndL$ , а  $e_1$  – одиниця кільця  $EndP$ , яка ортогональна з елементами кільця  $EndL$ .

Відображення  $\Lambda_0 : GL(n, R) \rightarrow EndW$  визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}(x)^{-1}(1 - e) + e_1] g, \quad x \in GL(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи  $GL(n, R)$  у групу  $g^{-1}diag(GL(n, EndL), 1)g \subseteq GL(W)$ , якщо  $e$  комутує з елементами кільця  $\delta R$  і  $\nu R$ .

Одиничний елемент і центральний ідемпотент  $e$  кільця  $EndL$  породжують одиничний елемент і центральний ідемпотент  $e \cdot 1$  кільця  $(EndL)_n$ , які також будемо позначати  $1$  і буквою  $e$  відповідно.

Якщо  $P = 0$ , то ідемпотент  $e_1$  відсутній.

Відображення  $\Lambda_0$  на елементарних трансвекціях має вигляд

$$\Lambda_0 t_{ij}(r) = g^{-1} [t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\delta r)(1 - e) + e_1] g,$$

де  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $\delta$  – кільцевий гомоморфізм,  $\delta(1) = 1$ .

**Означення 6.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце з  $1$ . Будемо казати, що гомоморфізм  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  групи  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , якщо  $\Lambda$  збігається з  $\Lambda_0$  на цій групі і  $e$  – центральний ідемпотент кільця  $EndL$ .

Аналогічно означається відображення  $\Lambda_e$  кільця  $R_n$  у кільце  $\text{diag}((R_1)_n, 0)$  за правилом

$$\Lambda_e(x) = \bar{\delta}(x)e + e_1, \quad x \in R_n,$$

яке є гомоморфізмом кільця  $R_n$  у кільце  $\text{diag}((R_1)_n, 0)$ , якщо ідемпотент  $e$  комує з елементами кільця  $\delta R$ .

Без обмеження загальності можна вважати, що відображення  $\Lambda_e$  визначається на матричних одиницях за правилом

$$\Lambda_e(re_{ij}) = \delta(r)e_{ij} + e_1, \quad r \in R,$$

де  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $\delta : R \rightarrow R_1$  – кільцевий гомоморфізм,  $e_1$  – деякий ідемпотент кільця  $R_1$ , який ортогональний з елементами  $\delta R$ .

Аналогічно означається відображення  $\Lambda_0 : R_n \rightarrow \text{diag}((\text{End}L)_n, 0)$  за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + e_1] g, \quad x \in R_n,$$

яке є гомоморфізмом кільця  $R_n$  у кільце  $g^{-1}\text{diag}((\text{End}L)_n, 0)g \subseteq \text{End}W$ , якщо  $e$  комує з елементами кільця  $\delta R$ .

**Означення 7.** Нехай  $R$  – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що кільцевий гомоморфізм  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$ ,  $n \geq 2$  допускає стандартний опис на кільці  $R_n$ , якщо  $\Lambda$  на  $R_n$  збігається з  $\Lambda_0$  і  $e$  – центральний ідемпотент кільця  $\text{End}L$ .

Якщо в групових і кільцевих означеннях гомоморфізма  $\Lambda_e$  кільце  $R_1$  є кільцем  $\text{End}L$ , то  $\Lambda_0(x) = g^{-1}\Lambda_e(x)g$ , де  $x \in GL(n, R)$  або  $x \in R_n$  відповідно.

Неважко бачити, що  $\Lambda_0 t_{ij}(r)$ ,  $r \in R$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$  задовольняють комутаторні формули, а  $\Lambda_0 t_{ij}(1)$  –  $\Lambda_0 E$  матричні формули.

**4. Локалізація.** Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з 1,  $S$  – мультиплікативно замкнута підмножина центра кільця  $K$ , яка містить 1 і не містить 0,  $K_S$  – локалізація  $K$  по  $S$ ,  $\Lambda_S : K \rightarrow K_S$  – канонічний кільцевий гомоморфізм, визначений за правилом  $\Lambda_S(k) = \frac{ks}{s}$  для довільних  $k \in K$  і  $s \in S$ . Очевидно, що  $\Lambda_S(S) \subseteq K_S^*$ .

Нехай  $W$  – ненульовий лівий  $K$ -модуль (не обов'язково вільний),  $W_S$  – його локалізація по  $S$ ,  $\Lambda_S : \text{End}W \rightarrow \text{End}W_S$  – канонічний гомоморфізм, визначений за правилом  $\Lambda_S(\sigma)\left(\frac{w}{s}\right) = \frac{\sigma(w)}{s}$  для довільних  $\sigma \in \text{End}W$ ,  $s \in S$ ,  $w \in W$ . Зрозуміло, що  $\Lambda_S$  – кільцевий гомоморфізм.

**Означення 8.** Елемент  $t$  деякого кільця називається нільпотентним, якщо існує натуральне число  $k$  таке, що  $t^k = 0$ . Найменше з таких  $k$  називається ступенем нільпотентності елемента  $t$ . Сума одиничного і нільпотентного елемента називається уніпотентним елементом відповідного ступеня.

У довільному асоціативному кільці  $K$  з 1 з нільпотентності елемента 2 випливає умова оборотності елемента 3, а з нільпотентності елемента 3 умова оборотності елемента 2.

Це слідує з рівностей

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 3^i (-1)^{n-i} \quad \text{і} \quad 3^n = (2+1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i 2^i, \quad \text{де } n \geq 1.$$

З умови  $2 \notin K^*$  випливає, що множина  $S_1 = \{3^i \mid i \geq 0\}$  не містить нульових елементів, а з умови  $3 \notin K^*$  випливає, що множина  $S_2 = \{2^i \mid i \geq 0\}$  не містить нульових елементів.

Елементи 2 і 3 – оборотні в кільцях  $K_{S_1}$  і  $K_{S_2}$  відповідно і оскільки вони взаємно-прості, то  $\ker \Lambda_{S_1} \cap \ker \Lambda_{S_2} = 0$ .

### 5. Нерухомі та лишкові модулі.

**Означення 9.** Нехай  $V$  – довільний  $R$ -модуль над асоціативним кільцем  $R$  з 1,  $\sigma$  – довільний ендоморфізм модуля  $V$ . Нерухомими та лишковими підмодулями модуля  $V$  ендоморфізма  $\sigma : V \rightarrow V$  будемо називати підмодулі  $R(\sigma) = (\sigma - 1)V$  і  $P(\sigma) = \ker(\sigma - 1)$  відповідно.

Очевидно, що  $R(\sigma) = \{(\sigma - 1)v \mid v \in V\}$  і  $P(\sigma) = \{v \in V \mid \sigma v = v\}$ , а також  $R(\sigma - 1) = \sigma V$  і  $P(\sigma - 1) = \ker \sigma$ .

Якщо  $\sigma$  – автоморфізм модуля  $V$ , то із рівності  $\sigma^{-1} - 1 = (\sigma - 1)(-\sigma^{-1})$  випливає, що

$$R(\sigma^{-1}) = R(\sigma) \quad \text{і} \quad P(\sigma^{-1}) = P(\sigma).$$

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що якщо  $g$  – довільний ендоморфізм модуля  $V$ ,  $g\sigma = \sigma g$ , то

$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma) \quad \text{і} \quad gP(\sigma) \subseteq P(\sigma).$$

Зокрема, якщо  $g$  – автоморфізм модуля  $V$ , який комутує з  $\sigma$ , то

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \quad \text{і} \quad gP(\sigma) = P(\sigma).$$

Цей же результат також слідує із загальних формул

$$gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1}) \quad \text{і} \quad gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1}),$$

які із-за рівності  $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1)g^{-1}$  мають місце для будь-якого ендоморфізма  $\sigma$  і будь-якого автоморфізма  $g$  модуля  $V$ .

Якщо  $e^2 = e$  – ідемпотент кільця  $EndV$ , то має місце пірсовий розклад

$$V = eV \oplus (1 - e)V, \quad \text{де} \quad v = ev + (1 - e)v, \quad v \in V.$$

З цього розкладу випливає, що

$$P(e) = eV = \ker(1 - e) = \{v \in V \mid ev = v\},$$

$$R(e) = (1 - e)V = \ker e = \{v \in V \mid ev = 0\}.$$

Зокрема,  $eR(e) = 0$ ,  $(1 - e)P(e) = 0$ .

### 6. Зображення ендоморфізмів формальними матрицями.

**Лема 2.** Нехай  $K$  – асоціативне кільце з 1,  $W$  – лівий (не обов'язково вільний)  $K$ -модуль,  $e_1, \dots, e_{n+1}$  – елементи кільця  $EndW$ , які задовольняють рівності  $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ ,  $1 \leq i, j \leq n + 1$ ,  $e = e_1 + \dots + e_{n+1}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  – оборотні елементи кільця  $EndP(e)$  такі, що

$$\alpha_i e_k \alpha_i^{-1} = \begin{cases} e_{k+1} & k = i \\ e_{k-1} & \text{якщо } k = i + 1 \\ e_k & k \neq i, i + 1 \end{cases},$$

$$\alpha_i^2 = e - 2e_i - 2e_{i+1}, e_k(\alpha_i - e) = 0, \text{ якщо } k \neq i, i+1, k \leq n$$

елементи  $e(r)$  кільця  $EndP(e)$  комутують з елементами  $e_1, \dots, e_{n+1}$ ,

$$e(r_1 + r_2) = e(r_1) + e(r_2), e(r_1 r_2) = e(r_1) e(r_2), e(1) = e_1$$

для будь-яких елементів  $r, r_1, r_2$  кільця  $R$ .

Тоді існують ліві  $K$ -модулі  $L$  і  $P$  модуля  $P(e)$  і ізоморфізм  $g : P(e) \rightarrow P(e)_g$ ,  $P(e)_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ , який індукує внутрішній ізоморфізм  $\Lambda_g : EndP(e) \rightarrow$

$EndP(e)_g$  за правилом  $\Lambda_g(x) = gxg^{-1}$ , такий, що елементи  $\Lambda_g e_i, \Lambda_g \alpha_i$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = \text{diag} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1, * \right),$$

$$\Lambda_g e(r) = \text{diag}(\delta(r), 0, \dots, 0),$$

де  $\delta : R \rightarrow EndL$  кільцевий гомоморфізм,  $1 \leq i \leq n$ .

**Доведення.** Оскільки  $e, e_1, e_2, \dots, e_n$  ідемпотенти, то

$$P(e) = eW = e_1W \oplus \dots \oplus e_{n+1}W = P(e_1) \oplus \dots \oplus P(e_{n+1}).$$

З рівностей

$$\begin{cases} \alpha_2 e_1 \alpha_2^{-1} = e_2 \\ \alpha_3 \alpha_2 e_1 (\alpha_3 \alpha_2)^{-1} = e_3 \\ \dots \\ (\alpha_n \dots \alpha_2) e_1 (\alpha_n \dots \alpha_2)^{-1} = e_n \end{cases}$$

випливає, що

$$P(e) = P(e_1) \oplus P(\alpha_2 e_1 \alpha_2^{-1}) \oplus \dots \oplus P((\alpha_1, \dots, \alpha_n) e_1 (\alpha_n \dots \alpha_2)^{-1}) \oplus P(e_{n+1}).$$

Позначимо  $L = P(e_1)$ ,  $P = P(e_{n+1})$ . Тоді

$$P(e) = L \oplus \alpha_2 L \oplus \alpha_3 \alpha_2 L \oplus \dots \oplus \alpha_n \dots \alpha_2 L \oplus P.$$

Розглянемо ізоморфізм модулів  $g : P(e) \rightarrow P(e)_g$ ,  $P(e)_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ ,

який визначений за правилом

$$g(l_1 + \alpha_2 l_2 + \dots + (\alpha_n - \alpha_2) l_n + p) = l_1 + \dots + l_n + p$$

для всіх  $l_1, \dots, l_n \in L$ ,  $p \in P$  і індукований ним внутрішній ізоморфізм  $\Lambda_g : EndP(e) \rightarrow EndP(e)_g$ , де  $\Lambda_g \sigma = g \sigma g^{-1}$  для всіх  $\sigma \in EndP(e)$ .

Будемо зображати елементи кільця  $EndP(e)$  формальними  $(n+1) \times (n+1)$  матрицями, записуючи дію елементів кільця  $EndP(e)_g$  на модулі  $P(e)_g$  у стовпчики. Як показано в [1]  $\Lambda_g e_i, \Lambda_g \alpha_i$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = \text{diag} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right), \Lambda_g \alpha_i = \text{diag} \left( \underbrace{*, \dots, *}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}, *, \dots, * \right).$$

де 0 і 1 – нуль і одиниця кільця  $EndL$  і  $EndP$  відповідно.

З рівностей  $\alpha_i^2 = e - 2e_i - 2e_{i+1}, e_k(\alpha_i - e) = 0$ , якщо  $k \neq i, i+1, k \leq n$  випливає, що

$$\Lambda_g e_i = \text{diag} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1, * \right).$$

Оскільки елементи  $e(r)$  кільця  $EndP(e)$  комутують з  $e_1, \dots, e_{n+1}$ , то

$$\Lambda_g e(r) = \text{diag}(\delta(r), *, \dots, *),$$

де  $\delta: R \rightarrow EndL$  кільцевий гомоморфізм,  $1 \leq i \leq n$ .

З рівності  $e(r) = e(r)e(1) = e(r)e_1$  випливає, що

$$\Lambda_g e(r) = \text{diag}(\delta(r), 0, \dots, 0), \delta(1) = 1.$$

## 7. Зведення загального випадку до випадків, коли 2 або 3 – оборотні елементи.

**Теорема 1.** Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з 1,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 2$ ,  $W$  – лівий  $K$ -модуль,  $\Lambda: G \rightarrow GL(W)$  – груповий гомоморфізм. Гомоморфізм  $\Lambda$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , якщо стандартний опис на групі  $E(n, R)$  допускають будь-які гомоморфізми над асоціативними кільцями  $K$  з 1 в яких 2 або 3 є оборотними елементами.

**Доведення.** Якщо елементи 2 або 3 – оборотні в кільці  $K$ , то все доведено. Тому в подальшому будемо вважати, що елементи 2 і 3 не належать  $K^*$  і, як наслідок, не є нільпотентними в кільці  $K$ .

Нехай  $\Lambda: G \rightarrow GL(W)$  – довільний груповий гомоморфізм і гомоморфізми  $\bar{\Lambda} = \Lambda_S \Lambda: G \rightarrow GL(W_S)$  допускають стандартний опис на групі  $E(n, R)$ .

Нехай  $\Lambda E = e$ . Неважко бачити, що  $e^2 = e$  і має місце розклад  $W = P(e) \oplus R(e)$ , де  $eR(e) = 0, R(e) = 0, P(e) = W$ .

В кільці  $R_n$  матриці

$$t_i = (t_{ii+1}(1) - E)(E - t_{i+1i}(-1)), t_{ii+1},$$

$$t(r) = (t_{12}(r) - E)t_{12},$$

де  $r \in R, 1 \leq i \leq n$ , ( $n+1$  ототожнюється з 1), задовольняють співвідношення леми 1.

Розглянемо в кільці  $EndW$  елементи

$$e_i = (At_{i+1}(1) - e)(e - At_{i+1}(-1)), \alpha_i = At_{i+1},$$

$$e(r) = (At_{12}(r) - e)\alpha_1,$$

де  $r \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ( $n+1$  ототожнюється з 1).

Оскільки в  $R_n$  між матрицями  $e_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $e(r)$  виконуються співвідношення леми 1, а  $\Lambda_S : EndW \rightarrow EndW_S$  кільцевий гомоморфізм такий, що гомоморфізм  $\overline{\Lambda_S} = \Lambda_S \Lambda : G \rightarrow GL(W) \rightarrow GL(W_S)$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , то аналогічні співвідношення до співвідношень леми 1 мають місце і для елементів  $\Lambda_S e_i$ ,  $\Lambda_S \alpha_i$ ,  $\Lambda_S e(r)$ .

Враховуючи, що  $ker \Lambda_{S_1} \cap ker \Lambda_{S_2} = 0$ , отримуємо, що елементи  $e_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $e(r)$  задовольняють умови леми 2.

Згідно з лемою 2 існують ліві  $K$ -модулі  $L$  і  $P$  модуля  $W$  і ізоморфізм  $g : W \rightarrow W_g$ ,  $W_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ , який індукує внутрішній ізоморфізм  $\Lambda_g : EndW \rightarrow EndW_g$  такий, що елементи  $\Lambda_g e_i$ ,  $\Lambda_g \alpha_i$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = diag \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = diag \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1, * \right),$$

$$\Lambda_g e(r) = diag(\delta(r), 0, \dots, 0).$$

За умовою гомоморфізм  $\Lambda_s \Lambda$  допускає стандартний опис. Це означає, що

$$\Lambda_g(\Lambda_s \Lambda)(t_{12}(r)) = \Lambda_s(e(\delta r)\alpha_2 + \alpha_2 e(\delta r) + e_1),$$

де  $\delta : R \rightarrow EndL_s$  кільцевий гомоморфізм.

Оскільки  $ker \Lambda_{S_1} \cap ker \Lambda_{S_2} = 0$ , то

$$\Lambda_g \Lambda(t_{12}(r)) = e(\delta r)\alpha_2 + \alpha_2 e(\delta r) + e_1.$$

Тому

$$\Lambda(t_{12}(r)) = g^{-1}[t_{12}(\delta r)e + t_{21}(-\delta r)(1 - e) + e_1]g.$$

де  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $\delta$  – кільцевий гомоморфізм,  $\delta(1) = 1$ .

Спряженням елементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  доводимо, що

$$\Lambda(t_{ij}(r)) = g^{-1}[t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\delta r)(1 - e) + e_1]g$$

для всіх  $1 \leq i \neq j \leq n$ ,  $r \in R$ .

Тим самим доведено, що гомоморфізм  $\Lambda = \Lambda_0$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ .

Теорема 1 допускає узагальнення. Виявляється гомоморфізм  $\Lambda$  допускає стандартний опис на групі  $GL(n, R)$ , якщо стандартний опис допускають гомоморфізми групи  $GL(n, R)$  над кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

Адже, як і в теоремі 1, якщо елементи 2 або 3 – оборотні в кільці  $K$ , то все доведено. Якщо  $2 \notin K^*$  і  $3 \notin K^*$  одночасно, то елементи 2 і 3 не є нільпотентними в кільці  $K$ . У цьому випадку елементи 2 і 3 – оборотні в кільцях  $K_{s_1}$  і  $K_{s_2}$  відповідно, де  $S_1 = \{2^i \mid i \geq 0\}$  або  $S_2 = \{3^i \mid i \geq 0\}$ . Оскільки елементи 2 і 3 є взаємно-простими числами, то гомоморфізми  $A_i : G \rightarrow GL(W) \rightarrow GL(W_{s_i})$ ,  $W \rightarrow W_{s_i}$ , ( $i = 1, 2$ ) індукують вкладення  $W \rightarrow W_{s_1} \oplus W_{s_2}$ ,  $GL(W) \rightarrow GL(W_{s_1}) \otimes GL(W_{s_2})$ .

Гомоморфізми  $A_i$  за припущенням допускають стандартний опис на групі  $GL(n, R)$ . Тому існують ізоморфізми  $g_i : W_{s_i} \rightarrow \underbrace{L_i \oplus \dots \oplus L_i}_n \oplus P_i$  такі, що

$$A_i(x) = g_i^{-1} \left[ \bar{\delta}_i(x) e_i + \bar{\nu}_i(x)^{-1} (1 - e_i) + e'_i \right] g_i,$$

де  $x \in GL(n, R)$ ,  $\bar{\delta}_i$  – кільцевий гомоморфізм і  $\bar{\nu}_i$  – кільцевий антигомоморфізм кільця  $R_n$  індуковані кільцевим гомоморфізмом  $\delta_i : R \rightarrow EndL_i$  і кільцевим антигомоморфізмом  $\nu_i : R \rightarrow EndL_i$  відповідно в кільце  $(EndL_i)_n$ ,  $1$  – одиниця і  $e_i$  – центральний ідемпотент кільця  $EndL_i$ , а  $e'_i$  – одиниця кільця  $EndP_i$ , яка ортогональна з елементами кільця  $EndL_i$ .

Позначимо  $L = L_1 \oplus L_2$ ,  $P = P_1 \oplus P_2$ ,  $e = e_1 + e_2$ ,  $e' = e'_1 + e'_2$ ,  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ,  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ ,  $g = g_1 + g_2$ . Можна вважати, що  $g$  – ізоморфізм  $W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ ,  $e$  – центральний ідемпотент кільця  $EndL$ ,  $\delta$  – кільцевий гомоморфізм  $R \rightarrow EndL$ ,  $\nu$  – кільцевий антигомоморфізм  $R \rightarrow EndL$  такі, що

$$A(x) = g^{-1} \left[ \bar{\delta}(x) e + \bar{\nu}(x)^{-1} (1 - e) + e' \right] g$$

для всіх  $x \in GL(n, R)$ ,  $1$  – одиниця кільця  $EndL$ ,  $e'$  – одиниця кільця  $EndP$ .

Таким чином гомоморфізм  $A$  допускає стандартний опис на групі  $GL(n, R)$ , якщо стандартний опис допускають гомоморфізми групи  $GL(n, R)$  над кільцями в яких елементи 2 або 3 є оборотними.

**8. Гомоморфізми з умовою (\*).** З теоремі 1 випливає, що, якщо гомоморфізм  $A : G \rightarrow GL(W)$  групи  $G$ ,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$  з деякою умовою, яка зберігається при локалізаціях по степенях елементів 2 і 3, а всі гомоморфізми з заданою умовою над кільцями, в яких елементи 2 або 3 є оборотними, допускають стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , то  $A$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ .

Однією з таких умов на гомоморфізм  $A$  може бути умова (\*).

**Означення 10.** Будемо казати, що гомоморфізм  $A$  задовольняє умову (\*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента  $t \in EndW$ ,  $t^2 = 0$  існують натуральні числа  $s_1$  і  $s_2$ , які оборотні в  $K$  і  $A \in G$  такі, що  $AA = 1 + s_1 t$  і з рівності  $AA \cdot AB = AB \cdot AA$ ,  $B \in G$  випливає, що  $A^{s_2} B = B A^{s_2}$ .

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент  $t$ , то передбачається, що він існує. Тому гомоморфізми з умовою (\*) є неодиначними.

Ізоморфізми задовольняють умову (\*), якщо покласти  $s_1 = s_2 = 1$  і скористатися тим, що  $1 + t$  є оборотним елементом.

Якщо в означенні гомоморфізма з умовою (\*)  $AA$  комутує із скінченною кількістю елементів  $AB_i$ ,  $B_i \in G$ ,  $1 \leq i \leq t$ , то існує натуральне число  $s_2$ ,



яке оборотне в  $K$  таке, що  $A^{s_2}$  комутує з  $B_1, \dots, B_t$ . Аналогічно доводиться, що замість одного елемента  $A \in G$  можна розглядати скінченну кількість елементів групи  $G$ .

Відмітимо, що якщо гомоморфізм  $\Lambda_0$  задовольняє умову (\*), то кільця  $\delta R$  і  $\nu R$  співпадають з кільцем  $EndL$ .

**Означення 11.** Будемо казати, що гомоморфізм  $\Lambda$  задовольняє розширену умову (\*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента  $m \in EndW$ ,  $m^2 = 0$  існують натуральні числа  $s_1$  і  $s_2$ , які оборотні в  $K$  і  $A \in G$  такі, що  $\Lambda A = 1 + s_1 m$  і з рівності  $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A^k$ ,  $B \in G$ ,  $k \in Z$  випливає, що  $A^{s_2} B = B A^{s_2 k}$ .

Гомоморфізм, який задовольняє розширену умову (\*), при умові, що серед цілих чисел  $k$  міститься 1, задовольняє умову (\*). Для цього досить покласти  $k = 1$ .

Виявляється, що розширена умова (\*) і умова (\*) зберігаються при локалізаціях.

**Лема 3.** Якщо  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  задовольняє розширену умову (\*), то гомоморфізм  $\bar{\Lambda} : G \rightarrow GL(W_S)$  також задовольняє розширену умову (\*). Зокрема гомоморфізм  $\bar{\Lambda}$  зберігає умову (\*).

**Доведення.** Нехай  $\bar{m}$  – довільний ненульовий нільпотентний елемент кільця  $EndW_S$ ,  $\bar{m}^2 = \bar{0}$ . Це означає, що  $m \neq 0$  і  $s_0 \in EndW$  для деякого  $s_0 \in S$  існує  $s'_0 \in S$  такий що  $s'_0(s_0 m)^2 = 0$ . Тоді  $(s_0 s'_0 m)^2 = 0$ . За умовою існує матриця  $A \in G$  така, що  $\Lambda A = 1 + s_1 m_1$ , де  $m_1 = s_0 s'_0 m$ ,  $s_1 \in S$ ,  $\bar{m}_1 = \bar{m}$ ,  $\bar{\Lambda A} = \bar{1} + \bar{s}_1 \bar{m}_1$ .

Якщо  $g \in G$  і  $\bar{\Lambda g} \bar{\Lambda A} = \bar{\Lambda A}^k \bar{\Lambda g}$ , де  $k$  – ціле число, то існує  $s' \in S$ , що  $(\Lambda g \cdot \Lambda A - \Lambda A^k \Lambda g) s' = 0$ . Тому  $(\Lambda g m_1 - k m_1 \Lambda g) s_1 s' = 0$  і, як наслідок,  $\Lambda g \Lambda A^{s_1 s'} = \Lambda A^{k s_1 s'} \Lambda g$ . Згідно розширеній умові (\*) існує  $s_2 \in S$  такий, що  $g A^{s_2} = A^{k s_2} g$ .

Тим самим доведено, що  $\bar{\Lambda}$  задовольняє розширену умову (\*).

В [2 – 4] доведено, що гомоморфізми з умовою (\*) при  $n \geq 3$  допускають стандартний опис на групі  $E(n, R)$ , якщо 2 оборотний елемент в кільці  $K$  і при  $n \geq 4$ , якщо 3 оборотний елемент в кільці  $K$ .

Тому довільний гомоморфізм з умовою (\*) при  $n \geq 4$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$  над довільними асоціативними кільцями  $R$  і  $K$  з одиницями.

Це означає, що має місце наступна теорема.

**Теорема 2.** Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з 1,  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 4$ ,  $W$  – лівий  $K$ -модуль, гомоморфізм  $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$  задовольняє умову (\*). Тоді  $\Lambda$  допускає стандартний опис на групі  $E(n, R)$ .

Зауважимо, що якщо  $n = 3$  і 2 необоротний елемент в кільці  $K$ , то можуть існувати нестандартні гомоморфізми [5].

Відмітимо також, що результат І.З. Голубчика [9] про ізоморфізми матричних груп  $GL(n, R)$ ,  $n \geq 4$  і  $GL(m, K)$ ,  $m \geq 2$  над асоціативними кільцями  $R$  і  $K$  з одиницями випливає із теореми 2.

Підкреслимо, що у випадку, коли гомоморфізм з умовою (\*)  $\Lambda$  є ізоморфізмом, то в його стандартному описі  $e_1 = 0$  і  $\delta$  – ізоморфізм кільця  $R$  на кільце  $EndL$ . Зрозуміло, що не всі гомоморфізми з умовою (\*) є ізоморфізмами.

Можливо умову (\*) можна ослабити або запропонувати іншу умову на гомоморфізм як це, наприклад, зроблено в [8].

### 9. Кільцеві гомоморфізми. Має місце

**Теорема 3.** *Нехай  $R$  і  $K$  – асоціативні кільця з 1,  $W$  – лівий  $K$ -модуль,  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$  – кільцевий гомоморфізм,  $n \geq 2$ . Тоді  $\Lambda$  допускає стандартний опис на кільці  $R_n$ .*

**Доведення.** Нехай  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$  – довільний кільцевий гомоморфізм.

Нехай  $\Lambda E = e$ . Неважко бачити, що  $e^2 = e$  і має місце розклад  $W = P(e) \oplus R(e)$ , де  $eR(e) = 0$  і  $(1 - e)P(e) = 0$ .

Оскільки елементи кільця  $R_n$  комутують з  $E$ , то елементи  $\Lambda(R_n)$  комутують з  $e$ . Нехай  $x$  – довільний елемент кільця  $R_n$ . Очевидно, що  $\Lambda(x)e = \Lambda(x)$ . Тому  $\Lambda(x)R(e) \subseteq \Lambda(x)eR(e) = 0$ ,  $\Lambda(x)P(e) \subseteq P(e)$  для всіх  $x \in R_n$ .

В кільці  $R_n$  матриці

$$t_i = (t_{ii+1}(1) - E)(E - t_{i+1i}(-1)), t_{ii+1},$$

$$t(r) = (t_{12}(r) - E)t_{12},$$

де  $r \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ( $n + 1$  ототожнюється з 1), задовольняють співвідношення леми 1.

Оскільки  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$  кільцевий гомоморфізм, то співвідношення леми 1 в кільці  $\text{End}P(e)$  задовольняють елементи

$$e_i = \Lambda t_i = (\Lambda t_{ii+1}(1) - e)(e - \Lambda t_{i+1i}(-1)), \quad \alpha_i = \Lambda t_{ii+1},$$

$$e(r) = \Lambda t(r) = (\Lambda t_{12}(r) - e)\alpha_1,$$

де  $r \in R$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ( $n + 1$  ототожнюється з 1).

Це означає, що елементи  $e_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $e(r)$  задовольняють умову леми 2.

Згідно з лемою 2 існують ліві  $K$ -модулі  $L$  і  $P$  модуля  $P(e)$  і ізоморфізм  $g : P(e) \rightarrow P(e)_g$ ,  $P(e)_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ , який індукує внутрішній ізоморфізм  $\Lambda_g : \text{End}P(e) \rightarrow \text{End}P(e)_g$  такий, що елементи  $\Lambda_g e_i$ ,  $\Lambda_g \alpha_i$ ,  $\Lambda_g e(r)$  можна зобразити формальними матрицями

$$\Lambda_g e_i = \text{diag} \left( \underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$\Lambda_g \alpha_i = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, \dots, 1, * \right),$$

$$\Lambda_g e(r) = \text{diag}(\delta(r), 0, \dots, 0),$$

де  $1 \leq i < n$ ,  $\delta : R \rightarrow \text{End}L$  кільцевий гомоморфізм, 1 – одиниця кільця  $\text{End}L$ .

Оскільки  $\Lambda_g e = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_n, 0 \right)$  то  $P(e_{n+1}) = 0$ .

З отриманого впливає, що  $\Lambda(e_{12}) = e(1)\alpha_2$

$$\begin{aligned} \Lambda_g \Lambda(re_{12}) &= \Lambda_g \Lambda(re_{11}e_{12}) = \Lambda_g \Lambda(t(r)\Lambda(e_{12})) = \Lambda_g(e(r)\alpha_2) = \\ &= \text{diag} \left( \left( \begin{array}{cc} 0 & \delta(r) \\ 0 & 0 \end{array} \right), 0, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

Тому

$$\Lambda(re_{12}) = g^{-1} \text{diag}(\delta(r)e_{12}, 0)g.$$

Спряженням елементами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  доводимо, що

$$\Lambda(re_{ij}) = g^{-1} \text{diag}(\delta(r)e_{ij}, 0)g$$

для всіх  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $r \in R$ .

Це означає, що гомоморфізм  $\Lambda$  допускає стандартний опис на кільці  $R_n$ .

**10. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Задача опису гомоморфізмів матричних груп та кілець над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній  $K$ -теорії, теорії кілець і модулів, теорії зображень груп над кільцями.

У даній роботі розроблений метод зведення опису групових гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями до опису гомоморфізмів матричних груп над кільцями з умовою, яка зберігається при локалізаціях за степенями елементів 2 і 3.

Показано, що для цього достатньо вміти знаходити образи елементів, які є інваріантними відносно кільцевих і контраградієнтних гомоморфізмів одночасно. Це дає можливість з єдиних позицій описувати як групові гомоморфізми матричних груп так і кільцеві гомоморфізми матричних кілець над асоціативними кільцями з 1.

Незважаючи на досягнення в описі гомоморфізмів матричних груп над кільцями, залишається чимало актуальних задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача знаходження умов на гомоморфізми, які зберігаються при локалізаціях.

### Список використаної літератури

1. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1 (36). С. 16–29. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29).
2. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфізми з умовою (\*), якщо 2 – оборотний елемент. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 2 (37), С. 101–113. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).101-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113).
3. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями. Часть I. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2014. Вип. 25, №2 С. 152–171.
4. Петечук В.М., Петечук Ю.В. Гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями. Часть II. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2015. Вип. № 1(26). – С. 99–114.
5. Петечук В.М. Автоморфізми матричних груп над коммутативними кільцями. *Матем. сб.* 1982. №.4. С. 539–547.
6. Голубчик И.З., Михалев А.В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3 (38). С. 73–85.
7. Зельманов Е.И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т.4. С.49–67.

8. Петечук В.М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки*. 1989. Т.45, вып 2. С. 83–94.
9. Golubchik I.Z. Isomorphism of the General Linear Group  $GL_n(R)$ ,  $n \geq 4$  over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*. 1992. Vol. 131. Part 1. P. 123–136.
10. Hahn A.J., O’Meara O.T. The Classical Groups and  $K$ -Theory. Berlin : Springer, 1989. 578 p.

**Petechuk V. M., Petechuk Yu. V.** Homomorphisms of matrix groups and rings over associative rings.

In the article from the same positions group homomorphisms of matrix groups and ring homomorphisms of matrix rings over associative rings with 1 are described.

It is shown that the description of homomorphisms of matrix groups  $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ ,  $n \geq 2$  into the group of automorphisms  $GL(W)$  of the left (optionally free)  $K$ -module  $W$  over an arbitrary associative ring  $K$  with 1 is reduced to cases where 2 or 3 are reversible elements in the ring  $K$ . It is proved that they allow a standard description of homomorphisms of the group of elementary transvections  $E(n, R)$ , if such a description allows homomorphisms of matrix groups over rings  $K$ , in which 2 or 3 are reversible elements.

The ring homomorphisms are also described  $\Lambda : R_n \rightarrow \text{End}W$ ,  $n \geq 2$  of the left (optionally free)  $K$ -module  $W$  over an arbitrary associative ring  $K$  with 1. It is shown that homomorphisms  $\Lambda$  allow a standard description on the ring  $R_n$ .

**Keywords:** associative rings with 1, group homomorphisms of matrix groups, ring homomorphisms of matrix rings, formal matrices, standard description.

## References

1. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1 (36), 16 – 29. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29) [in Ukrainian].
2. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2020). Homomorphisms with condition (\*) if 2 is a reversible element. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2 (37), 101 – 113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).101-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113) [in Ukrainian].
3. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2014). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part I. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2 (25), 152 – 171 [in Russian].
4. Petechuk, V.M., & Petechuk, Yu.V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1 (25), 99 – 114 [in Russian].
5. Petechuk, V.M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Mathematical Notes*, 4, P. 539–547.
6. Golubchik, I.Z., & Mikhalev, A.V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 38(3), 73 – 85.
7. Zelmanov, E.I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Mathematical Journal*, 4 (26), 49 – 67.
8. Petechuk, V.M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Mathematical Notes*, 2 (45), P. 83–94.
9. Golubchik, I.Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group  $GL_n(R)$ ,  $n \geq 4$  over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*, 131(1), P. 123–136.
10. Hahn, A.J., & O’Meara, O.T. (1989). The Classical Groups and  $K$ -Theory. Berlin : Springer, 578 p.

Одержано 10.04.2021

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).76-84](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).76-84)**Х. М. Присяжник**

Національний університет "Львівська політехніка",

Асистент кафедри системи штучного інтелекту

yakumyshyn\_hrystyna@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8446-1506>**ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З МІГРАЦІЄЮ**

Окремим розділом випадкових процесів, що вивчає розмноження і перетворення певних частинок є теорія гіллястих процесів. Основним математичним припущенням, що виділяє гіллясті процеси серед інших випадкових процесів є перетворення частинок незалежно одне від одного. А самі закони розмноження і перетворення частинок піддаються певним закономірностям, у яких головну роль відіграє випадковість.

Гіллясті процеси часто використовуються як математичні моделі різних реальних процесів. Крім того, гіллясті процеси можуть описувати динаміку популяції частинок різної природи, зокрема, це можуть бути фотони, електрони, нейтрони, протони, атоми, молекули, клітини, мікроорганізми, рослини, тварини, особини, ціни, інформація тощо. Цей список можна продовжувати. Оскільки сторонні фактори часто існують, існує потреба вивчити різні модифікації цього процесу. Серед них є гіллясті процеси з імміграцією, еміграцією або поєднанням двох процесів, а саме процесів з міграцією у випадку дискретного або неперервного часу. Таким чином, гіллясті процеси мають досить широке застосування у різних науках.

У даній статті досліджується однорідний гіллястий процес з одним типом частинок, міграцією та неперервним часом  $\mu(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Припускається, що в початковий момент часу в системі знаходиться одна частинка. Процес задається перехідними ймовірностями, що визначаються інтенсивностями розмноження частинок, імміграції та еміграції частинок.

Основним результатом статті є граничні теореми для даної моделі процесу. Отримано граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу. Також отримано граничну теорему для критичного процесу.

**Ключові слова:** гіллястий процес, неперервний час, міграція, критичний процес, докритичний процес.

**1. Вступ.** Перші задачі з теорії гіллястих процесів з'явилися у XIX ст. Проте інтенсивний розвиток цього напрямку теорії випадкових процесів розпочався у 40-х роках XX ст. Вперше міграційні процеси (поєднання еміграції та імміграції), розглянули С. В. Нагаєв і Л. В. Хан [1] у 1980 році. Вони побудували модель, у якій поряд з еволюцією частинок у системі в момент часу  $t$  ( $t = 0, 1, \dots$ ) або з ймовірністю  $P_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) в популяцію іммігрує  $k$  частинок, або з ймовірністю  $Q_r(t)$  ( $r = 1, \dots, m$ ) емігрує  $r$  із існуючих у момент часу  $t$  частинок, де  $m$  - довільне фіксоване натуральне число ( $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) + \sum_{r=1}^m Q_r(t) = 1$ ).

Паралельно даний напрямок досліджували Н. Янев і К. Мітов [2]. Гіллястий процес з випадковою міграційною компонентою розглянуто як особливий випадок  $\varphi$ -контрольованих гіллястих процесів, де еміграція, імміграція та класична еволюція гіллястих процесів утворюють повну групу подій.

Тут слід відзначити, що у переважній більшості гіллясті процеси з міграцією розглядали для випадку дискретного часу. Хоча є і статті для гіллястих процесів з неперервним часом. Зокрема, у [3], [4], [5], [6].

У даній статті досліджується більш загальна модель однорідний гіллястий процес з одним типом частинок з неперервним часом та міграцією (імміграцією та еміграцією частинок) [7]. Імміграція, еміграція та еволюція відбуваються у випадкові моменти часу та визначаються інтенсивностями перехідних ймовірностей. У [7] знайдено вигляд диференціального рівняння для твірної функції та вигляд системи рівнянь Колмогорова для перехідних ймовірностей процесу. А у [8] знайдено вигляд математичного сподівання та другого моменту.

Робота складається з вступу та трьох розділів. У другому розділі наведено модель гіллястого процесу з міграцією у випадку неперервного часу та основні позначення. В третьому розділі доведено граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу. У четвертому розділі доведено граничну теорему для критичного гіллястого процесу.

**2. Опис моделі гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом.** Розглянемо марківський гіллястий процес з одним типом частинок та міграцією  $\mu(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  [7].  $\mu(t)$  позначає кількість частинок у момент часу  $t \in [0, \infty)$ .

Вважаємо, що у початковий момент часу в системі існує одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1.$$

Процес  $\mu(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  задається такими перехідними ймовірностями

$$P\{\mu(t + \Delta t) = j | \mu(t) = i\} = \begin{cases} 1 + q_0 \Delta t + o(\Delta t), & i = j = 0; \\ q_j \Delta t + o(\Delta t), & i = 0, j = 1, 2, \dots; \\ (p_0 + \sum_{l=1}^m r_l) \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, j = 0; \\ 1 + (q_0 + r_0 + p_1) \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, j = 1; \\ (p_j + q_{j-1}) \Delta t + o(\Delta t), & i = 1, j = 2, \dots; \\ \sum_{l=i}^m r_l \Delta t + o(\Delta t) & 1 < i \leq m, j = 0; \\ (ip_0 + r_1) \Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \dots, j = i - 1; \\ r_{i-j} \Delta t + o(\Delta t), & i = 3, \dots, m, 1 < j < i - 1; \\ r_{i-j} \Delta t + o(\Delta t), & i = m + 1, \dots, i - m \leq j < i - 1; \\ 1 + (q_0 + r_0 + ip_1) \Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \dots, i = j; \\ (ip_{j-i+1} + q_{j-i}) \Delta t + o(\Delta t), & i = 2, 3, \dots, i < j; \\ o(\Delta t), & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де  $m$  – деяке фіксоване натуральне число, а  $p_k$ ,  $q_k$  та  $r_n$  задовольняють умови

$$p_k \geq 0, k \neq 1, p_1 < 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0,$$

$$q_k \geq 0, k \neq 0, q_0 < 0, \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0,$$

$$r_n \geq 0, n = \overline{1, m}, r_0 < 0, \sum_{k=0}^m r_k = 0.$$

Зазначимо, що  $p_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) – інтенсивність розмноження частинок,  $q_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) – інтенсивність імміграції частинок, а  $r_n$  ( $n = \overline{0, m}$ ) – інтенсивність імміграції частинок.

Введемо наступні позначення.

Твірну функцію процесу  $\mu(t)$  будемо позначати

$$F(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\} s^n.$$

Також визначимо твірні функції для щільностей перехідних ймовірностей (інтенсивностей процесів еволюції, імміграції та еміграції)

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \quad |s| \leq 1, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n, \quad |s| \leq 1, \quad s \in \mathbb{C},$$

$$r(s) = \sum_{n=0}^m r_n s^{-n}, \quad 0 < |s| \leq 1.$$

**Наслідок 1** (див. [8]). *Математичне сподівання процесу  $\mu(t)$  визначається рівністю*

$$A(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^m r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P_{\mu}(u, n) e^{-a_0 u} du \right) e^{a_0 t}. \quad (1)$$

*Другий момент процесу  $\mu(t)$  визначається співвідношенням*

$$B(t) = \left( \frac{b_1 + b_2}{2a_0} (1 - e^{-2a_0 t}) + (b_0 + 2a_1 + 2a_2) \int_0^t A(u) e^{-2a_0 u} du - \sum_{k=1}^m r_k \sum_{n=0}^{k-1} A_{n-k}^2 \int_0^t P_{\mu}(t, n) e^{-2a_0 u} du \right) e^{2a_0 t}.$$

**3. Гранична теорема для математичного сподівання гіллястого процесу з міграцією.**

Нехай  $a_0 = f'(1)$   $a_1 = g'(1) \neq 0$   $a_2 = r'(1) \neq 0$   $b_2 = r''(1) \neq 0$ .

**Теорема 1.** *Нехай  $a_0 < 0$  та  $a_1, a_2, b_2$  -скінченні, тоді*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \leq -\frac{2a_1 + 3a_2 + b_2}{2a_0}.$$

**Доведення.**

Розглянемо математичне сподівання процесу  $\mu(t)$  (1)

$$A(t) = -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^m r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n-k) \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \right) e^{a_0 t} =$$

$$= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{k=1}^m r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n - k) \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \right) e^{a_0 t}.$$

Змінюючи порядок сумування отримаємо

$$\begin{aligned} A(t) &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=n+1}^m r_k (n - k) \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \right) e^{a_0 t} = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^m (n - k) r_k \right) e^{a_0 t} = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \left( \sum_{k=n+1}^m n r_k - \sum_{k=n+1}^m k r_k \right) \right) e^{a_0 t}. \end{aligned}$$

Розглянемо границю при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a_1 + a_2}{a_0} - \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^m (n - k) r_k \right) e^{a_0 t} = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{m-1} \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du \sum_{k=n+1}^m (n - k) r_k e^{a_0 t} = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \sum_{n=0}^{m-1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du e^{a_0 t} \right) \sum_{k=n+1}^m (n - k) r_k. \end{aligned}$$

Розглянемо більш детально

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t P\{\mu(u) = n\} e^{-a_0 u} du e^{a_0 t} \right) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t e^{-a_0 u} du e^{a_0 t} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-a_0 t} - e^{-a_0 \cdot 0}}{-a_0} e^{a_0 t} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0}. \end{aligned}$$

Враховуючи це, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) &\leq -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{k=n+1}^m (n - k) r_k = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0} \sum_{k=1}^m r_k \sum_{n=0}^{k-1} (n - k) = \\ &= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0} \sum_{k=1}^m \frac{-k - k^2}{2} r_k = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0} \sum_{k=1}^m (k^2 - k + 2k) r_k = \\
&= -\frac{a_1 + a_2}{a_0} + \frac{a_0 + a_1 + a_2}{a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} + \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{a_0 t} - 1}{a_0} (2a_2 + b_2) = \\
&= \frac{2a_0 + 2a_1 + 3a_2 + b_2}{2a_0} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{a_0 t} - \frac{2a_1 + 3a_2 + b_2}{2a_0}.
\end{aligned}$$

Звідси випливає твердження теореми.

#### 4. Гранична теорема для критичного гіллястого процесу з міграцією.

**Теорема 2.** Нехай  $a_0 = f'(1) = 0$ ,  $b_0 = f''(1) > 0$ ,  $a_1 = g'(1) > 0$ ,  $a_2 = r'(1) > 0$  та  $b_0, a_1, a_2$  – скінченні, то при  $t \rightarrow \infty$

$$S_t(x) = P\left\{\frac{2\mu(t)}{b_1 t} \leq x\right\} \rightarrow S(x),$$

де

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2(a_1+a_2)}{b_1}\right)} \int_0^x y^{\frac{2(a_1+a_2)}{b_1}-1} e^{-y} dy, & x \geq 0. \end{cases}$$

#### Доведення.

Знайдемо вигляд характеристичної функції процесу  $F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})$  та знайдемо  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})$ .

Покажемо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (g(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) + r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))) du = \frac{-2(a_1 + a_2)}{b_1} \ln(1 - i\tau).$$

Аналогічно, як у [9] отримаємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du = \frac{-2a_1}{b_1} \ln(1 - i\tau).$$

Розглянемо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du$$

та виберемо довільне  $0 < T < t$ . Інтеграл представимо у вигляді

$$\begin{aligned}
\int_0^t r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du &= \int_0^T r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du - a_2 \int_T^t \frac{1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}}{1 + \frac{b_1 u}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} du - \\
&- a_2 \int_T^t \left(1 - \widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - \frac{1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}}{1 + \frac{b_1 u}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})}\right) du +
\end{aligned}$$

$$+ \int_T^t \left( r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right) du = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Розглянемо кожен інтеграл окремо.

При будь-якому скінченному  $T > 0$  і  $t \rightarrow \infty$ . Враховуючи, що  $|r(\widehat{F}(u, s))| \leq a_2 e^{a_0 u} |s - 1|$  отримаємо

$$|I_1| = \int_0^T |r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))| du \leq \int_0^T a_2 |e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}} - 1| du \leq \frac{2a_2 |\tau| T}{b_1 t} \rightarrow 0.$$

Згідно з [9] при будь-якому скінченному  $T > 0$  і  $t \rightarrow \infty$  отримаємо, що  $|I_3| \rightarrow 0$  та

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{2a_2}{b_1} \int_T^t \frac{d(\frac{b_1}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})u)}{1 + \frac{b_1 u}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} du = \\ &= -\frac{2a_2}{b_1} \left( \ln \left( 1 + \frac{b_1 t}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) \right) - \ln \left( 1 + \frac{b_1 T}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) \right) \right) = \\ &= -\frac{2a_2}{b_1} \ln \frac{1 + \frac{b_1 t}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})}{1 + \frac{b_1 T}{2}(1 - e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})} \rightarrow -\frac{2a_2}{b_1} \ln(1 - i\tau). \end{aligned}$$

При  $|s| \leq 1$  представимо функцію  $r(s)$  у вигляді

$$r(s) = a_2(s - 1) + \varepsilon(s)(s - 1),$$

де  $\varepsilon(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 1$ . Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} |I_4| &= \int_T^t \left| r(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right| du = \int_T^t \left| a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) - a_2(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1) \right| du \leq \\ &\leq |\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) - 1| \int_T^t \varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}})) du \leq \\ &\leq \frac{2\tau}{b_1 t} (t - T) \sup_{T \leq u \leq 1, |s| \leq 1} |\varepsilon(\widehat{F}(u, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}))| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $t \geq T \rightarrow \infty$ .

Отже, ми отримали що потрібно було показати.

Розглянемо

$$\sum_{n=0}^m \int_0^t P\{\mu(x) = n\} \sum_{k=n+1}^m r_k (1 - \widehat{F}^{n-k}(t - x, s)) e^{\int_0^{t-x} (g(\widehat{F}(u, s)) + r(\widehat{F}(u, s))) du} dx.$$

Відомо, що у випадку критичного процесу при  $a_0 = f'(1) = 0$  при скінченному  $b_0 = f''(1) > 0$  має місце асимптотична формула

$$1 - \widehat{F}(t, s) = \frac{1 - s}{\frac{b_1 t}{2}(1 - s) + 1} (1 + \alpha(t, s)),$$

де  $\alpha(t, s) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  рівномірно в  $|s| \leq 1$ .

Розглянемо

$$\begin{aligned} 1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s) &= 1 - \left( 1 - \frac{1-s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s) + 1} (1 + \alpha(t-x, s)) \right)^{n-k} = \\ &= 1 - \left( \frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1 + \alpha(t-x, s)) + 1 + \alpha(t-x, s) - 1 + s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s) + 1} (1 + \alpha(t-x, s)) \right)^{n-k} = \\ &= 1 - \left( \frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1 + \alpha(t-x, s)) + \alpha(t-x, s) + s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s) + 1} (1 + \alpha(t-x, s)) \right)^{n-k} \end{aligned}$$

При  $t \rightarrow \infty$  отримаємо, що  $\frac{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s)(1 + \alpha(t-x, s)) + \alpha(t-x, s) + s}{\frac{b_1(t-x)}{2}(1-s) + 1} \rightarrow 1$ , а

$$1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s) \rightarrow 0.$$

Враховуючи це, ми отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \int_0^t P\{\mu(x) = n\} \sum_{k=n+1}^m r_k (1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s)) e^{\int_0^{t-x} (g(\widehat{F}(u, s)) + r(\widehat{F}(u, s))) du} dx \leq \\ \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \int_0^t \sum_{k=n+1}^m r_k (1 - \widehat{F}^{n-k}(t-x, s)) e^{\int_0^{t-x} (g(\widehat{F}(u, s)) + r(\widehat{F}(u, s))) du} dx = 0. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при  $t \rightarrow \infty$  твірна функція

$$\widehat{F}(t, s) = 1 - \frac{1-s}{\frac{b_1 t}{2}(1-s) + 1} (1 + \alpha(t, s)) \rightarrow 1.$$

Таким чином, отримуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, e^{\frac{2i\tau}{b_1 t}}) = \frac{-2(a_1 + a_2)}{b_1} \ln(1 - i\tau).$$

**5. Висновки.** У даній статті продовжено дослідження однорідного гіллястого процесу з одним типом частинок з неперервним часом та міграцією (імміграцією та еміграцією частинок) [7]. Доведено граничну теорему для математичного сподівання у випадку докритичного процесу та граничну теорему для критичного гіллястого процесу.

#### Список використаної літератури

1. Нагаев С. В., Хан Л. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией. *Теория вероятностей и ее применения*. 1980, Вып. XXV, С. 523–534.

2. Yanev N., Mitov K. Controlled branching processes: the case of random migration. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*. 1980, Vol. 33, P. 473–475.
3. Алимов Д., Решетняк В. Н. Ветвящийся процесс с иммиграцией и ограниченной эмиграцией. *Прикладные задачи теории вероятностей. Сб. научн. труд. Ин-т математики АН УССР*. 1982, С. 4–14.
4. Srivastava O. P., Gupta S. C. On a countinuous-time branching process with migration. *Statistica*. 1989, Vol. XLIX, No. 4, P. 547–552.
5. Chen A. Y., Renshaw E. Markov branching processes regulated by emigration and large immigration. *Stochastic Processes and their Applications*. 1995, Vol. 57, P. 339–359.
6. Rahimov I., Al-Sabah W. S. Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration. *Arab J. Math. Sci.* 2000, Vol. 6, No. 2, P. 81–97.
7. Якимішин Х. Рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією. *Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат.* 2017, Вип. 84. С. 119–125.
8. Базилевич І. Б., Якимішин Х. М. Диференціальні рівняння для моментів та твірної функції кількості перетворень гіллястого процесу з неперервним часом та міграцією. *Буковинський математичний журнал*. 2019. Вип. 7, № 1. С. 3–13. DOI:<https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.003>.
9. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. Москва: Наука, 1971. 436 с.

### **Prysyazhnyk K. M.** Boundary theorems of branching process with migration.

A separate section of random processes studies laws of reproduction and transformation of particles and it is the theory of branching processes. The basic mathematical assumption distinguishes branching processes among other random processes is the transformation of particles independently from one another. The laws of reproduction and transformation of particles are subject to regularities, in which randomness plays a major role.

Branched processes are often used as mathematical models of different real processes, in particular, physical, chemical, biological, genetic, demographic, environmental, economic, technical and others. In addition, branching processes can describe the population dynamics of particles of different nature, in particular, they can be photons, electrons, neutrons, protons, atoms, molecules, cells, microorganisms, plants, animals, individuals, prices, information, etc. This list can be continued. Thus, branching processes are quite widely used in various sciences. Since third party factors often exist, there is a need to study different modifications of this process. Among them are branching processes with immigration, emigration, or a combination of two processes, namely processes with migration for the case of discrete or continuous time.

This article investigates a homogeneous branching process with one particle type, migration, and continuous time  $\mu(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . It is assume that there is one particle in the system at the beginning. The process is defined by transient probabilities, determined by the intensities of particle reproduction, immigration, and emigration

The main result of the article is the boundary theorems for this process model. The boundary theorem for mathematical expectation in the case of a subcritical process is obtained. A boundary theorem for the critical branching process with migration and continuous-time is also obtained.

**Keywords:** branching process, migration, continuous time, critical process, subcritical process.

### **References**

1. Nagaev, S. V., & Khan L. V. (1980). Limit theorems for Galton-Watson branching processes with migration. *Theory Probab. Appl.*, 25, 523-534 [in Russian].
2. Yanev, N., & Mitov, K. (1980). Controlled branching processes: the case of random migration. *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 33, 473-475.
3. Alimov, D., & Reshetnyak, V. N. (1982). Branching process with immigration and limited emigration. *Applied problems of probability theory. collection of scientific papers, Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, 4-14 [in Russian].

4. Srivastava, O. P., & Gupta, S. C. (1989). On a continuous-time branching process with migration. *Statistica*, *XLIX*, 4, 547-552.
5. Chen, A. Y., & Renshaw, E. (1995). Markov branching processes regulated by emigration and large immigration. *Stochastic Processes and their Applications*, *57*, 339-359.
6. Rahimov, I., & Al-Sabah, W. S. (2000). Branching processes with decreasing immigration and tribal emigration. *Arab J. Math. Sci.*, *6*(2), 81-97.
7. Yakymyshyn, Kh. (2017). Equation for generation function for branching processes with migration. *Visnyk of the Lviv University, Ser. of Mechanics and Mathematics*, *84*, 119-125 [in Ukrainian].
8. Bazylevych, I., & Yakymyshyn, K. (2019). Differential equations for moments and the generating function of number of transformations for branching process with continuous time and migration. *Bukovinian Mathematical Journal*, *7*(1), 3-13. <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.003> [in Ukrainian].
9. Sevastyanov, B. A. (1971). Branching processes. *Moscow: Izdatelstvo Nauka* [in Russian].

Одержано 30.04.2021

УДК 517.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).85-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).85-93)**І. Ю. Раєвська<sup>1</sup>, М. Ю. Раєвська<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут математики НАН України,  
старший науковий співробітник відділу алгебри і топології,  
кандидат фізико-математичних наук  
[raeirina@imath.kiev.ua](mailto:raeirina@imath.kiev.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6764-480X>

<sup>2</sup> Інститут математики НАН України,  
старший науковий співробітник відділу алгебри і топології,  
кандидат фізико-математичних наук  
[raemarina@imath.kiev.ua](mailto:raemarina@imath.kiev.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6135-7818>

## ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ НА ЕЛЕМЕНТАРНИХ АБЕЛЕВИХ ГРУПАХ ПОРЯДКУ $p^3$

Майже-кільця виникають природним чином при вивченні систем нелінійних відображень і вивчаються протягом багатьох десятиліть. Основні визначення та багато результатів стосовно майже-кільць можна знайти, наприклад, у [G. Pilz. Near-rings. The theory and its applications. North Holland, Amsterdam, 1977].

Майже-кільця — це узагальнення кільць в тому сенсі, що додавання не обов'язково є комутативним і передбачається лише один дистрибутивний закон. Очевидно, що кожне асоціативне кільце є майже-кільцем, і кожна група є адитивною групою майже-кільця, але не обов'язково майже-кільця з одиницею. Питання про те, яка група може бути адитивною групою майже-кільця з одиницею, далеко від вирішення.

Майже-кільце  $R$  з одиницею називається локальним, якщо підгрупа усіх необоротних елементів із  $R$  утворює підгрупу адитивної групи  $R$ . Дослідження локальних майже-кільць було ініційовано Мексоном (1968), який визначив ряд їх основних властивостей і, зокрема, довів, що адитивна група нуль-симетричного локального майже-кільця є  $p$ -групою. Мексон (1968) описав усі неізоморфні нуль-симетричні локальні майже-кільця з нециклічною адитивною групою порядку  $p^2$ , які не є майже-полями. Мексон у 1968 р. також показав, що кожна нециклічна абелева  $p$ -група порядку  $p^n > 4$  є адитивною групою нуль-симетричного локального майже-кільця, яке не є кільцем.

Список усіх локальних майже-кільць порядку не більше 31 можна отримати з пакету SONATA (<https://gap-packages.github.io/sonata/>) системи комп'ютерної алгебри GAP (<https://www.gap-system.org/>). Однак класифікація майже-кільць вищих порядків вимагає набагато складніших обчислень. Для локальних майже-кільць вони були реалізовані в новому GAP-пакеті LocalNR (<https://gap-packages.github.io/LocalNR>). Поточна версія (ще не розповсюджена за допомогою GAP) містить 37599 локальних майже-кільць порядку не більше 361, за винятком порядків 128, 256 і деяких порядків 32, 64 і 243.

Ця робота присвячена дослідженню локальних майже-кільць з елементарними абелевими адитивними групами порядку  $p^3$ .

**Ключові слова:** майже-кільце, локальне майже-кільце, елементарна абелева група.

**1. Вступ.** Вивчення локальних майже-кільць вперше було ініційоване в [1] та встановлено, що адитивна група скінченного нуль-симетричного локального майже-кільця є  $p$ -групою. Мексон [2] показав, що з точністю до ізоморфізму існує  $p - 1$  локальне майже-кільце з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $p^2$ , в яких підгрупи необоротних елементів мають порядок  $p$ , тобто тих майже-кільць, які не є майже-полями. Разом із фундаментальною роботою Цассенхауза про майже-поля й роботою Клея та Малоне [5], ця стаття дає

повний опис усіх нуль-симетричних локальних майже-кілець порядку  $p^2$ . Крім того, в останній статті встановлено, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кілець з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем.

Далі, Мексоном [4] було доведено, що кожна нециклічна скінченна абелева  $p$ -група порядку, більшого за 4, є адитивною групою деякого нуль-симетричного локального майже-кілця, що не є кільцем. Мексоном сформульовано проблему пошуку єдиного набору відображень, що визначають всі неізоморфні локальні майже-кілця на цих групах. Ця проблема й досі залишається відкритою, як і проблема визначення кількості неізоморфних локальних майже-кілець на даній групі.

Ця робота присвячена дослідженню локальних майже-кілець з елементарними абелевими адитивними групами порядку  $p^3$ .

## 2. Попередні результати. Дамо основні означення.

**Означення 1.** Непорожня множина  $R$  з двома бінарними операціями “+” та “ $\cdot$ ” називається майже-кілцем, якщо:

- 1)  $(R, +)$  — група з нейтральним елементом 0,
- 2)  $(R, \cdot)$  — напівгрупа,
- 3)  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ .

Таке майже-кілець називається лівим майже-кілцем. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$  для всіх  $x, y, z \in R$ , то отримуємо праве майже-кілець.

Група  $(R, +)$  позначається через  $R^+$  та називається адитивною групою, а її нейтральний елемент 0 — нулем майже-кілця  $R$ . З аксіоми 3 випливає, що  $r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$ , звідки отримуємо  $r \cdot 0 = 0$ . З цієї ж аксіоми випливає, що  $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$ . Майже-кілець  $R$  називається нуль-симетричним, якщо також  $0 \cdot x = 0$ .

Майже-кілець  $R$ , в якому напівгрупа  $(R, \cdot)$  є моноїдом з одиничним елементом  $i$ , називається майже-кілцем з одиницею  $i$ . Група всіх оборотних елементів цього моноїда позначається через  $R^*$  та називається мультиплікативною групою майже-кілця  $R$ , а її доповнення  $R \setminus R^*$  — множиною необоротних елементів із  $R$ .

**Означення 2.** Майже-кілець  $R$  з одиницею називається локальним, якщо множина  $L$  всіх необоротних елементів із  $R$  утворює підгрупу адитивної групи  $R^+$ . В цьому випадку  $L$  будемо називати підгрупою необоротних елементів майже-кілця  $R$ .

Наступний результат визначає структурну особливість скінченних локальних майже-кілець.

**Лема 1.** Кожне нетривіальне підмайже-кілець з одиницею скінченного локального майже-кілця є локальним майже-кілцем.

**Доведення.** Нехай  $R$  — локальне майже-кілець порядку  $p^n$  та  $L$  — підгрупа необоротних елементів  $R^+$ . Нехай  $R_1$  — нетривіальне підмайже-кілець з одиницею в  $R$  та  $L_1$  — напівгрупа необоротних елементів з  $R_1$ . Оскільки  $L_1$  є піднапівгрупою  $L$ , то  $L_1$  є підгрупою в  $L$ , а отже, підгрупою в  $R_1^+$ . Звідси  $R_1$  — локальне майже-кілець. Твердження доведено.  $\square$

Скінченні локальні майже-кільця з циклічною підгрупою необоротних елементів описані в [7, теорема 1].

**Теорема 1.** *Нехай  $R$  — локальне майже-кільце порядку  $p^n$  з  $n > 1$ , підгрупа  $L$  якого циклічна та нетривіальна. Тоді його адитивна група  $R^+$  або сама циклічна, або є елементарною абелевою групою порядку  $p^2$ . В першому випадку  $R$  є комутативним локальним кільцем, ізоморфним кільцю лисків  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  з  $n \geq 2$ , а в другому — існує  $p$  попарно неізоморфних таких майже-кільць  $R$  з  $|L| = p$ , із яких  $p - 1$  є нуль-симетричними, та мультиплікативні групи  $R^*$  яких ізоморфні напівпрямому добутку двох циклічних підгруп порядків  $p$  та  $p - 1$ .*

Як безпосередній наслідок теореми 1 маємо наступний результат.

**Наслідок 1.** *Нехай  $R$  є локальним майже-кільцем порядку  $p^3$ , яке не є ізоморфним  $\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$  або не є майже-полем. Тоді підгрупа необоротних елементів  $L$  є елементарною абелевою групою порядку  $p^2$ .*

Наступне твердження містить класифікацію абелевих груп порядку  $p^3$  (див. [6]).

**Лема 2.** *Нехай  $G$  — абелева група порядку  $p^3$ . Далі наведено визначальні співвідношення всіх неізоморфних груп  $G$ .*

- 1)  $a^{p^3} = 1$ .
- 2)  $a^{p^2} = 1, b^p = 1, ab = ba$ .
- 3)  $a^p = b^p = c^p = 1, ab = ba, ac = ca, cb = bc$ .

В статті [5] майже-кільця з одиницею, а тому і локальні, з циклічною адитивною групою повністю вивчені. В статті розглянемо елементарні абелеві групи порядку  $p^3$  у якості адитивних груп локальних майже-кільць.

Нехай  $G(p, p, p)$  — група зі співвідношеннями 3) з леми 2.

**3. Локальні майже-кільця з елементарними абелевими адитивними групами порядку  $p^3$ .**

Нехай  $R$  — майже-кільце з одиницею, адитивна група  $R^+$  якого ізоморфна групі  $G(p, p, p)$ . Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  для деяких  $a, b, c \in R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = bp = cp = 0, a + b = b + a, a + c = c + a, c + b = b + c$ . Зокрема, кожний елемент  $x \in R$  єдиним чином записується у вигляді  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$  з коефіцієнтами  $0 \leq x_1 < p, 0 \leq x_2 < p$  та  $0 \leq x_3 < p$ .

Без втрати загальності, можна припустити, що  $a$  є одиницею в  $R$ , тобто  $ax = xa = x$  для кожного  $x \in R$ . Більш того, для кожного  $x \in R$  існують такі коефіцієнти  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \lambda(x), \mu(x)$  та  $\nu(x)$ , що  $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x)$  та  $xc = a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x)$ . Зрозуміло, що вони єдиним чином визначені за модулем  $p$ , тому деякі відображення  $\alpha : R \rightarrow Z_p, \beta : R \rightarrow Z_p, \gamma : R \rightarrow Z_p, \lambda : R \rightarrow Z_p, \mu : R \rightarrow Z_p, \nu : R \rightarrow Z_p$ .

**Теорема 2.** *Якщо  $x, y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$ , то*

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_3) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3),$$

причому виконуються наступні твердження:

- (0)  $\alpha(0) \equiv 0 \pmod{p}, \beta(0) \equiv 0 \pmod{p}, \gamma(0) \equiv 0 \pmod{p}, \lambda(0) \equiv 0 \pmod{p},$   
 $\mu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  та  $\nu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  тоді і тільки тоді, коли майже-кільце  $R$  є нуль-симетричним;



- (1)  $\alpha(a) = 0, \beta(a) = 1, \gamma(a) = 0, \lambda(a) = 0, \mu(a) = 0, \nu(a) = 1 \pmod{p}$ ;
- (2)  $\alpha(xy) \equiv x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (3)  $\beta(xy) \equiv x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (4)  $\gamma(xy) \equiv x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (5)  $\lambda(xy) \equiv x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\nu(y) \pmod{p}$ ;
- (6)  $\mu(xy) \equiv x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y) \pmod{p}$ ;
- (7)  $\nu(xy) \equiv x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y) \pmod{p}$ .

**Доведення.**

Оскільки  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ , то  $R$  є нуль-симетричним майже-кільцем, якщо і тільки якщо  $0 = 0 \cdot b = a\alpha(0) + b\beta(0) + c\gamma(0)$  або  $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0$  та  $0 = 0 \cdot c = a\lambda(0) + b\mu(0) + c\nu(0)$  або  $\lambda(0) = \mu(0) = \nu(0) = 0$ . Більш того,  $b = ab = a\alpha(a) + b\beta(a) + c\gamma(a)$  та  $c = ac = a\lambda(a) + b\mu(a) + c\nu(a)$ , маємо  $\alpha(a) = 0, \beta(a) = 1, \gamma(a) = 0, \lambda(a) = 0, \mu(a) = 0, \nu(a) = 1$ . Тому твердження (0) та (1) мають місце.

Користуючись лівою дистрибутивністю

$$xy = (xa)y_1 + (xb)y_2 + (xc)y_3 = (ax_1 + bx_2 + cx_3)y_1 + (a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x))y_2 + (a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x))y_3.$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} (ax_1 + bx_2 + cx_3)y_1 &= ax_1y_1 + bx_2y_1 + cx_3y_1, \\ (a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x))y_2 &= a\alpha(x)y_2 + b\beta(x)y_2 + c\gamma(x)y_2 \end{aligned}$$

та

$$(a\lambda(x) + b\mu(x) + c\nu(x))y_3 = a\lambda(x)y_3 + b\mu(x)y_3 + c\nu(x)y_3.$$

Тому, користуючись також комутативністю додавання,

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2 + \lambda(x)y_3) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3).$$

З асоціативності множення маємо  $(xy)b = x(yb)$ . Оскільки

$$(xy)b = a\alpha(xy) + b\beta(xy) + c\gamma(xy)$$

та

$$x(yb) = a(x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y) + \lambda(x)\gamma(y)) + b(x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y)) + c(x_3\alpha(y) + \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y)),$$

то прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримаємо рівності (2)–(4).

Аналогічно з асоціативності множення маємо  $(xy)c = x(yc)$ . Оскільки

$$(xy)c = a\lambda(xy) + b\mu(xy) + c\nu(xy)$$

та

$$x(yc) = a(x_1\lambda(y) + \alpha(x)\mu(y) + \lambda(x)\nu(y)) + b(x_2\lambda(y) + \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y)) + c(x_3\lambda(y) + \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y)),$$

то прирівнюючи відповідні коефіцієнти отримаємо рівності (5)–(7).  $\square$

Нехай  $R$  — локальне майже-кільце з адитивною групою  $R^+$ , що ізоморфна групі  $G(p, p, p)$ , і не є майже-полем.

Зауважимо, що за наслідком 1 підгрупа необоротних елементів  $L$  адитивної групи  $R^+$  локального майже-кільця  $R$  є елементарною абелевою порядку  $p^2$ , тобто  $|R : L| = p$ .

**Теорема 3.** *Нехай  $R$  — локальне майже-кільце з адитивною групою  $R^+$ , що ізоморфна групі  $G(p, p, p)$ , і не є майже-полем. Тоді  $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle$  для деяких  $a, b, c \in R$ , що задовольняють співвідношення  $ap = bp = cp = 0$ ,  $a + b = b + a$ ,  $a + c = c + a$ ,  $c + b = b + c$ . Якщо  $a$  є одиницею в  $R$ , то  $L = \langle b \rangle + \langle c \rangle$  та  $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 \mid x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}\}$ .*

**Доведення.** Якщо  $a$  є одиницею в  $R$ , то  $b$  та  $c \in L$  за наслідком 1. Тоді  $L = \langle b \rangle + \langle c \rangle$ . Оскільки  $R^* = R \setminus L$ , та елемент  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 \in R^*$ , якщо і тільки якщо,  $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ .  $\square$

Застосовуючи теорему 3, отримаємо наступну формулу множення для будь-яких двох елементів  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$  та  $y = ay_1 + by_2 + cy_3$  локального майже-кільця  $R$ .

**Наслідок 2.** *Якщо  $x, y \in R$ ,  $xb = b\beta(x) + c\gamma(x)$  та  $xc = b\mu(x) + c\nu(x)$ , то*

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3),$$

причому для відображень  $\beta: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\gamma: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\mu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  та  $\nu: R \rightarrow \mathbb{Z}_p$  виконуються наступні твердження:

- (0)  $\beta(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\gamma(0) \equiv 0 \pmod{p}$ ,  $\mu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  та  $\nu(0) \equiv 0 \pmod{p}$  тоді і тільки тоді, коли майже-кільце  $R$  є нуль-симетричним;
- (1)  $\beta(a) = 1$ ,  $\gamma(a) = 0$ ,  $\mu(a) = 0$ ,  $\nu(a) = 1 \pmod{p}$ ;
- (2) якщо  $\beta(x) \equiv 0 \pmod{p}$  та  $\mu(x) \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$ ;
- (3)  $\beta(xy) \equiv \beta(x)\beta(y) + \mu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (4)  $\gamma(xy) \equiv \gamma(x)\beta(y) + \nu(x)\gamma(y) \pmod{p}$ ;
- (6)  $\mu(xy) \equiv \beta(x)\mu(y) + \mu(x)\nu(y) \pmod{p}$ ;
- (7)  $\nu(xy) \equiv \gamma(x)\mu(y) + \nu(x)\nu(y) \pmod{p}$ .

Очевидно, що функції  $\beta(x)$  та  $\mu(x)$  не залежать від коефіцієнта  $x_3$ .

Маємо наступне твердження.

**Лема 3.** *Підгрупа  $\langle c \rangle$  є ідеалом в локальному майже-кільці  $R$ .*

**Доведення.**

Нехай  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$ ,  $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in R$ ,  $z = cz_3 \in \langle c \rangle$ . Перевіримо, чи буде  $\langle c \rangle$  ідеалом в  $R$ , тобто  $(z+x)y - xy \in \langle c \rangle$ . Для цього скористаємося формулою множення елементів в  $R$  з наслідку 2,

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3).$$

Маємо

$$\begin{aligned} (z+x)y - xy &= (cz_3 + ax_1 + bx_2 + cx_3)(ay_1 + by_2 + cy_3) - (ax_1 + bx_2 + cx_3)(ay_1 + by_2 + cy_3) = \\ &= (ax_1 + bx_2 + c(x_3 + z_3))(ay_1 + by_2 + cy_3) - (ax_1 + bx_2 + cx_3)(ay_1 + by_2 + cy_3) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(z+x)y_2 + \mu(z+x)y_3) + c(x_3y_1 + \gamma(z+x)y_2 + \nu(z+x)y_3) - \\
&\quad - ax_1y_1 - b(x_2y_1 + \beta(x)y_2 + \mu(x)y_3) - c(x_3y_1 + \gamma(x)y_2 + \nu(x)y_3) = \\
&\quad = c(y_2(\gamma(z+x) - \gamma(x)) + y_3(\nu(z+x) - \nu(x))) \in \langle c \rangle.
\end{aligned}$$

Отже,  $\langle c \rangle$  є ідеалом в  $R$ . □

Далі, наведемо приклади майже-кільцевого множення.

**Лема 4.** *Нехай  $G$  ізоморфна групі  $G(p, p, p)$ . Якщо  $x = ax_1 + bx_2 + cx_3$  та  $y = ay_1 + by_2 + cy_3 \in G$ , то множення*

$$x \cdot y = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 + \nu(x)y_2)$$

з одним з наступних наборів функцій

- $\beta(x) = 1$  та  $\nu(x) = 1$ ;
- $\beta(x) = x_1$  та  $\nu(x) = x_1$ ;
- $\beta(x) = x_1^2$  та  $\nu(x) = x_1^2$ ;
- ...
- $\beta(x) = x_1^{p-1}$  та  $\nu(x) = x_1^{p-1}$

визначає локальне майже-кільце  $R = (G, +, \cdot)$ .

Маємо наступну теорему.

**Теорема 4.** *Існує щонайменше  $p$  неізоморфних локальних майже-кільць на елементарній абелевій групі порядку  $p^3$ .*

**Доведення.** Оскільки нуль-симетричні локальні майже-кільця порядку  $p^2$  класифіковані в роботі [2], то й описані всі неізоморфні фактор-майже-кільця  $N = R / \langle c \rangle$ . Тобто можна застосувати формулу множення з вказаної роботи, попередньо адаптувавши її для лівих локальних майже-кільць. Зрозуміло, що  $N^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ . А саме, нехай  $x = ax_1 + bx_2$  та  $y = ay_1 + by_2$  елементи майже-кільця  $N$ , тоді

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + \rho(x_1)y_2),$$

де  $\rho$  приймає  $p-1$  значення для нуль-симетричних майже-кільць за [2, Theorem 1.6].

З іншого боку, за наслідком 2 маємо:

$$xy = ax_1y_1 + b(x_2y_1 + x_1\beta(x)y_2).$$

Прирівнявши коефіцієнти при твірних, отримаємо:  $x_1\beta(x)y_2 = \rho(x_1)y_2$ . Якщо  $y_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $x_1\beta(x) = \rho(x_1)$ . Звідки  $\beta(x) = \rho(x_1)x_1^{-1}$ . Якщо  $y_2 \equiv 0 \pmod{p}$ , то  $xy = ax_1y_1 + bx_2y_1$ .

Отже, існує  $p-1$  таких різних функцій  $\beta(x)$ .

Очевидно, що множення з леми 4 з функціями  $\beta(x) = 1$  та  $\nu(x) = 1$  є майже-кільцевим і визначає константне локальне майже-кільце, що завершує доведення. □

**4. Приклади локальних майже-кільць з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $p^3$ .** Дамо алгоритм побудови локального майже-кільця з елементарною абелевою адитивною групою порядку  $5^3 = 125$ , що реалізовано в системі комп'ютерної алгебри GAP [8].

```

LoadPackage("LocalNR");
G := SmallGroup(125, 5);
gen := MinimalGeneratingSet(G);
List(gen, Order);
a := gen[1];
b := gen[2];
c := gen[3];
beta := function(x)
return x^2 mod 5; end;
nu := function(x)
return x^2 mod 5; end;
mulGR := function(x, y)
local x1, x2, x3, y1, y2, y3;
for x1 in [0..4] do
for x2 in [0..4] do
for x3 in [0..4] do
for y1 in [0..4] do
for y2 in [0..4] do
for y3 in [0..4] do
if x = a^x1 * b^x2 * c^x3 and y = a^y1 * b^y2 * c^y3 then return
a^(x1 * y1) * b^(x2 * y1 + beta(x1) * y2) * c^(x3 * y1 + nu(x1) * y3); fi;
od; od; od; od; od; od; end;
n := ExplicitMultiplicationNearRingNC(G, mulGR);
M := MultiplicationTable(n);
mul := NearRingMultiplicationByOperationTable(G, M, AsSortedList(G));
n := ExplicitMultiplicationNearRing(G, mul);

```

З побудованих прикладів у пакетах “Sonata” [9] та “LocalNR” [10] маємо таку кількість локальних майже-кілець з досліджуваними характеристиками, що не є майже-полями:

Адитивна група	Кількість неізоморфних локальних майже-кілець
$C_2 \times C_2 \times C_2$	6
$C_3 \times C_3 \times C_3$	12
$C_5 \times C_5 \times C_5$	29
$C_7 \times C_7 \times C_7$	46
$C_{11} \times C_{11} \times C_{11}$	96

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** В роботі вивчаються локальні майже-кільця з абелевими адитивними групами порядку  $p^3$ . Визначено формули множення для таких майже-кілець та описано функції, що їх задають. Наведено приклади локальних майже-кілець на цих групах.

Отримані результати знайдуть застосування при вивченні недистрибутивних структур на цих групах та класифікації цих об’єктів. Локальні майже-кільця тісно пов’язані з брейсами, які дають розв’язки комбінаторних рівнянь Янга-Бакстера [11].

### Список використаної літератури

1. Maxson C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. 106. P. 197–205.
2. Maxson C. J. Local near-rings of cardinality  $p^2$ . *Canad. Math. Bull.* 1968. 11, no. 4. P. 555–561.
3. Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg.* 1935/36. 11. P. 187–220.
4. Maxson C. J. On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian  $p$ -groups. *Quart. J. Math. Oxford.* 1970. 2, 21. P. 449–457.
5. Clay J. R., Malone Jr. The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand.* 1966. 19. P. 146–150.
6. Холл М. Теория групп. Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. 468 р.
7. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кілця з обмеженнями на мультиплікативні групи та підгрупи необоротних елементів. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*, Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. 2013. 14. С. 134–145.
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.0, 2020. (<https://www.gap-system.org>)
9. Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P. and Noebauer C. *SONATA – System of nearrings and their applications, GAP package, Version 2.8*; 2015. (<https://gap-packages.github.io/sonata/>)
10. Raievska I., Raievska M., Sysak Y., LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3, 2021. (GAP package), (<https://gap-packages.github.io/LocalNR>)
11. Rump W. Set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation, skew-braces, and related near-rings. *J. Algebra Appl.* 2019. 18, No. 8. Article ID 1950145. 22 p.

### Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Local nearrings on elementary Abelian groups of order $p^3$ .

Nearrings arise naturally in the study of systems of nonlinear mappings, and have been studied for many decades. Basic definitions and many results concerning nearrings can be for instance found in [G. Pilz. Near-rings. The theory and its applications. North Holland, Amsterdam, 1977].

Nearrings are generalized rings in the sense that the addition need not be commutative and only one distributive law is assumed. Clearly every associative ring is a nearring and each group is the additive group of a nearring, but not necessarily of a nearring with identity. The question what group can be the additive group of a nearring with identity is far from solution.

A nearring  $R$  with an identity is called local if the set of all non-invertible elements of  $R$  forms a subgroup of the additive group of  $R$ . A study of local nearrings was initiated by Maxson (1968) who defined a number of their basic properties and proved in particular that the additive group of a finite zero-symmetric local nearring is a  $p$ -group. Maxson (1968) described all non-isomorphic zero-symmetric local nearrings with non-cyclic additive group of order  $p^2$  which are not nearfields. He also shown in 1968 that every non-cyclic abelian  $p$ -group of order  $p^n > 4$  is the additive group of a zero-symmetric local nearring which is not a ring.

The list of all local nearrings of order at most 31 can be extracted from the package SONATA (<https://gap-packages.github.io/sonata/>) of the computer system algebra GAP (<https://www.gap-system.org/>). However, the classification of nearrings of higher orders requires much more complex calculations. For local nearrings they were realized by us in the form of a new GAP package called LocalNR (<https://gap-packages.github.io/LocalNR>). Its current version (not yet distributed with GAP) contains 37599 local nearrings of order at most 361, except orders 128, 256 and some of orders 32, 64 and 243.

This paper is devoted to the study of local nearrings whose additive groups are an Abelian group of order  $p^3$ .

**Keywords:** nearring, local nearring, elementary Abelian group.

## References

1. Maxson, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197-205.
2. Maxson, C. J. (1968). Local near-rings of cardinality  $p^2$ . *Canad. Math. Bull.*, 11(4), 555-561.
3. Zassenhaus, H. (1935/36). Über endliche Fastkörper. *Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg*, 11, 187-220.
4. Maxson, C. J. (1970). On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian  $p$ -groups. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 21, 449-457.
5. Clay, J. R., & Malone, Jr. (1966). The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand.*, 19, 146-150.
6. Hall, M. Jr. (1959). The theory of groups. New York: MacMillan Company.
7. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2013). Local nearrings with restrictions on the multiplicative groups and the subgroups of non-invertible elements. *Sci. Journ. Dragomanov Ped. Univ. Ser. 1. Phys. – math. sci. (Kiev)*, 14, 134-145 [in Ukrainian].
8. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming (Version 4.11.0). (2020). Retrieved from <https://www.gap-system.org>.
9. Aichinger, E., Binder, F., Ecker, Ju., Mayr, P. & Noebauer, C. (2015). SONATA — System of nearrings and their applications (Version 2.8) [GAP package]. Retrieved from <https://gap-packages.github.io/sonata/>.
10. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Y. (2021). LocalNR, Package of local nearrings (Version 1.0.3) [GAP package]. Retrieved from <https://gap-packages.github.io/LocalNR>.
11. Rump, W. (2019). Set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation, skew-braces, and related near-rings. *J. Algebra Appl.*, 18(8), 1950145.

Одержано 23.04.2021

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).94-104](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).94-104)**С. А. Щоголев<sup>1</sup>, В. В. Карапетров<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Одеський національний університет імені І.І.Мечникова,  
завідувач кафедри вищої математики,  
доктор фізико-математичних наук, професор  
sergas1959@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8025-143X>

<sup>2</sup> Одеський національний університет імені І.І.Мечникова,  
аспірант кафедри вищої математики  
valentyu.karapetrov@stud.onu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1315-4968>

## БЛОЧНЕ РОЗЩЕПЛЕННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

При математичному описанні різноманітних явищ і процесів, що виникають в математичній фізиці, електротехніці, економіці, доводиться мати справу з матричними диференціальними рівняннями. Тому такі рівняння є актуальними як для математиків, так і для фахівців в інших галузях природознавства. В даній статті розглядається система  $M$  лінійних матричних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, зображуваними у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними в певному сенсі коефіцієнтами та частотою (клас  $F$ ), причому ця система близька до блочно-діагональної системи з повільно змінними коефіцієнтами. Шукається перетворення з коефіцієнтами аналогічного типу, що приводить цю систему до суто блочно-діагонального вигляду. Відносно коефіцієнтів цього перетворення одержується квазілінійна система матричних диференціальних рівнянь, яка розпадається на  $M$  незалежних підсистем, кожна з яких має вигляд деякої допоміжної нелінійної системи. Для цієї допоміжної системи методом послідовних наближень отримано умови існування у неї розв'язків класу  $F$ , а потім на підставі цього результату отримано умови існування шуканого перетворення.

**Ключові слова:** Матричні диференціальні рівняння, ряди Фур'є, повільно змінні параметри.

**1. Вступ.** Одним з актуальних розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь є теорія матричних диференціальних рівнянь. Такі рівняння виникають при дослідженні різноманітних процесів в математичній фізиці, електротехніці та інших галузях, і їм присвячено багато праць, в яких досліджувалась розв'язність матричних рівнянь у різних функціональних просторах, крайові задачі для матричних диференціальних рівнянь та інші проблеми [1–4]. В даній статті досліджується питання про блочне розщеплення лінійної системи матричних диференціальних рівнянь.

**2. Основні позначення та означення.** Нехай

$$G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$$

**Означення 1.** Скажемо, що функція  $p(t, \varepsilon)$  належить до класу  $S(m; \varepsilon_0)$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), якщо виконано наступні умови

- 1)  $p : G(\varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ; 2)  $p(t, \varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$  за  $t$ ;
- 3)  $d^k p(t, \varepsilon) / dt^k = \varepsilon^k p_k(t, \varepsilon)$  ( $0 \leq k \leq m$ ), причому

$$\|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^m \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

**Означення 2.** Скажемо, що функція  $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$  належить до класу  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), якщо ця функція зображується у вигляді:

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

причому

1)  $f_n(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_0)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ );

2)

$$\|f\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m; \varepsilon_0)} < +\infty;$$

3)  $\theta(t, \varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi \in S(m, \varepsilon_0)$ ,  $\inf_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0 > 0$ .

Множина функцій класу  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$  утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми  $\|\cdot\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$ . Має місце ланцюжок включень:  $F(0; \varepsilon_0; \theta) \supset F(1; \varepsilon_0; \theta) \supset \dots \supset F(m; \varepsilon_0; \theta)$ .

Нехай задано дві функції класу  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ :

$$u(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)), \quad v(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [5]:

$$(uv)(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t, \varepsilon) v_s(t, \varepsilon) \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)). \quad (1)$$

Очевидно, що  $uv \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ .

Сформулюємо деякі властивості норми  $\|\cdot\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$ . Нехай  $u, v \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ ,  $k = \text{const}$ . Тоді:

1)  $\|ku\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$ ;

2)  $\|u + v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} + \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$ ;

3)

$$\|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)};$$

4)

$$\|uv\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq 2^m \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}.$$

Дійсно, при  $m = 0$  згідно з формулою (1) маємо:  $\|uv\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq \|u\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)}$ . Далі, на підставі властивостей 1) – 3):

$$\begin{aligned} \|uv\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} &= \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k (uv)}{\partial t^k} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \left\| \frac{\partial^{k-j} v}{\partial t^{k-j}} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq \\ &\leq 2^m \left( \sum_{j=0}^m \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \right) = 2^m \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}. \end{aligned}$$

На підставі властивості 4) можна стверджувати, що простір  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$  утворює банахову алгебру [6].



**Означення 3.** Скажемо, що матриця  $A(t, \varepsilon) = (a_{jk}(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$  належить до класу  $S_2(m; \varepsilon_0)$ , ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), якщо  $a_{jk} \in S(m; \varepsilon_0)$  ( $j, k = \overline{1, N}$ ).

Визначимо норму:

$$\|A(t, \varepsilon)\|_{S_2(m; \varepsilon_0)} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{k=1}^N \|a_{jk}(t, \varepsilon)\|_{S(m; \varepsilon_0)}.$$

**Означення 4.** Скажемо, що матриця  $B(t, \varepsilon, \theta) = (b_{jk}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}$  належить до класу  $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$  ( $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ), якщо  $b_{jk}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$  ( $j, k = \overline{1, N}$ ).

Визначимо норму

$$\|B(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{k=1}^N \|b_{jk}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}.$$

Очевидно, що якщо  $B_1 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ ,  $B_2 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ , то  $B_1 + B_2, B_1 B_2 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ , і виконано:  $\|B_1 + B_2\| \leq \|B_1\| + \|B_2\|$ ,  $\|B_1 B_2\| \leq 2^m \|B_1\| \cdot \|B_2\|$ .

**3. Постановка задачі.** Розглядається наступна система лінійних матричних рівнянь:

$$\frac{dX_j}{dt} = A_j(t, \varepsilon)X_j + \mu \sum_{k=1}^M B_{jk}(t, \varepsilon, \theta)X_k, \quad j = \overline{1, M}, \quad (2)$$

де  $X_j$  – невідомі квадратні матриці порядку  $N$ ,  $A_j(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon_0)$ ,  $B_{jk}(t, \varepsilon, \theta) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ ,  $\mu \in [0, \mu_0)$  – дійсний параметр.

Шукається перетворення

$$X_j = Y_j + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^M Q_{jk}(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon), \mu)Y_k, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3)$$

де  $Q_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j, k = \overline{1, M}$ ) –  $(N \times N)$ -матриці класів  $F_2(m_1; \varepsilon_1; \theta)$  ( $m_1 \leq m; \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ ), що приводить систему (2) до вигляду

$$\frac{dY_j}{dt} = V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)Y_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (4)$$

де  $V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m_1; \varepsilon_1; \theta)$ .

Для скалярного випадку аналогічну задачу розглянуто у праці [7].

#### 4. Допоміжні результати.

**Лема 1.** Нехай задано скалярне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t, \varepsilon)x + u(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)), \quad (5)$$

де  $\lambda(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$ ,  $\inf_{G(\varepsilon_0)} |\operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon)| = \gamma > 0$ ,  $u(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ . Тоді рівняння (5) має єдиний частинний розв'язок  $x(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ . Цей розв'язок

дається формулою:

$$x(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \int_T^t u(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) \exp \left( \int_{\tau}^t \lambda(s, \varepsilon) ds \right) d\tau, \quad (6)$$

де

$$T = \begin{cases} -\infty, & \operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon) \leq -\gamma < 0, \\ +\infty, & \operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon) \geq \gamma > 0, \end{cases}$$

і, крім того, існує  $K_0 \in (0, +\infty)$  таке, що

$$\|x(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq K_0 \|u(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}. \quad (7)$$

**Доведення.** Припустимо для визначеності, що  $\operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon) \leq -\gamma < 0$ . Тоді

$$x(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \int_{-\infty}^t u(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) \exp \left( \int_{\tau}^t \lambda(s, \varepsilon) ds \right) d\tau. \quad (8)$$

Подамо  $u(t, \varepsilon, \theta)$  у вигляді

$$u(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta),$$

де  $u_n(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$  та

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n(t, \varepsilon)\|_{S(m; \varepsilon)} < +\infty.$$

Тоді одержимо:

$$x(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta),$$

де

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t, \varepsilon)x_n + u_n(t, \varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

$\sigma_n(t, \varepsilon) = \lambda(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)$ , де  $\varphi(t, \varepsilon)$  – функція, що фігурує в означенні класу  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ . Очевидно, що  $\operatorname{Re} \sigma_n(t, \varepsilon) \leq -\gamma < 0$ .

Функція

$$x_n(t, \varepsilon) = \int_{-\infty}^t u_n(\tau, \varepsilon) \exp \left( \int_{\tau}^t \sigma_n(s, \varepsilon) ds \right) d\tau \quad (10)$$

є єдиним, обмеженим на  $\mathbb{R}$ , розв'язком рівняння (9), причому

$$\sup_{G(\varepsilon_0)} |x_n(t, \varepsilon)| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{G(\varepsilon_0)} |u_n(t, \varepsilon)|.$$

Здійсимо в рівнянні (9) підстановку:

$$x_n = x_{n1} - \frac{u_n(t, \varepsilon)}{\sigma_n(t, \varepsilon)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (11)$$

де  $x_{n1} = x_{n1}(t, \varepsilon)$  – нова невідома функція. Одержимо:

$$\frac{dx_{n1}}{dt} = \sigma_n(t, \varepsilon)x_{n1} + \frac{d}{dt} \left( \frac{u_n(t, \varepsilon)}{\sigma_n(t, \varepsilon)} \right), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

І крім того

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t, \varepsilon)x_{n1}(t, \varepsilon). \quad (13)$$

Очевидно, що

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u_n(t, \varepsilon)}{\sigma_n(t, \varepsilon)} \right) = \varepsilon z_n(t, \varepsilon),$$

де  $z_n(t, \varepsilon)$  – обмежена в  $G(\varepsilon_0)$ . Тоді

$$\sup_{G(\varepsilon_0)} |x_{n1}(t, \varepsilon)| \leq \frac{\varepsilon}{\gamma} \sup_{G(\varepsilon_0)} |z_n(t, \varepsilon)|.$$

Отже

$$\frac{dx_n}{dt} = \varepsilon y_{n1}(t, \varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z},$$

причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n1}(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Припустимо за індукцією, що

$$\frac{d^\nu x_n}{dt^\nu} = \varepsilon^\nu y_{n\nu}(t, \varepsilon), \quad \nu = \overline{0, l},$$

причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n\nu}(t, \varepsilon)| < +\infty, \quad \nu = \overline{0, l},$$

і покажемо, що

$$\frac{d^{l+1} x_n}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1} y_{n, l+1}(t, \varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |y_{n, l+1}(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Дійсно, диференцюючи  $l + 1$  разів тотожність (9), дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{l+1} x_n}{dt^{l+1}} \right) &= \sum_{k=0}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k \sigma_n(t, \varepsilon)}{dt^k} \cdot \frac{d^{l+1-k} x_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1-k}} + \frac{d^{l+1} u_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1}} = \\ &= \sigma_n(t, \varepsilon) \frac{d^{l+1} x_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1}} + \sum_{k=1}^{l+1} C_{l+1}^k \frac{d^k \sigma_n(t, \varepsilon)}{dt^k} \cdot \frac{d^{l+1-k} x_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1-k}} + \frac{d^{l+1} u_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1}} = \\ &= \sigma_n(t, \varepsilon) \frac{d^{l+1} x_n(t, \varepsilon)}{dt^{l+1}} + \varepsilon^{l+1} g_{nl}(t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де  $g_{nl}(t, \varepsilon) \in S_{m-l-1}$ , причому

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{G(\varepsilon_0)} |g_{nl}(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Таким чином  $\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}}$  – єдиний, обмежений на  $G(\varepsilon_0)$ , розв’язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = \sigma_n(t, \varepsilon)x + \varepsilon^{l+1}g_{nl}(t, \varepsilon).$$

А тоді

$$\frac{d^{l+1}x_n}{dt^{l+1}} = \varepsilon^{l+1} \int_{-\infty}^t g_{nl}(\tau, \varepsilon) \exp\left(\int_{\tau}^t \sigma_n(s, \varepsilon) ds\right) d\tau,$$

звідки й випливає потрібне.

Випадок  $\operatorname{Re}\lambda(t, \varepsilon) \geq \gamma > 0$  розглядається аналогічно.

**Лема 2.** *Нехай задано систему матричних диференціальних рівнянь*

$$\begin{aligned} \frac{dY_j}{dt} = & D_{j1}(t, \varepsilon)Y_j - Y_j D_{j2}(t, \varepsilon) + \mu F_j(t, \varepsilon, \theta) + \mu \sum_{s=1}^M P_{js1}(t, \varepsilon, \theta) Y_s P_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \\ & - \mu Y_j \sum_{s=1}^M R_{js1}(t, \varepsilon, \theta) Y_s R_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \varepsilon H_{j1}(t, \varepsilon) Y_j - \varepsilon Y_j H_{j2}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $D_{j1}(t, \varepsilon) = (d_{\alpha\beta}^{j1}(t, \varepsilon))_{\alpha, \beta = \overline{1, N}}$ ,  $D_{j2}(t, \varepsilon) = (d_{\alpha\beta}^{j2}(t, \varepsilon))_{\alpha, \beta = \overline{1, N}}$  – нижні трикутні матриці, що належать до класу  $S_2(m; \varepsilon_0)$ ,  $F_j(t, \varepsilon, \theta)$ ,  $P_{js1}(t, \varepsilon, \theta)$ ,  $P_{js2}(t, \varepsilon, \theta)$ ,  $R_{js1}(t, \varepsilon, \theta)$ ,  $R_{js2}(t, \varepsilon, \theta)$  належать до класу  $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ ,  $H_{j1}(t, \varepsilon)$ ,  $H_{j2}(t, \varepsilon)$  належать до класу  $S_2(m-1; \varepsilon_0)$ ,  $\mu \in (0, \mu_0)$  – дійсний параметр. І нехай виконано наступну умову:

$$|\operatorname{Re}(d_{jj}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{kk}^{j2}(t, \varepsilon))| \geq \gamma > 0, \quad j = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (15)$$

Тоді існують  $\mu_2 \in (0, \mu_0)$ ,  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_0)$  такі, що для будь-якого  $\mu \in [0, \mu_2]$  і для будь-якого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  система (14) має єдиний частинний розв’язок  $Y_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j = \overline{1, M}$ ), що належить до класу  $F_2(m-1; \varepsilon_2; \theta)$ .

**Доведення.** Розглянемо спочатку лінійну неоднорідну систему матричних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dY_j^0}{dt} = D_{j1}(t, \varepsilon)Y_j^0 - Y_j^0 D_{j2}(t, \varepsilon) + \mu F_j(t, \varepsilon, \theta), \quad j = \overline{1, M}. \quad (16)$$

Нехай  $Y_j^0 = (y_{j\alpha\beta}^0)_{\alpha, \beta = \overline{1, N}}$ ,  $F_j(t, \varepsilon, \theta) = (f_{j\alpha\beta})_{\alpha, \beta = \overline{1, N}}$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Тоді, розписуючи рівняння (16) у компонентній формі, прийдемо до наступної скалярної лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy_{j1N}^0}{dt} = (d_{11}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{NN}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{j1N}^0 + \mu f_{j1N}(t, \varepsilon, \theta),$$

$$\begin{aligned}
& \dots \\
\frac{dy_{j11}^0}{dt} &= (d_{11}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{11}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{j11}^0 - \sum_{s=2}^N d_{s1}^{j2}(t, \varepsilon) y_{j1s}^0 + \mu f_{j11}(t, \varepsilon, \theta), \\
\frac{dy_{j2N}^0}{dt} &= (d_{22}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{NN}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{j2N}^0 + d_{21}^{j1}(t, \varepsilon) y_{j1N}^0 + \mu f_{j2N}(t, \varepsilon, \theta), \\
& \dots \\
\frac{dy_{j21}^0}{dt} &= (d_{22}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{11}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{j21}^0 + d_{21}^{j1}(t, \varepsilon) y_{j11}^0 - \sum_{s=2}^N d_{s1}^{j2}(t, \varepsilon) y_{j2s}^0 + \mu f_{j21}(t, \varepsilon, \theta), \\
& \dots \\
\frac{dy_{jNN}^0}{dt} &= (d_{NN}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{NN}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{jNN}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^{j1}(t, \varepsilon) y_{jsN}^0 + \mu f_{jNN}(t, \varepsilon, \theta), \\
& \dots \\
\frac{dy_{jN1}^0}{dt} &= (d_{NN}^{j1}(t, \varepsilon) - d_{11}^{j2}(t, \varepsilon)) y_{jN1}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^{j1}(t, \varepsilon) y_{js1}^0 - \\
& - \sum_{s=2}^N d_{s1}^{j2}(t, \varepsilon) y_{jNs}^0 + \mu f_{jN1}(t, \varepsilon, \theta), \quad j = \overline{1, M}. \tag{17}
\end{aligned}$$

На підставі леми 1 з використанням умови (15) переконуємося в тому, що кожне з рівнянь системи (17) має єдиний частинний розв'язок, що належить до класу  $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ . Отже, рівняння (16) має єдиний частинний розв'язок, що належить до класу  $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ , та існує таке  $K_1 \in (0, +\infty)$ , що виконується нерівність:

$$\|Y_j^0(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq \mu K_1 \|F_j(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)}, \quad j = \overline{1, M}. \tag{18}$$

Розв'язок класу  $F_2(m-1; \varepsilon_2; \theta)$  будемо шукати методом послідовних наближень, обираючи в якості початкового наближення  $\|Y_j^0(t, \varepsilon, \theta)\|$  ( $j = \overline{1, M}$ ), а наступні наближення визначаючи як розв'язки класу  $F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$  лінійних систем:

$$\begin{aligned}
\frac{dY_j^{\nu+1}}{dt} &= D_{j1}(t, \varepsilon) Y_j^{\nu+1} - Y_j^{\nu+1} D_{j2}(t, \varepsilon) + \mu F_j(t, \varepsilon, \theta) + \mu \sum_{s=1}^M P_{js1}(t, \varepsilon, \theta) Y_s^\nu P_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \\
& - \mu Y_j^\nu \sum_{s=1}^M R_{js1}(t, \varepsilon, \theta) Y_s^\nu R_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \varepsilon H_{j1}(t, \varepsilon) Y_j^\nu - \varepsilon Y_j^\nu H_{j2}(t, \varepsilon), \\
& j = \overline{1, M}; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \tag{19}
\end{aligned}$$

Визначимо область:

$$\Omega = \left\{ Y_j \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta); \|Y_j(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq d; j = \overline{1, M} \right\}.$$

Покажемо, що для достатньо малих значень параметрів  $\mu$  і  $\varepsilon$  всі наближення  $Y_j^\nu$  ( $j = \overline{1, M}$ ;  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) залишаються всередині області  $\Omega$ . Початкове наближення за умови

$$\mu K_1 \|F_j(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} < d_0 \leq d,$$

очевидно, належить  $\Omega$ .

Припустимо за індукцією, що  $Y_j^\nu(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in \Omega$ , тобто

$$\|Y_j^\nu(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} < d_0 \leq d \quad (j = \overline{1, M}).$$

Позначимо:

$$F = \max_{1 \leq j \leq M} \|F_j(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)},$$

$$P = \max \left( \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq s \leq M} \|P_{js1}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon; 0; \theta)}, \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq s \leq M} \|P_{js2}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon; 0; \theta)} \right),$$

$$R = \max \left( \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq s \leq M} \|R_{js1}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon; 0; \theta)}, \max_{1 \leq j \leq M} \max_{1 \leq s \leq M} \|R_{js2}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon; 0; \theta)} \right),$$

$$H = \max \left( \max_{1 \leq j \leq M} \|H_{j1}(t, \varepsilon)\|_{S_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}, \max_{1 \leq j \leq M} \|H_{j2}(t, \varepsilon)\|_{S_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right).$$

Тоді

$$\|Y_j^{\nu+1}(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq \mu K_1 (F + 2^{2m} H^2 M d + 2^{3m} R^2 M d^2) + \varepsilon 2^m H d. \quad (20)$$

Очевидно, що існують  $\mu_1 \leq \mu_0$ ,  $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ , що для будь-яких  $\mu \in [0, \mu_1]$  і для будь-яких  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  права частина нерівності (20) буде менше, ніж  $d_0 \leq d$ . Тоді для цих значень  $\mu$  і  $\varepsilon$  наближення  $Y_j^{\nu+1}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) належить області  $\Omega$ . Таким чином, методом математичної індукції встановлено, що всі наближення  $Y_j^\nu(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j = \overline{1, M}$ ;  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) залишаються всередині області  $\Omega$ .

Доведемо тепер збіжність процесу (19) за нормою  $\|\cdot\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d(Y_j^{\nu+1} - Y_j^\nu)}{dt} &= D_{j1}(t, \varepsilon)(Y_j^{\nu+1} - Y_j^\nu) - (Y_j^{\nu+1} - Y_j^\nu)D_{j2}(t, \varepsilon) + \\ &+ \mu \sum_{s=1}^M P_{js1}(t, \varepsilon, \theta)(Y_s^\nu - Y_s^{\nu-1})P_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \mu Y_j^\nu \sum_{s=1}^M R_{js1}(t, \varepsilon, \theta)(Y_s^\nu - Y_s^{\nu-1})R_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \\ &- \mu(Y_j^\nu - Y_j^{\nu-1}) \sum_{s=1}^M R_{js1}(t, \varepsilon, \theta)Y_s^{\nu-1}R_{js2}(t, \varepsilon, \theta) - \\ &- \varepsilon H_{j1}(t, \varepsilon)(Y_j^\nu - Y_j^{\nu-1}) - \varepsilon(Y_j^\nu - Y_j^{\nu-1})H_{j2}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, M}, \quad \nu = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Позначимо

$$\delta_\nu = \max_{1 \leq j \leq M} \|Y_j^{\nu+1} - Y_j^\nu\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}.$$

Тоді отримуємо:

$$\delta_\nu \leq \mu K_1 (2^{2m} P^2 M \delta_{\nu-1} + 2^{3m+1} M R^2 d \delta_{\nu-1}) + \varepsilon H 2^{m+1} \delta_{\nu-1}. \quad (22)$$

Очевидно, що існують такі  $\mu_2 \leq \mu_1$ ,  $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$ , що для будь-яких  $\mu \in [0, \mu_2)$  і для будь-яких  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$  права частина нарівності (22) буде менше, ніж  $q_0 \delta_{\nu-1}$ , де  $0 < q_0 < 1$ . Отже:

$$\delta_\nu \leq q_0 \delta_{\nu-1}, \quad 0 < q_0 < 1. \quad (23)$$

Тим самим доведено збіжність процесу (19). Очевидно, що граничні функції  $Y_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) належать до класу  $F_2(m-1; \varepsilon_2; \theta)$ .

Лемі 2 доведено.

Повернемось тепер до системи (2) і здійснимо в ній перетворення (3). Відносно невідомих функцій  $Q_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j, k = \overline{1, M}$ ) отримаємо систему:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{jk}}{dt} = & A_j(t, \varepsilon)Q_{jk} - Q_{jk}A_k(t, \varepsilon) + \mu(B_{jj}(t, \varepsilon, \theta)Q_{jk} - Q_{jk}B_{kk}(t, \varepsilon, \theta)) + \mu B_{jk}(t, \varepsilon, \theta) + \\ & + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq j, s \neq k)}}^M B_{js}(t, \varepsilon, \theta)Q_{sk} - \mu Q_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq k)}}^M B_{ks}(t, \varepsilon, \theta)Q_{sk}, \quad j, k = \overline{1, M} \quad (j \neq k). \end{aligned} \quad (24)$$

При цьому для матриць  $V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) дістанемо:

$$V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \mu B_{jj}(t, \varepsilon, \theta) + A_j(t, \varepsilon) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq j)}}^M B_{js}(t, \varepsilon, \theta)Q_{sj}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (25)$$

**Лема 3.** Нехай матриці  $A_j(t, \varepsilon)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) в системі (24) такі, що існують матриці  $L_j(t, \varepsilon)$  ( $j = \overline{1, M}$ ), що задовольняють наступні умови:

- 1)  $L_j(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon)$  ( $j = \overline{1, M}$ ),
- 2)  $|\det L_j(t, \varepsilon)| \geq a_0 > 0$  ( $j = \overline{1, M}$ ),
- 3)  $L_j^{-1}(t, \varepsilon)A_j(t, \varepsilon)L_j(t, \varepsilon) = \Delta_j(t, \varepsilon)$  ( $j = \overline{1, M}$ ), де  $\Delta_j(t, \varepsilon)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) – нижні трикутні матриці  $N$ -го порядку, що належать до класу  $S_2(m; \varepsilon_0)$ .

Тоді підстановкою

$$Q_{jk} = L_j(t, \varepsilon)Y_{jk}L_k^{-1}(t, \varepsilon) \quad (j, k = \overline{1, M}, j \neq k) \quad (26)$$

система (24) приводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dY_{jk}}{dt} = & \Delta_j(t, \varepsilon)Y_{jk} - Y_{jk}\Delta_k(t, \varepsilon) - L_j^{-1}(t, \varepsilon)\frac{dL_j(t, \varepsilon)}{dt}Y_{jk} + Y_{jk}L_k^{-1}(t, \varepsilon)\frac{dL_k(t, \varepsilon)}{dt} + \\ & + \mu \left( L_j^{-1}(t, \varepsilon)B_{jj}(t, \varepsilon, \theta)L_j(t, \varepsilon)Y_{jk} - Y_{jk}L_k^{-1}(t, \varepsilon)B_{kk}(t, \varepsilon, \theta)L_k(t, \varepsilon) \right) + \\ & + \mu L_j^{-1}(t, \varepsilon)B_{jk}(t, \varepsilon, \theta)L_k(t, \varepsilon) + \mu \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq j, s \neq k)}}^M L_j^{-1}(t, \varepsilon)B_{js}(t, \varepsilon, \theta)Y_{sk} - \\ & - \mu Y_{jk} \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq k)}}^M L_k^{-1}(t, \varepsilon)B_{ks}(t, \varepsilon, \theta)L_s(t, \varepsilon)Y_{sk}, \quad j, k = \overline{1, M} \quad (j \neq k). \end{aligned} \quad (27)$$

**Доведення.** Щоб переконатися в справедливості лемі 3, достатньо в системі (24) здійснити підстановку (26) і використати умови лемі.

**5. Основний результат.** Легко бачити, що система (27) розпадається на  $M$  незалежних підсистем  $(M - 1)$ -го порядку, кожна з яких має вигляд (14). Тому справедлива наступна теорема

**Теорема 1.** *Нехай система (24) задовольняє умови лемми 3, а система (27), що отримується з неї за допомогою перетворення (26), при кожному  $k = \overline{1, M}$  задовольняє всі умови лемми 2. Тоді існують  $\mu^* \in (0, \mu_0)$ ,  $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$  такі, що для будь-яких  $\mu \in [0, \mu^*)$  і для будь-яких  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  існує перетворення вигляду (3), в якому коефіцієнти  $Q_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu)$  ( $j, k = \overline{1, M}$ ,  $j \neq k$ ) належать до класу  $F_2(t - 1; \varepsilon^*; \theta)$ , що приводить систему (2) до вигляду (3), де  $V_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(t - 1; \varepsilon^*; \theta)$  ( $j = \overline{1, M}$ ) визначаються формулами (25).*

### Список використаної літератури

1. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential equations*. 2001. V. 37, № 4. P. 464–471.
2. Чуйко С. М. Элементы теории линейных матричных уравнений: монография. Славянск, 2017. 163 с.
3. Чуйко С. М. О решении обобщённого матричного уравнения Сильвестра. Чебышевский сборник. 2015. Т. 16. Вып. 1. С. 52–66.
4. Luis Verde-Star On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics*. 2007. 39. P. 329–344.
5. Бари Н. К. Тригонометрические ряды: монография. Москва, Физматгиз. 1961. 935 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: монография. Москва, Наука. 1972. 496 с.
7. Шёголев С.А. Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Крайові задачі для дифер. рівнянь. 1999. Чернівецький держ. ун-т ім. Ю. Федьковича. Вип. 4. С. 213-220.

**Shchogolev S. A., Karapetrov V. V.** Block separation of the system of the linear matrix differential equations.

In the mathematical description of various phenomena and processes that arise in mathematical physics, electrical engineering, economics, one has to deal with matrix differential equations. Therefore, these equations are relevant both for mathematicians and for specialists in other areas of natural science. This article considers a system of  $M$  linear matrix differential equations with coefficients representable as Fourier series with coefficients and frequency slowly varying in a certain sense (class  $F$ ), and this system is close to a block-diagonal system with slowly varying coefficients. A transformation with coefficients of a similar type is sought, which leads this system to a purely block-diagonal form. With respect to the coefficients of this transformation, a quasilinear system of matrix differential equations is obtained, which decomposes into  $M$  independent subsystems, each of which has the form of some auxiliary nonlinear system. For this auxiliary system, by the method of successive approximations, conditions are obtained for the existence of class  $F$  for its solutions, and then, on the basis of this result, conditions for the existence of the desired transformation are obtained.

**Keywords:** Matrix differential equations, Fourier series, slowly varying parameters.

### References

1. Boichuk, A. A., & Krivosheya, S. A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential equations*, 37(4), 464–471.
2. Chuiko, S. M. (2017). Elementy teorii lineynyih matrichnyh uravneniy [Elements of the theory of linear matrix equations], Slavyansk.
3. Chuiko, S. M. (2015). O reshenii obobshchyonnogo matrichnogo uravneniya Silvestra [On the solutions of the generalized matrix equations of Sylvestr]. *Chebyshevsky sbornik*, 16(1), 52–66.



4. Luis Verde-Star. (2007). On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics*, 39, 329–344.
5. Bari, N. K. (1961). Trigonometrichskye ryady [Trigonometric series], Moskva: Fizmatgiz.
6. Kolmogorov, A. N, & Fomin, S. V. (1972). *Funktionalnyi analiz* [Functional analysis], Moskva: Nauka.
7. Shchogolev, S. A. (1999). Ob odnom varyante teoremy polnogo razdeleniya lineynoy odnorodnoy systemy differentsialnyh uravneniy [On one variant of the theorem of the full separation of the linear homogeneous system of the differential equations]. *Krayovi zadachi dlya differentsialnyh rivnyany*, 4, 213–220.

Одержано 10.03.2021

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).105-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).105-113)**С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Ю. П. Глухов<sup>2</sup>, В. Ф. Лазар<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
провідний науковий співробітник,  
професор, доктор технічних наук  
[babich\\_sy@ukr.net](mailto:babich_sy@ukr.net)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

<sup>2</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,  
старший науковий співробітник,  
кандидат фізико-математичних наук  
[gluchov.uriy@gmail.com](mailto:gluchov.uriy@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

<sup>3</sup> Мукачівський державний університет,  
доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,  
кандидат технічних наук  
[vflazar@gmail.com](mailto:vflazar@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

## ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 1. ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ РЕЛЕЯ ВЗДОВЖ КРИВОЛІНІЙНИХ ГРАНИЦЬ (ЦИЛІНДР, СФЕРА) ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ТІЛ

Присвячується 55 річчю математичного факультету УжНУ

Дана стаття присвячена дослідженню розповсюдження поверхневих хвиль Релея вздовж криволінійних границь попередньо напружених тіл. Розглядаються два типи циліндрів, а саме: суцільний нескінченно довгий циліндр кругового поперечного перерізу радіуса  $R$  і такий же циліндр з порожниною. Дослідження проведені у випадку двох видів навантаження, а саме: для осьового стиску і все сторонньої рівномірної початкової деформації тіл. Причому у випадку циліндрів поверхнева хвиля розповсюджується вздовж циліндричної поверхні у напрямі кругової координати  $\theta$ .

Отримані дисперсійні рівняння, які дають можливість знайти фазові швидкості поверхневих хвиль Релея. При великих значеннях хвильового числа  $p$ , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола асимптотичного характеру.

Чисельні результати проведені, коли циліндр завантажений у напрямі осі  $Ox_3$ . На основі одержаних чисельних розрахунків одержані кількісні і якісні результати впливу початкових напружень на фазову швидкість поверхневих хвиль Релея. Зокрема, при конкретній частоті швидкість поверхневої хвилі Релея лінійно залежить від початкових напружень в рамках прийнятої точності обчислень.

Одержані результати можуть бути використані при розробці фізичних основ ультразвукових не руйнуючих методів визначення напружень стиску у при поверхневих шарах тіла.

**Ключові слова:** контактні напруження, комплексні потенціали, фазові швидкості, жорсткі штампи, рухомі навантаження, хвилі Релея, напружено-деформований стан.

**1. Вступ.** Даний цикл робіт «Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями» складається з трьох окремих статей, а саме: 1) Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних границь (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл; 2) Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з

початковими напруженнями ; 3) Динамічні задачі у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень.

Велику увагу в роботі приділено дослідженню закономірностей розповсюдження пружних поверхневих хвиль Релея вздовж плоских і криволінійних границь тіл з початковими (залишковими) напруженнями. Останні дослідження тісно пов'язані з контактними задачами (для встановлення явищ "резонансного характеру"). Крім того, такі дослідження мають і самостійне значення. Зокрема, для розробки не руйнуючих методів визначення початкових напружень у при поверхневих шарах попередньо напружених тіл. Причому результати другої статті одержані на основі комплексних потенціалів, введених академіком НАН України Гузем О. М. і одним з авторів даної роботи. Одержані якісні і кількісні ефекти впливу початкових (залишкових) напружень на характер хвильових процесів і на основні характеристики контактної взаємодії. Для даної роботи характерним і загальним є те, що: по-перше, всі основні розглянуті тіла - пружні; по друге, усі основи (тіла) – попередньо напружені.

Актуальність таких досліджень не повинна викликати сумнівів, оскільки початкові напруження практично присутні у всіх елементах сучасних конструкцій. Як відомо, природа виникнення початкових напружень має довільну структуру. Так, наприклад, вони можуть виникнути внаслідок технологічних операцій при виготовленні сучасних конструкційних матеріалів і машин. Внутрішні напруження, які можна розглядати як початкові в елементах конструкцій і деталях машин впливають на міцнісні характеристики матеріалів, змінюють динамічні характеристики конструкцій. Особливо значно впливають залишкові напруження на міцнісні характеристики матеріалів наряду з низькою температурою, агресивністю середовищ (в металургійній, хімічній і в нафтопереробній промисловості) і різноманітними концентраторами. Вони значно понижують міцність матеріалів, їх стійкість, впливають на перехід металу в хрупкий стан. Разом з вивченням негативного впливу залишкових напружень в останні роки розробляються методи, які дозволяють використовувати початкові напруження для підвищення довговічності і надійності металоконструкцій і деталей машин.

Необхідно зазначити, що результати даних досліджень на протязі багатьох років проводились в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України під керівництвом академіка Гудзь А. Н. і частково на кафедрі машинобудування, природничих наук та інформаційних технологій Мукачівського державного університету і належить авторам даної роботи. Також необхідно зазначити, що за результатами даного циклу робіт одним із авторів отримано Державну премію України в галузі науки і техніки (2016р.), а також премію ім. Динника О. М. НАН України (2019р.)

У даній статті у достатньо загальній формі досліджені закономірності розповсюдження поверхневих гармонічних пружних хвиль Релея вздовж криволінійних границь (круговий циліндр, циліндрична порожнина у нескінченному тілі і сфера) з початковими напруженнями. Основні результати досліджень наведені в працях [1-4].

**2. Постановка задачі і основні співвідношення.** Під поверхневими гармонічними хвилями у пружних тілах з початковими напруженнями будемо розуміти гармонічні хвилі, які задовольняють наступним двом умовам: по перше, хвилі розповсюджуються вздовж вільної або невольної поверхні і її амплітудні

величини затухають при віддаленні від вільної поверхні (ця умова аналогічна умовам лінійної класичної теорії пружності), по друге, у випадку відсутності початкових напружень, розглядувані поверхневі хвилі переходять у поверхневі хвилі класичної лінійної (без початкових напружень) теорії пружності.

Дослідження розповсюдження пружних хвиль у попередньо напружених тілах дають можливість розв'язати дві задачі. Перша задача полягає у визначенні пружних модулів третього порядку, які використовуються у фізиці твердого тіла, а друга – дослідити розподіл напружень. Розроблені неруйнуючі методи визначення початкових напружень на основі закономірностей розповсюдження пружних хвиль у нескінченних тілах не дають можливостей визначення початкового напруженого стану у приповерхневих шарах. У зв'язку з цим виникає теоретична і практична зацікавленість дослідження поширення поверхневих хвиль Релея для попередньо напружених тіл з криволінійними границями. При проведенні числових розрахунків використовувались експериментальні дані, одержані в Інституті електрозварювання НАН України [6]. Необхідно зазначити, що у випадку тільки попереднього осевого стиску суцільного циліндра дисперсійне рівняння може бути одержане на основі аналогії, яка існує між лінійними і лінеаризованими задачами теорії пружності. У роботі встановлені необхідні і достатні умови існування такої аналогії. У загальному випадку (для довільних початкових станів) не існує аналогії між лінійними і лінеаризованими задачами теорії пружності. Для частинних випадків однорідного початкового стану такі аналогії існують. Встановлені аналогії дають можливість використати відомі розв'язки лінійних задач, зробивши відповідні заміни.

Як уже зазначалось вище для кругового суцільного циліндру така аналогія існує у випадку осевого стиску. У загальному випадку (для довільних навантажень  $P_m$ ), наприклад, для “мертвих” навантажень ( $P_m = 0$ ) всесторонньої рівномірної початкової деформації лінеаризовані задачі не зводяться до лінійних задач, коли постійні Ляме залежать від початкових деформацій, оскільки в граничних умовах в напруженнях з'являється додатковий член з множником  $\sigma_0^*$ . Причому рівняння руху зводяться до рівнянь Ляме. Для конкретного випадку, коли поверхневе навантаження діє в напрямку нормалі до граничної поверхні і не змінює напрямку (завжди направлене по нормалі) і величину при деформації, тобто маємо випадок “слідкувального” навантаження, то граничні умови лінеаризованої задачі зводяться до лінійних граничних умов. У роботі розглянемо нескінченний циліндр кругового поперечного перерізу при такому, у загальному випадку, початковому напружено-деформованому осесиметричному стані:

$$(\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = 0, \sigma_{33}^{*0} = -p_3^* = const), \lambda_1 \equiv \lambda_2; \lambda_3 \neq 0. \quad (1)$$

Для осесиметричного навантаження буде виникати осесиметричний початковий напружено-деформований стан (1) тільки у тому випадку, коли тіло є ізотропним або трансверсально - ізотропним, причому у останньому випадку вісь ізотропії повинна співпадати з віссю  $Ox_3$ ; надалі будемо приймати дані умови відносно властивостей матеріалу циліндра.

Розглядається циліндр кругового поперечного перерізу радіуса  $R$  у недеформованому стані. Дослідимо задачу про розповсюдження поверхневих хвиль Релея на циліндричній поверхні, тобто побудуємо точні розв'язки лінеаризованих рівнянь теорії пружності [4], які задовольняють умовам відсутності збурень

поверхневих хвиль на циліндричній поверхні. Нехай вздовж циліндричної поверхні у напрямі кругової координати  $\theta$  поширюється поверхнева хвиля. Крім цього, припустимо, що залежність розв'язку від координати  $\theta$  дається множителем  $e^{+ip\theta}$ , де  $p$  – безрозмірне кутове хвильове число. Будемо розглядувати тільки такі поверхневі хвилі, які при прямуванні радіуса кривизни циліндричної поверхні  $R$  до нескінченості і скінченому відношенні  $P/R$ , переходять у релеєві хвилі, які розповсюджуються вздовж плоскої границі пружного півпростору.

Як звичайно хвильове поле вважається залежним від часу за законом  $e^{-i\omega t}$ , тобто розглядаємо гармонічне коливання. Розглядаючи розв'язки лінеаризованих рівнянь руху [1] у рамках теорії скінчених початкових деформацій у нескінченному інтервалі  $-\infty < \theta < \infty$ , вважаємо, що для поверхневої хвилі, яка розповсюджується в напрямі кругової координати  $\theta$ ,  $p$  може приймати і цілі, і дробові значення.

Дослідження розповсюдження поверхневих хвиль проведемо для нескінченно довгого суцільного циліндра і циліндричної порожнини у нескінченно пружному середовищі, які виготовлені із стисливого матеріалу. При зроблених вище припущеннях у задачі для суцільного циліндра приймаємо, щоб розв'язок був обмеженим для  $r = 0$ , а у випадку циліндричної порожнини – задовольняв принципу затухання у всій області  $r \gg R$ . Така постановка задачі відповідає послідовним розповсюдженням поверхневої хвилі вздовж циліндра.

**3. Метод розв'язку.** Для суцільного циліндра кругового поперечного перерізу розв'язки хвильових рівнянь

$$\begin{cases} \left( \Delta - \frac{\rho}{a_{11}\lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi_1 = 0 \\ \left( \Delta - \frac{\rho}{\mu_{12}\lambda_1^2 + \sigma_{11}^{*0}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{\Psi} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

можна побудувати у циліндричній круговій, еліптичній і параболічній системі координат і, відповідно, одержати частинні (дисперсійні) рівняння. Причому, у випадку еліптичної і параболічної системах координат одержання дисперсійних рівнянь пов'язано з великими труднощами, оскільки при одержанні таких рівнянь прийдеться мати справу з визначниками нескінчених порядків.

Таким чином, розв'язки хвильових рівнянь (2), які при  $r = 0$ , будуть обмежені, згідно [1] можна зобразити у формі

$$\Phi_1 = Ae^{ip\theta} I_p(\xi_1 r); \bar{\Psi} = Be^{ip\theta} I_p(\xi_2 r). \quad (3)$$

Тут введені наступні позначення:  $p = 2\pi R/\Lambda = kR$  – безрозмірне кутове хвильове число;  $J_p(\xi_i r)$ ; ( $i = 1, 2$ ) функції Бесселя першого роду;  $A$  і  $B$  – довільні постійні. Величини  $\Lambda$  і  $k$  є, відповідно довжина хвилі і хвильове число.

Розв'язки (3) повинні задовольняти граничним умовам, які для кругового циліндра у випадку, коли на поверхні циліндра відсутні збурення  $p_r^* = p_s^* = 0$  мають вигляд [3]

$$\begin{cases} [\lambda_1^2 (u_{11} + \sigma_{11}^{*0} \lambda_1^{-2}) u_{r,r} + \lambda_1^2 u_{12} (\frac{1}{r} u_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} u_r)] |_{r=R} = 0 \\ \lambda_1^2 \mu_{12} [(1 + \sigma_{11}^{*0} \lambda_1^{-2} \mu_{12}^{-1}) u_{\theta,r} + \frac{1}{r} u_{r,\theta} - \frac{1}{r} u_{\theta}] |_{r=R} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Розглянемо випадок, коли початковий напружений стан циліндра визначається умовами (1), тобто циліндр завантажений в напрямку осі  $OX_3$ , задовольняють граничні умови (4) з врахуванням (1) після звичайної процедури одержимо

дисперсійне рівняння у такому вигляді:

$$a_2 \left[ \frac{2}{y} \left( 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) + a_3 x \right] \frac{I_{p+1}(v)}{I_p(v)} + 2a_4 \left[ \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) - \frac{x}{B_1 \lambda_1^2} \right] \frac{I_{p+1}(w)}{I_p(w)} - 2a_2 a_4 \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \frac{I_{p+1}(v)}{I_p(v)} \frac{I_{p+1}(w)}{I_p(w)} - \frac{x}{B_1} \left[ \frac{1}{y} (a_3 B_1 - 2da_1) \cdot x \left( 1 - \frac{x}{y} \right) - da_1 a_3 x \right] = 0 \quad (5)$$

Тут  $x = k_t R$ ,  $a_1 = \frac{\mu}{a_{11} \lambda_1^2}$ ,  $a_2 = \sqrt{a_1}$ ,  $a_3 = \frac{\mu}{\mu_{11} \lambda_1^2}$ ,  $a_4 = \sqrt{a_3}$ ,  $b_1 = \frac{a_{12} - a_{11}}{\mu}$ ,  $d = \frac{a_{11}}{\mu}$ ,  $v = a_2 x$ ,  $w = a_4 x$ ,  $c = \frac{\omega}{k}$  – фазова швидкість поверхневої хвилі,  $c_t$  – швидкість хвилі зсуву у не навантаженому циліндрі,  $y = \frac{c}{c_t}$ ,  $p = \frac{x}{y}$ .

Як частинний випадок із виразу (5) маємо дисперсійне рівняння для швидкості хвилі Релея у півпросторі з початковими напруженнями, коли  $p \rightarrow \infty$ . Отже, дисперсійне рівняння для півпростору з початковими напруженнями має такий вигляд:

$$\eta_R^6 - 8 \frac{\mu_{12}}{\mu} \lambda_1^2 \eta_R^4 + 8 \frac{\mu_{12}^2}{\mu^2} \lambda_1^4 \left( 3 - 2 \frac{\mu_{12}}{a_{11}} \right) \eta_R^2 - 16 \frac{\mu_{12}^3}{\mu^3} \lambda_1^6 \left( 1 - \frac{\mu_{12}}{a_{11}} \right) = 0, \quad (6)$$

де  $\eta_R = \frac{c_R}{c_t}$ ,  $c_R$  – швидкість хвилі Релея в напруженому тілі з плоскою границею. Величини  $a_{12}$ ,  $\mu_{12}$  визначаються із виразів (4).

Таким чином, досліджуючи вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль у циліндрі необхідно безпосередньо зв'язати чисельно частотне (дисперсійне) рівняння (5). При великих значеннях хвильового числа  $p$ , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола, для фазової швидкості одержані результати асимптотичного характеру. Аналогічно суцільному циліндру у роботі розглянуто циліндричну порожнину кругового поперечного перерізу в нескінченному пружному просторі. Чисельні результати проведені, коли циліндр навантажений у напрямі осі  $OX_3$ . У рамках потенціалу Мурнагана на основі чисельних розрахунків досліджено вплив початкових напружень на фазові швидкості поверхневих хвиль, які розповсюджуються вздовж циліндричної поверхні. Аналогічно циліндру у даній статті в рамках теорії великих початкових деформацій досліджена задача розповсюдження поверхневих хвиль Релея на сфері при всесторонній рівномірній початковій деформації. Дослідження проведені у випадку двох типів навантаження: «слідкувального» і «мертвого». Задача розв'язана методом шарових векторів причому для «слідкувального» навантаження дисперсійне рівняння на основі аналогії, яка існує між лінійними і лінеаризованими задачами. Оскільки сферична поверхня обмежена, то як і у випадку відсутності початкових напружень вважаємо [7], що в полюсах сфери  $\theta = 0$  і  $\theta = \pi$  ( $r, \theta, \varphi$  – сферичні координати) розміщені «джерело» і «стік» хвиль, які відповідають особливим точкам розв'язків рівнянь. Така постановка задачі дає можливість вважати «джерело» і «стік» хвиль еквівалентними один одному. При зроблених допущеннях хвилі розповсюджуються від полюсів з однаковими амплітудами в « $+\theta$ » і « $-\theta$ » напрямках. У результаті накладання розповсюджуваних таким чином хвиль, дістаємо стоячі хвилі, регулярні у всіх точках сфери. Зауважимо, що у випадку півпростору «джерело» і «стік» хвиль знаходились на нескінченності. У роботі доведено, що для великих значень  $l$ , що відповідає коротким хвилям у порівнянні з довжиною кола, фазова швидкість поверхневих хвиль Релея на сфері незначно

відрізняється від швидкості хвиль Релея у півпросторі. У цьому випадку має місце вираз  $c = c_R(1 + \delta)$ . Тут  $\delta$  мала величина, яка залежить від пружних властивостей середовища, початкових напружень,  $R$  і  $l$ , причому  $\delta \rightarrow 0$ , коли  $e \rightarrow \infty$ ;  $c_R$  – швидкість хвилі Релея у завантаженому тілі з плоскою границею;  $c$  – фазова швидкість поверхневої хвилі на сфері. Аналогічно циліндру [8] дисперсійні рівняння відповідно для: «слідкувального» і «мертвого» навантажень одержані у випадку потенціалу довільної форми. У роботі доведено, що тільки врахування залежності пружного потенціалу від усіх трьох інваріантів тензору деформацій Гріна дозволяє пояснити експериментально встановлені закономірності розповсюдження пружних хвиль у ізотропному тілі з початковими напруженнями. Вплив початкових напружень на фазові швидкості поверхневих хвиль досліджений у рамках потенціалу Мурнагана, залежно від трьох алгебраїчних інваріантів  $A_1, A_2, A_3$  тензору деформацій Гріна. Розглянуто випадок досить жорстких матеріалів, коли у формулах для визначення  $a_0, b_0, \lambda_1^2$  можна обмежитись лінійними наближеннями  $\sigma_0^*/\mu$ . Числові значення постійних третього порядку  $a, b, c$  і параметрів  $\lambda, \mu$  відповідають сталі марки 09Г2С [6]. В роботі [2] побудовані графіки залежності  $c_0/c_t$  від безрозмірної частоти  $k_t R$  причому  $c_0$  – фазова швидкість поверхневої хвилі Релея у ненавантаженої сфері, а  $c_e$  – швидкість хвилі зсуву.

Необхідно зазначити, що вперше розповсюдження поверхневих хвиль Релея для півпростору з початковими напруженнями (плоский випадок) було розглянуто в роботі [9]. В [10] цим же автором досліджено вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль у нескінченно довгому циліндрі із нестисливого матеріалу. Грунтовний огляд результатів для пружних хвиль (в тому числі для тіл з початковими напруженнями приведений у монографії [11]). І зовсім недавно (2019р.) опублікована стаття [12], в якій також досліджені деякі питання розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями (циліндр, сфера). Грунтовний огляд результатів для пружних хвиль (у тому числі і поверхневих) для тіл з початковими напруженнями наведений у монографії [12]. І на кінець відмітимо, що деякі результати, які стосуються розповсюдження поверхневих хвиль Релея для попередньо напружених тіл були одержані зарубіжними вченими [13-15]. Так, в [13] досліджено розповсюдження релеєвських хвиль в півпросторі з однорідними початковими напруженнями. В роботі [14] досліджується розповсюдження термопружних релеєвських хвиль, а в [15] – розповсюдження поверхневих хвиль Релея в матеріалі з пружними потенціалами Муні.

Слід зауважити, що усі наведені в даній роботі результати одержані у загальному вигляді для стисливих і нестисливих тіл для довільної структури пружного потенціалу. Такий підхід на наш погляд має деякі переваги у порівнянні з дослідженнями для конкретних видів пружного потенціалу [13-15]. Таким чином, у даній праці дослідження багато чисельних динамічних задач проведені в єдиній загальній формі для стисливих і нестисливих попередньо напружених тіл для довільної структури пружного потенціалу. І тільки на завершальній стадії досліджень для одержання числових результатів використовувались конкретні пружні потенціали. Необхідно зазначити, що у випадку відсутності початкових напружень аналогічні дослідження для циліндра і циліндричної порожнини у нескінченному тілі вперше було вивчено у роботах Вікторова І.О. Ним же були

розроблені фізичні основи застосування ультразвукових хвиль Релея і Лемба в техніці. Задача Релея для поверхневих хвиль у випадку сфери для тіл без початкових напружень також вперше досліджені Петрашенем Г.І. І на кінець, зазначимо, що одержані в даній роботі результати для тіл без початкових напружень повністю співпадають із вказаними вище роботами.

На основі чисельних розв'язків дисперсійних рівнянь в широкому діапазоні зміни частот для конкретних матеріалів можна зробити наступні висновки кількісного і якісного характеру.

#### 4. Висновки та перспективи подальших досліджень.

- 1) Початкові напруження значно впливають на фазові швидкості розповсюдження поверхневих хвиль Релея, причому цей вплив більш суттєвий для нестисливих тіл у порівнянні з стисливими тілами.
- 2) Початкові напруження більше впливають на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея у тому випадку, коли напрям поширення хвилі і напрям прикладених сил співпадають.
- 3) Для сфери початкові напруження більш суттєво впливають на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея, ніж на циліндрах одного і того ж радіусів.
- 4) При конкретній частоті швидкість поверхневої хвилі Релея лінійно залежить від початкових напружень в рамках прийнятих точностей обчислень.
- 5) Початкові напруження більше впливають на фазову швидкість поверхневих хвиль Релея для “слідкувального” навантаження ніж у випадку “мертвого” навантаження.
- 6) Вплив початкових напружень на швидкість розповсюдження поверхневих хвиль Релея на циліндричній поверхні більший, ніж у відповідному випадку плоскої границі.
- 7) Коли радіус кривизни циліндричної поверхні прямує до нескінченості, відношення фазових швидкостей поверхневої і релеєвської хвилі дорівнює одиниці.
- 8) Із усіх мод поверхневих хвиль перша мода прямує до релеєвської (плоский випадок) хвилі значно швидше інших.

Одержані результати можуть бути використані для визначення впливу початкових напружень на швидкості розповсюдження поверхневих хвиль у попередньо напружених тілах, а також при розробці фізичних основ ультразвукових не руйнуючих методів визначення напруженого стану у при поверхневих шарах тіла.

#### Список використаної літератури

1. Бабич С. Ю. О распространении поверхностных волн в предварительно напряженном цилиндре. *Прикладная механика*. 1976. 12, №6. С. 123-126.
2. Бабич С. Ю. К вопросу распространения поверхностных волн в предварительно напряженной сфере. *Прикладная механика*. 1978. 14, №9. С. 125-128.
3. Бабич С. Ю., Гузь А. Н., Жук А. П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. *Прикладная механика*. 1979. 15, №4. С. 3-23.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг, “*Press-line*”. 2007. 795 с.
5. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Вісесиметричні хвилі у високо еластичному композиційному матеріалі з початковими напруженнями. Довгохвильове наближення. *Прикладна механіка*. 2021. т.57,№2. с.3-12.



6. Гузь А. Н., Махор Ф. Г., Гуц О. Н. Введение в акустоупругость. Киев, Наук. Думка, 1977. 151с.
7. Петрашень Г. И. Задача Релея для поверхностных волн в случае сферы. ДАН СССР. 1946. т.52, №3, с.763-766.
8. Викторов Н. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Релея и Лэмба в технике. М, 1966. 166с.
9. Махорт Ф. Г. К теории распространения поверхностных волн в упругом теле с начальными напряжениями. *Прикладная математика*. 1971. т.7, №3. с.34-40.
10. Махорт Ф. Г. О влиянии начальных напряжений на скорости распространения поверхностных волн в бесконечно длинном цилиндре из несжимаемого материала. ДАН УРСР, 1974. сер. А, №4. с. 328-330(укр.).
11. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: "А.С. У". 2004.-672с.
12. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Корнієнко В. Ф. До задачі розповсюдження поверхневих хвиль Релея в попередньо напружених тілах з криволінійними границями. *Доповіді НАН України*. 2019. №10. с 21-28.
13. Хейц М., Ривлин Р. Распространение волн в изотропном, находящемся в состоянии чистой однородной деформации. *Сб. перев, "Механика"*. 1962. №3. с. 109-117.
14. Flavin J. N. Thermo-elastic Rayleigh waves in a prestressed medium. *Prac. Cambridge Philos.* 1962. vol 58, №3. p.532-538.
15. Flavin J. N. Surface waves in pre-stressed Maoneg Material, *Quart. J. Mech. and Appl.math.* 1963. vol. 16, №4. p. 441-449.

**Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F.** Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part1. Surface Rayleigh waves along curvilinear boundaries (cylinder, sphere) of prestressed bodies.

The article is devoted to the study of the propagation of Rayleigh surface waves along the curvilinear boundaries of prestressed bodies. Two types of cylinders are under consideration: a continuous infinitely long cylinder of circular cross section of radius  $R$  and the same cylinder with a cavity. Studies have been conducted in the case of two types of loading: for axial compression and all-sided uniform initial deformation of bodies. Moreover, in the case of cylinders, the surface wave propagates along the cylindrical surface in the direction of the circular coordinate  $\theta$ .

The obtained dispersion equations make it possible to find the phase velocities of Rayleigh surface waves at large values of the wave number  $p$ , which corresponds to short waves in comparison with the length of the circle of asymptotic nature.

Numerical results have been obtained when the cylinder loaded in the  $OX_3$  axial direction. On the basis of the numerical calculations, the quantitative and qualitative results of the initial stresses influence on the phase velocity of the Rayleigh surface waves have been obtained. In particular, the speed of the Rayleigh surface wave, at a specific frequency, linearly depends on the initial stresses within the accepted accuracy of calculations.

The obtained results can be used in the development of physical bases of ultrasonic non-destructive methods for compressive stresses determination in the near-surface layers of the body.

**Keywords:** contact stresses, complex potentials, phase velocities, rigid stamps, movable loads, Rayleigh waves, stress-strain state.

## References

1. Babich, S. Yu. (1976). O rasprostraneni poverkhnostnykh voln v predvaritel'no napryazhenom cilindre. *Prikladnaya mekhanika*, 12, 6, 123-126.
2. Babich, S. Yu. (1978). K voprosu rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v predvaritel'no napryazhennoj sfere. *Prikladnaya mekhanika*, 14, 9, 125-128.
3. Babich, S. Yu., Guz', A. N., & Zhuk, A. P. (1979). Uprugie volny v telakh s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikladnaya mekhanika*, 15, 4, 3-23.

4. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). Statika i dinamika uprugikh osnovanij s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami. Kremenchug, "Press-line".
5. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Gluxov, Yu. P. (2021). Visimetrichni xvili u visoko elastichnomu kompozicziynomu materiali z pochatkovimi napruzheniyami. Dovgoxvil'ove nablizhennya. *Prikladna mexanika*, 57, №2, 3-12.
6. Guz', A. N., Makhor, F. G., & Gushch, O. N. (1977). Vvedenie v akoustouprugost'. Kiev: Nauk. Dumka.
7. Petrashen', G. I. (1946). Zadacha Releya dlya poverkhnostnykh voln v sluchae sfery, *DAN SSSR*, 52, 3, 763-766.
8. Viktorov, N. A. (1966). Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lehmba v tekhnike. Moscow.
9. Makhort, F. G. (1971). K teorii rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v uprugom tele s nachal'nymi napryazheniyami. *Prikladnaya matematika*, 7, 3, 34-40.
10. Makhort, F. G. (1974). O vliyanii nachal'nykh napryazhenij na skorosti rasprostraneniya poverkhnostnykh voln v beskonechno dlennom cilindre iz neszhimaemogo materiala. *DAN URSS*, ser. A, 4, 328-330 [ukrainian].
11. Guz', A. N. (2004). Uprugie volny v telakh s nachal'nymi (ostatochnymi) napryazheniyami. Kiev: "A.C. Y".
12. Babich, S. Yu., Gluxov, Yu. P., & Kornienko, V. F. (2019). Do zadachi rozpovsyudzhennya poverkhnix xvil' Releya v poperedn'о napruzhenix tilax z krivoliniynimi graniczyami. *Dopovidi NAN Ukraïni*, 10, 21-28.
13. Khejc, M., & Rivlin, R. (1962). Rasprostranenie voln v izotropnom , nakhodyashchemsya v sostoyanii chistoj odnorodnoj deformacii. *Sb. perev, "Mekhanika"*, 3, 109-117.
14. Flavin, J. N. (1962). Thermo-elastic Rayleigh waves in a prestressed medium. *Prac. Cambridse Philas*, vol 58, 3, 532-538.
15. Flavin, J. N. (1963). Surface waves in pre-stressed Maoneg Material, *Quart. J. Mech. and Appl.math.*, vol. 16, 4, 441-449.

Одержано 02.04.2021

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).114-122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).114-122)**С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Ю. П. Глухов<sup>2</sup>, В. Ф. Лазар<sup>3</sup>**<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

професор, доктор технічних наук

babich\_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115><sup>2</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

старший науковий співробітник,

кандидат фізико-математичних наук

gluchov.uriy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993><sup>3</sup> Мукачівський державний університет,

доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

## ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 2. ПЛОСКІ ДИНАМІЧНІ КОНТАКТНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Присвячується 55 річчю математичного факультету УжНУ

В даній статті досліджені динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями на основі введених комплексних потенціалів для плоских динамічних задач у випадку стисливих і нестисливих тіл з початковими напруженнями (окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння) одержані представлення напружень і переміщень через гармонічні функції своїх аргументів. Дані представлення введені коли жорсткий штамп рухається прямолінійно вздовж границі півплощини з рівномірною швидкістю. Останнє дає змогу звести дану динамічну задачу до стаціонарної в рухомій системі координат. В результаті граничних переходів у випадку відсутності початкових напружень одержані комплексні потенціали переходять у відомі комплексні потенціали Галіна Л. А., Мусхелішвілі М. І. і Лехницького Л. Г. Дані динамічні задачі зведені до задачі Рімана - Гільберта. Якщо штамп рухається без тертя, то з врахуванням формули Келдиша-Седова одержали явні формули для обчислення контактної тиску, який залежить від початкових напружень. Крім цього, в роботі розглянуті задачі про розповсюдження поверхневих хвиль вздовж півпростору з початковими напруженнями. Остання задача розв'язується за допомогою комплексних потенціалів. Результати повністю співпадають з тими, які були одержані одним з авторів статті раніше. В роботі встановлені критичні параметри коефіцієнтів подовжень для потенціалів Трелоара і Бортенєва-Хазановича при яких наступають явища "резонансного характеру". Як граничний випадок для "резонансного ефекту" дістаємо, що при досягненні початковими напруженнями значень, які відповідають поверхневій нестійкості, компоненти напружено-деформованого стану прямують до нескінченості. У цьому випадку тіло буде знаходитись у стані "нейтральної рівноваги". Тому з інженерної точки зору ситуація, коли швидкість поверхневих хвиль Релея у тіла з початковими напруженнями є необмеженою.

**Ключові слова:** початкові напруження, характеристичні рівняння, пружний потенціал, поверхневі хвилі, контактна задача, жорсткий штамп.

**1. Вступ.** Підвищення надійності і довговічності інженерних споруд і машин є однією з найбільш актуальних задач сучасного будівництва і машинобудування. Успішному розв'язанню її значною мірою сприяють широкі наукові дослідження в області механіки твердого деформованого тіла, зокрема при вивченні проблеми передачі навантаження в конструкціях і деталях машин. Поява нових матеріалів, необхідність підвищення експлуатаційних властивостей споруд і машин, зменшення їх ваги, збільшення термінів експлуатації, зниження вартості і досягнення економічної сумісності – все це залежить від методів розрахунку.

По проблемах, які відносяться до контактних задач для пружних, в'язко пружних і пластичних тіл без початкових напружень на даний час одержані результати з широкого кола питань.

Вагомий вклад у розробку методів розв'язання плоских і просторових контактних задач класичної (лінійної) теорії пружності внесли вітчизняні вчені. Грунтовний огляд результатів у галузі механіки контактної взаємодії тіл без початкових напружень наведено у монографії за редакцією Л.О. Галіна «Развитие теории контактных задач в СССР» (М.:Наука, 1976.– 493 с.), а також в багатьох працях монографічного і навчального характеру, виданих в останні роки.

Число публікацій з механіки контактної взаємодії неперервно зростає, що пояснюється актуальністю розглядуваних проблем для інженерної практики. Проте сучасні потреби інженерної практики висунули поміж дослідниками ряд задач, які вимагають використання більш ускладнених моделей суцільного середовища (відмінних від класичних) із складними фізичними та механічними властивостями із врахуванням, наприклад, таких факторів при контактній взаємодії, як вплив тертя, тепловиділення, при поверхневих властивостей матеріалу, жорсткуватості та зносостійкості поверхні тіла, що у свою чергу, зв'язане з мікромеханікою фрикційної взаємодії тощо.

**2. Актуальність.** Одним з важливих факторів при контактній взаємодії (разом з перерахованими) є врахування початкових (залишкових) напружень. Однак ці питання до останнього часу майже повністю не розроблені. Актуальність таких досліджень не викликає сумнівів, оскільки початкові (залишкові) напруження практично присутні у всіх елементах конструкцій. Як відомо початкові напруження зумовлені різними причинами, наприклад, технологічними операціями, виконуваними при виготовленні матеріалів або складанням конструкцій. У випадку композиційних матеріалів початкові напруження, як правило, відповідають напруженням уздовж армуючи елементів. У земній корі вони утворюються внаслідок дії гравітаційних сил і тектонічних процесів. Їх необхідно враховувати при розв'язанні задач з деформації ґрунтів (особливо замерзлих). У пружно-пластичних тілах також можуть бути внутрішні залишкові напруження після зняття навантажень. Початкові напруження завжди присутні у кровоносних судинах живих організмів.

Особливу зацікавленість у зв'язку з запровадженням на практиці нових штучних матеріалів, які можуть витримувати великі початкові деформації, викликає дослідження динамічних контактних задач у тілах з початковими напруженнями. Іноді доцільно створювати початкові напруження (залишкові і технологічні) для компенсації тих напружень, які виникають в елементах конструкцій, а також для підвищення міцності характеристик конструкцій.

При дослідженні контактних задач для тіл з початковими напруженнями на даний час склались два підходи: 1) дослідження тіл з конкретною формою пружного потенціалу (Московська школа механіків); 2) дослідження пружних тіл з початковими напруженнями для довільної структури пружного потенціалу в загальному вигляді для стисливих і нестисливих матеріалів (ці дослідження належать авторам і становлять зміст даної роботи).

Слід зауважити, що усі наведені в даній роботі результати одержані у рамках другого підходу, який на наш погляд має деякі переваги у порівнянні з першим підходом. Так до недавнього часу одна і та ж сама контактна задача для попередньо напружених тіл розглядалась одним автором, наприклад, для потенціалу Трелоара, а другим автором для потенціалу Муні тощо, тобто для конкретної форми пружного потенціалу. У даній праці дослідження багаточисленних динамічних задач наведені в єдиній загальній формі для стисливих і нестисливих попередньо напружених тіл для довільної структури пружного потенціалу. І тільки на завершальній стадії досліджень для одержання числових результатів використовувались конкретні пружні потенціали.

Таким чином, механіка матеріалів і елементів конструкцій, геофізика, сейсмологія, механіка гірських порід, механіка композитів, біомеханіка не руйнуючі методи визначення напружень тощо – далеко не повний перелік наукових напрямів фундаментального і прикладного характеру, в яких виникли проблеми, пов'язані з необхідністю дослідження впливу початкових (залишкових) напружень або деформацій. Виходячи із цього, необхідно відзначити важливість дослідження початкових напружень на напружено-деформований стан в області контакту. Врахування початкових напружень при розрахунку відповідальних елементів конструкцій, машин і споруд дозволить більш ефективно враховувати міцнісні ресурси матеріалів, правильно оцінювати міцність і суттєво понизити їх матеріалоємність, зберігаючи при цьому потрібні фундаментальні характеристики.

**3. Постановка задачі.** Розглядається нелінійно-пружне ізотропне тіло з довільною формою пружного потенціалу. Викладені нижче результати відносяться також і до ортотропного тіла, коли пружно-еквівалентні напрями співпадають з напрямками координатних ліній вибраної системи координат. Вводяться такі координати:  $x_\gamma$  – лагранжеві, які в недеформованому стані співпадають з декартовими;  $\eta_\gamma$  – декартові, які рухаються прямолінійно вздовж осі  $0y_1$  з постійною швидкістю  $v$ ;  $y_\gamma$  – декартові в початковому (деформованому) стані. Між координатами введених систем при умові, що початковий стан тіла визначається переміщеннями  $u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i$ ;  $\lambda_i = const$ , де  $\lambda_i$  – коефіцієнти подовження, існує така залежність

$$y_\gamma = \lambda_j x_j, \eta_1 = y_1 - vt, \eta_2 = y_2, \gamma = 1, 2, v = const. \quad (1)$$

Всі величини для збурень віднесено до розмірів тіла в початковому деформованому стані. У зв'язку з цим компоненти збурень  $\hat{Q}_{nm}$  тензора напружень віднесені до розміру площадок, за якими вони діють; при цьому для нерівних коренів характеристичного рівняння використано підхід праць Лехницького С. Г. [1], а для рівних коренів - праці Мухелішвілі М. І. [2]. В роботі застосовується апарат теорії функцій комплексної змінної.

**4. Метод розв'язку.** Комплексні потенціали. Введемо комплексні потен-

ціали для плоских динамічних задач у випадку стисливих і нестисливих тіл з початковими напруженнями (окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння), коли дані динамічні задачі можна звести до стаціонарних задач у рухомій системі координат, яка рухається прямолінійно з постійною швидкістю.

В роботах [3-7], [10-12] окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного (визначального) рівняння побудовані представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали. В результаті ряду перетворень для стисливих тіл у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння знайдено вирази для представлення напружень і переміщень через комплексні потенціали у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{22} &= 2Re [\Phi'_1(z_1) + \Phi'_2(z_2)]; \\ \tilde{Q}_{21} &= -2Re \left[ \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu_2 \gamma_{21}^{(2)} \Phi'_2(z_2) \right]; \\ \tilde{Q}_{12} &= -2Re \left[ \mu_1 \gamma_{12}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu_2 \gamma_{12}^{(2)} \Phi'_2(z_2) \right]; \\ \tilde{Q}_{11} &= 2Re \left[ \mu_1^2 \gamma_{11}^{(1)} \Phi'_1(z_1) + \mu_2^2 \gamma_{11}^{(2)} \Phi'_2(z_2) \right]; \\ u_k &= 2Re \left[ \gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2) \right] \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\Phi_1(z_1)$ ,  $\Phi_2(z_2)$  – аналітичні функції комплексної змінної.

Аналогічно формулам (2) мають місце вирази для представлень напружень і переміщень через комплексні потенціали у випадку рівних коренів характеристичного (визначального) рівняння [4]. Якщо в (2) зробити деякі граничні переходи, то для стисливих тіл одержимо наступне. Коли  $\nu = 0$ , то прийдемо до представлень типу (2) для стисливих плоских задач стисливих тіл з початковими напруженнями. При цьому здійснюється граничний перехід у всіх виразах, в тому числі при визначенні комплексних параметрів, коефіцієнтів і комплексних потенціалів. Без початкових напружень, поклавши  $S_{11}^0 \equiv S_{22}^0 \equiv 0$ , дістанемо результати, отримані Галінім Л. А. [8]. Якщо до останньої умови додатково приєднати умову  $\nu = 0$ , то після введення складових тензора  $\varpi$  для лінійно-пружного ортотропного тіла дістанемо комплексні потенціали Лехницького С. Г. [1]. Аналогічно вводяться комплексні потенціали для нестисливих попередньо напружених тіл окремо для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Таким чином, напруження і переміщення для стисливих і нестисливих тіл представлені в єдиній загальній формі через комплексні потенціали окремо для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Введені комплексні зображення містять у собі ряд відомих результатів, які є наслідком граничних переходів. Крім цього, введені зображення через комплексні потенціали дають можливість дістати точні розв'язки тих класів задач для тіл з початковими напруженнями, які розв'язані для пружних тіл в рамках класичної теорії пружності (у випадку відсутності початкових напружень).

У роботі для тіл з початковими напруженнями вказано методи побудови точних розв'язків динамічних задач на основі комплексних потенціалів, одержаних для відповідних статичних задач. Насамперед встановлено, що із порівняння відповідних виразів для динамічних задач стисливих тіл і виразів для нестисливих тіл випливає, що зображення напружень і переміщень через комплексні потенціали мають однакову структуру. Відрізняються тільки формули

для визначення коефіцієнтів  $\gamma_{nm}^{(j)}$ ,  $\gamma_k^{(j)}$ . Отже, можна проводити розв'язання у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл. Із встановленого вище порівняння комплексних зображень напружень і переміщень через комплексні потенціали  $\Phi_1(z_1)$ ,  $\Phi_2(z_2)$  для нерівних коренів характеристичного рівняння і через потенціали  $\varphi_1(z_1)$ ,  $\varphi_2(z_2)$  або  $\psi(z_1)$ ,  $\Phi(z_1)$  для рівних коренів однаковими формулами як для статичних, так і для динамічних задач. Відрізняються тільки формули для визначення напружень  $\tilde{Q}_{12}$ , оскільки для статичних задач  $\gamma_{12}^{(j)} = 1$  при нерівних і  $\gamma_{12}^{(1)} = 1$  при рівних коренях. При цьому для статичних і динамічних задач відрізняються вирази для знаходження комплексних параметрів  $\mu_j$ , які входять у комплексні змінні  $z_j$  і вирази для знаходження  $B_j$ ,  $B_{(j)}$ ,  $B$ ,  $\gamma_{nm}^{(j)}$  і  $\gamma_k^{(j)}$ .

Наскільки згаданий вище метод комплексних потенціалів є ефективним і придатним до розв'язання динамічних задач розглядуваного класу, показано спочатку на прикладі задачі про поширення поверхневих хвиль Релея на півплощині  $y_2 < 0$  з початковими напруженнями (така задача, уже розв'язана іншим методом). Швидкість поверхневої хвилі  $v$  вважаємо невідомою і для її визначення треба мати відповідні рівняння. Дослідження виконано в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл окремо при нерівних і рівних коренях характеристичного (основного) рівняння. Рівняння для знаходження швидкості побудовано за умови існування відмінних від нуля у півплощині комплексних потенціалів, які забезпечують виконання умов рівності нулю напружень на границі півплощини при  $y_2 = 0$ . Для нерівних коренів на границі півплощини дістанемо граничні умови

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{22} &= 2Re[\Phi'_1(z_1) + \Phi'_2(z_2)] = 0; \\ \tilde{Q}_{21} &= -2Re[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi'_1(z_1) + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi'_2(z_2)] = 0.\end{aligned}\quad (3)$$

Система однорідних рівнянь (3) відносно невідомих  $\Phi'_1$  і  $\Phi'_2$  має нетривіальний розв'язок, коли визначник другого порядку дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1\gamma_{21}^{(1)} & \mu_2\gamma_{21}^{(2)} \end{vmatrix} = 0.\quad (4)$$

Отже, з умови існування ненульових розв'язків системи (3), тобто з (4), одержано рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у вигляді

$$\mu_2\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)} = 0.\quad (5)$$

Зауважимо, що рівняння (5) відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями. Для рівних коренів одержано аналогічне рівняння у формі

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)}\gamma_{21}^{(2)} = 0.\quad (6)$$

Конкретні числові результати в роботі одержані для потенціалу Трелоара (нестисливі тіла). Також як приклад застосування комплексних потенціалів у роботі розглянута плоска задача про жорсткий штамп, який рухається з тертям вздовж границі  $\eta_2 \leq 0$  нижньої півплощини ( $\eta_2 \leq 0$ ) з початковими напруженнями. Розглянуто такі динамічні контактні задачі, які зводяться до стаціонарних задач у рухомій системі координат. Це має місце тільки тоді, коли швидкість руху штампу менша за швидкість поширення у тілі пружних хвиль (поздовжніх

і поперечних). Останнє відповідає тому, що вихідне рівняння буде еліптичного типу, і аналогії між явищами, які виникають при дії нерухомого і рухомого штампів у півплощині з початковими напруженнями, матимуть місце тільки у цьому випадку. Також цілком зрозуміло, що рух штампів із надзвуковою швидкістю на практиці зустрічається рідко. При розв'язуванні даної контактної задачі використані побудовані комплексні потенціали. Задача зведена до відомої задачі Рімана-Гільберта. В результаті звичайної процедури дана динамічна контактна задача звелась до знаходження аналітичної функції  $w_1(z)$ , через яку обчислюється контактний тиск. Таким чином, для визначення функції  $w_1(z)$  одержано таку ж змішану задачу, як і у випадку відповідної контактної динамічної задачі для анізотропної півплощини без початкових напружень (Лехницький С.Г.), а також таку крайову задачу (з врахуванням сил тертя), як і у випадку рухомого штампів, який рухається вздовж границі ізотропної півплощини без початкових напружень. Якщо штамп рухається без тертя ( $k = 0$ ), то застосовуючи формулу Келдиша-Седова [9] для аналітичної функції  $w_1(z)$  в роботі [10] одержано явну формулу. В роботі для конкретних пружних потенціалів встановлено залежність контактного тиску від величини початкових напружень.

З фізичної точки зору цікавим є випадок, коли швидкість руху штампів (навантажень) збігається з швидкістю хвиль Релея у пружному тілі з початковими напруженнями. У роботі розглянуто деякі питання, які пов'язані з поверхневими явищами для динамічної контактної задачі для півплощини з початковими напруженнями.

З виразів для аналітичних функцій  $\Phi_j(z_j)$  випливає, що комплексні потенціали, які є точними розв'язками першої основної динамічної задачі для півплощини з початковими напруженнями, перетворюються у нескінченність, а отже у нескінченність перетворюються компоненти напружено-деформованого стану, обчислені за комплексними потенціалами, коли мають місце рівняння (5) і (6).

Таким чином, рівняння (5) (для нерівних коренів характеристичного рівняння) і рівняння (6) (для рівних коренів) є дисперсійними рівняннями для визначення швидкостей поширення поверхневих хвиль Релея вздовж границі півплощини з початковими напруженнями. Отже, коли швидкість руху штампів наближається до швидкості поверхневих хвиль Релея у тілах з початковими напруженнями вздовж плоскої границі виникають своєрідні явища «резонансного характеру», які пов'язані з необмеженим зростанням напружень у пружному тілі. Слід зауважити, що аналогічні явища виникають і у класичній лінійній теорії пружності, коли швидкість руху штампів наближається до швидкості хвиль Релея у матеріалі без початкових напружень. Необхідно зазначити, що в останньому випадку швидкість хвиль Релея – величина постійна для даного матеріалу, тобто існує тільки одна критична швидкість руху. Оскільки швидкість поверхневих хвиль Релея неперервно залежить від початкових напружень, то для кожного випадку попереднього навантаження необхідно обчислити швидкість поверхневих хвиль; таким чином дістанемо неперервний спектр критичних швидкостей руху. Як граничний випадок для «резонансного ефекту» дістаємо, що при досягненні початковими напруженнями значень, які відповідають поверхневій нестійкості, компоненти напружено-деформованого стану прямують до нескінченності. Одержаний результат не повинен викликати сумнівів, оскільки при досягненні початковим станом значень, які відповідають поверх-



невій нестійкості, тіло буде знаходитись у стані «нейтральної рівноваги». Тому з інженерної точки зору ситуація, коли швидкість руху штампу наближається до швидкості поверхневих хвиль Релея у тілах з початковими напруженнями, є небажаною. На основі комплексних потенціалів (як і випадку статички) можна знайти точні розв'язки основних динамічних плоских задач (першої, другої і змішаної) для півплощини з початковими напруженнями [11-15].

**5. Висновки.** Таким чином, в даній роботі побудовані комплексні потенціали плоских динамічних задач для тіл з початковими напруженнями. В результаті напруження і переміщення зображені через гармонічні функції своїх аргументів. Комплексні потенціали введені у єдиній формі для стисливих і нестисливих тіл для потенціалів довільної структури окремо для рівних і нерівних коренів характеристичного рівняння. На основі введених комплексних потенціалів розв'язані конкретні задачі для рухомих штампів у випадку прямолінійного руху з постійною швидкістю. За допомогою формули Келдиша – Седова одержані явні формули для обчислення контактного тиску. Також методом комплексних потенціалів в дослідженні плоских при розповсюдженні поверхневих хвиль Релея вздовж півпростору з початковими напруженнями. На основі чисельних досліджень одержані кількісні і якісні результати впливу початкових напружень на фазову швидкість поверхневої хвилі Релея і на основі характеристики контактної взаємодії [11-17]. У випадку відсутності початкових напружень одержані результати співпадають з класичними. Також важливим в роботі є те, що встановлені явища “резонансного характеру” для конкретних пружних потенціалів.

### Список використаної літератури

1. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
3. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями. *Прикладная механика*. 1981. 17, № 7. С. 75-83.
4. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. К.:Вища школа, 1995. 304 с.
5. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг “Press-line”, 2007. 795 с.
6. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
7. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями. *Прикладная математика и механика*. 1982. 46, №2, С. 263-271.
8. Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303с.
9. Келдыш М. В., Седов Л. И., Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. *Докл. АН СССР*, т.16, №1. 1937. с. 7-11.
10. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. *Сб. “Развитие идей Л.А. Галина в механике. Ин-т компьютерных технологий*. М: Ижевск, 2013. с. 188-248.
11. Бабич С. Ю., Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (жесткие штампы). *Прикладная механика*. 1989. 25, № 8. С. 3-18.
12. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Рудницький В.Б. Контактные задачи для упругих тел с начальными напряжениями (обзор). *Прикладная механика*. 1991. 23, № 9. С. 3-26.
13. Бабич С.Ю., Лазар В.Ф. Комплексні потенціали і їх застосування в контактних задачах

- для тіл з початковими напруженнями. *X міжн. симпоз. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій"*. Львів, „Каменярь”, 2002, с.3-7.
14. Бабич С.Ю., Лазар В.Ф. К вопросу контактной задачи для движущегося штампа вдоль полуплоскости с начальными напряжениями. *VI між. сим поз. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій"*. (Ужгород, 2005), Львів, „Каменярь”, 2005. с. 607-610.
  15. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Корниенко В. Ф. Резонансные явления в динамических контактных задачах для упругих тел с начальными напряжениями. *Материалы V межн. научно практ. конф. "Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов"*. Белорусский государственный университет транспорта, Гомель. 2019. с.187-189.
  16. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Лазар В. Ф. Построение точных решений динамических задач для тел с начальными напряжениями на основе комплексных потенциалов. *Материалы VI межн. научно практ. конф. "Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов"*. Белорусский государственный университет транспорта, Гомель. 2020. с.162-165.
  17. Babich S. Yu., Guz A.N., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research. *Appl. Mech. Rew*, 51, №5. 1998. p.343-371.

**Babych S. Yu., Hlukhov Yu. P., Lazar V. F.** Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 2. Flat dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses.

The dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses on the basis of introduced complex potentials for plane dynamic problems in the case of compressible and incompressible bodies with initial stresses (separately for equal and unequal roots of a characteristic equation), the obtained representations of stresses and displacements through the harmonic functions of their arguments have been investigated in the article. These representations are introduced when the load is applied through a rigid stamp and moves rectilinearly along the boundary of the half-plane at a uniform velocity. The latter makes it possible to reduce this dynamic problem to a stationary one in a moving coordinate system. As a result of boundary transitions in the absence of initial stresses, the obtained complex potentials pass into the known complex potentials Galin L.A, Muskhelishvili M.I. and Lekhnitsky L.G. These dynamic problems are reduced to the Riemann-Hilbert problem. If the stamp moves without friction, then taking into account the Keldysh-Sedov formula we obtain explicit formulas for calculating the contact pressure, which depends on the initial stresses. Additionally, the problems of propagation of surface waves along a half-plane with initial stresses have also been considered in the article. The latter problem is solved with the help of complex potentials. The results are exactly the same as those obtained earlier by one of the authors of the article. The critical parameters of elongation coefficients for Treloir and Bortnev-Khazanovich potentials at which "resonant nature" phenomena occur have been established in the article.

As a limiting case for the "resonance effect", we get that when the initial stresses reach values corresponding to the surface instability, the components of the stress-strain state go to infinity. In this case, the body will be in a state of "neutral equilibrium". Thus, the Rayleigh surface waves in bodies with initial stresses are unlimited.

**Keywords:** Initial stresses, characteristic equations, elastic potential, surface waves, contact problem, rigid stamp.

## References

1. Lehnickij, S. G. (1977). *Teorija uprugosti anizotropogo tela*. Moscow: Nauka.
2. Muskhelishvili, N. I. (1966). *Nekotorye osnovnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti*. Moscow: Nauka.
3. Babich, S. Ju., & Guz, A. N. (1981). *Kompleksnyye potentsialy ploskoj dinamicheskoy zadachi*

- dlja szhimaemyh uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami *Prikladnaja mehanika*, 17 (7), 75-83.
4. Guz, A. N., Babich, S. Ju., & Rudnickij, V. B. (2013). Kontaktное vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nimi naprjazhenijami. Kyiv: Vushcha shkola.
  5. Guz, A. N., Babich, S. Ju., & Gluhov, Ju.P. (2007). Statika i dinamika uprugih osnovanij s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami. Kremenčug: "Press-line".
  6. Guz, A. N., Babich S. Ju., & Gluhov Ju. P. (2015). Smeshannye zadachi dlja uprugogo osnovanija s nachal'nymi naprjazhenijami. LAP LAMBERT Academic Publishing.
  7. Guz, A. N., & Babich, S. Ju. (1982). Ploskie dinamicheskie zadachi dlja uprugih neszhimaemyh tel s nachal'nymi naprjazhenijami. *Prikladnaja matematika i mehanika*, 46(2), 263-271.
  8. Galin, L. A. (1980). Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vjazkouprugosti. Moscow: Nauka.
  9. Keldysh, M. V., & Sedov, L. I. (1937). Effektivnoe reshenie nekotoryh kraevyh zadach dlja garmonicheskikh funkcion. Doklady AN SSSR, 16(1), 7-11.
  10. Guz, A. N., Babich, S. Ju., & Rudnickij, V. B. (2013). Kontaktное vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nimi naprjazhenijami. *Sb. "Razvitie idej L.A. Galina v mehanike". In-t komp'yuternyh tehnologij*. Moscow-Izhevsk. 188-248.
  11. Babich, S. Ju., Guz, A. N., & Rudnickij, V. B. (1989). Kontaktnye zadachi dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami (zhestkie shtampy). *Prikladnaja mehanika*, 25(8), 3-18.
  12. Babich, S. Ju., Guz, A. N., & Rudnickij, V. B. (1991). Kontaktnye zadachi dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami (obzor). *Prikladnaja mehanika*, 23(9), 3-26.
  13. Babich, S. Ju., & Lazar, V. F. (2002). Kompleksni potenciali i ih zastosuvannja v kontaktnih zadachah dlja til z pochatkovimi napruzhenijami. *X mizhn. simpoz. "Mehanika i fizika ruznuvannja budivel'nih materialiv ta konstrukcij"*. L'viv: „Kamenjar”, 3-7.
  14. Babich, S. Ju., & Lazar, V. F. (2005). K voprosu kontaktnoj zadachi dlja dvizhushhegosja shtampa vdol' poluploskosti s nachal'nymi naprjazhenijami. *VI mizh. sim poz. "Mehanika i fizika ruznuvannja budivel'nih materialiv ta konstrukcij"*. Uzhgorod, Lviv: „Kamenjar”, 607-610.
  15. Babich, S. Ju., Gluhov, Ju. P., & Kornienko, V. F. (2019). Rezonansnye javlenija v dinamicheskikh kontaktnyh zadachah dlja uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami. *Materialy mezhn. nauchno prakt. konf. "Aktual'nye voprosy i perspektivy razvitija transportnogo i stroitel'nogo kompleksov"*. Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, Cityplace Gomel', 187-189.
  16. Babich, S. Ju., Gluhov, Ju. P., & Lazar, V. F. (2020). Postroenie tochnyh reshenij dinamicheskikh zadach dlja tel s nachal'nymi naprjazhenijami na osnove kompleksnyh potencialov *Materialy mezhn. nauchno prakt. konf. "Aktual'nye voprosy i perspektivy razvitija transportnogo i stroitel'nogo kompleksov"*. Belorusskij gosudarstvennyj universitet transporta, Cityplace Gomel'. 162-165.
  17. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (1988). Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research *Appl. Mech. Rew* 51(5), 343-37.

Одержано 02.04.2021

УДК 519.854.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).123-136](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).123-136)**Л. Ф. Гуляницький<sup>1</sup>, А. В. Дубіна<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,  
завідувач відділу,  
доктор технічних наук, старший науковий співробітник  
[leonhul.icyb@gmail.com](mailto:leonhul.icyb@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>

<sup>2</sup> НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,  
магістрант  
[tasyana.ch@gmail.com](mailto:tasyana.ch@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8069-9664>

## РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ НА НАПІВСКІНЧЕНІЙ СТРІЧЦІ АЛГОРИТМАМИ ЛОКАЛЬНОГО ТА ТАБУЙОВАНОГО ПОШУКУ

В роботі розглянуто алгоритми стандартного локального та табуйованого пошуку для розв'язування задачі розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці. Особливостями задачі є наявність заборонених областей (дірок), які впливають на ефективність роботи алгоритмів. Досліджувана задача має значну теоретичну цінність і важливе прикладне значення. Ця задача належить до задач NP-повних і більшість методів розв'язування є наближеними.

Експериментально досліджено ефективність запропонованих алгоритмів для задачі розміщення прямокутників. Визначено рекордні значення цільової функції, дисперсію, довірчі інтервали та час роботи алгоритмів для задач з різними параметрами.

**Ключові слова:** оптимізація розміщення, локальний пошук, табуйований пошук, комбінаторна оптимізація.

**1. Вступ.** Використання локального пошуку (ЛП) в комбінаторній оптимізації почалося у 1956 році при розв'язуванні задачі комівояжера [1], в наступні роки сфера застосування була розширена, а його концепція покладена в основу багатьох алгоритмів розв'язування задач комбінаторної оптимізації [2-4].

Для NP-складних задач алгоритми локального пошуку дозволяють знаходити наближені розв'язки і найчастіше використовуються для розв'язування задач, коли точні методи безсилі через надто великий обсяг обчислювальних затрат.

**2. Постановка задачі.** Розглянемо задачу розміщення прямокутників із заданою шириною та різними довжинами на напівнескінченній стрічці. Стрічка розділена на декілька горизонтальних рівнів, які мають задану ширину та однакову довжину. На кожному рівні можуть бути заборонені області (дірки), на які не можна розміщати прямокутники. Необхідно розмістити прямокутники таким чином, щоб загальна довжина використаної частини стрічки була найменшою. Математична постановка задачі наведена у роботах [5-6].

**3. Алгоритм локального пошуку.** Для багатьох задач теорії розкладів, розміщення, покриття та інших оптимізаційних задач алгоритми локального пошуку дозволяють отримувати кращі результати у порівнянні з деякими іншими алгоритмами, особливо за умов обмеження у часі та великої розмірності задач.

Розглянемо загальну схему алгоритму [6,7]:

1. Генерація початкового припустимого розв'язку  $x$ , який обираємо як поточний варіант.

2. Чергова ітерація.

Формуємо околі  $L(x)$  поточного варіанта й точно чи наближено знаходимо елемент  $y \in L(x)$ , який є субоптимальним розв'язком у цьому околі. Якщо  $y \neq x$ , то знайдений елемент оголошується черговим поточним варіантом (здійснюється переприсвоєння  $y \leftarrow x$ ) і починається чергова ітерація, інакше – повернення на п. 3.

3. Завершення роботи алгоритму:  $x$  – локальний розв'язок, якщо на останній ітерації здійснюється вичерпний пошук в околі.

Принциповими моментами реалізації конкретних алгоритмів локального пошуку є:

- 1) визначення околів  $L(x)$  у просторі розв'язків задачі;
- 2) генерація чергової точки околу  $y \in L(x)$ ;
- 3) критерій завершення перегляду точок у поточному околі та переходу до наступного;
- 4) спосіб обчислення величини зміни цільової функції при переході до нового поточного варіанта;
- 5) критерій завершення;
- 6) формування початкового наближення.

Ефективність алгоритмів локального пошуку істотно залежить від вибору відповідного типу околу  $L(x)$ . Чим більший околі, тим імовірніше отримати кращий результат, але розширення околів швидко стає непрактичним з обчислювальної точки зору.

У п.1 використовуються метричні околи чи околи, які утворені алгоритмічно. Пошук в околі може бути здійснений шляхом повного перебору точок або ж завершуватися переходом до першого розв'язку, який поліпшує значення цільової функції.

Для організації перебору точок околу при переході до нової ітерації використовують лінійний генератор або кільцевий генератор [6].

Критерієм завершенням локального пошуку може бути одна із умов: відсутність поліпшуючої точки в поточному околі, вичерпання ліміту часу або заданої кількості ітерацій.

Розглянемо задачу розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці, що містить заборонені зони, і яка буде зведена до задачі на перестановках, для чого перенумеруємо прямокутники.

Наведемо псевдокод алгоритму.

```

1  procedure local_search
2     $x^0 :=$  деякий припустимий розв'язок;
3     $h := 0$ ;
4    while окіл  $L(x^h)$  поточного варіанта  $x^h$  не переглянутий
    повністю або не вичерпаний часовий ліміт do
5       $y :=$  генерація чергової точки околу  $L(x^h)$ ;
6       $\Delta = f(x^h) - f(y)$ ;
7      if  $\Delta > 0$  then
8         $h := h + 1$ ;
9         $x^h := y$ ;
10     end if;
11    end while;
12    return  $x = x^h$ ;
13  end

```

У рядку 2 припустимий розв'язок – початкова перестановка.

У рядку 4 окіл поточного варіанта визначається як множина перестановок, отриманих шляхом транспозиції елементів поточної перестановки.

Перегляд точок поточного околу завершується і здійснюється перехід до наступної ітерації, коли знаходиться перший же розв'язок, який покращує значення цільової функції, що і відображено у рядках 7-10.

Значенням цільової функції для даного розв'язку (перестановки) є правий край найвіддаленішого від початку прямокутника у розміщенні, яке побудоване спеціальною процедурою (placement), про яку піде мова далі.

В якості критерія завершення роботи алгоритму використано такі умови:

- 1) відсутність поліпшуючої точки в околі поточного розв'язку;
- 2) вичерпання заданого ліміту часу.

Генерування точок околу поточного розв'язку здійснюється, як зазначалося, шляхом транспозицій його компонентів. При переході до нової ітерації процес генерування продовжується, починаючи з тієї транспозиції, на якій завершився процес у попередньому околі, а при досягненні останньої пари компонент транспозиції починаються із компонент 1 і 2, якщо перегляд точок в околі не завершено.

Нехай на ітерації  $h$  маємо перестановку  $x^h = (x_1, \dots, x_n)$ , а  $y \in L(x^h)$  утворюється із  $x^h$  шляхом транспозиції компонент  $i$  та  $j$ ,  $i \neq j$ . Тоді покладаємо  $x^{h+1} = y$  і генерування точок із околу  $L(x^{h+1})$  починаємо із транспозиції  $i$  та  $j+1$ , якщо  $j < n$ , або ж присвоюємо  $i = 1$ ,  $j = 2$  в іншому разі. При цьому слід підраховувати кількість згенерованих точок околу, щоб вона не перевищила  $C_n^2$  – кількості всіх точок околу при такому його означенні, що і використовується в одній із умов завершення роботи алгоритму.

Псевдокод алгоритму побудови розміщення прямокутників (placement) по заданій перестановці, що реалізує принцип "розміщувати вліво-вниз", подано далі. Його використання, як і оберненої процедури, яка по розміщенню будує перестановку, дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між перестановками та підмножиною розміщень, яка обов'язково містить глобальний розв'язок задачі.

```

1  procedure placement
2     $x :=$  перестановка, для якої необхідно побудувати розміщення;
3     $i := 1$ ;
4    while  $i \leq n$  do {доки всі прямокутники у перестановці  $x$  не
розглянуто}
5      обрати прямокутник  $x_V$  з перестановки  $x$ ;
6       $s_j :=$  відстань до правого краю прямокутника  $x_V$  на рівні  $j$ , якщо
його розмістити найближче до останнього прямокутника чи дірки,
дотримуючись умови неперетинання;
7       $l :=$  найменший номер рівня, де  $s_l$  мінімальне;
8      на рівень  $l$  помістити прямокутник  $x_V$ ;
9       $i := i + 1$ ;
10   end while;
11   return розміщення прямокутників;
12  end

```

У рядках 6 та 8 прямокутник розміщується впритул до лівого краю останнього прямокутника на обраному рівні (чи дірки, якщо лівіше неї розмістити прямокутник не можна).

**4. Алгоритм табуйованого пошуку.** Для того, щоб запобігти повторному перегляду неефективних розв'язків, доцільно використовувати алгоритми табуйованого пошуку (ТП).

Головна ідея табуйованого пошуку полягає в зміні поточного варіанта розв'язку задачі та запам'ятовуванні послідовності таких змін та їх використанням [4,7]. Всі зроблені модифікації розв'язків фіксуються в списку заборон.

Пошук починається з початкового варіанта розв'язку, який поступово поліпшується локальними модифікаціями. Розв'язок, який був відвіданий нещодавно, включається в список заборон і далі не розглядається як кандидат на відвідування.

Для поданої задачі розглянемо метод строгого табування, який запам'ятовує всі розв'язки з метою заборони потрапляння в уже відвідані точки простору розв'язків.

Псевдокод алгоритму можна подати так.

```

1  procedure tabu_search
2     $x^0 :=$  деякий припустимий розв'язок;
3     $T := \emptyset$ ;
4     $h := 0$ ;
5    while окіл  $L(x^h)$  поточного варіанта  $x^h$  не переглянутий
повністю або не вичерпаний часовий ліміт do
6       $y :=$  генерація чергової точки околу  $L(x^h)$ , що не належить
списку заборон  $T$ ;
7       $\Delta = f(x^h) - f(y)$ ;
8      if  $\Delta > 0$  then
9         $h := h + 1$ ;

```

```
10    $x^h := y$ ;  
11    $T := T \cup x^h$ ;  
12   end if;  
13   end while;  
14   return  $x = x^h$ ;  
15   end
```

У рядку 2, як і в алгоритмі локального пошуку, припустимий розв'язок – початкова перестановка.

У рядку 3 вказується множина розв'язків, що потрапили у список заборон  $T$  і не розглядатимуться повторно.

У рядку 6 відбувається генерація нової точки околу, що відсутня у списку заборон.

Якщо нова точка околу покращує значення цільової функції, то вона зберігається у списку заборон у рядку 11.

Процедури обчислення значення цільової функції, генерування нової точки околу та критерій завершення роботи алгоритму використовуються ті самі, що і наведені для алгоритму локального пошуку.

**5. Експериментальне дослідження ефективності алгоритмів.** Експериментально перевіримо ефективність використання алгоритмів локального та табу пошуку для виділених задач розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці з діркам. Метою досліджень є оцінка ефективності алгоритмів, їх порівняння, виявлення їх недоліків і переваг.

Алгоритми реалізовано в рамках інформаційної системи PlaceIT (платформа .NET, мова C#). Експерименти виконувались на персональному комп'ютері з наступними характеристиками: процесор Intel Core i7-8565U, 1.8 GHz з оперативною пам'яттю 8 GB та операційною системою Microsoft Windows 10 Home (версія 10.0.18363).

Для цього сформуємо задачі розміщення прямокутників, кількість яких вибиралася із діапазону 10-100, на напівнескінчених стрічках з кількістю рівнів від 5 до 20. Для кожного типу задачі згенеруємо 1000 індивідуальних задач, для яких застосуємо запропоновані алгоритми локального та табуйованого пошуку. Згенеровані довжини прямокутників не перевищують 15, кількість дірок на кожному рівні не перевищує 3, а довжина кожної дірки є 1. Для генерації довжин прямокутників та положення дірок використовувався датчик випадкових чисел з рівномірним розподілом. Для дослідження алгоритмів використовуються однакові початкові наближення.

Результатами експерименту є час роботи алгоритмів в секундах, відсоток середнього покращення значення цільової функції (наведені у таблиці 1). На початку та після завершення роботи кожного алгоритму для кожної задачі визначається *найдовша* відстань від початку стрічки на кожному з рівнів до правого краю прямокутників (довжина найдовшого зайнятого рівня). Середнє покращення вказує на те, на скільки відсотків зменшується довжина найдовшого рівня у порівнянні із початковим варіантом розміщення.

Для заданих алгоритмів не проводилися експерименти для тих задач, де кількість прямокутників не перевищувала кількості рівнів. Це зумовлено тим, що на кожному рівні в такому разі буде розміщений лише 1 прямокутник і



отже значення цільової функції є довжиною найдовшого прямокутника. Для поданих результатів подано графіки залежності часу роботи алгоритмів від параметрів задач та відсотку середнього покращення значення цільової функції від параметрів задач для кожного з алгоритмів.

На рисунках 1-2 подані результати експериментів для задач з 5, 10, 15 та 20 рівнями та кількістю прямокутників від 5 до 100.

Таблиця 1. Результати експерименту, частина 1

Параметри задачі		Час (с)		Середнє покращення (%)	
Рівні	Прямокутники	ЛП	ТП	ЛП	ТП
5	10	7,8	7,0	6,5	21,3
5	15	12,7	16,1	0,4	17,8
5	20	6,2	10,0	1,1	16,3
5	25	15,2	4,2	1,0	4,1
5	30	21,0	16,8	4,4	8,7
5	35	34,4	9,8	3,0	11,0
5	40	55,5	5,0	2,7	12,3
5	45	62,3	13,2	3,4	5,5
5	50	99,9	5,7	1,3	3,8
5	55	144,5	3,5	2,5	5,0
5	60	150,0	4,8	1,3	1,9
5	65	190,4	4,9	3,6	5,1
5	70	236,5	4,4	0,9	1,2
5	75	313,9	2,7	3,1	5,0
5	80	356,2	4,7	0,4	2,7
5	85	479,4	3,8	0,3	1,0
5	90	572,7	2,1	0,9	2,9
5	95	786,	1,4	0,7	2,6
5	100	865,1	0,7	0,1	0,4
10	10	0	0	0	0
10	15	8,4	0,1	0,7	16,9
10	20	12,9	15,8	1,0	0,1
10	25	24,4	8,3	2,4	12,1
10	30	34,8	16,6	8,5	13,0
10	35	68,0	14,9	4,1	5,7
10	40	100,1	8,8	3,0	9,1
10	45	155,5	1,4	0,4	4,0
10	50	189,5	16,7	1,7	11,5
10	55	243,9	7,8	0,3	0,9
10	60	335,5	12,3	1,5	3,4
10	65	456,5	5,5	1,4	0,2
10	70	540,8	3,0	3,5	7,4
10	75	601,1	7,0	3,7	7,6

10	80	715,1	9,4	4,6	6,1
10	85	786,6	5,8	3,0	6,7
10	90	975,3	7,4	5,8	7,8
10	95	1091,5	3,9	3,5	9,8
10	100	1165,1	5,7	1,7	5,1
15	10	0	0	0	0
15	15	0	0	0	0
15	20	16,9	0,8	1,0	0,7
15	25	36,6	18,3	2,6	8,1
15	30	72,0	10,7	4,0	10,8
15	35	109,6	26,3	6,4	11,4
15	40	155,9	6,0	8,7	12,6
15	45	237,7	16,0	4,5	10,7
15	50	299,7	21,0	10,8	14,7
15	55	357,6	5,2	2,7	4,0
15	60	524,5	13,8	7,5	8,5
15	65	651,2	8,4	7,1	15,5
15	70	848,6	15,1	3,7	4,9
15	75	1007,1	7,6	4,9	6,0
15	80	1252,6	7,2	4,7	6,1
15	85	1521,1	6,7	5,6	6,3
15	90	1641,4	9,3	7,2	8,6
15	95	1968,0	2,8	7,9	8,5
15	100	2259,2	10,8	0,6	2,0
20	10	0	0	0	0
20	15	0	0	0	0
20	20	0	0	0	0
20	25	50,1	11,6	1,1	2,6
20	30	85,6	10,4	2,0	3,3
20	35	99,9	8,1	2,2	3,4
20	40	185,7	15,8	4,8	5,4
20	45	251,9	8,5	5,9	8,0
20	50	352,1	12,4	6,3	8,4
20	55	456,1	7,0	11,3	11,2
20	60	600,2	11,6	16,9	19,4
20	65	837,5	23,5	10,1	23,7
20	70	1058,0	10,4	10,7	17,1
20	75	1322,3	9,4	13,3	13,8
20	80	1641,8	12,6	3,4	4,8
20	85	1764,0	13,2	3,4	8,1
20	90	2162,8	8,5	13,0	13,5
20	95	2550,5	11,4	5,7	11,6
20	100	2816,9	14,3	13,0	13,1

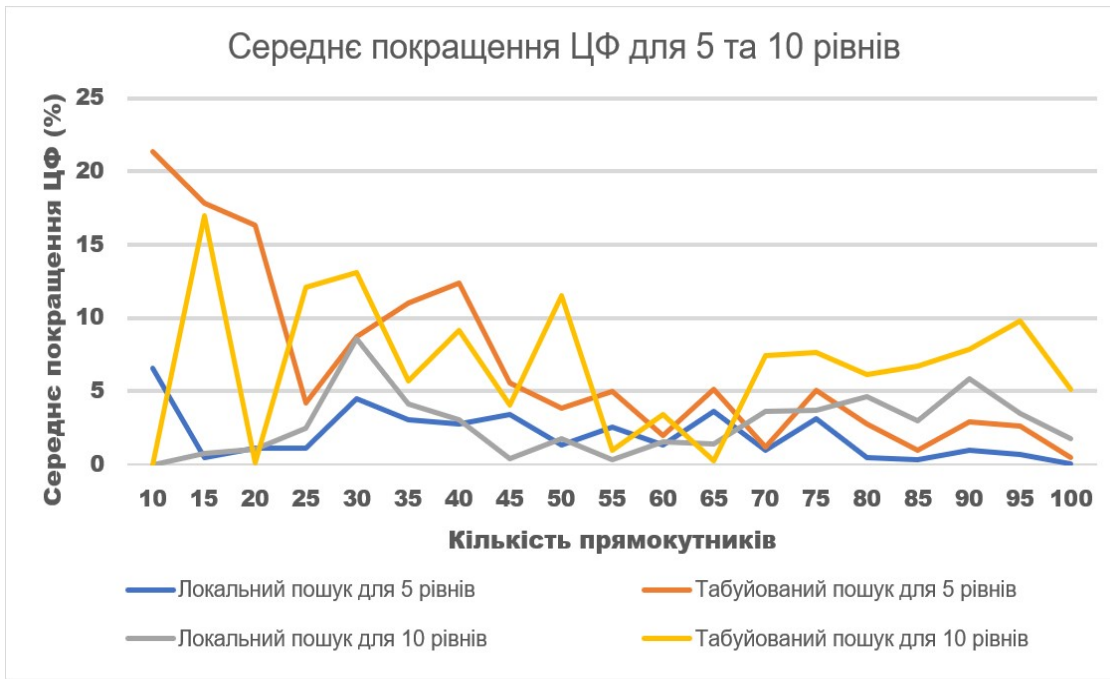


Рис. 1. Середнє покращення значення цільової функції (ЦФ) для 5 та 10 рівнів

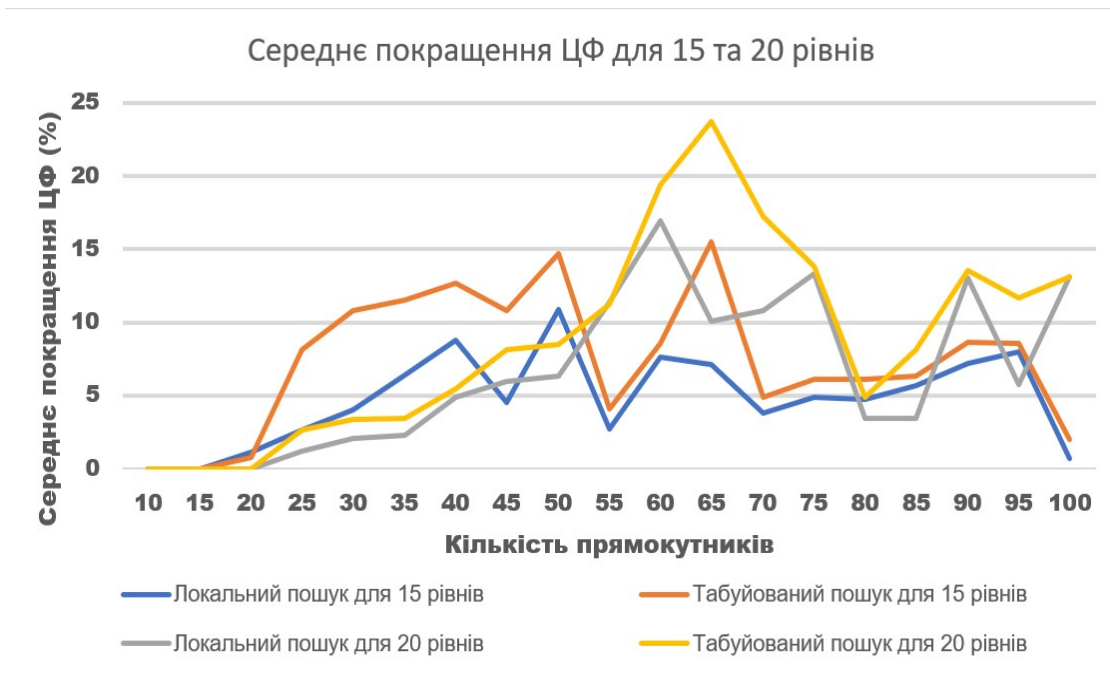


Рис. 2. Середнє покращення значення цільової для 15 та 20 рівнів

Отже, алгоритм локального пошуку програє алгоритму табуйованого пошуку у відсотку середнього покращення значення цільової функції для задач кількістю прямокутників менші за 60. Це зумовлено тим, що для задач невеликої розмірності алгоритм табуйованого пошуку не розглядає околиці із табу списку, тим самим збільшуючи кількість різних околів, які будуть переглянуті.

Для задач з кількістю прямокутників більше 60 та кількістю рівнів 5 – відсоток середнього покращення значення цільової функції не перевищує 5% кожним алгоритмом, а для задач із кількістю рівнів 10 – не перевищує 10%. Це зумовлено тим, що генерується велика кількість прямокутників з невеликою різницею довжин сторін, тому кількість околів, які можна переглянути, перевищує задані часові ліміти.

Найкращі результати у середньому показав алгоритм табуйованого пошуку для задач, яка складається з 20 рівнів та кількістю прямокутників 55-70, проте в інших випадках переваги у середньому покращенні значення цільової функції алгоритм табуйованого пошуку не очевидні.

Для задач із 15 рівнями алгоритми табуйованого пошуку має незначне середнє покращення у порівнянні з алгоритмом локального пошуку для кількості прямокутників, що перевищує 50, окрім задач для 65 прямокутників.

На рисунках 3 та 4 наведемо графіки залежності часу роботи алгоритмів від параметрів задачі (кількості рівнів стрічки та прямокутників).

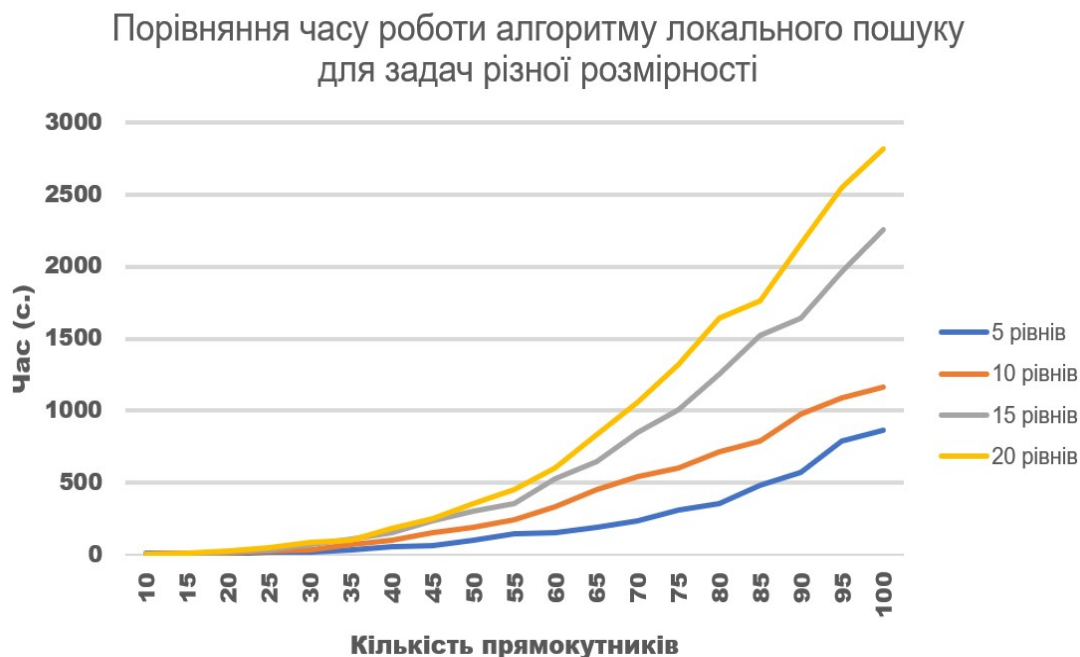


Рис. 3. Час роботи алгоритму локального пошуку

Час роботи алгоритму локального пошуку значно більший за час роботи алгоритму табуйованого пошуку для задач з кількістю прямокутників більше за 30. Це зумовлено тим, що алгоритм табуйованого пошуку повторно не розглядає околи і тому, отримуючи нові околи без покращення – зупиняє свою роботу, в той час, коли алгоритм локального пошуку продовжує розглядати інші околи, доки не закінчиться заданий ліміт ітерацій для околу.

Із рисунку 4 випливає, що для час роботи алгоритму табуйованого пошуку буде найменшим для будь-якої кількості прямокутників у випадку, коли стрічка має 5 рівнів. Максимальний час роботи алгоритму табуйованого пошуку більший для задач, де стрічка має 15 та 20 рівнів, проте не перевищує час роботи алгоритму локального пошуку.



Рис. 4. Час роботи алгоритму табуйованого пошуку

У таблиці 2 подані інші результати експерименту: рекордне (найкраще знайдене) значення цільової функції, середньоквадратичне відхилення (СКВ), дисперсія та довірчі інтервали.

Таблиця 2. Результати експерименту, частина 2

Задача		Локальний пошук					Табуйований пошук				
Рівні	Прямокутники	Рекорд	СКВ	Дисперсія	Довірчі інтервали		Рекорд	СКВ	Дисперсія	Довірчі інтервали	
5	10	10	2.9	8.5	13.0	18.9	9	3.3	11.0	11.6	18.3
5	15	18	2.5	6.7	19.4	24.5	19	2.5	6.5	19.4	24.5
5	20	24	3.0	9.1	24.9	31.0	22	4.8	23.3	25.1	34.8
5	25	30	3.8	14.7	34.1	41.8	29	3.8	15.1	33.1	40.8
5	30	36	5.7	32.7	38.2	49.7	34	5.6	32.4	37.3	48.6
5	35	47	5.3	28.1	47.6	58.3	48	3.8	15.0	47.1	54.8
5	40	54	5.6	31.9	56.3	67.6	51	3.8	14.7	55.1	62.8
5	45	60	4.8	23.4	65.1	74.8	57	5.5	31.0	60.4	71.5
5	50	65	5.5	30.8	70.4	81.5	67	4.0	16.6	69.9	78.0
5	55	73	4.8	23.8	74.1	83.8	73	5.0	25.5	76.9	87.
5	60	78	7.9	63.0	84.0	99.9	80	6.2	39.3	86.7	99.2
5	65	86	8.5	72.3	86.4	103.5	77	7.6	58.9	88.3	10.6
5	70	94	6.3	40.8	101.6	114.3	82	9.1	83.4	94.8	113.1
5	75	102	6.6	44.2	104.3	117.6	95	8.1	66.5	105.8	122.1
5	80	112	5.7	32.7	113.2	124.7	102	7.1	51.4	108.8	123.1

5	85	120	5.0	25.3	121.9	132.0	113	8.3	70.0	113.6	130.3
5	90	116	7.5	56.4	125.4	140.5	117	6.8	47.5	127.1	140.8
5	95	125	9.1	83.2	126.8	145.1	130	7.1	50.9	133.8	148.1
5	100	136	10.9	120.8	139.0	160.9	132	9.4	88.5	136.5	155.4
10	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	15	12	1.1	1.4	11.8	14.1	10	1.8	3.3	11.1	14.8
10	20	13	2.3	5.7	14.6	19.3	12	2.9	8.8	13.0	18.9
10	25	18	2.4	5.9	18.5	23.4	17	1.8	3.4	18.1	21.8
10	30	20	2.1	4.6	21.8	26.1	20	2.5	6.4	19.4	24.5
10	35	24	2.9	8.7	25.0	30.9	23	2.4	6	24.5	29.4
10	40	25	2.9	8.6	27.0	32.9	28	2.6	7.2	28.3	33.6
10	45	27	2.8	8.1	31.1	36.8	31	2.4	5.8	32.5	37.4
10	50	32	2.9	8.5	36.0	41.9	32	3.3	11.5	35.6	42.3
10	55	39	2.5	6.2	39.4	44.5	33	3.7	14.0	39.2	46.7
10	60	44	1.4	2	45.5	48.4	39	3.0	9.2	43.9	50.0
10	65	41	3.5	12.2	46.4	53.5	41	2.7	7.3	45.2	50.7
10	70	50	3.0	9.5	51.9	58.0	44	3.4	12.0	49.5	56.4
10	75	54	3.2	10.8	53.7	60.2	51	3.6	13.4	53.3	60.6
10	80	53	4.7	22.2	53.2	62.7	54	4.6	21.4	54.3	63.6
10	85	61	2.6	7.0	62.3	67.6	57	3.3	10.9	57.6	64.3
10	90	62	3.3	10.9	63.6	70.3	63	3.8	14.9	65.1	72.8
10	95	63	4.4	20	67.5	76.4	65	3.9	15.6	68.0	75.9
10	100	72	2.7	7.5	71.2	76.7	69	3.2	10.5	72.7	79.2
15	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	20	12	0.2	0.1	12.7	13.2	11	0.7	0.5	12.2	13.7
15	25	13	1.9	3.9	13.0	16.9	13	1.9	3.7	13.0	19.9
15	30	15	1.7	3.0	16.2	19.7	15	1.1	1.4	15.8	18.1
15	35	18	1.4	2.1	18.5	21.4	16	2.3	5.4	18.6	23.3
15	40	20	1.6	2.5	21.3	24.6	20	2.0	4.3	21.9	26.0
15	45	22	1.9	3.8	24.0	27.9	20	1.9	3.8	23.0	26.9
15	50	25	1.7	2.9	26.2	29.7	24	2.1	4.5	25.8	30.1
15	55	27	2.0	4.2	28.9	33.0	26	1.7	2.8	27.2	30.7
15	60	29	1.8	3.2	30.1	33.8	29	1.6	2.8	30.3	33.6
15	65	31	2.2	4.9	32.7	37.2	31	2.1	4.7	32.8	37.1
15	70	33	1.7	3.1	35.2	38.7	32	3.1	9.9	33.8	40.1
15	75	35	2.3	5.6	35.6	40.3	35	2.6	7.2	37.3	42.6
15	80	36	3.0	9.4	39.9	46.0	39	2.8	8.2	38.1	43.8
15	85	41	2.7	7.7	42.2	47.7	37	2.6	7.2	40.3	45.6
15	90	42	3.2	10.4	43.7	50.2	45	2.0	4.0	44.9	49.0
15	95	45	3.1	9.7	45.8	52.1	46	2.6	6.8	48.3	53.6
15	100	50	2.1	4.4	50.9	55.1	48	3.5	12.9	48.4	55.5
20	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	25	11	0.5	0.3	12.4	13.5	12	0.8	0.6	12.1	13.8

20	30	11	1.4	2.1	11.5	14.4	12	1.4	2.0	11.5	14.4
20	35	13	2.3	5.3	13.6	18.3	13	1.8	3.5	14.1	17.8
20	40	17	1.5	2.2	17.4	20.5	16	0.9	0.9	17.0	18.9
20	45	18	1.4	2.2	19.5	22.4	16	1.8	3.3	17.1	20.8
20	50	18	2.5	6.3	19.4	24.5	18	2.0	4.3	18.9	23.0
20	55	20	1.3	1.8	21.6	24.3	21	1.7	2.9	22.2	25.7
20	60	23	1.0	1.0	23.9	26.0	22	2.0	4.2	22.9	27.0
20	65	24	2.2	5.2	24.7	29.2	23	1.7	3.1	25.2	28.7
20	70	25	2.4	5.8	26.5	31.4	26	1.1	1.4	26.8	29.1
20	75	28	1.4	2.2	29.5	32.4	28	2.6	6.8	28.3	33.6
20	80	30	1.3	1.7	31.6	34.3	29	2.1	4.8	30.8	35.1
20	85	31	1.4	1.9	32.5	35.4	32	1.7	3.0	32.2	35.7
20	90	34	3.0	9.5	33.9	40.0	33	1.4	2	33.5	36.4
20	95	33	2.0	4.2	36.9	41.0	36	1.7	2.8	36.2	39.7
20	100	36	2.1	4.5	38.8	43.1	38	1.8	3.5	38.1	41.8

На рисунку 5 подано графік залежності рекордного значення цільової функції від параметрів задачі для кожного алгоритму.

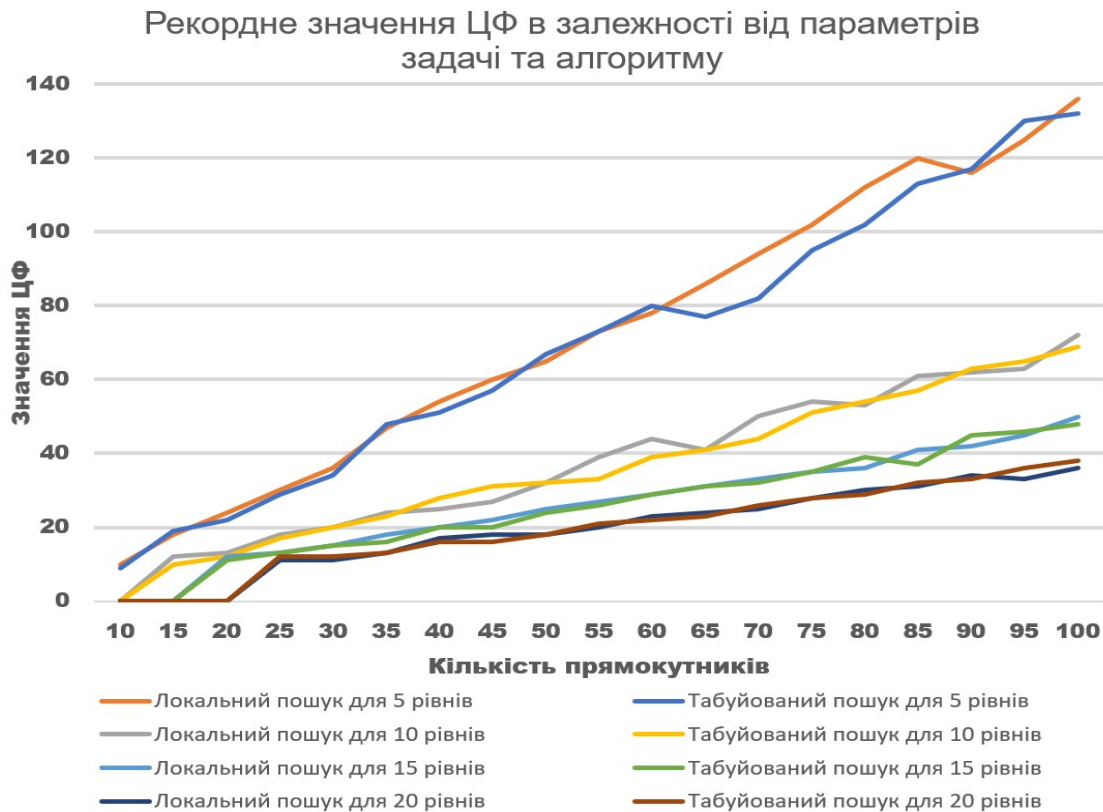


Рис. 5. Рекордне значення цільової функції

Рекордні значення цільової функції для задач з кількістю рівнів 15 та 20 майже однакові, проте, якщо кількість прямокутників більша за 90 – кращі рекордні значення отримано алгоритмом табуованого пошуку.

Отже, для розглянутої задачі розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці алгоритм табуованого пошуку показав кращі результати, ніж

алгоритм локального пошуку.

До переваг алгоритму локального пошуку можна віднести такі: можливість перегляду всіх точок в околі, для деяких задач – найкраще значення цільової функції. Недоліками алгоритму є час роботи алгоритму та гірше значення середнього покращення значення цільової функції.

До переваг алгоритму табуйованого пошуку можна віднести час роботи алгоритму, середнє покращення значення цільової функції. Недоліком алгоритму табуйованого пошуку є менше знайдене рекордне значення цільової функції.

Час роботи алгоритму локального пошуку є суттєвим недоліком, оскільки у реальних задачах часто є обмеження у часових ресурсах, тому за вказаний час можна не отримати найкращого розв'язку. Для таких випадків доцільно використовувати алгоритм табуйованого пошуку, оскільки середнє покращення вище, ніж у алгоритмі локального пошуку.

**6. Висновки.** В роботі запропоновано алгоритми локального та табуйованого пошуку для розв'язування задачі задач розміщення прямокутників на напівнескінченній стрічці з забороненими областями. Досліджено експериментально ефективність алгоритмів та зазначено переваги та недоліки кожного із них.

Перспективи подальших досліджень полягають у модифікації алгоритмів локального та табуйованого пошуку для підвищення їх ефективності, а також використання популяційних метаевристик [4], зокрема, із включенням в них цих алгоритмів.

### Список використаної літератури

1. Fuentes G.E.A., Gress E.S.H., Mora J.C.S.T., Marin J.M. Solution to travelling salesman problem by clusters and a modified multi-restart iterated local search metaheuristic. *PLoS ONE*. 2018. Vol. 13(8). e0201868. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201868>
2. Hoos H.H., Stützle T. Stochastic local search: Foundations and applications. Elsevier, 2004.
3. Song T., Liu S., Tang X., Peng X., Chen M. An iterated local search algorithm for the University Course Timetabling Problem. *Applied Soft Computing*. 2018. Vol. 68. P. 597-608. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.04.034>
4. Handbook of metaheuristics. Cham: Springer, 2019.
5. Сергиенко И.В., Гуляницький Л.Ф., Мальшко С.А. О решении задач размещения одного класса. *Экономика и математические методы*. 1989. XXV, № 3. С. 560-564.
6. Дубіна А., Гуляницький Л. Алгоритми локального пошуку та табу-пошуку для задач розміщення прямокутників. Наукове забезпечення технологічного прогресу ХХІ сторіччя: матеріали міжнародної наукової конференції (Т.2). 1 травня, 2020 рік. Чернівці, Україна: МЦНД. С. 48-53.
7. Гуляницький Л. Ф., Мулеса О. Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навч. посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". 2016.

**Hulianytskyi L. F., Dubina A. V.** Solve problems of placing rectangles on a semi-infinite tape of local and taboo search algorithms.

The paper considers the algorithms of standard local and taboo search for solving the problem of placing rectangles on a semi-infinite tape. The peculiarities of the problem are the presence of forbidden areas (holes) that affect the efficiency of algorithms. The researched problem has significant theoretical value and important applied value. This problem belongs to the problems of NP-complete and most of the methods of solution are approximate.

The efficiency of the proposed algorithms for the problem of placing rectangles is experimentally investigated. Record values of the objective function, variance, confidence intervals



and algorithm runtime for problems with different parameters are determined.

**Keywords:** placement optimization, local search, tabu search, combinatorial optimization.

### Список використаної літератури

1. Fuentes, G.E.A., Gress, E.S.H., Mora, J.C.S.T., & Marin, J.M. (2018). Solution to travelling salesman problem by clusters and a modified multi-restart iterated local search metaheuristic. PLoS ONE 13(8), e0201868. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0201868>.
2. Hoos, H.H., & Stützle, T. (2004). Stochastic local search: Foundations and applications. Elsevier.
3. Song, T., Liu, S., Tang, X., Peng, X., & Chen, M. (2018). An iterated local search algorithm for the University Course Timetabling Problem. Applied Soft Computing, 68, 597-608. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.04.034>.
4. Handbook of metaheuristics. (2019). Cham: Springer.
5. Sergienko, I.V., Hulianitskyi, L.F., & Malyshko, S.A. (1989). About the decision of problems of placement of one class. Economics and Mathematical Methods, XXV, 3, 560-564 [in Russian].
6. Hulianitskyi, L., & Dubina, A. (2020). Local search algorithms and taboo search for the task of placing rectangles. Scientific support of technological progress of the XXI century: materials of the international scientific conference (Vol. 2), May 1, 2020. Chernivtsi, Ukraine, 48-53 [in Ukrainian].
7. Hulianitskyi, L.F., & Mulesa, O. Y. (2016). Applied methods of combinatorial optimization. Publishing and Printing Center "Kyiv University"[in Ukrainian].

Одержано 06.04.2021

УДК 004.932.72

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).137-142](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).137-142)**Л. М. Дяконюк<sup>1</sup>, А. С. Мудрик<sup>2</sup>, Я. А. Корольчук<sup>3</sup>, М. І. Кондор<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> Львівський національний університет ім. І. Франка,  
доцент кафедри прикладної математики та інформатики,  
кандидат фізико-математичних наук  
liliya.dyakonyuk@lnu.edu.ua  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5663-0501>

<sup>2</sup> Львівський національний університет ім. І. Франка,  
магістр 2-го року навчання факультету прикладної математики та інформатики  
mudrykandrew@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6608-4425>

<sup>3</sup> Львівський національний університет ім. І. Франка,  
магістр 2-го року навчання факультету прикладної математики та інформатики  
koroltchukjaroslav@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6365-6101>

<sup>4</sup> Львівський національний університет ім. І. Франка,  
магістр 2-го року навчання факультету прикладної математики та інформатики  
martakondor17@gmail.com  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8715-0997>

## РОЗПІЗНАВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ФОРМУЛ НА БАЗІ ДАНИХ СРОНМЕ

У наш час найбільш точні моделі для розпізнавання об'єктів базуються на двоступеневому підході, популяризованому як R-CNN. На відміну від них, одноступеневі моделі, що застосовуються під час регулярного, детального відбору зразків, можуть бути швидшими та простішими, але вони не досягають точності двоступеневих моделей. Проте з новою функцією втрат, дисбаланс класу, який виникає під час тренування на наборі даних, зникає. Саме тому одноступенева модель має переваги в продуктивності та точності на відміну від двоступеневої. У роботі використано цей дисбаланс класів, щоб переформувати стандартні, перехресні ентропійні втрати таким чином, щоб зменшити їх. В архітектурі RetinaNet [1], функція втрат Focal Loss [1] сфокусує навчання на наборі даних, які зустрічаються рідше, і запобігає перевантаженню моделі під час тренувань. Архітектура RetinaNet була протестована на наборі даних СРОНМЕ [4], що був розширений за допомогою алгоритму Data Augmentation [9] для збільшення частоти входження певних елементів формул. Також було порівняно дві бібліотеки машинного навчання: TensorFlow та Torch. Отримані результати показують, що коли модель тренується з фокальною втратою, RetinaNet показує дуже добрі результати та має хорошу швидкість виконання. Окрім того, отриману модель було інтегровано в веб-застосунок на основі мікросервісної архітектури. Основними веб-фреймворками було використано NodeJs для серверної частини та VueJs для рівня подання. Для роботи з базами даних ми використовуємо MongoDB. Розгортання програми відбувається за допомогою хмарної служби AWS на основі Lambda-функцій, що дає змогу виокремити процеси навчання, обробки, візуалізації та контролювати ресурси серверу окремо для кожного процесу.

**Ключові слова:** розпізнавання об'єктів, Retina.Net, набір даних, машинне навчання, СРОНМЕ.

**1. Вступ.** Останнім часом системам розпізнавання об'єктів приділяють все більше уваги. Вони досить широко використовуються, але важко створити

систему, яка може розпізнавати об'єкти без належних навчальних даних. Складність розпізнавання математичних виразів залежить від багатьох факторів, до прикладу: кількості об'єктів, набору доступних символів, граматики запису.

Точність отриманих результатів є безпосередньо пов'язаною з навчальними даними, тому використовуються методи збільшення навчальної вибірки для покращення їх якості. Є набір основних архітектур для розв'язування цієї задачі. Як відомо, їх можна класифікувати як однокрокові і двокрокові. Однокрокові є швидкими, проте двокрокові є більш точними. Була використана архітектура RetinaNet, яка є однокроковим методом. Вона має найкращі показники відносно часу виконання/точності на популярних навчальних даних. Після навчання модель готова до використання. Цю модель можна інтегрувати за допомогою Docker контейнеру.

**2. Основний результат.** Задача полягає у тому, щоб на наборі даних CROHME, навчити детектор розпізнавати математичні символи формули.

Умовно процес можна розділити на 3 частини:

- 1) формування даних для навчання,
- 2) навчання та оцінка мережі,
- 3) імплементація моделі.

1. Skorистаємось базою формул CROHME, що поновлюється щорічно та містить деякий базовий набір формул та символів написаних від руки у спеціальному форматі INKML, створеному для цієї вибірки.

Цей формат містить:

- інформацію про розміщення символу на сторінці,
- назву символів формули,
- залежності від інших символів, якщо такі є.

Також додатково він може містити

- інформацію про особу, що писала ці символи (корисно для проблем визначення віку, статі або ж руку, якою символи були написані),
- LaTeX стрічку відповідного символу.

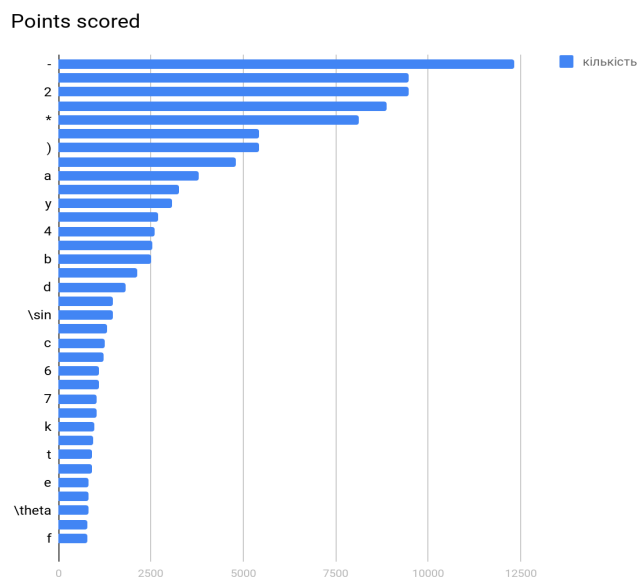


Рис. 1. Розподіл класів CROHME

Детально дослідивши набір даних, можна виділити символи, що мають малу частоту входження у тренувальну вибірку (рис.1). Тому для формул із ними застосуємо наступні перетворення:

- поворот,
- віддзеркалення,
- обрізування,
- зміну фону.

2. RetinaNet [1] був розроблений Facebook AI Research (FAIR) у 2018 році, і є однокроковим детектором. Якщо порівнювати двокрокові і однокрокові детектори, то всі моделі типу R-CNN включали в себе 2 етапи.

1-ий етап пропонує набір регіонів на фотографії.

2-ий етап класифікує регіон до того чи іншого класу.

Однокроковий детектор пропускає виділення регіонів і напряму знаходить оточуючу рамку конкретного об'єкту.

Focal loss - функція втрат, яка буде використовуватись для тренування моделей. Ця функція призначена для однокрокового сценарію виявлення об'єктів, при якому існує надзвичайний дисбаланс між класами переднього плану та фоном під час навчання.

Також було використано ResNet50 [2] як основну частину архітектури RetinaNet.

Для порівняння архітектура була реалізована на бібліотеках TensorFlow [8] і PyTorch [7] на мові програмування Python.

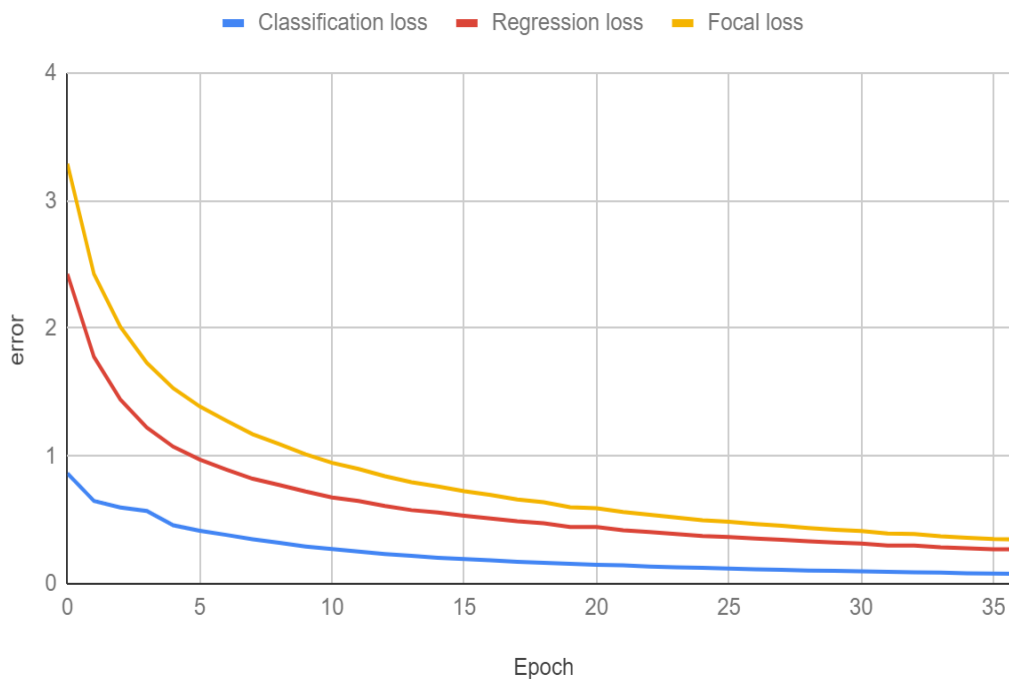


Рис. 2. Результат навчання tensorflow

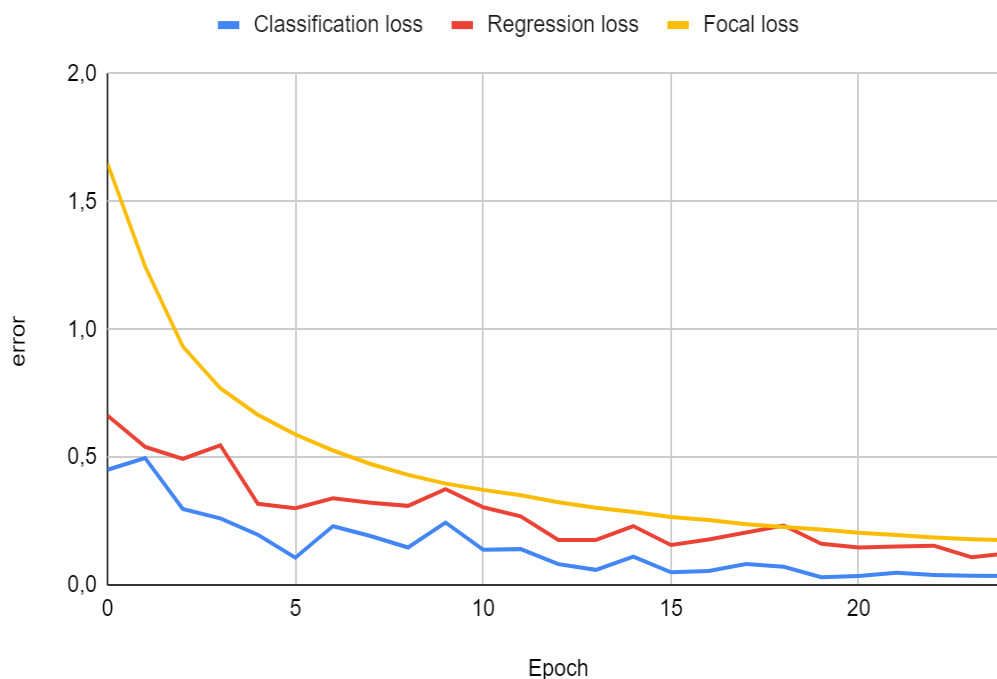


Рис. 3. Результат навчання torch

У таблиці 1 відображені чисельні результати обчислення різних функцій втрат при застосуванні двох бібліотек.

Таблиця 1.

## Оцінка моделі

Бібліотека	Classification loss	Regression loss	Focal loss
<i>PyTorch</i>	0,034	0,123	0,174
<i>TensorFlow</i>	0,077	0,261	0,346

Проаналізувавши результати, можемо зробити висновок, що швидкість навчання і краща точність досягається з *pytorch*, що робить його фаворитом для даної задачі. Через певні особливості паралельного навчання, які є вбудовані у *pytorch*, і досягається ця різниця.

Час роботи *pytorch* для однієї картинки складає  $\sim 700$  мс, так як у *tensorflow*  $\sim 1$  с. Для тесту було використаний графічний процесор Nvidia 2070 Super.

Модель може також пристосовуватись до почерку конкретної людини. Для цього необхідно включити приклади з цим почерком до навчальної вибірки.

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У нашій роботі однокрокова мережа була навчена розпізнавати написані від руки математичні вирази, які згодом подавались у вигляді формул LaTeX. Основною проблемою було покращення існуючого набору даних. Також було порівняно результати двох бібліотек для роботи з нейронними мережами.

Було застосовано архітектуру RetinaNet на основі ResNet50. Проте для цього

завдання не було порівняно основи для RetinaNet. Також ми не можемо провести порівняння точності результатів, оскільки не було проведено навчання для інших моделей.

На відміну від інших робіт на цю тему, в цій роботі була використана саме однокрокова мережа, що виділяється своєю простотою та швидкістю. Але відомо, що однокрокові мережі поступаються точністю двокроковим. Для того, щоб відслідкувати відхилення в точності потрібно було провести навчання інших моделей.

На основі цього було розроблено додаток на базі мікросервісної архітектури, використовуючи інструменти для розпізнавання та ідентифікації математичного виразу.

### Список використаної літератури

1. Focal loss for dense object detection / T. Lin, P. Goyal, R. Girshick та ін. 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1708.02002.pdf>.
2. He K., Zhang X., Ren S., Sun J. Deep residual learning for image recognition. 2015. URL: <https://arxiv.org/pdf/1512.03385v1.pdf>.
3. Puppeteer. URL: <https://www.npmjs.com/package/puppeteer-core>.
4. CHORME. URL: [http://www.iapr-tc11.org/mediawiki/index.php/CROHME:\\_Competition\\_on\\_Recognition\\_of\\_Online\\_Handwritten\\_Mathematical\\_Expressions](http://www.iapr-tc11.org/mediawiki/index.php/CROHME:_Competition_on_Recognition_of_Online_Handwritten_Mathematical_Expressions).
5. Шум Гаусса. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_noise](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_noise).
6. AWS Lambda. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/AWS\\_Lambda](https://en.wikipedia.org/wiki/AWS_Lambda).
7. PyTorch. URL: <https://pytorch.org/>.
8. TensorFlow. URL: <https://www.tensorflow.org/>.
9. Data Augmentation. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Data\\_augmentation](https://en.wikipedia.org/wiki/Data_augmentation)

**Diakoniuk L. M., Mudryk A. S., Korolchuk Y. A., Kondor M. I.** Object detection of the mathematical symbols based on the CROHME dataset.

The highest accuracy object detectors to date are based on a two-stage approach popularized by R-CNN, where a classifier is applied to a sparse set of candidate object locations. In contrast, one-stage detectors that are applied over a regular, dense sampling of possible object locations have the potential to be faster and simpler but have trailed the accuracy of two-stage detectors thus far. But with new extreme foreground-background class imbalance encountered during training of dense detectors, one-stage detector wins by performance and accuracy. We use this class imbalance by reshaping the standard cross-entropy loss such that it down-weights the loss assigned to well-classified examples. In RetinaNet architecture, Focal Loss focuses training on a sparse set of hard examples and prevents the vast number of easy negatives from overwhelming the detector during training. We tested RetinaNet on a CROHME dataset that was increased by the default image augmentation algorithm. Also, we compare two machine learning libraries: TensorFlow and Torch. Our results show that when a model is trained with the focal loss RetinaNet shows very good results and has a good speed. Also, we integrate the inference model into service as a part of microservice architecture. As a database for user clients, we use MongoDB. As the main Web framework, we use NodeJs and VueJs. We use AWS as a cloud service for deploying the application. All functionality we deployed based on the AWS Lambda functions.

**Keywords:** one-stage detectors, object detection, RetinaNet, dataset, machine learning, CROHME.

### Список використаної літератури

1. Lin, T., Goyal, P., Girshick, R., He, K., & Dollar, P. (2018). Focal loss for dense object detection, 1–10. <https://arxiv.org/pdf/1708.02002.pdf>.
2. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2015). Deep residual learning for image recognition, 1–12. <https://arxiv.org/pdf/1512.03385v1.pdf>.

3. *puppeteer* (n.d). Retrieved from: <https://www.npmjs.com/package/puppeteer-core>.
4. *CROHME* (n.d). Retrieved from: [http://www.iapr-tc11.org/mediawiki/index.php/CROHME:\\_Competition\\_on\\_Recognition\\_of\\_Online\\_Handwritten\\_Mathematical\\_Expressions](http://www.iapr-tc11.org/mediawiki/index.php/CROHME:_Competition_on_Recognition_of_Online_Handwritten_Mathematical_Expressions).
5. *Gaussian noise* (n.d). Retrieved from: [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_noise](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_noise).
6. *AWS Lambda* (n.d). Retrieved from: [https://en.wikipedia.org/wiki/AWS\\_Lambda](https://en.wikipedia.org/wiki/AWS_Lambda).
7. PyTorch (n.d). Retrieved from: <https://pytorch.org/>.
8. TensorFlow (n.d). Retrieved from: <https://www.tensorflow.org/>.
9. Data Augmentation (n.d). Retrieved from: [https://en.wikipedia.org/wiki/Data\\_augmentation](https://en.wikipedia.org/wiki/Data_augmentation).

Одержано 06.04.2021

УДК 519.237.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148)**Н. Е. Кондрук**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат технічних наук

natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

## ВИКОРИСТАННЯ МІР ПОДІБНОСТІ В МЕТОДАХ КЛАСИФІКАЦІЇ

Дане дослідження є розвитком напрямку застосування різних видів мір подібності в задачах інтелектуального аналізу даних. Майнінг даних – це процес видобутку неявної інформації з бази даних, яка характеризує приховані зв'язки та структури. Прогнозується, що цей вид аналізу стане надзвичайно затребуваним протягом наступного десятиліття. В роботі наведено огляд сучасних напрямків контрольованої класифікації. Найпопулярнішим прийомом класифікації об'єктів із числовими атрибутами вважається метод  $K$ -найближчих сусідів (KNN). Встановлено, що прогнозне значення мітки класу можна покращити, якщо використовувати зважений вплив кожного сусіда на результат. Таким чином, доцільно модифікувати метод KNN. При цьому, запропоновано ввести функцію, що характеризує схожість неміченого об'єкта із його найближчими сусідами у вигляді міри подібності. На її основі введено індикатори зваженого підрахунку голосів «сусідів» за певну мітку класу. Розроблено програмне забезпечення, що реалізує описаний підхід. Проведення практичних експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

**Ключові слова:** класифікація, алгоритм  $k$ -найближчих сусідів, KNN, міра подібності, контрольоване машинне навчання.

**1. Вступ.** Інтелектуальний аналіз даних – це розділ науки про дані, який використовує обчислювальні прийоми статистики, машинного навчання та розпізнавання шаблонів для аналізу баз даних. Цей тип аналізу має дві мети: прогнозуючу та описову. Прогнозуючі моделі (регресія, класифікація) використовують для передбачення поведінки певних процесів та явищ. Дескриптивні моделі (кластеризація, асоціативні методи, послідовне виявлення шаблонів) визначають закономірності, що описують дані.

Методика класифікації, як метод прогнозування, – це техніка контрольованого машинного навчання, що передбачає існування групи мічених взірців (прототипів, навчаючої вибірки) для кожного класу об'єктів. Класифікація – це завдання присвоєння міток класу об'єктам даних без міток. Процес класифікації згідно [1]:

- вхід: набір атрибутів прототипів, включаючи атрибут мітки класу;
- класифікатор – модель класифікації, що буде використовуватись для прогнозування мітки класу нових об'єктів;
- вихід: класифікований шаблон, що визначив мітку класу об'єкта на основі його атрибутів.

Системний підхід до вивчення класифікаційної моделі з урахуванням навчальної вибірки називають алгоритмом навчання. Процес використання алгоритму навчання для побудови класифікаційної моделі з навчальних даних відомий як індукція. Цей процес також часто описується як "вивчення моделі" або



"побудова моделі". Застосування моделі класифікації на тестових об'єктах для прогнозування їх класу відомий як дедукція. Таким чином, процес класифікації включає два етапи: застосування алгоритму навчання до навчальних даних для вивчення моделі, а потім застосування моделі для визначення міток неміченим об'єктам.

Найпоширенішими є такі методи класифікації: дерева рішень; Байєсівські класифікатори; штучні нейронні мережі; класифікатор  $k$ -найближчих сусідів.

**2. Дерева рішень (Decision Tree, DT).** Структура дерева рішень організована таким чином, що воно містить корінь, гілки, які є внутрішніми вузлами та листи, які далі не класифікуються. Внутрішні вузли представляють атрибути; гілки, що з'єднують вузли, визначають значення атрибутів; листи містять мітки класів. Вони широко використовуються в процесі прийняття рішень.

Існують різні алгоритми дерева рішень – ID3, C4.5, C5.0, CART, SPRINT. Вони використовують спеціальні функції, що найкраще розділяють набір даних за певним атрибутом. Серед них – приріст інформації (Information Gain) та індекс Джині (Index Gini). При цьому, будують дерево рішень як схематичну деревоподібну діаграму [2].

В процесі побудови дерева рішень можуть бути виявлені помилки. Їх можна виправити та оцінити за допомогою підходу, який називається усіченням дерева. Використовують два методи – попереднє та «після» усічення. При попередньому усіченні на початковому етапі перевіряється наявність аномалій, які зупиняють побудову дерева. При цьому вузол стає листом. У методі «після» усічення будується все дерево, потім з кореня починається видалення піддерев, якщо в них виявлено будь-яку аномалію.

Використання даного підходу виявилось успішним в багатьох прикладних задачах діагностики захворювань та прогнозування статусу студентів після навчання та передбачення рівня успішності здобувачів освіти [3-4].

**3. Байєсівські класифікатори.** Баєсовський класифікатор (Naive Bayes, BayesNe, NBC) – це проста, але важлива ймовірнісна модель. В основі даного методу лежить теорема Байєса про умовну ймовірність. При його використанні для баз даних великої потужності, алгоритм демонструє високу точність і швидкість [5]. Априорі припускається, що атрибути є незалежними. Це припущення називається умовно-класовою незалежністю. Наївні байєсовські моделі прості в реалізації та популярні в додатках машинного навчання, вони забезпечують можливість кожному атрибуту однаково впливати на прийняте рішення незалежно від інших атрибутів. Крім того, NBC дуже швидко будує та оцінює моделі.

**4. Штучні нейронні мережі.** Штучні нейронні мережі (Single-Layer Perceptron, Multy-Layer Perceptron, SVM) виражаються в термінах біологічної нейронної системи. Вони складаються з кількості окремих одиниць (нейронів), що комунікують між собою, надсилаючи сигнали та організовані у вигляді напрямленого графу, який містить вузли та ребра, що з'єднують кожен вузол. Ребра – це взаємозв'язки між кожним вузлом. Кожне ребро, що з'єднує вузол, містить вагу. Розраховується сума ваг. Порогове значення присвоюється кожному нейрону. Якщо зважена сума перевищує порогове значення, вона видає вихід 1, інакше 0.

Класичним застосуванням нейронних мереж є розпізнавання зображень у

сфері забезпечення якості, медичній діагностиці та засобів аналізу відбитків пальців.

**5. Класифікатори найближчих сусідів.** Класифікатори найближчих сусідів також відомі як класифікатори на основі відстані (KNN, PEBLS). Вони засновані на вивченні аналогій. Невідомому об'єкту ставиться у відповідність мітка найпоширенішого класу серед його найближчих сусідів. Якщо  $k = 1$ , то невідомому екземпляру присвоюється мітка класу прототипу, який є найближчим до нього в просторі шаблонів. Вважається [6-8], що це один з найпростіших і найбільш часто використовуваних алгоритмів класифікації.

Недоліком є те, що при голосуванні об'єктів-«сусідів» за певний клас може виникати невизначеність через рівномірний розподіл їх голосів. Тому доцільно використовувати модифікований метод найближчих сусідів, де підрахунок голосів проводиться за зваженою сумою із так званими ваговими коефіцієнтами, що відповідають за подібність сусіда до нового об'єкта. Обґрунтованість підбору вагових коефіцієнтів є відкритою задачею, що потребує додаткових досліджень.

**6. Постановка задачі.** Нехай задано навчаючу вибірку об'єктів та новий немічений об'єкт  $O$ . Визначимо параметр  $k$  і за деякою метрикою відстані  $d$  (Евклідовою, манхетенською, Хемінга)  $k$  найближчих сусідів до  $O$ . Ставиться задача реалізувати зважене голосування за прогнозу мітку класу для нового об'єкта.

**7. Матеріали і методи.** Нехай  $k$  найближчих сусідів до  $O$  серед об'єктів навчаючої вибірки будуть  $\tilde{O} = \{O_i, i = \overline{1, k}\}$ . Кожен  $O_i$  характеризується атрибутами  $\bar{a}_i (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$  та міткою класу  $c^i \in C$ . Тоді, поставимо у відповідність об'єкту  $O$  та деякій із можливих міток класу  $c^*$  бінарний вектор  $\bar{y}^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо } c^i \neq c^*; \\ 1, & \text{якщо } c^i = c^*. \end{cases}$

Введемо нечітке бінарне відношення, що визначає схожість об'єктів серед найближчих сусідів із функцією належності виду:

$$\mu_{R^{KNN}}^i = e^{-\frac{d(O_i, O)}{d_{\max}}}. \quad (1)$$

$d_{\max}$  – визначає найбільшу відстань від неміченого об'єкта  $O$  до  $k$  найближчих точок із  $\tilde{O}$ . Таким чином,  $\mu_{R^{KNN}} : \tilde{O}^2 \rightarrow [\frac{1}{e}, 1]$ . Чим більше значення величини  $\mu_{R^{KNN}}$  близьке до 1, тим в більшому ступені об'єкти  $O_i$  та  $O$  будуть подібними за своїми атрибутами. Найменше значення міри подібності (1) не буде досягати нуля, тому при визначенні мітки класу голоси всіх сусідів будуть враховані.

Голоси за клас пропонується розраховувати за наступними індикаторами:

$$votes(class = c^*) = \sum_{i=1}^k \mu_{R^{KNN}}^i \cdot y_i^* \quad (2)$$

або

$$votes(class = c^*) = \frac{\sum_{i=1}^k \mu_{R^{KNN}}^i \cdot y_i^*}{\sum_{i=1}^k \mu_{R^{KNN}}^i} \cdot 100, \quad (3)$$

де  $y_i^*$  –  $i$ -ва координата вектора  $\bar{y}^*$ .

Індикатори (2) та (3) накопичують зважені голоси за клас: чим далі від  $O$  знаходиться сусід, тим в меншому ступені враховується його голос. Формула (3) є нормованою та визначає голоси за клас у відсотках. Підраховуємо голоси для всіх можливих класів і новому об'єкту  $O$  прогнозуємо ту мітку  $c^*$  значення індикатора (2) або (3) для якої є максимальним.

**8. Експерименти.** Для проведення практичних експериментів була розроблена комп'ютерна програма, що реалізує модифікований метод найближчих сусідів і використовує індикатори (2) та (3) при прогнозуванні мітки класу новому об'єкту.

Вхідною інформацією для проведення класифікації є навчаюча вибірка із міченими об'єктами та кортеж атрибутів нового об'єкту  $O$ . Кількість сусідів обчислюється за формулою  $k = \lceil \sqrt{m} \rceil$ , де  $m$  – потужність вибірки. Вихідною інформацією є мітка класу для  $O$ .

**9. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Дана робота є розвитком напрямку застосування різних видів мір подібності в задачах інтелектуального аналізу даних [9-12].

Наведено огляд сучасних методів контрольованої класифікації; модифіковано метод KNN використанням зваженого голосування за прогнозовану мітку класу, при цьому описано функцію  $\mu_{RKNN}$ , що характеризує схожість нового неміченого об'єкту із його найближчими сусідами. Розроблено програмне забезпечення, що реалізує описаний підхід. Проведення практичних експериментів показало його ефективність при розв'язанні певних класів прикладних задач.

Перспективні дослідження полягають у розвитку підходу використання різних видів мір подібності заснованих на нечітких бінарних відношеннях, які б визначали схожість об'єктів за категоріальними атрибутами та їх застосування при розв'язанні різних видів прикладних задач.

### Список використаної літератури

1. Oprea C. Performance evaluation of the data mining classification methods. *Information society and sustainable development*. 2014. Vol. 1. P. 249-253. DOI: <https://doi.org/10.9790/0661-1060106>
2. Jain N., Vishal S. Data mining techniques: a survey paper. *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2013. Vol. 2, Iss. 11. P. 116-119. DOI: <https://doi.org/10.15623/ijret.2013.0211019>
3. Kumari M., Godara S. Comparative Study of Data Mining Classification Methods in Cardiovascular Disease Prediction. *IJCST*. 2011. Vol. 2. P. 304-308.
4. Jantawan B., Tsai C. The Application of Data Mining to Build Classification Model for Predicting Graduate Employment. *International Journal of Computer Science and Information Security*. 2013. Vol. 11, N 10. P. 1-7.
5. Xhemali D., Hinde C., Stone R. Naïve Bayes vs. Decision Trees vs. Neural Networks in the Classification of Training Web Pages. *IJSCI: International Journal of Computer Science*. 2009. Vol. 4, N 1. P. 16-23.
6. Zhang C., Liu C., Zhang X., Alpanidis G.. An up-to-date comparison of state-of-the-art classification algorithms. *Expert Systems with Applications*. 2017. Vol. 82. P. 128-150. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.04.003>
7. Hamid P., Hoseinali A., Behrouz M. A Modification on K-Nearest Neighbor Classifier. *Global Journal of Computer Science and Technology*. 2010. Vol. 10, Iss. 14. P. 37-41.
8. Singh A., Patel S. Applying Modified KNearest Neighbor to Detect Threat in Collaborative Information Information Systems. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. 2014. Vol. 3, N 6. P. 14141-14151
9. Маляр М. М., Кондрук Н. Е. Структурування критеріального простору за кутковою мірою

- подібності. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 1(36). С. 85-91. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).85-91](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).85-91)
10. Kondruk N. E. Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2018. N 3 (46). P. 98-105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
  11. Kondruk N. E. A comparative study of cluster validity indices. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2019. N 4. P. 59 – 67. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-6>
  12. Kondruk N. Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 2, N 4 (86). P. 10–16. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>

### **Kondruk N. E.** Use of similarity measures in classification methods.

This study is a development of the application of different types of similarity measures in data mining problems. Data mining is the process of extracting implicit information from a database, which characterizes hidden connections and structures. This type of analysis is projected to be extremely popular over the next decade. One of the methods of data extraction is classification. The paper provides an overview of modern areas of supervised classification. The most popular method of classifying objects with numerical attributes is the method of K-nearest neighbors (KNN). It has been found that the predictive value of a class label can be improved by using the weighted influence of each neighbor on the result. Thus, it is advisable to modify the KNN method. In this case, it is proposed to introduce a function that characterizes the similarity of the unlabeled object with its nearest neighbors in the form of a measure of similarity. Based on it, indicators of weighted counting of votes of neighbors for a certain class mark are introduced. Software has been developed that implements the described approach. Practical experiments have shown its effectiveness in solving certain classes of applied problems.

**Keywords:** classification, algorithm k-nearest neighbors, KNN, similarity measures, supervised machine learning.

### **Список використаної літератури**

1. Oprea, C. (2014). Performance evaluation of the data mining classification methods. *Information society and sustainable development*, 1, 249-253. <https://doi.org/10.9790/0661-1060106>
2. Jain, N., & Vishal, S. (2013). Data mining techniques: a survey paper. *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*, 2(11), 116-119. <https://doi.org/10.15623/ijret.2013.0211019>
3. Kumari, M., & Godara, S. (2011). Comparative Study of Data Mining Classification Methods in Cardiovascular Disease Prediction. *IJCST*, 2, 304-308.
4. Jantawan, B., & Tsai, C. (2013). The Application of Data Mining to Build Classification Model for Predicting Graduate Employment. *International Journal of Computer Science and Information Security*, 11(10). 1-7.
5. Xhemali, D., Hinde, C., & Stone, R. (2009). Naïve Bayes vs. Decision Trees vs. Neural Networks in the Classification of Training Web Pages. *IJSCI: International Journal of Computer Science*, 4(1), 16-23.
6. Zhang, C., Liu, C., Zhang, X., & Almpandis, G. (2017). An up-to-date comparison of state-of-the-art classification algorithms. *Expert Systems with Applications*, 82, 128-150. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.04.003>
7. Hamid, P., Hoseinali, A., & Behrouz, M. (2010). A Modification on K-Nearest Neighbor Classifier. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 10(14), 37-41.
8. Singh, A., & Patel, S. (2014). Applying Modified KNearest Neighbor to Detect Threat in Collaborative Information Information Systems. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*, 3(6). 14141-14151
9. Malyar, M. M., & Kondruk, N. E. (2020). Structuring of the criterional space by an anglesimilarity measure. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(36), 85-91. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).85-91](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).85-91)

10. Kondruk, N. E. (2018). Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 3(46), 98-105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
11. Kondruk, N. E. (2019). A comparative study of cluster validity indices. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 4, 59-67. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-6>
12. Kondruk, N. (2017). Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4(86)), 10-16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>

Одержано 13.04.2021

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).149-156](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156)**І. А. Мич<sup>1</sup>, В. В. Ніколенко<sup>2</sup>, О. В. Варцаба<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,  
кандидат фізико-математичних наук

volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики

olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

## СТРУКТУРА СИГНАТУРНОГО КУБУ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

Дана робота є продовженням досліджень, розпочатих в [1], у яких теорія булевих функцій розглядається з точки зору універсальних алгебр. У цій роботі описано клас функціонально неповних алгебр, проведено дослідження основних типів алгебр і розташування їх по ярусах сигнатурного кубу. У даних дослідженнях універсальні булеві алгебри утворюють 11-мірний сигнатурний куб, до складу якого входять 2048 алгебр. Запропоновано нумерацію (кодифікацію) цих алгебр. Вводиться поняття суміжних, граничних, внутрішніх класів функціонально повних і функціонально неповних алгебр.

Булеві алгебри досліджуваного класу  $M$  поділяють на чотири підкласи: клас внутрішніх функціонально неповних алгебр, клас граничних функціонально неповних алгебр, клас граничних функціонально повних алгебр, клас внутрішніх функціонально повних алгебр. У даній роботі пропонується алгоритм знаходження граничних функціонально повних алгебр на основі розширення сигнатури функціонально неповних алгебр булевими операціями. Побудовані підкласи граничних алгебр для кожної з одинадцяти операцій. Вказано ізоморфізм графів деяких класів граничних алгебр. На основі об'єднання графів отримали  $\Omega$ -граф граничних функціонально повних алгебр.

**Ключові слова:** сигнатурний куб, граничні алгебри.

**1. Вступ.** У роботі продовжується дослідження структури булевих алгебр, описаних в [1]. Клас булевих алгебр  $M$  включає в себе всі алгебри, у сигнатурі яких входять операції з множини  $Q = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \uparrow, |\}$ . Оскільки  $|M| = 2^{11}$ , то виникає проблема нумерації (кодифікації) булевих алгебр. Для того, щоб задати булеву алгебру  $U = \langle A, \Omega \rangle$  досить вказати всі операції, які входять в сигнатуру  $\Omega$ . Кожній сигнатурі алгебри  $U$  можна поставити у відповідність булевий вектор – код сигнатури, який у свою чергу може бути заданий натуральним числом, яке будемо називати кодом алгебри. Оскільки алгебри можуть мати різну нумерацію, то в роботах, крім сигнатурного коду алгебри наводять булевий код сигнатури або номер алгебри. Наприклад, сигнатурному коду  $\Omega = \{\neg, \vee, \Leftrightarrow\}$  у класі алгебр, що використовує перші дев'ять операцій з  $Q$  (фіксованим порядком операцій) буде поставлено у відповідність булевий код  $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ . Якщо ця алгебра закодована числом  $148 = 2^2 + 2^4 + 2^7$ ,

то при кодуванні використано прямий код, якщо числом  $41 = 2^0 + 2^3 + 2^5$  – то зворотній. У даній роботі використовується зворотній код.

**Означення 1.** Алгебри  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ ,  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  називаються суміжними, якщо існує ребро, яке з'єднує ці алгебри.

Суміжні алгебри  $U_1$  і  $U_2$  в  $\Omega$ -кубі відрізняються тільки однією операцією, тобто  $|\Omega_1 \cup \Omega_2 - \Omega_1 \cap \Omega_2| = 1$ . Суміжні алгебри знаходяться у сусідніх ярусах  $\Omega$ -кубу.

**Означення 2.** Алгебра  $U = \langle A, \Omega \rangle$  називається граничною, якщо вона містить суміжні функціонально повні та функціонально неповні алгебри.

**Означення 3.** Алгебра  $U = \langle A, \Omega \rangle$  називається внутрішньою, якщо всі її суміжні алгебри є функціонально повними або функціонально неповними.

**Означення 4.** Функціонально неповна алгебра називається передповною, якщо довільне розширення її сигнатури перетворює цю алгебру у функціонально повну.

Булеві алгебри класу  $M$  поділяються на чотири підкласи:  $M_1$  – клас внутрішніх функціонально неповних алгебр;  $M_2$  – клас граничних функціонально неповних алгебр;  $M_3$  – клас граничних функціонально повних алгебр;  $M_4$  – клас внутрішніх функціонально повних алгебр [1].

На рис. 1 наведено граф функціонально неповних алгебр.

**Твердження 1.** Всі функціонально неповні алгебри в класі  $M$  є граничними і утворюють  $\Omega$ -граф.

Твердження доведено в [1].

**Твердження 2.** Функціонально повна алгебра буде граничною тоді і тільки тоді, коли існує операція, яка входить до складу всіх базисів цієї алгебри.

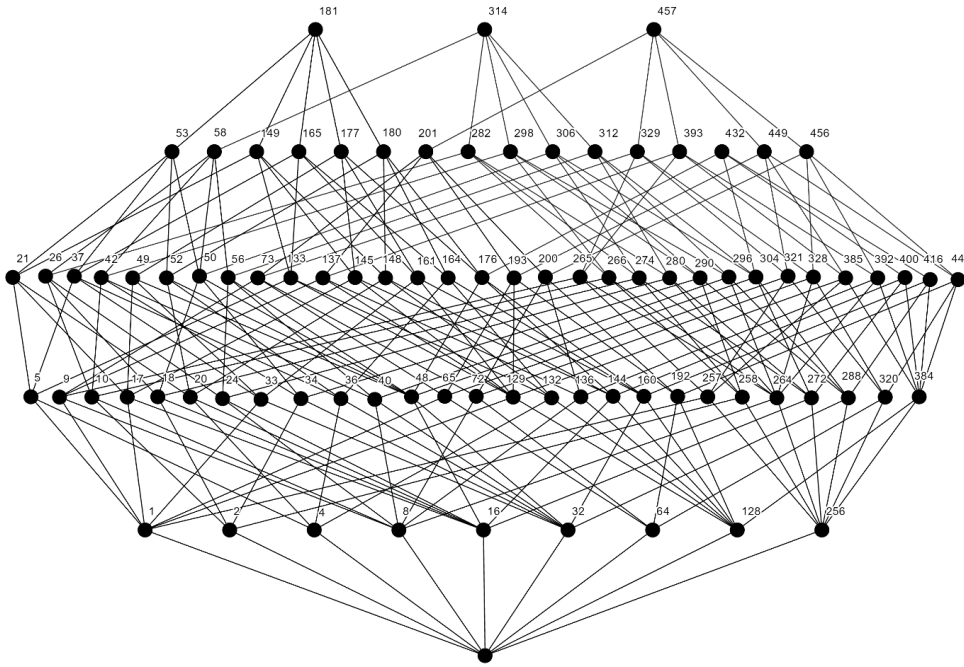


Рис. 1. Граф функціонально неповних алгебр

**2. Основні результати.** Розіб'ємо множину граничних функціонально повних алгебр  $M_3$  на підкласи  $M_3 = M_3^1 \cup M_3^2 \cup \dots \cup M_3^9 \cup M_3^{10} \cup M_3^{11}$ , де  $M_3^i$ ,  $i = \overline{1, 11}$  – множина всіх граничних функціонально повних алгебр, які мають суміжні ребра, що з'єднують їх з алгебрами класу  $M_2$ . Кожне суміжне ребро відповідає  $i$ -й операції вказаній в множині  $Q$ . Це означає, що в сигнатуру алгебр класу  $M_3^i$  входить  $i$ -ва операція, а в сигнатури відповідних суміжних алгебр ця операція не входить. Позначимо через  $M_2^{+i}$  – клас функціонально неповних алгебр, в сигнатуру яких входить  $i$ -ва операція,  $M_2^{-i}$  – клас алгебр, які отримують з  $M_2^i$  усуненням з сигнатури  $i$ -ої операції, тоді отримаємо

$$M_2^i = M_2 - (M_2^{+i} \cup M_2^{-i}). \quad (1)$$

Клас алгебр  $M_3^i$  можна отримати з  $M_2^i$  розширенням сигнатури  $i$ -вою операцією. Якщо сигнатуру всіх алгебр  $M_2$  розширити  $i$ -вою операцією, то алгебри  $M_2^{+i}$  і  $M_2^{-i}$  залишаються функціонально неповними, а решта алгебр перейдуть за допомогою ребра, що відповідає  $i$ -й операції, у клас функціонально повних. З того, що  $|M_2| = 88$  і  $|M_2^{+i}| = |M_2^{-i}|$ , то з формули (1) отримуємо  $|M_2^i| = 88 - 2|M_2^{+i}|$ . На основі останньої формули отримуємо таблицю 1, у якій вказано кількість алгебр, у сигнатуру яких входить  $i$ -ва операція.

Таблиця 1.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M_2^{+i}$	33	33	16	32	32	30	16	16	30	0	0
$M_2^i$	22	22	56	24	24	28	56	56	28	88	88

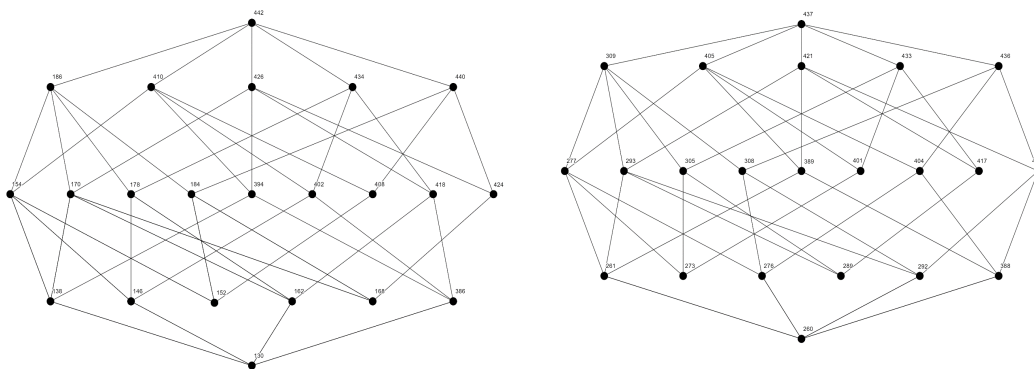
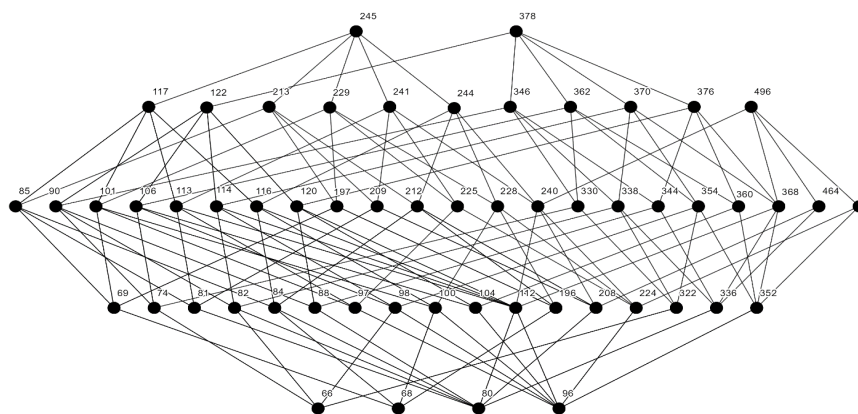
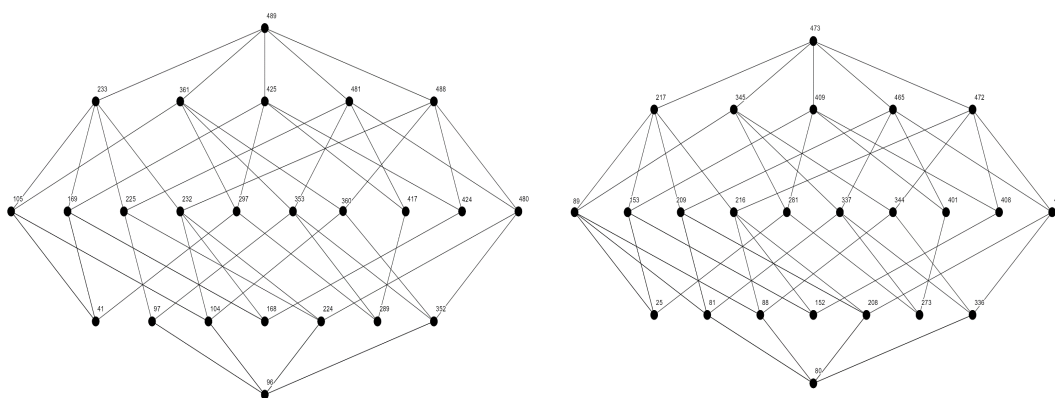
**Означення 5.** Два графи  $G$  і  $H$  називаються ізоморфними, якщо між їх вершинами можна установити таку бієкцію  $f$ , що дві вершини  $u, v$  графа  $G$  суміжні тоді і тільки тоді, коли  $f(u)$  і  $f(v)$  суміжні вершини у графі  $H$ .

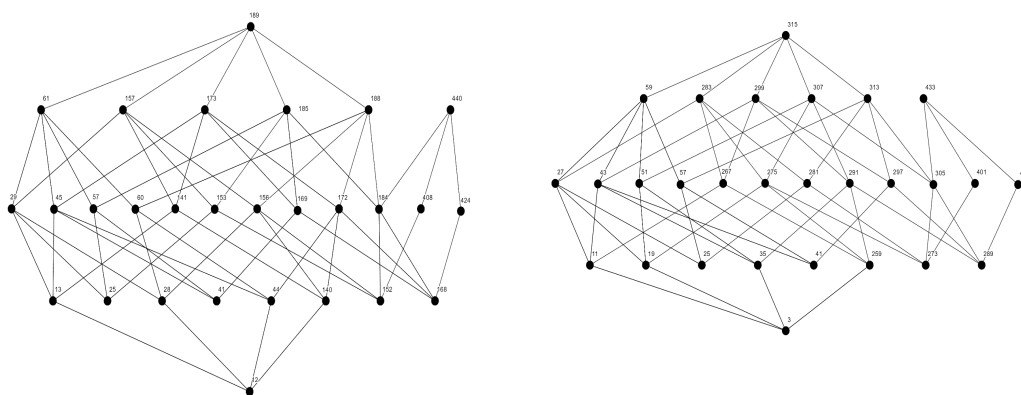
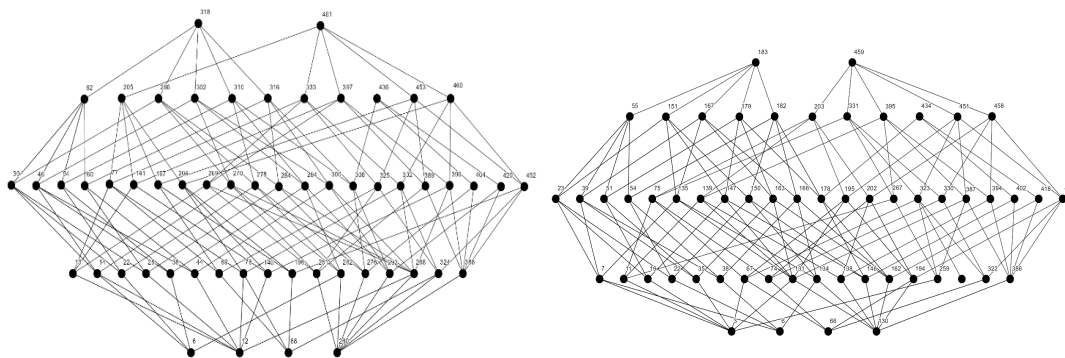
Задача розпізнавання ізоморфізмів графів відноситься до класу  $NP$  - повних. У роботі [4] стверджувалось, що «пошуки окремих критеріїв та ознак ізоморфізмів для графів того чи іншого класу можуть бути дуже важкими і не завжди успішними». Сучасні роботи по теорії графів [5] підтверджують, що проблему ізоморфізму графів не вдалося вирішити.

Позначимо через  $G_i$  –  $\Omega$ -граф, який відповідає класу граничних функціонально повних алгебр  $M_2^i$ . Для кожного класу  $M_2^i$  побудовано сигнатурні графи  $G_1 - G_9$ , наведені на рис. 2 – 6.

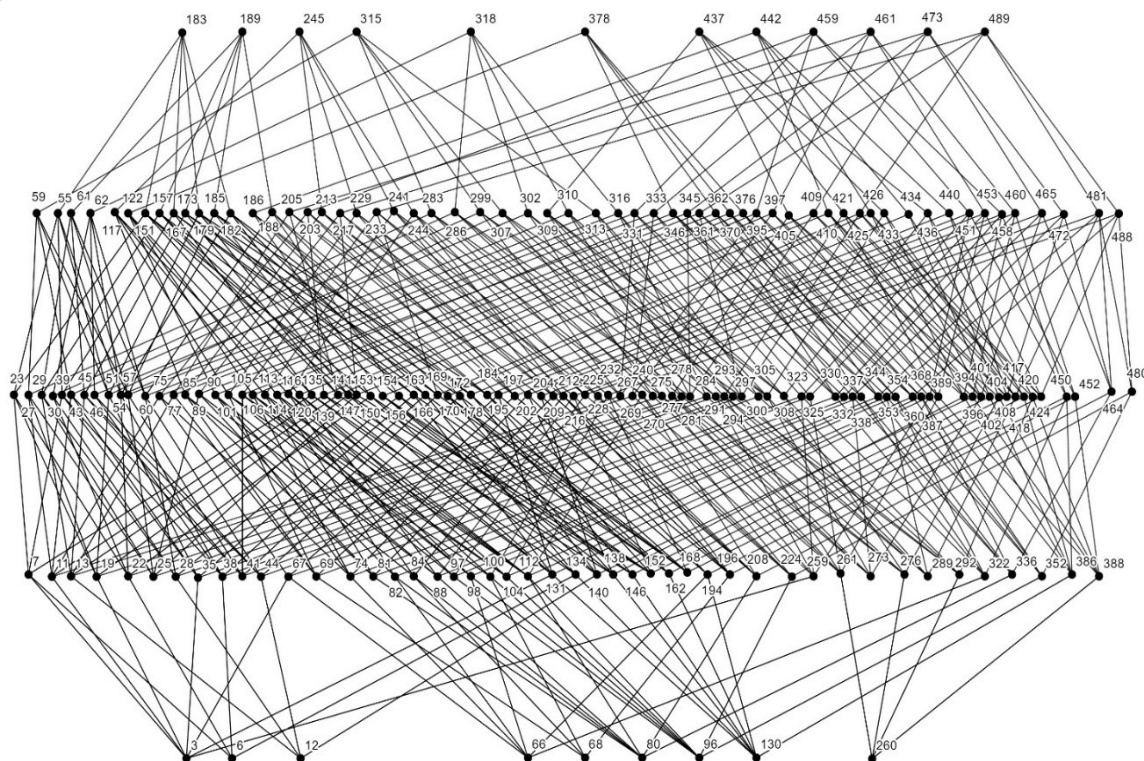
**Твердження 3.** Ізоморфними є  $\Omega$ -графи:  $G_1 \cong G_2$ ,  $G_4 \cong G_5$ ,  $G_6 \cong G_9$ ,  $G_7 \cong G_8$ ,  $G_{10} \cong G_{11}$ .



Рис. 2. Графи  $G_1$  та  $G_2$  класу граничних алгебр  $M_2^1$  і  $M_2^2$ Рис. 3. Граф  $G_3$  класу граничних алгебр  $M_2^3$ Рис. 4. Графи  $G_4$  і  $G_5$  класу граничних алгебр  $M_2^4$  і  $M_2^5$

Рис. 5. Графи  $G_6$  і  $G_9$  класу граничних алгебр  $M_2^6$  і  $M_2^9$ Рис. 6. Графи  $G_7$  і  $G_8$  класу граничних алгебр  $M_2^7$  і  $M_2^8$ .

Графи  $G_1 - G_9$  об'єднані в один сигнатурний граф, який зображений на рис. 7.

Рис. 7.  $\Omega$ -граф граничних функціональних алгебр  $M_2^i$ .

Ізоморфізм сигнатурних графів  $G_i$ ,  $i = \overline{1, 9}$  доводиться за допомогою бієкції вершин, заданих таблицями 2 - 5:

Таблиця 2.

$m=1$	260	273	289	261	276	292	388	277	293	305	308	389	401
$m=2$	130	152	168	138	146	162	386	154	170	178	184	394	402
$m=1$	404	417	420	309	405	421	433	436	437				
$m=2$	408	418	424	186	410	426	434	440	442				

Таблиця 3.

$m=4$	96	41	97	104	168	224	289	352	105	169	225	232	297	353	360
$m=5$	80	25	88	81	152	208	273	336	89	153	209	216	281	337	344
$m=4$	417	424	480	233	361	425	481	488	489						
$m=5$	401	408	464	217	345	409	465	472	473						

Таблиця 4.

$m=6$	12	25	41	152	168	13	28	44	140	29	45	57	60	141	153
$m=9$	3	25	41	273	289	11	19	35	259	27	43	57	54	267	275
$m=6$	156	169	172	184	408	424	61	157	173	185	188	440	189		
$m=9$	281	291	297	305	401	424	59	283	299	307	313	443	315		

Таблиця 5.

$m=7$	6	13	38	140	268	388	60	204	284	325	404	205	316	453
$m=8$	6	11	35	138	131	386	54	202	150	323	402	203	182	451
$m=7$	12	14	44	196	276	30	77	269	294	332	420	286	333	460
$m=8$	3	7	38	332	146	29	75	267	163	330	418	151	331	458
$m=7$	68	22	69	261	292	46	141	270	300	389	452	302	397	318
$m=8$	66	19	67	279	169	39	139	163	166	387	450	167	395	183
$m=7$	260	28	76	262	324	54	197	278	308	396	62	310	436	461
$m=8$	30	22	74	134	194	51	195	166	178	394	55	179	434	459

**Означення 6.** Алгебра  $U = \langle A, \Omega \rangle$  називається насиченою в класі  $K$ , якщо в результаті довільного розширення сигнатури отримуємо алгебру, яка не належить  $K$ .

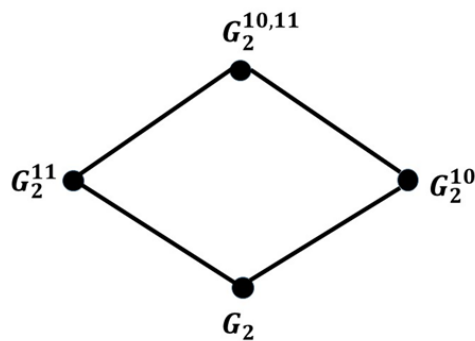
На основі  $\Omega$ -графів  $G_i$ ,  $i = \overline{1, 9}$  побудована таблиця 6, що вказує кількість канонічних, насичених і вільних алгебр в класах  $M_2^i$ .

Таблиця 6.

$M_2^i$	$M_2^1$	$M_2^2$	$M_2^3$	$M_2^4$	$M_2^5$	$M_2^6$	$M_2^7$	$M_2^8$	$M_2^9$
Код канонічних алгебр	130, 152, 168	260, 273, 289	66,68, 80,96	96,41, 168, 189	25,80, 152, 273	12,35, 41,152, 168	3,4,25, 273, 289	6,12, 68, 260	36, 66, 130
К-сть канонічних	3	3	4	4	4	5	5	4	4
Код насичених алгебр	442	437	245, 378, 496	489	473	189, 440	315, 433	318, 461, 436	183, 459, 434
К-сть насичених	1	1	3	1	1	2	2	3	3
К-сть вільних алгебр	18	18	49	19	19	21	49	49	21
К-сть алгебр в $M_2^i$	22	22	56	24	24	28	56	56	28

З рисунка 7 отримуємо, що  $\Omega$ -граф  $G$  класу граничних алгебр  $M_2$  включає двісті дев'ятнадцять вершин; п'ятнадцять вершин, які відповідають канонічним алгебрам з номерами 3, 6, 12, 66, 68, 80, 96, 130, 260, 25, 41, 152, 168, 273, 289; дванадцять вершин, які відповідають граничним алгебрам з номерами 183, 189, 245, 315, 318, 378, 437, 442, 459.

Розглянемо класи алгебр  $M_2^{1-10}$ ,  $M_2^{1-10,11}$ ,  $M_2^{1-11}$ , які отримали з  $M_2^{1-9}$  розширенням їх сигнатур відповідно операціями Шеффера (10) та Вебба (11). Зрозуміло, що  $M_3^{1-9,10}$ ,  $M_3^{1-9,11}$  – класи граничних алгебр, а  $M_3^{10-11}$  – клас внутрішніх функціонально повних алгебр. Якщо  $G_2$ ,  $G_2^{10}$ ,  $G_2^{11}$ ,  $G_2^{10-11}$  –  $\Omega$ -графи відповідних класів  $M_2$ ,  $M_2^{1-10}$ ,  $M_2^{1-10,11}$ ,  $M_2^{1-11}$ , то легко бачити, що ці графи ізоморфні, а їх об'єднання утворює  $\Omega$ -граф, який схематично можна зобразити у вигляді

Рис. 8.  $\Omega$ -граф класів алгебр  $M_2$ ,  $M_2^{1-10}$ ,  $M_2^{1-10,11}$ ,  $M_2^{1-11}$ .

Із побуваного  $\Omega$ -графа, наведеного на рисунку 7, отримаємо справедливості теорем.

**Теорема 1.** У класі  $M$  відсутні внутрішні функціонально неповні алгебри.

**Теорема 2.** Множина булевих алгебр  $M$  складається з 88 граничних функціонально неповних алгебр; 395 граничних функціонально повних алгебр; 1565 внутрішніх функціонально повних алгебр.

**3. Висновки.** У даній роботі проведені дослідження структури граничних функціонально повних алгебр класу  $M_3$ . Для кожного підкласу граничних алгебр побудовані сигнатурні графи  $G_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ , і на їх основі встановлено потужності канонічних, насичених та вільних алгебр. Доведено ізоморфізм графів  $G_i$ ,  $i = \overline{1,9}$ , які об'єднані в  $\Omega$ -граф граничних функціонально повних алгебр. Сформульовані і доведені теореми про число граничних функціонально неповних алгебр, граничних функціонально повних алгебр та внутрішніх функціонально повних алгебр.

### Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Дослідження сигнатурного кубу універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2 (37), С. 157-167. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).157-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167).
2. Журавлев Ю. И. Оценка сложности локальных алгоритмов для некоторых экстремальных задач на конечных множествах. *Докл. АН СССР*. 1964. №5. С. 1018-1021.
3. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях систем минимальных схем: сборник «Проблемы кибернетики». Москва: Физмалит, 1959. С. 75-121.
4. Зыков А. А. Теория конечных графов. Москва: Наука, 1969. 554 с.
5. Уилсон Р. Дж. Введение в теорию графов. СПб: ООО «Диалектика», 2019. 240 с.

**Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.** Structure of signature cube of boolean algebra.

This paper is a continuation of the research distributed in [1], the theory of Boolean functions is considered from the point of view of universal algebras. This paper describes a class of functionally incomplete algebras, studies the main types of algebras and their location on the tiers of the signature cube. In the data of researches of universal Boolean algebras the 11-dimensional signal cube according to which 2048 algebras enter is created. Codification of these algebras has been offered. The notion of adjacent, boundary, and internal classes of functionally superficial and functionally incomplete algebras is introduced.

Boolean algebras of the class  $M$  are divided into four subclasses: a class of internal functionally incomplete algebras, a class of boundary functionally incomplete algebras, a class of boundary functionally superficial algebras, a class of internal functionally complete algebras. In this paper, an algorithm is proposed for finding boundary functionally complete algebras based on the expansion of signals of functionally incomplete algebras by Boolean operations. Subclasses of boundary algebras have been constructed for each of the eleven operations. The isomorphism of graphs of some classes of boundary algebras has been indicated.  $\Omega$ -graph of boundary functionally complete algebras was obtained on the basis of combining graphs.

**Keywords:** signature cube, boundary algebras.

### References

1. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Investigation of signature cube of universal boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2(37), 157-167. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).157-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167) [in Ukrainian].
2. Zhuravlev, Yu. I. (1964). Otsenka slozhnosti lokal'nykh algoritmov dlya nekotorykh ekstremal'nykh zadach na konechnykh mnozhestvakh. *AN USSR*, 5, 1018-1021 [in Russian].
3. Yablonskiy, S. V. (1959). Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sistem minimal'nykh skhem. *Sbornik «Problemy kibernetiki»*. Moskva: Fizmalit, 75-121 [in Russian].
4. Zykov, A. A. (1969). *Teoriya konechnykh grafov*. Moskva: Nauka [in Russian].
5. Uilson, R. J. (2019). *Vvedenie v teoriyu grafov*. Spb: ООО «Диалектика» [in Russian].

Одержано 17.04.2021

УДК 044.89

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).157-164](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).157-164)**М. М. Шаркаді**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат економічних наук  
[marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua](mailto:marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

## НЕЙРО-НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ У СИСТЕМІ УПРАВЛІННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНОЮ БЕЗПЕКОЮ

Подається вирішення актуальної проблеми визначення рівня фінансово-економічної безпеки для компаній через призму нейро-фазі моделювання. Моделі, побудовані за допомогою нейро-нечітких мереж, є ефективним інструментом оцінки фінансово-економічної безпеки і дають можливість своєчасно виявити і подолати проблеми. Крім того, дані моделі є адаптивними, оскільки пристосовуються до змін економічного середовища, що дуже важливо в умовах нестабільної економіки. У даному дослідженні для цього пропонується використання багатошарової нейромережі, кожний шар якої вирішує свою низку завдань. Запропонований підхід дасть можливість визначати рівень фінансової безпеки компанії у різні моменти її функціонування. Розроблена модель дозволяє кожній компанії використовувати свою сукупність фінансових показників для визначення рівня безпеки. Кожний шар нейромережі є автономною одиницею, що дозволяє розвивати мережу. Для запропонованої моделі характерні властивості гнучкості та адаптивності до мінливих умов економічного середовища, що є необхідною умовою для її ефективного застосування в діяльності підприємства.

**Ключові слова:** рівень безпеки, нейромережа, нечітке моделювання.

**1. Вступ.** На сучасному етапі розвитку людства, спостерігається тенденція управління процесами у навколишньому світі. Застосування інформаційних технологій у різних сферах людської діяльності супроводжується розробкою інтелектуальних систем, які використовують зв'язок знань у загальному випадку з навколишнім світом. Вирішення будь-якої проблеми зв'язано з конкретними предметними областями, які, зазвичай, є погано або слабо структурованими. Під час проектування та розробки інтелектуальної системи, знання проходять аналогічну трансформацію даних – від більш узагальнених множин до більш вузьких, конкретизованих для даної предметної області. При розробці інтелектуальних систем знання про конкретну предметну область, для якої розробляється система, рідко бувають повними й достовірними.

Одним із найбільш перспективних і активних напрямів прикладних досліджень в області управління і прийняття рішень у слабо структурованих системах є нечітке моделювання. Методологія нечіткого моделювання конкретизує методологію системного моделювання стосовно процесу побудови і застосування нечітких моделей складних систем. З кожним роком діапазон застосування нечітких моделей та методів розширюється, охоплюючи різні нові області. Суть нечіткого математичного моделювання полягає в тому, що елементами дослідження являються не числа, а деякі нечіткі множини або їх поєднання. В основі такого підходу лежить не традиційна логіка, а логіка з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками і нечіткими правилами виводу.



Значна кількість важливих проблем підтримки прийняття управлінських рішень, що виникають у різних сферах людської діяльності, зводиться до задач оцінки різного роду явищ і процесів. При проектуванні і управлінні складною соціо-економічною системою виникає проблема, коли людина не здатна дати точні і саме тоді практичні значення суджень про їх поведінку.

Існування будь-якої держави в сучасному глобалізованому світі залежить від її економічної безпеки, яка є однією із важливих компонент національної безпеки країни в цілому. Одним із основних сегментів економічної безпеки, який вагомо впливає на її рівень, виступає фінансовий сегмент, тобто сукупність фінансових показників суб'єкта економічного господарювання, які об'єднуються в глобальний показник. Прогнозування цього показника є складним аналітично-розрахунковим процесом і потребує детального дослідження тенденцій розвитку та передбачення впливу складових досліджуваного фактору на рівень економічної безпеки держави.

Актуальність роботи полягає у розробленні та дослідженні моделей і методів отримання багатокритеріального оцінювання із застосуванням нейро-нечітких технологій, що на сьогодні є нерозкритим достатнім чином.

**2. Постановка проблеми.** Для суб'єкта господарювання економічна безпека розглядається як стан, за якого забезпечується його економічний розвиток і стабільна діяльність, гарантується захист його фінансових і матеріальних ресурсів. Забезпечення фінансової безпеки пов'язане з плануванням, прогнозуванням і передбаченням багатьох факторів внутрішнього і зовнішнього середовища. При цьому вкрай важливим є системний, комплексний підхід, що базується на ефективному використанні відповідного інформаційно-аналітичного забезпечення, логіки та моделювання із залучення сучасного математичного апарату.

*Загальна постановка проблеми (завдання) може бути представлена наступним чином.* Нехай для певного суб'єкта економічного господарювання відома множина кількісних і якісних показників його функціонування, а також відома історія цих показників за певні періоди часу. Виникає завдання передбачити оцінку рівня економічної безпеки даного суб'єкта господарювання.

Постановку задачі оцінювання сформулюємо наступним чином. Нехай на вході маємо деякий об'єкт дослідження  $O$ , який оцінюється за багатьма показниками  $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ . Показники  $K$  можуть представляти собою цілу систему критеріїв та моделей. Кожен показник є кількісною оцінкою, отримання якої можливо, наприклад, за допомогою моделей фінансової звітності [1].

На основі множини оцінок за показниками  $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ , необхідно встановити рівень фінансової безпеки об'єкту.

**3. Огляд літератури.** Із аналізу наукових джерел, видно, що нейро-нечіткі мережі широко застосовуються в різних сферах та прикладних задачах [2-5]. У роботі [6] наведена задача підвищення швидкості побудови нейро-нечітких моделей за прецедентами; у [7] представлено задачу планування ресурсів паралельних комп'ютерних систем при синтезі нейро-нечітких мереж; on-line нейро-фаззі систему для вирішення задач послідовного нечіткого кластерування даних запропоновано у [8]. Нейро-нечіткі мережі широко використовуються для обробки нечіткої інформації. Так у роботах [9,10] нейро-нечітка система вивчає поведінку системи з даних тренувань і автоматично генерує нечіткі правила та нечіткі множини до заданого рівня точності. Системи нечіткого виведення приведені

у [11,12] можуть використовувати людські експертні знання та виконувати нечітке виведення для отримання вихідної оцінки з необхідним рівнем точності [13,14]. Механізм навчання нейронних мереж розглянуто у [14-16]. Широке застосування отримав новий тип нечіткої моделі, яку запропонували Токаї та Сугено [17,18]. У нейро-нечітких мереж типу Takagi-Sugeno-Kang послідовною частиною кожного нечіткого правила є лінійна комбінація вхідної змінної.

Виходячи з цього, сьогодні є актуальним завдання застосування нейро-нечітких технологій для вирішення прикладних проблем оцінювання об'єкту дослідження.

**4. Результати досліджень.** Для вирішення сформульованої проблеми пропонується модель нейро-нечіткої мережі (рис. 1.), яка складається із сукупності послідовних шарів, на кожному із яких розв'язується низка конкретних класів задач.

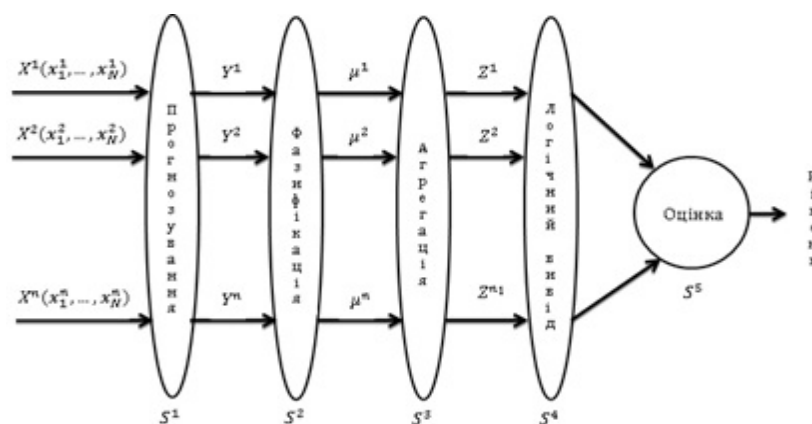


Рис. 1. Структура нейро-нечіткої мережі

Розглянемо кожен шар нейро-нечіткої мережі.

У першому шарі розв'язується клас задач передбачення. Загальна постановка задачі передбачення може бути сформульована наступним чином. На вході маємо сукупність показників  $X = \{X^1, X^2, \dots, X^m\}$  – оцінки за відповідними критеріями  $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$ , для кожного з яких відома історія цього показника за  $N$  періодів, тобто  $X^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_N^j) \in X$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Потрібно зробити прогноз значень цих показників на майбутні періоди.

Математичне формулювання та модель такої задачі виглядає наступним чином.

Нехай для заданого об'єкта відомі деяка множина  $X = \{X^1, X^2, \dots, X^m\}$ , елементи якої називаються входами (samples) або прикладами, ситуаціями і множина  $Y = \{Y^1, Y^2, \dots, Y^m\}$ , елементи якої називаються відповідями або відгукками, мітками, виходами (responses). Існує певна залежність (детермінована і імовірнісна), що дозволяє за елементами  $X^j \in X$  передбачити  $Y^j \in Y$  для всіх  $j = 1, \dots, m$ . Зокрема, якщо залежність детермінована, то існує функція  $\varphi^* : X \rightarrow Y$ .

Даний шар може містити деякі приховані шари. Наприклад, коли відома деяка сукупність об'єктів (ситуацій) і множина відповідей (реакцій, відгуків), а також множина у вигляді пар «об'єкт – відповідь», яка називається навчаль-



ною вибіркою. Існує деяка залежність між відповідями і об'єктами, але вона невідома. Потрібно, на основі цих даних відновити залежність, тобто побудувати модель (алгоритм), яка здатна для любого об'єкта надати досить точну відповідь. Для вимірювання точності відповідей вводиться визначеним чином функціонал якості.

Залежність відома тільки на об'єктах навчальної вибірки  $\{(x^{(i)}, y^{(i)}) : x^{(i)} \in X^j, y^{(i)} \in Y^j (i = 1, \dots, N_0)\}$ ,  $N_0$  – кількість об'єктів у навчальній вибірці. Упорядкована пара "об'єкт – відповідь"  $\{(x^{(i)}, y^{(i)}) : x^{(i)} \in X^j \times Y^j\}$  називається прецедентом. Потрібно встановити залежність між входом і виходом на основі даних навчальної вибірки.

Модель задачі передбачення за прецедентами можна представити у наступному вигляді:

*Задано:* множина ситуацій  $X^j$  і множина відповідей  $Y^j$ .

*Відомо:* навчальна вибірка  $\{x^{(i)} \in X^j, (i = 1, \dots, N_0)\}$  і відповідно відповіді на цій вибірці  $\{y^{(i)} = y(x^{(i)}) : y \in Y^j (i = 1, \dots, N_0)\}$ .

*Знайти:* алгоритм  $a : X^j \rightarrow Y^j$ , тобто алгоритм побудови вирішальної функції  $\varphi \in \Phi$ , яка наближує, найбільш точно,  $y \in Y^j$  не тільки на навчальній вибірці, а і на всій множині  $X^j$ .

Для різних типів задач множина об'єктів  $X$  і відповідей  $Y$  може задаватись по різному. Наприклад, для задачі класифікації:  $Y = \{-1; +1\}$  – класифікація на два класи;  $Y = \{1, \dots, M\}$  – класифікація на  $M$  класи, які не перетинаються;  $Y = \{0; 1\}^M$  – класифікація на  $M$  класи, які перетинаються. Для задачі регресії:  $Y = R$  або  $Y = R^m$ ; для задачі ранжування  $Y$  – скінчена впорядкована множина. Множина об'єктів  $X$ , як правило, задається не самими об'єктами, а їх описами. Найбільш поширеним є ознаковий опис. Ознака (*feature*)  $f$  об'єкта  $x \in X$  – це результат вимірювання деякої характеристики об'єкта  $x$ . При такому підході об'єкт  $x \in X$  представляється як вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , де  $x_j = f_j(x)$ , ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), а  $k$  – кількість ознак. Формально ознака це відображення  $f : X \rightarrow D_j$ , де  $D_j$  – множина допустимих значень ознаки.

Завданням першого шару є на основі історії показників за певні періоди часу прогнозувати значення цих показників на майбутні періоди з використанням моделей та методів регресійного аналізу і машинного навчання [19].

Нейрони другого шару виконують операцію фазифікації, тобто кожному вхідному значенню першого шару ставиться у відповідність значення функції належності [20,21]. Тут розв'язується задача фазифікації показників (критеріїв) ефективності за допомогою апарату нечіткої математики. Аналізуючи значення вхідних показників  $X = \{X^1, X^2, \dots, X^m\}$  і отримані відповідні прогнозовані значення  $Y = \{Y^1, Y^2, \dots, Y^m\}$  проводиться їх фазифікація у нечіткі числа у вигляді функцій належності нечітких множин. Функції належності, визначені на вхідних змінних, застосовуються до їх фактичних значень для визначення ступеня істинності кожного показника. Оскільки, основні показники менеджменту отримані із фінансових звітів і несуть різний зміст, то доцільно використовувати наступні види функції належності [16]: трикутну, трапецієподібну, дзвіноподібну,  $S$ -подібну, лінійну  $S$ -подібну, лінійну  $Z$ -подібну та їх комбінації і суперпозиції. Таким чином, виходом із другого шару є множина нечітких чисел  $\{\mu_1, \dots, \mu_{n_1}\}$ .

Третій шар представляє собою агрегацію рівнів належності показників пред-

ставлених у вигляді нечітких чисел у певні групи (кластери) [22]. Суть агрегації полягає у процедурі знаходження функції належності для кожної вихідної змінної отриманої в процесі групування вхідних змінних. Мета агрегації полягає в тому, щоб об'єднати всі ступені істинності певних груп вхідних змінних. Тут використовуються моделі та методи вибору вагових коефіцієнтів і згорток. У загальному випадку синоптичні ваги  $w_1, \dots, w_{n_1}$  коректуються в процесі навчання.

Четвертий шар реалізує методи логічного виведення, за допомогою яких визначається нечітка оцінка, яка є інтегрованим показником. Нечітке логічне виведення базується на нечіткій базі знань та відповідних нечітких правилах. Обчислене значення істинності для передумов кожного правила застосовується для кожного правила. Нечіткі множини, призначені для кожної змінної виводу, за допомогою композиційних правил об'єднуються разом для формування єдиної нечіткої множини.

У кінцевому (п'ятому) шарі проходить процес дефазифікації отриманих нечітких оцінок у звичайні чіткі значення, які використовуються для визначення рівня.

**5. Обговорення.** Застосування розробленої технології для розв'язання практичних задач, потребує адекватного визначення множини показників оцінювання, створення моделей інтелектуального аналізу знань, налаштування фазифікації вхідних даних, експериментально дослідити поріг можливості функціонування системи у різних режимах, а також поріг рівня безпечного стану функціонування системи для недопущення негативних наслідків чи впевненості досягнення цілей системою. Ці всі задачі покладені на системних аналітиків, що розробляють інформаційну систему у межах прикладної задачі. Таким чином, для якісного порівняння даних, розмежування термів, необхідно окремо проводити для кожного показника, оскільки різні показники несуть у собі свій числовий зміст.

**6. Висновки.** Запропонований підхід, для визначення рівня фінансово-економічної безпеки на підприємстві, дозволить успішно імплементувати відповідний механізм, який повинен включати в себе інструменти, методи і важелі формування фінансової безпеки підприємства та систему інформаційно-аналітичної складової такої безпеки, функціонуючу на основі сучасних інформаційних технологій.

### Список використаної літератури

1. Карян У. Ключевые показатели менеджмента: полное руководство по работе с критическими числами, управляющими вашим бизнесом / Пер. с англ. О.В. Чумаченко. К: Companion Group, 2010. 400с.
2. Wang J.G., Tai S.C., Lin C.J. The application of an interactively recurrent self-evolving fuzzy CMAC classifier on face detection in color images. *Neural Comput. Appl.* 2018. Vol.29. P. 201-213. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2551-x>
3. Jhang J.-Y., Tang K.-H., Huang C.-K., Lin C.-J., Young K.-Y. FPGA Implementation of a Functional Neuro-Fuzzy Network for Nonlinear System Control. *Electronics*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics7080145>
4. Wu M.F., Huang W.C., Juang C.F., Chang K.M., Wen C.Y., Chen Y.H., Lin C.Y., Chen Y.C., Lin C.C. A new method for self-estimation of the severity of obstructive sleep apnea using easily available measurements and neural fuzzy evaluation system. *IEEE J. Biomed. Health Inf.* 2017. Vol. 21. P. 1524-1532. DOI: 10.1109/JBHI.2016.2633986
5. Kelemen M., Polishchuk V., Gavurová B., Szabo S., Rozenberg R., Gera M., Kozuba J.,

- Hospodka J., Andoga R., Divoková A., Bliš'an P. Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2019. Vol.16, 3585. DOI: <https://doi.org/10.3390/ijerph16193585>
6. Субботин С.А., Благодарев А.Ю., Гофман Е.А. Синтез нейро-нечетких диагностических моделей с хэширующим преобразованием в последовательном и параллельном режимах. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2017. № 1. С. 56-65. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2017-1-7>
  7. Олійник А.О., Скрупський С.Ю., Субботін С.О., Благодарьов А.Ю., Гофман Є.О. Планування ресурсів паралельної обчислювальної системи при синтезі нейро-нечітких моделей для обробки великих даних. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. № 4. С. 61-69. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-8>
  8. Бодяньський Є.В., Дейнеко А.О., Куценко Я. В. Послідовне нечітке кластерування на основі нейро-фаззи підходу. *Радиоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. № 3. С. 30-38. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-3-4>
  9. Lin, C.J., Chen, C.H. Identification and prediction using recurrent compensatory neuro-fuzzy systems. *Fuzzy Sets Syst.* 2004. Vol. 150. P. 307-330. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.07.001>
  10. Khayat O. Structural parameter tuning of the first-order derivative of an adaptive neuro-fuzzy system for chaotic function modeling. *J. Int. Fuzzy Syst.* 2014. Vol. 27. P. 235–245.
  11. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 167 с.
  12. Ротштейн О.П. Інтелектуальні технології ідентифікації: нечіткі множини, генетичні алгоритми, нейронні мережі. Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1999. 320 с.
  13. Субботін С. О. Подання й обробка знань у системах штучного інтелекту та підтримки прийняття рішень [Текст]: навч. посіб. Запоріжжя: ЗНТУ, 2008. 341 с. ISBN 978-966-7809-84-4
  14. Олійник А.О., Субботін С. О., Олійник О. О. Інтелектуальний аналіз даних: навчальний посібник. Запоріжжя : ЗНТУ, 2011. 271 с.
  15. Снитюк В. Є. Прогнозування. Моделі. Методи. Алгоритми: навч. посіб. К.: Маклаут, 2008. 364 с.
  16. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах [Текст]: учеб. пособие. К.: Слово, 2008. 341с.
  17. Jang R. J.-S., Sun C. T., Mizutani E. Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. Upper Saddle River, Prentice Hall. 1997.
  18. Sugeno M., Kang G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*. 1998. Vol. 28. P. 15-33.
  19. Шаркаді М.М., Роботишин М.В., Маляр М.М. Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. № 1 (36). С. 112-122.
  20. Маляр М.М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород: ПА «АУТДОР-ШАРК», 2016. 222 с.
  21. Polishchuk V. Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences. Begell house, Inc, New York*. 2019. Vol. 51. P.66-76. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60.
  22. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Automatic classification method based on a fuzzy similarity relation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. V. 52, N 1. P. 30-37. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9796-3>

### **Sharkadi M. M. Neuro-fuzzy modeling in the financial-economic security management system.**

The solution of the actual problem of determining the financial-economic security's level for companies through the prism of neuro-phase modeling is presented. Models built using neural-fuzzy networks are an effective tool for assessing financial-economic security and provide an opportunity to identify and overcome problems in a timely manner. In addition, these models are adaptive because they adapt to changes in the economic environment,

which is very important in an unstable economy. This study proposes the use of a multilayer neural network, each layer of which solves a number of problems. The proposed approach will make it possible to determine the level of the company financial security at different times of its operation. The developed model allows each company to use its own set of financial indicators to determine the level of security. Each layer of the neural network is an autonomous unit that allows you to develop a network. The proposed model is characterized by the properties of flexibility and adaptability to changing conditions of the economic environment, which is a necessary condition for its effective application in the enterprise.

**Keywords:** security level, neural network, fuzzy modeling.

## References

1. Karyan, W. (2010). Key Management Indicators: A Complete Guide to Working with Critical Numbers Managing Your Business .Trans. with English O.V. Chumachenko. *K: Companion Group* [in Ukrainian].
2. Wang, J.G. , Tai, S.C., & Lin, C.J. (2018). The application of an interactively recurrent self-evolving fuzzy CMAC classifier on face detection in color images. *Neural Comput. Appl.*, 29, 201–213.
3. Jhang, J.-Y., Tang, K.-H., Huang, C.-K., Lin, C.-J., & Young, K.-Y. (2018). FPGA Implementation of a Functional Neuro-Fuzzy Network for Nonlinear System Control. *Electronics*.
4. Wu, M.F., Huang, W.C., Juang, C.F., Chang, K.M., Wen, C.Y., Chen, Y.H., Lin, C.Y., Chen, Y.C., & Lin, C.C. (2017). A new method for self-estimation of the severity of obstructive sleep apnea using easily available measurements and neural fuzzy evaluation system. *IEEE J. Biomed. Health Inf.*, 21, 1524–1532.
5. Kelemen, M., Polishchuk, V., Gavurová, B., Szabo, S., Rozenberg, R., Gera, M., Kozuba, J., Hospodka, J., Andoga, R., Divoková, A., & Bliš'an, P. (2019). Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health.*, 16, 3585.
6. Subbotin, S.A., Blagodarev, A.Yu., & Hoffman, E.A. (2017). Synthesis of neuro-fuzzy diagnostic models with hashing transformation in serial and parallel modes. *Radio electronics, computer science, management*, 1, 56–65 [in Ukrainian].
7. Oliynyk, A.O., Skrupsky, S.Y., Subbotin, S.O., Blagodaryov, A.Y., & Hoffman, E.A. (2016). Resource planning of a parallel computer system in the synthesis of neuro-fuzzy models for big data processing. *Radio electronics, computer science, management*, 4, 61–69 [in Ukrainian].
8. Bodyansky, E.V., Deineko, A.O., & Kutsenko, J.V. (2016). Consistent fuzzy clustering based on the neuro-phase approach. *Radio electronics, computer science, management*, 3, 30–38 [in Ukrainian].
9. Lin, C.J., & Chen, C.H. (2004). Identification and prediction using recurrent compensatory neuro-fuzzy systems. *Fuzzy Sets Syst.*, 150, 307–330.
10. Khayat, O. (2014). Structural parameter tuning of the first-order derivative of an adaptive neuro-fuzzy system for chaotic function modeling. *J. Int. Fuzzy Syst.*, 27, 235–245.
11. Zade, L. (1976). The concept of a linguistic variable and its application to approximate decisions. *Moscow: Mir*. [in Russian]
12. Rothstein, O.P. (1999). Intelligent identification technologies: fuzzy sets, genetic algorithms, neural networks. *Vynnytsia: "UNIVERSUM-Vynnytsia"*[in Ukrainian].
13. Subbotin, S.O. (2008). Submission and processing of knowledge in artificial intelligence systems and decision support: textbook. *Zaporozhye: ZNTU* [in Ukrainian].
14. Oliynyk, A.O., Subbotin, S.O., & Oliynyk, O.O. (2011). Intellectual data analysis: textbook. *Zaporozhye: ZNTU* [in Ukrainian].
15. Snytyuk, V.E. (2008). Forecasting. Models. Methods. Algorithms: textbook. *Kyiv: McLauth* [in Ukrainian].
16. Zaichenko, Yu.P. (2008). Fuzzy models and methods in intelligent systems: textbook. Manual. *Kyiv Slovo* [in Ukrainian].
17. Jang, R. J.-S., Sun, C. T., & Mizutani, E. (1997). Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A

- Computational Approach to Learning and Machine Intelligence. *Upper Saddle River, Prentice Hall*.
18. Sugeno, M., & Kang, G. T. (1998). Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, 28, 15–33.
  19. Sharkadi, M.M., Robotyshyn, M.V., & Malyar, M.M. (2020). Models and methods of machine learning for prediction tasks. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 36, 1, 112-122. [in Ukrainian]
  20. Malyar, M. M. (2016). Models and methods of multicriteria limited-rational choice: Monograph. *Uzhhorod: RA "OUTDOOR-SHARK"* [in Ukrainian].
  21. Polishchuk, V. (2019). Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences. Begell house, Inc, New York*, 51, 66–76.
  22. Hulianytskyi, L. F., & Riasna, I. I. (2016). Automatic classification method based on a fuzzy similarity relation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 52(1) 30–37.

Одержано 11.04.2021

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.  
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).  
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

## Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

## References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Yzdatel'svo ynostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97.* (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.  
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

### References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Yzdatelstvo ynostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].



3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

### Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
  2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
  3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
  4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
  5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
  6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.
- 11) The manuscript should be carefully read.
- 12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Випуск 38 №1*

2021

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),  
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), М. Ю. Бортош (технічний секретар),  
В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, Ф. Е. Гече, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко,  
К. В. Маринець, М. П. Моклячук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова,  
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,  
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського  
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua)