

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 39 № 2

2021

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 39 № 2

Ужгород 2021

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2021. Т. 39, № 2. 176 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Кондрук Н. Е. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Поліщук В. В. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чупов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Шаркаді М. М. — канд. економ. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 11 від 16 листопада 2021 р.

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2021

© Ужгородський національний університет,
2021

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 39 No 2

Uzhhorod 2021

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2021. Vol. 39, No 2. 176 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), Sen. lect. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record No 11 dated by November 16, 2021.

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бак С. М.* Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями 7
2. *Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В.* Про коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин, що мають надсуперкритичний непримітивний *ММ*-тип 22
3. *Ілаш Н. Б., Самарук Н. М.* Метод Єгоричева доведення комбінаторних тождествей з многочленами Нараяна 30
4. *Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В.* Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження 38
5. *Мамай Л. М.* Про побудову наближених ізольованих розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь зі степеневою нелінійністю 47
6. *Мельник І. О., Коляда Р. В., Мельник О. М.* Деякі властивості диференціальних, квазіпервинних та диференціально-первинних піднапівмодулів . 60
7. *Петечук В. М., Петечук Ю. В.* Гомоморфізми лінійних груп, що містять нормальні підгрупи елементарних трансвекцій 68
8. *Рамський А. О., Самарук Н. М., Поплавська О. А.* Кратності ваг незвідних зображень алгебри Лі sl_3 81
9. *Тегза А. М.* Моделювання гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром з заданими точністю і надійністю у рівномірній метриці 91
10. *Щоголев С. А., Карапетров В. В.* Критичний випадок в теорії матричних диференціальних рівнянь 100

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф.* Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень 116
2. *Бойко Н.* Аналіз парадигми Semi-supervised learning для класифікації мультимодальних даних 125
3. *Гедєон А. О., Гапак О. М.* Апаратна реалізація модулів хешування на базі алгоритмів CRC-32 і Adler-32 145
4. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Базисна еквівалентність у класі універсальних булевих алгебр 152
5. *Поліщук В. В., Келемен М., Млавець Ю. Ю., Тимошенко О. А., Келемен М. Мол.* Концептуальна модель оцінювання рівня керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори . . 158

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bak S. M.* Standing waves in discrete Klein-Gordon type equations with power nonlinearities 7
2. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On transitivity coefficient of posets of MM -type to be oversupercritical non-primitive 22
3. *Ilyash N. B., Samaruk N. M.* Egorychev method for proving combinatorial identities involving Narayana polynomials 30
4. *Iliencko A. B., Stamatieva V. V.* A limit theorem for point processes associated with the generalized birthday problem 38
5. *Mamay L. M.* About the construction of approximate isolated solutions of nonlinear integral equations with power nonlinearity 47
6. *Melnyk I. O., Kolyada R. V., Melnyk O. M.* Some properties of differential, quasi-prime and differentially prime subsemimodules 60
7. *Petechuk V. M., Petechuk Y. V.* Homomorphisms of linear groups that contain normal subgroups of elementary transvections 68
8. *Ramskyyi A. O., Samaruk N. M., Poplavska O. A.* Weight multiplicities of irreducible representations of the Lie algebra sl_3 81
9. *Tegza A. M.* Simulation of a Gaussian stationary random process with a limited spectrum with a given accuracy and reliability in a uniform metric 91
10. *Shchogolev S. A., Karapetrov V. V.* Block separation of the system of the linear matrix differential equations 100

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Babych S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F.* Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads 116
2. *Boyko N.* Semi-supervised learning paradigm analysis for classification of multimodal data 125
3. *Hedeon A. O., Hapak O. M.* Hardware implementation of hashing modules based on algorithms CRC-32 and Adler-32 145
4. *Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.* Basic equivalence in class universal boolean algebras 152
5. *Polishchuk V. V., Kelemen M., Mlavets Yu. Yu., Tymoshenko O. A., Kelemen M. Jr.* Conceptual model for assessing the level of process control in complex systems considering risk-oriented factors 158

УДК 517.97

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).7-21](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).7-21)**С. М. Бак**Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського,
професор кафедри математики та інформатики,

доктор фізико-математичних наук

sergiy.bak@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1508-2144>

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА-ГОРДОНА ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Дана стаття присвячена вивченню дискретних рівнянь типу Клейна-Гордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Ці рівняння представляють собою зчисленну систему звичайних диференціальних рівнянь. Такі системи є нескінченновимірними гамільтоновими системами. Розглядаються рівняння типу Клейна-Гордона зі степеневими нелінійностями непарного степеня. При підстановці анзаца у вигляді стоячої хвилі одержується система алгебраїчних рівнянь для амплітуди стоячої хвилі. Далі розглядається система з більш загальним оператором L лінійної взаємодії осциляторів, який є обмеженим і самоспряженим у гільбертовому просторі дійсних двохсторонніх послідовностей l^2 . Розглядається задача про існування періодичних і локалізованих (збігаються до нуля на нескінченності) розв'язків для таких систем. Основними умовами існування цих розв'язків є просторова періодичність коефіцієнтів оператора лінійної взаємодії осциляторів та належність частоти стоячої хвилі спектральному проміжку оператора L . Якщо правий кінець спектрального проміжка скінченний, то система має нетривіальні розв'язки. У цій статті показано, що періодичні і локалізовані розв'язки цієї системи можна побудувати як критичні точки відповідних функціоналів J_k та J . Існування періодичних розв'язків встановлено за допомогою теореми про зачеплення. Зокрема, показано, що функціонал J_k задовольняє так звану умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки. Останні і є періодичними розв'язками системи. У випадку локалізованих розв'язків використати теорему про зачеплення не можна, оскільки для функціоналу J не виконується умова Пале-Смейла. Тому у цьому випадку використано метод періодичних апроксимацій, тобто критичні точки функціоналу J будуються за допомогою граничного переходу при $k \rightarrow \infty$ в критичних точках функціоналу J_k . В силу відомих властивостей дискретного оператора Лапласа одержано наслідок, в якому встановлено умови існування локалізованих розв'язків для вихідної системи.

Ключові слова: дискретні рівняння типу Клейна-Гордона, стоячі хвилі, степеневі нелінійності, критичні точки, теорема про зачеплення, періодичні апроксимації.

1. Вступ. Дискретні гамільтонові системи широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем, зокрема, належать системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Гордона та ін. Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці (див. [1–4]).

Важливими класами розв'язків таких систем є біжучі і стоячі хвилі. Детальні результати про існування біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама можна знайти в монографії О. Панкова [5]. Умови існування різних типів біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона досліджено в працях [6–10]. Зокрема, для одержання основних результатів в статтях [6–9] було використано метод критичних точок, тоді як в [10] — методи теорії біфуркацій. У статті [3]

за допомогою чисельного аналізу досліджено існування та неіснування біжучих кінків в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона. В працях [11–13] за допомогою варіаційних технік вивчалось питання існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Шредінгера. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона вивчалися в працях [14] та [15]. В цих статтях досліджено питання стійкості стоячих хвиль в таких рівняннях.

У цій статті за допомогою методу критичних точок і методу періодичних апроксимацій встановлено існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона зі степеневими нелінійностями.

2. Постановка задачі та основні припущення. У цій статті вивчаються дискретні рівняння типу Клейна–Гордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де $q_n = q_n(t)$ — узагальнена координата n -го осцилятора в момент часу t , $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь та описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів.

Будемо розглядати систему (1) зі степеневими нелінійностями вигляду

$$f(r) = d_n |r|^{2p} r, \quad \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Стоячою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ називається *амплітудою* стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — *частотою*.

Підставляючи стоячу хвилю (2) в систему (1) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2)u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2 . Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [17]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними проміжками*. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова N -періодичності

(i) існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти a_n , b_n і d_n є N -періодичними, тобто

$$a_{n+N} = a_n, \quad b_{n+N} = b_n \quad \text{і} \quad d_{n+N} = d_n.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з kN -періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

де k — фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} u_n = 0 \quad (6)$$

відповідно.

3. Варіаційне формулювання задачі. З системою (4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega^2 u, u) - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2}, \quad (7)$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нагадаємо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (6).

Іноді ми будемо розглядати простори l^p ($p \geq 1$) з нормою

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нагадаємо, що через l^∞ позначається простір всіх обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$$

і при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}.$$

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN -періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n \in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : - \left[\frac{kN}{2} \right] \leq n \leq kN - \left[\frac{kN}{2} \right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2} \right]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega^2 u, u)_k - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+2}, \quad (8)$$

де L_k — оператор L , який діє в просторі l_k^2 .

Лема 1. За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу C^1 , а їхні похідні визначаються формулами

$$\langle J'(u), h \rangle = (Lu - \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} h_n,$$

$$\langle J'_k(u), h \rangle = (L_k u - \omega^2 u, h)_k - \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+1} h_n,$$

де $u, h \in l^2$ та $u, h \in l_k^2$ відповідно.

Крім того, критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (4) відповідно з просторів l^2 та l_k^2 .

Доведення. Розглянемо функціонал J . Легко бачити, що $J \in C^1$. Знайдемо його похідну. Нехай $u, h \in l^2$ та $|\lambda| \leq 1$. Тоді

$$\begin{aligned} J(u + \lambda h) &= \frac{1}{2} (L(u + \lambda h) - \omega^2(u + \lambda h), u + \lambda h) - \\ &- \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (u_n + \lambda h_n)^{2p+2} = \frac{1}{2} ((Lu - \omega^2 u) + \lambda(Lh - \omega^2 h), u + \lambda h) - \\ &- \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (u_n + \lambda h_n)^{2p+2} = \frac{1}{2} (Lu - \omega^2 u, u) + \frac{\lambda}{2} (Lu - \omega^2 u, h) + \\ &+ \frac{\lambda}{2} (Lh - \omega^2 h, u) + \frac{\lambda^2}{2} (Lh - \omega^2 h, h) - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (u_n + \lambda h_n)^{2p+2} = \\ &= \frac{1}{2} (Lu - \omega^2 u, u) + \lambda (Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2} (Lh - \omega^2 h, h) - \\ &- \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (u_n + \lambda h_n)^{2p+2}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} J(u + \lambda h) - J(u) &= \frac{1}{2} (Lu - \omega^2 u, u) + \lambda (Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2} (Lh - \omega^2 h, h) - \\ &- \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (u_n + \lambda h_n)^{2p+2} - \frac{1}{2} (Lu - \omega^2 u, u) + \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} = \\ &= \lambda (Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda^2}{2} (Lh - \omega^2 h, h) - \\ &- \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \left((2p+2) u_n^{2p+1} \lambda h_n + \frac{(2p+2)(2p+1)}{2!} u_n^{2p} (\lambda h_n)^2 + \dots + (\lambda h_n)^{2p+2} \right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \langle J'(u), h \rangle &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(u + \lambda h) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[(Lu - \omega^2 u, h) + \frac{\lambda}{2} (Lh - \omega^2 h, h) - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n \left((2p+2) u_n^{2p+1} h_n + \frac{(2p+2)(2p+1)}{2!} u_n^{2p} \lambda (h_n)^2 + \dots + (\lambda)^{2p+1} (h_n)^{2p+2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$= (Lu - \omega^2 u, h) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} h_n.$$

Легко бачити, що критичні точки $u \in l^2$ функціоналу J є розв'язками системи (4).

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

Таким чином, система (4) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

4. Попередні леми. Зі спектральної теорії диференціальних операторів (див. [17]) маємо, що $\sigma(L_k) \subset \sigma(L)$ і, отже, $\|L_k\| \leq \|L\|$.

Нехай E^+ — підпростір l^2 , утворений додатною частиною спектра оператора $L - \omega^2$ (додатний спектральний підпростір оператора $L - \omega^2$ в l^2), E^- — підпростір l^2 , утворений від'ємною частиною спектра (від'ємний спектральний підпростір оператора $L - \omega^2$ в l^2). Аналогічно введемо додатний та від'ємний спектральні підпростори $E_k^+ \subset E_k$ і $E_k^- \subset E_k$ для оператора $L_k - \omega^2$. Легко перевірити, що відповідні підпростори попарно ортогональні, причому $l^2 = E^+ \oplus E^-$ та $l_k^2 = E_k^+ \oplus E_k^-$. Тоді будь-яку функцію $u \in l^2$ ($u \in l_k^2$) можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ ($u^+ \in E_k^+$), $u^- \in E^-$ ($u^- \in E_k^-$). Причому $u^\pm = P^\pm u$ ($u^\pm = P_k^\pm u$), де P^\pm і P_k^\pm — відповідні ортогональні проектори.

Позначимо через $\delta := \min\{|a - \omega^2|, |b - \omega^2|\}$ — відстань від ω^2 до спектра $\sigma(L)$, де (a, b) — довільний фіксований спектральний проміжок оператора L . Тоді

$$\pm(Lu - \omega^2 u, u) \geq \delta \|u\|^2, \quad u \in E^\pm, \quad (9)$$

$$\pm(L_k u - \omega^2 u, u)_k \geq \delta \|u\|_k^2, \quad u \in E_k^\pm. \quad (10)$$

Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 2. *Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0$ єдина критична точка функціоналів J та J_k відповідно у просторах l^2 та l_k^2 .*

Доведення. Нехай $u \in l^2$ критична точка функціоналу J . Тоді

$$0 = \langle J'(u), u \rangle = (Lu - \omega u, u) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} \leq (Lu - \omega^2 u, u).$$

Оскільки $b = +\infty$, то $E^+ = \{0\}$ і згідно (9)

$$0 \leq (Lu - \omega^2 u, u) \leq -\delta \|u\|^2.$$

А це означає, що $u = 0$.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

Далі знадобиться така лема.

Лема 3. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|_{\frac{2p+2}{2p+1}} \leq \gamma J(u),$$

$$\|u\|_k^{\frac{2p+2}{2p+1}} \leq \gamma J_k(u),$$

$$\text{де } \gamma = ((4\delta^{-1}l)^{\frac{2p+2}{2p+1}}(pl_0)^{-1}, \quad l = \sup\{d_n\} \text{ і } l_0 = \inf\{d_n\}.$$

Доведення. Нехай $u \in l^2$ критична точка функціоналу J , а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді

$$b = J(u) - \frac{1}{2} \langle J'(u), u \rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p+2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2} \geq \frac{p}{2p+2} l_0 \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+2},$$

звідки

$$\|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+2} \leq \frac{(2p+2)b}{pl_0}.$$

Оскільки $u \in l^2$ можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ і $u^- \in E^-$, то

$$\begin{aligned} 0 = \langle J'(u), u^+ \rangle &= (Lu - \omega^2 u, u^+) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+ = \\ &= (Lu^+ - \omega^2 u^+, u^+) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+. \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи (9) і нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\begin{aligned} \delta \|u^+\|^2 &\leq (Lu^+ - \omega^2 u^+, u^+) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+ \leq \\ &\leq l \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^{4p+2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u_n^+)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = l \|u\|_{l^{4p+2}}^{2p+1} \|u^+\| \leq l \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1} \|u^+\|. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \|u^+\|^2 &\leq \delta^{-1} l \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1} \|u^+\| \leq \delta^{-1} l \left(\frac{(2p+2)b}{pl_0} \right)^{\frac{2p+1}{2p+2}} \|u^+\| = \\ &= 2^{\frac{2p+1}{p+1}} \delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}} \|u^+\|. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\|u^-\|^2 \leq 2^{\frac{2p+1}{p+1}} \delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}} \|u^-\|.$$

І остаточно, оскільки

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$$

і

$$\|u^+\| + \|u^-\| \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|,$$

то

$$\begin{aligned} \|u\| &= (\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2^{\frac{2p+1}{p+1}} \delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}} (\|u^+\| + \|u^-\|) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2\delta^{-\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} (pl_0)^{-\frac{2p+1}{4p+4}} b^{\frac{2p+1}{4p+4}} \|u\|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

звідки

$$\|u\| \leq 4\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}},$$

що й дає необхідне.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лемму доведено.

Лема 4. Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності

$$\|u\|^2 \geq \varepsilon_0, \quad J(u) \geq \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \geq \varepsilon_0, \quad J_k(u) \geq \varepsilon,$$

$$\text{де } \varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2p}} \delta^{\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{p}}, \quad \varepsilon = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}} \delta^{\frac{p+1}{p}} l^{-\frac{p+1}{p}} pl_0.$$

Доведення. Нехай $u = u^+ + u^- \in E$ ($u^\pm \in E^\pm$) критична точка функціоналу J , а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді, як і в доведенні попередньої леми, маємо

$$\delta \|u^+\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+1} u_n^+ \leq l \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^{2p+1} u_n^+.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності нерівність Гельдера:

$$|(x, y)| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

при $p = \frac{2p+2}{2p+1}$ і $q = 2p+2$, одержуємо

$$\begin{aligned} \delta \|u^+\|^2 &\leq l \|u^{2p+1}\|_{l^{\frac{2p+2}{2p+1}}} \|u^+\|_{l^{2p+2}} = l \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n^{2p+1}|^{\frac{2p+2}{2p+1}} \right)^{\frac{2p+1}{2p+2}} \|u^+\|_{l^{2p+2}} = \\ &= l \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1} \|u^+\|_{l^{2p+2}} \leq \|u\|^{2p+1} \|u^+\|. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\delta \|u^-\|^2 \leq l \|u\|_{l^{2p+2}}^{2p+1} \|u^-\|_{l^{2p+2}} \leq \|u\|^{2p+1} \|u^-\|.$$

І остаточно, оскільки $\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$ і $\|u^+\| + \|u^-\| \leq 2^{\frac{1}{2}} \|u\|$, то

$$\delta \|u\|^2 = \delta (\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2) \leq l \|u\|^{2p+1} (\|u^+\| + \|u^-\|) \leq 2^{\frac{1}{2}} l \|u\|^{2p+2},$$

звідки

$$\|u\|^2 \geq 2^{-\frac{1}{2p}} \delta^{\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{p}}.$$

Для оцінки критичного значення використаємо останню нерівність і верхню оцінку з попередньої леми

$$\|u\| \leq 4\delta^{-1} l (pl_0)^{-\frac{2p+1}{2p+2}} b^{\frac{2p+1}{2p+2}}.$$

Таким чином, маємо

$$\begin{aligned} b &\geq \left(4^{-1} \delta l^{-1} (pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}} \|u\| \right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} \geq \left(4^{-1} \delta l^{-1} (pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}} 2^{-\frac{1}{4p}} \delta^{\frac{1}{2p}} l^{-\frac{1}{2p}} \right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} = \\ &= \left(2^{-\frac{8p+1}{4p}} \delta^{\frac{2p+1}{2p}} l^{-\frac{2p+1}{2p}} (pl_0)^{\frac{2p+1}{2p+2}} \right)^{\frac{2p+2}{2p+1}} = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}} \delta^{\frac{p+1}{p}} l^{-\frac{p+1}{p}} pl_0. \end{aligned}$$

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено.

5. Теорема про зачеплення. Далі нам знадобиться одна із популярних мінімаксних теорем — теорема про зачеплення.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ класу C^1 .

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b , якщо $I(u_n) \rightarrow b$ та $I'(u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Кажуть, що I задовольняє *умову Пале-Смейла*, якщо виконується така умова:
(PS) *будь-яка послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset H$ містить збіжну підпослідовність.*

Нехай $H = Y \oplus Z$. І нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$$

і

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho, \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа M . Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо C^1 -функціонал I на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I(u).$$

В такому випадку кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення*.

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення (див. [5, 16, 18]).

Теорема про зачеплення. *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ класу C^1 , який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує критична точка $u \in H$ функціоналу I така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I(\gamma(u)) \geq \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$. При цьому

$$I(u) \leq \sup_{u \in M} I(u).$$

6. Існування періодичних розв'язків. За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних kN -періодичних розв'язків системи (4). Для цього, згідно леми 1, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k .

Основним результатом цього параграфу є теорема:

Теорема 1. *Нехай виконується умова (i), $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (4) має нетривіальний kN -періодичний розв'язок $u \in l_k^2$. Більше того, існують такі додатні сталі $\varepsilon_0, C_0, \varepsilon$ і C , які не залежать від k , що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0,$$

$$\varepsilon \leq J_k(u) \leq C.$$

Перевіримо виконання умов теореми про зачеплення для функціоналу J_k . Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 5. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Оскільки l_k^2 є скінченновимірним простором, то для доведення леми достатньо показати, що будь-яка послідовність Пале–Смейла в просторі l_k^2 є обмеженою.

Справді, нехай $\{u^{(j)}\}$ послідовність Пале–Смейла функціоналу J_k на деякому рівні b , тобто $J_k(u^{(j)}) \rightarrow b$ і $J'_k(u^{(j)}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Зауважимо, що замінивши L на $L + \omega_0^2$ та ω^2 на $\omega^2 + \omega_0^2$ з деяким ω_0^2 можна вважати, що $\|L\| \gg 1$, тобто

$$(Lu, u)_k \geq \|u\|_k^2,$$

де $u \in l_k^2$ та $\omega^2 > 0$. Тоді, вибрати $\beta \in \left(\frac{1}{2p+2}, \frac{1}{2}\right)$, для достатньо великих j маємо

$$\begin{aligned} b + 1 + \beta \|u^{(j)}\|_k &\geq J_k(u^{(j)}) - \beta \langle J'_k(u^{(j)}), u^{(j)} \rangle = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (Lu^{(j)} - \omega^2 u^{(j)}, u^{(j)})_k + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) \sum_{n \in Q_k} d_n (u_n^{(j)})^{2p+2} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (Lu^{(j)}, u^{(j)})_k - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \omega^2 \|u^{(j)}\|_k^2 + \\ &\quad + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) \sum_{n \in Q_k} d_n (u_n^{(j)})^{2p+2} \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \omega^2 \|u^{(j)}\|_k^2 + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) l_0 \|u^{(j)}\|_k^{2p+2}. \end{aligned}$$

Оскільки $r^2 \leq K(\varepsilon) + \varepsilon r^{2p+2}$, де $K(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, та $\omega^2 > 0$, то

$$\begin{aligned} b + 1 + \beta \|u^{(j)}\|_k &\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \omega^2 K(\varepsilon) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \omega^2 \varepsilon \|u^{(j)}\|_k^{2p+2} + \left(\beta - \frac{1}{2p+2}\right) l_0 \|u^{(j)}\|_k^{2p+2}. \end{aligned}$$

Вибираючи достатньо мале $\varepsilon > 0$, одержуємо

$$b + 1 + \beta \|u^{(j)}\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \|u^{(j)}\|_k^2 + C \|u^{(j)}\|_k^{2p+2} - C_0$$

з деякими додатними сталими C і C_0 . Остання нерівність і доводить обмеженість послідовності $\{u^{(j)}\}$. Лему доведено.

Покладемо $Y = E_k^-$ та $Z = E_k^+$. Нагадаємо, що функціонал J_k має нетривіальні критичні точки у випадку, коли $b \neq +\infty$, а отже, $Z \neq \{0\}$.

Введемо тепер так званий *оператор обрізки* (див. [12]). Покладемо для $u_n \in l^2$

$$R_k u_n = \begin{cases} u_n, & n \in Q_k, \\ 0, & n \notin Q_k. \end{cases}$$

І нехай $\{S_k u_n\}$ єдина послідовність з l_k^2 така, що $S_k u_n = u_n$, якщо $n \in Q_k$ (оператор періодизації). Тоді $\|u\|_{l_k^p} = \|R_k u\|_{l^p}$. Очевидно, що

$$\|R_k u\|_{l^p} \leq \|u\|_{l^p}, \quad \|S_k u\|_{l_k^p} \leq \|u\|_{l^p}$$

для всіх $u \in l^p$. Більше того, для всіх $u \in l^p$, $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k u\|_{l^p} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k u\|_{l_k^p} = \|u\|_{l^p}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|LR_k u\|_{l^p} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|R_k Lu\|_{l_k^p} = \|Lu\|_{l^p}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|LS_k u\|_{l_k^p} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k Lu\|_{l_k^p} = \|Lu\|_{l^p}. \end{aligned}$$

Візьмемо довільний одиничний вектор $z \in E^+$ і покладемо

$$z^{(k)} = \frac{P_k^+ S_k z}{\|P_k^+ S_k z\|_k} \in Z.$$

Зафіксуємо дві сталі $\rho > r > 0$ і позначимо через

$$N = \{u \in Z : \|u\|_k = r\},$$

$$M = \{u = y + \lambda z^{(k)} : y \in Y, \|u\|_k \leq \rho, \lambda \geq 0\},$$

$$M_0 = \{u = y + \lambda z^{(k)} : y \in Y, \|u\|_k = \rho, \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\|_k \leq \rho, \text{ і } \lambda = 0\}.$$

Наступна лема показує, що функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.

Лема 6. При $r^{2p} \leq l^{-1} \delta p$ маємо, що

$$J_k(u) \geq \frac{\delta}{2p+2} r^2, \quad u \in N,$$

і

$$J_k(u) \leq 0, \quad u \in M_0$$

для достатньо великих ρ . Більше того, існує стала $C > 0$, яка не залежить від k і така, що

$$J_k(u) \leq C, \quad u \in M. \quad (11)$$

Доведення. Якщо $u \in Z$, то

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u - \omega^2 u, u)_k - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+2} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_k^2 - \frac{l}{2p+2} \|u\|_k^{2p+2}.$$

Тоді якщо $u \in N$, то

$$J_k(u) \geq \frac{\delta}{2} r^2 - \frac{l}{2p+2} r^{2p+2} \geq \frac{\delta}{2p+2} r^2$$

при $r^{2p} \leq l^{-1} \delta p$.

Нехай тепер $u = y + \lambda z^{(k)} \in M$. Тоді, оскільки Y та Z взаємно ортогональні спектральні підпростори оператора $L_k - \omega^2$, то

$$\begin{aligned} J_k(y + \lambda z^{(k)}) &= \frac{1}{2}(L_k y - \omega^2 y, y)_k + \frac{\lambda^2}{2}(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)})_k - \\ &\quad - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in Q_k} d_n (y_n + \lambda z_n^{(k)})^{2p+2} \leq \\ &\leq -\frac{\delta}{2} \|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2} (L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)})_k - \frac{1}{2p+2} l_0 \|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}. \end{aligned}$$

Розглянемо підпростір $X = Y \oplus \mathbb{R}z^{(k)} \subset l_k^2$, наділений нормою

$$\|u\|_{l_k^{2p+2}} = \left(\sum_{n \in Q_k} |u_n|^{2p+2} \right)^{\frac{1}{2p+2}}.$$

Відображення $y + \lambda z^{(k)} \mapsto \lambda z^{(k)}$ є обмеженим проектором на $\mathbb{R}z^{(k)}$. Оскільки його норма не менше 1, то

$$\|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2} \geq \|\lambda z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}.$$

Таким чином,

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) \leq -\frac{\delta}{2} \|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2} (L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)})_k - \frac{\lambda^{2p+2}}{2p+2} l_0 \|z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2}. \quad (12)$$

Крім того, оскільки

$$(L_k z^{(k)} - \omega^2 z^{(k)}, z^{(k)})_k \leq \|L_k - \omega^2\| = a_0$$

та

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{(k)}\|_{l_k^{2p+2}}^{2p+2} = \|P^+ z\|_{l^{2p+2}}^{2p+2},$$

то з нерівності (12) маємо

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) \leq -\frac{\delta}{2} \|y\|_k^2 + \frac{a_0}{2} \lambda^2 - a_1 \lambda^{2p+2} \leq \frac{a_0}{2} \lambda^2 - a_1 \lambda^{2p+2}$$

з деяким $a_1 > 0$, яке не залежить від k . Отже, для всіх достатньо великих ρ

$$J_k(u) \leq 0, \quad u \in M_0.$$

Більше того,

$$\sup_{u \in M} J_k(u) \leq C = \max_{\lambda > 0} \left(\frac{a_0}{2} \lambda^2 - a_1 \lambda^{2p+2} \right)$$

з деяким $C > 0$, яке не залежить від k . Лему доведено.

Доведення теореми 1. З лем 5 та 6 випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення, а отже, він має нетривіальну критичну точку $u \in l_k^2$. Більше того, за цією ж теоремою відповідне критичне значення задовольняє нерівність

$$b = J_k(u) \leq \sup_{u \in M} J_k(u).$$

Тепер оцінки для критичної точки і відповідного критичного значення впливають з лем 3, 4 та 6. Теорему доведено.

7. Існування локалізованих розв'язків. Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (4). За лемою 1 ці розв'язки є критичними точками функціоналу J . Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \rightarrow \infty$ в критичних точках функціоналу J_k .

Основним результатом цього параграфу є така теорема:

Теорема 2. *Нехай виконується умова (i), $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a, b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді система (4) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \{u_n^{(k)}\} \in l_k^2$ нетривіальний kN -періодичний розв'язок системи (4), який існує за теоремою 1.

Зазначимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $n_k \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$|u_{n_k}^{(k)}| \geq \delta_0. \quad (13)$$

Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \rightarrow 0$ в l^∞ , а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \rightarrow 0$ в l^∞ . За теоремою 1, $\|v^{(k)}\| = \|u^{(k)}\|_k$ обмежена. Далі оскільки

$$\|v\|_{l^p}^p \leq \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2, \quad p > 2,$$

то $v^{(k)} \rightarrow 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\|u^{(k)}\|_{l_k^p} \rightarrow 0$ для всіх $p > 2$. Тоді, як на початку доведення леми 3, для відповідного критичного значення $b_k = J_k(u^{(k)})$ маємо що суперечить лемі 4.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\{u_{n+N}^{(k)}\}$ є також розв'язком системи (4). Тому можна вважати, що $0 \leq n_k \leq N - 1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$.

В силу обмеженості $\{u^{(k)}\}$, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо $u_n^{(k)} \rightarrow u_n$ при $k \rightarrow \infty$ (для всіх $n \in \mathbb{Z}$). Крім того, за нерівністю (13),

$$|u_{n_0}| \geq \delta_0,$$

а отже, $u = \{u_n\}$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що $u = \{u_n\}$ є розв'язком системи (4).

Залишається показати, що $u = \{u_n\} \in l^2$. Справді, оскільки для будь-якого фіксованого $\tilde{n}, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k ,

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n^{(k)}|^2 \leq \|u^{(k)}\|_k^2 \leq C^2,$$

то переходячи до границі при $k \rightarrow \infty$, одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} |u_n|^2 \leq C^2.$$

В силу довільності \tilde{n} маємо, що $u \in l^2$. Теорему доведено.

Зауважимо, що якщо $b = +\infty$, то за лемою 2 система (4) має тільки тривіальний розв'язок.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $[m^2, 4 + m^2]$, то з теореми 2 одержуємо наслідок:

Наслідок 1. *Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ та $\omega^2 < m^2$. Тоді система (3) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.*

Список використаної літератури

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1–108.
3. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
4. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*. 2006. Vol. 216. P. 327–345.
5. Pankov A. Traveling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices. London: Imperial College Press, 2005. 196 p.
6. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *J. Math. Sci.* 2016. Vol. 217, № 2. P. 187–197.
7. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves for a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2d-lattice. *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, № 4. P. 509–520.
8. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Commun. Math. Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
9. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4. P. 916–920.
10. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.
11. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Commun. Math. Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
12. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*. 2006. Vol. 19. P. 27–40.
13. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equations, II: generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.
14. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.* 2013. Vol. 33, № 6. P. 2389–2401.
15. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205–211.
16. Rabinowitz P. H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1986. 100 p.
17. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I.: American Math. Soc. 2000. 251 p.
18. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser, 1996. 162 p.

Bak S. M. Standing waves in discrete Klein-Gordon type equations with power nonlinearities.

This article is devoted to the study of discrete Klein-Gordon type equations that describe the dynamics of an infinite chain of linearly coupled nonlinear oscillators. These equations represent a countable system of ordinary differential equations. Such systems are infinite-dimensional Hamiltonian systems. Equations of the Klein-Gordon type with power nonlinearities of odd degree are considered. When substituting the ansatz in the form of a standing wave, a system of algebraic equations for the amplitude of the standing wave is obtained. Further, we consider a system with a more general operator L of linear interaction of oscillators, which is bounded and self-adjoint in the Hilbert space of real two-sided sequences l^2 . The problem of the existence of periodic and localized (converging to zero at infinity) solutions for such systems is considered. The main conditions for the existence of these solutions are the spatial periodicity of the coefficients of the linear interaction operator of the oscillators and the belonging of the standing wave frequency to the spectral interval of the operator L . If the right end of the spectral interval is finite, then the system has nontrivial solutions. This article shows that periodic and localized solutions of this system can be constructed as critical points of the corresponding functionals J_k and J . The existence of periodic solutions was established using the linking theorem. In particular, it is shown that the functional J_k satisfies the so-called Palais-Smale condition and the linking geometry, and therefore has nontrivial critical points, which are the periodic solutions of the system. In the case of localized solutions, the linking theorem cannot be used, since the Palais-Smale condition does not hold for the functional J . Therefore, in this case, the method of periodic approximations is used, that is, the critical points of the functional J are constructed using the passage to the limit as $k \rightarrow \infty$ at the critical points of the functional J_k . By virtue of the well-known properties of the discrete Laplace operator, a corollary is obtained in which conditions for the existence of localized solutions for the original system are established.

Keywords: discrete Klein-Gordon type equations, standing waves, power nonlinearities, critical points, linking theorem, periodic approximations.

References

1. Aubry, S. (1997). Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D.*, 103, 201–250.
2. Braun, O. M., & Kivshar, Y. S. (1998). Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model. *Physics Repts.*, 306, 1–108.
3. Iooss, G., & Pelinovsky, D. (2006). Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 216, 327–345.
4. Braun, O. M., & Kivshar, Y. S. (2004). The Frenkel-Kontorova Model, Concepts, Methods and Applications. Berlin: Springer.
5. Pankov, A. (2005). Traveling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices. London: Imperial College Press.
6. Bak, S.M. (2016). Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *J. Math. Sci.*, 217(2), 187–197.
7. Bak, S. M. (2017). Existence of solitary traveling waves for a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2d-lattice. *Ukr. Math. J.*, 69(4), 509–520.
8. Bak, S. M. (2007). Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Commun. Math. Analysis.*, 3(1), 19–26.
9. Bak, S. N., & Pankov, A. A. (2011). Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *J. Math. Sci.*, 174(4), 916–920.
10. Iooss, G., & Kirschgässner, K. (2000). Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.*, 211, 439–464.
11. Bak, S., & Kovtonyuk, G. (2019). Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Commun. Math. Analysis.*, 22(2), 18–34.
12. Pankov, A. (2006). Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 19, 27–40.

13. Pankov, A. (2007). Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equations, II: generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 19(2), 419–430.
14. Ghimenti, M., Le Coz, S., & Squassina, M. (2013). On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 33(6), 2389–2401.
15. Morgante, A. M., Johansson, M., Kopidakis, G., & Aubry, S. (2001). Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 205–211.
16. Rabinowitz, P. H. (1986). *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Providence: Amer. Math. Soc.
17. Teschl, G. (2000). *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. Providence, R. I. : American Math. Soc.
18. Willem, M. (1996). *Minimax theorems*. Boston: Birkhäuser.

Одержано 16.09.2021

UDC 512.53, 512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).22-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).22-29)**V. M. Bondarenko¹, M. V. Styopochkina²**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
leading researcher of the department of algebra and topology,
doctor of physical and mathematical sciences
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Polissia National University,
associate professor of higher and applied mathematics,
candidate of physical and mathematical sciences
stmar@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

ON TRANSITIVITY COEFFICIENTS FOR POSETS OF *MM*-TYPE TO BE OVERSUPERCRITICAL NON-PRIMITIVE

M. M. Kleiner proved that a poset S has finite representation type if and only if it does not contain subsets of the form

$$(1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 2), \quad (1, 3, 3), \quad (1, 2, 5), \quad (N, 4).$$

These posets are called the Kleiner's posets and are (up to isomorphism) all the critical posets relative to the finiteness of type (i.e. minimal posets having infinite representation type). Later Yu. A. Drozd proved that a poset S has finite representation type if and only if the quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

which is called the Tits quadratic form of S , is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors). Thus, the Kleiner's posets are critical relative to weak positivity of the Tits quadratic form. In 2005 the authors proved that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset.

An analogous situation takes place for posets of tame representation type. L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form

$$(1, 1, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 2), \quad (2, 2, 3), \quad (1, 3, 4), (1, 2, 6), \quad (N, 5).$$

These posets are critical relative to weak non-negativity of the Tits quadratic form and are called supercritical.

In 2009 the authors proved that a poset is critical relative to non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset. The first author suggested to introduce so-called oversupercritical (or 1-oversupercritical) posets, which differ from the supercritical ones in the same degree as the supercritical posets differ from the critical ones. Among these posets, there is a single non-primitive poset, i.e. which is not a direct sum of chains. In this paper, we describe all posets that are minimax isomorphic to them and study some of their combinatorial properties. The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are \mathbb{Z} -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined \mathbb{Z} -equivalence of the Tits quadratic forms for posets.

Keywords: representation, critical and supercritical poset, oversupercritical poset, Tits quadratic form, finite and tame representation type, positivity and non-negativity, transitivity coefficient.

1. Introduction. In [1] were introduced *1-oversupercritical posets* which differ from supercritical posets in the same degree as the latter differ from critical ones; often, including in this article, they are simply called *oversupercritical* (in more details see Introduction in [2]). Among these posets, there is, up to isomorphism, only one not being primitive (i.e. which is not a direct sum of chains), namely

$$U = \{1, 2, \dots, 10 \mid 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8, 9 \prec 10, 7 \prec 10\}.$$

In this article, we describe all posets that are minimax isomorphic to him and study some of their combinatorial properties.

2. The main classification theorem. Let S be a finite poset. For an element $a \in S$ being minimal (resp. maximal), denote by $T = S_a^\uparrow$ (resp. $T = S_a^\downarrow$) the following poset: $T = S$ as usual sets, $T \setminus a = S \setminus a$ as posets, the element a is maximal (resp. minimal) in T , and a is comparable with x in T if and only if they are incomparable in S . Posets S and T are called (min, max)-*equivalent* or *minimax equivalent* if there are posets S_1, \dots, S_p ($p \geq 0$) such that, if we put $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then, for every $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$ or $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$ [3]. Posets S and S' are called (min, max)-*isomorphic* or *minimax isomorphic* if there exists a poset X , which is minimax equivalent to S and isomorphic to S' . Obviously, empty poset is (min, max)-equivalent (and (min, max)-isomorphic) to itself.

Let P be a fix poset. A poset S is called of *MM-type P* if S is minimax isomorphic to P [4]. If P is oversupercritical we say that S is of *oversupercritical MM-type*. Posets of concrete MM-types were studied in many papers (see, besides the above mentioned papers, [5] – [13]). All posets of oversupercritical MM-type U are described by the following theorem (for a definition of U see Introduction).

Theorem 1. *Up to isomorphism and anti-isomorphism, the set of posets minimax isomorphic to U consists of the posets indicated in the following two tables.*

Table 1.

1 	2 	3 	4 	5 	6
7 	8 	9 	10 	11 	12

13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25		26	27	28	29

Table 2.

1'	2'	3'	4'	5'	6'
7'	8'	9'	10'	11'	12'

A poset with number s (resp. s'), indicated in Table 1 (resp. Table 2), is denoted by N_s (resp. $N_{s'}$).

Recall that a poset T is called *dual to a poset S* and is denoted by S^{op} if $T = S$ as usual sets and $x < y$ in T if and only if $x > y$ in S . Posets S and T are called *anti-isomorphic* if S and T^{op} are isomorphic. Note that the posets N_x , $x = 1, 2, \dots, 29, 1', 2' \dots, 12'$ (indicated in Tables 1 and 2), are pairwise non-isomorphic and non-anti-isomorphic.

3. Proof of Theorem 1. We will use some ideas and definitions of [5], which are also presented in our paper published in the previous issue of this journal (see [2, Section 3]). Many of them (in particular, the algorithm for describing all posets that are minimax isomorphic to a given one) are not duplicated in this article.

Apply our algorithm to the proof of the theorem.

Step I. Describe (up to strongly isomorphic) all lower subposets X of the poset U . They are:

$X_1 = \emptyset$, $X_2 = \{1\}$, $X_3 = \{7\}$, $X_4 = \{9\}$, $X_5 = \{1, 2\}$, $X_6 = \{1, 7\}$, $X_7 = \{1, 9\}$, $X_8 = \{7, 8\}$, $X_9 = \{7, 9\}$, $X_{10} = \{1, 2, 3\}$, $X_{11} = \{1, 2, 7\}$, $X_{12} = \{1, 2, 9\}$, $X_{13} = \{1, 7, 8\}$, $X_{14} = \{1, 7, 9\}$, $X_{15} = \{7, 8, 9\}$, $X_{16} = \{7, 9, 10\}$, $X_{17} = \{1, 2, 3, 4\}$, $X_{18} = \{1, 2, 3, 7\}$, $X_{19} = \{1, 2, 3, 9\}$, $X_{20} = \{1, 2, 7, 8\}$, $X_{21} = \{1, 2, 7, 9\}$, $X_{22} = \{1, 7, 8, 9\}$, $X_{23} = \{1, 7, 9, 10\}$, $X_{24} = \{7, 8, 9, 10\}$, $X_{25} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $X_{26} = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $X_{27} = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $X_{28} = \{1, 2, 3, 7, 8\}$, $X_{29} = \{1, 2, 3, 7, 9\}$. $X_{30} = \{1, 2, 7, 8, 9\}$, $X_{31} = \{1, 2, 7, 9, 10\}$, $X_{32} = \{1, 7, 8, 9, 10\}$, $X_{33} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_{34} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $X_{35} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$, $X_{36} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $X_{37} = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$, $X_{38} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$, $X_{39} = \{1, 2, 3, 7, 9, 10\}$, $X_{40} = \{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$, $X_{41} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X_{42} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$, $X_{43} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $X_{44} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $X_{45} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$, $X_{46} = \{1, 2, 3, 4, 7, 9, 10\}$, $X_{47} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $X_{48} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X_{49} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $X_{50} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $X_{51} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X_{52} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$, $X_{53} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $X_{54} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$, $X_{55} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$. Denote by K_i the poset U_X^\uparrow for $X = X_i$. It was showed in [7] that, up to isomorphism and duality, the sets of posets K_i with i running from 1 to 55 coincides with the set of posets, indicated in Table 1.

Step II. Describe, up to strongly isomorphic, all pairs $Z = (Y, X)$ consisting of a proper lower subposet Y in U and a nonempty lower subposet X in Y such that $X < U \setminus Y$ (i.e. $x < t$ for any $x \in X, t \in U \setminus Y$). They are:

$Z_1 = (X_{32}, \{1\})$, $Z_2 = (X_{40}, \{1\})$, $Z_3 = (X_{40}, \{1, 2\})$, $Z_4 = (X_{47}, \{1\})$, $Z_5 = (X_{47}, \{1, 2\})$, $Z_6 = (X_{47}, \{1, 2, 3\})$, $Z_7 = (X_{49}, \{7\})$, $Z_8 = (X_{52}, \{1\})$, $Z_9 = (X_{52}, \{1, 2\})$, $Z_{10} = (X_{52}, \{1, 2, 3\})$, $Z_{11} = (X_{52}, \{1, 2, 3, 4\})$; $Z_{12} = (X_{53}, \{7\})$, $Z_{13} = (X_{53}, \{9\})$, $Z_{14} = (X_{53}, \{7, 9\})$, $Z_{15} = (X_{54}, \{7\})$, $Z_{16} = (X_{55}, \{1\})$, $Z_{17} = (X_{55}, \{1, 2\})$, $Z_{18} = (X_{55}, \{1, 2, 3\})$, $Z_{19} = (X_{55}, \{1, 2, 3, 4\})$, $Z_{20} = (X_{55}, \{1, 2, 3, 4, 5\})$.

Denote by K'_i the poset $(U_Y^\uparrow)_X^\uparrow$ for $(Y, X) = Z_i$ and show that, up to isomorphism and duality, the sets of posets K'_i with i running from 1 to 20 coincides with the set of posets, indicated in Table 2. Indeed, it is easy to see that $K'_1 \cong N_{1'}^{\text{op}}$, $K'_2 \cong N_{2'}^{\text{op}}$, $K'_3 \cong N_{3'}^{\text{op}}$, $K'_4 \cong N_{4'}^{\text{op}}$, $K'_5 \cong N_{5'}^{\text{op}}$, $K'_6 \cong N_{6'}$, $K'_7 \cong N_{7'}$, $K'_8 \cong N_{8'}^{\text{op}}$, $K'_9 \cong N_{9'}$, $K'_{10} \cong N_{5'}$, $K'_{11} \cong N_{3'}$, $K'_{12} \cong N_{10'}$, $K'_{13} \cong N_{11'}^{\text{op}}$, $K'_{14} \cong N_{7'}^{\text{op}}$, $K'_{15} \cong N_{11'}$, $K'_{16} \cong N_{12'}$, $K'_{17} \cong N_{8'}$, $K'_{18} \cong N_{4'}$, $K'_{19} \cong N_{2'}$, $K'_{20} \cong N_{1'}$.

Step III. It is easy to verify that all the posets, indicated in the condition of the theorem, and dual to them (in the non-dual cases) occur in I and II (and even one time at a time). And hence the theorem is proved.

4. Coefficientts of transitivity. For a (finite) poset S , we put $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$. If $(x, y) \in S_{<}^2$ and there is no z satisfying $x < z < y$, then we say that x and y are *neighboring*. We put $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$ and denote by $n_e = n_e(S)$ the number of pairs of neighboring elements. The ratio $k_t = k_t(S)$ of the numbers $n_w - n_e$ and n_w is called by definition the *coefficient of transitivity* of S (see [10]). Note that in the case $n_w = 0$ (then $n_e = 0$) we assume $k_t = 0$.

In this part of the paper we calculate k_t for the posets of *MM*-type U .

Theorem 2. *The following holds for posets N_s , $s = 1, 2, \dots, 29, 1', 2' \dots, 12'$:*

N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t
1	8	18	0,55556	11	9	19	0,52632	21	9	20	0,55
2	9	17	0,47059	12	10	21	0,52381	22	9	28	0,67857
3	8	23	0,65217	13	10	27	0,62963	23	10	30	0,66667
4	9	25	0,64	14	9	23	0,60870	24	10	42	0,76190
5	9	18	0,5	15	9	35	0,74286	25	9	33	0,72727
6	9	20	0,55	16	10	37	0,72973	26	9	23	0,60870
7	10	22	0,54545	17	9	26	0,65385	27	10	25	0,6
8	10	32	0,6875	18	9	20	0,55	28	10	23	0,56522
9	8	28	0,71429	19	10	22	0,54545	29	9	19	0,52632
10	9	21	0,57142	20	10	24	0,58333				

N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t
1'	11	42	0,73810	5'	10	33	0,69697	9'	10	26	0,61538
2'	10	33	0,69697	6'	11	42	0,73810	10'	9	30	0,7
3'	11	42	0,73810	7'	10	37	0,72973	11'	10	32	0,6875
4'	10	26	0,61538	8'	10	21	0,52381	12'	10	18	0,44444

The transitivity coefficients are written out with an accuracy of five decimal places. The value is exact if and only if the number of decimal places is less than five, and two values equal to exactly five digits are equal at all.

The proof is carried out by direct calculations.

Recall that *height of a poset S* is, by definition, the greatest length among the lengths of all linear ordered subsets of S . An element of a poset is called *nodal*, if it is comparable with all the other elements. A subposet X of T is called *dense* if there is not $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$ such that $x_1 < y < x_2$.

Note that a poset of *MM*-type U can have at most six nodal elements.

Corollary 1. *The coefficient $k_t(S)$ of a poset S is the largest among those for all the posets of *MM*-type U if and only if S contains a dense subposet with six nodal elements.*

Corollary 2. *The coefficient $k_t(S)$ of a poset S is the smallest among those for all the posets of *MM*-type U if and only if S is a self-dual non-connected poset of height four.*

Corollary 3. *For a posets S of MM-type U , the following conditions are equivalent:*

- (a) $k_t(S) = \frac{1}{2}$;
- (b) S is a non-self-dual non-connected poset of height four.

5. Conclusions. In this paper we continue study combinatorial aspects of oversupercritical posets. Namely, we describe all the posets that are minimax isomorphic to the oversupercritical poset

$$U = \{1, 2, \dots, 10 \mid 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5 \prec 6, 7 \prec 8, 9 \prec 10, 7 \prec 10\}.$$

The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are \mathbb{Z} -equivalent.

We also describe the transitivity coefficients for all posets minimax isomorphic to this oversupercritical poset.

The obtained results (together with the corresponding research methods) can be used in the study of combinatorial aspects of other posets.

References

1. Bondarenko, V. V., Bondarenko, V. M., Styopochkina, M. V., & Chervyakov, I.V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. I. *Sci. Bull. of Uzhhorod Univ. Ser. of Math. and Inf.*, 22(2), 17-25 [in Russian].
2. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021). On posets of sixth order having oversupercritical MM-type. *Sci. Bull. of Uzhhorod Univ. Ser. of Math. and Inf.*, 38(1), 7-15.
3. Bondarenko, V.M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24-25 [in Russian].
4. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2018). On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Sci. Bull. of Uzhhorod Univ. Ser. of Math. and Inf.s*, 1(32), 50-53.
5. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2(3), 18-58 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukr. Math. J.*, 61(5), 611-624 [in Russian].
7. Bondarenko, V. V., & Styopochkina, M. V. (2013). Non-primitive 1-oversupercritical partially ordered set and min-equivalence. *Scien. J. of NPU named after Dragomanov. Series 1. Phys.-Math. sciences*, 14, 55-61 [in Russian].
8. Styopochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2015). The number of partially ordered sets, (min, max)-equivalent to the set (1, 2, 7). *Applied problems of mech. and math.*, 13, 18-21 [in Ukrainian].
9. Styopochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2016). The number of partially ordered sets, (min, max)-equivalent to the 1-oversupercritical partially ordered set (1, 3, 5). *Applied problems of mech. and math.*, 14, 12-15 [in Ukrainian].
10. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2017). Coefficients of transitiveness of P-critical posets. *Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine*, 14(1), 46-51.
11. Bondarenko, V. M., Orlovskaja, Yu. M., & Styopochkina, M. V. (2018). On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Applied problems of mech. and math.*, 16, 30-32.
12. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2019). On properties of posets of MM-type (1,2,7). *Applied problems of mech. and math.*, 17, 7-10.
13. Bondarenko, V. M., Styopochkina, M. V., & Stoika M. V. (2020). The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width 3. *Applied problems of mech. and math.*, 18, 11-13.

Бондаренко В. М., Стюпочкіна М. В. Про коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин, що мають надсуперкритичний непримітивний MM -тип.

М. М. Клейнер довів, що ч. в. (частково впорядкована) множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду

$$(1, 1, 1, 1), \quad (2, 2, 2), \quad (1, 3, 3), \quad (1, 2, 5), \quad (N, 4).$$

Ці ч. в. множини називаються ч. в. множинами Клейнера і є (з точністю до ізоморфізму) всіма критичними ч. в. множинами щодо скінченності типу (в тому сенсі, що це мінімальні ч. в. множини нескінченного зображувального типу). Пізніше Ю. А. Дрозд довів, що ч. в. множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли квадратична форма

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

яка називається квадратичною формою Тітса множини S , є слабко додатною (тобто додатною на множині невід'ємних векторів). Отже, ч. в. множини Клейнера є критичними щодо слабкої додатності квадратичної форми Тітса. У 2005 році автори довели що ч. в. множина є критичною щодо додатності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій ч. в. множині Клейнера.

Подібну ситуацію маємо для ч. в. множин ручного зображувального типу. Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина S є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду

$$(1, 1, 1, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 2), \quad (2, 2, 3), \quad (1, 3, 4), (1, 2, 6), \quad (N, 5).$$

Ці ч. в. множини є критичними щодо слабкої невід'ємності квадратичної форми Тітса і називаються суперкритичними. У 2009 році автори довели, що ч. в. множина є критичною щодо невід'ємності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій суперкритичній ч. в. множині. Перший автор запропонував ввести так звані надсуперкритичні (або 1-надсуперкритичні) ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин в тій самій мірі, що і останні відрізняються від критичних. Серед цих ч. в. множин є єдина не примітивна, тобто яка не є прямою сумою ланцюгів. У цій статті ми описуємо всі ч. в. множини, які мінімаксно ізоморфні їй, і вивчаємо деякі їхні комбінаторні властивості. Важливість вивчення мінімаксно ізоморфних ч. в. множин визначається тим, що їх квадратичні форми Тітса \mathbb{Z} -еквівалентні, а сам мінімаксний ізоморфізм є досить загальною конструктивно визначеною \mathbb{Z} -еквівалентністю для квадратичних форм Тітса ч. в. множин.

Ключові слова: зображення, критична та суперкритична ч. в. множина, надсуперкритична ч. в. множина, квадратична форма Тітса, скінченний і ручний зображувальний тип, додатність і слабка додатність, негативність і слабка негативність.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкіна М. В., Червяков И. В. 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и мин-эквивалентность. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.*, 2011. Вип. 22, № 2. С. 17–25.
2. Бондаренко В. М., Степочкіна М. В. On posets of sixth order having oversupercritical MM -type. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.*, 2021. Вип. 38, № 1. С. 7–15.
3. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 2005. No. 1. С. 24–25.
4. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM -type (1,3,5). *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.*, 2018. Вип. 32, № 1. С. 50–53.

5. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
6. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *УМЖ*, 2009. Т. 61, № 5. С. 734–746.
7. Бондаренко В. В., Степочкина М. В. Непрimitивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность. *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*, 2013. № 14. С. 55–61.
8. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних множині (1, 2, 7). *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2015. Вип. 13. С. 18–21.
9. Стьопочкіна М. В., Черв'яков І. В. Кількість частково впорядкованих множин, (min, max)-еквівалентних 1-надсуперкритичній частково впорядкованій множині (1, 3, 5). *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2016. Вип. 14. С. 12–15.
10. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Coefficients of transitiveness of P-critical posets. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 2017. Т. 14, No. 1. С. 46–51.
11. Bondarenko V. M., Orlovskaja Yu. M., Styopochkina M. V. On Hasse diagrams connected with the 1-oversupercritical poset (1,3,5). *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2018. Вип. 16. С. 30–32.
12. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type (1, 2, 7). *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2019. Вип. 17. С. 7–10.
13. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V., Stoika M. V. The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width 3. *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2020. Вип. 18. С. 11–13.

Recived 01.11.2021

УДК 519.1

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).30-37](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).30-37)**Н. Б. Ілаш¹, Н. М. Самарук²**¹ Хмельницький політехнічний фаховий коледж національного університету «Львівська політехніка»,

викладач спеціальних дисциплін,

кандидат фізико-математичних наук

nadyailash@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3123-9642>² Хмельницький національний університет,

доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,

кандидат педагогічних наук, доцент

samaruk_nm@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4611-8528>

МЕТОД ЄГОРИЧЕВА ДОВЕДЕННЯ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ З МНОГОЧЛЕНАМИ НАРАЯНА

У цій публікації наведено нові доведення двох комбінаторних тотожностей. Часткові випадки цих тотожностей містять числа та многочлени Нараяна і використовуються, зокрема, у класичній теорії інваріантів та дискретній математиці. Одна із доведених нами тотожностей є узагальненням задачі Стенлі.

Хоча існує велика кількість методів генерування нових комбінаторних тотожностей, на жаль, не існує єдиного універсального методу, який дозволив би довести будь-яку комбінаторну тотожність. У сімдесятих роках минулого століття Георгієм Єгоричевим було розроблено декілька нових методів обчислення комбінаторних сум. У цій статті ми використовуємо один з методів Єгоричева – метод лишків (коефіцієнтів).

Ключові слова: комбінаторика, біноміальний коефіцієнт, комбінаторна тотожність, метод Єгоричева, многочлени Нараяна.

1. Вступ. Число Нараяна

$$N_{n,k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}, (1 \leq k \leq n)$$

використовується в багатьох комбінаторних задачах (див. [1], [2]).

Ми розглядаємо многочлен Нараяна

$$N_n(z) = \sum_{k=1}^n N_{n,k} z^{k-1}.$$

В деяких джерелах його називають асоційованим многочленом Нараяна (див. [3]).

Крім цього, розглянемо многочлен Нараяна типу B , що визначається наступним чином:

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 z^k.$$

Зокрема, застосування многочленів Нараяна та числа Нараяна у класичній теорії інваріантів наведені у [4], [5], [6], [7]. В [8] знайдено рекурентне співвідношення для многочленів Нараяна:

$$N_n(z) = (1-z)N_{n-1}(z) + z \sum_{i=0}^{n-1} N_i(z)N_{n-1-i}(z).$$

Породжуюча функція

$$G(z, t) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} N_n(z) t^i = \frac{1 - (1 - z)t - \sqrt{(1 - z)^2 t^2 - 2(1 + z)t + 1}}{2zt}$$

задовільняє функціональне рівняння (див. [9]):

$$ztG(z, t)^2 + (t + zt - 1)G(z, t) + t = 0.$$

Різні рекурентні співвідношення для многочленів Нараяна обох типів доведено у [10] та у [11].

У [12] Р. Стенлі пропонує ряд задач. Серед них задача 15: довести, що многочлен Нараяна типу В можна подати у вигляді

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k.$$

В [13] доведено аналог цієї формули для многочленів Нараяна $N_n(z)$.

В [14] чисто комбінаторно доведена тотожність, що їх узагальнює. Доведення займає декілька сторінок. В розділі 3 ми наводимо коротке і елементарне доведення цієї тотожності, використовуючи метод Єгоричева. Основні положення цього методу наведено в розділі 2.

В [21] чисто комбінаторно доведено комбінаторну тотожність

$$\sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s} \binom{m+k+2s}{m+s},$$

що є узагальненням відомої тотожності Лі Жень-чу. Доведення займає декілька сторінок. У розділі 4 ми пропонуємо простіше доведення, з використанням методу Єгоричева.

2. Метод Єгоричева обчислення комбінаторних сум. Розглянемо основні правила методу лишків (коефіцієнтів), розробленого Г. Єгоричевим у [15].

Нехай $A(w)$ і $B(w)$ – породжуючі функції для числових послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_k\}$, $k = 0, 1, \dots$. Множину тих числових рядів над полем K дійсних чи комплексних чисел, що містять скінченну кількість доданків з від'ємними степенями, позначимо через H . Введемо на H алгебру формальних степеневих рядів з операціями додавання, множення та взяття оберненого. Кільце R степеневих рядів виду

$$C(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k, c_1 \neq 0$$

над полем K має структуру алгебри Коші.

Означення 1 (див. [15]). *Нехай $C(w) \in H$. Лишком назвемо*

$$\mathit{res}C(w) = \mathit{res}_w C(w) = c_{-1},$$

де c_{-1} – коефіцієнт при w^{-1} ряду $C(w)$, що стоїть під знаком res .

З означення лишку \mathbf{res} та теорії аналітичних функцій впливають такі правила дій над лишками породжуючих функцій виду $A(w) = \sum_{k \geq 0} a_k w^k$.

Твердження 1 (див. [15]). *Правило зняття лишку*

$$\mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} = \mathbf{res}_w B(w) w^{-k-1}, k = 0, 1, \dots,$$

тоді і тільки тоді, коли

$$A(w) = B(w).$$

Твердження 2 (див. [15]). *Правило лінійності*

$$\alpha \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} + \beta \mathbf{res}_w B(w) w^{-k-1} = \mathbf{res}_w (\alpha A(w) + \beta B(w)) w^{-k-1}.$$

Твердження 3 (див. [15]). *Правило заміни змінних*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{res}_w A(w) w^{-k-1} = A(z).$$

Твердження 4 (див. [15]). *Нехай α — довільне комплексне число, m — натуральне. Біноміальний коефіцієнт можна виразити через лишок з допомогою формули*

$$\binom{\alpha}{n} = \mathbf{res}_w (1+w)^\alpha w^{-n-1}.$$

Останнє співвідношення залишається справедливим і у випадку, коли $A(w)$ многочлен, а $z = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k w^k$, $a_{-m} \neq 0$, де m додатне число.

Алгебраїчний підхід до означення лишку розвинено у роботах [16] і [17].

Застосування даного методу дає можливість просто генерувати комбінаторні тотожності, зокрема, з числами Нараяна. Що буде продемонстровано нижче.

3. Доведення узагальненої задачі Стенлі. Застосовуючи метод Єгоричева, покажемо, що

Теорема 1 (див. [14]). *Для $n, q \geq 0, x \in \mathbb{C}$ справедлива тотожність*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k.$$

Доведення. Виразимо біноміальні коефіцієнти у правій частині через лишки. Згідно твердження 4

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n+x+q-k-2}{n+q-1} (z-1)^k = \\ & = \mathbf{res}_{uv} \sum_{k=0}^n \frac{(1+v)^n (1+u)^{2n+x+q-2-k}}{v^{k+1} u^{n+q}} (z-1)^k = \\ & = \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \mathbf{res}_v \sum_{k=0}^n \left(\frac{z-1}{1+u} \right)^k \frac{(1+v)^n}{v^{k+1}} = \end{aligned}$$

Застосувавши правило заміни змінних, маємо

$$\begin{aligned} &= \operatorname{res}_u \frac{(1+u)^{2n+q+x-2}}{u^{n+q}} \left(1 + \frac{z-1}{1+u}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \operatorname{res}_u \frac{(1+u)^{n+q+x-2}}{u^{k+q}} z^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+x+q-2}{k+q-1} z^k. \end{aligned}$$

Зазначимо, що при $x = q = 1$ ми довели задачу Стенлі:

Наслідок 1 (див. [12], [14]). *Многочлен Нараяна типу В можна подати у вигляді*

$$W_n(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k.$$

При $q = 0, x = 2$ отримаємо аналогічний вираз для многочленів Нараяна.

Наслідок 2 (див. [13], [14], [18]). *Многочлен Нараяна можна подати у вигляді*

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \frac{1}{z(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} (z-1)^k = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \binom{2n-k}{n} z^{n-k} (1-z)^k. \end{aligned}$$

Зауважимо, що останній вираз для многочлена Нараяна отримується завдяки тому, що многочлен $xN_n(x)$ є самовзаємним.

4. Доведення узагальнення тотожності Лі Жень-чу. Існує багато формул, які легко застосувати як до чисел Нараяна, так і для чисел виду $q_{n,k} = \binom{n}{k}^2$. Наприклад, згортка Вандермонда дає можливість легко знайти як суму $\sum_{k=1}^n N_{n,k}$, так і суму $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}^2$.

В [19], [20] Ріордан доводить рекурентні формули для чисел $r_{n,m} = N_{n,m+1}$

$$r_{n,m} = \sum_{i=0}^m r_{m,i} \binom{n+i}{2m},$$

або для чисел Нараяна

$$N_{n,m+1} = \sum_{i=0}^m N_{m,i+1} \binom{n+i}{2m},$$

$$q_{n,m} = \sum_{i=0}^m q_{m,i} \binom{n+i}{2m}.$$

Замінивши n на $m+k$ та i на $m-i$ в останній формулі, бачимо, що вона є іншим записом тотожності Лі Жень-чу. Використовуючи метод Єгоричева, доведемо що справедлива більш загальна формула.

Теорема 2 (див. [21]). Для довільних цілих невід'ємних m, k, s справедлива тотожність:

$$\sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \binom{m+k+s}{m+s} \binom{m+k+2s}{m+s}.$$

Доведення. Зауважимо, що $\binom{m}{i} = 0$ при $i > m$ та при $i > 0$, також

$$\binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = 0$$

при $i > k$, тому

$$\sum_{i>k} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = 0 = \sum_{i>m} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\min\{k,m\}} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{i+s} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s}. \end{aligned}$$

Використовуючи твердження 4, подамо біноміальні коефіцієнти через лішки:

$$\begin{aligned} S & = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} \binom{m+2s}{s+i} \binom{k-i+2m+2s}{2m+2s} = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}} \mathbf{res}_v \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m-i+s+1}} \mathbf{res}_w \frac{(1+w)^{k-i+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}} = \\ & = \mathbf{res}_{vw} \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+2m+2s}}{w^{2m+2s+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{1+w} \right)^i \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}}. \end{aligned}$$

Застосувавши правило заміни, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{v}{1+w} \right)^i \mathbf{res}_u \frac{(1+u)^m}{u^{i+1}} = \left(1 + \frac{v}{1+w} \right)^m = (1+v+w)^m (1+w)^{-m}.$$

Врахувавши також формулу бінома Ньютона та правило лінійності, маємо:

$$S = \mathbf{res}_{vw} (1+v+w)^m \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{res}_{vw} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (1+v)^i w^{m-i} \frac{(1+v)^{m+2s}}{v^{m+s+1}} \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{2m+2s+1}} = \\
&= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \mathbf{res}_w \frac{(1+w)^{k+m+2s}}{w^{i+2s+1}} \mathbf{res}_v \frac{(1+v)^{i+2s}}{v^{m+s+1}} = \\
&= \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{i-m} \binom{k+m+2s}{i+2s} \binom{i+2s}{s+i}.
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\binom{n}{m} \binom{m}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{m-p},$$

то

$$S = \binom{m+k+2s}{m+s} \sum_{i=m}^{2m} \binom{m}{2m-i} \binom{k+s}{i-m+s} = \binom{m+k+s}{m+s} \sum_{i=0}^m \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{s+1}.$$

Використавши згортку Вандермонда, отримаємо

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{m-i} \binom{k+s}{i+s} = \binom{m+k+s}{m+s}.$$

Що і доводить тотожність.

Зазначимо, що у випадку $s = 0$, отримаємо відому тотожність Лі Жень-чу: (або рекурсію для $q_{n,m}$)

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 \binom{k+2m-i}{2m} = \binom{m+k}{k}^2.$$

А при $s = 1$ і $n = k - m$ – рекурсію для $N_{m,n}$, отриману Ріорданом, про яку йшлося на початку цього розділу.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Основним результатом даного дослідження є нові доведення двох комбінаторних формул, поданих у теоремах 1 та 2. Для доведення використано метод Єгоричева, що дозволяє легко обчислювати багато видів комбінаторних сум.

Список використаної літератури

1. Rodica S. Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*. 1994. Vol 66, № 2. P. 270–301.
2. Kreveras G. Sur les partitions non cro isées d'un cycle. *Descrete Math.* 1972. Vol 1, № 4. P. 333–350.
3. Toufik M., Yidong S. Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Descrete Math.* 2009. Vol. 309, № 12. P. 4079–4088.
4. Stanley R. Invariants of finite groups and their applications to combinatorics *Bull. Amer. Math. Soc.* 1979. № 1. P. 475–511.
5. Bedratyuk L. The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv*. 2011. [Електронний ресурс]
URL: <https://arxiv.org/abs/1006.5372> (дата звернення: 15.02.2019).
6. Plash N. B. Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms *Carpathian Math. Publ.* 2017. Vol. 9, № 1. P. 57–62.

7. Ілш Н. В. Hilbert polynomials of the algebras of SL_2 -invariants. *Carpathian Math. Publ.* 2018. Vol. 10, № 2. P. 303–312.
8. Lassalle M. Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.* 2012. Vol. 49, № 3. P. 239–262.
9. Zeilberger D. Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.* 1989. Vol. 29, № 2–4. P. 201–215.
10. Alexeev N., Tikhomirov A. Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.* 2017. Vol. 30, № 3. P. 1170–1190.
11. Sulanke R. A. The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications. *J. Statist. Plann. Inference.* 2002. Vol. 101, № 1–2. P. 311–326.
12. Stanley R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
URL: <http://www-math.mit.edu/~rstan/> (дата звернення: 01.11.2021).
13. Mansour T. Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australas. J. Combin.* 2008. Vol. 42. P. 285–297.
14. Chen R. X. F., Reidys C. M. Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv.* 2015. [Електронний ресурс]
URL: <https://arxiv.org/abs/1411.2530v3> (дата звернення: 15.02.2019).
15. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. *Новосибирск: Наука*, 1977. 285 с.
16. Huang I-C. Applications of residues to combinatorial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1997. Vol. 125, № 4. P. 1011–1017.
17. Huang I-C. Pseudofunctors on modules with zero dimensional support. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995. xii+53 p.
18. Chen W. Y. C., Pang S. X. M. On the combinatorics of the Pfaff identity. *Discrete Math.* 2009. Vol. 309. P. 2190–2196.
19. Riordan J. Combinatorial Identities. *NY : Huntington*, 1979. 256 p.
20. Graham R. L., Riordan J. The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly.* 1966. Vol. 73, № 6. P. 604–608.
21. Székely L. Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula *J. Combin. Theory Ser. A.* 1985. Vol. 40. P. 171–174.

Ілш Н. В., Самарук Н. М. Egorychev method for proving combinatorial identities involving Narayana polynomials.

We give new proofs of two combinatorial identities. Partial cases of the identities contain Narayana number and Narayana polynomials. They are used, in particular, in classical invariant theory and discrete mathematics. One of these identities is a generalization of Stanley's problem.

There are a large number of methods for proving combinatorial identities. However, there is no universal method that would prove any combinatorial identity.

In the seventies of the last century, Georgy Yegorychev developed several new methods for calculating combinatorial sums. In this article we use one of Yegorychev methods – the method of coefficients.

Keywords: combinatorics, binomial coefficient, combinatorial identity, Egorychev method, Narayana polynomials.

References

1. Rodica, S.(1994). Combinatorial statistics on noncrossing partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 6(2), 270-301.
2. Kreveras, G. (1972). Sur les partitions non cro isées d'un cycle. *Descrete Math.*, 1(4), 333-350.
3. Toufik, M. & Yidong, S. (2009). Identities involving Narayana polynomials and Catalan numbers. *Descrete Math.*, 309(12), 4079-4088.
4. Stanley, R. (1979). Invariants of finite groups and their applications to combinatorics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1, 475-511.
5. Bedratyuk, L. (2011). The MAPLE package for calculating Poincaré series *arXiv.*
Retrieved at: <https://arxiv.org/abs/1006.5372>.

6. Ilaş, N. B. (2017). Poincaré series for the algebras of joint invariants and covariants of n quadratic forms. *Carpathian Math. Publ.*, 9(1), 57-62.
7. Ilaş, N. B. (2018). Hilbert polynomials of the algebras of SL_2 -invariants. *Carpathian Math. Publ.*, 10(2), 303-312.
8. Lassalle, M. (2012). Narayana polynomials and Hall-Littlewood symmetric functions. *Adv. in Appl. Math.*, 49(3-5), 239-262.
9. Zeilberger, D. (1989). Six etudes in generating functions. *Int. J. Comput. Math.*, 29, 201-215.
10. Alexeev, N. & Tikhomirov, A. (2017). Singular Values Distribution of Squares of Elliptic Random Matrices and type B Narayana Polynomials. *J. Theoret. Probab.*, 30(3), 1170-1190.
11. Sulanke, R. A. (2002). The Narayana distribution. Special issue on lattice path combinatorics and applications (Vienna, 1998). *J. Statist. Plann. Inference*, 101(1-2), 311-326.
12. Stanley, R. P. Bijective proof problems, version of 18 August 2009.
Retrieved at: <http://www-math.mit.edu/~rstan/>.
13. Mansour, T. (2008). Dyck Paths and partial Bell polynomials. *Australasian Journal Of Combinatorics*, 42, 285-297.
14. Chen R. X. F. & Reidys, C. M. (2015). Narayana polynomials and some generalizations. *arXiv*, Retrieved at: <https://arxiv.org/abs/1411.2530v3> (15.02.2019).
15. Egorychev, G. P. (1977). Integralhoe predstavlenie i vychislenie kombinatornykh summ. *Novosibirsk: Nauka* [in Russian].
16. Huang, I-C. (1997). Applications of residues to combinatorial identities. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 125(4), 1011-1017.
17. Huang, I-C. (1995). Pseudofunctors on modules with zero dimensional support. *Memoirs of the American Mathematical Society*, xii+53.
18. Chen, W.Y.C. & Pang, S.X.M. (2009). On the combinatorics of the Pfaff identity, *Discrete Mathematics*, 309(8), 2190-2196.
19. Riordan, J. (1979). *Combinatorial Identities*. NY : *Huntington*.
20. Graham, R. L. & Riordan, R. (1966). The Solution of a Certain Recurrence. *The American Mathematical Monthly*, 73(6), 604-608.
21. Székely, L. (1985). Common origin of cubic binomial identities; a generalization of Surányi's proof on Le Jen Shoo's formula. *Journal of combinatorial theory*, 40, 171-174.

Одержано 31.10.2021

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).38-46](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).38-46)**А. Б. Ільєнко¹, В. В. Стаматієва²**¹ Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,

доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

ilienko@matan.kpi.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4828-0788>² Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,

аспірант

stamatieva56@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2721-8985>

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ТОЧКОВИХ ПРОЦЕСІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ ЗАДАЧЕЮ ПРО ДНІ НАРОДЖЕННЯ

У роботі доведено граничну теорему для послідовності точкових процесів, які описують моменти $(r + 1)$ -х надходжень різних типів з загальної кількості в n типів в узагальненій задачі про дні народження. Класична задача про дні народження, відома з популярної літератури, відповідає параметрам $r = 1$ (достатньо одного збігу) та $n = 365$ (кількість днів у невисокосному році). Доведення базується на застосуванні техніки пуассонізації/депуассонізації. Цей результат далі використовується для простого доведення деяких класичних граничних теорем у задачі про дні народження, які фактично описують асимптотичну поведінку різних змістовних функціоналів від побудованих процесів.

Ключові слова: задача про дні народження, точковий процес, гранична теорема, груба збіжність, процес Пуассона, пуассонізація, депуассонізація, теорема про неперервне відображення.

1. Вступ. Задача про дні народження, яка є однією з класичних та найпопулярніших задач комбінаторної теорії ймовірностей, була вперше розглянута Р. фон Мізесом у 1939 р. Наведемо одне з її численних формулювань у вигляді, зручному для подальших узагальнень.

Розглянемо достатньо велику множину людей, які в послідовні цілі моменти часу один за одним заходять до кімнати. Позначимо через $T_1^{(365)}$ випадковий момент часу, коли до кімнати вперше зайшла людина, день народження якої збігається з днем народження когось з уже присутніх. Тут верхній індекс показує загальну кількість різних можливих днів народження (всі роки вважаються невисокосними), а нижній означає, що достатньо збігу з днем народження лише *одного* з присутніх.

У природний спосіб узагальнюючи це формулювання, розглянемо таку задачу. Нехай у послідовні цілі моменти часу до спостерігача один за одним надходять об'єкти, кожен з яких з імовірністю $\frac{1}{n}$ незалежно від інших належить до одного з n типів. Будемо позначати через $T_r^{(n)}$ перший момент часу, коли деякий з типів з'явився в $(r + 1)$ -й раз. Зокрема, $T_0^{(n)} = 1$, а $T_1^{(365)}$ відповідає інтерпретації, наведеній у попередньому абзаці.

У цій роботі ми пропонуємо дещо нетрадиційний підхід, що дозволяє легко отримувати граничні теореми для випадкових величин $T_r^{(n)}$ та їх узагальнень. Він базується на основному результаті роботи — граничній теоремі для послідовності точкових процесів $(\xi_r^{(n)}, n \geq 1)$, що описують моменти $(r+1)$ -х надходжень усіх n типів. Під збіжністю точкових процесів ми традиційно розуміємо їх збіжність за розподілом у грубій топології, заданій на просторі локально скінченних точкових мір. Відомо (див., наприклад, теорему 4.20 у монографії [1]), що ця збіжність еквівалентна збіжності відповідних лічильних процесів у J_1 -топології Скорохода.

У нещодавніх роботах [2] та [3] розглядалося питання про збіжність точкових процесів у іншій класичній задачі — задачі збирача купонів. В цій статті ми будемо застосовувати ідеї пуассонізації та депуассонізації схожі до тих, що були використані в [3].

2. Огляд деяких попередніх результатів. Явним формулам для числових характеристик випадкових величин $T_r^{(n)}$ та їх подальших узагальнень, а також граничним теоремам для таких величин присвячено безліч робіт. Наприклад, з майже очевидного зображення

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_1^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\{T_1^{(n)} \geq k\} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n dt \end{aligned} \quad (1)$$

та результатів роботи [4] про асимптотичну поведінку Q -функції Рамануджана (яка якраз і задається другою сумою в (1)) впливають різноманітні досить точні оцінки величини $\mathbb{E}T_1^{(n)}$. Ми наведемо тут для повноти викладення лише початок класичного асимптотичного розкладу Рамануджана-Ватсона-Кнута, який в наших позначеннях може бути записаний у вигляді

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} + \dots$$

Відповідні посилання можна знайти в бібліографії до процитованої роботи [4]. Зауважимо також, що при $n = 365$, тобто для класичної задачі про дні народження, $\mathbb{E}T_1^{(365)} \approx 24.62$. Це трохи відрізняється від медіанного значення 23, відомого з популярної літератури.

Аналог формули (1) для довільного $r \geq 1$ був отриманий в роботі [5]:

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^\infty e^{-t} \left[S_r\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n dt,$$

де позначено $S_r(t) = \sum_{j=0}^r \frac{x^j}{j!}$. На його основі в цій роботі також було одержано асимптотичну формулу

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} \sim {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) n^{\frac{r}{r+1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

З результатів статті [6] (див. також [7]), зокрема, впливає гранична теорема для $T_r^{(n)}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{n^{-\frac{r}{r+1}} T_r^{(n)} \leq x\} = 1 - e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Отже, граничним є розподіл Вейбула зі щільністю $\frac{x^r}{r!} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot \mathbf{1}\{x \geq 0\}$. Багато інших граничних теорем для споріднених випадкових величин та процесів можна знайти у класичній монографії [8], а також у численних журнальних публікаціях. Відзначимо, зокрема, роботи [7] та [9]. В першій з них запропоновано потужний метод вкладення в процес Пуассона, який ми будемо використовувати в цій роботі, а у другій за допомогою цього ж методу, зокрема, розглянуто схожу задачу з випадковими ймовірностями належності об'єктів до різних типів. Зауважимо також, що в порівняно нещодавній статті [10] розглядалися граничні теореми для моментів досягнення сумарної кількості в r збігів серед усіх об'єктів, що надійшли до цього часу.

Як було відзначено у вступі, основним результатом цієї роботи є гранична теорема для послідовності точкових процесів $(\xi_r^{(n)}, n \geq 1)$, що описують моменти $(r+1)$ -х надходжень різних типів. З цього факту за допомогою теореми про неперервне відображення можна легко отримувати граничні результати для різноманітних функціоналів від процесів $\xi_r^{(n)}$, наприклад, такі, як формула (2) та її узагальнення.

3. Основний результат. Для фіксованих $r, n \geq 1$ розглянемо точковий процес $\xi_r^{(n)}$, атоми якого визначаються (у спеціальний спосіб нормованими) моментами $(r+1)$ -х надходжень усіх n типів.

Нехай дискретна випадкова величина $Y_{i,r}^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$, задає момент надходження $(r+1)$ -го об'єкта типу i . Її розподіл, очевидно, визначається формулою

$$\mathbb{P}\{Y_{i,r}^{(n)} = k\} = C_{k-1}^r \left(\frac{1}{n}\right)^{r+1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-r-1}, \quad k \geq r+1, \quad (3)$$

і є одним з варіантів від'ємного біноміального розподілу. В цих термінах введена у вступі величина $T_r^{(n)}$ допускає зображення

$$T_r^{(n)} = \min\{Y_{1,r}^{(n)}, \dots, Y_{n,r}^{(n)}\}.$$

Оскільки зі зростанням n значення $T_r^{(n)}$ також збільшуватимуться, то точковий процес, побудований за $Y_{i,r}^{(n)}$, не матиме жодної границі при $n \rightarrow \infty$. Тому для забезпечення збіжності до деякого граничного процесу випадкові величини $Y_{i,r}^{(n)}$ треба в деякий спосіб нормувати. Отже, розглянемо точковий процес $\xi_r^{(n)}$ вигляду

$$\xi_r^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)}}, \quad (4)$$

де δ_a означає одиничну точкову міру, зосереджену в a . Основним результатом цієї роботи є теорема про збіжність процесів $\xi_r^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ до деякого неординарного точкового процесу Пуассона.

Перед формулюванням цього результату коротко нагадаємо означення збіжності точкових процесів за розподілом у грубій топології (детальне викладення можна знайти, наприклад, у главі 4 в [1] або у розділах 3.4, 3.5 в [11]). Позначимо через $M_p(\mathbb{R})$ простір усіх локально скінченних точкових мір на \mathbb{R} . Для $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in M_p(\mathbb{R})$ кажуть, що μ_n збігаються до μ у грубій (vague) топології, якщо $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu$ для будь-якої фінітної неперервної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$. Факт такої збіжності позначають $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$. Простір $M_p(\mathbb{R})$ з

топологією цієї збіжності допускає повну сепарабельну метризацію, що у стандартний спосіб дозволяє розглядати збіжність точкових процесів (тобто випадкових точкових мір) $\xi, \xi_1, \xi_2 \dots$ за розподілом у грубій топології. Її ми будемо позначати $\xi_n \xrightarrow{vd} \xi$.

Тепер ми можемо сформулювати основний результат роботи. Ми виключимо з розгляду випадок $r = 1$, оскільки в цій ситуації наш метод доведення не спрацьовує. Питання про справедливість теореми в цьому випадку залишається наразі відкритим.

Теорема 1. *Нехай $r \geq 2$ та ξ_r є неоднорідним точковим процесом Пуассона на \mathbb{R} з мірою інтенсивності*

$$\lambda_r(dx) = \frac{x^r}{r!} \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx. \quad (5)$$

Тоді $\xi_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$ при $n \rightarrow \infty$.

Зауважимо, що граничний процес ξ_r може бути явно побудований у досить простий спосіб. Розглянемо послідовність $(E_j, j \geq 1)$ незалежних однаково розподілених випадкових величин $E_j \sim \text{Exp}(1)$. Покажемо, що атоми міри ξ_r знаходяться в точках $\sqrt[r+1]{(r+1)! \sum_{j=1}^k E_j}$, $k \geq 1$.

Дійсно, внаслідок теореми про інтервали для однорідного процесу Пуассона (див., наприклад, теорему 7.2 в [12]) атоми випадкової пуассонівської міри одиничної інтенсивності розташовані в точках $S_k = \sum_{j=1}^k E_j$. Те, що дія на неї функцією $h(x) = \sqrt[r+1]{(r+1)!x}$, $x \geq 0$, приводить до міри ξ_r з теореми 1, пояснюється теоремою про перетворення для процесів Пуассона (теорема 5.1 в [12]), адже для $[a, b] \subset [0, \infty)$ виконується рівність

$$h(\text{Leb})[a, b] = (\text{Leb} \circ h^{-1})[a, b] = \text{Leb} \left[\frac{a^{r+1}}{(r+1)!}, \frac{b^{r+1}}{(r+1)!} \right] = \int_a^b \frac{x^r}{r!} dx = \lambda_r[a, b].$$

Тут Leb позначає міру Лебега і є мірою інтенсивності однорідного процесу Пуассона з параметром 1.

4. Доведення. У роботі [7] Л. Хольст запропонував ідею пуассонізації, яка дозволяє істотно спростити доведення граничних теорем у задачах розміщення частинок по комірках і, зокрема, в задачі про дні народження. Розглянемо її застосування в нашому випадку.

Випадкові величини $Y_{i,r}^{(n)}$, $1 \leq i \leq n$, введені на початку попереднього розділу, є однаково розподіленими, але залежними. Факт цієї залежності пояснюється хоча б тим, що $Y_{i,r}^{(n)} \neq Y_{j,r}^{(n)}$ при $i \neq j$ — в один момент часу надходить лише один об'єкт. Для того, щоб позбавитися цієї залежності, розглянемо пуассонізовану постановку і вважатимемо, що об'єкти надходять не в послідовні цілі моменти часу, а в моменти $X_k^{(n)}$, $k \geq 1$, однорідного точкового процесу Пуассона з параметром 1. Отже, інтервали між такими надходженнями утворюватимуть послідовність незалежних $\text{Exp}(1)$ -розподілених випадкових величин $(E_j, j \geq 1)$. Для розрізнення типів різних об'єктів будемо вважати цей процес маркованим — кожному атому $X_k^{(n)}$ незалежно від інших і від самої послідовності $(X_k^{(n)}, k \geq 1)$ присвоїмо випадкову мітку $M_k^{(n)}$, рівномірно розподілену на множині типів $\{1, \dots, n\}$. Тоді внаслідок теореми про прорідження для процесів Пуассона (див., наприклад, теорему 5.8 у [12]) послідовності

$X^{(n)}(i) = (X_k^{(n)}(i), k \geq 1)$, $1 \leq i \leq n$, моментів надходження об'єктів різних типів утворюватимуть *незалежні* однорідні точкові процеси Пуассона з параметром $\frac{1}{n}$.

Випадкова величина $X_{r+1}^{(n)}(i)$ описує момент $(r+1)$ -го надходження i -го типу в пуассонізованій постановці, а отже, є пуассонізованим аналогом величини $Y_{i,r}^{(n)}$. При різних $i \in \{1, \dots, n\}$ ці величини є незалежними й однаково розподіленими — внаслідок вже цитованої теореми про інтервали вони розподілені за законом $\Gamma(r+1, \frac{1}{n})$. Більш того, за побудовою величини $X_{r+1}^{(n)}(i)$ та $Y_{i,r}^{(n)}$ допускають простий каплінг:

$$X_{r+1}^{(n)}(i) = \sum_{j=1}^{Y_{i,r}^{(n)}} E_j, \quad (6)$$

причому $(Y_{i,r}^{(n)}, 1 \leq i \leq n)$ та $(E_j, j \geq 1)$ є незалежними. Останнє твердження випливає з того, що перша послідовність визначається значеннями міток $M_k^{(n)}$, а друга задає інтервали між моментами надходжень $X_k^{(n)}$.

Аналогічно (4) введемо пуассонізований точковий процес

$$\eta_r^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta_{n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i)}.$$

На першому кроці доведення ми покажемо, що при $n \rightarrow \infty$ виконується збіжність $\eta_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$. Для цього спочатку запишемо щільність розподілу $\Gamma(r+1, \frac{1}{n})$ -розподіленої величини $X_{r+1}^{(n)}(i)$:

$$f_r^{(n)}(x) = \frac{1}{r! n^{r+1}} x^r e^{-\frac{x}{n}}, \quad x \geq 0.$$

Тоді щільність розподілу кожного атома $n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i)$ випадкової міри $\eta_r^{(n)}$ має вигляд

$$\tilde{f}_r^{(n)}(x) = n^{\frac{r}{r+1}} f_r^{(n)}(n^{\frac{r}{r+1}} x) = \frac{1}{r! n} x^r e^{-x n^{-\frac{1}{r+1}}}, \quad x \geq 0.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{f}_r^{(n)}(x) = \frac{x^r}{r!} \mathbb{1}\{x \geq 0\}.$$

Тому з теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає, що для будь-якої обмеженої борелівської множини $B \subset \mathbb{R}$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_B \tilde{f}_r^{(n)}(x) dx = \int_B \frac{x^r}{r!} \mathbb{1}\{x \geq 0\} dx.$$

В термінах грубої збіжності це внаслідок твердження 3.12 з [11] еквівалентно тому, що

$$n \mathbb{P}\{n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i) \in \cdot\} \xrightarrow{v} \lambda_r(\cdot)$$

при $n \rightarrow \infty$. Тому факт збіжності $\eta_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$ випливає з незалежності $X_{r+1}^{(n)}(i)$ при різних $1 \leq i \leq n$ та відомого твердження про збіжність біноміальних точкових процесів до пуассонівського (див., наприклад, першу частину доведення твердження 3.21 у [11]).

Метою наступного кроку доведення буде депуассонізація, тобто перетворення $\eta_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$ у $\xi_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$. Для цього ми оцінимо ступінь близькості дограничних процесів $\eta_r^{(n)}$ та $\xi_r^{(n)}$.

Для довільних $\varepsilon > 0$ та $i \in \{1, \dots, n\}$ з рівності (6) випливає, що

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \left| n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i) - n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} = \\ & = \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{Y_{i,r}^{(n)}} (E_j - 1) \right| > n^{\frac{r}{r+1}} \varepsilon \right\} = \mathbb{E} \mathbb{P}_{Y_{i,r}^{(n)}} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{Y_{i,r}^{(n)}} (E_j - 1) \right| > n^{\frac{r}{r+1}} \varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

де через $\mathbb{P}_{Y_{i,r}^{(n)}}$ позначено умовну ймовірність відносно випадкової величини $Y_{i,r}^{(n)}$.

Зважаючи на незалежність $Y_{i,r}^{(n)}$ та $(E_j, j \geq 1)$, цю ймовірність можна легко оцінити за допомогою нерівностей Чебишова та Розенталя (останню див., наприклад, на с. 152 в [13]):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{Y_{i,r}^{(n)}} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{Y_{i,r}^{(n)}} (E_j - 1) \right| > n^{\frac{r}{r+1}} \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq n^{-\frac{8r}{r+1}} \varepsilon^{-8} \mathbb{E}_{Y_{i,r}^{(n)}} \left(\sum_{j=1}^{Y_{i,r}^{(n)}} (E_j - 1) \right)^8 \leq C n^{-\frac{8r}{r+1}} \varepsilon^{-8} \left(Y_{i,r}^{(n)} \right)^4. \end{aligned}$$

Тут $\mathbb{E}_{Y_{i,r}^{(n)}}$ позначає умовне математичне сподівання, C — деяку фіксовану константу, а саму нерівність треба розуміти в сенсі майже напевно.

Простими, хоча й дещо громіздкими обчисленнями на основі (3) легко переконатися, що при $n \rightarrow \infty$ виконується асимптотична рівність $\mathbb{E} \left(Y_{i,r}^{(n)} \right)^4 \sim C_r n^4$ з деякою фіксованою константою C_r . Тому, повертаючися до нерівності (7), отримуємо

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \left| n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i) - n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq C n^{-\frac{8r}{r+1}} \varepsilon^{-8} \mathbb{E} \left(Y_{i,r}^{(n)} \right)^4 = C C_r n^{4-\frac{8r}{r+1}} \varepsilon^{-8} = C' n^{\frac{4-4r}{r+1}} \varepsilon^{-8}. \end{aligned}$$

Тепер легко оцінити ймовірність того, що принаймні один атом випадкової міри $\eta_r^{(n)}$ відхилиться від відповідного атома міри $\xi_r^{(n)}$ більше, ніж на ε : за напівадитивністю

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \left| n^{-\frac{r}{r+1}} X_{r+1}^{(n)}(i) - n^{-\frac{r}{r+1}} Y_{i,r}^{(n)} \right| > \varepsilon \text{ для деякого } 1 \leq i \leq n \right\} \leq \\ & \leq n \cdot C' n^{\frac{4-4r}{r+1}} \varepsilon^{-8} = C' n^{\frac{5-3r}{r+1}} \varepsilon^{-8}. \end{aligned} \quad (8)$$

Зафіксуємо довільний відрізок $[a, b] \subset [0, \infty]$. Тоді з нерівності (8) випливає оцінка

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left\{ \xi_r^{(n)}[a, b] \neq \eta_r^{(n)}[a, b] \right\} \leq C' n^{\frac{5-3r}{r+1}} \varepsilon^{-8} + \\ & + \mathbb{P} \left\{ \eta_r^{(n)}[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \geq 1 \right\} + \mathbb{P} \left\{ \eta_r^{(n)}[b - \varepsilon, b + \varepsilon] \geq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сенс цієї нерівності є досить прозорим: рівність $\xi_r^{(n)}[a, b] = \eta_r^{(n)}[a, b]$ може не виконуватися внаслідок лише двох причин — або деякі атоми $\xi_r^{(n)}$ значно відхиляються від відповідних атомів $\eta_r^{(n)}$, або деякі атоми $\eta_r^{(n)}$ розташовані досить близько до кінців відрізка $[a, b]$. Тому, покладаючи в (9) $\varepsilon = n^{-\frac{1}{25}}$ і позначаючи $\alpha_r = \frac{5-3r}{r+1} + \frac{8}{25}$, дістаємо

$$\mathbb{P}\{\xi_r^{(n)}[a, b] \neq \eta_r^{(n)}[a, b]\} \leq C'n^{\alpha_r} + \mathbb{P}\{\eta_r^{(n)}[a - n^{-\frac{1}{25}}, a + n^{-\frac{1}{25}}] \geq 1\} + \mathbb{P}\{\eta_r^{(n)}[b - n^{-\frac{1}{25}}, b + n^{-\frac{1}{25}}] \geq 1\}.$$

Оскільки, як неважко пересвідчитися, $\alpha_r < 0$ при $r \geq 2$, перший доданок у правій частині прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Решта два доданки поводять себе так само — цей інтуїтивно очевидний факт є наслідком леми 3.5 з [3]. Отже, $\mathbb{P}\{\xi_r^{(n)}[a, b] \neq \eta_r^{(n)}[a, b]\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Більш того, з напівадитивності ймовірності випливає, що відрізок $[a, b]$ тут можна замінити на скінченне об'єднання таких відрізків $U = \cup_{i=1}^l [a_i, b_i]$. Тому за нерівністю каплінга для будь-якого $k \geq 0$ виконується

$$|\mathbb{P}\{\xi_r^{(n)}(U) = k\} - \mathbb{P}\{\eta_r^{(n)}(U) = k\}| \leq \mathbb{P}\{\xi_r^{(n)}(U) \neq \eta_r^{(n)}(U)\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Разом зі збіжністю

$$\mathbb{P}\{\eta_r^{(n)}(U) = k\} \rightarrow \mathbb{P}\{\xi_r(U) = k\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

яка випливає з доведеного вище факту про $\eta_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$, це дає

$$\mathbb{P}\{\xi_r^{(n)}(U) = k\} \rightarrow \mathbb{P}\{\xi_r(U) = k\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, за теоремою 4.15 з [1] $\xi_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$, що й треба було довести.

5. Приклад застосування. У розділі 4 роботи [3] наведені деякі застосування граничної теореми для точкових процесів, пов'язаних з задачею збирача купонів. Не повторюючи тут аналогічні міркування для нашої задачі, ми обмежимося лише найпростішим прикладом застосування теореми 1 і покажемо, як з неї можна отримати граничну формулу (2). Перш за все зробимо одне зауваження, необхідне для доведення.

Зауваження 1. *Результат теореми 1 залишається справедливим, якщо розглядати випадкові міри $\xi_r^{(n)}$ та ξ_r на компактифікованому просторі $[0, \infty]$. Таку компактифікацію можна забезпечити, наприклад, уведенням повної метрики $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$, $x, y \in [0, \infty]$. Доведення повністю аналогічне доведенню теореми 1.*

Перейдемо до доведення формули (2). Оскільки $\xi_r^{(n)} \xrightarrow{vd} \xi_r$, то перший атом міри $\xi_r^{(n)}$ збігається за розподілом до першого атома міри ξ_r . Цей факт впливає з теореми про неперервне відображення та того, що функціонал “перший атом точкової міри на компакт $[0, \infty]$ ” (див. зауваження 1) внаслідок твердження 3.13 з [11] є неперервним у грубій топології. Перший атом міри $\xi_r^{(n)}$ можна записати як $n^{-\frac{r}{r+1}} \min_{1 \leq i \leq n} Y_{i,r}^{(n)} = n^{-\frac{r}{r+1}} T_r^{(n)}$. Розподіл першого атома A_r граничної пуассонівської міри ξ_r можна легко знайти: для $x \geq 0$ з формули (5) маємо

$$\mathbb{P}\{A_r \leq x\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_r[0, x] = 0\} = 1 - e^{-\lambda_r[0, x]} = 1 - e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}.$$

Звідси безпосередньо впливає граничний результат (2) для $r \geq 2$.

Формулу (2) можна істотно узагальнювати на зразок того, як це було зроблено в теоремі 4.1 у [3]. З міркувань, наведених після формулювання теореми 1, впливає нескінченновимірний аналог формули (2). Ми залишимо його без детального доведення, оскільки воно проводиться повністю аналогічно доведенню згаданої теореми 4.1.

Теорема 2. Для фіксованого $r \geq 2$ нехай $T_{r,k}^{(n)}$, $1 \leq k \leq n$, означає перший момент часу, коли деякі k з n типів надійшли принаймні по $r+1$ разів кожний, і покладемо $T_{r,k}^{(n)} = 0$ при $k > n$. Розглянемо такі випадкові елементи простору числових послідовностей \mathbb{R}^∞ :

$$V_r^{(n)} = (n^{-\frac{r}{r+1}} T_{r,k}^{(n)}, k \geq 1), \quad V_r = \left(\left((r+1)! \sum_{j=1}^k E_j \right)^{\frac{1}{r+1}}, k \geq 1 \right).$$

Тут, як і раніше, E_j , $j \geq 1$, є незалежними $\text{Exp}(1)$ -розподіленими випадковими величинами.

Тоді $V_r^{(n)} \xrightarrow{d} V_r$ при $n \rightarrow \infty$ у просторі \mathbb{R}^∞ .

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі показано, що при $r \geq 2$ послідовність точкових процесів $(\xi_r^{(n)}, n \geq 1)$, які описують моменти $(r+1)$ -х надходжень усіх n типів в узагальненій задачі про дні народження, збігається за розподілом у грубій топології до деякого неоднорідного точкового процесу Пуассона. Цей результат дає змогу досить просто отримувати граничні теореми для різноманітних змістовних функціоналів від таких процесів.

Надалі було б цікаво розповсюдити основний результат роботи на випадок $r = 1$, в якому техніка пуассонізації/депуассонізації не спрацьовує. Іншим можливим напрямком досліджень є вивчення збіжності точкового процесу, який об'єднує розглянуті процеси при різних r .

Список використаної літератури

1. Kallenberg O. Random measures, theory and applications. Springer, 2017. 707 p.
2. Glavaš L., Mladenović P. New limit results related to the coupon collector's problem. *Stud. Sci. Math. Hung.* 2018. Vol. 55, No. 1. P. 115–140.
3. Plienko A. Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems. *Electron. Commun. Probab.* 2019. Vol. 24, No. 51. P. 1–9.
4. Flajolet Ph., Grabner P.J., Kirschenhofer P., Prodinger H. On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.* 1995. Vol. 58. P. 103–116.
5. Klamkin M.S., Newman D.J. Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory.* 1967. Vol. 3. P. 279–282.
6. Dwass M. More birthday surprises. *J. Comb. Theory.* 1969. Vol. 7. P. 258–261.
7. Holst L. On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.* 1986. Vol. 54, No. 1. P. 15–27.
8. Колчин В.Ф., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Случайные размещения. Москва: Наука, 1976. 224 с.
9. Holst L. Extreme value distributions for random coupon collector and birthday problems. *Extremes.* 2001. Vol. 4, No. 2. P. 129–145.
10. Arratia R., Garibaldi S., Kilian J. Asymptotic distribution for the birthday problem with multiple coincidences, via an embedding of the collision process. *Random Struct. Algorithms.* 2016. Vol. 48, No. 3. P. 480–502.
11. Resnick S.I. Extreme values, regular variation, and point processes. Springer, 1987. 332 p.
12. Last G., Penrose M. Lectures on the Poisson process. Cambridge University Press, 2017. 307 p.

13. Gut A. Probability: a graduate course. Second edition. Springer, 2013. 625 p.

Ilienکو A. B., Stamatieva V. V. A limit theorem for point processes associated with the generalized birthday problem.

We prove a limit theorem for the sequence of point processes, which describe the moments of $(r + 1)$ -th arrivals of different types out of the total number of n types in the generalized birthday problem. The classic birthday problem, known from popular literature, corresponds to the parameters $r = 1$ (one match is enough) and $n = 365$ (the number of days in a common year). The proof is based on an application of the poissonization/depoissonization technique. This result is further used to simply prove some classic limit theorems in the birthday problem, which actually describe the asymptotic behavior of various meaningful functionals of the constructed processes.

Keywords: birthday problem, point process, limit theorem, vague convergence, Poisson process, poissonization, depoissonization, continuous mapping theorem.

References

1. Kallenberg, O. (2017). Random measures, theory and applications. *Springer*.
2. Glavaš, L., & Mladenović, P. (2018). New limit results related to the coupon collector's problem. *Stud. Sci. Math. Hung.*, 55(1), 115–140.
3. Ilienکو, A. (2019). Convergence of point processes associated with coupon collector's and Dixie cup problems. *Electron. Commun. Probab.*, 24(51), 1–9.
4. Flajolet, Ph., Grabner, P. J., Kirschenhofer, P., & Prodinger, H. (1995). On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.*, 58, 103–116.
5. Klamkin, M. S., & Newman, D. J. (1967). Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory*, 3, 279–282.
6. Dwass, M. (1969). More birthday surprises. *J. Comb. Theory*, 7, 258–261.
7. Holst, L. (1986). On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.*, 54(1), 15–27.
8. Kolchin, V. F., Sevastianov, B. A., & Chistyakov, V. P. (1976). Sluchaynyye razmeshcheniya [Random allocations]. *Moscow: Nauka* [in Russian].
9. Holst, L. (2001). Extreme value distributions for random coupon collector and birthday problems. *Extremes*, 4(2), 129–145.
10. Arratia, R., Garibaldi, S., & Kilian, J. (2016). Asymptotic distribution for the birthday problem with multiple coincidences, via an embedding of the collision process. *Random Struct. Algorithms*, 48(3), 480–502.
11. Resnick, S. I. (1987). Extreme values, regular variation, and point processes. *Springer*.
12. Last, G., & Penrose, M. (2017). Lectures on the Poisson process. *Cambridge University Press*.
13. Gut, A. (2013). Probability: a graduate course. Second edition. *Springer*.

Одержано 15.10.2021

УДК 517.988.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).47-59](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).47-59)**Л. М. Мамай**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,

доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,

кандидат фізико-математичних наук

lesya.mamay@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7545-8820>

ПРО ПОБУДОВУ НАБЛИЖЕНИХ ІЗОЛЬОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Розглядається нелінійне інтегральне рівняння (НІР) зі степеневою нелінійністю і ставиться задача побудови ізольованих обмежених за нормою розв'язків, на яких похідна Фреше оператора, визначеного лівою частиною рівняння обмежена зверху і знизу. Для наближеного розв'язування НІР застосовано елементи загальної теорії наближених методів. Для конструювання послідовності наближених рівнянь використано метод механічних квадратур. Сформульовані і доведені пряма та обернена теореми, які відповідно характеризують збіжність апроксимаційного методу переходу до наближених рівнянь і апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Ключові слова: нелінійне інтегральне рівняння, ізольований розв'язок, квадратурний процес, оцінка похибки.

1. Вступ. В роботі [1] наведено теоретичне обґрунтування та практичну реалізацію знаходження всіх ізольованих наближених розв'язків НІР типу Урисуна

$$u(x) - \int_0^1 \bar{K}(x, y, u(y)) dy - f(x) = 0$$

в області $\bar{\Omega} = \{(x, y, u) : 0 \leq x, y \leq 1, \|u\| \leq d < \infty\}$, де $u(x)$ — шукана функція, $K(x, y, u)$ та $f(x)$ — неперервні функції усіх своїх аргументів в $\bar{\Omega}$. В даній роботі проведені аналогічні міркування щодо НІР зі степеневою нелінійністю. Отримані відповідні оцінки, які фігурують у, так званих, прямій та оберненій теоремах, які дають теоретичне обґрунтування та практичний апарат для вирішення питання щодо відокремлення розв'язків таких рівнянь.

2. Постановка задачі і допоміжні твердження та означення.

Розглянемо рівняння НІР вигляду

$$u(x) - \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot u^m(y) dy - f(x) = 0, m \geq 2, \quad (1)$$

де $u(x)$ — шукана функція, $K(x, y)$, $f(x)$ — неперервні функції усіх своїх аргументів в замкненій області $\bar{\Omega} = \{(x, y, u) : 0 \leq x, y \leq 1, \|u\| \leq d < \infty\} \subset C[0, 1]$.

Ставиться задача знаходження всіх неперервних ізольованих в області $\bar{\Omega}$ наближених розв'язків рівняння (1), шляхом побудови і наступного розв'язання апроксимаційних рівнянь. В роботі [2] для побудови наближених рівнянь використовувався метод вироджених ядер. В даній роботі використаємо метод механічних квадратур

$$\int_0^1 z(y) dy = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} z(y_{jn}) + r_n(z), \quad (2)$$

де точки y_{jn} називаються вузлами квадратурної формули, причому $0 \leq y_{1n} < y_{2n} < \dots < y_{nn} \leq 1$, а коефіцієнти $\alpha_{jn} \in R$, $\alpha_{jn} > 0$, $\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + \dots + \alpha_{nn} \leq \bar{a} = \text{const}$.

Означення 1. Квадратурний процес (2) називається збіжним, якщо залишковий член $r_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якої функції, неперервної на $[0, 1]$.

Замінюючи інтеграл (1) його наближеним значенням, згідно (2), отримаємо

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) u^m(y_{jn}) + f(x), \quad m \geq 2. \quad (3)$$

Аналітичні розв'язки, наближеного рівняння (3) визначаються рівністю

$$u_n^*(x) = \Phi_n \bar{\xi}_n^* := \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) \cdot (\bar{\xi}_{jn}^*)^m + f(x), \quad (4)$$

де $\bar{\xi}_n^* = (\bar{\xi}_{1n}, \bar{\xi}_{2n}, \dots, \bar{\xi}_{nn})$ — розв'язок системи рівнянь

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (\xi_{jn})^m + f(x_{in}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

яка апроксимує рівняння (1), а $\Phi_n \bar{\xi}_n$ має вигляд

$$\Phi_n \bar{\xi}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) \cdot (\xi_{jn})^m + f(x).$$

Отже, замість розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1) знайдемо його розв'язки у вузлах інтерполяції y_{jn} , $j = \overline{1, n}$, як точні або наближені значення $\bar{\xi}_{jn}^* = u^*(y_{jn})$, які визначаються із системи (5). Вектори $\bar{\xi}_n^* = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn})$ розглядаються як елементи простору m_n або R_n .

Щоб встановити міру близькості відповідних розв'язків рівняння (1) та системи (5) вводиться лінійне відображення p_n таке, що $\forall u(x) \in C[0, 1]$

$$p_n u = \{u(y_{1n}), u(y_{2n}), \dots, u(y_{nn})\} \in m_n, \quad (6)$$

а міра близькості розв'язків $u^*(x)$ та $\bar{\xi}_n^*$ визначається величиною $\|p_n u^* - \bar{\xi}_n^*\|$ [1].

Означення 2. Кажуть, що метод механічних квадратур збігається, якщо для достатньо великих n існують розв'язки $\bar{\xi}_n^*$ систем (5) і для кожної послідовності таких розв'язків $\{\bar{\xi}_n^*\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{\xi}_n^*, p_n F) = 0, \quad (7)$$

де F — множина розв'язків рівняння (1).

Подамо рівняння (1) в операторному вигляді

$$Tu := u - \bar{T}u = 0, \quad (8)$$

де T — двічі диференційовний за Фреше нелінійний оператор, що діє з області свого визначення Q гільбертового простору H у цей же простір. Нехай $u^*(x)$ — один із розв'язків рівняння (8).

Метод мінімальних похибок [3] полягає у побудові ітераційної послідовності згідно формули

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\|Tu^k\|^2}{\|G_k^*Tu^k\|^2}G_k^*Tu^k, \quad (9)$$

де $G_k = T'(u_k)$ — лінійний обмежений оператор, G_k^* — спряжений йому. Наведемо теорему існування і єдиності розв'язку рівняння (8) та збіжності методу (9) в якій, на відміну від [3], константи, що обмежують похідні оператора T в кулі $\bar{S}(u^0, r) = \{u \in Q : \|u - u^0\| \leq r\}$ залежать від u^0 та r .

Теорема 1. *Нехай у кулі $\bar{S}(u^0, r)$ з заданими u^0 та r — виконуються умови*

$$\|T(u^0)\| \leq \eta, \|T'(u)\| \leq M(u^0, r), \|T''(u)\| \leq N(u^0, r), \quad (10)$$

$$\|T'(u)h\| \geq \tilde{m}(u^0, r) \|h\|, \tilde{m} > 0, \forall h \in H, \quad (11)$$

де $\eta, M(u^0, r), N(u^0, r), \tilde{m}(u^0, r)$ — константи, що забезпечують виконання умов

$$\gamma(r) = \frac{\eta \cdot N(u^0, r)}{\tilde{m}^2(u^0, r)} < 1, \quad (12)$$

$$\frac{2\eta}{\tilde{m}(u^0, r)} \leq r. \quad (13)$$

Тоді рівняння (8) має в кулі $\bar{S}(u^0, r)$ єдиний розв'язок u^* , до якого, починаючи з u^0 , монотонно і сильно збігається послідовність $\{u_k\}$, побудована згідно (9) причому оцінка похибки характеризується нерівністю

$$\|u^* - u^k\| \leq \frac{2\eta}{\tilde{m}(u^0, r)} \left[1 - \frac{\tilde{m}^2(u^0, r)}{M^2(u^0, r)} (1 - \gamma(r)) \right]^{\frac{k}{2}}. \quad (14)$$

3. Існування розв'язку системи апроксимаційних рівнянь.

Будемо вважати, що оператор $T : \{u \in C[\Omega] : \|u\| \leq d\} \rightarrow C[0, 1]$, а систему (5) подамо як операторне рівняння

$$T_n \bar{\xi}_n := \bar{\xi}_n - \bar{T}_n \bar{\xi}_n = 0, n = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де $T_n \bar{\xi}_n = (T_{n1} \bar{\xi}_n, T_{n2} \bar{\xi}_n, \dots, T_{nn} \bar{\xi}_n)$; $T_{ni} \bar{\xi}_n := \bar{\xi}_{in} - \bar{T}_{ni} \bar{\xi}_n = \xi_{in} - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (\xi_{jn})^m - f(x_{in})$, $i = \bar{1}, n$, причому оператор T_n переводить множину точок $\bar{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}) \in m_n$, що задовольняє $\|\bar{\xi}_n\| \leq d$ в m_n . Оскільки інтегральне рівняння (1) має степеневу нелінійність, то оператори T та T_n двічі диференційовні відповідно на будь-якому елементі $w \in C[0, 1]$, $\|w\| \leq d$ та $\bar{\xi}_n \in m_n$, $\|\bar{\xi}_n\| \leq d$. Диференціали операторів мають вигляд

$$T'(w)h = h(x) - m \int_0^1 \bar{K}(x, y) [w(y)]^{m-1} h(y) dy, \quad (16)$$

$$T''(w)hh_1 = -m(m-1) \int_0^1 \bar{K}(x, y) [w(y)]^{m-2} h(y)h_1(y) dy, \quad (17)$$

$$T'_n(\bar{\xi}_n) \bar{\zeta}_n = \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (\xi_{jn})^{m-1} \right] \zeta_{jn} \right\}_{i=1}^n \quad \bar{\zeta}_n \in m_n, \quad (18)$$

де $\delta_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера, або $T'_n(\bar{\xi}_n)\bar{\zeta}_n = A_n\bar{\zeta}_n^T$, де $\bar{\zeta}_n^T$ — транспонований рядок вектора $\bar{\zeta}_n = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$, а A_n — квадратна матриця порядку n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 - m\alpha_{1n}\bar{K}(x_{1n}, y_{1n}) \cdot (\xi_{1n})^{m-1} & \dots & -m\alpha_{nn}\bar{K}(x_{1n}, y_{nn}) \cdot (\xi_{nn})^{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -m\alpha_{1n}\bar{K}(x_{nn}, y_{1n}) \cdot (\xi_{1n})^{m-1} & \dots & 1 - m\alpha_{nn}\bar{K}(x_{nn}, y_{nn}) \cdot (\xi_{nn})^{m-1} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Правомірність переходу до розв'язання наближених рівнянь виражаються двома теоремами: в першій доводиться існування розв'язків послідовності апроксимаційних рівнянь за даними існування розв'язків вихідного рівняння і збіжності методу переходу до наближених рівнянь, а в другій за даними існування при фіксованому n розв'язку наближеного рівняння доводиться існування відповідного йому розв'язку вихідного рівняння і дається апостеріорна оцінка близькості таких розв'язків.

В першій теоремі фігурують оцінки оператора T_n у точці $p_n u^*$, де $u^*(x)$ — розв'язок рівняння (1) та на елементі $\bar{\xi}_n \in \bar{S}_n(p_n u^*, r)$, які відображені в лемі 1.

Лема 1. *Нехай $u^*(x)$ — розв'язок рівняння (1). Тоді:*

1) у точці $p_n u^*$ для оператора $T'_n(\bar{\xi}_n)$, визначеного згідно (18), справедливі оцінки, обчислені в нормі простору R_n :

$$\|T'_n(p_n u^*)\| \leq \bar{M}_n, \|T'_n(p_n u^*)p_n h\| \geq \bar{m}_n \|p_n h\|, \text{ де} \quad (20)$$

$$\bar{M}_n = \begin{cases} \left\{ n + m^2 \tilde{M}_n \right\}^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} \geq 0, \\ \left\{ n + 2m\bar{\bar{M}}_n + m^2 \tilde{M}_n \right\}^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} < 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{m}_n = \begin{cases} |1 - m\tilde{M}_n|, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} > 0, \\ 1, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} \leq 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\tilde{M}_n = \left\{ \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

$$\bar{\bar{M}}_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} |\bar{K}(x_{jn}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}|;$$

2) на будь-якому елементі

$$\bar{\xi}_n \in \bar{S}_n(p_n u^*, r) = p_n \bar{S}(u^*, r) = \{\bar{\xi}_n \in m_n : \|\bar{\xi}_n - p_n u^*\| \leq r\}$$

для похідної $T''_n(\bar{\xi}_n)$ справедлива оцінка

$$\|T''_n(\bar{\xi}_n)\| \leq \bar{N}_n(p_n u^*, r), \quad (24)$$

де

$$\bar{N}_n(p_n u^*, r) = \left\{ (m(m-1))^2 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2 \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^l (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} (r^2)^{m-2-l} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$C_{m-2}^l = \frac{(m-2)!}{l!(m-2-l)!}$ – число комбінацій з $m-2$ по l .

Доведення. Використовуючи вигляд (18) оператора $T'_n(\bar{\xi}_n)\bar{\zeta}_n$, згідно визначення норми у просторі R_n за нерівністю Коші справедливі нерівності:

$$\begin{aligned} \|T'_n(p_n u^*) p_n h\| &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (u^*(y_{jn}))^{m-1} \right] h(y_{jn}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (u^*(y_{jn}))^{m-1} \right]^2 \sum_{j=1}^n [h(y_{jn})]^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (u^*(y_{jn}))^{m-1} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n h\| = \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(1 - 2m \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \delta_{ij}^{(n)} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n (m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1})^2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n h\| \leq \\ &\leq \begin{cases} \left\{ n + m^2 \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n h\|, \\ \quad \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} \geq 0, \\ \left\{ n + 2m \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} |\bar{K}(x_{jn}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}| + \right. \\ \quad \left. + m^2 \sum_{i,j=1}^n (\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \|p_n h\|, \\ \quad \text{якщо } \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оцінимо похідну оператора T_n зверху, враховуючи що $T'_n(p_n u^*) p_n h = A_n(p_n h)^T$, де матриця A_n має вигляд (19). Розглянемо випадки:

1. Нехай $\bar{K}(x, y) \cdot u^m(y) \leq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \|T'_n(p_n u^*) p_n h\| &= \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left[\delta_{ij}^{(n)} - m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot (u^*(y_{jn}))^{m-1} \right] h(y_{jn}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^{(n)} h(y_{jn}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{j=1}^n [h(y_{jn})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|p_n h\|. \end{aligned}$$

2. Якщо $\bar{K}(x, y) \cdot u^m(y) > 0$, тоді проведемо наступні міркування. Подімо матрицю A_n у вигляді різниці $A_n = E_n - \tilde{A}_n$, де E_n – одинична матриця n -го порядку, а \tilde{A}_n – квадратна матриця з елементами

$$\tilde{a}_{ij} = m\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Для норм матриць справедлива нерівність $\|T'_n(p_n u^*) p_n h\| = \|A_n \cdot (p_n h)^T\| = \|E_n \cdot (p_n h)^T - \tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| \geq \left| \|E_n \cdot (p_n h)^T\| - \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| \right|$. Знайдемо \bar{m}_n , для якого

$$\left| \|E_n \cdot (p_n h)^T\| - \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| \right| \geq \bar{m}_n \|(p_n h)^T\|. \quad (26)$$

Оцінимо $\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\|$. За нерівністю Коші, використовуючи (23), отримаємо

$$\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| = m \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n [\alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}] \cdot h(y_{jn}) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq m \tilde{M}_n \|p_n h\|.$$

Очевидно, що $\|E_n \cdot (p_n h)^T\| = \|E_n \cdot (p_n h)\| = \|p_n h\| = \|(p_n h)^T\|$. Запишемо (26) у вигляді двох нерівностей:

$$\begin{aligned} \|E_n \cdot (p_n h)^T\| - \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| &\geq \bar{m}_n \|(p_n h)^T\| \\ \|E_n \cdot (p_n h)^T\| - \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| &\leq -\bar{m}_n \|(p_n h)^T\| \end{aligned} \quad (27)$$

Якщо $\tilde{M}_n < \frac{1}{m}$, тоді

$$\|E_n \cdot (p_n h)^T\| - \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| \geq (1 - m \tilde{M}_n) \|(p_n h)^T\|. \quad (28)$$

Якщо $\tilde{M}_n > \frac{1}{m}$, тоді другу з нерівностей (27) запишемо у вигляді

$$\|E_n \cdot (p_n h)^T\| + \bar{m}_n \|(p_n h)^T\| \leq \|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\|$$

та використаємо $\|\tilde{A}_n \cdot (p_n h)^T\| \leq m \tilde{M}_n \|p_n h\|$. Звідси

$$(1 + \bar{m}_n) \|(p_n h)^T\| \leq m \tilde{M}_n \|(p_n h)^T\|,$$

тобто

$$\bar{m}_n \leq m \tilde{M}_n - 1. \quad (29)$$

На основі нерівностей (28) та (29) отримаємо, що в даному випадку $\bar{m}_n = m \tilde{M}_n - 1$.

Доведемо твердження 2). Під похідною $T''_n(\bar{\xi}_n)$ розуміють сукупність $T''_n(\bar{\xi}_n) = [V_{1n}(\bar{\xi}_n), V_{2n}(\bar{\xi}_n), \dots, V_{nn}(\bar{\xi}_n)]$, де $V_{kn}(\bar{\xi}_n) = \left[\frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial \xi_{kn} \partial \xi_{jn}} \right]$, $i, j, k = \overline{1, n}$, а $\|T''_n(\bar{\xi}_n)\| = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial^2 T_{ni}}{\partial \xi_{kn} \partial \xi_{jn}} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$. Звідси, враховуючи, що мішані похідні функцій $T_{ni}(\bar{\xi}_n)$, $i = \overline{1, n}$, дорівнюють нулю, використовуючи формулу бінома Ньютона та нерівність Коші отримаємо:

$$\|T''_n(\bar{\xi}_n)\|^2 \leq m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot \sum_{j=1}^n \alpha_{jn}^2 \sum_{i=1}^n \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot [\xi_{jn}]^{2(m-2)} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq m^2 \cdot (m-1)^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2 \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot [(\xi_{jn} - u^*(y_{jn})) + u^*(y_{jn})]^{m-2} = \\
&= m^2 (m-1)^2 \sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2 \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot \left(\sum_{l=0}^{m-2} C_{m-2}^l (\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^{m-2-l} (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \leq \\
&\leq m^2 (m-1)^2 \left[\sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2 \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^l (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} (\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^{2(m-2-l)} \right] \leq \\
&\leq m^2 (m-1)^2 \left[\sum_{i,j=1}^n \alpha_{jn}^2 \bar{K}^2(x_{in}, y_{jn}) \cdot \sum_{l=0}^{m-2} \left(C_{m-2}^l (u^*(y_{jn}))^l \right)^2 \cdot \sum_{l=0}^{m-2} (r^2)^{m-2-l} \right],
\end{aligned}$$

оскільки $\forall j=\overline{1, n}$ справедлива нерівність $(\xi_{jn} - u^*(y_{jn}))^2 \leq \sum_{i=1}^n (\xi_{in} - u^*(y_{in}))^2 = r^2$. Лема доведена.

Наведемо теорему про існування розв'язків системи (5) і збіжність методу переходу до системи (5).

Теорема 2. *Нехай виконані умови:*

- 1) рівняння (1) має розв'язок $u^*(x) \in C[0, 1]$;
- 2) квадратурний процес (2) збігається, тобто $r_n(z) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для будь-якої функції $z(x) \in C[0, 1]$;
- 3) функція $\bar{K}(x, y) \cdot u^m(y)$ неперервна за всіма змінними в області $\bar{\Omega}_1 = \{(x, y, u) : \|u - u^*\| \leq r\}$, а функція $f(x)$ неперервна на $[0, 1]$;
- 4) оператор T , визначений згідно (8), двічі неперервно диференційований за Фреше в кулі $\bar{S}(u^*, r) = \{u \in C[0, 1] : \|u - u^*\| \leq r\}$, причому для оператора T'_n , визначеного згідно (18), у точці $p_n u^*$ справедливі нерівності (20);
- 5) на будь-якому елементі

$$\bar{\xi}_n \in \bar{S}_n(p_n u^*, r) = p_n \bar{S}(u^*, r) = \{\bar{\xi}_n \in m_n : \|\bar{\xi}_n - p_n u^*\| \leq r\}$$

для оператора $T''_n(\bar{\xi}_n)$ виконується нерівність (24).

Тоді справедливі твердження:

- 1) Оператори \bar{T} , \bar{T}' , \bar{T}_n , \bar{T}'_n , визначені відповідно формулами (8), (16), (15), та (18), є цілком неперервними відповідно на кулях $\bar{S}(u^*, r)$ і $\bar{S}_n(p_n u^*, r)$, причому послідовність операторів $\bar{T}_n : \bar{S}_n(p_n u^*, r) \rightarrow m_n \bar{T}'_n(p_n u^*) \in L(m_n, m_n)$ компактно апроксимують відповідно оператори $\bar{T} : \bar{S}(u^*, r) \rightarrow C[0, 1]$ та $\bar{T}'(u^*) \in L(C[0, 1], C[0, 1])$.
- 2) Існує така область $d(r) = (0, r_0)$, де r_0 ($r_0 > 0$) — корінь рівняння $\bar{m}_n - \bar{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r = 0$, що для будь-якого $r \in d(r)$ буде виконуватися нерівність

$$\bar{m}_n - \bar{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r > 0. \quad (30)$$

- 3) Для операторів T_n , T'_n в кулі $\bar{S}_n(p_n u^*, r)$ вірні оцінки, обчислені в нормі простору R_n :

$$\|T_n(p_n u^*)\| \leq \left\{ \sum_{i=1}^n [r_n(\bar{K}(x_{in}, y) [u(y)]^m)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \bar{\eta}(n, u^*), \quad (31)$$

$$\|T'_n(p_n u)\| \leq \overline{M}_n + \overline{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r = M_n(p_n u^*, r), \quad (32)$$

$$\|T'_n(p_n u) p_n h\| \geq [\overline{m}_n - \overline{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r] \|p_n h\| = \tilde{m}_n(p_n u^*, r) \|p_n h\|. \quad (33)$$

4) Для будь-якого $r \in d(r)$ знайдеться спільне $n_o(r)$, що при $n \geq n_o(r)$ будуть виконуватися умови

$$\gamma(r) = \frac{\overline{\eta}(n, u^*) \overline{N}_n(p_n u^*, r)}{\tilde{m}_n^2(p_n u^*, r)} < 1, \quad (34)$$

$$\frac{2 \cdot \overline{\eta}(n, u^*)}{\tilde{m}_n(p_n u^*, r)} \leq r. \quad (35)$$

5) При всіх $n \geq n_o(r)$ система рівнянь (5) має в кулі $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$ єдиний розв'язок $\overline{\xi}_n^*$, що відповідає розв'язку $u^*(x)$ рівняння (1), до якого, починаючи з $u^0 = \overline{\xi}_n^0 = p_n u^*$, монотонно і сильно збігається послідовність $\{\overline{\xi}_n^k\}$, побудована згідно (9) для системи (5), причому справедлива оцінка похибки

$$\|\overline{\xi}_n^* - \overline{\xi}_n^k\| \leq \frac{\overline{\eta}(n, u^*)}{\tilde{m}_n(p_n u^*, r)} \left[1 - \frac{\tilde{m}_n^2(p_n u^*, r)}{\overline{M}_n^2(p_n u^*, r)} (1 - \gamma(r)) \right]^{k/2}. \quad (36)$$

6) Будь-яка послідовність розв'язків $\{\overline{\xi}_n^k\}$ збігається при $n \rightarrow \infty$ за нормою до елемента $p_n u^*$, причому швидкість збіжності характеризується нерівністю

$$\|\overline{\xi}_n^* - p_n u^*\| \leq \frac{\overline{\eta}(n, u^*)}{\tilde{m}_n(p_n u^*, r)}. \quad (37)$$

Доведення. Розглянемо рівняння (1) та систему (5) відповідно як операторні рівняння (8), (15) у просторах m_n та $C[0, 1]$. Згідно (3), (4) оператори $\overline{T} : \overline{S}(u^*, r) \rightarrow C[0, 1]$ та $\overline{T}_n : \overline{S}_n(p_n u^*, r) \rightarrow m_n$ є цілком неперервними на кулях $\overline{S}(u^*, r)$ і $\overline{S}_n(p_n u^*, r)$. Доведемо, що по відношенню до зв'язуючих відображень p_n , заданих згідно (6), послідовність операторів \overline{T}_n компактно апроксимує оператор \overline{T} . Для цього перевіримо обидві умови означення 5.1 [4]: 1) дійсно, $\forall u \in \overline{S}(u^*, r)$, використовуючи твердження 8.1 [4], на основі компактності сім'ї $\{z_x(y) = \overline{K}(x, y) \cdot [u(y)]^m\}$, будемо мати:

$$\begin{aligned} 1) \quad \left\| p_n \overline{T} u - \overline{T}_n p_n u \right\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_0^1 \overline{K}(x_{in}, y) \cdot [u(y)]^m dy - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \overline{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u(y_{jn})]^m \right| = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| r_n (\overline{K}(x_{in}, y) \cdot [u(y)]^m) \right| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

2) для $\forall \overline{\xi}_n = (\xi_{1n}, \xi_{2n}, \dots, \xi_{nn}) \in \overline{S}_n(p_n u^*, r)$, згідно умов (2), (3), враховуючи, що

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{jn} = \alpha = \text{const}, \text{ на основі теореми Арцела послідовність}$$

$$w_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) \cdot [\xi_{jn}]^m - f(x) \text{ компактна в } C[0, 1] \text{ і } p_n w_n(x) = \bar{T}_n \bar{\xi}_n.$$

Аналогічно покажемо [4], що послідовність операторів \bar{T}_n' ($p_n u^*$) компактно апроксимує оператор $\bar{T}'(u^*) \in L(C[0, 1], C[0, 1])$. На основі компактності сім'ї функцій $\{\tilde{z}_x(y) = m \bar{K}(x, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1}\}$ отримаємо

$$\begin{aligned} \left\| p_n \bar{T}'(u^*) - \bar{T}'_n(p_n u^*) \right\| &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| m \int_0^1 \bar{K}(x_{in}, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1} dy - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x_{in}, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1} \right| = m \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |r_n (\bar{K}(x_{in}, y) \cdot [u^*(y)]^{m-1})| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Послідовність $\tilde{w}_n(u^*(x)) = m \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) \cdot [u^*(y_{jn})]^{m-1}$ компактна в $C[0, 1]$ і $p_n \tilde{w}_n(u^*(x)) = \bar{T}'_n(p_n u^*)$.

Покажемо, що існує така область $d(r) = (0, r_0)$, що $\bar{m}_n - \bar{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r > 0$ для будь-якого $r \in d(r)$. Дійсно, перепишемо останню нерівність у вигляді $\bar{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r - \bar{m}_n < 0$. Функція $\bar{f}(r) = \bar{N}_n(p_n u^*, r) \cdot r - \bar{m}_n$ є зростаючою і $\bar{f}(r) < 0$ при $r = 0$. Тоді знайдеться таке $r_0 \in (0, \infty)$, що $\bar{f}(r_0) = 0$ і для будь-якого $r \in (0, r_0) = d(r)$ буде справедлива нерівність $\bar{f}(r) < 0$.

Міркування при доведенні твердження 3 аналогічні проведеним в [1], тому в даній роботі не наводяться.

Так як для довільного $r \in (0, r_0)$ виконується нерівність (30), тоді з умови збіжності квадратурного процесу (умова 2), можна стверджувати, що існує таке $n_o(r)$, починаючи з якого (при $n \geq n_o(r)$) при всіх n система нерівностей (34), (35) буде сумісною, а це означає, що для оператора $T_n \bar{\xi}_n$ виконуються всі умови теореми 1, тобто система рівнянь (5) в кулі $\bar{S}_n(p_n u^*, r)$ має єдиний розв'язок $\bar{\xi}_n^*$, до якого, починаючи з $\bar{\xi}_n^0 = p_n u^*$ збігається послідовність $\{\bar{\xi}_n^k\}$, побудована згідно (9) для системи (5) та справедливі оцінки (36), (37). З нерівності (37) випливає, що $\|\bar{\xi}_n^* - p_n u^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а це означає збіжність методу переходу від рівняння (1) до системи (5). Теорема доведена.

4. Існування і єдиність розв'язку рівняння (1). Припустимо, що існує l точних ізольованих розв'язків $\xi_{1n}^*, \xi_{2n}^*, \dots, \xi_{ln}^*$ системи (5), які при деякому фіксованому $n \geq n_o$ всі вони можуть бути знайдені, наприклад за допомогою ε -алгоритму [5]. За цими розв'язками, згідно (4), можна побудувати відповідні аналітичні розв'язки $u_{1n}^*, u_{2n}^*, \dots, u_{ln}^*$. Наступна теорема дає розв'язання задачі знаходження для кожного v , $v(x) = u_{in}^*$ ($i = \overline{1, l}$) таких значень радіуса r , які б у кулі $\bar{S}(v, r) = \{u \in \bar{\Omega} : \|u - v\| \leq r\}$ забезпечили виконання достатніх умов існування єдиного розв'язку рівняння (1) (теорема 1).

Теорема 3. *Нехай виконані умови:*

- 1) функції $\bar{K}(x, y) \cdot [u(y)]^m$ та $f(x)$ належать простору $C_\chi[\bar{\Omega}]$, $\chi \geq 3$, $C_\chi[\bar{\Omega}] \subset L_2[0, 1]$;
- 2) при кожному фіксованому $n \geq n_o$ система рівнянь (5) має розв'язок $\bar{\xi}_n^*$, а відповідний йому аналітичний розв'язок $v = u_n^*(x)$ має вигляд (4).

Тоді справедливі наступні твердження:

- 1) норма нев'язки наближеного розв'язку в інтегрального рівняння (1) задовольняє нерівність

$$\|Tv\| \leq \|r_n(v(y))\| \leq b_s \cdot Q^{(s)}, \quad (38)$$

де b_s — множник, незалежний від функції $\bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^m$, свій для кожної квадратурної формули, а $Q^{(s)}$ задовольняє нерівність

$$\max_{0 \leq x, y \leq 1} \left| \frac{d^s}{dy^s} [\bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^m] \right| \leq Q^{(s)}; \quad (39)$$

- 2) для будь-якого $u \in \bar{S}(v, r)$ вірні оцінки, обчислені в нормі простору $L_2[0, 1]$

$$\|T'(u)\| \leq \bar{M} + N(\|v\|, r) \cdot r = M(v, r), \quad (40)$$

де

$$\|T'(u)h\| \geq [\bar{m} - N(\|v\|, r) \cdot r], \quad \|h\| = m(v, r) \|h\|, \quad (41)$$

а константа $\tilde{\theta}$ визначається із нерівності

$$\left\{ \int_0^1 [v^2(y)]^{m-2} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \tilde{\theta} \left(\int_0^1 v^2(y) dy \right)^{\frac{m-2}{2}};$$

$$\|T''(u)\| \leq \bar{N}(\|v\|, r), \quad (42)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{N}(\|v\|, r) &= m(m-1) \|\bar{K}(x, y)\| \cdot \\ &\cdot \tilde{\theta} \left(r^{m-2} + \sum_{i=1}^{m-3} \frac{(m-1-i) \dots (m-2)}{i!} \|v\|^i r^{m-2-i} + \|v\|^{m-2} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\bar{M} = \begin{cases} (1 + m^2 M_1^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} \geq 0, \\ (1 + 2mM_1 + m^2 M_1^2)^{\frac{1}{2}}, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} < 0, \end{cases} \quad (44)$$

$$\bar{m}_n = \begin{cases} |1 - mM_1|, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} > 0, \quad M_1 \neq \frac{1}{m} \\ 1, & \text{якщо } \bar{K}(x, y) [v(y)]^{m-1} \leq 0, \end{cases} \quad (45)$$

$$M_1 = \left\| \bar{K}^2(x, y) [v(y)]^{2(m-1)} \right\|; \quad (46)$$

- 3) скалярне рівняння $\bar{m} - \bar{N}(\|v\|, r) \cdot r = 0$ має принаймні один додатний розв'язок \bar{R} , при кожному фіксованому $n \geq \bar{n}_0$;
- 4) існує таке $\bar{n}_0 \geq n_0$, що при $n \geq \bar{n}_0$ кожному розв'язку v рівняння (3) буде відповідати свій інтервал $(r_1, r_2) \subset [0, \infty)$ зміни радіуса r кулі $\bar{S}(v, r)$. На цьому інтервалі буде сумісна система нерівностей (12), (13) в якій $\eta = r_n(v)$, а функції $m(v, r)$ та $\bar{N}(\|v\|, r)$ мають вигляд (43) та (45) відповідно;
- 5) рівняння (1) має у кулі $\bar{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$ єдиний розв'язок $u^*(x)$, що відповідає даному $v(x)$, до якого, починаючи з $u^0(x) = v(x)$, при $k \rightarrow \infty$ збігається послідовність $\{u^k(x)\}$, побудована згідно (9) для оператора T , причому справедлива нерівність

$$\|u^*(x) - u^k(x)\| \leq \frac{b_s \cdot Q^{(s)}}{m(v, r)} \left[1 - \frac{m^2(v, r)}{M^2(v, r)} (1 - \gamma(r)) \right]^{k/2}; \quad (47)$$

б) апостеріорна оцінка похибки, що характеризує близькість розв'язків $u^*(x)$ та $v(x)$ відповідно рівнянь (1) та (3) визначається нерівністю

$$\|u^*(x) - v(x)\| \leq \frac{b_s \cdot Q^{(s)}}{m(v, r)}. \quad (48)$$

Доведення. Оскільки $v = u_n^*(x)$ є точним розв'язком рівняння (3), то $T_n v(x) = 0$. Звідси, враховуючи вигляд оператора T і збіжність квадратурного процесу (2), застосовуючи оцінку залишкового члена, наведену в [5], одержимо:

$$\begin{aligned} \|Tv\| &\leq \|Tv - T_n v\| + \|T_n v\| = \left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^m dy - \sum_{j=1}^n \alpha_{jn} \bar{K}(x, y_{jn}) \cdot [v(y_{jn})]^m \right\| = \\ &= \|r_n(v(y))\| \leq b_s \cdot Q^{(s)}. \end{aligned}$$

Доведемо, що для операторів $T'(u)$, $T''(u)$ в кулі $\bar{S}(v, r)$ виконуються оцінки (42)-(44). Використовуючи нерівність трикутника, формулу Лагранжа та враховуючи, що $u \in \bar{S}(v, r)$, згідно нерівності (44), де $\bar{N}(\|v\|, r)$ має вигляд (45), та оцінки $\|T'(v)\| \leq \bar{M}$, де \bar{M} , визначена згідно (46), справедливості яких доведена в [2], отримаємо:

$$\begin{aligned} \|T'(u)\| &\leq \|T'(v)\| + \|T'(u) - T'(v)\| \leq \\ &\leq \bar{M} + \left\| \int_0^1 T''(v + \tau(u - v)) d\tau \cdot (u - v) \right\| \leq \bar{M} + N(\|v\|, r) \cdot r = M(\|v\|, r). \end{aligned}$$

Знайдемо значення \bar{m} , для якого виконується нерівність $\|T'(v)h\| \geq \bar{m} \|h\|$. Нехай $\bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} \leq 0$. Тоді

$$\|T'(v)h\| = \left\| h(x) - m \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| \geq \|h(y)\|.$$

Нехай $\bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} > 0$. Відомо, що

$$\begin{aligned} &\left\| h(x) - m \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| \geq \\ &\geq \left| \|h\| - \left\| m \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| \right| \geq \bar{m} \|h\|. \end{aligned}$$

Запишемо останню нерівність у вигляді двох еквівалентних нерівностей:

$$\begin{aligned} \|h\| - m \left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| &\geq \bar{m} \cdot \|h\| \\ \|h\| - m \left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| &\leq -\bar{m} \cdot \|h\| \end{aligned} \quad (49)$$

Використовуючи формулу Коші-Буняковського та позначення (48), будемо мати:

$$\left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right)^2 dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \int_0^1 \bar{K}^2(x, y) [v(y)]^{2(m-1)} dy dx \|h\|^2 = \left\| \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{(m-1)} \right\|^2 \cdot \|h\|^2 = M_1^2 \|h\|^2. \quad (50)$$

Якщо $M_1 < \frac{1}{m}$, тоді

$$\begin{aligned} (1 - mM_1) \|h\| \|h\| - m \left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\| &\geq \\ \geq \|h\| - m \left\| \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} \right\| \cdot \|h\| &= (1 - mM_1) \|h\|, \end{aligned}$$

тобто перша з нерівностей (49) виконується при $\bar{m} = 1 - mM_1$.

Розглянемо другу з нерівностей (49), яку запишемо у вигляді

$$(1 + \bar{m}) \|h\| \leq m \left\| \int_0^1 \bar{K}(x, y) \cdot [v(y)]^{m-1} h(y) dy \right\|,$$

та застосуємо оцінку (50). Будемо мати: $(1 + \bar{m}) \|h\| \leq mM_1 \|h\|$, тобто друга з нерівностей (49) виконується при $\bar{m} \leq mM_1 - 1$, якщо $M_1 > \frac{1}{m}$. Звідси випливає, що $\bar{m} = |1 - mM_1|$. Тоді, згідно нерівності трикутника, враховуючи що

$$\begin{aligned} \|T'(v) - T'(u)\| &\leq \left\| \int_0^1 T''(v + \tau(u - v)) d\tau \cdot (u - v) \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|T''(v + \tau(u - v))\| d\tau \cdot \|u - v\| \leq N(\|v\|, r) \cdot r, \end{aligned}$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \|T'(u)h\| &\geq \|T'(v)h\| - \|(T'(v) - T'(u))h\| \geq \bar{m}\|h\| - \|T'(v) - T'(u)\| \|h\| \geq \\ &\geq [\bar{m} - N(\|v\|, r) \cdot r] \|h\|. \end{aligned}$$

Доведемо справедливості твердження 3. Позначимо $\tilde{f}(r) = \bar{N}(\|v\|, r) \cdot r - \bar{m}$. Враховуючи вигляд функції $\bar{N}(\|v\|, r)$, $\tilde{f}(r)$ — зростаюча (при $r > 0$), причому $\tilde{f}(r) < 0$ при $r = 0$. Тому знайдеться таке $\bar{R} > 0$, що $\tilde{f}(\bar{R}) = 0$, тобто \bar{R} є коренем рівняння $\bar{m} - \bar{N}(\|v\|, r) \cdot r = 0$.

Для доведення тверджень 4-6 відмітимо, що кожному фіксованому $n \geq \bar{n}_0$ буде відповідати своя множина розв'язків $v(x) = u_{in}^*(x)$, $i = \bar{1}, \bar{l}$. Для кожного такого $n \geq \bar{n}_0$ і відповідного йому розв'язку $v(x)$ існує свій інтервал сумісності системи нерівностей (12), (13). Це випливає із збіжності квадратурного процесу ($r_n(v) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), а функції $m(v, r)$ та $\bar{N}(\|v\|, r)$ залежать від r . Отже, знайдуться такі фіксовані $n \geq \bar{n}_0$ і відповідні їм $v(x)$, що існує інтервал (r_1, r_2) і для всіх $r \in (r_1, r_2)$ буде виконуватися система нерівностей (12), (13), а значення r_1 та r_2 визначаються шляхом розв'язання вказаної системи. Звідси випливає, що в кулі $\bar{S}(v, r)$, де $r \in (r_1, r_2)$ виконані всі умови теореми 1, що означає існування єдиного розв'язку $u^*(x) \in \bar{S}(v, r)$ рівняння (1), збіжність послідовності $\{u^k(x)\}$, побудованої згідно (9) та справедливості апостеріорних оцінок (49), (50). Теорема доведена.

5. Висновки. В даній роботі наведено спосіб побудови аналітичних розв'язків нелінійного інтегрального рівняння зі степеневою нелінійністю та знаходження області єдиності кожного розв'язку. Цими областями є замкнені кулі, центрами

яких і є точні чи наближені розв'язки апроксимаційних рівнянь, а радіуси знаходять, використовуючи достатні умови теореми існування і єдиності розв'язку та збіжності ітераційного методу мінімальних похибок.

Список використаної літератури

1. Бабич М. Д. Про відокремлення ізольованих розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь. *Український математичний журнал*, 1996. Т. 48, № 8. С. 1011–1020.
2. Мамай Л. М. Про наближене розв'язування нелінійних інтегральних рівнянь із степеневою нелінійністю. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, 2008. Вип. 17. С. 116–131.
3. Фридман В. М. Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения. *Доклады Академии наук СССР*, 1961. Т. 139, № 5. С. 1063–1066.
4. Вайникко Г. М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту: Изд-во ТГУ, 1970. 192 с.
5. Бабич М. Д., Шевчук Л. Б. Об одном алгоритме приближенного решения систем нелинейных уравнений. *Кибернетика*, 1982. № 2. С. 74–79.
6. Волков Е. А. О поиске решений нелинейного интегрального уравнения. *Труды Математического института Академии наук СССР*, 1976. Т. 142. С. 101–121.

Мамай Л. М. About the construction of approximate isolated solutions of nonlinear integral equations with power nonlinearity.

This paper is devoted to questions of the global approximate solving of nonlinear integral equations with nonlinear degree. The elements of general theory of the approximate methods for the class of the nonlinear integral equations (NIE) with nonlinear degree were applied. To designing sequence of approximated equations a quadrature formula was used. Direct and return theorems were formulated and proved for this class of NIE, which reflect interrelation between exact and sequence of approximated equations in sense of existence of solution and their conformity.

Keywords: nonlinear integral equations, isolated solutions, an error, quadrature formula.

References

1. Babych, M. D. (1996). Pro vidokremlennya izolovanyh rozvyazkiv nelinejnyh integralnyh rivnyan [On the separation of isolated solutions of nonlinear integral equations]. *Ukrainian Mathematical Journal*, 48(8), 1011–1020 [in Ukrainian].
2. Mamay, L. M. (2008). Pro nablyzhene rozvyazuvannya nelinejnyh integralnyh rivnyan zi stepenevoju nelinejnistju [On the approximate solution of nonlinear integral equations with power nonlinearity]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 17, 116–131 [in Ukrainian].
3. Fridman, V. M. (1961). Iterativnyj proces s minimalnymi oshybkami dlya nelinejnogo operatornogo uravneniya [An iterative process with minimal errors for a nonlinear operator equation]. *Reports of the USSR Academy of Sciences*, 139(5), 1063–1066 [in Russian].
4. Vajnikko, G. M. (1970). Kompaktnaja aproksimatsiya operatorov i priblizhonnoe reshenie uravnenij [Compact approximation of operators and approximate solution of equations]. Tартu: TGU [in Russian].
5. Babych, M. D., & Shevchuk, L. B. (1982). Ob odnom algoritme priblizhonnoho resheniya sistem nelinejnyh uravnenij [On an algorithm for the approximate solution of systems of nonlinear equations]. *Kibernetika*, 2, 74–79 [in Russian].
6. Volkov, E. A. (1976). O poiske resenij nelinejnogo integralnogo uravneniya [On the search for solutions of a nonlinear integral equation]. *Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences*, 142, 101–121 [in Russian].

Одержано 30.10.2021

UDC 512.628.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).60-67](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).60-67)**I. O. Melnyk¹, R. V. Kolyada², O. M. Melnyk³**¹ Ivan Franko National University of Lviv,Associate professor of the department of algebra, topology and fundamentals of mathematics,
Candidate of physical and mathematical sciences

ivannamelnyk@yahoo.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7650-5190>² Ukrainian Academy of Printing,Associate professor of the department of applied mathematics and physics,
Candidate of physical and mathematical sciences

rostyslavakolyada@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4371-070X>³ National University "Lviv Polytechnic", Ukrainian Academy of Printing,Associate professor of the department of computational mathematics and programming, associate
professor of the department of applied mathematics and physics,

Candidate of physical and mathematical sciences

melnykorest@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4456-4759>

SOME PROPERTIES OF DIFFERENTIAL, QUASI-PRIME AND DIFFERENTIALLY PRIME SUBSEMIMODULES

The notion of a semiring derivation is traditionally defined as an additive map satisfying the Leibnitz rule, i. e. a map $\delta: R \rightarrow R$ is called a derivation on R if $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ for any $a, b \in R$. The notion of a **quasi-prime ideal**, for the first time, was introduced in differential commutative rings, i.e. commutative rings considered together with a derivation, as a differential ideal maximal among those disjoint from some multiplicatively closed subset of a ring. A subsemimodule P of a semimodule M is called **prime** if for any ideal I of R and any subsemimodule N of M the inclusion $IN \subseteq P$ follows $N \subseteq P$ or $I \subseteq (P : M)$. A differential subsemimodule P of M is called a **differentially prime subsemimodule** if for any $r \in R$, $m \in M$, $k \in \mathbb{N}_0$, $rm^{(k)} \in P$ follows $r \in (P : M)$ or $m \in P$.

The present paper is devoted to investigating the notions of **differential subsemimodule**, **differentially prime subsemimodule**, and **quasi-prime subsemimodule** of a differential semimodule (which is defined as a semimodule together with a derivation on it related to the corresponding semiring derivation), not necessarily commutative. The objective of the article is to investigate some properties of such subsemimodules, and to show the interrelation between **quasi-prime ideals** and **differentially prime subsemimodule** in case of differential semimodules satisfying the ascending chain condition for differential subsemimodules. The paper consists of two main parts. In the first part, the author investigates some properties of differential subsemimodules and the corresponding differential ideals, and gives some examples of such subsemimodules. The second part of the paper is devoted to considering the connection existing between **quasi-prime subsemimodules** and **differentially prime subsemimodules**. It is established that a differential subsemimodule N of M is differentially prime if and only if N is a quasi-prime subsemimodule for a differential semimodule M satisfying the ascending chain condition for differential subsemimodules.

Keywords: semimodule derivation, semiring derivation, differential semimodule, differential semiring, differential ideal, differential subsemimodule, differentially prime subsemimodule, quasi-prime subsemimodule.

1. Introduction. The notion of a derivation for semirings is defined in [1] as an additive map satisfying the Leibnitz rule. Recently in [2], [3], [4] the authors

investigated different properties of semiring derivations, differential semirings, i.e. semirings considered together with a derivation, and differential ideals of such rings. Prime subsemimodules of semimodules over semirings were introduced and studied in [5]. Differentially prime ideals were introduced in [6] for differential, not necessarily commutative, rings. Differentially prime submodules of modules over associative rings were studied in [7], [8]. Quasi-prime ideals of differential rings were introduced and studied in [9], [10], its generalizations to differential modules, semirings and semimodules were studied by different authors, e.g. [3], [4].

Due to the development of semiring and semimodule theory recently, the need of studying the properties of differential semirings, differential semimodules, semiring ideals and subsemimodules defined by similar conditions arose. The objective of this paper is to introduce and investigate differential semimodules over differential semirings. We extend some basic results on differential modules to differential semimodules over differential semirings.

2. Preliminaries. For the sake of completeness some definitions and properties used in the paper will be given here. For more information see [1], [5]. Throughout the paper \mathbb{N} denotes the set of positive integers and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ the set of non-negative integers.

A semiring is a non-empty set R equipped with two associative binary operations called addition (denoted by $+$) and multiplication (denoted by \cdot), such that multiplication distributes over addition from either side. A semiring which is not a ring is called a *proper semiring*. A semiring $(R, +, \cdot)$ is said to be *commutative* if \cdot is commutative on R .

Zero $0_R \in R$ is called (*multiplicatively*) *absorbing* if $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0$ for all $a \in R$. An element $1_R \in R$ is called *identity* if $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ for all $a \in R$. Suppose $1_R \neq 0_R$.

A subset S of R closed under addition and multiplication is called a *subsemiring* of R . A *semifield* is a semiring in which non-zero elements form a group under multiplication.

The *center* of a semiring R is a set $Z(R) = \{r \in R | rs = sr \forall s \in R\}$. It is a subsemiring of R . Since $0 \in Z(R)$, $Z(R) \neq \emptyset$. An element $r \in Z(R)$ is called *central*. A semiring R is commutative if $Z(R) = R$.

A *left ideal* of a semiring R is a nonempty set $I \neq R$ which is closed under $+$ and satisfying the following conditions $ra \in I$ for all $a \in I$, $r \in R$. Similarly we can define right ideal and two-sided ideal of a semiring.

An ideal I of a semiring R is called *subtractive* (or *k-ideal*) if $a \in I$ and $a + b \in I$ follow $b \in I$.

Let R be a semiring with $1_R \neq 0_R$. A *left semimodule over a semiring R* (or *R -semimodule*) is a nonempty set M together with two operations $+: M \times M \rightarrow M$ and $\cdot: R \times M \rightarrow M$ such that $(M, +)$ is a commutative monoid with 0_M , (M, \cdot) is a semigroup, $(r+s)m = rm + sm$ for all $r, s \in R$, $m \in M$, $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ for all $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$, $0_R \cdot m = r \cdot 0_M = 0_M$ for all $r \in R$ and $m \in M$, $1_R \cdot m = m$ for all $m \in M$. An R -subsemimodule M is called a *semivector space* if R is a semifield. A subset N of an R -semimodule M is called a *subsemimodule* of M if N itself is a semimodule with respect to the operations for M , i. e. if $m + n \in N$ and $rm \in N$ for any $m, n \in N$, and $r \in R$. A subsemimodule N of an R -semimodule M is called *subtractive* or *k-subsemimodule* if $m_1 \in N$ and $m_1 + m_2 \in N$ follow $m_2 \in N$. So

$\{0_M\}$ is a subtractive subsemimodule of M .

3. Differential semimodules and subsemimodules. Let R be a semiring. A map $\delta: R \rightarrow R$ is called a *derivation on R* [1] if $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ for any $a, b \in R$. A semiring R equipped with a derivation δ is called a *differential semiring* with respect to the derivation δ (or δ -*semiring*), and denoted by (R, δ) [2]. A derivation of a semiring R is called *trivial* if it sends all a in R to 0_R . A semiring is called *differentially trivial* if it has no non-trivial derivation.

Let M be a left semimodule over the semiring R . A map $d: M \rightarrow M$ is called a *derivation* of the semimodule M , associated with the semiring derivation $\delta: R \rightarrow R$ (or a δ -*derivation*) if the following conditions hold:

- 1) $d(m+n) = d(m) + d(n)$ for any $m, n \in M$;
- 2) $d(rm) = \delta(r)m + rd(m)$ for any $m \in M, r \in R$.

Since the semiring \mathbb{N}_0 is differentially trivial, any derivation of \mathbb{N}_0 -semimodule is a semimodule homomorphism. In a \mathbb{N}_0 -semimodule any semimodule homomorphism is a semimodule derivation associated with the trivial derivation on \mathbb{N}_0 .

The same is true for a semimodule over the differentially trivial semiring \mathbb{Q}_+ .

A left R -semimodule M together with a derivation $d: M \rightarrow M$ is called a *differential semimodule* (or d - δ -*semimodule*) and denoted by (M, d) .

Zero semimodule (0_M) is a differential semimodule over any differential semiring under any semimodule derivation. Any semiring can be considered as a differential \mathbb{N}_0 -semimodule under derivation associated with the trivial derivation on \mathbb{N}_0 . Here any semimodule homomorphism is a semimodule derivation. Any differential left ideal of the differential semiring R is a left differential semimodule over R . Any differential semiring is a left (right) differential semimodule over itself. Any differential module over a differential ring R is a differential semimodule over R as a differential semiring. Any differential semivector space over a differential semifield F is a differential semimodule over a differential semiring F . If R is a semiring and $A \neq \emptyset$ is any set then the set R^A of all differentiable functions from A to R is a left differential R -semimodule, where the addition and scalar multiplications is defined elementwise and the derivation is defined in the ordinary way.

Proposition 1. *Let (R, δ) be a differential semiring and let $\{(M_i, d_i) | i \in I\}$ be a family of left differential semimodules over R , where all the semimodule derivations $d_i: M_i \rightarrow M_i$ are associated with the semiring derivation δ .*

A direct product $\prod_{i \in I} M_i$ is a left differential R -semimodule.

Proof. As shown in [1], $\prod_{i \in I} M_i$ has a structure of a left R -semimodule under componentwise addition and scalar multiplication.

Define a map $d: \prod_{i \in I} M_i \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$ by the rule $d: ((m_i)) \mapsto (d_i(m_i))$. It is easy to see that d is additive. Now consider $d(r \cdot (m_i)) = (d_i(rm_i)) = (\delta(r)m_i + rd_i(m_i)) = \delta(r)(m_i) + r(d_i(m_i)) = \delta(r)(m_i) + r \cdot d(m_i)$. Hence M is a differential δ -semimodule over R .

If not stated otherwise, in what follows let (R, δ) be a differential semiring, (M, d) be a left differential semimodule over R .

A subsemimodule N of the R -semimodule M is called *differential* if $d(m) \in N$ whenever $m \in N$. Any differential semimodule has two trivial differential subsemimodules: $\{0_M\}$ and itself.

An element $m \in M$ is called *additively idempotent* if $m + m = m$. Denote by $I^+(M)$ the set of all additively idempotent elements of M . A semimodule M is

called *additively idempotent* if every element of M is additively idempotent, i. e. $I^+(M) = M$. It is easy to see that every semimodule over an additively idempotent semiring is additively idempotent.

Proposition 2. *The set $I^+(M)$ of all additively idempotent elements of M is a differential subsemimodule of M .*

Proof. Straightforward.

According to [1], the *zeroid* of M is defined to be $Z(M) = \{m \in M \mid m + x = x \text{ for some } x \in M\}$. $Z(M)$ is a subtractive subsemimodule of M containing $I^+(M)$. Moreover $Z(R)M \subseteq M$.

Proposition 3. *$Z(M)$ is a differential subsemimodule of M .*

Proof. Straightforward.

Proposition 4. *Let $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ be a family of subsemimodules of M .*

- 1) *An intersection $\bigcap_{\alpha \in A} N_\alpha$ of any family of differential (subtractive) subsemimodules of M is a differential (subtractive) subsemimodules of M .*
- 2) *A sum $\sum_{\alpha \in A} N_\alpha$ of any family of differential subsemimodules of the differential semimodule M is a differential subsemimodules of M .*

Proof. Straightforward.

Proposition 5. *If I is a left differential ideal of R and N is a differential R -subsemimodule of M , then set IN consisting of all finite sums of elements $r_i m_i$ with $r_i \in R$ and $m_i \in M$, is a differential R -subsemimodule of M .*

Proof. Suppose $x \in IN$. Then $x = \sum_{i=1}^k r_i m_i$ for some $m_i \in N$, $r_i \in I$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. We have that

$$d(x) = \sum_{i=1}^k (\delta(r_i) m_i + r_i d(m_i)) = \sum_{i=1}^k \delta(r_i) m_i + \sum_{i=1}^k r_i d(m_i).$$

Since I and N are differential, then $\delta(r_i) \in I$ and $d(m_i) \in N$ for all $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Hence $d(x) \in IN$.

Corollary 1. *If I is a left differential ideal of the differential semiring R , then the set IM is a differential subsemimodule of the left differential R -semimodule M .*

Proposition 6. *If I is a differential ideal of R and N is a differential subtractive subsemimodule of M , then the residual $(N : I) = \{m \in M \mid Im \subseteq N\}$ is a differential subtractive R -subsemimodule of M .*

Proof. It is easy to prove that $(N : I)$ is a subtractive subsemimodule of M . Let $x, x + y \in (N : I)$. Then for every $a \in I$, $ax \in N$ and $a(x + y) \in N$. By subtractiveness of N the latter implies $ay \in N$. So $y \in (N : I)$.

Let $m \in (N : I)$. Then $am \in N$ for every $a \in I$. Since N is differential $d(am) = \delta(a)m + ad(m) \in N$. The differentiability of I follows $\delta(a)m \in N$. Given N is subtractive subsemimodule, we have $ad(m) \in N$. Hence $d(m) \in (N : I)$.

Corollary 2. $(0 : I) = \{m \in M \mid Im = \{0_M\}\}$ is a differential subtractive subsemimodule of M .

Proposition 7. *If N is a differential subtractive subsemimodule of M and X is a non-empty differentially closed subset of M , then $(N : X) = \{r \in R \mid rX \subseteq N\}$ is a differential subtractive left ideal of R .*

Proof. The residual $(N : X)$ is a subtractive left ideal of R by [1], Proposition 14.24. Let $r \in (N : X)$. Then $d(rx) = \delta(r)x + rd(x) \in N$ for every $x \in X$. Since X is differentially closed, $rd(x) \in N$. Given N is a subtractive subsemimodule, $\delta(r) \in (N : X)$.

Corollary 3. *Let N, K be differential subtractive subsemimodules of the differential left R -semimodule M . Then $(N : K)$, $(N : M)$, $(0 : M)$ are differential subtractive left ideals of R .*

An annihilator of an R -semimodule M is a set $Ann(M) = (0 : M)$. An annihilator of the element $m \in M$ is a set $Ann(m) = (0 : Rm) = \{r \in R \mid rm = 0\}$. In [5] it is shown that $Ann(M) = (0 : M)$, $(N : m) = \{r \in R \mid rm \in N\}$ and $Ann(m) = (0 : m)$ are subtractive ideals of R , where R is a commutative semiring. For a differential semimodule M $Ann(M)$ is always a differential ideal, however $Ann(m)$ is generally not. So we define a differential analogue of the annihilator of an element $m \in M$.

For an element $m \in M$ denote by $m^{(0)} = m$, $m' = d(m)$, $m'' = d(m')$, $m^{(n)} = d(m^{(n-1)})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Moreover, let $m^{(\infty)} = \{m^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. It is easy to see that the set $m^{(\infty)}$ is differentially closed. A differential annihilator of the element $m \in M$ is the set $Ann_d(m) = (0 : m^{(\infty)}) = \{r \in R \mid rm^{(\infty)} = 0_M\}$. By Proposition 7 we have the following corollary

Corollary 4. *If N is a differential subtractive subsemimodule of M , then for any $m \in M$ the set $(N : m^{(\infty)}) = \{r \in R \mid rm^{(\infty)} \subseteq N\}$ is a differential subtractive left ideal of R .*

Corollary 5. *If $m \in M$ then $Ann_d(m) = (0 : m^{(\infty)})$ is a differential subtractive left ideal of R . Moreover, $Ann_d(m) \subseteq Ann(m)$.*

Proposition 8. *Let T be a non-empty subset of M . An intersection of all differential subtractive subsemimodules of the differential R -semimodule M containing the set T is a differential subtractive subsemimodule of M . It is the smallest differential subsemimodule of M containing T .*

Proof. It is obvious that $\bigcap_{T \subseteq N} N$ is a subsemimodule of M . Clearly it is subtractive. Let $m \in \bigcap_{T \subseteq N} N$. Then m is contained in any subsemimodule containing T . Therefore, $d(m) \in \bigcap_{T \subseteq N} N$.

Denote by $(T) = \bigcap_{T \subseteq N} N$ the subsemimodule generated by the set T . A subsemimodule (T) is called *finitely generated* if the set T is finite.

Denote $[T] = \bigcap_{T \subseteq N} N$ and call it the *subsemimodule differentially generated by the set T* .

Proposition 9. *A differential subsemimodule $[T]$ is generated by the set $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} d^{(k)}(T)$ as an R -subsemimodule.*

Proof. Straightforward.

Example. For an \mathbb{N}_0 -subsemimodule $\mathbb{N}_0[x]$ under the ordinary derivation $\delta = \frac{d}{dx}$, where $\delta(x) = 1$, consider a differential subsemimodule $N = [x^2]$. By Proposition 8, $N = [x^2] = (x^2, 2x, 2) = (x^2, 2)$.

According to [1], a map $f: M_1 \rightarrow M_2$ is called a *homomorphism* of R -semimodules if $f(x+y) = f(x) + f(y)$ and $f(rx) = rf(x)$ for all $x, y \in M$ and $r \in R$. The *kernel* of f is defined to be the set $Ker(f) = \{m \in M | f(m) = 0_{M_2}\}$, and the image of f is the set $Im(f) = \{f(m) \in M_2 | m \in M_1\}$. $Ker(f)$ is a subtractive subsemimodule of M_1 and $Im(f)$ is a subsemimodule of M_2 .

Let (R, δ) be a differential semiring. Let $(M_1, d), (M_2, d)$ be left differential semimodules over R . A homomorphism of differential R -semimodules $f: M_1 \rightarrow M_2$ is called a *differential R -homomorphism* if $f(d(m)) = d(f(m))$ for all $m \in M_1$.

Proposition 10. *Let (R, δ) be a differential semiring, (M_1, d) and (M_2, d) be differential semimodules over R , and $f: M_1 \rightarrow M_2$ be a differential R -homomorphism. Then*

- 1) $Ker f$ is a differential subtractive subsemimodule of M_1 ;
- 2) $Im f$ is a differential subsemimodule of M_2 ;
- 3) If N is a differential subsemimodule of M_1 , then N^e is a differential subsemimodule of M_2 ;
- 4) If N is a differential subtractive ideal of M_2 , then N^c is a differential subtractive ideal of M_1 .

Proof. Straightforward.

Corollary 6. *Let M_1 and M_2 be differential semimodules. If $f: M_1 \rightarrow M_2$ is a differential semimodule homomorphism and N is a prime differential subtractive subsemimodule of M_2 , then $f^{-1}(N)$ is a prime differential subtractive subsemimodule of M_1 .*

As a consequence we obtain the following

Theorem 1. *Let M_1 and M_2 be differential semirings, and let $f: M_1 \rightarrow M_2$ be a differential semiring homomorphism. Then f induces a differential isomorphism $\bar{f}: M_1/Ker f \rightarrow Im f$ for which $\bar{f}(m + Ker f) = f(m)$ for all $m \in M_1$.*

4. Quasi-prime and differentially prime subsemimodules. In what follows semirings are considered to be commutative.

A differential subsemimodule N of the left differential semimodule M is called *quasi-prime* if it is maximal differential subsemimodule of M disjoint from some S -closed subset of M . A differential subsemimodule P of M is called *differentially prime* if for any $r \in R, m \in M, k \in \mathbb{N}_0, rm^{(k)} \in P$ follows $r \in (P : M)$ or $m \in P$.

Proposition 11. *If P is a differentially prime subtractive subsemimodule of M , then $(P : M)$ is a differentially prime subtractive ideal of R .*

Proof. $(P : M)$ is subtractive [4]. Let P be differentially prime subsemimodule of M , and let $a^{(k)}b^{(l)} \in (P : M)$ for some $a, b \in R, k, l \in \mathbb{N}_0$. Then $a^{(k)}b^{(l)}m \in P$ for all $m \in M$. Therefore, $a^{(k)}(b^{(l)}m) = a^{(k)}(bm)^{(s)} \in P$ follows $a \in (P : M)$ or $bm \in M$, by differential primeness of P . Hence, $b \in (P : M)$.

Theorem 2. *Let M be a differential semimodule satisfying the ascending chain condition for differential subsemimodules. A differential subsemimodule N of M is differentially prime if and only if N is a quasi-prime subsemimodule.*

Proof. Let N be a quasi-prime subsemimodule of M . Suppose there exist $r \in R, m \in M$ such that $[r] \cdot [m] \subseteq N, r \in R \setminus (N : M)$ and $m \in M \setminus N$. It

is clear that $N \subset N + [m]$ and $(N : M) \subset (N : M) + [r]$ and $(N : M) + [r]$ is a differential ideal of R , $N + [m]$ is a differential submodule of M . Since N is a maximal differential submodule satisfying $N \cap X = \emptyset$ for some S -closed subset X of M , for the differential ideal $(N : M) + [r]$ and the differential subsemimodule $N + [m]$ we have that $((N : P) + [r]) \cap S \neq \emptyset$ and $(N + [m]) \cap X \neq \emptyset$. Then $s \in (N : M) + [r]$ and $x \in N + [m]$ for $s \in S$, $x \in X$. Therefore, $sx^{(n)} \in X$ for some $n \in \mathbb{N}_0$, because X is an S -closed subset of M . Then $sx^{(n)} \in ((N : M) + [r]) \cdot (N + [m]) = (N : M)N + (N : M) \cdot [m] + [r] \cdot N + [r] \cdot [m] \subseteq N$. It follows that $sx^{(n)} \in X \cap N \neq \emptyset$, which contradicts to the fact that X is disjoint from N . Hence, N is differentially prime.

If N is a differentially prime subsemimodule of M , then $X = M \setminus N$ is a Sdm -system for some dm -system S of R . Since N is maximal differential subsemimodule not meeting $X = M \setminus N$, then it is quasi-prime.

5. Conclusions. In this article we study differential subsemimodules, quasi-prime and differentially prime subsemimodules. Namely, we give new examples of such subsemimodules, prove some of their properties. We also describe the interrelation between quasi-prime and differentially prime subsemimodules. The obtained results can be used in further study of differential semimodules.

References

1. Golan, J. S. (1999). Semirings and their Applications. *Kluwer Academic Publishers*.
2. Chandramouleeswaran, M., & Thiruvani, V. (2010). On derivations of semirings. *Advances in Algebra, 1*, 123–131.
3. Melnyk, I. (2016). On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math., 82*, 163-173.
4. Melnyk, I. (2020). On quasi-prime differential semiring ideals. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics, 2(37)*, 75-81. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).75-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).75-81).
5. Atani, R. E., & Atani, S. E. (2010). On subsemimodules of semimodules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica, 2(63)*. 20-30.
6. Khadjiev, Dj., & Çalhalp, F. (1996). On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings. *Tr. J. of Math., 4(20)*, 571-582.
7. Melnyk, I. (2008). Sdm -systems, differentially prime and differentially primary modules. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics, 16*, 110-118.
8. Melnyk, I. (2008). Differentially prime, quasi-prime and $\Delta - MP$ -modules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica, 3(58)*, 112-115.
9. Keigher, W. (1977). Prime differential ideals in differential rings. *Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press*, 239-249.
10. Keigher, W. F. (1978). Quasi-prime ideals in differential rings. *Houston J. Math., 4(3)*, 379-388.

Мельник І. О., Коляда Р. В., Мельник О. М. Деякі властивості диференціальних, квазіпервинних та диференціально-первинних піднапівмодулів

Поняття диференціювання напівкільця традиційно визначають як адитивне відображення, яке задовольняє правило Лейбніца, тобто відображення $\delta: R \rightarrow R$ називають диференціюванням напівкільця R , якщо $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ і $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для будь-яких $a, b \in R$. Поняття квазіпервинний ідеал було вперше введено в комутативних диференціальних кільцях, тобто комутативних кільцях, які розглядаються разом із заданим на них диференціюванням, як диференціальний ідеал, максимальний серед диференціальних ідеалів, які не перетинаються із деякою мультиплікативно-замкненою підмножиною кільця. Піднапівмодуль P напівмодуля M називають первинним, якщо для будь-якого ідеалу I напівкільця R та будь-якого під-

напівмодуля N напівмодуля M з $IN \subseteq P$ впливає $N \subseteq P$ або $I \subseteq (P : M)$. Диференціальний піднапівмодуль P напівмодуля M називають **диференціально-первинний піднапівмодуль**, якщо для будь-яких $r \in R$, $m \in M$, $k \in \mathbb{N}_0$ з $rm^{(k)} \in P$ впливає, що $r \in (P : M)$ або $m \in P$.

Ця стаття присвячена дослідженню понять **диференціальний піднапівмодуль**, **диференціально-первинний піднапівмодуль**, **квазіпервинний піднапівмодуль** в диференціальних напівмодулях (які означаються як напівмодулі разом із диференціюванням, заданому на них, яке узгоджується з відповідним диференціюванням напівкільця). Метою статті є дослідити деякі властивості таких піднапівмодулів, показати взаємозв'язки між **квазіпервинними піднапівмодулями** та **диференціально-первинними піднапівмодулями** у випадку диференціальних напівмодулів, що задовольняють умову обриву зростаючих ланцюгів диференціальних піднапівмодулів. Стаття складається з двох основних частин. У першій частині автор досліджує деякі властивості диференціальних піднапівмодулів та відповідних диференціальних ідеалів, а також наводить деякі приклади таких піднапівмодулів. У другій частині статті розглядаються ланцюги зв'язки, що існують між поняттями **квазіпервинний піднапівмодуль** та **диференціально-первинний піднапівмодуль**. Встановлено, що **диференціальний піднапівмодуль N напівмодуля M є диференціально-первинний піднапівмодуль** тоді і тільки тоді, коли N є **квазіпервинний піднапівмодуль** диференціального напівмодуля M , який задовольняє умову обриву зростаючих ланцюгів диференціальних піднапівмодулів.

Ключові слова: диференціювання напівмодуля, диференціювання напівкільця, диференціальний напівмодуль, диференціальне напівкільце, диференціальний ідеал, диференціальний піднапівмодуль, диференціально-первинний піднапівмодуль, квазіпервинний піднапівмодуль.

Список використаної літератури

1. Golan J. S. Semirings and their Applications. *Kluwer Academic Publishers*, 1999.
2. Chandramouleeswaran M., Thiruvani V. On derivations of semirings. *Advances in Algebra*, 2010. No. 1. P. 123-131.
3. Melnyk I. On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.* 2016. No. 82. P. 163-173.
4. Melnyk I. On quasi-prime differential semiring ideals. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 2020. No. 2(37). P. 75-81. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).75-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).75-81).
5. Atani R. E., Atani S. E. On subsemimodules of semimodules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica*, 2010. No. 2(63). P. 20-30.
6. Khadjiev Dj., Çallıalp F. On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings. *Tr. J. of Math.*, 1996. No. 4(20). P. 571-582.
7. Melnyk I. *Sdm*-systems, differentially prime and differentially primary modules. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics* 2008. No. 16. P. 110-118.
8. Melnyk I. Differentially prime, quasi-prime and $\Delta - MP$ -modules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica*, 2008. No. 3(58). P. 112-115.
9. Keigher W. Prime differential ideals in differential rings. *Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin*, Academic Press, 1977. P. 239-249.
10. Keigher W. F. Quasi-prime ideals in differential rings. *Houston J. Math.*, 1978. No. 4(3). P. 379-388.

Received 17.09.2021

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).68-80](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).68-80)**В. М. Петечук¹, Ю. В. Петечук²**

¹ Закарпатський інститут післядипломної педагогічної освіти,
доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій, доцент,
кандидат фізико-математичних наук

vasil.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5663-8789>

² Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
доцент кафедри математики та інформатики,
кандидат фізико-математичних наук

yuliia.petechuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3670-9671>

ГОМОМОРФІЗМИ ЛІНІЙНИХ ГРУП, ЩО МІСТЯТЬ НОРМАЛЬНІ ПІДГРУПИ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ТРАНСВЕКЦІЙ

У статті розглядаються розширені і стандартні описи гомоморфізмів груп $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 2$ над асоціативними кільцями R з 1.

Показано, що гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n, R) \triangleleft G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1 мають розширено стандартний опис, а при деяких обмеженнях стандартний опис на групах G і $E(n, R)$.

В роботі також описуються гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, що відображають її у групу $GL(m, K)$, $m \geq 2$, які є мономорфізмами (зокрема такими є ізоморфізми) або $E(n, K) \subseteq LE(n, R)$ над асоціативними кільцями R і K з 1.

Показано, що такі гомоморфізми допускають стандартний опис на групі $E(n, R)$.

Ключові слова: асоціативні кільця з 1, гомоморфізми з умовою (*), розширені і стандартні описи гомоморфізмів лінійних груп.

1. Вступ. Стаття присвячена вивченню гомоморфізмів матричних груп, які містять підгрупи елементарних трансвекцій над асоціативними кільцями з 1.

Вводиться поняття стандартного опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями з 1. Розглядається гомоморфізм A_0 групи $GL(n, R)$ у групу автоморфізмів $GL(W)$ лівого (необов'язково вільного) K -модуля W над довільними асоціативними кільцями R і K з 1, який визначається за правилом

$$A_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}(x)^{-1}(1 - e) + e_1] g, \quad x \in GL(n, R),$$

де L і P – ліві K -модулі, $g : W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ – ізоморфізм K -модулів, $\bar{\delta}$ –

кільцевий гомоморфізм і $\bar{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n , індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \rightarrow \text{End}L$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \rightarrow \text{End}L$ відповідно в кільце $(\text{End}L)_n$, 1 – одиниця і e – центральний ідемпотент кільця $\text{End}L$, а e_1 – одиниця кільця $\text{End}P$, яка ортогональна з елементами кільця $\text{End}L$.

За означенням гомоморфізм $A : G \rightarrow GL(W)$ групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$, якщо A збігається з A_0 на цій групі.

Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda: G \rightarrow GL(W)$ групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ допускає розширено стандартний опис на групі G , якщо існує гомоморфізм $\gamma: G \rightarrow GL(W)$ такий, що $\Lambda(g) = \gamma(g) \Lambda_0(g)$, $g \in G$, де e – центральний ідемпотент кільця $EndL$ і елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda_0(G)$.

Якщо при цьому елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами всієї групи $\Lambda(g)$, то будемо казати, що Λ допускає стандартний опис на групі G .

У даній статті робиться опис гомоморфізмів з умовою (*) групи $E(n, R) \triangleleft G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1. Показано, що вони допускають розширено стандартний опис на групі G , а в окремих випадках стандартний опис на групі G .

Гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ над довільними асоціативними кільцями R з 1 описані в [1, 3, 4]. Вони допускають стандартний опис на підгрупі $E(n, R)$.

У зв'язку з цим виникає природне запитання про дію таких гомоморфізмів на всій групі G . У загальному випадку ця задача повністю не розв'язана, хоча існує багато окремих випадків для яких це можна зробити. Для відповіді на поставлене запитання використовуються співвідношення між елементами групи G і елементами її підгрупи $E(n, R)$. У всіх відомих випадках у тій або іншій формі використовується те, що підгрупа $E(n, R)$ є нормальною підгрупою групи G . У даній статті робиться опис гомоморфізмів з умовою (*) підгруп повної лінійної групи над асоціативними кільцями, в яких підгрупи елементарних трансвекцій є нормальними.

В роботі також описуються гомоморфізми з умовою (*) групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ у групу $GL(m, K)$, $m \geq 2$, які є мономорфізмами або образи групи $E(n, R)$ яких містять підгрупу $E(m, K)$ над асоціативними кільцями R і K з 1.

Показано, що такі гомоморфізми допускають стандартний опис на групі $E(n, R)$, в якому $P = 0$.

2. Загальні поняття і твердження. Нехай V і W – ліві K -модулі, $g: W \rightarrow V$ ізоморфізм K -модулів, $V = gW$. Ізоморфізм $i_g: GL(W) \rightarrow GL(V)$ називається внутрішнім ізоморфізмом, якщо він індукується ізоморфізмом g за правилом $i_g(x) = gxg^{-1}$, де x – довільний елемент групи $GL(W)$.

Твердження 1. *Ізоморфізм g індукує ізоморфізм*

$$g^{-1}: V \rightarrow W, \quad i_{g^{-1}}: GL(V) \rightarrow GL(W)$$

і мають місце рівності $i_g i_{g^{-1}} = 1$, $i_{g^{-1}} i_g = 1$, $i_{g^{-1}} = (i_g)^{-1}$.

Доведення випливає із означення внутрішнього ізоморфізма.

Нехай R – асоціативне кільце з 1, R^* – група оборотних елементів кільця R , R_n – кільце матриць $n \times n$ над R , $n \geq 2$, $GL(n, R) = R_n^*$ – повна лінійна (матрична) група оборотних $n \times n$ матриць над кільцем R .

Означення 1. *Відображення δ кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим гомоморфізмом, якщо $\delta(0) = 0$,*

$$\delta(r_1 + r_2) = \delta(r_1) + \delta(r_2), \quad \delta(r_1 r_2) = \delta(r_1) \delta(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R .

Означення 2. Відображення ν кільця R в асоціативне кільце R_1 з 1 називається кільцевим антигомоморфізмом, якщо $\nu(0) = 0$,

$$\nu(r_1 + r_2) = \nu(r_1) + \nu(r_2), \quad \nu(r_1 r_2) = \nu(r_1) \nu(r_2)$$

для довільних елементів r_1, r_2 кільця R .

Якщо $\delta : R \rightarrow R_1$ – кільцевий гомоморфізм і $\nu : R_1 \rightarrow R_2$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu\delta : R \rightarrow R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом. Аналогічно, якщо $\nu : R \rightarrow R_1$ – кільцевий антигомоморфізм і $\delta : R_1 \rightarrow R_2$ – кільцевий гомоморфізм, то $\delta\nu : R \rightarrow R_2$ є кільцевим антигомоморфізмом.

Означення 3. Нехай R^0 означає кільце R у якому задана операція множення за правилом $x \circ y = yx$, де x, y – довільні елементи кільця R . Кільце R^0 називається опозитом кільця R .

Відображення $\nu_0 : R \rightarrow R^0$, задане за правилом $\nu_0(r) = r$, $r \in R$, є кільцевим антигомоморфізмом R в R^0 .

Якщо $\delta : R \rightarrow R_1$ – кільцевий гомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \rightarrow R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \rightarrow R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм. І, навпаки. Якщо $\delta : R \rightarrow R_1$ – кільцевий антигомоморфізм, $\nu_0 : R_1 \rightarrow R_1^0$ – кільцевий антигомоморфізм, то $\nu_0\delta : R \rightarrow R_1^0$ – кільцевий гомоморфізм.

Звуження кільцевого гомоморфізму на мультиплікативну групу кільця породжує груповий гомоморфізм, а кільцевий антигомоморфізм породжує груповий антигомоморфізм мультиплікативної групи кільця.

Груповий антигомоморфізм породжує груповий гомоморфізм, якщо кожному елементу групи поставити у відповідність елемент, який обернений до його антигомоморфного образу.

Кільцевий гомоморфізм $\delta : R \rightarrow R_1$ індукує кільцевий гомоморфізм $\bar{\delta} : R_n \rightarrow (R_1)_n$ за правилом $\bar{\delta}(r_{ij}) = (\delta r_{ij})$, де $r_{ij} \in R$, $1 \leq i, j \leq n$.

Кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \rightarrow R_1$ індукує кільцевий антигомоморфізм $\bar{\nu} : R_n \rightarrow (R_1)_n$ за правилом $\bar{\nu}(r_{ij}) = (\nu r_{ji}) = \tau(\nu r_{ij})$, де τ – означає класичне транспонування.

Зокрема, кільцевий гомоморфізм $\delta : R \rightarrow R_1$ індукує груповий гомоморфізм $\bar{\delta} : GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_1)$ за правилом $\bar{\delta}g = (\bar{\delta}g)$, $g \in GL(n, R)$, а кільцевий антигомоморфізм $\nu : R \rightarrow R_1$ груповий гомоморфізм $\bar{\nu} : GL(n, R) \rightarrow GL(n, R_1)$ за правилом $\bar{\nu}g = (\bar{\nu}g)^{-1}$, $g \in GL(n, R)$.

Гомоморфізми $\bar{\delta}$ і $\bar{\nu}$ прийнято називати кільцевим і контраградієнтним гомоморфізмами. Вони отримуються заміною елементів матриць групи $GL(n, R)$ на їх образи відносно гомоморфізмів $\bar{\delta}$ і $\bar{\nu}$ відповідно.

Нехай 1 – одиниця, e – ідемпотент кільця R_1 і e_1 – деякий ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця R_1 . Відображення A_e групи $GL(n, R)$ визначається за правилом

$$A_e(x) = \bar{\delta}xe + \bar{\nu}x^{-1}(1 - e) + e_1, \quad x \in GL(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n, R)$ у групу $diag(GL(n, R_1), 1)$, якщо ідемпотент e комутує з елементами кільця $\delta R, \nu R$.

Гомоморфізм A_e прийнято називати контраградієнтно-кільцевим гомоморфізмом.

Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий (не обов'язково вільний) K -модуль, L та P – ліві K -модулі, $g : W \rightarrow \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ – ізоморфізм K -модулів,

$\bar{\delta}$ – кільцевий гомоморфізм і $\bar{\nu}$ – кільцевий антигомоморфізм кільця R_n , індуковані кільцевим гомоморфізмом $\delta : R \rightarrow \text{End}L$ і кільцевим антигомоморфізмом $\nu : R \rightarrow \text{End}L$ відповідно в кільце $(\text{End}L)_n$, 1 – одиниця і e – ідемпотент кільця $\text{End}L$, а e_1 – одиниця кільця $\text{End}P$, яка ортогональна з елементами кільця $\text{End}L$.

Відображення Λ_0 групи $GL(n, R)$ визначається за правилом

$$\Lambda_0(x) = g^{-1} [\bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}(x)^{-1}(1 - e) + e_1] g, \quad x \in GL(n, R)$$

і є гомоморфізмом групи $GL(n, R)$ у групу $g^{-1} \text{diag}(GL(n, \text{End}L), 1) g \subseteq GL(W)$, якщо e комутує з елементами кілець $\delta R, \nu R$.

Одиничний елемент і центральний ідемпотент e кільця $\text{End}L$ породжують одиничний елемент і центральний ідемпотент $e \cdot 1$ кільця $(\text{End}L)_n$, які також будемо позначати 1 і буквою e відповідно.

Якщо $P = 0$, то ідемпотент e_1 відсутній. Якщо в Λ_e кільце R_1 є кільцем $\text{End}L$, то $\Lambda_0(x) = g^{-1} \Lambda_e(x) g$, де $x \in GL(n, R)$. Таким чином $\Lambda_0 = i_{g^{-1}} \Lambda_e$.

Позначимо через e_{ij} матрицю кільця R_n , у якої на місці (i, j) стоїть одиниця, а на інших місцях нулі. Очевидно, що $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$, де δ_{jk} – символ Кронекера. Одиничну матрицю кільця R_n будемо позначати 1 або E .

Означення 4. Елементи $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, де $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$, e_{ij} – стандартна матрична одиниця, будемо називати елементарними трансвекціями, а діагональні елементи $d_i = 1 - 2e_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, елементарними інволюціями, трансвекції $t_{ij}(1)$ будемо називати одиничними елементарними трансвекціями.

Оскільки δ і ν – кільцеві гомоморфізм і антигомоморфізм відповідно, то $\delta(1) = 1$, $\nu(1) = 1$ і відображення Λ_0 на одиничних елементарних трансвекціях має вигляд

$$\Lambda_0 t_{ij}(1) = g^{-1} [t_{ij}(1)e + t_{ji}(-1)(1 - e) + e_1] g, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Нехай $E(n, R)$ – підгрупа групи $GL(n, R)$, яка породжена всіма елементарними трансвекціями $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Означення 5. У довільній групі G елемент $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ будемо називати комутатором елементів g_1, g_2 , а елемент $[g_1, \dots, g_t] = [[g_1, \dots, g_{t-1}], g_t]$ – комутатором довжини t елементів g_1, \dots, g_t групи G , де $t > 2$.

Мають місце рівності $d_k^2 = 1$, $d_k e_{ij} d_k^{-1} = -e_{ij}$, якщо $i \neq j$, $k \in \{i, j\}$. В інших випадках d_k комутує з e_{ij} . Тому $[d_k, t_{ij}(r)] = t_{ij}(-2r)$, якщо $k \in \{i, j\}$, $r \in R$. В решті випадків d_k комутує з $t_{ij}(r)$.

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що має місце

Твердження 2. Виконуються наступні матричні комутаторні формули

$$[t_{ik}(r_1), t_{lj}(r_2)] = t_{ij}(\delta_{kl} r_1 r_2),$$

де $1 \leq k \neq i$, $i \neq j$, $l \neq j \leq n$ – довільні числа, δ_{kl} – символ Кронекера, r_1, r_2 – довільні елементи кільця R . Зокрема, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, $[t_{ik}(r), t_{kj}(1)] = t_{ij}(r)$, де $1 \leq i, j, k \leq n$ – попарно різні довільні натуральні числа, $r \in R$.

Нехай K^0 – опозит кільця K . Як відмічалось вище відображення $\nu : K \rightarrow K^0$, яке визначається за правилом $\nu_0(k) = k$, є антиізоморфізмом кілець K і K^0 , $\nu_0^2 = 1$. Антиізоморфізм ν_0 прийнято називати елементарним антиізоморфізмом.

Довільний антиізоморфізм $\nu = \nu_0(\nu_0\nu)$ є добутком кільцевого гомоморфізму $\nu_0\nu$ і елементарного антиізоморфізму ν_0 .

Відмітимо, що кільцевий гомоморфізм $\delta : R \rightarrow K$ індукує кільцевий гомоморфізм $\delta : R \rightarrow Ke$, де e – центральний ідемпотент кільця K , який також будемо позначати через δ . Аналогічно кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \rightarrow K$, $\nu_0 : K \rightarrow K$ індукують кільцеві антигомоморфізми $\nu : R \rightarrow K(1 - e)$, $\nu_0 : K \rightarrow K(1 - e)$, які також будемо позначати ν і ν_0 відповідно.

У цих позначеннях сума $\delta + \nu_0\nu$ кільцевих гомоморфізмів δ і $\nu_0\nu$ є кільцевим гомоморфізмом і її можна позначати через δ . Гомоморфізм A_e в такому разі діє за правилом

$$A_ex = \bar{\delta}(x)e + \bar{\nu}_0(\bar{\delta}(x))^{-1}(1 - e) + e_1,$$

де x – довільна матриця групи $GL(n, R)$, e – ідемпотент, який комутує з елементами кільця δR , а e_1 – ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця δR .

Надалі, будемо вважати, що гомоморфізм A_e визначений саме в такий спосіб. Зокрема,

$$A_e t_{ij}(r) = t_{ij}(\delta r)e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r)(1 - e) + e_1,$$

де r – довільний елемент кільця R , e – ідемпотент, який комутує, а e_1 – ідемпотент, який ортогональний з елементами кільця δR .

Антиізоморфізм $\nu_0 : K \rightarrow K^0$ індукує антиізоморфізм $\bar{\nu}_0 : K_n \rightarrow (K^0)_n$ і, як наслідок, антиізоморфізм $\bar{\nu}_0$ груп $GL(n, K)$ і $GL(n, K^0)$. Останній прийнято називати елементарно-контраградієнтним. Він утворюється із нетотожного (єдиного) автоморфізма графа типу A_n , що зберігає кути, тобто який пару (i, j) відображає у пару (j, i) .

Аналогічно кільцевий гомоморфізм $\bar{1} : K_n \rightarrow K_n$ утворюється з тотожного відображення $K \rightarrow K$ і тотожного автоморфізма графа типу A_n , який, зрозуміло, зберігає кути графа.

Таким чином, з точністю до внутрішнього ізоморфізму і кільцевого гомоморфізму, під стандартними неединичними гомоморфізмами алгебраїчної групи типу A_n , розуміють пов'язані з ідемпотентами e і $(1 - e)$ гомоморфізми (тотожний і контраградієнтний), які індуковані автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

Нагадаємо, що систему центральних ортогональних ідемпотентів кільця називають повною, якщо їх сума дорівнює одиниці.

Тому у більш загальній ситуації стандартними вважають ті неединичні гомоморфізми алгебраїчної групи, які, з точністю до внутрішнього ізоморфізму і кільцевого гомоморфізму, при відповідних ідемпотентах повної системи центральних ортогональних ідемпотентів утворюють гомоморфізми алгебраїчної групи, які породжені автоморфізмами графа, що зберігають його кути.

Гомоморфізми такого типу можна вважати стандартними навіть над довільними асоціативними кільцями з одиницями. У більш широкому розумінні поняття стандартних гомоморфізмів запропонував Ж. Тітс [11].

Подібним чином влаштовані гомоморфізми груп Шевалльє над комутативними кільцями з 1. Найбільш істотні результати в цьому напрямку отримані Р. Стейнбергом [12], Дж. Є. Хамфрі [13], Є. Абе [14], О. І. Буніною [15].

Нехай $A : G \rightarrow GL(W)$ – гомоморфізм з умовою (*), який з точністю до

ізоморфізму визначає розклад модуля W у пряму суму n ізоморфних між собою підмодулів, які ізоморфні модулю L і деякого підмодуля, який ізоморфний модулю P , $W_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$, де L береться n раз і $g : W \rightarrow W_g$ – відповідний

ізоморфізм. Внутрішній ізоморфізм $i_g : GL(W) \rightarrow GL(W_g)$ у цьому випадку будемо позначати Λ_g .

За означенням $\Lambda_0 = \Lambda_g^{-1} \Lambda_e$. У [1,3] доведено, що $\Lambda_g \Lambda = \Lambda_e$. Тому $\Lambda = \Lambda_g^{-1} \Lambda_e = \Lambda_0$ на групі $E(n, R)$ відносно кільцевого гомоморфізма $\delta : R \rightarrow \text{End}L$ і центрального ідемпотента e кільця $\text{End}L$.

3. Означення розширено стандартного і стандартного описів гомоморфізмів.

Означення 6. Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$, якщо Λ збігається з Λ_0 на цій групі і e – центральний ідемпотент кільця $\text{End}L$.

Означення 7. Нехай R – асоціативне кільце з 1. Будемо казати, що гомоморфізм $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ допускає розширено стандартний опис на групі G , якщо існує гомоморфізм $\gamma : G \rightarrow GL(W)$ такий, що $\Lambda(x) = \gamma(x) \Lambda_0(x)$, $x \in G$, e – центральний ідемпотент кільця $\text{End}L$ і елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda_0(G)$. Якщо при цьому елементи групи $\gamma(G)$ попарно комутують з елементами групи $\Lambda(G)$, то будемо казати, що Λ допускає стандартний опис на групі G .

Зауважимо, що якщо Λ допускає стандартний опис на групі $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, то $\gamma(G)$ – комутативна група і Λ збігається з Λ_0 на групі $E(n, R)$. Це випливає з рівності

$$\begin{aligned} \Lambda t_{ij}(r) &= [\Lambda t_{ik}(r), \Lambda t_{kj}(1)] = [\gamma(t_{ik}(r)) \Lambda_0 t_{ik}(r), \gamma(t_{kj}(1)) \Lambda_0 t_{kj}(1)] = \\ &= [\Lambda_0 t_{ik}(r), \Lambda_0 t_{kj}(1)] = \Lambda_0 t_{ij}(r), \end{aligned}$$

де $1 \leq i, j, k \leq n$ – різні числа, $r \in R$.

Тому означення 7 стандартного опису гомоморфізмів на групі $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ цілком узгоджується із означенням 6.

4. Гомоморфізми з умовою (*). Розглянемо гомоморфізми з умовою (*) підгруп групи $GL(n, R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1, які містять нормальну підгрупу $E(n, R)$. Зокрема це так, якщо R – довільне комутативне кільце з 1 [16].

Означення 8. Будемо казати, що гомоморфізм Λ задовольняє умову (*), якщо для довільного ненульового нільпотентного елемента $t \in \text{End}W$, $t^2 = 0$ існують натуральні числа s_1 і s_2 , які оборотні в K і $A \in G$ такі, що $\Lambda A = 1 + s_1 t$ і з рівності $\Lambda A \cdot \Lambda B = \Lambda B \cdot \Lambda A$, $B \in G$ випливає, що $A^{s_2} B = B A^{s_2}$.

Зауважимо, що коли мова йде про нільпотентний елемент t , то передбачається, що він існує. Тому гомоморфізми з умовою (*) є неодиначними.

Ізоморфізми задовольняють умову (*), якщо покласти $s_1 = s_2 = 1$ і скористатися тим, що $1 + t$ є оборотним елементом.

Якщо в означенні гомоморфізма з умовою (*) ΛA комутує із скінченною кількістю елементів ΛB_i , $B_i \in G$, $1 \leq i \leq t$, то існує натуральне число s_2 , яке оборотне в K таке, що A^{s_2} комутує з B_1, \dots, B_t . Аналогічно доводиться, що

замість одного елемента $A \in G$ можна розглядати скінченну кількість елементів групи G .

Відмітимо, що якщо гомоморфізм Λ_0 задовольняє умову (*), то кільця δR і νR співпадають з кільцем $EndL$.

5. Гомоморфізми з умовою (*) груп, які містять нормальну підгрупу елементарних трансвекцій.

Теорема 1. *Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, W – лівий K -модуль, $E(n, R) \triangleleft G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, $\Lambda : G \rightarrow GL(W)$ – довільний гомоморфізм з умовою (*). Тоді Λ допускає розширено стандартний опис на групі G .*

Якщо комутант $G' = E(n, R)$, то Λ допускає стандартний опис на групі G .

Доведення. Нехай h – довільний елемент групи G . За умовою група $E(n, R)$, $n \geq 3$ є нормальною підгрупою групи G . Тому

$$ht_{ij}(r)h^{-1} = \prod t_{kl}(r_{kl}),$$

де $h \in G$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$, $r_{kl} \in R$ і добуток береться по $1 \leq k \neq l \leq n$.

Як доведено в [3, 4] існує ізоморфізм $g : W \rightarrow W_g$, $W_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ такий, що Λ збігається з Λ_0 на підгрупі $E(n, R)$ групи G . Тому

$$\begin{aligned} \Lambda h \Lambda t_{ij}(r) \Lambda h^{-1} &= \Lambda (ht_{ij}(r)h^{-1}) = \\ &= \prod \Lambda t_{kl}(r_{kl}) = \prod \Lambda_0 t_{kl}(r_{kl}) = \Lambda_0 (ht_{ij}(r)h^{-1}) = \Lambda_0(h) \Lambda t_{ij}(r) (\Lambda_0(h))^{-1}. \end{aligned}$$

Тим самим доведено, що елементи $\gamma(h) = \Lambda_0(h)^{-1} \Lambda(h)$ комутують із елементами $\Lambda t_{ij}(r)$, а елементи $\Lambda_g \gamma(h)$ комутують із елементами $\Lambda_g \Lambda t_{ij}(r) = \Lambda_e t_{ij}(r)$ для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$ і $r \in R$. Зрозуміло, що γ – відображення групи G у групу $GL(W)$ і $\Lambda(h) = \Lambda_0(h) \gamma(h)$, $h \in G$.

Розглянемо відображення $\chi : G \rightarrow GL(W_g)$, яке задане за правилом $\chi(h) = \Lambda_g \gamma(h)$ для всіх $h \in G$. Оскільки елементи $\chi(h)$ комутують із елементами $\Lambda_g \Lambda t_{ij}(r) = \Lambda_e t_{ij}(r)$, то для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$ має місце рівність

$$\begin{aligned} \chi(h) (t_{ij}(\delta r) e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r) (1 - e) + e_1) &= \\ = (t_{ij}(\delta r) e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r) (1 - e) + e_1) \chi(h). \end{aligned}$$

З неї випливає, що $\chi(h)$ комутує з формальними матрицями

$$\text{diag}((\delta r e_{ij}) e - (\delta r e_{ji}) (1 - e), 0)$$

для всіх $1 \leq i \neq j \leq n$, $r \in R$. Тому

$$\chi(h) = \chi_1(h) e + \chi_2(h) (1 - e) + \chi_3(h) e_1,$$

де $\chi_1(h)$ і $\chi_2(h)$ – формальні скалярні матриці, які комутують із δr для всіх $r \in R$.

Оскільки Λ – гомоморфізм із умовою (*), то $\delta r = EndL$ і $\chi_1(h)$, $\chi_2(h)$ містяться в центрі кільця $(EndL)_n$. Тому елементи $\chi(h)$ попарно комутують із елементами

$$\Lambda_e(h_1) = \bar{\delta}(h_1) e + \bar{\nu}_0 \left(\bar{\delta}(h_1)^{-1} \right) (1 - e) + e_1$$

для довільних елементів h і h_1 групи G . Отже, елементи $\chi(G)$ попарно комутують із елементами групи $\Lambda_e(G)$, а елементи $\Lambda_{g^{-1}}\chi(G) = \gamma(G)$ попарно комутують із елементами групи $\Lambda_{g^{-1}}\Lambda_e(G) = \Lambda_0(G)$. Оскільки Λ , Λ_0 – гомоморфізми групи G і $\Lambda(h) = \gamma(h)\Lambda_0(h)$, $h \in G$, то $\gamma \in$ гомоморфізмом групи G . Тим самим доведено, що Λ допускає розширено стандартний опис на групі G .

Зрозуміло, що в такому разі відображення $\chi : G \rightarrow GL(W_g)$ є гомоморфізмом групи G . Тому відображення $\chi_3 : G \rightarrow GL(P)$ також є гомоморфізмом групи G . З рівності $\chi_3 E(n, R) = 1$ випливає, що гомоморфізм χ_3 індукує груповий гомоморфізм $\chi_3 : G/E(n, R) \rightarrow GL(P)$.

Якщо комутант G' групи G міститься в групі $E(n, R)$, то група $G/E(n, R)$ – комутативна. Це означає, що елементи $\chi_3(h)$ і $\chi_3(h_1)$, а значить і елементи $\chi(h)$ і $\chi(h_1)$, а також елементи $\gamma(h)$ і $\gamma(h_1)$ комутують для всіх елементів h і h_1 групи G .

Тим самим доведено, що $\gamma(G)$ – комутативна група, елементи якої попарно комутують з елементами $\Lambda(G)$. Тому Λ допускає стандартний опис на групі G .

З комутаторних формул випливає

Твердження 3. *Нехай G – група, яка породжена групою оборотних діагональних матриць $D(n, R)$ і групою $E(n, R)$. Тоді комутант групи G збігається із групою $E(n, R)$.*

Згідно з теоремою 1 гомоморфізми з умовою (*) групи $D(n, R) \cdot E(n, R)$, $n \geq 4$ над асоціативними кільцями R з 1 допускають стандартний опис на цій групі. Зокрема, якщо R – локальне кільце, то група $G(n, R)$, $n \geq 2$ збігається із групою $D(n, R) \cdot E(n, R)$.

Відмітимо, що якщо в теоремі 1 $P = 0$, то Λ також допускає стандартний опис на групі G . Адже, в цьому випадку елементи груп $\gamma(G)$ і $\Lambda(G)$ попарно комутують між собою.

Означення 9. *Нехай R – асоціативне кільце з 1, G – підгрупа групи $G(n, R)$, $n \geq 2$. Автоморфізм Λ групи G називається гомотетією, якщо існує гомоморфізм $\gamma : G \rightarrow \xi(R)^*$ такий, що $\Lambda(g) = \gamma(g)g$ для всіх $g \in G$, де $\xi(R)$ – центр кільця R .*

6. Автоморфізми лінійних і проективних груп над комутативними кільцями.

Теорема 2. *Нехай R – комутативне кільце з 1, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$. Тоді довільний автоморфізм групи G є добутком стандартних автоморфізмів: внутрішнього, кільцевого (розширено-кільцевого при $n = 3$), контраградієнтного і гомотетії.*

Доведення. Згідно з теоремою 1 опис автоморфізмів Λ групи $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, з точністю до стандартних автоморфізмів: внутрішнього, розширено-кільцевого, контраградієнтного зводиться до випадку, коли $\Lambda|_{E(n, R)} = 1$.

Враховуючи, що $E(n, R)$ нормальна підгрупа групи $GL(n, R)$ одержуємо, що $\Lambda(g)e\Lambda(g)^{-1} = \Lambda(geg^{-1}) = geg^{-1}$ для довільних $g \in G$ і $e \in E(n, R)$. Отже, елементи $\gamma(g) = g^{-1}\Lambda(g)$ комутують із усіма елементами групи $E(n, R)$ і тому є скалярними матрицями.

Тим самим, доведено, що $\Lambda(g) = \gamma(g)g$ для всіх $g \in G$, де γ – гомоморфізм групи G у групу R^* . Отже, Λ – гомотетія.

Багато теорем про гомоморфізми матричних груп над кільцями мають місце і у випадку проективних груп [8, 17]. Нагадаємо, що згідно з означенням, якщо

G – підгрупа групи $GL(n, R)$, то $PG = G/G \cap \xi GL(n, R)$ – проективна група, де $\xi GL(n, R)$ – центр групи $GL(n, R)$. У роботі [5] доведено, що над комутативними кільцями R і K з 1 ізоморфізми $\Lambda : PG \rightarrow PH$, де $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$, $E(m, K) \subseteq H \subseteq GL(m, K)$, $m \geq 3$ є добутком стандартних ізоморфізмів (при $n = m = 3$ в розширеному сенсі).

Зокрема, якщо R – комутативне кільце з 1 і Λ – автоморфізм групи PG , $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 3$, то Λ індукує автоморфізм групи $PE(n, R)$, який є стандартним у розширеному сенсі і продовжується до автоморфізму групи PG . Тому, з точністю до стандартних автоморфізмів, можна вважати, що автоморфізм Λ є тотожним на групі $PE(n, R)$. Як і вище, доводиться, що Λ – гомотетія. Це означає, що автоморфізм Λ з точністю до стандартних автоморфізмів є тотожним на групі PG .

Зрозуміло, що вищенаведені міркування придатні і у тих випадках, коли $E(n, R) \triangleleft G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 2$ і Λ – автоморфізм групи PG , який тотожний на групі $PE(n, R)$ над довільним асоціативним кільцем R з 1. Як і вище, тоді Λ – тотожний автоморфізм на всій групі PG . Інформація про кільця R , для яких група $E(n, R)$ є нормальною підгрупою в групі $GL(n, R)$, викладена в [10].

Однак, розраховувати на те, що з тотожності автоморфізму Λ групи PG , $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ на підгрупі $PE(n, R)$ впливає тотожність автоморфізму Λ на всій групі PG над довільним асоціативним кільцем R з 1, не доводиться. Адже, як впливає із роботи В.М. Герасімова [18] існують асоціативні кільця R з 1 над якими група $E(n, R)$ не є нормальною підгрупою групи $GL(n, R)$ і існують нетотожні автоморфізми групи $PGL(n, R)$, які тотожні на всій групі $PE(n, R)$.

Однак, клас асоціативних кілець R з 1 для яких з тотожності автоморфізмів групи PG , $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$ на підгрупі $PE(n, R)$ впливає їхня тотожність на всій групі PG , досить широкий. Як впливає із робіт І. З. Голубчика і О. В. Міхальова [6], І. З. Голубчика [9] це вірно, якщо R – PI -кільцем або R є двостороннім порядком у регулярному в змісті Ноймана кільці.

Ізоморфізми матричних груп $GL(n, R)$, $n \geq 4$ в групу $GL(m, K)$, $m \geq 2$ над асоціативними кільцями R і K з 1 описав І. З. Голубчик [9]. Виявилось, що вони допускають стандартний опис на групі $E(n, R)$.

7. Гомоморфізми з умовою (*) в частинних випадках. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, $\Lambda : G \rightarrow GL(m, K) \cong GL(W)$ гомоморфізм з умовою (*), W – лівий K -модуль розміру m .

Нехай C_1 – підгрупа групи $E(n, R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{in}(1)$, $1 \leq i < n$, $t_{nj}(1)$, $1 < j < n$, а C_2 – підгрупа групи $E(n, R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{in}(1)$, $1 < i < n$, $t_{nj}(1)$, $1 \leq j < n$.

Нехай C – підгрупа групи $E(n, R)$, яка породжена одиничними елементарними трансвекціями $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

Виконується таке твердження.

Твердження 4. Централізатори $C_G(C_1)$ і $C_G(C_2)$ збігаються з централізатором $C_G(C)$ і складаються із скалярних (не обов'язково попарно комутативних) матриць групи G .

Доведення отримується безпосередньою перевіркою, яка впливає із вигляду централізаторів матричних одиниць.

Теорема 3. Нехай R і K – асоціативні кільця з 1, $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$, W – лівий вільний K -модуль, $\dim W = m$, $m \geq 2$, $\Lambda : G \rightarrow GL(W) \cong GL(m, K)$ – гомоморфізм з умовою (*). Якщо Λ є мономорфізмом (такими є ізоморфізми) або $E(n, K) \subseteq \Lambda E(n, R)$, то Λ допускає стандартний опис на групі $E(n, R)$ в якому підмодуль $P = 0$.

Доведення. Згідно з роботами [3, 4] гомоморфізми з умовою (*) мають стандартний опис на групі $E(n, R)$. Це означає, що існує ізоморфізм $g : W \rightarrow W_g$, де $W_g = \underbrace{L \oplus \dots \oplus L}_n \oplus P$ такий, що $L \neq 0$, $\delta : R \rightarrow \text{End} L$ – епіморфізм і

$$\Lambda t_{ij}(r) = g^{-1} (t_{ij}(\delta r) e + t_{ji}(-\nu_0 \delta r) (1 - e) + e_1) g,$$

e – центральний ідемпотент кільця $\text{End} L$, e_1 – ідемпотент кільця $\text{End} P$, який ортогональний з елементами кільця $\text{End} L$.

Нехай x – довільний елемент із $\text{Hom}(P, L)$.

Згідно з умовою існують натуральні числа s_1, s_2, s'_1, s'_2 , які оборотні в кільці K і матриці h, h' групи G такі, що

$$\Lambda h = g^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 & s_1 e x \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g \quad \text{і} \quad \Lambda h' = g^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 & s'_1 (1 - e) x \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} g$$

і матриці $h^{s_2}, (h')^{s'_2}$ комутують з елементами груп C_1 і C_2 відповідно. Оскільки централізатори $C_G(C_1)$ і $C_G(C_2)$ співпадають із централізатором $C_G(C)$, то $h^{s_2}, (h')^{s'_2}$ комутують з одиничними елементарними трансвекціями групи C . Тому $\Lambda h^{s_2}, \Lambda (h')^{s'_2}$ комутують з елементами групи ΛC і $s_1 s_2 e x = s'_1 s'_2 (1 - e) x = 0$. В такому разі $e x = (1 - e) x = 0$, і, як наслідок, $x = 0$, $\text{Hom}(P, L) = 0$. Аналогічно доводиться, що $\text{Hom}(L, P) = 0$. Тому

$$K_m = g^{-1} \text{diag}((\text{End} L)_n, \text{End} P) g, E_m = g^{-1} \text{diag}(E_n, 1) g.$$

Елемент $g^{-1} \text{diag}(0, 1) g$ належить центру кільця K_m , а тому має вигляд λE_m , де $\lambda^2 = \lambda$ – елемент центра кільця K .

Аналогічно елемент $g^{-1} \text{diag}(E_n, 0) g$ також належить центру кільця K_m і має вигляд $(1 - \lambda) E_m$. Окрім цього,

$$\Lambda E(n, R) \subseteq (1 - \lambda) K_m + \lambda E_m.$$

Тому трансвекції $t_{ij}(\lambda K)$, $1 \leq i \neq j \leq m$ комутують з елементами групи $\Lambda E(n, R)$.

За умовою (*) прообрази деяких степенів елементів $t_{ij}(\lambda)$ існують і комутують із скінченною кількістю елементів групи $E(n, R)$ (наприклад, $t_{ij}(1)$, $1 \leq i \neq j \leq m$), а тому є скалярними матрицями. Однак, з цього не випливає, що ці скалярні матриці комутують між собою.

Якщо ж накласти додаткову умову на Λ , з якої випливає, що деякі степені трансвекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ з показниками степенів, які є оборотними елементами в кільці K комутують між собою, то $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$ і Λ має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Такою додатковою умовою може бути, наприклад, вимога, щоб гомоморфізм з умовою (*) був мономорфізмом. Адже, тоді деякі степені прообразів, які існують завдяки умові (*), трансекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$, з показниками степенів, які є оборотними елементами в кільці K , комутують з елементами групи $E(n, R)$, а тому є центральними скалярними матрицями, які комутують між собою. Це означає, що відповідні степені трансекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ комутують.

Тому A має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Якщо накласти іншу додаткову вимогу $E(m, K) \subseteq AE(n, R)$, то трансекції $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ належать групі $AE(n, R)$. Оскільки кожна з трансекцій $t_{ij}(\lambda)$ і $t_{ji}(\lambda)$ комутує з елементами групи $AE(n, R)$, то вони комутують між собою. Це означає, що A має також стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

Твердження теореми 3 залишається правильним і в тому випадку, якщо вимагати, щоб хоча б одна трансекція $t_{ij}(\lambda)$ належала групі $AE(n, R)$. Адже, в такому разі трансекція $t_{ji}(\lambda)$, яка комутує з елементами групи $AE(n, R)$, комутує і з трансекцією $t_{ij}(\lambda)$. Тому $\lambda^2 = 0$, $\lambda = 0$. Як і вище A має стандартний опис, в якому модуль $P = 0$.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі розглядаються застосування гомоморфізмів з умовою (*). Зокрема, розглядається питання опису гомоморфізмів з умовою (*) підгруп повної лінійної групи над асоціативними кільцями з 1, в яких підгрупи елементарних трансекцій є нормальними підгрупами, а також знаходиться вигляд гомоморфізмів з умовою (*) в деяких частинних випадках. Показано, що умова нормальності підгрупи $E(n, R)$ у підгрупах групи $GL(n, R)$, які її містять, дають можливість довести, що гомоморфізми з умовою (*) допускають розширено стандартний опис, а при деяких обмеженнях стандартний опис на таких підгрупах.

Задача опису гомоморфізмів матричних груп над асоціативними кільцями є актуальною, активно розвивається, має застосування в алгебраїчній K -теорії, теорії кілець і модулів та теорії зображень груп над кільцями. В описі гомоморфізмів є чимало задач, які потребують вирішення. Однією з них є задача опису гомоморфізмів з умовою (*) лінійних груп над асоціативними кільцями з 1, які містять підгрупу елементарних трансекцій, що не є в них нормальною.

Іншою задачею є описання гомоморфізмів лінійних груп над асоціативними кільцями з 1, які містять підгрупи елементарних трансекцій і задаються на них одиничними гомоморфізмами.

Список використаної літератури

1. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми матричних груп та кілець над асоціативними кільцями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38, №1. С. 61-75. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).61-75](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75)
2. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Зображення формальними матрицями елементів матричних груп над асоціативними кільцями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 1(36). С. 16-29. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29)
3. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми з умовою (*), якщо 2 - оборотний елемент. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2(37). С. 15-27. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).101-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113)
4. Петечук В. М., Петечук Ю. В. Гомоморфізми матричних груп над асоціативними кільцями. Частина II. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2015. Вип. 1(26). С. 99-114.

5. Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами. *Матем. сб.* 1982. № 4, С. 539–547.
6. Голубчик И. З., Михалев А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативными кольцами. *Вест. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.* 1983. Т. 3, № 38. С. 73–85.
7. Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативными кольцами. *Сиб. мат. журн.* 1985. Т. 4. С. 49–67.
8. Петечук В. М. Гомоморфизмы линейных групп над кольцами. *Матем. заметки.* 1989. Т. 45, вып. 2. С. 80–94.
9. Golubchik I. Z. Isomorphism of the General Linear Group $GL(n, R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics.* 1992. Vol. 131, Part 1. P. 123–136.
10. Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. Berlin: Springer, 1989. 578 p.
11. Tits J. Homomorphismes et automorphismes «abstracts» de groupes algebriques et arithmetiques. *Actes. Congres intern. Math.* 1970. Vol. 2. P. 349–355. (Русский перевод в кн.: Автоморфизмы классических групп. Москва : Мир, 1976. С. 218–225).
12. Steinberg R. Lectures of Chevalley groups. New Haven: Yale Unib. Math. Dept., 1968. (Русский перевод: Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 261 с.).
13. Humphress T. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups. *Canad. T. Math.* 1969. Vol. 21. P. 908–911.
14. Abe E. Chevalley groups over commutative rings. *Proc. Conf. Radical-Theory.* Sendai. 1998. P. 1–23.
15. Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings. *J. Algebra.* 2012. Vol. 355, № 1. P. 154–170. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002>
16. Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1977. Т. 41, № 2. С. 235–252.
17. Голубчик И. З. Изоморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами. *Фундамент. и прикладная матем.* 1985. Т. 1, № 1. С. 311–314.
18. Герасимов В. Н. Группа единиц свободного произведения колец. *Матем. сб.* 1987. Т. 134, № 1. С. 42–65.

Petechuk V. M., Petechuk Yu. V. Homomorphisms of linear groups that contain normal subgroups of elementary transvections.

In the article considers extended and standard descriptions of homomorphisms of groups $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 2$ over the associative rings R with 1.

It is shown that homomorphisms with condition (*) of the group $E(n, R) \triangleleft G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ over associative rings R of 1 have an extended standard description, and at some restrictions a standard description.

The article also describes homomorphisms with condition (*) of group $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, $n \geq 4$ into an group $GL(m, K)$, $m \geq 2$, which are monomorphisms (particular such are isomorphisms) or $E(n, K) \subseteq \Lambda E(n, R)$ over the associative rings R and K with 1.

It is shown that such homomorphisms allow a standard description.

Keywords: associative rings with 1, homomorphisms with condition (*), extended and standard descriptions of homomorphisms of linear groups.

References

1. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2021). Homomorphisms of matrix groups and rings over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 38(1), 61–75. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).61-75](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75) [in Ukrainian].
2. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2020). Images by formal matrices of elements of matrix groups over associative rings. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(36), 16–29. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).16-29](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).16-29) [in Ukrainian].
3. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2020). Homomorphisms with condition (*) if 2 is a reversible element. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 38(1), 61–75. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).61-75](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).61-75) [in Ukrainian].

- Informatics*, 2(37), 101-113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).101-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).101-113) [in Ukrainian].
4. Petechuk, V. M., & Petechuk, Yu. V. (2015). Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(26), 99-114 [in Russian].
 5. Petechuk, V. M. (1982). Automorphisms of matrix groups over commutative rings. *Math. Notices*, 4, 539-547 [in Russian].
 6. Golubchik, I. Z., & Mikhalev, A. V. (1983). Isomorphism of general linear groups over associative rings. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 38(3), 73-85 [in Russian].
 7. Zelmanov, E. I. (1985). Isomorphism of linear groups over on associative rings. *Siberian Math. J.*, 4(26), 49-67 [in Russian].
 8. Petechuk, V. M. (1989). Homomorphisms of linear groups over rings. *Math. Notices*, 2(45), 83-94 [in Russian].
 9. Golubchik, I. Z. (1992). Isomorphism of the General Linear Group $GL(n, R)$, $n \geq 4$ over on associative Ring. *Contemporary Mathematics*, 131(1), 123-136.
 10. Hahn, A. J., & O'Meara, O.T. (1989). *The Classical Groups and K-Theory*. Berlin: Springer.
 11. Tits, J. (1970). Homomorphismes et automorphismes «abstracts» de groupes algebriques et arithmetiques. *Actes. Congres intern. Math.*, 2, 349-355.
 12. Steinberg, R. (1968). *Lectures of Chevalley groups*. New Haven: Yale Unib. Math. Dept.
 13. Humphress, T. F. (1969). On the automorphisms of infinite Chevalley groups. *Canad. T. Math.*, 21, 908-911.
 14. Abe, E. (1998). Chevalley groups over commutative rings. *Proc. Conf. Radical-Theory*. Sendai, 1-23.
 15. Bunina, E. I. (2012). Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings. *J. Algebra*, 355(1), 154-170. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.002>.
 16. Suslin, A. A. (1977). On the structure of a special linear group over a ring of polynomials. *Izv. USSR Academy of Sciences. Ser. mat.*, 41(2), 235-252 [in Russian].
 17. Golubchik, I. Z. (1985). Isomorphisms of projective groups over associative rings. *Fundam. and applied mat.*, 1(1), 311-314 [in Russian].
 18. Gerasimov, V. N. (1987). Group of units of free product of rings. *Mat. Sat.*, 134(1), 42-65 [in Russian].

Одержано 24.10.2021

УДК 512.815

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).81-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).81-90)**А. О. Рамський¹, Н. М. Самарук², О. А. Поплавська³**

¹ Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
ramsky@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9624-5018>

² Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат педагогічних наук, доцент
samaruk_nm@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4611-8528>

³ Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань
helen.poplavskaya@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6920-1842>**КРАТНОСТІ ВАГ НЕЗВІДНИХ ЗОБРАЖЕНЬ АЛГЕБРИ ЛІ SL_3**

В даній статті для комплексної алгебри Лі sl_3 запропонована явна формула знаходження кратності ваги незвідного зображення Γ_λ , яке визначається старшою вагою $\lambda = (a, b)$. Множина всіх ваг Λ такого зображення утворює групове кільце $\mathbb{Z}[\Lambda]$ з мультиплікативним базисом $e(\mu)$, $\mu \in \Lambda$. Характер зображення $\text{Char } \Gamma_\lambda \in \mathbb{Z}[\Lambda]$, коефіцієнти якого і є шуканими кратностями. Головна ідея обчислень полягає у специфікації базису $e(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2}$ групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Це дало можливість представити характер $\text{Char } \Gamma_{a,b}$ незвідного $\Gamma_{a,b}$ зображення як многочлен Шура $s_{a,b} \left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y} \right)$ від двох змінних x, y . Як наслідок ми виразити коефіцієнти цього многочлена через прості функції, які легко обчислюються за лінійний час. Ключову роль в обчисленні зіграли знайдені явно коефіцієнти розкладу ряду

$$\Delta = \frac{1}{(y^2 - x)(1 - yx)(y - x^2)},$$

в термінах функції

$$c(n, k) = \begin{cases} \min(n - k + 2, k), & 1 \leq k \leq n + 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Ключові слова: алгебри Лі, незвідні зображення, характери, кратності, формула Вейля, многочлени Шура.

1. Вступ. Однією із важливих задач теорії зображень класичних алгебр Лі є знаходження кратностей ваг які зустрічаються у їхніх незвідних зображеннях. Існує кілька обчислювальних формул для розв'язання цієї задачі. Класичними є формули Фрейдентала [1], Костанта [1], Рака [3], Климика [4]. Всі ці формули є наслідком відомої формули Вейля для характерів, див. [5]. Теоретично, використовуючи формулу Вейля можна обчислити кратності довільного незвідного зображення. Проте практичне використання цих формул є досить незручним, оскільки всі вони є рекурентними, тобто визначають лише алгоритм обчислення кратностей. Крім того вони використовують, або сумування по групі Вейля,

або сумування по діаграмам Юнга, що стає обчислювально складною задачею при зростанні розмірностей алгебр і їхніх зображень. В зв'язку з цим великий інтерес викликають роботи, які пропонують більш ефективні алгоритми обчислення кратностей. Серед таких робіт варто відмітити статтю Муді і Патери [6] та роботи [7]- [9]. Проте в цих роботах не знайдено формул для кратностей у замкнутому вигляді. Явні формули кратностей деяких зображень, які мають старші ваги простої структури знайдено в [10], але вони мають складний комбінаторний вигляд.

В даній статті для комплексної алгебри Лі sl_3 авторами запропонована явна формула знаходження кратності ваги його незвідного зображення. Головна ідея обчислень полягає у специфікації базису групового кільця ваг зображення, що дало можливість представлення характеру зображення як многочлена Шура. Це дозволило виразити коефіцієнти цього многочлена через прості функції, які швидко обчислюються за лінійний час.

2. Ваги та характери незвідного зображення алгебри Лі sl_3 . Розглянемо напівпросту комплексну скінченновимірну алгебру Лі L з картанівською підалгеброю h і нехай $\Lambda \subset h^*$ – решітка всіх цілочисельних функцій на h , тобто множина власних значень відносно дії картанівської підалгебри на всіх зображеннях L . Множина Λ утворює абелеву групу і нехай $\mathbb{Z}[\Lambda]$ ціле групове кільце цієї групи. Базисний елемент $\mathbb{Z}[\Lambda]$, який відповідає вазі $\lambda \in \Lambda$ ми позначимо формальним символом $e(\lambda)$. Зокрема, $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$ для всіх $\lambda, \mu \in \Lambda$. Таке окреме позначення потрібне для того, щоб відрізнити вагу λ як елемента множини ваг Λ і вагу λ як елемента групового кільця $\mathbb{Z}[\Lambda]$.

Нехай W – зображення алгебри L і Λ_W множина ваг цього зображення. Оскільки алгебра L напів проста, то векторний простір W розкладається в пряму суму вагових підпросторів $W(\lambda)$:

$$W = \sum_{\lambda \in \Lambda_W} n_\lambda W(\lambda),$$

тут n_λ – кратність ваги λ . *Формальним характером* $\text{Char}(W)$ зображення W скінченновимірної алгебри Лі L називається сума

$$\text{Char}(W) = \sum_{\lambda \in \Lambda_W} n_\lambda e(\lambda).$$

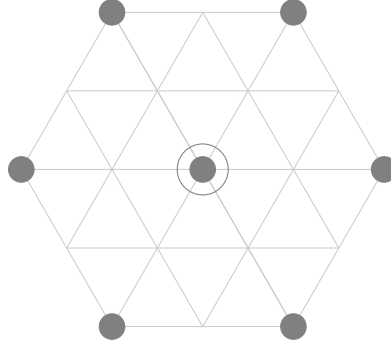
Характер зображення W є елементом групового кільця $\mathbb{Z}[\Lambda]$.

Надалі ми будемо працювати із комплексною алгеброю Лі sl_3 , яка реалізується як матрична алгебра, що породжується 3×3 матрицями з нульовим слідом. Позначимо через $E_{k,i}$ 3×3 -матрицю, яка має одиницю в k -тому рядку та i -му стовпчику і нуль у всіх інших місцях. Тоді

$$h = \{s_1 E_{1,1} + s_2 E_{2,2} + s_3 E_{3,3} \mid s_1 + s_2 + s_3 = 0, s_i \in \mathbb{C}\},$$

– картанівська підалгебра алгебри sl_3 . Визначимо $L_i \in h^*$ як $L_i(E_{j,j}) = \delta_{i,j}$. Нехай $\phi_1 = L_1, \phi_2 = L_1 + L_2$ – фундаментальні ваги відносно h . Додатні корені мають вигляд:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= L_1 - L_2 = 2\phi_1 - \phi_2 = (2, -1), \\ \alpha_2 &:= L_2 - L_3 = -\phi_1 + 2\phi_2 = (-1, 2), \\ \alpha_3 &:= L_1 - L_3 = \phi_1 + \phi_2 = (1, 1). \end{aligned}$$

Рис. 1. Вагова діаграма зображення $\Gamma_{1,1}$.

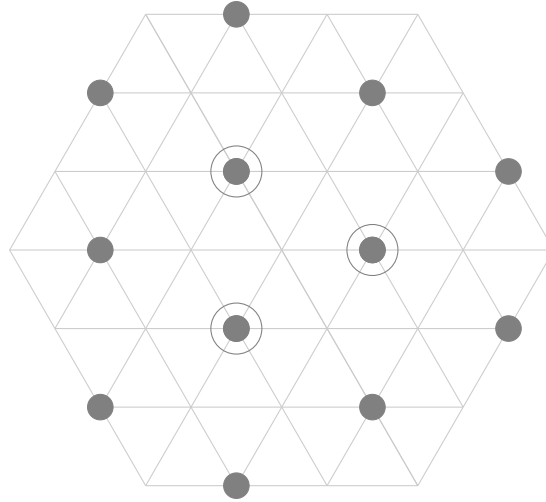
Добре відомо, див. [5], що множина ваг довільного незвідного зображення напівпростої алгебри Лі є впорядкованою множиною і максимальні елементи відносно цього впорядкування (старші ваги) з точністю до ізоморфізму визначають це зображення. Незвідне зображення з старшою вагою $\lambda = (a, b)$ позначимо через $\Gamma_\lambda = \Gamma_{(a,b)}$, а множину його ваг позначимо через $\Lambda_{a,b}$.

Ваги з $\Lambda_{(a,b)}$, $a \geq b$ можна зобразити на площині як послідовність вкладених опуклих шестикутників (трикутників для $b = 0$), які при $a \neq b$ вироджуються у трикутник, а при $a = b$ вироджуються точку, див. [11], [5]. На кожній із сторін найбільшого зовнішнього шестикутника розміщено по чергово a та b ваг. Кратності всіх ваг найпершого зовнішнього шестикутника рівні одиниці, а потім кратності поступово збільшуються на одиницю на кожному наступному концентричному шестикутнику. Для прикладу, якщо $a = b$, то вагова діаграма має вигляд концентричних рівносторонніх шестикутників, які вироджуються в точку, що відповідає вазі $(0, 0)$. Кратність всіх ваг найбільшого зовнішнього шестикутника, на кожній із сторін якого розміщено рівно a ваг, дорівнює 1, а кратність ваги $(0, 0)$ рівна $a + 1$. Якщо a , або b рівні нулю, то вагова діаграма утворює трикутник і тоді кратність кожної ваги рівна одиниці.

Всі ваги з Γ_λ отримуються із старшої ваги λ віднімаючи від неї лінійні комбінації коренів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ з додатними коефіцієнтами так, щоб отримані ваги залишалися в шестикутнику (чи трикутнику) вагової діаграми. Наприклад, для старшої ваги $\lambda = (1, 1)$ маємо

$$\begin{aligned}\lambda - \alpha_3 &= (0, 0), \\ \lambda - 2\alpha_3 &= (-1, -1), \\ \lambda - \alpha_1 &= (-1, 2), \\ \lambda - \alpha_3 - \alpha_1 &= (-2, 1), \\ \lambda - \alpha_2 &= (2, -1), \\ \lambda - \alpha_3 &= (1, -2).\end{aligned}$$

Отже, $\Lambda_{(1,1)} = \{(1, 1), (-1, 2), (1, -2), (0, 0), (-2, 1), (2, -1), (-1, -1)\}$, причому кратності всіх ваг рівні одиниці, крім нульової ваги, для якої кратність рівна двійці. Вагова діаграма $\Lambda_{(1,1)}$ показана на Рис. 1. Аналогічно для старшої ваги $\lambda = (2, 1)$

Рис. 2. Вагова діаграма зображення $\Gamma_{2,1}$.

маємо

$$\Lambda_{(2,1)} = \{(2, 1), (3, -1), (0, 2), (1, 0), (2, -2), (-2, 3), (-1, 1), (0, -1), (1, -3), (-3, 2), (-2, 0), (-1, -2)\},$$

кратності всіх ваг рівні 1 крім ваг $((1, 0), (-1, 1), (0, -1))$, кратності яких дорівнюють 2. Вагова діаграма для $\Lambda_{(2,1)}$ показана на Рис. 2. Зовнішні чорні точки утворюють шестикутник довжини сторін якого рівні 2 і 1, тобто такі ж, як і координати старшої ваги $\lambda = (2, 1)$.

3. Обчислення кратності ваг. Розглянемо таку спеціалізацію базису групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$:

$$e(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2},$$

для $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ і формальних змінних x, y . В цих позначеннях характер буде раціональним виразом від двох змінних x, y . Явний вигляд цього виразу в термінах симетричних многочленів Шура дає формула Вейля для характерів, див. [11, стор. 400]. З формули Вейля випливає, що спеціалізований характер незвідного зображення алгебри sl_3 із старшою вагою $\lambda = (a, b)$ має вигляд

$$\text{Char } \Gamma_{a,b} = s_{a,b} \left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y} \right),$$

де

$$s_{a,b}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{a+b+2} & x_2^{a+b+2} & x_3^{a+b+2} \\ x_1^{b+1} & x_2^{b+1} & x_3^{b+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}},$$

є многочленом Шура, який відповідає розбиттю (a, b) .

Для прикладу, знаходимо, що

$$\text{Char } \Gamma_{1,0} = x + \frac{y}{x} + \frac{1}{y},$$

$$\text{Char } \Gamma_{1,1} = 2 + \frac{x^2}{y} + xy + \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x^2},$$

$$\text{Char } \Gamma_{1,2} = xy^2 + x^2 + \frac{x^3}{y^2} + \frac{y^3}{x} + 2y + 2\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^3} + \frac{y^2}{x^2} + 2x^{-1} + y^{-2} + \frac{y}{x^3} + \frac{1}{yx^2}.$$

Позначимо через $n_{a,b}(\mu_1, \mu_2)$ кратність ваги $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ в зображенні $\Gamma_{a,b}$.

З прикладу вище, маємо для $\Gamma_{1,1}$, що $n_{1,1}(0, 0) = 2$, а всі кратності $n_{1,1}(1, 1)$, $n_{1,1}(-1, 2)$, $n_{1,1}(1, 1)$, $n_{1,-2}(-2, 1)$, $n_{1,1}(2, -1)$, $n_{1,1}(-1, -1)$ рівні 1.

За означенням характеру кратність $n_{a,b}(\mu_1, \mu_2)$ дорівнює коефіцієнту біля $x^{\mu_1}y^{\mu_2}$ в характері $\Gamma_{a,b}$. Позначимо цей факт так

$$n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) = [x^{\mu_1}y^{\mu_2}] \text{Char } \Gamma_{a,b},$$

тут символ $[x^n y^m]f(x, y)$ позначає коефіцієнт біля $x^n y^m$ у виразі $f(x, y)$.

Домножимо характер на $(xy)^{a+b}$ для того щоб уникнути негативних степенів. Тоді, очевидно

$$n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) = [x^{a+b+\mu_1}y^{a+b+\mu_2}](xy)^{a+b} \text{Char } \Gamma_{a,b}.$$

Має місце наступне твердження, яка отримується із виразу для характеру після обчислення многочлену Шура:

Лема 1.

$$\begin{aligned} & (xy)^{a+b} \text{Char } \Gamma_{a,b} = \\ &= \frac{y^{b+1}x^{a+1} - y^{a+2b+3}x^{2a+b+3} + y^{a+1}x^{2a+2b+4} + y^{2a+2b+4}x^{b+1} - x^{a+2b+3} - y^{2a+b+3}}{(x-y)^2(1-yx)(x^2-y)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що всі степені у правій частині, після спрощень, будуть додатними цілими числами, тобто вираз $(xy)^{a+b} \text{Char } \Gamma_{a,b}$ вже буде многочленом від двох змінних над \mathbb{Z} , а його коефіцієнти будуть шуканими кратностями. Для знаходження явного виразу для цих кратностей виконаємо деякі попередні обчислення.

Покладемо

$$N_{a,b} := y^{b+1}x^{a+1} - y^{a+2b+3}x^{2a+b+3} + y^{a+1}x^{2a+2b+4} + y^{2a+2b+4}x^{b+1} - x^{a+2b+3} - y^{2a+b+3},$$

і

$$\Delta = \frac{1}{(y^2-x)(1-yx)(y-x^2)}.$$

Для ряду Δ можна отримати явний вираз:

Лема 2. Коефіцієнт біля x^n в розкладі Δ в формальний степеневий ряд обчислюється за формулою

$$[x^n]\Delta = - \sum_{i=1}^{n+1} c(n, i)y^{n-3(n+2-i)},$$

де

$$c(n, k) = \begin{cases} \min(n-k+2, k), & 1 \leq k \leq n+1, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

і $\delta_{i,j}$ – функція Кронекера.

Доведення. Розкладемо кожен із співмножників в ряд :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-x^2} &= \frac{1}{y} \frac{1}{1-\frac{x^2}{y}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+1}}, \\ \frac{1}{y^2-x} &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{1-\frac{x}{y^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+2}}, \\ \frac{1}{1-xy} &= 1 + xy + x^2y^2 + \dots + x^n y^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k. \end{aligned}$$

Тоді

$$\Delta = \frac{1}{(y^2-x)(1-yx)(y-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+2}} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k.$$

Перемножимо перші два з них і виділимо коефіцієнти біля степенів x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{y^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{y^{k+1}} \frac{1}{y^{2(n-2k)+2}} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{y^{2n-3k+3}} \right) x^n.$$

Домножимо на третій ряд і знову виділимо коефіцієнти біля степенів x :

$$\Delta = \frac{1}{y-x^2} \frac{1}{y^2-x} \frac{1}{1-xy} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{2i-3k+3}} y^{n-i} \right) x^n.$$

Отже

$$[x^n]\Delta = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{2i-3k+3}} y^{n-i} = y^{n-3} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{3i-3k}}.$$

Отриману подвійну суму, оскільки в ній зустрічаються однакові степені y , можна звести до одинарної

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{3i-3k}} = \sum_{t=0}^n \frac{\alpha(n, t)}{y^{3t}}.$$

Тут $\alpha(n, t)$ ціле число яке показує скільки раз степінь y^{-3t} входить в подвійну суму.

Для фіксованого t число $\alpha(n, t)$ дорівнює кількості пар (i, k) таких що $t = i - k$ при таких обмеженнях на i, k : $0 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq i/2$. Оскільки $k = i - t$ ми маємо $0 \leq i - t \leq i/2$, і, після спрощень, отримуємо такі обмеження на i : $i/2 \leq t \leq i \leq n$. Для кожного i , яке задовольняє ці умови, пара $(i, i - t)$ задовольняє потрібну умову. Порахуємо, скільки існує чисел i , які задовольняють умову $i/2 \leq t \leq i \leq n$ при фіксованому t . Легко бачити, що коли $t \geq n/2$, то довільне i для якого $t \leq i \leq n$ задовільняє умову, отже таких їх буде $n - t + 1$. У випадку $t < n/2$, підходить довільне i , для якого виконується, $i/2 \leq t \leq i$ звідки $t \leq i \leq 2t$. Отже ми маємо $t + 1$ таких значень i . Враховуючи

$$\min(t + 1, n - t + 1) = \begin{cases} n - t + 1, & \text{для } t \geq n/2 \\ t + 1, & \text{для } t < n/2 \end{cases},$$

в результаті отримуємо, що кількість таких пар рівна $\min(t + 1, n - t + 1)$, тобто

$$\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \frac{1}{y^{3i-3k}} = \sum_{t=0}^n \frac{\min(n - t + 1, t + 1)}{y^{3t}}$$

Підставивши отриману суму у вираз для Δ , після зміни індексу сумування, отримуємо необхідний результат.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Кратність ваги (μ_1, μ_2) в зображенні $\Gamma_{a,b}$ обчислюється за формулою*

$$n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) = c \left(a + b + \mu_1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - \\ - c \left(b + \mu_1 - 1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - c \left(a + \mu_1 - 1, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right).$$

Доведення.

Позначимо

$$n_a(\mu_1) := [x^{a+b+\mu_1}] ((xy)^{a+b} \text{Char } \Gamma_{a,b}).$$

Тоді, враховуючи, що

$$[x^n] N_{a,b} = \delta_{n,a+1} y^{b+1} + \delta_{n,b+1} y^{2a+2b+4} - \delta_{n,0} y^{2a+b+3} + \\ - \delta_{n,2a+b+3} y^{a+2b+3} + \delta_{n,2a+2b+4} y^{a+1} - \delta_{n,a+2b+3},$$

маємо

$$n_a(\mu_1) = \sum_{i=0}^{a+b+\mu_1} ([x^i] \Delta) ([x^{a+b+\mu_1-i}] N_{a,b}) = \\ = ([x^{b+\mu_1-1}] \Delta) y^{b+1} + ([x^{a+\mu_1-1}] \Delta) y^{2a+2b+4} - \\ - ([x^{a+b+\mu_1}] \Delta) y^{2a+b+3} - ([x^{\mu_1-a-3}] \Delta) y^{a+2b+3} + ([x^{\mu_1-a-b-4}] \Delta) y^{a+1} - ([x^{\mu_1-b-3}] \Delta).$$

Оскільки $|\mu_1| \leq a + b$ тоді $\mu_1 - a - b - 4 < 0$. Отже $[x^{\mu_1 - a - b - 4}] \Delta = 0$.

Ми маємо

$$([x^{b+\mu_1-1}] \Delta) y^{b+1} = - \sum_{i=1}^{b+\mu_1} c(b + \mu_1 - 1, i) y^{3(i-1) - b - 2\mu_1}.$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} [y^{a+b+\mu_2}] ([x^{b+\mu_1-1}] \Delta) y^{b+1} &= -\delta_{a+b+\mu_2, 3(i-1) - b - 2\mu_1} c(b + \mu_1 - 1, i) = \\ &= -c \left(b + \mu_1 - 1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right). \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$[y^{a+b+\mu_2}] ([x^{a+\mu_1-1}] \Delta) y^{2a+2b+4} = -c \left(a + \mu_1 - 1, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right),$$

$$[y^{a+b+\mu_2}] (-[x^{a+b+\mu_1}] \Delta) y^{2a+b+3} = c \left(a + b + \mu_1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right),$$

$$[y^{a+b+\mu_2}] (-[x^{\mu_1-a-3}] \Delta) y^{a+2b+3} = c \left(\mu_1 - a - 3, \frac{2\mu_1 + \mu_2 - (2a + b)}{3} - 1 \right),$$

і

$$[y^{a+b+\mu_2}] (-[x^{\mu_1-b-3}] \Delta) = c \left(\mu_1 - b - 3, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right).$$

Оскільки, $n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) = [y^{a+b+\mu_2}] n_a(\mu_1)$ то ми отримаємо

$$\begin{aligned} n_{a,b}(\mu_1, \mu_2) &= c \left(a + b + \mu_1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - \\ &- c \left(b + \mu_1 - 1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - c \left(a + \mu_1 - 1, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right) + \\ &+ c \left(\mu_1 - a - 3, \frac{2\mu_1 + \mu_2 - (2a + b)}{3} - 1 \right) + c \left(\mu_1 - b - 3, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right). \end{aligned}$$

Доведемо, що дві останні формули тотожно рівні нулю. Справді, для першої тотожності з властивостей вагової діаграми зображення $\Gamma_{a,b}$, ми маємо, що другий аргумент

$$\frac{2\mu_1 + \mu_2 - (2a + b)}{3} - 1 \leq 0.$$

Але $c(n, k) = 0$, якщо $k < 0$.

Для другої тотожності покажемо що другий аргумент є більшим ніж перший. З властивостей вагової діаграми для різниці аргументів, ми маємо,

$$\frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} - (\mu_1 - b - 3) = \frac{a + 2b + \mu_2 - \mu_1}{3} + 3 > 0.$$

Але $c(n, k) = 0$ якщо $n < k$. Отже, ми можемо ігнорувати останні два вирази. Теорему доведено.

Таким чином ми можемо записати характер у явному вигляді:

$$\text{Char } \Gamma_{a,b} = \frac{1}{x^a y^b} \sum_{\mu \in \Lambda} c \left(a + b + \mu_1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - \\ - c \left(b + \mu_1 - 1, \frac{a + 2b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} + 1 \right) - c \left(a + \mu_1 - 1, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} \right) x^{\mu_1} y^{\mu_2}.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі для комплексної алгебри Лі sl_3 запропонована явна формула знаходження кратності ваги незвідного зображення $\Gamma_{a,b}$, яке визначається старшою вагою $\lambda = (a, b)$. Головна ідея обчислень полягає у наступній специфікації базису $e(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2}$ групового кільця $\mathbb{Z}[\lambda]$. Це дало можливість представити характер $\text{Char } \Gamma_{a,b}$ незвідного $\Gamma_{a,b}$ зображення як многочлен Шура $s_{a,b} \left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y} \right)$ від двох змінних x, y . Ключову роль в обчисленні зіграли знайдені явно коефіцієнти розкладу ряду

$$\Delta = \frac{1}{(y^2 - x)(1 - yx)(y - x^2)},$$

в термінах функції максимуму двох чисел. Результати обчислення кратностей повністю співпадають із результатами отриманими іншими методами в статті [12].

Ідеї, які реалізовано в статті, автори планують поширити для знаходження кратностей ваг незвідних зображень алгебр Лі sl_n при $n > 3$.

Список використаної літератури

1. Freudenthal H. Zur Berechnung der charaktere der halbeinfachen Lieschen gruppen. *Indag. Math.* 1954. Vol. 16. P. 369-376.
2. Kostant B. A formula for the multiplicity of a weight. *Transactions of the American Mathematical Society.* 1959. Vol. 93, No 1. P. 53-73.
3. Racah G. Lectures on Lie groups, Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics. F. Gfirsey, ed., *Gordon and Breach*, New York. 1964. P. 1-36.
4. Klimyk A. U. Multiplicities of weights of representations and multiplicities of representations of semisimple Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.* 1967. Vol.177, No 5. P. 1001-1004.
5. Humphreys J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. *Springer.* 1978. 198 p.
6. Moody R.V., Patera J. Fast recursion formula for weight multiplicities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.).* 1982. Vol. 7(1). P. 237-242.
7. Cavallin M. An algorithm for computing weight multiplicities in irreducible modules for complex semisimple Lie algebras. *J. Algebra.* 2017. Vol. 471. P. 492-510.
8. Siddhartha S. A new formula for weight multiplicities and characters. *Duke Math. J.* 2000. Vol. 101(1). P. 77-84.
9. Schützer W. A new character formula for Lie algebras and Lie groups. *J. Lie Theory.* 2012. Vol. 22(3). P. 817-838.
10. Lauret E A., Bertone F.R. Multiplicity formulas for fundamental strings of representations of classical Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics.* 2017. Vol. 58. 111703.
11. Fulton W., Harris J. Representation theory: a first course. Graduate texts in mathematics. no. 129. Springer. 2004. 407p.
12. Lübeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic, *LMS J. Comput. Math.* 2001. Vol. 4. P. 135-169.

Ramskyi A. O., Samaruk N. M., Poplavska O. A. Weight multiplicities of irreducible representations of the Lie algebra sl_3 .

In this paper, for the complex Lie algebra sl_3 we propose an explicit formula for finding the multiplicity of the weight of the irreducible representation Γ_λ , which is determined by its higher weight $\lambda = (a, b)$. The set of all weights Λ of such a representation forms a group ring $\mathbb{Z}[\Lambda]$ with the multiplicative basis $e(\mu), \mu \in \Lambda$. The character of the representation $\text{Char } \Gamma_\lambda$ is an element of $\mathbb{Z}[\Lambda]$, the coefficients of which are the required multiplicities. The main idea of the calculations is to specify the basis $e(\mu) = x^{\mu_1} y^{\mu_2}$ of the group ring $\mathbb{Z}[\lambda]$. This made it possible to represent the character $\text{Char } \Gamma_\lambda$ of the irreducible representation Γ_λ as a Schur polynomial $s_{a,b} \left(x, \frac{y}{x}, \frac{1}{y} \right)$ of two variables x, y . As a consequence, we express the coefficients of this polynomial through simple functions that are easily computed for linear time. The key role in the calculation was played by the explicitly found coefficients of the series decomposition

$$\Delta = \frac{1}{(y^2 - x)(1 - yx)(y - x^2)},$$

in terms of the function

$$c(n, k) = \begin{cases} \min(n-k+2, k), & 1 \leq k \leq n+1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Keywords: Lie algebras, irreducible representations, characters, multiplicities, Weyl formula, Schur polynomials.

References

1. Freudenthal, H. (1954). Zur Berechnung der charaktere der halbeinfachen Lieschen gruppen. *Indag. Math.*, 16, 369-376.
2. Kostant, B. (1959). A formula for the multiplicity of a weight. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93(1), 53-73.
3. Racah, G. (1964). Lectures on Lie groups, Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, F. Gfirsey, ed., Gordon and Breach, New York, 1-36.
4. Klimyk, A. U. (1967). Multiplicities of weights of representations and multiplicities of representations of semisimple Lie algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 177(5), 1001-1004.
5. Humphreys, J. (1978). Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer.
6. Moody, R. V. & Patera, J. (1982). Fast recursion formula for weight multiplicities. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(1), 237-242.
7. Cavallin, M. (2017). An algorithm for computing weight multiplicities in irreducible modules for complex semisimple Lie algebras. *J. Algebra*, 471, 492-510.
8. Siddhartha, S. (2000). A new formula for weight multiplicities and characters. *Duke Math. J.*, 101 (1), 77-84.
9. Schützer, W. (2012). A new character formula for Lie algebras and Lie groups. *J. Lie Theory*, 22(3), 817-838.
10. Lauret, E A. & Bertone, F.R. (2017). Multiplicity formulas for fundamental strings of representations of classical Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 58, 111-703.
11. Fulton, W. & Harris, J. (2004). Representation theory: a first course, Graduate texts in mathematics, 129, Springer.
12. Lübeck, F. (2001). Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic, *LMS J. Comput. Math.*, 4, 135-169.

Одержано 31.10.2021

А. М. Тегза

ДВНЗ "Ужгородський національний університет",
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5310-4311>

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ З ЗАДАНИМИ ТОЧНІСТЮ І НАДІЙНІСТЮ У РІВНОМІРНИЙ МЕТРИЦІ

Робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю.В.Козаченко. Розглянуто гауссовий стаціонарний центрований випадковий процес з обмеженим спектром з заданою коваріаційною функцією. Використовуючи ентропійні характеристики та оцінку субгауссового стандарту, для моделі одержано розбиття спектрального проміжку, при якому модель наблизатиме процес з заданими точністю і надійністю. У середовищі Python було змодельовано процес для часткового випадку.

Ключові слова: гауссів стаціонарний випадковий процес, модель процесу, ентропійні характеристики, точність, надійність моделі.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі, а також дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день активно розроблюються загальні методи чисельного моделювання випадкових процесів, а також швидко зростає область застосування стохастичних моделей, зокрема в радіотехніці, електроніці, у фінансовій математиці і т.д.

Оскільки більшість фізичних явищ залежить від багатьох факторів, то при їх моделюванні намагаються відтворити процеси, що є сумою великого числа випадкових факторів, тобто, згідно з центральною граничною теоремою, гауссові або близькі до них процеси. Тому найбільш поширеними і найбільш розробленими є методи моделювання гауссових випадкових процесів і полів. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів та полів розроблено Г. О. Михайловим, Ю. В. Козаченком та їх учнями [5], [1, 3, 4]. Дана робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко [2]. У роботі [6] досліджувалась точність і надійність моделі гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром. У даній роботі використовуючи точніші оцінки, побудовано модель процесу з обмеженим спектром з заданими точністю і надійністю, для часткового випадку комп'ютерно змодельовано процес.

2. Основний результат. Розглянемо гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $X(t)$ з

обмеженим спектром, тобто коваріаційна функція якого має вигляд:

$$r(\tau) = EX(t + \tau)X(t) = \int_0^{\Lambda} \cos \lambda t dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Тоді випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int_0^{\Lambda} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^{\Lambda} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що $E(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$, $i = 1, 2$.

За модель процесу візьмемо випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M-1} [\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t], \quad (1)$$

де η_{l1} , η_{m2} , ζ_k – незалежні при всіх l , m та k випадкові величини, $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_M\}$ – таке розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_M = \Lambda$, η_{k1} , η_{k2} – гауссові випадкові величини, такі що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, та якщо $b_k^2 > 0$, то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, то $\eta_{k1} = 0$, $\eta_{k2} = 0$, $\zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Означення 1 (див. [1]). Випадковий процес $X_{\Lambda}(t)$ наближує гауссів процес $X(t)$ з надійністю $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0, T])$, якщо існує таке розбиття Λ , що справедлива нерівність

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - X_{\Lambda}(t)| > \delta \right\} \leq \beta.$$

Означення 2 (див. [1]). Випадкову величину ξ називатимемо субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$E \exp \{ \lambda \xi \} \leq \exp \left\{ \frac{a^2 \lambda^2}{2} \right\}.$$

Клас всіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$.

Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ називається субгауссовим процесом, якщо для всіх $t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ – субгауссова випадкова величина та $\sup_{t \in \mathcal{T}} \tau(X(t)) < \infty$.

Нехай $\eta_M(t) = X(t) - X_M(t)$. Тоді

$$\eta_M(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right). \quad (2)$$

Нехай $\tau(\eta_M(t))$ – субгауссів стандарт процесу $\eta_M(t)$.

З досліджень статті [6] маємо, що для субгауссового процесу $\eta_M(t)$ має місце така нерівність

$$\tau(\eta_M(t)) \leq \left[\sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m \geq 1} \frac{8}{b_k^{2/m}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left| \sin \frac{t(u-\lambda)}{2} \right|^2 dF(\lambda) \right)^m dF(u) \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

де $b_k^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)$.

Використовуючи твердження із [1] про ентропійні характеристики, маємо, що при $\delta > 8I(\varepsilon_0)$ для субгауссового процесу $\eta_M(t)$ виконується нерівність [6]

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_M(t)| > \delta \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} \left(\delta - \sqrt{8\delta \tilde{I}(\varepsilon_0)} \right)^2 \right\}, \quad (4)$$

де

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{H(\varepsilon)} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln \left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1 \right)} d\varepsilon < \infty,$$

$H(\varepsilon)$ – метрична ентропія компактної множини $[0, T]$, $\varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \tau(\eta_M(t))$,

$\sigma(h) = \sup_{|t-s| < h} \tau(\eta_M(t) - \eta_M(s))$.

Тобто для дослідження збіжності моделі до свого випадкового процесу, потрібно оцінити ε_0 і $\sigma(h)$.

Використовуючи умову (3), матимемо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \tau(\eta_M(t)) &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{k=0}^{M-1} 8b_k^2 \frac{t^2(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^2}{4} \right)^{1/2} = \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{k=0}^{M-1} 2b_k^2 \frac{t^2 \Lambda^2}{M^2} \right)^{1/2} = \frac{T\Lambda}{M} \sqrt{2F(\Lambda)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для довільних $t, s \in [0, T]$ розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \eta_M(t) - \eta_M(s) = \sum_{k=0}^{M-1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right. \\ \left. + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right] \end{aligned}$$

Справедлива наступна лема:

Лема 1. Для $m = 0, 1, \dots$ справедливі співвідношення

$$E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} &\leq \\ &\leq \Delta_{2m} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(|t-s| \cdot |t+s| \cdot \frac{\lambda^2 + \zeta_k^2}{2} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m} &\leq \\ &\leq \Delta_{2m} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (|t-s| \cdot (|\lambda| + |\zeta_k|))^2 dF(\lambda) \right)^m. \end{aligned}$$

Доведення. Проведемо оцінки підінтегральних виразів:

$$\begin{aligned} |\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s| &= \\ &= \left| 2 \sin \frac{\lambda(s-t)}{2} \sin \frac{\lambda(s+t)}{2} + 2 \sin \frac{\zeta_k(t-s)}{2} \sin \frac{\zeta_k(t+s)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\lambda(s-t)}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{\lambda(s+t)}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\zeta_k(t-s)}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{\zeta_k(t+s)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \frac{\lambda(s-t)}{2} \right| \cdot \left| \frac{\lambda(s+t)}{2} \right| + 2 \left| \frac{\zeta_k(t-s)}{2} \right| \cdot \left| \frac{\zeta_k(t+s)}{2} \right| = \\ &= |t-s| \cdot |t+s| \cdot \frac{\lambda^2 + \zeta_k^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s| &= \\ &= \left| 2 \sin \frac{\lambda(t-s)}{2} \cdot \cos \frac{\lambda(t+s)}{2} + 2 \sin \frac{\zeta_k(s-t)}{2} \cdot \cos \frac{\zeta_k(t+s)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{\lambda(t-s)}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{\lambda(t+s)}{2} \right| + 2 \left| \sin \frac{\zeta_k(s-t)}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{\zeta_k(t+s)}{2} \right| < \\ &< |t-s| \cdot (|\lambda| + |\zeta_k|). \end{aligned}$$

Оскільки для центрованої гауссової випадкової величини ξ маємо $E\xi=0$, $E\xi^2=\sigma^2$,

$E\xi^{2k+1} = 0$, $E\xi^{2k} = \Delta_{2k}\sigma^{2k}$, $k = 1, 2, \dots$, $\Delta_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$, то

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \lambda s - \cos \zeta_k t + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda) \right)^{2m} &\leq \\ &\leq \Delta_{2m} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \lambda s - \cos \zeta_k t + \cos \zeta_k s)^2 dF(\lambda) \right)^m \leq \\ &\leq \Delta_{2m} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(|t-s| \cdot |t+s| \cdot \frac{\lambda^2 + \zeta_k^2}{2} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m. \end{aligned}$$

Аналогічно для синусів.

$$\begin{aligned} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \lambda s - \sin \zeta_k t + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda) \right)^{2m} &\leq \\ &\leq \Delta_{2m} E \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (|t-s| \cdot (|\lambda| + |\zeta_k|))^2 dF(\lambda) \right)^m. \end{aligned}$$

Для процесу $\eta_M(t)$ на $[0, T]$ проведемо оцінку величини $\sigma(h) = \sup_{|t-s| \leq h} \tau(\eta_M(t) - \eta_M(s))$.

Розглянемо інтеграли:

$$\omega_{k1} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t - \cos \lambda s + \cos \zeta_k s) d\eta_1(\lambda),$$

$$\omega_{k2} = \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t - \sin \lambda s + \sin \zeta_k s) d\eta_2(\lambda).$$

Як і при оцінці $\tau(\eta_M(t))$ отримаємо такі нерівності

$$\tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \leq 2 \sum_{k=0}^{M-1} (\tau^2(\omega_{k1}) + \tau^2(\omega_{k2})) \leq 2 \sum_{k=0}^{M-1} (\Theta^2(\omega_{k1}) + \Theta^2(\omega_{k2})),$$

де $\Theta(\omega_{ki}) = \sup_{m \geq 1} \left(\frac{2^m m!}{(2m)!} E\omega_{ki}^{2m} \right)^{\frac{1}{2m}}$, $i = 1, 2$.

Отже, згідно леми 1 матимемо:

$$\begin{aligned}
& \tau^2(\eta_\Lambda(t) - \eta_\Lambda(s)) \\
& \leq 2 \sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m \geq 1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(|t-s| \cdot (t+s) \cdot \frac{\lambda^2 + u^2}{2} \right)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_k(u) \right]^{\frac{1}{m}} + \\
& + 2 \sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m \geq 1} \left[\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |t-s|^2 \cdot (|\lambda| + |u|)^2 dF(\lambda) \right)^m dF_k(u) \right]^{\frac{1}{m}} \\
& \leq 2 \sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m \geq 1} \left[b_k^{2m} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(|t-s| \cdot (t+s) \cdot \frac{\lambda^2 + u^2}{2} \right)^2 dF_k(\lambda) \right)^m dF_k(u) \right]^{\frac{1}{m}} + \\
& + 2 \sum_{k=0}^{M-1} \sup_{m \geq 1} \left[b_k^{2m} \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} |t-s|^2 \cdot (|\lambda| + |u|)^2 dF_k(\lambda) \right)^m dF_k(u) \right]^{\frac{1}{m}} \\
& \leq 2|t-s|^2 \sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 (t+s)^2 \lambda_{k+1}^4 + 2|t-s|^2 \sum_{k=0}^{M-1} 4b_k^2 \lambda_{k+1}^2 = \\
& = 2|t-s|^2 \sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 \lambda_{k+1}^2 ((t+s)^2 \lambda_{k+1}^2 + 4).
\end{aligned}$$

Якщо врахувати, що $\lambda_{k+1} \leq \Lambda$ і $\sum_{k=0}^{M-1} b_k^2 = F(\Lambda)$, то отримаємо, що

$$\tau(\eta_M(t) - \eta_M(s)) \leq |t-s| \Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(T^2\Lambda^2 + 1)}.$$

Отже,

$$\sigma(h) \leq h \Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(T^2\Lambda^2 + 1)}. \quad (6)$$

Теорема 1. *Нехай в моделі $X_M(t)$ розбиття Λ таке, що при $\delta > 8\tilde{I}(\varepsilon_0)$ виконується співвідношення:*

$$2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} \left(\delta - \sqrt{8\delta\tilde{I}(\varepsilon_0)} \right)^2 \right\} \leq \beta, \quad (7)$$

$$de \varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \tau(\eta_M(t)) = \sigma_0,$$

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln \left(\frac{T\Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(1+T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon} + 1 \right)} d\varepsilon < \infty. \quad (8)$$

Тоді існує гауссів випадковий процес $X(t)$, до якого модель $X_M(t)$ наближатиметься з надійністю $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C([0, T])$.

Доведення. Дана теорема випливає з (4) та тверджень з [1]. Дійсно, з попередніх оцінок для $\sigma(h)$ маємо, що

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h}{\Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(1 + T^2\Lambda^2)}},$$

тоді

$$\tilde{I}(\varepsilon_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln \left(\frac{T\Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(1 + T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon} + 1 \right)} d\varepsilon,$$

яке можна зробити як завгодно малим при певному підборі Λ і M . Тобто буде існувати таке розбиття Λ , для якого виконуватиметься згідно означення 1 умова

$$2 \exp \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} (\delta - \sqrt{8\delta \tilde{I}(\varepsilon_0)})^2 \right\} \leq \beta.$$

Розглянемо реалізацію даної теореми на прикладах різних спектральних функцій. Для цього спершу оцінимо інтеграл (8) в теоремі 1.

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\varepsilon_0) &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\ln \left(\frac{T\Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(1 + T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon} + 1 \right)} d\varepsilon < \\ &< \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{T\Lambda \sqrt{8F(\Lambda)(1 + T^2\Lambda^2)}}{2\varepsilon}} d\varepsilon = \sqrt{T\Lambda \varepsilon_0 \sqrt{8F(\Lambda)(1 + T^2\Lambda^2)}} = \\ &= 2\Lambda T \sqrt{\frac{F(\Lambda)}{M}} \cdot \sqrt[4]{1 + T^2\Lambda^2}. \end{aligned}$$

Підставимо даний результат в нерівність (7), отримаємо

$$M^2 \left(\delta - 4\sqrt{\delta\Lambda T} \cdot \sqrt[4]{\frac{F(\Lambda)}{M}} \cdot \sqrt[8]{1 + T^2\Lambda^2} \right)^2 \geq 4F(\Lambda)\Lambda^2 T^2 \ln \frac{2}{\beta}.$$

Підставляючи різні спектральні функції, точності і надійності, можемо одержати залежність числа M від довжини спектру Λ . Результати подані у зведеній таблиці 1.

Отже, наприклад, якщо для спектральної функції $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$ проміжок $[0, 100]$ розбити на $M = 561$ частин, тоді модель (1) наблизатиме випадковий процес $X(t)$ з точністю 0,001 та надійністю 0,99.

Комп'ютерно змодельємо процес (1) для даного часткового випадку, використовуючи середовище Python. Для цього потрібно змодельювати компоненти моделі (1), тобто гауссові випадкові величини η_{k1}, η_{k2} , для яких $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$ та випадкові величини ζ_k , що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Таблиця 1.

Залежність числа M від точності і надійності моделі.

			$F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$	$F(\Lambda) = \ln \frac{2e^{\Lambda}}{1+e^{\Lambda}}$
δ	β	Λ	M	M
0.01	0.1	30	56	51
		50	66	59
		100	83	75
0.01	0.01	30	82	73
		50	97	87
		100	122	109
0.001	0.01	30	377	332
		50	446	395
		100	561	497

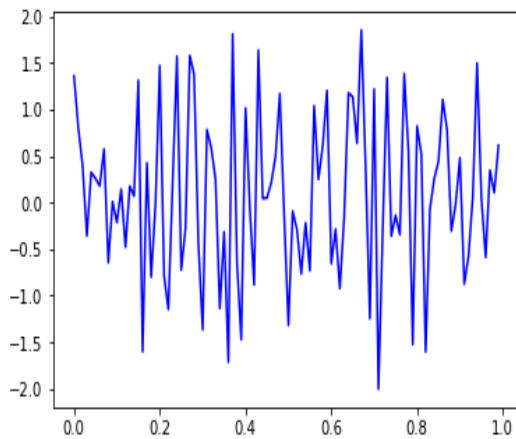


Рис. 1. Модель випадкового процесу, при $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$.

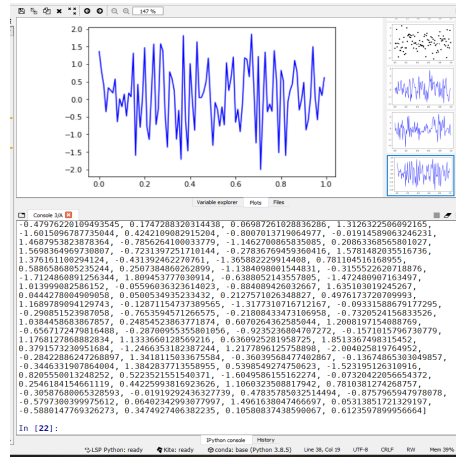


Рис. 2. Скріншот результату.

Для моделювання випадкових величин ζ_k використано метод Смірнова, а для моделювання нормально розподілених випадкових величин, використано готові функції бібліотеки `numpy.random`; часову змінну t взято з проміжку $[0, 1]$. Одержимо графічне представлення процесу на рис. 1.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі побудовано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з обмеженим спектром у рівномірній метриці з заданими точністю і надійністю. Для двох часткових випадків спектральних функцій, деяких значень точності і надійності одержано таблицю значень числа M в залежності від величини спектрального проміжку. Проаналізувавши її, видно, що із покращенням точності і надійності, зростає кількість доданків у моделі (1). Для точності 0,001, надійності 0,99 і спектральної функції $F(\Lambda) = 1 - e^{-\Lambda}$, одержано графічне представлення процесу (див. рис. 1).

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI.*, 2000.

2. Козаченко Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича I. *Теория вероятн. и матем. статист.*, 1984, Вып. 30, С. 92-107.
3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Моделивання випадкових процесів. *К.: Київський університет*, 1999. 223 с.
4. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича I. *Теор. ймовірн. та матем. стат.*, 1988. № 58, С. 45-60.
5. Михайлов Г. А. Приближенные модели случайных процессов и полей. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 1983. Т. 23, № 3, С. 558-566.
6. Тегза А. М. Про точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*, 2001. Вип. 6, С. 125-131.

Tegza A. M. Simulation of a Gaussian stationary random process with a limited spectrum with a given accuracy and reliability in a uniform metric.

The work is devoted to the further development of the theory of modeling of Gaussian stationary random processes by the method proposed and developed by Yu.V. Kozachenko. A Gaussian stationary centered random process with a limited spectrum with a given covariance function is considered. Using the entropy characteristics and the estimation of the sub-Gaussian standard, a partition of the spectral interval is obtained for the model, at which the model will approximate the process with the given accuracy and reliability. For the partial case, the process was modeled in the Python environment.

Keywords: Gaussian stationary random process, model of random process, entropy characteristics, accuracy, model reliability.

References

1. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI*.
2. Kozachenko, Yu. V. (1984). Random processes in Orlicz spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 30, 92-107 [In Russian].
3. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1999). Modeling of random processes. *Kyiv: Kyiv University* [In Ukrainian].
4. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1988). Accuracy of modeling of random processes in norms of Orlych spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 58, 45-60 [In Ukrainian].
5. Mihajlov, G. A. (1983). Approximate models of random processes and fields. *Journal of Comp. Math. and Physics*, 23(3), 558-566 [In Russian].
6. Tegza, A. M. (2001). On the accuracy and reliability of some models of Gaussian processes with a limited spectrum. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 6, 125-131 [In Ukrainian].

Одержано 30.10.2021

УДК 512.628.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).100-115](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).100-115)**С. А. Щоголев¹, В. В. Карапетров²**

¹ Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
завідувач кафедри вищої математики,
професор, доктор фізико-математичних наук
sergas1959@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8025-143X>

² Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
аспірант кафедри вищої математики
valentyn.karapetrov@stud.onu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1315-4968>

КРИТИЧНИЙ ВИПАДОК В ТЕОРІЇ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

При математичному описанні різноманітних явищ і процесів, що виникають в математичній фізиці, електротехніці, економіці, доводиться мати справу з матричними диференціальними рівняннями. Тому такі рівняння є актуальними як для математиків, так і для фахівців в інших галузях природознавства. В даній статті розглядається квазілінійне матричне диференціальне рівняння з коефіцієнтами, зображуваними у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними в певному сенсі коефіцієнтами та частотою (клас F). Різниця діагональних елементів матриць лінійної частини є суто уявними, тобто ми маємо справу з критичним випадком. Але між цими діагональними елементами припускаються певні співвідношення, що вказують на відсутність резонансу між власними частотами системи і частотою зовнішньої збуджуючої сили. Розглядається задача встановлення ознак існування у такого рівняння розв'язків класу F . За допомогою низки перетворень рівняння зводиться до рівняння некритичного випадку, і розв'язок класу F цього рівняння шукається методом послідовних наближень за допомогою принципу стискуючих відображень. Потім на підставі властивостей розв'язків перетвореного рівняння робляться висновки щодо властивостей початкового рівняння.

Ключові слова: матричні диференціальні рівняння, ряди Фур'є, повільно змінні параметри.

1. Вступ. Одним з актуальних розділів теорії звичайних диференціальних рівнянь є теорія матричних диференціальних рівнянь. Такі рівняння виникають при дослідженні різноманітних процесів в математичній фізиці, електротехніці та інших галузей, та їм присвячено багато праць, в яких досліджувалась розв'язність матричних рівнянь у різних функціональних просторах, крайові задачі для матричних диференціальних рівнянь та інші проблеми [1–5]. В даній статті продовжуються дослідження, розпочаті в працях [6, 7].

2. Основні позначення та означення. Нехай $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$.

Означення 1. Скажемо, що функція $p(t, \varepsilon)$ належить до класу $S(m; \varepsilon_0)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), якщо виконано наступні умови

- 1) $p : G(\varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{C}$,
- 2) $p(t, \varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ за t ;

3) $d^k p(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k(t, \varepsilon)$ ($0 \leq k \leq m$), причому

$$\|p\|_{S(m, \varepsilon_0)} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^m \sup_{G(\varepsilon_0)} |p_k(t, \varepsilon)| < +\infty.$$

Означення 2. Скажемо, що функція $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ належить до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), якщо ця функція зображується у вигляді:

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

причому

1) $f_n(t, \varepsilon) \in S(m, \varepsilon_0)$ ($n \in \mathbb{Z}$);

2) $\|f\|_{F(m; \varepsilon_0, \theta)} \stackrel{def}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m; \varepsilon_0)} < +\infty$;

3) $\theta(t, \varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau$, $\varphi \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in S(m, \varepsilon_0)$, $\inf_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0 > 0$.

Для функції $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ позначатимемо:

$$\Gamma_n[f(t, \varepsilon, \theta)] = f_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, \varepsilon, \theta) \exp(-in\theta) d\theta.$$

Множина функцій класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$. Має місце ланцюжок включень: $F(0; \varepsilon_0; \theta) \supset F(1; \varepsilon_0; \theta) \supset \dots \supset F(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Нехай задано дві функції класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$:

$$u(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)), \quad v(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [8]:

$$(uv)(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t, \varepsilon) v_s(t, \varepsilon) \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)). \quad (1)$$

Очевидно, що $uv \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$. Нехай $u, v \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$, $k = \text{const}$. Тоді:

1) $\|ku\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$;

2) $\|u + v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} + \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$;

3) $\|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)}$;

4) $\|uv\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq 2^m \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}$.

Дійсно, при $m = 0$ згідно з формулою (1) маємо: $\|uv\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq \|u\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)}$. Далі, на підставі властивостей 1) – 3):

$$\|uv\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k (uv)}{\partial t^k} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq \sum_{k=0}^m \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \left\| \frac{\partial^{k-j} v}{\partial t^{k-j}} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \leq$$

$$\leq 2^m \left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{F(0; \varepsilon_0; \theta)} \right) = 2^m \|u\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|v\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}.$$

На підставі властивості 4) можна стверджувати, що простір $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ утворює банахову алгебру [9].

Означення 3. Скажемо, що матриця $A(t, \varepsilon) = (a_{jk}(t, \varepsilon))_{j, k = \overline{1, N}}$ належить до класу $S_2(m; \varepsilon_0)$, ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), якщо $a_{jk} \in S(m; \varepsilon_0)$ ($j, k = \overline{1, N}$).

Визначимо норму:

$$\|A(t, \varepsilon)\|_{S_2(m; \varepsilon_0)} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{k=1}^N \|a_{jk}(t, \varepsilon)\|_{S(m; \varepsilon_0)}.$$

Означення 4. Скажемо, що матриця $B(t, \varepsilon, \theta) = (b_{jk}(t, \varepsilon, \theta))_{j, k = \overline{1, N}}$ належить до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ ($m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), якщо $b_{jk}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$ ($j, k = \overline{1, N}$).

Визначимо норму

$$\|B(t, \varepsilon, \theta)\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{k=1}^N \|b_{jk}(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}.$$

Очевидно, що якщо $B_1 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, $B_2 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, то $B_1 + B_2, B_1 B_2 \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, і виконано: $\|B_1 + B_2\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq \|B_1\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} + \|B_2\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)}$, $\|B_1 B_2\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq 2^m \|B_1\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)} \cdot \|B_2\|_{F_2(m; \varepsilon_0; \theta)}$.

Для матриці $A = (a_{jk})_{j, k = \overline{1, N}}$ будемо позначати:

$$(A)_{jk} = a_{jk}, \quad j, k = \overline{1, N}.$$

3. Постановка задачі. Розглядається матричне диференціальне рівняння:

$$\frac{dX}{dt} = A(t, \varepsilon)X - XB(t, \varepsilon) + P(t, \varepsilon, \theta) + \mu\Phi(t, \varepsilon, \theta, X), \quad (2)$$

де X – невідома квадратна матриця порядку N , що належить деякій замкненій обмеженій області $D \subset \mathbb{C}^{N \times N}$, де $\mathbb{C}^{N \times N}$ – простір комплекснозначних $(N \times N)$ -матриць. $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon_0)$, $P(t, \varepsilon, \theta) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$. Щодо матриці-функції $\Phi(t, \varepsilon, \theta, X)$ припускається, що вона належить до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ відносно t, ε, θ і неперервна за X в D . $\mu \in (0, 1)$ – дійсний параметр.

Позначимо $\lambda_j^1(t, \varepsilon), \lambda_j^2(t, \varepsilon)$ ($j = \overline{1, N}$) – власні значення відповідно матриць $A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon)$. І припускатимемо виконання наступних умов:

$$1^0. \inf_{G(\varepsilon_0)} |\lambda_j^1(t, \varepsilon) - \lambda_k^1(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)| \geq b_0 > 0,$$

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\lambda_j^2(t, \varepsilon) - \lambda_k^2(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)| \geq b_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, j, k = \overline{1, N}, j \neq k.$$

$$2^0. \lambda_j^1(t, \varepsilon) - \lambda_k^2(t, \varepsilon) = i\omega_{jk}(t, \varepsilon), \quad \omega_{jk}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R},$$

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\omega_{jk}(t, \varepsilon) - n\varphi(t, \varepsilon)| \geq b_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, j, k = \overline{1, N}.$$

Вивчається питання про наявність частинних розв'язків класів $F(m_1; \varepsilon_1; \theta)$ $m_1 \leq m; \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ рівняння (2). Умова 2⁰ показує, що у даному випадку ми маємо справу з критичним випадком, на відміну від роботи [6], де припускалося

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\operatorname{Re}(\lambda_j^1(t, \varepsilon) - \lambda_k^2(t, \varepsilon))| \geq b_0 > 0 \quad (j, k = \overline{1, N}).$$

4. Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай задано скалярне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t, \varepsilon)x + u(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)), \tag{3}$$

де $\lambda(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$, $\inf_{G(\varepsilon_0)} |\operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon)| = \gamma > 0$, $u(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$. Тоді рівняння (3) має єдиний частинний розв'язок $x(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$. Цей розв'язок дається формулою:

$$x(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \int_T^t u(\tau, \varepsilon, \theta(\tau, \varepsilon)) \exp\left(\int_\tau^t \lambda(s, \varepsilon) ds\right) d\tau, \tag{4}$$

де

$$T = \begin{cases} -\infty, & \operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon) \leq -\gamma < 0, \\ +\infty, & \operatorname{Re} \lambda(t, \varepsilon) \geq \gamma > 0, \end{cases}$$

і, крім того, існує $K_0 \in (0, +\infty)$ таке, що

$$\|x(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)} \leq K_0 \|u(t, \varepsilon, \theta)\|_{F(m; \varepsilon_0; \theta)}. \tag{5}$$

Доведення леми наведено в роботі [6].

Лема 2. *Нехай рівняння (2) таке, що існують матриці $L_1(t, \varepsilon), L_2(t, \varepsilon) \in S_2(m; \varepsilon_0)$ такі, що*

a) $|\det L_k(t, \varepsilon)| \geq a_0 > 0, (k = 1, 2),$

б) $L_1^{-1}(t, \varepsilon)A(t, \varepsilon)L_1(t, \varepsilon) = D_1(t, \varepsilon) = (d_{jk}^1(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1, N}},$

$L_2(t, \varepsilon)B(t, \varepsilon)L_2^{-1}(t, \varepsilon) = D_2(t, \varepsilon) = (d_{jk}^2(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1, N}},$

де $D_1(t, \varepsilon), D_2(t, \varepsilon)$ – нижні трикутні матриці N -го порядку, що належать до класу $S_2(m; \varepsilon_0)$; $d_{jj}^1(t, \varepsilon) = \lambda_j^1(t, \varepsilon), d_{kk}^2(t, \varepsilon) = \lambda_k^2(t, \varepsilon)$.

Тоді підстановкою

$$X = L_1(t, \varepsilon)Y L_2(t, \varepsilon) \tag{6}$$

рівняння (2) зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = & D_1(t, \varepsilon)Y - YD_2(t, \varepsilon) - \varepsilon H_1(t, \varepsilon)Y - \varepsilon YH_2(t, \varepsilon) + \\ & + F_1(t, \varepsilon, \theta) + \mu \Phi_1(t, \varepsilon, \theta, Y), \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$H_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} L_1^{-1}(t, \varepsilon) \frac{dL_1(t, \varepsilon)}{dt}, \quad H_2(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{dL_2(t, \varepsilon)}{dt} L_2^{-1}(t, \varepsilon),$$

$$F_1(t, \varepsilon, \theta) = L_1^{-1}(t, \varepsilon)F(t, \varepsilon, \theta)L_2^{-1}(t, \varepsilon),$$

$$\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, Y) = L_1^{-1}(t, \varepsilon)\Phi(t, \varepsilon, \theta, L_1(t, \varepsilon)Y L_2(t, \varepsilon))L_2^{-1}(t, \varepsilon).$$

Доведення. Щоб переконатися в справедливості леми, достатньо в рівнянні (2) зробити підстановку (6) та використати умови леми.

Лема 3. Нехай задано лінійне матричне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q B_{1l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right) X - X \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q B_{2l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right), \quad (8)$$

$D_1(t, \varepsilon), D_2(t, \varepsilon)$ – ті ж самі, що й в лемі 2, $B_{1l}(t, \varepsilon, \theta), B_{2l}(t, \varepsilon, \theta)$ ($l = \overline{1, q}$) належать до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, $\mu \in (0, 1)$ – малий дійсний параметр.

Тоді для достатньо малих значень μ існує перетворення

$$X = \left(E + \sum_{l=1}^q Q_{1l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right) Y \left(E + \sum_{l=1}^q Q_{2l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right), \quad (9)$$

де $Q_{1l}(t, \varepsilon, \theta), Q_{2l}(t, \varepsilon, \theta)$ ($l = \overline{1, q}$) належать до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, що приводить рівняння (8) до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} = & \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon) \mu^l + \varepsilon \sum_{l=1}^q V_{1l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l + \mu^{q+1} W_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right) Y - \\ & - Y \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon) \mu^l + \varepsilon \sum_{l=1}^q V_{2l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l + \mu^{q+1} W_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right), \quad (10) \end{aligned}$$

де $U_{1l}(t, \varepsilon), U_{2l}(t, \varepsilon)$ ($l = \overline{1, q}$) – діагональні матриці, що належать до класу $S_2(m; \varepsilon_0)$, V_{1l}, V_{2l}, W_1, W_2 ($l = \overline{1, q}$) – квадратні матриці, що належать до класу $F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$.

Доведення. Підставимо вираз (9) в рівняння (8) і вимагатимемо, щоб перетворене рівняння мало вигляд (10). Тоді одержимо наступні матричні рівняння для визначення матриць $Q_{11} \dots Q_{1q} \quad Q_{21} \dots Q_{2q}$:

$$\frac{dQ_{11}}{dt} = D_1(t, \varepsilon)Q_{11} - Q_{11}D_1(t, \varepsilon) + B_{11}(t, \varepsilon, \theta) - U_{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon V_{11}(t, \varepsilon, \theta), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{1s}}{dt} = & D_1(t, \varepsilon)Q_{1s} - Q_{1s}D_1(t, \varepsilon) + B_{1s}(t, \varepsilon, \theta) + \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{1\nu}(t, \varepsilon, \theta)Q_{1, s-\nu} - \\ & - \sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{1\nu}U_{1, s-\nu} - \varepsilon \sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{1\nu}V_{1, s-\nu} - U_{1s}(t, \varepsilon) - \varepsilon V_{1s}(t, \varepsilon, \theta), \quad s = \overline{2, q}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\frac{dQ_{21}}{dt} = D_2(t, \varepsilon)Q_{21} - Q_{21}D_2(t, \varepsilon) - B_{21}(t, \varepsilon, \theta) + U_{21}(t, \varepsilon) + \varepsilon V_{21}(t, \varepsilon, \theta), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{2s}}{dt} = & D_2(t, \varepsilon)Q_{2s} - Q_{2s}D_2(t, \varepsilon) - B_{2s}(t, \varepsilon, \theta) - \sum_{\nu=1}^{s-1} B_{2\nu}(t, \varepsilon, \theta)Q_{2, s-\nu} + \\ & + \sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{2\nu}U_{2, s-\nu} + \varepsilon \sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{2\nu}V_{2, s-\nu} + U_{2s}(t, \varepsilon) + \varepsilon V_{2s}(t, \varepsilon, \theta), \quad s = \overline{2, q}. \quad (14) \end{aligned}$$

Матриці $W_1(t, \varepsilon, \theta, \mu)$, $W_2(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ визначаються з співвідношень:

$$\begin{aligned} \left(E + \sum_{l=1}^q Q_{1l} \mu^l\right) W_1 &= \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} (B_{1\sigma} Q_{1\sigma} - Q_{1\sigma} U_{1\sigma}) \right] \mu^s - \\ &- \varepsilon \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} Q_{1\sigma} V_{1\delta} \right] \mu^s, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left(E + \sum_{l=1}^q Q_{2l} \mu^l\right) W_2 &= - \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} (B_{2\sigma} Q_{2\sigma} - Q_{2\sigma} U_{2\sigma}) \right] \mu^s + \\ &+ \varepsilon \sum_{s=0}^{q-1} \left[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1} Q_{2\sigma} V_{2\delta} \right] \mu^s. \end{aligned} \quad (16)$$

Покладемо $Q_{1s} = (q_{jk}^{1s})_{j,k=\overline{1,N}}$, $Q_{2s} = (q_{jk}^{2s})_{j,k=\overline{1,N}}$,
 $B_{1s}(t, \varepsilon, \theta) = (b_{jk}^{1s}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}$, $B_{2s}(t, \varepsilon, \theta) = (b_{jk}^{2s}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}$,
 $U_{1s}(t, \varepsilon) = (u_{jk}^{1s}(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$, $U_{2s}(t, \varepsilon) = (u_{jk}^{2s}(t, \varepsilon))_{j,k=\overline{1,N}}$,
 $V_{1s}(t, \varepsilon, \theta) = (v_{jk}^{1s}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}$, $V_{2s}(t, \varepsilon, \theta) = (v_{jk}^{2s}(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}$, $s=1,2$,
і запишемо системи (11) – (14) в компонентній формі:

$$\frac{dq_{jk}^{11}}{dt} = \sum_{\nu=1}^j d_{j\nu}^1(t, \varepsilon) q_{\nu k}^{11} - \sum_{\nu=k}^N d_{\nu k}^1(t, \varepsilon) q_{j\nu}^{11} + b_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{jk}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta), \quad (17)$$

$j, k = \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dq_{jk}^{1s}}{dt} &= \sum_{\nu=1}^j d_{j\nu}^1(t, \varepsilon) q_{\nu k}^{1s} - \sum_{\nu=k}^N d_{\nu k}^1(t, \varepsilon) q_{j\nu}^{1s} + b_{jk}^{1s}(t, \varepsilon, \theta) + \\ &+ \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} B_{1\nu}(t, \varepsilon, \theta) Q_{1, s-\nu} \right)_{jk} - \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{1\nu} U_{1, s-\nu}(t, \varepsilon) \right)_{jk} - \varepsilon \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{1\nu} V_{1, s-\nu}(t, \varepsilon, \theta) \right)_{jk} - \\ &- u_{jk}^{1s}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{jk}^{1s}(t, \varepsilon, \theta), \quad s = \overline{2, q}, \quad j, k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{dq_{jk}^{21}}{dt} = \sum_{\nu=1}^j d_{j\nu}^2(t, \varepsilon) q_{\nu k}^{21} - \sum_{\nu=k}^N d_{\nu k}^2(t, \varepsilon) q_{j\nu}^{21} - b_{jk}^{21}(t, \varepsilon, \theta) + u_{jk}^{21}(t, \varepsilon) + \varepsilon v_{jk}^{21}(t, \varepsilon, \theta), \quad (19)$$

$j, k = \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned} \frac{dq_{jk}^{2s}}{dt} &= \sum_{\nu=1}^j d_{j\nu}^2(t, \varepsilon) q_{\nu k}^{2s} - \sum_{\nu=k}^N d_{\nu k}^2(t, \varepsilon) q_{j\nu}^{2s} - b_{jk}^{2s}(t, \varepsilon, \theta) - \\ &- \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} B_{2\nu}(t, \varepsilon, \theta) Q_{2, s-\nu} \right)_{jk} + \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{2\nu} U_{2, s-\nu}(t, \varepsilon) \right)_{jk} + \varepsilon \left(\sum_{\nu=1}^{s-1} Q_{2\nu} V_{2, s-\nu}(t, \varepsilon, \theta) \right)_{jk} - \end{aligned}$$

$$+u_{jk}^{2s}(t, \varepsilon) + \varepsilon v_{jk}^{2s}(t, \varepsilon, \theta), \quad s = \overline{2, q}, \quad j, k = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Розглянемо рівняння (17). Запишемо його детальніше:

$$\frac{dq_{1N}^{11}}{dt} = (d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^1(t, \varepsilon)) q_{1N}^{11} + b_{1N}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{1N}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{1N}^{11}(t, \varepsilon, \theta), \quad (21)$$

...

$$\frac{dq_{11}^{11}}{dt} = - \sum_{\nu=2}^N d_{\nu 1}^1(t, \varepsilon) q_{1\nu}^{11} + b_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{11}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta), \quad (22)$$

$$\frac{dq_{2N}^{11}}{dt} = (d_{22}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^1(t, \varepsilon)) q_{2N}^{11} + d_{2N}^1(t, \varepsilon) q_{1N}^{11} + b_{2N}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{2N}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{2N}^{11}(t, \varepsilon, \theta),$$

...

$$\begin{aligned} \frac{dq_{21}^{11}}{dt} &= (d_{22}^1(t, \varepsilon) - d_{11}^1(t, \varepsilon)) q_{21}^{11} + d_{21}^1(t, \varepsilon) q_{11}^{11} - \\ &- \sum_{\nu=2}^N d_{\nu 1}^1(t, \varepsilon) q_{2\nu}^{11} + b_{21}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{21}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{21}^{11}(t, \varepsilon, \theta), \end{aligned}$$

...

$$\frac{dq_{NN}^{11}}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N-1} d_{N\nu}^1(t, \varepsilon) q_{\nu N}^{11} + b_{NN}^{11} - u_{NN}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{NN}^{11}(t, \varepsilon, \theta),$$

...

$$\begin{aligned} \frac{dq_{N1}^{11}}{dt} &= (d_{NN}^1(t, \varepsilon) - d_{11}^1(t, \varepsilon)) q_{N1}^{11} + \sum_{\nu=1}^{N-1} d_{N\nu}^1(t, \varepsilon) q_{\nu 1}^{11} - \sum_{\nu=2}^N d_{\nu 1}^1(t, \varepsilon) q_{N\nu}^{11} + \\ &+ b_{N1}^{11}(t, \varepsilon, \theta) - u_{N1}^{11}(t, \varepsilon) - \varepsilon v_{N1}^{11}(t, \varepsilon, \theta). \end{aligned}$$

Розглянемо рівняння (21). Нехай

$$b_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{jk,n}^{11}(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)), \quad j, k = \overline{1, N}.$$

Покладемо

$$q_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{jk,n}^{11}(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)), \quad j, k = \overline{1, N}.$$

Тоді

$$q_{1N}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_{1N,n}^{11}(t, \varepsilon)}{d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^1(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)} \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$u_{1N}^{11}(t, \varepsilon) = 0,$$

$$v_{1N}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{b_{1N,n}^{11}(t, \varepsilon)}{d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^1(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)} \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Аналогічно

$$q_{1N}^{21}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_{1N,n}^{21}(t, \varepsilon)}{d_{11}^2(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)} \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$u_{1N}^{21}(t, \varepsilon) = 0,$$

$$v_{1N}^{21}(t, \varepsilon, \theta) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{b_{1N,n}^{21}(t, \varepsilon)}{d_{11}^2(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)} \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Внаслідок умови 1^0 маємо:

$$q_{1n}^{11}(t, \varepsilon, \theta), q_{1n}^{21}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta), v_{1n}^{11}(t, \varepsilon, \theta), v_{1n}^{21}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta).$$

Аналогічно отримуємо: $q_{1,N-1}^{11}, \dots, q_{12}^{11}, q_{1,N-1}^{21}, \dots, q_{12}^{21} \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$,
 $v_{1,N-1}^{11}, \dots, v_{12}^{11}, v_{1,N-1}^{21}, \dots, v_{12}^{21} \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$.

Далі розглянемо рівняння (22). Функція

$$c_{11}^{11} = -\sum_{\nu=2}^N d_{\nu 1}^1(t, \varepsilon) q_{1\nu}^{11} + b_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta),$$

очевидно, належить до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$. Покладемо:

$$u_{11}^{11}(t, \varepsilon) = \Gamma_0[c_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta)],$$

$$q_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[c_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta)]}{in\varphi(t, \varepsilon)} \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$v_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma_n[c_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta)]}{in\varphi(t, \varepsilon)} \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Аналогічно

$$u_{11}^{21}(t, \varepsilon) = \Gamma_0[c_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta)],$$

$$q_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n[c_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta)]}{in\varphi(t, \varepsilon)} \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$v_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma_n[c_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta)]}{in\varphi(t, \varepsilon)} \right) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

де

$$c_{11}^{21} = -\sum_{\nu=2}^N d_{\nu 1}^2(t, \varepsilon) q_{1\nu}^{21} - b_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta).$$

Очевидно, що $q_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta)$, $q_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta)$ належать до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, $u_{11}^{11}(t, \varepsilon)$, $u_{11}^{21}(t, \varepsilon)$ належать до класу $S(m; \varepsilon)$, $v_{11}^{11}(t, \varepsilon, \theta)$, $v_{11}^{21}(t, \varepsilon, \theta)$ належать до класу $F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$.

Аналогічно показуємо, що функції $u_{22}^{11}(t, \varepsilon)$, $u_{22}^{21}(t, \varepsilon)$, \dots , $u_{NN}^{11}(t, \varepsilon)$, $u_{NN}^{21}(t, \varepsilon)$ належать до класу

$$S(m; \varepsilon_0), q_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta), q_{jk}^{21}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m; \varepsilon_0; \theta) v_{jk}^{11}(t, \varepsilon, \theta), v_{jk}^{21}(t, \varepsilon, \theta) \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta) (j \neq k).$$

Таким чином, матриці $U_{11}(t, \varepsilon), \dots, U_{1q}(t, \varepsilon), U_{21}(t, \varepsilon), \dots, U_{2q}(t, \varepsilon)$ – діагональні з елементами, що належать до класу $S(m; \varepsilon)$. Матриці W_1, W_2 визначаються для достатньо малих μ з рівнянь (15), (16).

Лему доведено.

Припустимо, що невідома матриця Y у рівнянні (7) належить деякій замкненій і обмеженій області $D^* \subset \mathbb{C}^{N \times N}$.

Лема 4. *Нехай матриця-функція $\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, Y)$ у рівнянні (7) має в D^* неперервні похідні за Y в сенсі Фреше [9] до порядку $2q + 1$ включно, і якщо $Y \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, то ці похідні також з класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$. Тоді існує таке $\mu_0 \in (0, 1)$, що для всіх $\mu_1 \in (0, \mu_0)$ існує перетворення*

$$Y = \Psi_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \Psi_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) Z \Psi_3(t, \varepsilon, \theta, \mu), \quad (23)$$

де $Z \in D^{**} \subset \mathbb{C}^{N \times N}$, $\Psi_1(t, \varepsilon, \theta, \mu), \Psi_2(t, \varepsilon, \theta, \mu), \Psi_3(t, \varepsilon, \theta, \mu) \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, що зводить рівняння (7) до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} = & \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) Z - Z \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) + \\ & + \varepsilon K(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu^{2q} C(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) Z - \varepsilon Z V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ & + \mu^{q+1} (R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) Z - Z R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu)) + \mu \Phi_2(t, \varepsilon, \theta, Z, \mu), \end{aligned} \quad (24)$$

де $K \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$, $U_{1l}, U_{2l} \in S_2(m; \varepsilon_0)$, $R_1, R_2, C \in F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$, $V_1, V_2 \in F(m-1; \varepsilon_0; \theta)$, матриця-функція Φ_2 належить до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ відносно t, ε, θ , неперервно диференційовна в сенсі Фреше за Z і містить доданки не нижче другого порядку відносно Z .

Доведення. Поряд з рівнянням (7) розглянемо допоміжне рівняння:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon) \Xi - \Xi D_2(t, \varepsilon) + F_1(t, \varepsilon, \theta) + \mu \Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi), \quad (25)$$

де t, ε, φ розглядаються як сталі.

Оскільки матриці-функції F_1, Φ_1 є 2π -періодичними функціями змінної θ , то для знаходження 2π -періодичного по θ розв'язку рівняння (25) можна застосувати метод малого параметра Пуанкаре [10], згідно якому у випадку аналітичності відносно Ξ нелінійності $\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi)$ цей розв'язок шукається у вигляді ряду за степенями малого параметру μ . У випадку виконання умови леми наближений 2π -періодичний по θ розв'язок рівняння (25) можна шукати у вигляді часткової суми цього ряду:

$$\Xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) = \sum_{k=0}^{2q-1} \Xi_k(t, \varepsilon, \theta) \mu^k. \quad (26)$$

При цьому матриця-функція $\Xi_0(t, \varepsilon, \theta)$ визначиться з рівняння:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_0}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon)\Xi_0 - \Xi_0 D_2(t, \varepsilon) + F_1(t, \varepsilon, \theta). \quad (27)$$

Згідно з термінологією теорії коливань назвемо це рівняння *породжуючим*.

Нехай

$$\Xi_0 = (\xi_{jk}^0(t))_{j,k=\overline{1,N}}, \quad F_1(t, \varepsilon, \theta) = (f_{jk}^1(t, \varepsilon, \theta))_{j,k=\overline{1,N}}.$$

Тоді, розписуючи рівняння (27) у компонентній формі, прийдемо до скалярної лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{jk}^0}{d\theta} = \sum_{s=1}^j d_{js}^1(t, \varepsilon) \xi_{sk}^0 - \sum_{s=k}^N d_{sk}^2(t, \varepsilon) \xi_{js}^0 + f_{jk}^1(t, \varepsilon, \theta), \quad j, k = \overline{1, N}. \quad (28)$$

Або

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{1N}^0}{d\theta} &= (d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon)) \xi_{1N}^0 + f_{1N}^1(t, \varepsilon, \theta), \\ &\dots \\ \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{11}^0}{d\theta} &= (d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{11}^2(t, \varepsilon)) \xi_{11}^0 - \sum_{s=2}^N d_{s1}^2(t, \varepsilon) \xi_{1s}^0 + f_{11}^1(t, \varepsilon, \theta), \\ \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{2N}^0}{d\theta} &= (d_{22}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon)) \xi_{2N}^0 + d_{21}^1(t, \varepsilon) \xi_{1n}^0 + f_{2N}^1(t, \varepsilon, \theta), \\ &\dots \\ \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{21}^0}{d\theta} &= (d_{22}^1(t, \varepsilon) - d_{11}^2(t, \varepsilon)) \xi_{21}^0 + d_{21}^1(t, \varepsilon) \xi_{11}^0 - \sum_{s=2}^N d_{s1}^2(t, \varepsilon) \xi_{2s}^0 + f_{21}^1(t, \varepsilon, \theta), \\ &\dots \\ \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{NN}^0}{d\theta} &= (d_{NN}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon)) \xi_{NN}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^1(t, \varepsilon) \xi_{sN}^0 + f_{NN}^1(t, \varepsilon, \theta), \\ &\dots \\ \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\xi_{N1}^0}{d\theta} &= (d_{NN}^1(t, \varepsilon) - d_{11}^2(t, \varepsilon)) \xi_{N1}^0 + \sum_{s=1}^{N-1} d_{Ns}^1(t, \varepsilon) \xi_{s1}^0 - \sum_{s=2}^N d_{s1}^2(t, \varepsilon) \xi_{Ns}^0 + f_{N1}^1(t, \varepsilon, \theta). \end{aligned}$$

Розглянемо перше з рівнянь цієї системи. Розкладемо функцію $f_{1N}^1(t, \varepsilon, \theta)$ в абсолютно та рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$f_{1N}^1(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{1N,n}^1(t, \varepsilon) \exp(in\theta)$$

і шукатимемо функцію ξ_{1N}^0 у вигляді аналогічного ряду

$$\xi_{1N}^0(t, \varepsilon, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{1N,n}^1(t, \varepsilon) \exp(in\theta).$$

Тоді відносно $\xi_{1N,n}^1(t, \varepsilon)$ дістанемо рівняння

$$(d_{11}^1(t, \varepsilon) - d_{NN}^2(t, \varepsilon) - in\varphi(t, \varepsilon)) \xi_{1N,n}^0 = -f_{1N,n}^1(t, \varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Внаслідок умови 2^0 функція $\xi_{1N}^0(t, \varepsilon, \theta)$ є функцією класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$. Аналогічно і решта функцій $\xi_{jk}^0(t, \varepsilon, \theta)$ ($j, k = \overline{1, N}$) внаслідок тієї ж умови 2^0 є функціями класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, а це означає, що матриця-функція $\Xi_0(t, \varepsilon, \theta)$ належить до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Запишемо тепер часткову суму ряду Тейлора матриці-функції $\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi)$:

$$\Phi_1^{2q-1} = \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{\Phi_1^{(k)}(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)}{k!} (\Xi - \Xi_0)^k. \quad (29)$$

Тоді коефіцієнти $\Xi_k(t, \varepsilon, \theta)$ ($k = \overline{1, 2q-1}$) суми (26) визначаються як 2π -періодичні за θ розв'язки ланцюжка рівнянь:

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_0}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon)\Xi_0 - \Xi_0 D_2(t, \varepsilon) + F_1(t, \varepsilon, \theta), \quad (30)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_1}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon)\Xi_1 - \Xi_1 D_2(t, \varepsilon) + \Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0), \quad (31)$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_2}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon)\Xi_2 - \Xi_2 D_2(t, \varepsilon) + \frac{d\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)}{d\theta} \Xi_1,$$

$$\varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_3}{d\theta} = D_1(t, \varepsilon)\Xi_3 - \Xi_3 D_2(t, \varepsilon) + \frac{d\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)}{d\theta} \Xi_2 + \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)}{d\theta^2} \Xi_1,$$

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) \frac{d\Xi_s}{d\theta} &= D_1(t, \varepsilon)\Xi_s - \Xi_s D_2(t, \varepsilon) + \frac{d\Phi_1(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)}{d\theta} \Xi_{s-1} + \\ &+ P_s(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0, \dots, \Xi_{s-2}), \quad s = \overline{4, 2q-1}, \end{aligned}$$

де P_s – матричні поліноми відносно Ξ_0, \dots, Ξ_{s-2} з коефіцієнтами, що належать до класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$.

Рівняння (30) – породжуюче рівняння, і наявність у нього розв'язку класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$ встановлено вище. За властивостями функції Φ_1 вільний член $\Phi(t, \varepsilon, \theta, \Xi_0)$ рівняння (31) також є функцією класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$. І, отже, функція $\Xi_1(t, \varepsilon, \theta)$ є функцією класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$. Аналогічно і всі функції Ξ_2, \dots, Ξ_s теж є функціями класу $F_2(m; \varepsilon_0; \theta)$. Отже, функція (26) є функцією того ж класу.

Здійснимо у рівнянні (7) підстановку

$$Y = \Xi(t, \varepsilon, \theta, \mu) + Z_1, \quad (32)$$

де Z_1 – нова невідома функція. Відносно неї дістанемо рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q B_{1l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right) Z_1 - Z_1 \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q B_{2l}(t, \varepsilon, \theta) \mu^l \right) + \\ &+ \varepsilon K_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu^{2q} C_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon H_3(t, \varepsilon, \theta, \mu) Z_1 - \varepsilon Z_1 H_4(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ &+ \mu^{q+1} (R_3(t, \varepsilon, \theta, \mu) Z_1 - Z_1 R_4(t, \varepsilon, \theta, \mu)) + \mu \Phi_3(t, \varepsilon, \theta, Z_1, \mu). \end{aligned}$$

Тепер на підставі леми 3 зводимо це рівняння до вигляду (24).

Лему доведено.

5. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай рівняння (24) таке, що існує $q_0 \in \mathbb{N}$ ($1 \leq q_0 \leq q$) таке, що*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\operatorname{Re}((U_{1q_0}(t, \varepsilon))_{jj} - (U_{2q_0}(t, \varepsilon))_{kk})| \geq b_0 > 0 \quad (j, k = \overline{1, N}),$$

і для будь-якого $l = \overline{1, q_0 - 1}$ (якщо $q_0 > 1$) виконано:

$$\operatorname{Re}((U_{1l}(t, \varepsilon))_{jj} - (U_{2l}(t, \varepsilon))_{kk}) \equiv 0 \quad (j, k = \overline{1, N}).$$

Тоді існують $\mu_3 \in (0, 1)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0, \varepsilon_0)$ такі, що для будь-яких $\mu \in (0, \mu_3)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\mu))$ рівняння (24) має частинний розв'язок, що належить до класу $F_2(m - 1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$.

Доведення. Будемо виходити з твердження лема 4. Здійснимо в рівнянні (24) підстановку

$$Z = \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0}} \tilde{Z}, \tag{33}$$

де \tilde{Z} – нова невідома матриця-функція. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Z}}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon)\mu^l \right) \tilde{Z} - \tilde{Z} \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon)\mu^l \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} K(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} C(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu)\tilde{Z} - \varepsilon\tilde{Z}V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ &+ \mu^{q+1} \left(R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu)\tilde{Z} - \tilde{Z}R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}, \mu). \end{aligned} \tag{34}$$

Розглянемо відповідне лінійне неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Z}_0}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon)\mu^l \right) \tilde{Z}_0 - \tilde{Z}_0 \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon)\mu^l \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} K(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} C(t, \varepsilon, \theta, \mu). \end{aligned} \tag{35}$$

На підставі лема 2 з роботи [7] можна зробити висновок, що рівняння (35) має єдиний частинний розв'язок, що належить до класу $F_2(m - 1; \varepsilon_0; \theta)$, причому існує $T_1 \in (0, +\infty)$ таке, що

$$\begin{aligned} &\|\tilde{Z}_0(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq \\ &\leq \frac{T_1}{b_0\mu^{q_0}} \left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} \|K(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} \|C(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right) < \\ &< \frac{T_1}{b_0} \left(\|K(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} + \|C(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right). \end{aligned} \tag{36}$$

Розв'язок класу $F_2(m - 1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$ рівняння (34) шукатимемо методом послідовних наближень, обираючи в якості початкового наближення $\tilde{Z}_0(t, \varepsilon, \theta, \mu)$, а

подальші наближення визначивши як розв'язки класу $F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)$ лінійних неоднорідних матричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{Z}_{\nu+1}}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) \tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_{\nu+1} \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon \mu^{q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} K(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon + \mu^{2q}} C(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) \tilde{Z}_\nu - \varepsilon \tilde{Z}_\nu V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ &+ \mu^{q+1} \left(R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) \tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_\nu R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}_\nu, \mu). \end{aligned} \quad (37)$$

Нехай

$$\Omega = \left\{ \tilde{Z} \in F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta) : \|\tilde{Z} - \tilde{Z}_0\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq \rho \right\}.$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \sup_{\tilde{Z} \in \Omega} \|\tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}, \\ V &= \max \left(\|V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}, \|V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right), \\ R &= \max \left(\|R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}, \|R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu)\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right). \end{aligned}$$

З того, що $\tilde{\Phi}_2$ диференційовна в сенсі Фреше за \tilde{Z} , а область Ω замкнена і обмежена, випливає, що існує $L(\rho) \in (0, +\infty)$ таке, що для будь-яких $Z, \bar{Z} \in \Omega$ виконано:

$$\left\| \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, Z, \mu) - \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \bar{Z}, \mu) \right\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq L(\rho) \|Z - \bar{Z}\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}. \quad (38)$$

Покажемо, що при певних співвідношеннях між параметрами ε і μ всі наближення, що визначаються формулами (37), залишаються всередині області Ω . Очевидно, що $\tilde{Z}_0 \in \Omega$. Припустимо за індукцією, що $\tilde{Z}_\nu \in \Omega$, і розглянемо:

$$\begin{aligned} \frac{d(\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_0)}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) (\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_0) - \\ &- (\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_0) \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) + \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) \tilde{Z}_\nu - \varepsilon \tilde{Z}_\nu V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ &+ \mu^{q+1} \left(R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) \tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_\nu R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}_\nu, \mu). \end{aligned} \quad (39)$$

Оскільки $\tilde{Z}_\nu \in \Omega$, то

$$\|\tilde{Z}_\nu\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq \rho + \|\tilde{Z}_0\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)}.$$

На підставі нерівності (36) і внаслідок умов теореми маємо:

$$\begin{aligned} &\|\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_0\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \leq \\ &\leq \frac{T_1}{b_0 \mu^{q_0}} \left[2^{m+1} (\varepsilon V + \mu^{q+1} R) \left(\rho + \|\tilde{Z}_0\|_{F_2(m-1; \varepsilon_0; \theta)} \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} M(\rho) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Отже, при виконанні умови

$$\frac{T_1}{b_0\mu^{q_0}} \left[2^{m+1} (\varepsilon V + \mu^{q+1} R) \left(\rho + \|\tilde{Z}_0\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} M(\rho) \right] \leq \rho_0 < \rho \quad (41)$$

потрібну належність забезпечено.

Доведемо тепер збіжність процесу, що визначається формулами (37), до розв'язку класу $F_2(m-1; \varepsilon_1(\mu); \theta)$ рівняння (34). Розглянемо:

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_\nu)}{dt} &= \left(D_1(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{1l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) (\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_\nu) - \\ &- (\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_\nu) \left(D_2(t, \varepsilon) + \sum_{l=1}^q U_{2l}(t, \varepsilon) \mu^l \right) + \\ &+ \varepsilon V_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) (\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}) - \varepsilon (\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}) V_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \\ &+ \mu^{q+1} \left(R_1(t, \varepsilon, \theta, \mu) (\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}) - (\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}) R_2(t, \varepsilon, \theta, \mu) \right) + \\ &+ \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} \left(\tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}_\nu, \mu) - \tilde{\Phi}_2(t, \varepsilon, \theta, \tilde{Z}_{\nu-1}, \mu) \right). \end{aligned}$$

Звідси і на підставі нерівностей (36) і (38) матимемо:

$$\begin{aligned} \|\tilde{Z}_{\nu+1} - \tilde{Z}_\nu\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} &\leq \frac{T_1}{b_0\mu^{q_0}} \left[2^m (\varepsilon V + \mu^{q+1} R) \|\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \right. \\ &\left. + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} L(\rho) \|\tilde{Z}_\nu - \tilde{Z}_{\nu-1}\|_{F_2(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \right]. \end{aligned}$$

Отже, при виконанні нерівності

$$\frac{T_1}{b_0\mu^{q_0}} \left[2^m (\varepsilon V + \mu^{q+1} R) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}} L(\rho) \right] < 1 \quad (42)$$

потрібну збіжність забезпечено. Нерівності (41), (42) виконуються для достатньо малих μ , ε/μ^{q_0} , ε/μ^{2q_0-1} . Оскільки $0 < \mu < 1$, то $\varepsilon/\mu^{q_0} \leq \varepsilon/\mu^{2q_0-1}$, тому достатньо вимоги мализни μ і відношення ε/μ^{2q_0-1} . Таким чином $\varepsilon_1(\mu) = T_2\mu^{2q_0-1}$, де T_2 достатньо мале.

З урахуванням (33) отримуємо твердження теореми.

Безпосередньо з леми 4 та теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай рівняння (2) таке, що*

- 1) виконано умови 1^0 , 2^0 ;
- 2) виконано умови леми 2;
- 3) для рівняння (7), що отримується з рівняння (2) шляхом підстановки (6), виконано умови леми 4;
- 4) для рівняння (24), що отримується з рівняння (7) шляхом підстановки (23), виконано умови теореми 1.

Тоді існують такі $\mu_4 \in (0, 1)$, $\varepsilon_4(\mu) \in (0, \varepsilon_0)$, що для будь-яких $\mu \in (0, \mu_4)$ і будь-яких $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4(\mu))$ рівняння (2) має частинний розв'язок класу $F_2(m-1; \varepsilon_4(\mu); \theta)$.

Список використаної літератури

1. Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential equations*. 2001. Vol. 37, № 4. P. 464-471.
2. Чуйко С. М. Элементы теории линейных матричных уравнений: монография. Славянск: Вид-во Б. І. Маторіна, 2017. 163 с.
3. Чуйко С. М. О решении обобщённого матричного уравнения Сильвестра. *Чебышевский сборник*. 2015. Т. 16. Вып. 1. С. 52-66. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66>
4. Чуйко С. М., Несмелова (Старкова) О. В., Сысоев Д. В. Нелинейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2015. Т. 7. № 4. С. 821-833. DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-4-821-833>
5. Verde-Star L. *On linear matrix differential equations. Advances in Applied Mathematics*. 2007. 39. P. 329—344.
6. Шёголев С. А., Карапетров В. В. Об одном классе решений квазилинейных матричных дифференциальных уравнений. *Дослідження в математиці і механіці*. 2020. Т. 25. Вип. № 2(36). С. 95-102. DOI: [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2\(36\).233806](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2(36).233806).
7. Щоголев С. А., Карапетров В. В. Блочне розщеплення системи лінійних матричних диференціальних рівнянь. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 94-104. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).94-104](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).94-104)
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды: монография. Москва: Физматгиз. 1961. 935 с.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа: монография. Москва: Наука. 1972. 496 с.
10. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний: монография. Москва, Гостехиздат. 1956. 491 с.

Shchogolev S. A., Karapetrov V. V. Block separation of the system of the linear matrix differential equations.

In the mathematical description of various phenomena and processes arising in mathematical physics, electrical engineering, economics, have to deal with matrix differential equations. Therefore, such equations are relevant as for mathematicians and specialists in other fields natural sciences. This article considers quasilinear matrix differential equations with coefficients depicted in the form of absolutely and uniformly convergent Fourier series with slow variable in a sense coefficients and frequency (class F). The differences of the diagonal elements of the matrices of the linear part are pure imaginary, that is, we are dealing with a critical case. But between these diagonal elements assume certain relations that indicate the absence of resonance between the natural frequencies of the system and frequency of external excitation force. The problem is considered establishing signs of existence in such an equation of class solutions F . By means of a number of transformations the equation is reduced to the equation noncritical case, and the solution of the class F of this equation is sought by the method of successive approximations using the principle compression reflections. Then based on the properties of the solutions of the transformed equation, conclusions are drawn about the properties initial equation.

Keywords: matrix differential equations, Fourier series, slowly varying parameters.

References

1. Boichuk, A. A., & Krivosheya, S. A. (2001). A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation. *Differential equations*, 37(4), 464-471.
2. Chuiko, S. M. (2017). Elementy teorii lineynyh matrixnyh uravneniy [Elements of the theory of linear matrix equations]. Slavyansk [in Russian].
3. Chuiko, S. M. (2015). O reshenii obobshchyonnogo matrixnogo uravneniya Silvestra [On the solutions of the generalized matrix equations of Sylvestr]. *Chebyshevsky sbornik*, 16(1), 52-66. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66> [in Russian].

4. Chuiko, S. M., Nesselova (Starkova), O. V., & Sysoev, D. V. (2015). Nelinejnaya matrichnaya kraevaya zadacha v sluchae parametricheskogo rezonansa. [Nonlinear boundary value problem in the case of parametric resonance]. *Computer Research and Modeling*, 7(4), 821-833. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-4-821-833> [in Russian].
5. Verde-Star, L. (2007). On linear matrix differential equations. *Advances in Applied Mathematics*, 39, 329-344.
6. Shchogolev, S. A., & Karapetrov, V. V. (2020). Ob odnom klasse reshenij kvazilinejnyh matrichnyh differencial'nyh uravnenij [On one class of solutions of the quasilinear matrix differential equations]. *Researches in Mathematics and Mechanics*, 25, 2(36), 95-102. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2\(36\).233806](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2020.2(36).233806). [in Russian].
7. Shchogolev, S. A., & Karapetrov, V. V. (2021). Block separation of the system of the linear matrix differential equations. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 38(1), 94-104. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).94-104](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).94-104) [in Ukrainian].
8. Bari, N. K. (1961). Triginometrichskye ryady [Trigonometric series]. *Moskva: Fizmatgiz* [in Russian].
9. Kolmogorov, A. N., & Fomin, S. V. (1972). Funktsionalnyi analiz [Functional analysis]. *Moskva: Nauka* [in Russian].
10. Malkin, I. G. (1956). Nekotorye zadachi teorii nelinejnyh kolebanij [Some problems of the theory of nonlinear oscillations]. *Moskva: Gostekhizdat* [in Russian].

Одержано 23.09.2021

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)**С. Ю. Бабич¹, Ю. П. Глухов², В. Ф. Лазар³**¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

провідний науковий співробітник,

професор, доктор технічних наук

babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

старший науковий співробітник,

кандидат фізико-математичних наук

gluchov.uriy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>³ Мукачівський державний університет,

доцент кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій,

кандидат технічних наук

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

**ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В ТІЛАХ (МАТЕРІАЛАХ) З
ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ. ЧАСТИНА 3.
ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У ПРУЖНОМУ ДВОХШАРОВОМУ
ПІВПРОСТОРИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ДІЇ
РУХОМИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

У статті досліджені динамічні процеси у пружному двошаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження. Дані задачі розв'язані методом інтегральних перетворень і за допомогою комплексних потенціалів, введених в роботах академіка НАН України Гузя О.М. і одного із авторів цієї статті. Проведено оцінку можливих значень коренів характеристичного рівняння. Отримано необхідні і достатні умови існування кратних коренів характеристичного рівняння. На вільну поверхню пружного шару, що лежить на пружному півпросторі, діє навантаження, що рухається з постійною швидкістю. Вважається, що картина деформацій інваріантна у часі в системі координат, що рухається разом з навантаженням. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та з пружними потенціалами типу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла) проведено численні дослідження. Аналіз отриманих результатів свідчить про суттєвий вплив початкових (запасованих) деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння. Крім цього, доведено, що для заданих параметрів завжди можна знайти область значень λ_1 (коефіцієнтів) подовження, для яких існують критичні швидкості руху навантаження. Зокрема при жорсткому з'єднанні шару з півпростором можливо існування двох критичних швидкостей руху навантаження, у крайньому випадку, одна із яких більша за швидкість поверхневих хвиль Релея. Отримані результати можуть бути використані для дослідження напружено-деформованого стану елементів багатшарового заздалегідь деформованого півпростору при дії рухомого поверхневого навантаження.

Ключові слова: контактні напруження, комплексні потенціали, фазові швидкості, жорсткі штампи, рухомі навантаження, хвилі Релея, напружено-деформований стан.

1. Вступ. Однією з задач, яка має значне наукове і практичне значення є задача про розповсюдження хвиль у тілах під дією прикладених до їх границь рухомих навантажень (узагальнена задача Лемба про початкові навантаження).

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

Такий тип навантаження має місце, наприклад, при прокатці металів, виробництві паперу, пластмас, великогабаритних дзеркал тощо. Задачі такого типу виникають також при розрахунку аеродромних і дорожніх покриттів, при розрахунку пластин і оболонок, які перебувають у рухомому середовищі або під дією рухомих штампів і в багатьох інших випадках.

Необхідно зазначити, що як з математичної так і з фізичної точки зору рухоме навантаження є поняттям досить загального характеру. Тому основні закономірності дії рухомого навантаження можуть вивчатися незалежно від того, в результаті якого фізичного процесу ці проблеми виникають. У даній статті розглянута динамічна задача для пружного попередньо напруженого шару, що лежить на півпросторі, і на яку діє поверхнєве рухоме навантаження.

Дослідження проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [1]. В рамках цієї теорії різні двомірні моделі багатопарового середовища вивчалися в роботах [2-12]. Необхідно зазначити, що остання робота з даної тематики опублікована на початку 2021р. у статті авторів [13].

2. Актуальність. Актуальність таких досліджень очевидна, оскільки практично у всіх елементах конструкцій і деталях машин присутні початкові (за-лишкові) напруження. Природа виникнення початкових напружень досить різноманітна. Про їх походження і вплив на основні характеристики контактної взаємодії для статичних і динамічних задач, в тому числі при дії рухомих штампів, навантажень детальніше вивчено в роботах [14-15].

3. Постановка задачі. «Розглянемо задачу в рамках постановки, викладеної в роботах [1-3]. Пружний шар лежить на пружному півпросторі. На вільну поверхню шару діє навантаження, що рухається з початковою швидкістю ν . Вважаємо, що картина деформації інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

4. Метод розв'язку. Спочатку розглянемо першу основну динамічну задачу для півплощини, яка аналогічна задачам статички (задача Фламана). Іншими словами, розглядається задача, коли граничні умови відповідають зосередженій силі інтенсивності \mathbf{p} , яка прикладена до границі півплощини під кутом α_1 до осі Oy_1 , і яка рухається рівномірно вздовж осі Oy_1 із швидкістю ν . Після ряду перетворень, аналогічно [4] для напруження \tilde{Q}_{22} вздовж осі $0\eta_2$ (на вертикальній осі) одержано вираз у такому вигляді:

$$\tilde{Q}_{22} \Big|_{\eta_1 \equiv y_1 - vt = 0} = -\frac{P}{\pi y_2} \left\{ \operatorname{Im} \left[\mu_1 \mu_2 \left(\mu_1 \gamma_{21}^{(1)} - \mu_2 \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \right\}^{-1} \times \\ \times \operatorname{Re} \left[\left(\mu_2^2 \gamma_{21}^{(2)} - \mu_1^2 \gamma_{21}^{(1)} \right) \right] \sin \alpha_1 + (\mu_1 + \mu_2) \cos \alpha_1. \quad (1)$$

У випадку відсутності початкових напружень величина, яка відповідає (1) для класичної лінійної теорії пружності ізотропного тіла, має вигляд

$$\tilde{Q}_{22} \Big|_{\eta_1 \equiv y_1 - vt = 0} = \frac{P}{\pi y_2} \cdot 2 \cos \alpha_1. \quad (2)$$

Для потенціалу Трелоара (нестисливе тіло) на основі чисельних розрахунків виявлено вплив початкових напружень на закономірності розподілу напружено-деформованого стану в півплощині з початковими напруженнями для першої

динамічної задачі. При цьому початковий напружено-деформований стан також визначений для плоскої деформації ($\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1, \lambda_3 = 1$). Одержані результати свідчать про те, що початкові напруження, які задаються коефіцієнтом подовження λ_1 , суттєво впливають на розподіл напружень у розглянутій першій динамічній граничній задачі для півплощин з початковими напруженнями.

В роботі досліджені динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомого навантаження методом інтегральних перетворень і ті ж самі задачі розв'язані за допомогою комплексних потенціалів. Іншими словами, однією із таких задач є задача про поширення хвиль у попередньо напружених тілах під дією прикладених до їх границь рухомих навантажень (ускладнення задачі Лемба про точкове навантаження). Таке навантаження має, наприклад, місце при прокатці металів, виробництві паперу, пластмас, великогабаритних дзеркал тощо. Задачі такого типу виникають також при розрахунку аеродромних і дорожніх покриттів, при розрахунку пластин і оболонки, які знаходяться у рухомому середовищі або під дією рухомих штампів і в багатьох інших випадках. Необхідно зауважити, що як з математичної, так і з фізичної точки зору, рухоме навантаження є поняттям досить широким. Тому основні закономірності дії рухомого навантаження вивчені незалежно від того в результаті якого фізичного процесу ці проблеми виникли. Розглянуто задачу, коли шароватий півпростір складається із пружного шару товщини $2h$, який лежить на пружному стисливому або нестисливому попередньо напруженому ізотропному півпросторі; причому навантаження рухається вздовж вільної поверхні шару з постійною швидкістю v на протязі великого проміжку часу (маємо плоский деформований стан). Вважається також, що динамічну поведінку шару можна описати за допомогою системи теорії пластин, які враховують зсув і інерцію обертання. Досліджено два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$ (жорсткий і нежорсткий контакти).

З використанням методу інтегральних перетворень Фур'є отримані фундаментальні розв'язки задач для стисливих і нестисливих тіл у просторі зображень при різних умовах контакту і швидкостях руху навантажень. Граничні умови і рівняння руху двохшарового півпростору для стисливих і нестисливих матеріалів зображені у загальному вигляді (відрізняються тільки коефіцієнти). Розв'язок задачі знайдений за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за змінною y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1. \quad (3)$$

Застосувавши перетворення Фур'є до відповідних рівнянь, одержимо

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_2^2 \right) = 0; \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

У статті знайдено розв'язок задачі для нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння і різних умов спряження шару і півпростору з початковими напруженнями, причому задача розв'язана у загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження (дозвукової, трансзвукової і надзвукової).

У випадку нежорсткого контакту перетворені рівняння представлені таким

чином

$$\begin{aligned}
 & -ik^3\alpha_{21}^{(1)}\chi^F + ik\alpha_{21}^{(2)}\frac{d^2\chi^F}{dy_2^2} = 0; \\
 & k^2\theta_3 \left(k^2\beta_1 - \beta_2\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F + \left(k^2\alpha_{22}^{(1)} - \alpha_{22}^{(2)}\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d\chi^F}{dy_2} - 2ikkh\varphi^F = p_2^F; \\
 & 2ikk \left(-k^2\beta_1 - \beta_2\frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^F - (k^2\theta_2 + 2\kappa) \varphi^F = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогічно записуються у просторі зображень рівняння руху і граничні умови, представлені через потенціали Φ і ψ . Перетворені хвильові рівняння руху записані у такому вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2\eta_2^2 \right) \psi^F = 0. \tag{6}$$

Розв'язок перетвореного рівняння (4) з врахуванням затухання на нескінченності знайдено у вигляді

$$\chi^F = Ae^{k_1k\eta_1y_2} + Be^{k_2k\eta_2y_2}, \tag{7}$$

де A і B – постійні інтегрування. Тут $k_j \equiv \sigma = \frac{|k|}{k}$, якщо $\eta_j^2 > 0$ і $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. У випадку коли η_j приймає комплексне значення, то у зображенні (7) треба покласти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma Re\eta_j - (-1)^j Im\eta_j$, $j = 1, 2$. Розв'язок для потенціалів Φ^F і ψ^F , з врахуванням (6), знаходиться у вигляді

$$\Phi^F = A_0e^{k_1k\eta_1y_2}; \quad \psi^F = B_0e^{k_2k\eta_2y_2}, \tag{8}$$

де A_0 і B_0 – постійні інтегрування. В результаті знайдені критичні швидкості руху навантаження у випадку стисливого півпростору з пружним потенціалом гармонічного типу (нерівні корені). Аналогічно досліджено вплив початкових напружень, механічних характеристик пластини і півпростору, умов їх спряження на значення критичних швидкостей руху навантаження у випадку нестисливого півпростору з пружним потенціалом Бартенєва-Хазановича. На основі одержаних чисельних результатів для докритичних швидкостей руху поверхневого навантаження зроблені наступні висновки. При жорсткому контакті напруження, швидкості переміщень у півпросторі і згинальний момент у пластині менший, ніж при нежорсткому. Значення параметрів напружено-деформованого стану у конкретній точці шаруватого тіла залежить як від початкових напружень, так і від її координат. При цьому в досліджуваному діапазоні значень λ_1 темп зростання амплітуди розглянутих величин при стиску більший, ніж при розтягу. Затухання при віддаленні від точки прикладання навантаження для стиску проходить повільніше, ніж при розтягу. Вплив початкових напружень значно збільшується із зростанням швидкості руху навантаження. Особливо останнє має місце при попередньому стиску. При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень значно менший, ніж при нежорсткому контакті. Якщо врахування інерції обертання в рамках розглянутих швидкостей руху поверхневого навантаження і значень λ_i у випадку жорсткого контакту вносить незначну похибку (менше 2,6%), то у випадку нежорсткого контакту відмінність у результатах буде досить суттєвою (до 30%). Особливо необхідно враховувати інерцію обертання при $\lambda_1 < 1$ і великих швидкостях руху навантаження.

Із аналізу одержаних результатів випливає, що для двохшарового півпростору із нестисливого матеріалу можна зробити ті ж самі висновки, що і для двохшарового стисливого півпростору. Вплив початкових напружень на значення критичних швидкостей руху навантаження більш суттєвий для порівняно м'яких пластин і для нежорсткого контакту. При нежорсткому контакті резонанс виникає при меншій швидкості руху навантаження, ніж при жорсткому контакті. Чим м'якша пластина у порівнянні з півпростором, тим менші у неї критичні швидкості руху навантаження у порівнянні з швидкістю хвиль Релея V_R .

В роботі визначено реакцію на рухоме навантаження двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів. Із застосуванням комплексних потенціалів в загальній формі для стисливих і нестисливих пружних тіл у роботі дана постановка задачі про рух двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями під дією рухомого поверхневого навантаження. Для плоских динамічних задач у пружних тіл з початковими напруженнями, коли дані динамічні задачі можуть бути зведені до стаціонарних задач у рухомій системі координат, яка рухається прямолінійно з постійною швидкістю, розв'язок можна побудувати через комплексні потенціали. В роботі використано метод М.І. Мусхелішвілі, який пов'язаний з інтегралами типу Коші для півплощини. У цьому випадку для стисливих тіл задача зведена до рівняння

$$\frac{\partial^4 \chi^j}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0; j = 1, 2 \quad (9)$$

У (9) комплексні змінні мають вигляд

$$z_j = y_1 + \mu_j y_2; \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j y_2. \quad (10)$$

Для рівних коренів ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$) характеристичного рівняння загальний розв'язок рівняння (9) можна зобразити у такому вигляді

$$\chi^{(j)} = Re \left[F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1) \right]. \quad (11)$$

Якщо ввести нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)'}(z_1) = \mu_1 \varphi_j(z_1); \quad F_j^{(2)'}(z_1) = \varphi_j(z_1); \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

то після деяких перетворень одержимо зображення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\varphi_j(z_1)$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{kj} &= Re \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1''(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2''(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2'(z_1) \right\}; \\ u_k &= Re \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1'(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2'(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2(z_1) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для нерівних коренів ($\mu_1 \neq \mu_2$) загальний розв'язок (9) знаходиться у вигляді

$$\chi = 2Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (14)$$

де $F_j(z_j)$ – довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j . Після введення нових аналітичних функцій

$$F_j''(z_j) = \Phi_j(z_j) \quad (15)$$

одержимо зображення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ у такому вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ij} &= 2Re \left[\gamma_{ij}^{(1)} \Phi_1'(z_1) + \gamma_{ij}^{(2)} \Phi_2'(z_2) \right]; \\ u_k &= 2Re \left[\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2) \right]; i, j, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

В (16) введені наступні позначення коефіцієнтів, які входять у вирази для напружень і переміщень

$$\begin{aligned} \gamma_{jj}^{(k)} &= \mu_k \left(\alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)} \right); \quad \gamma_{jj}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)}; \\ y_1^{(j)} &= -\mu_j; \quad y_2^{(j)} = \beta_1 + \mu_j^2 \beta_2; \quad i, j, k = 1, 2; \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (17)$$

де параметри β_j і $\alpha_{ij}^{(k)}$ визначаються із виразів, які входять в комплексні потенціали.

Відносно поведінки потенціалів $\Phi_j(z_\gamma)$, $\varphi_\gamma(z_j)$ на нескінченності приймалися такі ж самі обмеження, як і в лінійній теорії пружності. Критичні швидкості руху навантаження визначались із умови існування дійсних додатних кратних коренів характеристичного рівняння відповідних диференціальних рівнянь. Таким чином, в роботі застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримані результати аналогічні тим, які були одержані методом інтегральних перетворень Фур'є. Крім висновків, сформульованих вище (на основі чисельних розрахунків) для плоских задач руху двохшарового пружного півпростору з початковими напруженнями із стисливого і нестисливого матеріалу при дії рухомого навантаження можна ще зробити і такі. При заданих параметрах завжди можна знайти область значень λ_1 , для яких існують критичні швидкості руху навантаження. Для швидкостей руху навантаження більших швидкості поширення хвиль зсуву у півпросторі присутність початкових напружень має більш суттєвий вплив на розподіл напружень і швидкостей переміщень у півпросторі і згинального моменту у пластині. Характер цього впливу різний в залежності від розташування розглядуваної точки шаруватого тіла відносно точки прикладення навантаження.

Крім цього в даній статті досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння, що відповідають рівнянням руху елементів шаруватого півпростору. Проведена оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для матеріалів з гармонічним потенціалом (стисливі тіла) із потенціалом типу Бартенєва-Хазановича (нестисливі тіла) виконані чисельні дослідження.

5. Висновки. На основі аналіза одержаних числових результатів встановлені наступні механічні ефекти;

- 1) Значення критичних швидкостей руху навантаження і їх кількість суттєво залежить від початкових напружень у півпросторі, механічних характеристик пластини і півпростору і умов їх контакту. При жорсткому з'єднанні пластини з півпростором можливе існування двох критичних швидкостей руху навантаження, у крайньому випадку, одна із яких більша за швидкість хвиль Релея.
- 2) Вплив початкових напружень на значення критичних швидкостей руху навантаження більш суттєве для м'яких пластин і для нежорсткого контакту. Чим м'якше пластина у порівнянні з півпростором, тим менша у неї критична швидкість у порівнянні з швидкістю хвиль Релея. Значення найменшої

критичної швидкості при жорсткому контакті завжди більша ніж при нежорсткому.

- 3) Для заданих параметрів завжди можна знайти область значень λ_1 , для яких існують критичні швидкості руху навантаження.
- 4) Вплив початкових напружень значно збільшується із ростом швидкості руху навантаження. Особливо це має місце при попередньому стиску. При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менш суттєвий, ніж при нежорсткому контакті.
- 5) Для швидкостей руху навантаження, які більші за швидкість розповсюдження зсувних хвиль у півпросторі, присутність початкових напружень має суттєвий вплив на розподіл напружень і швидкостей переміщень у півпросторі і згинального момента у пластині. Характер цього впливу різний в залежності від положення розглядуваної точки шаруватого тіла відносно точки прикладання навантаження. Отримані дослідження напружено-деформованого стану елементів багат шарового заздалегідь деформованого півпростору при дії рухомого поверхневого навантаження.

Список використаної літератури

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
2. Глухов Ю. П. Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. *Доп. НАН України*, 2011. № 7. С. 52-57.
3. Глухов Ю. П. Многослойная предварительно напряженная плита на жестком основании при воздействии подвижной нагрузки. Плоская задача. *Доп. НАН України*, 2011. № 11. С. 65-69.
4. Глухов Ю. П. Об одной динамической задаче для многослойной плиты на жестком основании. *Доп. НАН України*, 2011. № 8. С. 48-53.
5. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. Кременчуг: Press-line, 2007. 795 с.
6. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
7. Babich S. Yu., Gluchov Yu. P. Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation under Live Static Load. *Int. Appl. Mech.* 2017. Vol 53, № 3. С. 287-299.
8. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Поведение пластины, лежащей на предварительно напряженном полупространстве при воздействии подвижной нагрузки. *Системні технології. Регіональний міжвузівський вісник наукових праць*. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008. С. 55-60.
9. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Влияние начальных напряжений и подвижной нагрузки на распределение скоростей перемещений в двухслойном предварительно напряженном полупространстве. *VII міжнар. симпозиум 'Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. Львів: Каменярь, 1998. С. 120-125.
10. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамическая задача для двухслойного полупространства с начальными напряжениями. *Наук. Вісник Мукачівського державного університету*. Мукачево, 2011. № 11. С. 24-51.
11. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Про одну динамічну задачу для шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. Львів: Каменярь, 2014. № 10. С. 6-15.
12. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамика двухслойного полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки. *Наук. вісник Мукачівського державного університету*. Мукачево, 2016. № 21 (16). С. 7-20.
13. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Про одну динамічну задачу для багат шарового півпростору з початковими напруженнями. *Прикладна механіка*. 2021. Т. 57, №1. С. 53-63.
14. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 1. Поверхневі хвилі Релея вздовж криволінійних гра-

ниць (циліндр, сфера) попередньо напружених тіл. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2021. Т. 38, № 1. С. 105-113.

15. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 2. Плоскі динамічні контактні задачі для півплощини з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія "Математика і інформатика"*. 2021. Т. 38, №1. С. 114-122.

Babych S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F. Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads.

Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial tensions under the influence of a moving load are investigated. These tasks are solved by the method of integral transformations and with the help of comprehensive potentials introduced in the works of academician of the National Academy of Sciences of Ukraine Geors O. and one of the authors of this article. The evaluation of the possible values of the roots of the characteristic equation is carried out. The necessary and sufficient conditions for the existence of multiple roots of the characteristic equation are obtained. It is believed that the picture of the deformation of the invariant time in the coordinate system moving along with the load. In other words, an elastic multilayer is considered, consisting of flat parallel elastic layers, lies on a half-space. The free surface of the strip has a load moving at a constant speed. Studies conducted within the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses. For materials with elastic potentials of harmonic type (compression bodies) and with elastic potentials of the type Barteneva-Khazanovich (uncompressed bodies), numerous studies were performed. Analysis of the results of the essential impact of initial (residual) deformations and speed of surface loading on the value of the roots of the characteristic equation. In addition, it is proved that it is always possible to find the area of values (coefficients) of elongation for which there are critical speed of loading. In particular, with a rigid connection of a plane with a half-space, it is possible to exist two critical load rates, in the extreme case, one of which is larger than the speed of the surface waves of the relay. The obtained results can be used to investigate the stress-deformed state of elements of a multilayer pre-deformed half-space under the action of a moving surface load.

Keywords: contact tensions, complex potentials, phase speeds, hard stamps, moving loads, relay waves, stress-deformed state.

References

1. Guz', A. N. (2004). Uprugie volny v telakh s nachalnymi (ostatocnymi) napryazheniyami [Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses]. Kyiv: A.S.K. [in Russian].
2. Glukhov, Yu. P. (2011). Mnogosloynaya predvaritel'no napryazhennaya poluploskost' pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki [Multilayer prestressed half-plane under the action of a moving load]. *Dop. NAN Ukrainian*, 7, 52-57 [in Russian].
3. Glukhov, Yu. P. (2011). Mnogosloynaya predvaritel'no napryazhennaya plita na zhestkom osnovanii pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki. Ploskaya zadacha [Multilayer prestressed slab on a rigid base under the action of a moving load. A flat task]. *Dop. NAN Ukrainian*, 11, 65-69 [in Russian].
4. Glukhov, Yu. P. (2011). Ob odnoy dinamicheskoy zadache dlya mnogoslonoynoy plity na zhestkom osnovanii [About one dynamic problem for a multilayer slab on a rigid base]. *Dop. NAN Ukrainian*, 8, 48-53 [in Russian].
5. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007). Statika i dinamika uprugikh osnovaniy s nachal'nymi (ostatocnymi) napryazheniyami [Statics and dynamics of elastic bases with initial (residual) stresses]. Kremenchug: Press-line [in Russian].
6. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].

7. Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2017). Bending a Plate on Prestressed Elastic Foundation under Live Static Load. *Int. Appl. Mech.*, 53(3), 287-299.
8. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2008). Povedenie plastiny, lezhashchey na predvaritel'no napryazhennom poluprostranstve pri vozdeystvii podvizhnoy nagruzki [Behavior of a plate lying on a prestressed half-space under the action of a moving load]. *System technologies. Regional interuniversity bulletin of scientific works*, 4(57), 55-60 [in Russian].
9. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (1998). Vliyanie nachal'nykh napryazheniy i podvizhnoy nagruzki na raspredelenie skorostey peremeshcheniy v dvukhsloynnom predvaritel'no napryazhennom poluprostranstve [Influence of initial stresses and mobile load on the distribution of velocities in a two-layer prestressed half-space]. *International symposium 'Mechanics and physics of destruction of building materials and structures. L'viv* (pp. 120-125) [in Russian].
10. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2011). Dinamicheskaya zadacha dlya dvukhsloynogo poluprostranstva s nachal'nymi napryazheniyami [A dynamic problem for a two-layer half-space with initial stresses]. *Scientific Bulletin of the Mukachevo State University*, 11, 24-51 [in Ukrainian].
11. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2014). Pro odnu dynamichnu zadachu dlja sharuvatogho nestyslyvogho pivprostoru z pochatkovymy napruzhenjamy [About one dynamic problem for a layered incompressible half-space with initial stresses]. *Mekhanika i fizyka ruznuvannja budivel'nykh materialiv ta konstrukcij*, 10, 6-15 [in Ukrainian].
12. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2016). Dynamics of a two-layer half-space with initial stresses under the influence of a moving load. *Scientific Bulletin of the Mukachevo State University*, 21(16), 7-20 [in Russian].
13. Babych, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2021). About one dynamic problem for a multilayer half-space with initial stresses. *Applied mechanics*, 57(1), 53-63 [in Ukrainian].
14. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 1. Surface Rayleigh waves along curvilinear boundaries (cylinder, sphere) of prestressed bodies. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 105-113 [in Ukrainian].
15. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stress. Part 2. Flat dynamic contact problems for a half-plane with initial stresses. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 114-122 [in Ukrainian].

Одержано 02.06.2021

UDC 004.67.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).125-144](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).125-144)**N. Boyko**

Lviv Polytechnic National University,
Ph.D., Associated Professor at the Department of Artificial Intelligence,
nataliya.i.boyko@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6962-9363>

SEMI-SUPERVISED LEARNING PARADIGM ANALYSIS FOR CLASSIFICATION OF MULTIMODAL DATA

The paper considers machine learning algorithms. The focus is on semi-controlled learning, which seems to be the balance between teaching accuracy with a teacher and the cost of teaching methods without a teacher. Examples of careful processing of labelled data sets for which supervised learning can be very effective are considered. The semi-supervised and supervised approaches are compared, and the effectiveness of each is analyzed. The paper considers S3VM and TSVM approach. The work aimed to investigate whether semi-controlled methods can compete with controlled or even surpass them. Applying these approaches to the proposed dataset to determine a more accurate classification of data, namely at the reference limit, is described.

Keywords: semi-supervised learning, support vector machine, transductive support vector machines, semi-supervised support vector machines, application programming interface.

1. Introduction. The work is performed by studying semi-supervised learning, which is learning with a teacher. Supervised learning is a learning paradigm related to studying how computers and natural systems, such as humans, remember in the presence of both labelled and unlabeled data. Traditionally, learning is studied either in an uncontrolled paradigm (e.g., clustering, external shape detection), where all data is unlabeled, or in a controlled paradigm (e.g., classification, regression), where all information is labelled [1].

The purpose of semi-controlled learning is to understand how a combination of labelled and unlabeled data can change learning behaviour and develop algorithms that use such a combination [2, 6].

Supervised learning is of great interest in machine learning and data exchange, as it can use readily available unlabeled data to improve tasks when labelled data is scarce or expensive. Supervised learning also shows potential as a quantitative tool for understanding human categories of knowledge where much of the contribution is not apparent [3, 8].

The object of study of this work is semi-supervised learning is an extension of supervised and supervised learning. SSL algorithms, as a rule, provide a way to learn about the structure of data from unlabeled examples Reducing the need for labels. Most problems in the real world have a lot of data, and labelling them is a cumbersome or even impossible task. Supervised learning is one of the approaches to overcoming these types of problems. For training, he uses only a small set, marked by substantial unlabeled data. In semi-controlled training, it is essential what data are labelled and, depending on the position of the data, its effectiveness changes [4, 10].

The semi-supervised learning paradigm attracts much attention in many different areas, from bioinformatics to web mining. It is easier to get unlabeled than labelled

data because it requires less effort, experience and time [5, 12]. In this context, traditional supervised learning is limited to using labelled data to build a model.

However, SSL is a learning paradigm for designing models with both labelled and unlabeled data. In essence, SSL methods use unspecified samples to change or rethink a hypothesis derived only from labelled samples.

2. Review of methods. Before defining the approaches and benefits of SSL and supervised learning algorithms, you should first learn what supervised learning is in everyday use:

- Classification of web pages;
- Detection of fraud;
- Face recognition;
- Language recognition;
- Genetic sequencing.

There is no doubt about the potential and growth of machine learning, and semi-controlled education often seems to be a balance between the accuracy of teaching with a teacher and the cost of teaching methods without a teacher [9, 13, 16].

Due to the careful processing of labelled data sets, supervised learning can be very effective.

Imagine the following situation (See Figure 1):

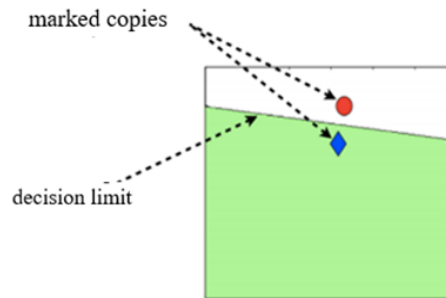


Figure 1. Finding a solution.

In Figure 1, you have only two data points that fall into two different categories, and the drawn line is the limit of any controlled model [16, 17].

Now, let's say we add some undefined data to this data, as shown in the image below:

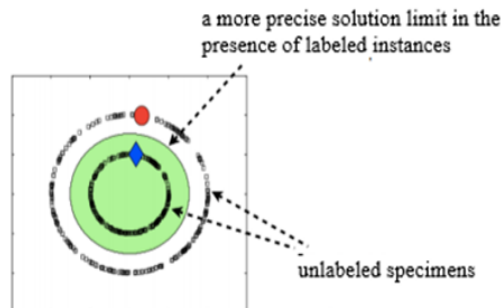


Figure 2. Adding unlabeled instances.

In Figure 2 you can see the difference between the two images listed above, the same can be said that after adding data without labeling, the decision limit of our model has become more accurate.

Thus, among the advantages of using unlabeled data are:

- Labeled data is expensive and difficult to obtain, while unlabeled data is plentiful and cheap.
- This improves the stability of the model through a more precise decision boundary.

Typically, the purpose of categorizing images is to classify whether the image belongs to the category or not. In this work, not only images are used for modelling, but keywords related to labelled and unlabeled images and unlabeled images are used to improve the classifier through semi-control training.

Semi-supervised SVM is an SVM with variable ξ_i . This model is based on the assumption that y_i can be either -1 or 1 .

Variables ξ_i are variables, one for each sample, introduced to reduce the strength imposed by the initial condition ($\min \|w\|$), which is based on a hard stock that incorrectly classifies all samples that are on the wrong side. They are determined by the loss of the hinge as follows [12]:

$$\max (0.1 - y_i(w^T x_i + b)) \quad (1)$$

With these variables, we allow some points to cross the boundary without classifying them if they remain at a distance controlled by the corresponding weak variable (which is also minimized during the training phase to avoid uncontrolled growth). The following diagram shows a schematic representation of this process:

The last elements of each high-density region are reference vectors. Between them is a low-density region (it can also be zero density), where lies our separate hyperplane [13].

Theoretically, each function, which is always bounded by two hyperplanes containing reference vectors, is a good classifier, but we need to minimize the empirical risk (and, yes, the expected risk). Therefore, we are looking for the maximum margin between areas of high density. This model can separate two dense regions with irregular boundaries. By adopting the kernel function, it can also work in nonlinear scenarios. The main issue at the moment is the question of the best strategy for the integration of labelled and unlabeled samples when we need to solve a similar problem in a semi-supervised scenario [6, 9].

The first element to consider is the relationship. If we have a low percentage of marked scores, the problem is mainly controlled, and the generalization skills learned through the training kit should be sufficient to correctly classify all unmarked scores. On the other hand, if the number of unlabeled samples is much larger, we return to the almost pure clustering scenario (as discussed in the section on generative Gaussian mixtures). This means that to use the power of semi-control methods in low-density separation problems, we must consider situations where the labelled / unlabeled ratio is approximately 1.0 [1, 8].

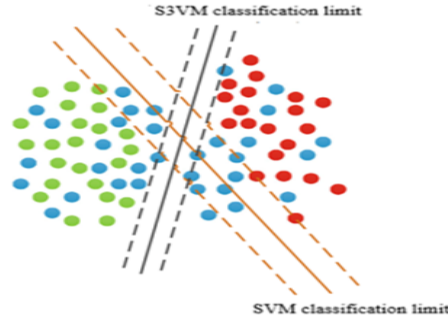


Figure 3. Hyperlines SVM and S3VM.

Figure 3 shows two hyperlines - one SVM method, the other - S3VM. Blue dots - unlabeled data, red - class 1, green - class 2.

We can see that SVM has a large gap from the hyperline, but there is a reasonably high density. Although in S3VM, this interval is smaller, it is more accurate, and we see that the boundaries of the reference vectors are located just on the last elements. Then the gap is empty, i.e. the hyperline correctly classifies the classes [5, 10].

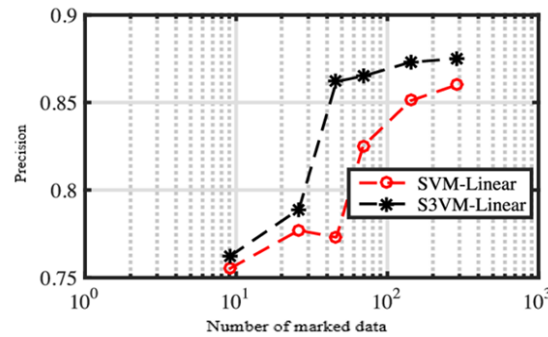


Figure 4. Comparison of the accuracy of linear SVM and S3VM.

Figure 4 shows that the linear S3VM works much better than SVM at a relatively small amount of labeled data ($10^1, 10^2$). As the amount of labeled data increases, the accuracy of these two methods converges to one value [13].

Transductive Support Vector Machines. Another approach to the same problem is offered by Transductive Support Vector Machines, which are especially suitable when the unlabeled sample is not very noisy. The overall structure of the data set is robust. Everyday use of TSVM is a classification on a data set that contains data points obtained from the same data generation process (e.g., medical photographs collected using the same tool) but only partially labelled for, for example, economic reasons. Because all images can be trusted, the TSVM can use a dataset structure to achieve accuracy more significantly than the controlled classifier.

The idea is to keep the original goal with two sets of variables - the first for labelled samples and the second for unlabeled:

$$\min \left[\|w\| + C_L \sum_{i=1}^N \eta_i + C_U \sum_{i=N+1}^{N+M} \xi_j \right] \quad (2)$$

Formula (2) describes minimization of the objective function of the TSVM method. Because this is a transductive approach, we need to treat unlabeled samples as variable-labelled (depending on the learning process), imposing a constraint similar to controlled items. From a certain point of view, this is equivalent to introducing a preliminary idea of the final classification, firmly based on the cluster and the assumption of smoothness.

In other words, the TSVM can trust the structure of the data set more than the S3VM, and the data scientist has more flexibility in choosing behaviour. Different combinations of CL and CU give results from the complete trust given to the labelled points to the opposite condition. As explained in the introduction, the purpose of transductive learning is only to classify unlabeled samples using both labelled and data set structures. However, contrary to inductive methods, the limitations imposed by labelled samples can be relaxed in favour of a more geometrically consistent solution.

Comparison of modified SVM methods. An alternative to S3VM is TSVM, which tries to minimize the target with a condition based on variable labels. Thus, the problem is divided into two parts: controlled, which is precisely the same as the standard SVM, and partially controlled, which has a similar structure but does not have fixed y labels. This problem is also not convex, and various optimization strategies need to be evaluated to find the best trade-off between accuracy and computational complexity. TSVM's transductive approach relies heavily on the data set structure; this is only a reasonably reasonable choice when both labelled and unlabeled samples are known to be taken from the same data generation process.

Also, the TSVM can trust the data structure more than the S3VM. However, S3VM is particularly suitable when the design of the unlabeled sample is partially (or even wholly) unknown, and the primary responsibility for labelling should lie with the labelled examples.

Formulation of the problem. It is necessary to solve the classification problem, namely, to find the best strategies for semi-managed classification, which could compete with the approaches of controlled learning. The idea is to minimize costs with unlabeled data, thus proving the need for semi-controlled systems.

You need to select a dataset for this task. Make Classification is often used to compare methods and solve various classification problems because we can manually set many parameters, thus creating our dataset.

This dataset is generated to solve n -class classification problems.

First, clusters of points are created, usually distributed ($\text{std} = 1$, std is a tensor with a standard deviation of the normal distribution of each source element) with vertices of $n_{\text{informative}}$ -sized hypercube with sides of length $2 * \text{class_sep}$ and each class is assigned an equal number of clusters. This introduces an interdependence between these features and adds data of different types of noise.

The main idea is to generate centroids by some randomness for different clusters by their number. How accurately each centroid of the cluster can be controlled is set by the value of the classes' parameter. Because data will be generated in a Gaussian distribution with a deviation of 1, this argument contains how each cluster overlaps with other clusters and adding correlations for informative features by multiplying the matrix of functions by a randomly generated covariance matrix.

For each data point, the function changes its target to some random class (actu-

ally, it can be adjusted to an actual type) with a speed of `flip_y`, a number between 0 and 1. This makes some noise in the data set.

There are two things to control noise (or how different classes of data overlap) `class_sep`: determines how clusters are divided. A large value will cause the data sets to intersect less.

`flip_y`: determines how many data points are marked randomly (noise).

We will generate the following dataset with the following parameters:

Number of signs = 2,

Number of points = 1000,

Number of classes = 3.

As a result, we will receive such dataset:

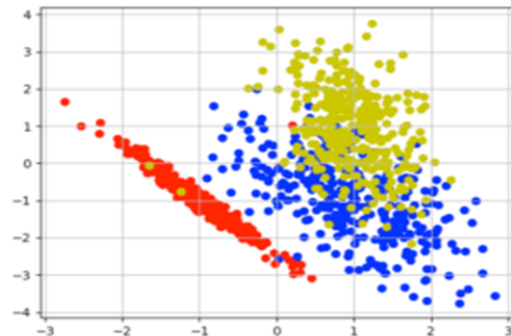


Figure 5. Dataset visualization.

Create the worst data set by setting `flip_y = 0.3`:

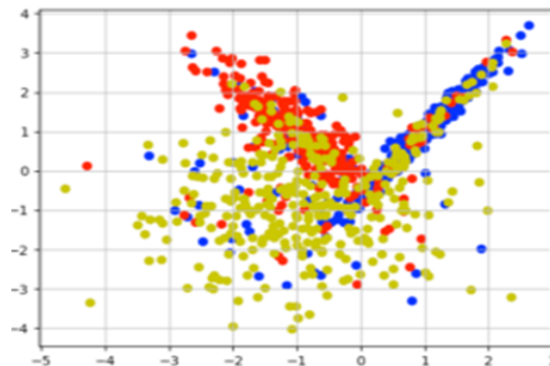


Figure 6. Dataset visualization.

In comparisons I use the following dataset:

Number of signs = 2,

Number of points = 200,

Number of classes = 2,

Randomness score = 1000.

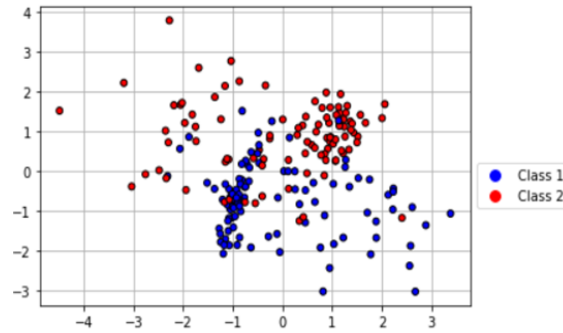


Figure 7. Visualization of the dataset for further work.

Figure 7 shows two classes. Blue dots - class 1, red - class 2. In the future we will divide these dots into the third class - unlabeled data.

The next step is to implement the best strategies for conducting a semi-supervisory classification that could compete with the supervised approach.

To implement the calculations, you must additionally download the following libraries:

- Sklearn;
- Scikit-learn;
- Matplotlib;
- Numpy;
- SVC.

Add a two-dimensional dataset, with labeled and unlabeled data (50% each). There will be 200 marked, 150 unmarked.

Number of marked (Marked) - 200,

Number of unmarked labels (notMarked) - 150.

Classified dataset:

```
[0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1
```

```
0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0
```

...

```
0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0]
```

In this array we contain the notation of two classes - class 1 (notation 0), and class 2 (notation 1).

Add unlabeled data and change the structure of the dataset:

```
[-1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1
```

```
1 1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1
```

```
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

...

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
0 0 0 0 0 0 0]
```

Now the marked data is marked as -1 (class 1) and 1 (class 2), the unmarked data is 0.

We also have the meaning of signs:

```
[[-1.05545237e+00 -9.32716065e-01]
```

```
[-1.09043812e+00 -1.50493373e+00]
```

```
[ 1.22265567e+00 -1.67332726e+00]
```

```

[-8.89284086e-01 -6.713955478e-01]
[-3.42811427e-01 2.156535159e+00]
[ 4.19337679e-01 -1.156065519e+00]
[-1.74121223e+00 7.535533374e-01]
[ 1.02333526e+00 -3.215662196e-01]
[ 2.55739074e+00 -2.381244523e+00]
[-1.68630379e+00 2.599753855e+00]
[-9.12360330e-01-1.860154292e+00]
[-1.07341058e+00 -1.866005323e+00]
[-7.41616980e-01 2.638435474e-01]
[ 1.40819086e-01 8.4433174723e-01]
[-2.186617475e+00 1.65834393e+00]
[ 7.62332115e-01 -1.9242596277e+00]
[-9.30308962e-01 -4.6841778176e-01]
[-8.69596340e-01 -1.9678237778e-01]
[ 1.259574172e+00 1.037730881e-01]
[-4.745967011e-01 6.549572729e-01]
....
[-1.19220109e+00 -2.076067172e+00]]

```

We visualize this data.

Initial data:

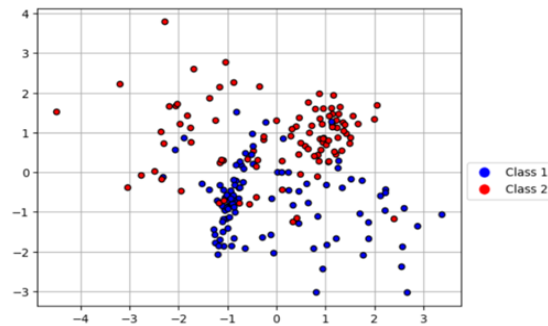


Figure 8. Visualization of the initial dataset.

Let's mark 150 points as not marked we will receive the following schedule:

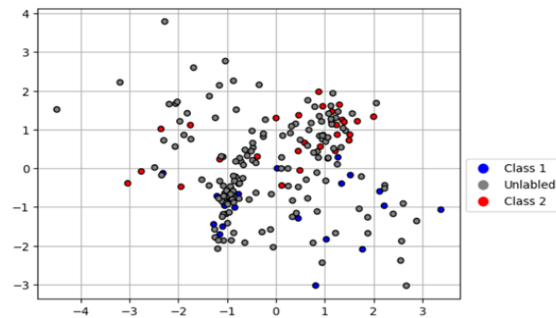


Figure 9. Visualization of the dataset after adding unlabeled data.

Figure 9 shows class 1 - blue dots, class 2 - red dots, and unmarked dots, which are shown in gray.

Initialize our constant C with a value of 0.1.

We also need to specify the initial variables w (normal vector), b (offset along the y axis) and weak variables η_i, ξ_i, z_i .

For the values of w and b the sample will be $[-0.1, 0.1]$, for the rest - $[0.0, 0.1]$.

w - $[-0.01975875 \ 0.02131162]$ size = 2,

η i - $[0.04901986 \ 0.02258875 \ 0.01560311 \ 0.04587382 \ 0.0352636 \ 0.00871087$

$0.08424851 \ 0.0857313 \ 0.0733342 \ 0.09528408 \ 0.05455903 \ 0.06449431$

$0.05901452 \ 0.04758597 \ 0.01772247 \ 0.07832201 \ 0.07269677 \ 0.09613403$

$0.02368684 \ 0.06946833]$ - size = (Marked - notMarked) = 50,

ξ i - $[0.09799687 \ 0.08343227 \ 0.00994421 \ 0.09511786 \ 0.03769766 \ 0.04774885$

$0.03169544 \ 0.03145913 \ 0.07661224 \ 0.04653426 \ 0.0142706 \ 0.09941006$

$0.00069853 \ 0.03098653 \ 0.00093538 \ 0.08666854 \ 0.09679364 \ 0.03014508$

$0.07180447 \ 0.00543835 \ 0.05054611 \ 0.09301137 \ 0.0755189 \ 0.03497578$

...

$0.0983856 \ 0.09866195 \ 0.08204016 \ 0.09872704 \ 0.06635472 \ 0.07370298]$

- size = notMarked = 150,

zi - $[0.07221 \ 0.09092026 \ 0.03663539 \ 0.07945663 \ 0.0902111 \ 0.05445606$

$0.01707353 \ 0.01452738 \ 0.08280087 \ 0.08758461 \ 0.09761866 \ 0.07808664$

$0.04225707 \ 0.07620617 \ 0.06079858 \ 0.02328625 \ 0.05549894 \ 0.07257086$

...

$0.08668178 \ 0.08250609 \ 0.03545815 \ 0.01125552 \ 0.06446315 \ 0.01788753$

$0.03401358 \ 0.05677734 \ 0.09136062 \ 0.08023616 \ 0.08339306 \ 0.0975363]$

- size = notMarked = 150,

b - $[0.0529]$ - size = 1.

Next we need to minimize the following expression:

$$\min \left[\|w\| + C \left(\sum_{i=1}^N \eta_i + \sum_{i=N+1}^{N+M} \min(\xi_j, z_j) \right) \right]. \quad (3)$$

Formula 3 describes minimization of the objective function of the S3VM method. The first term of the formula shown in Figure 3.3 imposes the standard SVM condition on the maximum separation distance, and the second block is divided into two parts:

- We need to add N weak variables to ensure a soft gap for the labelled samples.
- At the same time, we need to consider unmarked points classified as +1 or -1. Thus, we have two corresponding sets of variables ξ_i and z_i . However, we want to find the minor variable for each possible pair to ensure that the unlabeled sample is placed in a subspace where maximum accuracy is achieved.

Therefore, we need to impose the following restrictions:

$$\begin{aligned} y_i (w^T x_i + b) &\geq 1 - \eta_i, \quad \eta_i \geq 0 \quad \forall i \in (1, N) \\ (w^T x_i - b) &\geq 1 - \xi_j, \quad \xi_j \geq 0 \quad \forall j \in (N + 1, N + M) \\ -(w^T x_i - b) &\geq 1 - z_j, \quad z_j \geq 0 \quad \forall j \in (N + 1, N + M) \end{aligned} \quad (4)$$

Formula 4 describes conditions for the objective function.

The first constraint in Figure 3.4 is limited to the marked points, it is the same as in the controlled SVM. The next two instead consider the possibility that an unspecified label can be classified as +1 or -1.

We minimize the function with the above restrictions:

Table 1. Minimize the target function *S3VM*.

Step	$\sum_{i=0}^n \eta_i$	$\sum_{i=0}^n \min(\xi_i, z_j)$	Vector W	Target function
0	2.410	5.182	[-0.022 0.042]	7.594
100	2.410	5.182	[-0.022 0.042]	7.594
200	2.410	5.182	[-0.022 0.042]	7.594
300	2.410	5.182	[-0.022 0.042]	7.594
400	-47.590	-144.818	[-0.000 -0.000]	-192.408
500	-47.590	-144.818	[-0.000 -0.000]	-192.408
600	-47.590	-144.818	[-0.000 -0.000]	-192.408
700	-47.590	-144.818	[-0.000 -0.000]	-192.408
800	-297.601	-894.851	[0.000 -0.000]	-1192.452
900	-297.601	-894.851	[0.000 -0.000]	-1192.452
1000	-297.601	-894.851	[0.000 -0.000]	-1192.452
1100	-1547.657	-4645.019	[-0.000 -0.000]	-6192.676
1200	-1547.657	-4645.019	[-0.000 -0.000]	-6192.676
1300	-1547.657	-4645.019	[-0.000 -0.000]	-6192.676
1400	-1547.657	-4645.019	[-0.000 -0.000]	-6192.676
1500	-7797.937	-23395.859	[0.000 0.000]	-31193.797
1600	-7797.937	-23395.859	[0.000 0.000]	-31193.797
1700	-7797.937	-23395.859	[0.000 0.000]	-31193.797
1800	-39049.337	-117150.060	[0.000 0.000]	-156199.397
1900	-39049.337	-117150.060	[0.000 0.000]	-156199.397
2000	-39049.337	-117150.060	[0.000 0.000]	-156199.397
2100	-39049.337	-117150.060	[0.000 0.000]	-156199.397
2200	-195306.338	-585921.062	[0.002 0.000]	-781227.400
2300	-195306.338	-585921.062	[0.002 0.000]	-781227.400
2400	-195306.338	-585921.062	[0.002 0.000]	-781227.400
2500	-976591.342	-2929776.073	[0.009 0.001]	-3906367.415
2600	-976591.342	-2929776.073	[0.009 0.001]	-3906367.415
2700	-976591.342	-2929776.073	[0.009 0.001]	-3906367.415
2800	-976591.342	-2929776.073	[0.009 0.001]	-3906367.415
2900	-4883016.361	-14649051.131	[0.047 0.007]	-19532067.491
3000	-4883016.361	-14649051.131	[0.047 0.007]	-19532067.491
3100	-4883016.361	-14649051.131	[0.047 0.007]	-19532067.491
3200	-24415141.456	-73245426.416	[0.236 0.033]	-97660567.844
3900	-195321158.304	-585964226.958	[-3.108 0.268]	-781285380.396
4000	-195321164.767	-585964246.348	[4.892 0.268]	-781285399.114
4100	-195321164.767	-585964246.348	[4.892 0.268]	-781285399.114
4200	-195321164.767	-585964246.348	[4.892 0.268]	-781285399.114

Table 1 contains 4200 iterations of minimization. Column $\sum_{i=0}^n \eta_i$ contains the value of the loss on the labeled data, Column $\sum_{i=0}^n \min(\xi_i, z_j)$ contains the value of losses on unlabeled data. The vector W contains the value of the normal vector. This is our maximum distance.

Therefore, our target function has been minimized successfully and contains the following values:

Vector of normal $w = [4.892 \ 0.268]$,

b (offset along the y axis) $= 0.0529$.

Then we calculate the equation to obtain the classes of our points:

$$Y = X * w^T + b \tag{5}$$

Formula 5 – equation of the line.

Having obtained the value of Y , we impose the following condition, which finalizes our calculations and determines to which class our data belong:

If $x \leq 0$, then class -1 ,

If $x > 0$, then class 1 .

And we get the following result:

```
[ 1. 1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. 1. 1. 1. -1. -1. -1. 1. -1. 1. -1.
-1. -1. -1. -1. -1. -1. 1. -1. -1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. -1.
1. -1. -1. -1. 1. 1. 1. 1. -1. 1. 1. 1. -1. -1. 1. -1. 1. 1.
-1. 1. -1. 1. 1. -1. 1. -1. -1. 1. -1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. 1.
1. -1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. -1. 1. -1. -1.
1. 1. 1. 1. -1. -1. 1. -1. 1. 1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. -1. 1.
-1. 1. 1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. -1. -1. 1. -1. 1. -1. -1. 1. 1.
-1. -1. -1. 1. -1. 1. -1. 1. 1. 1. 1. 1. -1. 1. 1. 1. 1. -1.
-1. -1. 1. -1. 1. 1.]
```

This array contains data after classification. Two classes - class 1 (designation 1) and class 2 (designation -1).

Visualize the result: Graph showing labeled and unlabeled data (See Figure 10):

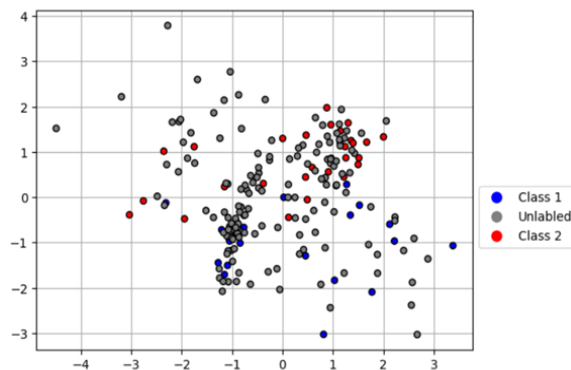


Figure 10. Visualization of the dataset after adding unlabeled data.

Figure 10 shows class 1 in blue, class 2 in yellow, and unlabeled data in gray. Schedule after classification (See Figure 11):

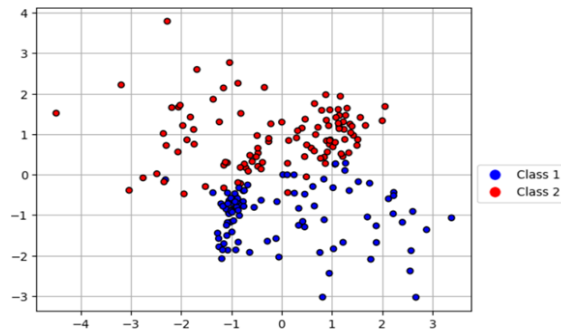


Figure 11. Dataset visualization after classification.

As you can see from Figure 11, the classification was quite successful.

Almost all data are separated, so the hyperline is successful, but contains points that have the wrong class. This applies to areas of low density.

TSVM approach calculations. Visualization of input data and addition of unlabeled data is already described in the previous section, so let's start with the initialization of the initial values of the variables w (normal vector), b (offset along the y-axis), y^u (variable for the second constraint condition, this condition must occur as the first, but for unlabeled points) and weak variables η_i, ξ_i .

For values of w and b the sample will be $[-0.1, 0.1]$, for $\eta_i, \xi_i - [0.0, 0.1]$, and for $y^u - [-1.0, 0.1]$.

```

w - [-0.01975875 0.02131162] size= 2,
ηi - [0.04901986 0.02258875 0.01560311 0.04587382 0.0352636 0.00871087
0.08424851 0.0857313 0.0733342 0.09528408 0.05455903 0.06449431
0.07807958 0.05834814 0.07014477 0.0219474 0.06762864 0.02508063
0.05901452 0.04758597 0.01772247 0.07832201 0.07269677 0.09613403
0.08828265 0.09579222 0.00191197 0.0985599 0.08494134 0.00936994
...
0.02368684 0.06946833] - size = (Marked - notMarked) = 50,
ξi - [0.09799687 0.08343227 0.00994421 0.09511786 0.03769766 0.04774885
0.04659362 0.09062985 0.03513581 0.05616333 0.02952544 0.0812517
0.0750658 0.02050575 0.089315 0.06914368 0.01608069 0.00452057
0.069853 0.03098653 0.00093538 0.086660854 0.09679364 0.03014508
...
0.0983856 0.09866195 0.08204016 0.09872704 0.06635472 0.07370298]
- size = notMarked = 150,
yu -
[ 0.04063871 0.24102629 0.64432042 -0.71708787 -0.07513165 -0.98990635
-0.2922075 0.00560538 -0.14231635 0.18206645 0.55786814 0.89377577
0.54712419 0.70159914 0.77993996 -0.46725851 -0.84731204 0.37656981
-0.03340037 -0.21165283 0.71084185 -0.40639437 0.44571452 0.01685231
...
0.7710943 0.29409488 -0.08909666 -0.31046288 -0.97264293 0.0147352 ] - size=
notMarked = 150,
b - [0.04816553] - size = 1.

```

Next you need to define the constants CL and CU, thanks to which we can

determine which data should be relied on more, if CL is a large value and SU is a small one, it means that we trust more labeled data, if on the contrary, we look more at the structure of unlabeled data.

So, let's set CL = 2.0 and SU = 0.1, which will mean that we will rely more on the labeled data.

Basically, the idea is to preserve the objective function with two sets of lysis variables (The lysis variable is a variable that is added to the constraint to convert it from inequality to equality) - the first for labeled samples and the second for unlabeled samples:

$$\min \left[\|w\| + C_L \sum_{i=1}^N \eta_i + C_U \sum_{i=N+1}^{N+M} \xi_j \right]. \quad (6)$$

As in the previous algorithm, we assume that we have N labeled samples and M unlabeled, and therefore the conditions are as follows:

$$\begin{aligned} y_i (w^T x_i + b) &\geq 1 - \eta_i, \eta_i \geq 0 \quad \forall i \in (1, N) \\ y_j^{(u)} (w^T x_j + b) &\geq 1 - \xi_j, \xi_j \geq 0 \quad \forall j \in (N+1, N+M) \\ y_j^{(u)} &\in \{-1, 1\} \end{aligned} \quad (7)$$

The first limitation is the classic SVM, and it only works on labeled samples.

The second uses a variable y_j^u with corresponding weak variables ξ_j , to impose a similar condition on the labeled samples, while the third is needed to limit the labels to -1 and 1.

We minimize the function with the above restrictions:

Table 2. Minimize the target TSVM function.

Step	$(\sum_i^N \eta_i) * CL$	$(\sum_i^N \xi_i) * CU$	Vector W	Target function
0	2.501	8.116	[-0.097 -0.092]	5.822
100	2.501	8.116	[-0.097 -0.092]	5.822
200	2.501	8.116	[-0.097 -0.092]	5.822
300	2.501	8.116	[-0.097 -0.092]	5.822
400	-97.499	-6.884	[-0.000 0.000]	-195.687
500	-97.499	-6.884	[-0.000 0.000]	-195.687
600	-97.499	-6.884	[-0.000 0.000]	-195.687
700	-97.499	-6.884	[-0.000 0.000]	-195.687
800	-597.677	-81.911	[0.000 0.000]	-1203.545
900	-597.677	-81.911	[0.000 0.000]	-1203.545
1000	-597.677	-81.911	[0.000 0.000]	-1203.545
1100	-3098.566	-457.050	[0.000 0.000]	-6242.837
1200	-3098.566	-457.050	[0.000 0.000]	-6242.837
1300	-3098.566	-457.050	[0.000 0.000]	-6242.837
1400	-3098.566	-457.050	[0.000 0.000]	-6242.837

Step	$(\sum_i^N \eta_i) * CL$	$(\sum_i^N \xi_i) * CU$	Vector W	Target function
1500	-15603.040	-2332.772	[0.000 0.000]	-31439.356
1600	-15603.040	-2332.772	[0.000 0.000]	-31439.356
1700	-15603.040	-2332.772	[0.000 0.000]	-31439.356
1800	-78125.688	-11711.473	[-0.000 0.000]	-157422.523
1900	-78125.688	-11711.473	[-0.000 0.000]	-157422.523
2000	-78125.688	-11711.473	[-0.000 0.000]	-157422.523
2100	-78125.688	-11711.473	[-0.000 0.000]	-157422.523
2200	-390772.967	-58611.180	[-0.001 -0.008]	-787407.052
2300	-390772.967	-58611.180	[-0.001 -0.008]	-787407.052
2400	-390772.967	-58611.180	[-0.001 -0.008]	-787407.052
2500	-1953100.666	-292967.544	[-0.005 -0.002]	-3935498.087
2600	-1953100.666	-292967.544	[-0.005 -0.002]	-3935498.087
2700	-1953100.666	-292967.544	[-0.005 -0.002]	-3935498.087
2800	-1953100.666	-292967.544	[-0.005 -0.002]	-3935498.087
2900	-9764739.162	-1464749.366	[-0.024 -0.011]	-19675953.261
3000	-9764739.162	-1464749.366	[-0.024 -0.011]	-19675953.261
3100	-9764739.162	-1464749.366	[-0.024 -0.011]	-19675953.261
3200	-49277493.151	-7391962.039	[-0.120 -0.054]	-99294182.496
3300	-49277493.151	-7391962.039	[-0.120 -0.054]	-99294182.496
...
4900	-10834827210.337	-1625327305.35	[-26.31 -11.82]	-21832186735

Table 2 contains 4900 iterations of minimization. Column $(\sum_i^N \eta_i) * CL$ contains the value of the loss on the tagged data, taking into account the constant CL , by which we determine how much we will rely on the tagged data. Column $(\sum_i^N \xi_i) * CU$ contains the value of losses on unlabeled data, which also takes into account the constant CU , contains the value of losses on unlabeled data, which also takes into account the constant CU , by which we determine how much we will rely more on the structure of the dataset than on the labeled data. The vector W contains the value of the normal vector. This is our maximum distance.

Therefore, our target function has been minimized successfully and contains the following values:

Vector of normal \mathbf{w} – [-26.317 -11.823],

\mathbf{b} (offset along the y axis) – 0.04816553,

Then we calculate the equation to obtain the classes of our points:

$$\mathbf{Y} = X * w^T + b \quad (8)$$

Having obtained the value of Y , we impose the following condition, which finalizes our calculations and determines to which class our data belong:

If $x \leq 0$, then class -1,

If $x > 0$, then class 1.

And we get the following result:

[-1. -1. -1. 1. -1. 1. -1. 1. -1. -1. -1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. 1.

1. 1. -1. 1. 1. 1. -1. 1. 1. -1. -1. 1. -1. -1. -1. -1. 1.

```

-1. 1. 1. 1. -1. -1. -1. -1. 1. -1. -1. -1. 1. 1. -1. 1. -1. -1.
1. -1. 1. -1. 1. -1. -1. 1. 1. -1. 1. -1. -1. -1. 1. -1. -1. -1.
-1. 1. 1. 1. -1. -1. 1. -1. -1. 1. -1. 1. -1. 1. 1. -1. 1. 1.
-1. -1. -1. -1. 1. 1. -1. 1. -1. -1. -1. 1. 1. -1. 1. 1. 1. -1.
1. -1. -1. -1. 1. -1. -1. 1. 1. 1. 1. -1. 1. -1. 1. 1. -1. -1.
1. 1. 1. -1. 1. -1. 1. -1. -1. -1. -1. -1. 1. -1. -1. -1. -1. 1.
1. -1. -1. 1. -1. -1.]

```

This array contains data after classification. Two classes - class 1 (designation 1) and class 2 (designation -1).

Graph showing labeled and unlabeled data (Figure 12):

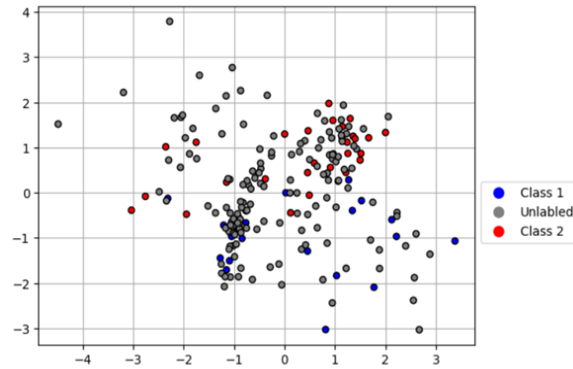


Figure 12. Visualization of the dataset after adding unlabeled data.

Class 1 is shown in blue, class 2 - in yellow, unlabeled data are marked in gray. Schedule after classification:

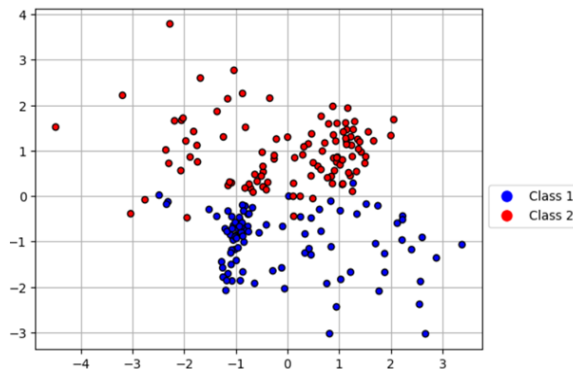


Figure 13. Dataset visualization after classification.

Analyzing Figure 13, we see that TSVM also showed a pretty good result, dividing the data into two classes. Further from the boundary of the section, all points are classified perfectly, but it is on the hyperline in areas of low density that you can see points with erroneous classification. Given the cost, we can assume that this method has coped with the task.

SVM approach calculations. For comparison, use the semi-supervised SVM approach and compare its results (which are quite expensive to obtain) with the results of the semi-supervised approach.

We use the dataset that we used in the two previous methods.

Number of marked labels - 200,

Number of unlabeled labels - 150.

Let us set the constant $C = 1$.

We use a trained SVM model with a linear function, and get the following results:

```
[-1 -1 1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 -1
-1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1
-1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1
1 -1 1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 -1 1 -1 1 1 1
1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 1
1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 1
-1 -1 -1 1 1 -1]
```

This array contains data after classification. Two classes - class 1 (designation 1) and class 2 (designation -1).

Graph showing labeled and unlabeled data (Figure 14):

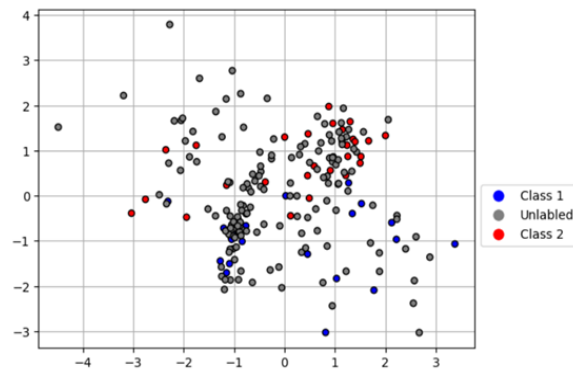


Figure 14. Visualization of the dataset after adding unlabeled data.

Class 1 is shown in blue, class 2 - in yellow, unlabeled data are marked in gray.
Schedule after classification:

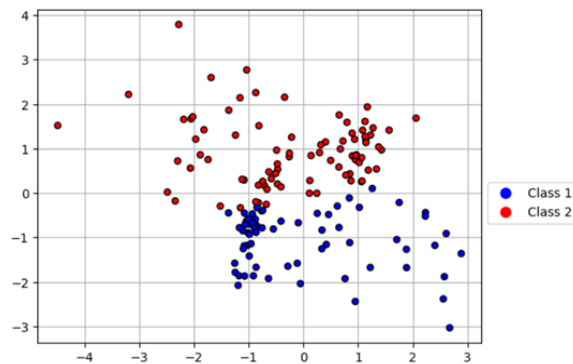


Figure 15. Dataset visualization after classification.

As we can see in Figure 15, the classification was better than in the two previous methods. Almost all points are classified correctly. The hyperline was successful because the data was correctly separated both at the dividing line and in the high

and low density zones. The protégé is also important for how costly these results are. Semi-supervised approaches can also compete with controlled, because they show close to the controlled approach.

3. Conclusions and prospects for further research. Modern semi-supervised approaches require serious assumptions and work poorly if assumptions are violated (e.g., clustering assumptions). In some cases, they may perform worse than a controlled classifier trained only on labelled instances. In addition, the vast majority need memory. However, my goal was to investigate whether semi-controlled approaches can compete with controlled ones or outperform them.

Having gathered all the necessary material, I learned about S3VM and TSVM.

Applying these approaches to my dataset, I determined that the TSVM algorithm more accurately classified the data at the reference limit, but the result of S3VM was not too bad.

The next step was to compare these algorithms with a method supervised approach, such as SVM. This algorithm showed the best results, but S3VM and TSVM have very close results to SVM. And as mentioned above, you need to choose between accuracy and cost.

You can also consider the case where the TSVM method will work better than supervised SVM. This is the case when we have a minimal amount of labelled data and a large number of unlabeled; consider this case:

Suppose we have 100 records, 90 of which are not macros.

Figures 16-18 show two graphs each. The first is the data for classification; blue is class 0, orange is class 1, green is unlabeled. The second is the data after classification. The red dots are divided into unlabeled squares of class 0 and labelled circles of class 0. The blue dots are divided into unlabeled triangles (inverted down) of class 1 and labelled triangles (upwards) of class 1.

SVM will work as follows:

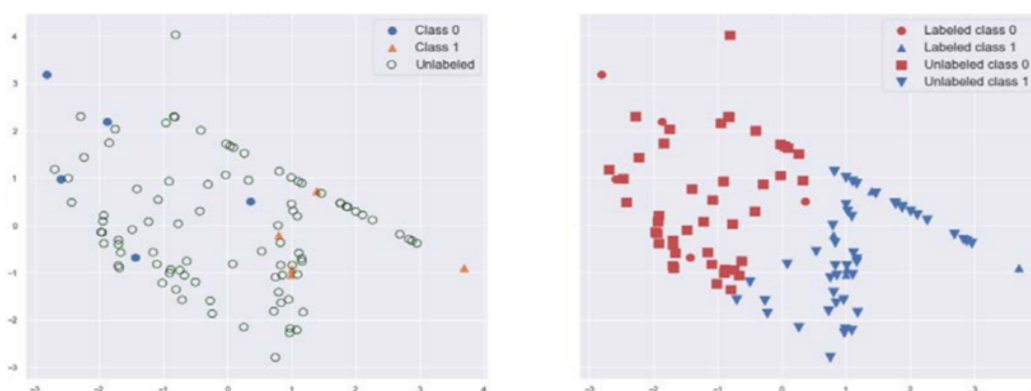


Figure 16. Comparison of data before and after classification (data before category on the left, after - on the right)

In Figure 16, we see a good result, but this line is not entirely stable, so consider how the TSVM will work.

We get a similar result by putting the following parameters in TSVM: $CL = 1.0$ and $SU = 10.0$ (the set parameters mean that we rely more on the structure of the dataset than on the labelled data).

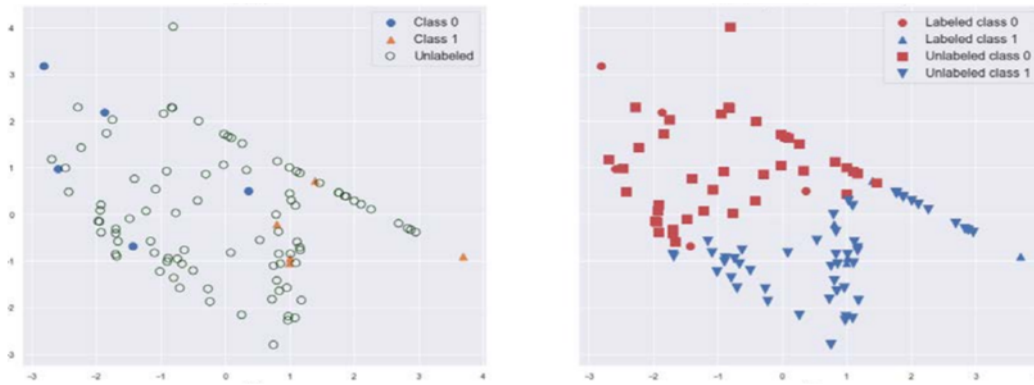


Figure 17. Comparison of data before classification and after (left data before classification, right - after).

However, by inverting the parameters, we get the following result: $CL= 10.0$ and $CU= 0.1$ (the parameters set mean that we rely more on the tagged data than on the dataset structure).

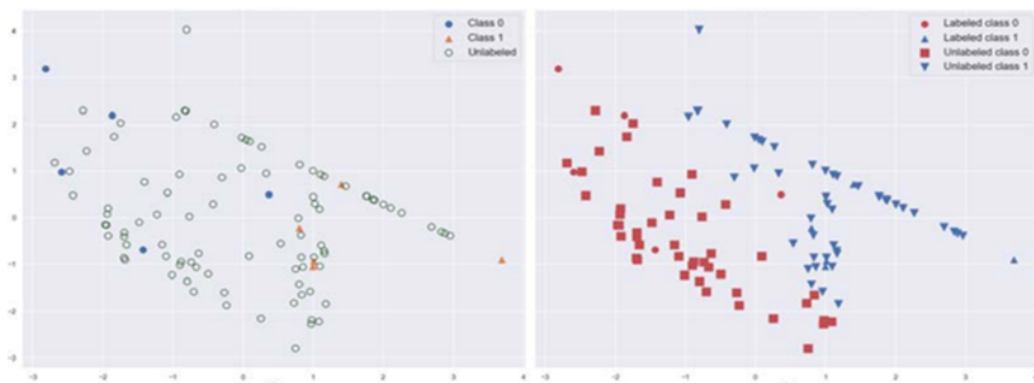


Figure 18. Comparison of data before and after classification (before classification on the left, after - on the right).

In this case, in Figure 18, labelled data can use more flexible boundaries, while unlabeled data is only allowed to be rigid.

We see that the hyperline runs entirely differently and better classifies our data at the dividing line and in the high and low-density zones. Also, this result is less expensive because most of the unlabeled data is used.

As a result, we can assume that semi-supervised approaches solve the classification problem no worse and sometimes better than supervised approaches.

References

1. Estivill-Castro, V., & Lee, I. (2000). Amoeba: Hierarchical clustering based on spatial proximity using Delaunay diagram, in: *9th Intern. Symp. on spatial data handling*, Beijing, China. 26-41.
2. Boehm, C., Kailing, K., Kriegel, H., & Kroeger, P. (2004). Density connected clustering with local subspace preferences, *IEEE Computer Society, Proc. of the 4th IEEE Intern. conf. on data mining*, Los Alamitos. 27-34.
3. Boyko, N., & Shakhovska, K. (2018). Information system of catering selection by using cluster-

- ing analysis, in: *2018 IEEE Ukraine Student, Young Professional and Women in Engineering Congress (UKRSYW)*. Kyiv, Ukraine. 7-13.
4. Harel, D., & Koren, Y. (2001). Clustering spatial data using random walks, in: *Proc. of the 7th ACM SIGKDD Intern. conf. on knowledge discovery and data mining*. San Francisco, California. 281-286.
 5. Tung, A.K., Hou, J., & Han, J. (2001). Spatial clustering in the presence of obstacles, in: *The 17th Intern. conf. on data engineering (ICDE'01)*, Heidelberg. 359-367.
 6. Boyko, N., Bronetskyi, A., & Shakhovska, N. (2019). Application of Artificial Intelligence Algorithms for Image Processing, in: CEUR. Workshop Proceedings of the 8th International Conference on "Mathematics. Information Technologies. Education", *MoMLeT&DS-2019, Vol-2386 urn: nbn: de: 0074-2386-1*, Shatsk, Ukraine, June 2-4, 2019, 194-211.
 7. Agrawal, R., Gehrke, J., Gunopulos, D., & Raghava, P. (2005). Automatic sub-space clustering of high dimensional data, *Data mining knowledge discovery*, 11(1), 5-33.
 8. Ankerst, M., Ester, M., & Kriegel, H. P. (2000). Towards an effective cooperation of the user and the computer for classification, in: *Proc. of the 6th ACM SIGKDD Intern. conf. on knowledge discovery and data mining*. Boston, Massachusetts, USA. 179-188.
 9. Zhang, C., & Murayama, Y. (2000). Testing local spatial autocorrelation using. *Intern. J. of Geogr. Inform. Science*, 14, 681-692.
 10. Estivill-Castro, V., & Lee, I. (2000). Amoeba: Hierarchical clustering based on spatial proximity using Delaunay diagram, in: *9th Intern. Symp. on spatial data handling*. Beijing, China. 26-41.
 11. Guo, D., Peuquet, D. J., & Gahegan, M. (2003). ICEAGE: Interactive clustering and exploration of large and high-dimensional geodata, *Geoinformatica*, 3(7), 229-253.
 12. Boyko, N., & Basystiuk, O. (2018). Comparison Of Machine Learning Libraries Performance Used For Machine Translation Based On Recurrent Neural Networks, in: *2018 IEEE Ukraine Student, Young Professional and Women in Engineering Congress (UKRSYW)*. Kyiv, Ukraine. 78-82.
 13. Aggarwal, C., & Yu, P. (2000). Finding generalized projected clusters in high dimensional spaces, in: *ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data*. 70-81.
 14. Thanki, R., & Borra, S. (2019). Application of Machine Learning Algorithms for Classification and Security of Diagnostic Images, *Machine Learning in Bio-Signal Analysis and Diagnostic Imaging*, 273-292.
 15. Peuquet, D. J. (2000). Representations of space and time. N. Y.: Guilford Press.
 16. Procopiuc, C. M., Jones, M., Agarwal, P. K., & Murali, T. M. (2002). A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering, in: *Intern. conf. on management of data, ACM SIGMOD*, Madison, Wisconsin, USA. 418-427.
 17. Chitra, K., & Maheswari, D. (2017). A Comparative Study of Various Clustering Algorithms in Data Mining. *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, 6(8), 109-115.

Бойко Н. Аналіз парадигми Semi-supervised learning для класифікації мультимодальних даних.

У роботі розглядаються алгоритми машинного навчання. Увага зосереджена на напівконтрольному навчанні, яке здається балансом між точністю навчання з учителем та витратами методів навчання без учителя. Розглядаються приклади ретельного опрацювання мічених наборів даних, для яких навчання під наглядом може бути дуже ефективним. Порівнюються підходи semi-supervised та supervised та проаналізована ефективність кожного. В роботі розглядаються підходи S3VM та TSVM. Метою роботи було дослідити чи можуть напівконтрольовані підходи конкурувати з контрольованими або навіть їх перевершити. Описується застосування даних підходів до запропонованого датасету для визначення більш точної класифікації даних, а саме на опорній межі.

Ключові слова: навчання під наглядом, метод опорних векторів, трандуктивний метод опорних векторів, метод опорних векторів для часткового навчання, прикладний програмний інтерфейс.

Список використаної літератури

1. Estivill-Castro V., Lee I. Amoeba: Hierarchical clustering based on spatial proximity using Delaunay diagram, in: *9th Intern. Symp. on spatial data handling*, Beijing, China, 2000. P. 26–41.
2. Boehm C., Kailing K., Kriegel H., Kroeger P. Density connected clustering with local subspace preferences, *IEEE Computer Society, Proc. of the 4th IEEE Intern. conf. on data mining*, Los Alamitos, 2004. P. 27–34.
3. Boyko N., Shakhovska K. Information system of catering selection by using clustering analysis, in: *2018 IEEE Ukraine Student, Young Professional and Women in Engineering Congress (UKRSYW)*. Kyiv, Ukraine, 2018. P. 7-13.
4. Harel D., Koren Y. Clustering spatial data using random walks, in: *Proc. of the 7th ACM SIGKDD Intern. conf. on knowledge discovery and data mining*. San Francisco, California, 2001. P. 281–286.
5. Tung A.K., Hou J., Han J. Spatial clustering in the presence of obstacles, in: *The 17th Intern. conf. on data engineering (ICDE'01)*, Heidelberg, 2001. P. 359–367.
6. Boyko N., Bronetskyi A., Shakhovska N. Application of Artificial Intelligence Algorithms for Image Processing, in: CEUR. Workshop Proceedings of the 8th International Conference on “Mathematics. Information Technologies. Education”, MoMLeT&DS-2019. Vol. 2386 urn: nbn:de:0074-2386-1, Shatsk, Ukraine, June 2-4, 2019. P. 194-211.
7. Agrawal R., Gehrke J., Gunopulos D., Raghava P. Automatic sub-space clustering of high dimensional data. *Data mining knowledge discovery*, 2005. Vol. 11, 1. P. 5–33.
8. Ankerst M., Ester M., Kriegel H.-P. Towards an effective cooperation of the user and the computer for classification, in: *Proc. of the 6th ACM SIGKDD Intern. conf. on knowledge discovery and data mining*, Boston, Massachusetts, USA, 2000. P. 179–188.
9. Zhang C., Murayama Y. Testing local spatial autocorrelation using. *Intern. J. of Geogr. Inform. Science*. 2000. Vol. 14. P. 681–692.
10. Estivill-Castro V., Lee I. Amoeba: Hierarchical clustering based on spatial proximity using Delaunay diagram, in: *9th Intern. Symp. on spatial data handling*, Beijing, China, 2000. P. 26–41.
11. Guo D., Pequet D. J., Gahegan M. ICEAGE: Interactive clustering and exploration of large and high-dimensional geodata, *Geoinformatica*, 2003. Vol. 3, No. 7. P. 229–253.
12. Boyko N., Basystiuk O. Comparison Of Machine Learning Libraries Performance Used For Machine Translation Based On Recurrent Neural Networks, in: *2018 IEEE Ukraine Student, Young Professional and Women in Engineering Congress (UKRSYW)*, Kyiv, Ukraine, 2018. P. 78-82.
13. Aggarwal C., Yu P. Finding generalized projected clusters in high dimensional spaces, in: *ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data*, 2000. P. 70–81.
14. Thanki R., Borra S. Application of Machine Learning Algorithms for Classification and Security of Diagnostic Images, *Machine Learning in Bio-Signal Analysis and Diagnostic Imaging*, 2019. P. 273-292.
15. Pequet D. J. Representations of space and time. N. Y.: Guilford Press, 2000.
16. Procopiuc C.M., Jones M., Agarwal P. K., Murali T. M. A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering, in: *Intern. conf. on management of data, ACM SIGMOD*, Madison, Wisconsin, USA, 2002. P. 418–427.
17. Chitra K., Maheswari D. A Comparative Study of Various Clustering Algorithms in Data Mining, *International Journal of Computer Science and Mobile Computing*, Vol.6 Issue.8, August 2017. P. 109–115.

Received 25.10.2021

УДК 004.056.55

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).145-151](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).145-151)**А. О. Гедеон¹, О.М. Гапак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
асистент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
hanna.hedeon@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5684-6932>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат педагогічних наук
oksana.hapak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3448-6670>

АПАРАТНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДУЛІВ ХЕШУВАННЯ НА БАЗІ АЛГОРИТМІВ CRC-32 І ADLER-32

У статті представлені результати дослідження хеш-функцій. Для досягнення оптимальної швидкодії та надійності захисту інформації обрана апаратна реалізація алгоритмів хешування. Саме вона гарантує цілісність розробки та виключає можливість перехоплення інформації.

Розроблено апаратний модуль хешування на основі алгоритмів *CRC-32* і *Adler-32*, який відрізняється від існуючих розробок відсутністю мікропрограм та запрограмованих блоків. Роботою модуля керують спеціальні блоки керування, що базуються на автоматах Мура. Спроекований модуль представляє собою цілісну розробку, яка включає сукупність блоків, що відповідають за конкретні етапи обчислень. Перебачена можливість вдосконалення та додавання нових алгоритмів хешування.

Запропоновані алгоритми хешування забезпечують швидкодію обчислення контрольної суми, що в сотні разів перевищує можливості програмних додатків. Імовірність злому апаратного блоку вважається мінімальною, адже передбачає процес повного розбору пристрою на складові та прорахунок всіх можливих значень, що поступають від складових модуля.

Встановлено, що апаратна реалізація алгоритму *Adler-32* виконує обчислення контрольної суми для вхідного повідомлення однакової довжини приблизно в 1,481 разів швидше, ніж апаратний модуль *CRC-32*.

Практична цінність отриманих у роботі результатів полягає в тому, що запропонований спосіб реалізації алгоритмів дозволяє оцінити можливості та переваги апаратних розробок, забезпечити цілісність та захищеність пристрою хешування, дослідити різницю між програмними та апаратними розробками, в тому числі й у відношенні часових затрат на проектування, та забезпечити максимальну швидкодію в обчисленні хеш-сум.

Ключові слова: контрольна сума, хешування, хеш-сума, хеш, блок керування, алгоритм, модуль, апаратний модуль, CRC, Adler.

1. Вступ. Процес пошуку даних у великих обсягах інформації пов'язаний з часовими витратами, які обумовлені необхідністю постійно переглядати та порівнювати з ключем пошуку значне число елементів. Скорочення пошуку відбувається завдяки використанню різних алгоритмів і способів, які упорядковують інформацію відповідно до тих, чи інших вимог. Поширеним методом забезпечення швидкого доступу до інформації, що зберігається в зовнішній пам'яті, є хешування.

Хеш-функції використовують для контролю цілісності файлів операційної системи, конфіденційних документів і програм; для побудови асоціативних масивів і унікальних ідентифікаторів; пошуку дублікатів у серіях наборів даних і

контрольного підсумовування з метою виявлення випадкових чи навмисних помилок при зберіганні або передачі інформації; у сфері захисту інформації в інформаційних, телекомунікаційних та інформаційно-телекомунікаційних системах [1].

Для досягнення оптимальної швидкодії і надійності захисту інформації раціонально використовувати апаратні розробки для шифрування та хешування, що гарантують цілісність розробки, забезпечують максимально можливу швидкість обробки даних і виключають можливість перехоплення інформації.

Більшість криптографічних модулів захисту даних реалізовані у вигляді спеціальних фізичних пристроїв, що під'єднують до лінії зв'язку. Апаратна реалізація дозволяє зробити процес хешування непомітним для користувача, підвищити стійкість системи до зовнішнього впливу і створити внутрішню логічну структуру, внесення мінімальних коректив в яку призводить до повного виходу з ладу системи та неможливості отримати доступ до конфіденційних даних [2].

Основоположниками теорії хеш-функцій вважаються дослідники Картер Дж. Л., Вегман М. Н., Бірбрауер Ю. У перших версіях відповідні алгоритми задіяні в якості інструментарію для формування унікальних образів послідовностей символів довільної довжини з подальшою метою їх ідентифікації і перевірки на предмет достовірності [3]. До відомих алгоритмів хешування відносяться: *Adler-32*, *BTIH*, *Fletcher*, *CRC-32*, ГОСТ Р 34.11-94, сімейства *MD*, *IPED SHA*, *TTH*.

Стандарт *MD5* (сімейство *MD*; 128-бітний алгоритм хешування) опублікований Рональдом Ривестом з Массачусетського технологічного інституту. В рамках проекту *MD5CRK* [4] китайські криптографи Сяююнь Ван (*Xiaoyun Wang*), Денгуо Фен (*Dengguo Feng*), Сюецзя Лай (*Xuejia Lai*) і Хонбо Ю (*Hongbo Yu*) довели, що при знаходженні контрольних сум *MD5* зустрічаються колізії (на їх визначення витрачається від 15 секунд до двох годин). Швидкість хешування *MD5* на *IBM PS/2* (16 MHz 80386) складає 1849 Кбіт/с, тоді як *SHA* – 710 Кбіт/с.

У дослідженнях авторів *RFC 3385* [5] проведено аналіз ефективності виявлення помилок контрольних сум *Adler-32*, *IEEE-802*, *Fletcher*, *CRC-32*. Результати представлені в табл. 1, де: *d* - мінімальна відстань на блоці довжини *Block*, *Block* - довжина блоку в бітах, *i/byte* - кількість програмних інструкцій на байт, *Pudb* - ймовірність невиявлених групових помилок, *Puds* - ймовірність невиявлених одиничних помилок.

Таблиця 1.

Результати дослідження *RFC 3385*.

Алгоритм	<i>d</i>	<i>Block</i>	<i>i/byte</i>	<i>Pudb</i>	<i>Puds</i>
<i>Adler-32</i>	3	2^{19}	3	10^{-36}	10^{-35}
<i>Fletcher-32</i>	3	2^{19}	2	10^{-37}	10^{-36}
<i>IEEE-802</i>	3	2^{16}	2.75	10^{-41}	10^{-40}
<i>CRC32C</i>	3	2^{31-1}	2.75	10^{-41}	10^{-40}

Ймовірності невиявлених помилок, приведені в таблиці, обчислені при рівномірному розподілі даних та дозволяють відслідкувати суттєву різницю у відношенні алгоритмів хешування *Adler-32* і *CRC-32*.

Метою роботи є дослідження стандартів *Adler-32* і *CRC-32*, визначення швидкодії апаратних модулів хешування при симуляції роботи проєктованих схем у пакеті *NI Multisim*, а також порівняння швидкодії формування хеш-сум при програмній і апаратній реалізації цих алгоритмів.

2. Постановка задачі. Об'єктом дослідження є апаратний модуль хешування на базі алгоритмів загального призначення *CRC-32* і *Adler-32*.

Предметом дослідження є методи побудови апаратних модулів хешування, що забезпечують підвищення ефективності захисту інформації.

Проєктовані модулі хешування на базі алгоритмів загального призначення повинні відповідати вимогам:

- 1) модульна архітектура;
- 2) цілісність розробки (відсутня можливість розділити пристрій на окремі незалежні складові для подальшого дослідження, зміни параметрів і підбору вхідних значень);
- 3) оптимальна швидкодія;
 - (а) хешування та зберігання контрольної суми відбувається в самій мікросхемі, а не в оперативній пам'яті комп'ютера;
 - (б) незалежний блок керування на базі скінченного автомата для кожного з алгоритмів;
 - (в) оптимальне споживання ресурсів;
 - (г) завантаження ключів і формування проміжних значень результату відбувається без використання оперативної пам'яті і системної шини комп'ютера (виключає можливість перехоплення значень).

3. Опис модулів *CRC-32* і *Adler-32*. Апаратний модуль хешування реалізовано в пакеті *NI Multisim*, програмна реалізація алгоритмів *CRC-32* і *Adler-32* виконана у вигляді функцій на мові програмування *C#* в середовищі розробки *Microsoft Visual Studio*.

Алгоритм *CRC-32*[6]:

- 1) На регістр зберігання даних поступає вхідне слово, яке перетворюється в послідовність одиниць та нулів.
- 2) Блок хешування аналізує кожен біт, що поступає в відповідний регістр, та виконує обчислення з заданим поліномом.
- 3) Лічильник контролює функціонування блоку хешування та в разі необхідності подає сигнал дозволу на запис регістру хешу.
- 4) Після подання сигналу обчислення блоком хешування припиняються та регістр хешу демонструє результати – контрольну суму.

Алгоритм *Adler-32*[7]:

- 1) На регістр зберігання даних поступає вхідне слово, яке перетворюється в послідовність одиниць та нулів.
- 2) Блок хешування зчитує посимвольно вхідне слово та розділяє кожен символ (послідовність 1 та 0) на частини А та В. Кожна частина надсилається на відповідний блок для проведення обрахунків.
- 3) Лічильник контролює функціонування блоку хешування та в разі необхідності подає сигнал дозволу на перевірку розміру хешу.
- 4) Блок хешування формує хеш з отриманих частин А та В та перевіряє, чи не перевищений ліміт.

5) Блок керування передає сигнал дозволу на демонстрацію отриманої контрольної суми.

Спроектований блок хешування на базі модулів *CRC-32* і *Adler-32* включає наступні компоненти:

- блок керування (2 шт.);
- блок хешування (2 шт.);
- блок індикації (спеціальні дисплеї для відображення символів в 16-тквовій системі числення та відображення англійського алфавіту і цифр);
- перетворювач сигналів (спеціальний пристрій, що дозволяє взаємодіяти дисплеям різних типів з вихідними сигналами регістрів);
- блок формування хешу;
- блок ідентифікації вхідного слова.

Схематична реалізація блоку приведена на рис. 1. Спроектований пристрій представляє собою цілісну розробку, яка включає сукупність блоків, що відповідають за конкретні етапи обчислень.

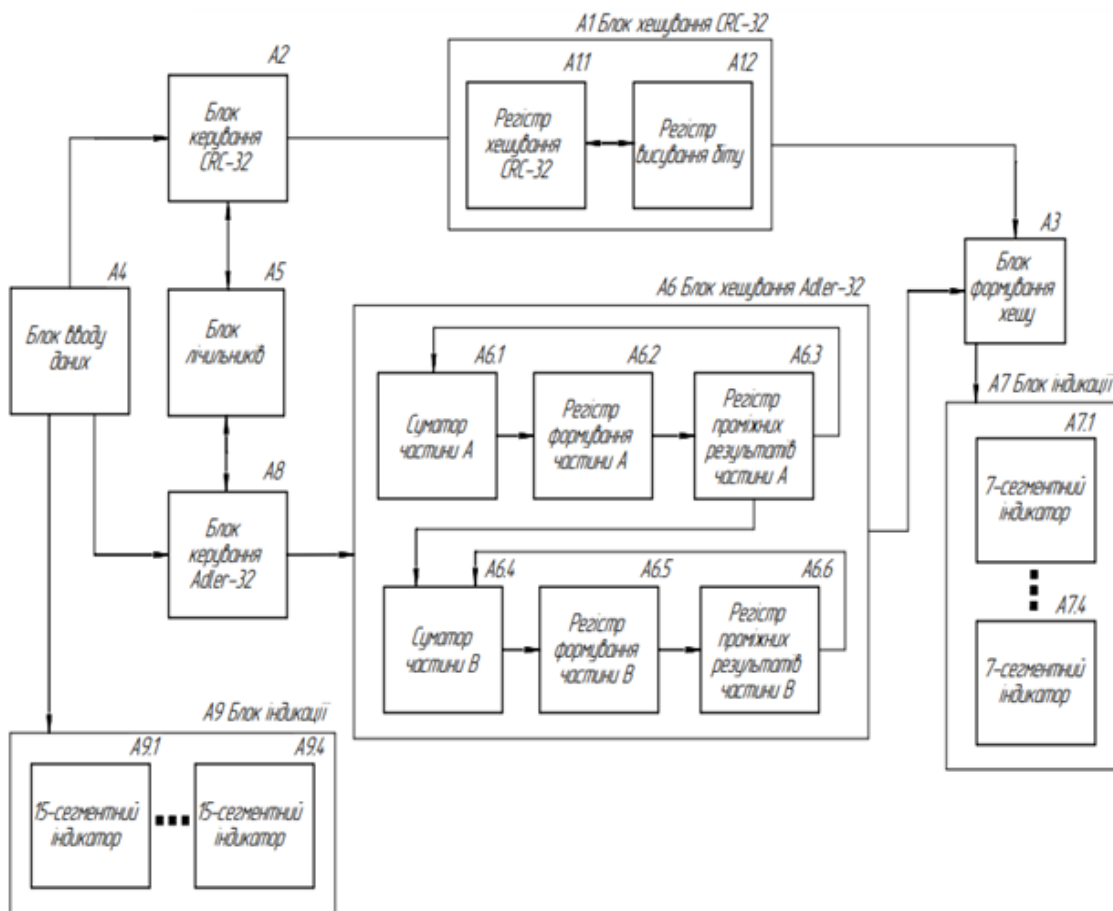


Рис. 1. Структура схема блоку хешування

Починаючи з перших, блоки керування (далі в тексті БК, А2 та А7) повинні взаємодіяти з блоками хешування та у заданий час подавати керуючі сигнали, спроможні контролювати всю роботу апаратного модуля. Кожен БК включає

перелік дій та сигналів, що взаємодіють між собою для виконання вказаного алгоритму (*CRC-32* або *Adler-32*).

Блоки хешування (A3 та A8) чітко розподіляються на окремі модулі, не пов'язані між собою (передбачається можливість розширення схеми та додавання нових блоків хешування). В залежності від того, на який з БК буде поданий сигнал запуску, буде активований відповідний модуль хешування (складається з цілого набору компонентів).

Блоки індикації (A6 та A9) для демонстрації результатів з'єднані з блоками формування хешу та вхідними регістрами, що записують початкове слово, введено користувачем. В залежності від того, де розташований дисплей і для чого він використовується, будуть встановлені різні варіанти: стандартні дисплеї *Multisim (DCD_HEX_DIG)* для демонстрації 16-ткової системи числення та 15-сегментні *ALPHA_NUMERIC_COM*, що призначені для демонстрації англійського алфавіту і цифр від 0 до 9. Останні підключаються до спеціальних перетворювачів сигналів, які в свою чергу – до виходів 32-бітних регістрів.

Важливим компонентом є блок ідентифікації даних (A1), котрий дозволяє ввести відповідні дані (в тому числі початкове слово та ключ, що відповідає за обрання алгоритму), блок формування хешу (A4), що зберігає кінцевий результат хешування та передає його на блоки індикації, та блок лічильників (A5), котрий відповідає за контроль обчислень та при необхідності передає сигнали блоку керування, якщо необхідно завершити розрахунок.

Апаратний модуль, що включає декілька алгоритмів хешування, можна використовувати в якості окремої мікросхеми, що під'єднується до каналу зв'язку, або як окремі пристрій для миттєвого відображення контрольної суми для введеного вхідного повідомлення. Основні завдання проєктованого модуля: обчислення контрольної суми для заданого повідомлення, надання вибору двох варіантів обчислень, швидкий обрахунок та відсутність збоїв.

Проведено дослідження швидкодії обрахунків для кожного з алгоритмів, додатково визначено співвідношення швидкодії апаратних і програмних модулів та відстежили зміни швидкості при зміні тактової частоти процесора. Серія тестування для кожного алгоритму включила по 30 дослідів для вхідних слів розміром 40, 48, 56 і 64 біт згенерованих випадковим чином (загалом 480 симуляцій роботи апаратних і програмних модулів). Тестування програмних модулів проводилось на базі процесора 3-го покоління *Intel i3* з тактовою частотою $2,4\text{ GHz}$.

За висновками досліджень середня швидкість роботи апаратного модуля хеш-функції *CRC-32* із заданою тактовою частотою 24 MHz в 1,913 рази перевищила можливості програмної реалізації. Під час тестування із тактовою частотою 240 MHz виявлено, що швидкість обчислень апаратного модуля перевищує можливості програмної функції в 189,5 разів.

Симуляція роботи апаратних блоків *Adler-32* проводилась із заданою тактовою частотою в $2,4\text{ MHz}$ і 24 MHz . Швидкість обчислень апаратного модуля у середньому в 14,35 і 143,63 разів відповідно перевищила можливості програмної функції.

Що стосується апаратної реалізації алгоритмів *Adler-32* і *CRC-32*, апаратний модуль *Adler-32* виконує обчислення контрольної суми для вхідного повідомлення аналогічної довжини приблизно в 1,481 разів швидше, ніж апаратний

модуль *CRC-32*.

Результати дослідження показують, що запропоновані алгоритми хешування забезпечують швидкодію обчислення контрольної суми, яка в сотні разів перевищує можливості програмних додатків. Можливість злому апаратного блоку вважається мінімальною, адже передбачає процес повного розбору пристрою на складові та розрахунок всіх можливих значень, що надходять від складових модуля.

4. Висновки. Апаратна реалізація алгоритмів загального призначення гарантує цілісність розробки: після змінення параметрів пристрою блок повністю виходить з ладу, адже будь-які корективи впливають на результати обчислень та не дозволяють підібрати вхідне слово. Відсутність підпрограм компенсується блоками управління на базі скінченних автоматів (автоматів Мура), що також підвищують швидкодію і надійність апаратного модулю в порівнянні з програмними аналогами.

Під час розробки апаратного блоку передбачена можливість вдосконалення загальної схеми, шляхом додавання нових алгоритмів хешування, для яких зарезервовані бітові комбінації, що надходять на блок вводу даних. Це дозволяє доповнити загальну схему додатковими алгоритмами хешування, що будуть працювати незалежно від наявних модулів.

Практична цінність отриманих в роботі результатів полягає в тому, що запропонований спосіб реалізації алгоритмів дозволяє оцінити можливості та переваги апаратних розробок, забезпечити цілісність та захищеність пристрою хешування, дослідити різницю між програмними та апаратними розробками, в тому числі й у відношенні часових затрат на проектування, та забезпечити максимальну швидкодію в обчисленні хеш-сум.

Список використаної літератури

1. Вишня В. Б., Гавриш О. С., Рижков Е. В. Основи інформаційної безпеки: навч. посіб. Дніпро: ДДУВС, 2020. 128 с.
2. Варлатая С. К., Шаханова М. В. Криптографические методы и средства обеспечения информационной безопасности: учебно-метод. комп. Владивосток: ДВФУ, 2015. 143 с.
3. Основы криптографии: учебное пособие. 2-е Изд. 2-е, испр. и доп. / Алферов А. П., Зубов А. Ю., Кузьмин А. С., Черемушкин А. В. Москва: Гелиос АРВ, 2002. 420 с.
4. Collisions for Hash Functions MD4, MD5, HAVAL-128 and RIPEMD / Xiaoyun W., Dengguo F., Xuejia L., Hongbo Y. International Association for Cryptologic Research, 2004. P. 4.
5. Internet Protocol Small Computer System Interface (iSCSI) Cyclic Redundancy Check (CRC). Checksum Considerations / Sheinwald D., Satran J., Thaler P., Cavanna V. 2002. P. 23.
6. Castagnoli G., Braeuer S., Herrman M. Optimization of Cyclic Redundancy-Check Codes with 24 and 32 Parity Bit. IEEE Transactions on Communications. T. 41, № 6, 1993. P. 883-892.
7. Maxino T. Revisiting Fletcher and Adler Checksums. Carnegie Mellon University. Pittsburgh: DSN 2006 Student Forum, 2006. P. 3.

Hedeon A. O., Hapak O. M. Hardware implementation of hashing modules based on algorithms CRC-32 and Adler-32.

The article presents the results of the study of hash functions. To achieve optimal speed and reliability of information protection, the hardware implementation of hashing algorithms is chosen. It guarantees the integrity of the development and excludes the possibility of interception of information.

A hardware hashing module based on CRC-32 and Adler-32 algorithms has been developed, which differs from existing developments by the absence of micro program and

programmed blocks. The operation of the module is controlled by special control units based on Moore machine. The designed module is a holistic development, which includes a set of blocks responsible for specific stages of calculations. The possibility of improving and adding new hashing algorithms is provided.

The proposed hashing algorithms provide the speed of calculating the checksum, which exceeds a hundred times the capabilities of software applications. The probability of hacking the hardware unit is considered minimal, because it involves the process of complete disassembly of the device into components and the calculation of all possible values coming from the components of the module.

It has been found that the hardware implementation of the Adler-32 algorithm performs a checksum calculation for an incoming message of the same length approximately 1,481 times faster than the CRC-32 hardware module.

The practical value of the obtained results in the work is that the proposed method of algorithms implementation allows to assess the capabilities and benefits of hardware development, ensure the integrity and security of the hashing device, investigate the difference between software and hardware development, including the time spent on design, and provide maximum speed in calculating of hash sums.

Keywords: checksum, hashing, hash sum, hash, control unit, algorithm, module, hardware module, CRC, Adler.

References

1. Vyshnia, V. B., Gavrish, O. S., & Rizhkov, E. V. (2020). Basics of information security: textbook. Dnipro: DDUVS.
2. Varlataya, S. K., & Shakhanova, M. V. (2015). Cryptographic methods and means of ensuring of information security: textbook. Vladivostok: FEFU.
3. Alferov, A. P., Zubov, A. Yu., Kuzmin, A. S., & Cheremushkin, A. V. (2002). Fundamentals of cryptography: textbook, 2nd ed., Rev. and add. Moscow: Helios ARV.
4. Xiaoyun, W., Dengguo, F., Xuejia, L., & Hongbo, Y. (2004). Collisions for Hash Functions MD4, MD5, HAVAL-128 and RIPEMD. *International Association for Cryptologic Research*.
5. Sheinwald, D., & Satran, J. (2002). Internet Protocol Small Computer System Interface (iSCSI) Cyclic Redundancy Check (CRC). *Checksum Considerations*.
6. Castagnoli, G., Braeuer, S., & Herrman, M. (1993). Optimization of Cyclic Redundancy-Check Codes with 24 and 32 Parity Bits. *IEEE Transactions on Communications*, 41(6), 883-892.
7. Maxino, T. (2006). Revisiting Fletcher and Adler Checksums. *Carnegie Mellon University. Student Forum*. Pittsburgh: DSN.

Одержано 27.09.2021

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).152-157](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).152-157)**І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук

volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики

olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

БАЗИСНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ У КЛАСІ УНІВЕРСАЛЬНИХ БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У роботі вводиться поняття базисної еквівалентності, будується фактор-решітка класу алгебр M_2 , встановлюється розташування вершин у фактор-решітці по базисній еквівалентності класу M_2 . Будуються сигнатурні граfi суміжних класів алгебри M_2 . Досліджується 265 елементна базисна решітка фактор класу M_2/σ . Доводиться теорема про потужність класу M_2/σ .

Ключові слова: базисна еквівалентність, базисна решітка, сигнатурний граф суміжних класів

1. Вступ. У даній роботі продовжуються дослідження класу універсальних булевих алгебр, сигнатура яких складається з операцій, арність яких не перевищує два [1, 2]. Відомо, що в класі таких булевих функцій можна побудувати дев'ять двоопераційних базисів $a_1 = \{0, \Rightarrow\}$, $a_2 = \{0, \Im\}$, $a_3 = \{\neg, \wedge\}$, $a_4 = \{\neg, \vee\}$, $a_5 = \{\neg, \Rightarrow\}$, $a_6 = \{\neg, \Im\}$, $a_7 = \{\oplus, \Rightarrow\}$, $a_8 = \{\Im, \Rightarrow\}$, $a_9 = \{\Im, \Leftrightarrow\}$ і шість трьоопераційних базисів $a_{10} = \{0, \wedge, \Leftrightarrow\}$, $a_{11} = \{0, \vee, \Leftrightarrow\}$, $a_{12} = \{1, \wedge, \oplus\}$, $a_{13} = \{1, \vee, \oplus\}$, $a_{14} = \{\wedge, \oplus, \Leftrightarrow\}$, $a_{15} = \{\vee, \oplus, \Leftrightarrow\}$ та два одноопераційних базисів $a_{16} = \{\uparrow\}$, $a_{17} = \{\|\}$. Із сімнадцяти базисів можна утворити 2^{17} різних комбінацій базисів. Для більшості комбінацій базисів не існують універсальні булеві алгебри з операцій яких можна побудувати тільки ті базиси, що входять у вибрану комбінацію. З іншого боку, існують універсальні булеві алгебри з різними сигнатурами, з операцій яких можна побудувати однакову множину базисів.

2. Базисна еквівалентність. Кожній алгебрі $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle \in M$ поставимо у відповідність 17-мірний булевий вектор $H_i = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{17}^i\}$, де $\alpha_j^i = 1$, якщо з операцій Ω_i можна утворити j -базис і $\alpha_j^i = 0$ у іншому випадку. Вектор H_i називається характеристичним базисним вектором алгебри U_i . Позначимо через $B(U_i)$ множину усіх базисів алгебри $U_i = \langle A, \Omega_i \rangle$ з операцій, що входять в Ω_i .

Означення 1. Алгебри U_1 і $U_2 \in M$ називаються базисно еквівалентними $U_1 \stackrel{\sigma}{=} U_2$, якщо $B(U_1) = B(U_2)$. Зрозуміло, що $U_1 \stackrel{\sigma}{=} U_2$ тоді і тільки тоді, коли $H_1 = H_2$, де σ – відношення еквівалентності.

Побудуємо фактор-решітку класу M_2 за базисною еквівалентністю σ , використовуючи характеристичні базисні вектори. Якщо алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ і $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ мають характеристичні базисні вектори $H_1 = \{\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{17}^1\}$ і $H_2 = \{\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{17}^2\}$, то $U_1 \leq U_2$ тоді і тільки тоді, коли $H_1 \leq H_2$, тобто $\alpha_i^1 \leq \alpha_i^2, \forall i = 1, 2, \dots, 17$. Алгебри, які входять у нульовий елемент фактор-решітки мають характеристичний базисний вектор $(0, 0, \dots, 0)$ з операцій яких не можна утворити жодного базису. Максимальним елементом фактор-решітки є алгебра U^* така, що $M^* = (1, 1, \dots, 1)$, з операцій сигнатури яких можна утворити 17 базисів.

Побудуємо базисну фактор-решітку $R(M_2/\sigma)$. Вершинами $R(M_2/\sigma)$ є суміжні класи множини M_2/σ , а операції решітки визначаються за допомогою характеристичних базисних векторів.

У базисній решітці $R(M_2/\sigma)$ є сімнадцять ярусів, на k -му ярусі знаходяться всі алгебри з сигнатури операцій яких можна скласти k базисів. У сигнатурних графах ребра несли інформацію про операцію, яка змінювала сигнатури алгебр, що їх з'єднували. У базисних графах ребра вказують на базис, який змінює два суміжні класи M_2/σ . Оскільки така зміна може призвести до виникнення додаткових базисів, то ребра в базисних графах можуть з'єднувати суміжні класи, які знаходяться не на сусідніх ярусах.

Аналогічно, як в роботах [1, 2], розіб'ємо M_2 на класи: M_2^1 – клас алгебр у сигнатуру яких входять операції $Q = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow\}$; M_2^2 – клас алгебр у сигнатуру яких окрім вказаних операцій входить операція стрілка Пірса; M_2^3 – клас алгебр у сигнатуру яких, окрім вказаних операцій входить операція штрих Шеффера; M_2^4 – клас алгебр у сигнатуру яких, окрім вказаних операцій входять операції стрілка Пірса та штрих Шеффера.

Розглянемо суміжні класи M_2^1 за базисною еквівалентністю σ . Найбільше алгебр класу M_2^1 мають характеристичний базисний вектор $(0, 0, \dots, 0)$. Це вісімдесят вісім функціонально неповних алгебр [1]. Є два суміжні класи до складу яких входять по десять алгебр: $K_{10}^1 = \{130, 138, 146, 162, 178, 386, 394, 402, 418, 434\}$, $K_{10}^2 = \{260, 261, 276, 292, 308, 388, 389, 406, 420, 436\}$. Класи K_{10}^1 і K_{10}^2 мають ізоморфні сигнатурні графи.

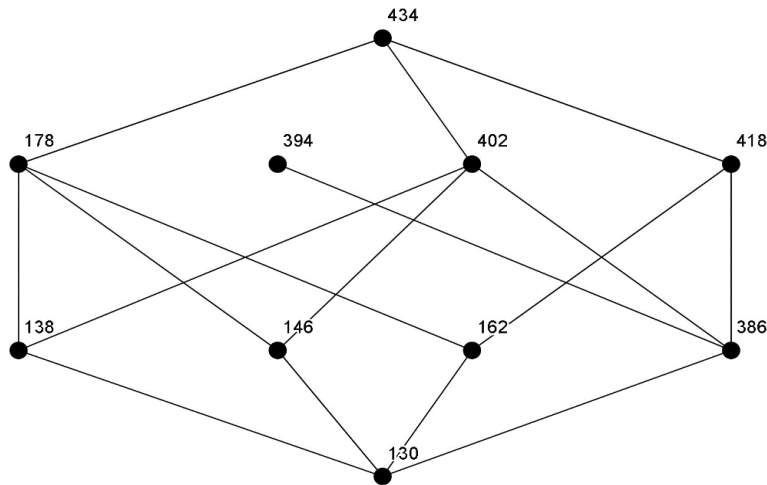


Рис. 1. Сигнатурний граф суміжних класів K_{10}^1 і K_{10}^2 .

Три суміжні класи містять у своєму складі по 8 алгебр:
 $K_8^1 = \{80, 81, 88, 208, 209, 336, 344, 464\}$, $K_8^2 = \{96, 97, 104, 224, 225, 352, 360, 480\}$,
 $K_8^3 = \{112, 113, 120, 240, 241, 368, 376, 490\}$ та мають ізоморфні сигнатурні графи (рис. 2).

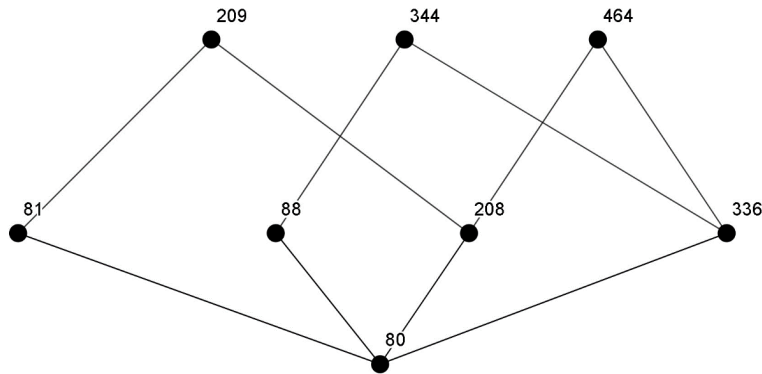


Рис. 2. Сигнатурний граф суміжних класів K_8^1 , K_8^2 і K_8^3 .

Чотири класи мають у своєму складі по 7 алгебр:
 $K_7^1 = \{3, 11, 19, 35, 51, 259, 267\}$, $K_7^2 = \{12, 13, 28, 44, 60, 140, 141\}$,
 $K_7^3 = \{131, 139, 147, 163, 179, 387, 395\}$, $K_7^4 = \{268, 269, 284, 300, 316, 396, 397\}$, які
 можемо зобразити у вигляді сигнатурних графів (рис. 3).

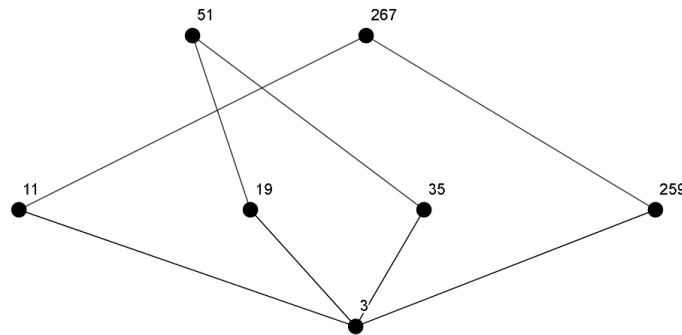


Рис. 3. Сигнатурний граф суміжних класів K_7^1 , K_7^2 , K_7^3 , K_7^4 .

Двадцять два суміжні класи $K_4^{t_1}$, $t_1 = 1, 2, \dots, 22$ до класу яких входить чотири алгебри, тридцять класів $K_2^{t_2}$, $t_2 = 1, 2, \dots, 30$ містять по дві алгебри і сто сімдесят шість класів $K_1^{t_3}$, $t_3 = 1, 2, \dots, 176$ – по одній алгебрі. Сигнатурні решітки цих класів зображені на рис. 4.

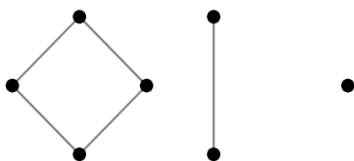


Рис. 4. Сигнатурний граф суміжних класів $K_4^{t_1}$, $K_2^{t_2}$, $K_1^{t_3}$.

Побудуємо базисну решітку фактор-класу M_2/σ . Вершини решітки будуть кодуватися бінарними кодами базисів або сигнатурним кодом канонічних алгебр, які входять до відповідного класу. Ребра будуть кодуватися або номерами базисів або кодами операцій, які з'єднують канонічні алгебри. У кожному суміжному класі є одна канонічна алгебра, а решта алгебр – вільні. Тому фактор-решітку можна побудувати, використовуючи множину канонічних алгебр.

На рис. 5 побудована фактор-решітка, на який зображені алгебри, що мають однакову базисність, а саме:

- 1) 0-базисні алгебри (88 алгебр) утворюють нульову вершину фактор-решітки.
- 2) Алгебри першого ярусу — це однобазисні алгебри, які розподілені по дев'ять елементів фактор-класу: до складу двох входить по десять алгебр, двох по вісім, двох по сім, трьох по чотири. Ці класи можемо задати при побудові фактор-решітки відповідними канонічними алгебрами цього класу з номерами 3, 6, 12, 66, 68, 80, 96, 130, 260.
- 3) Алгебри третього ярусу — це сорок трьохбазисних канонічних алгебр.

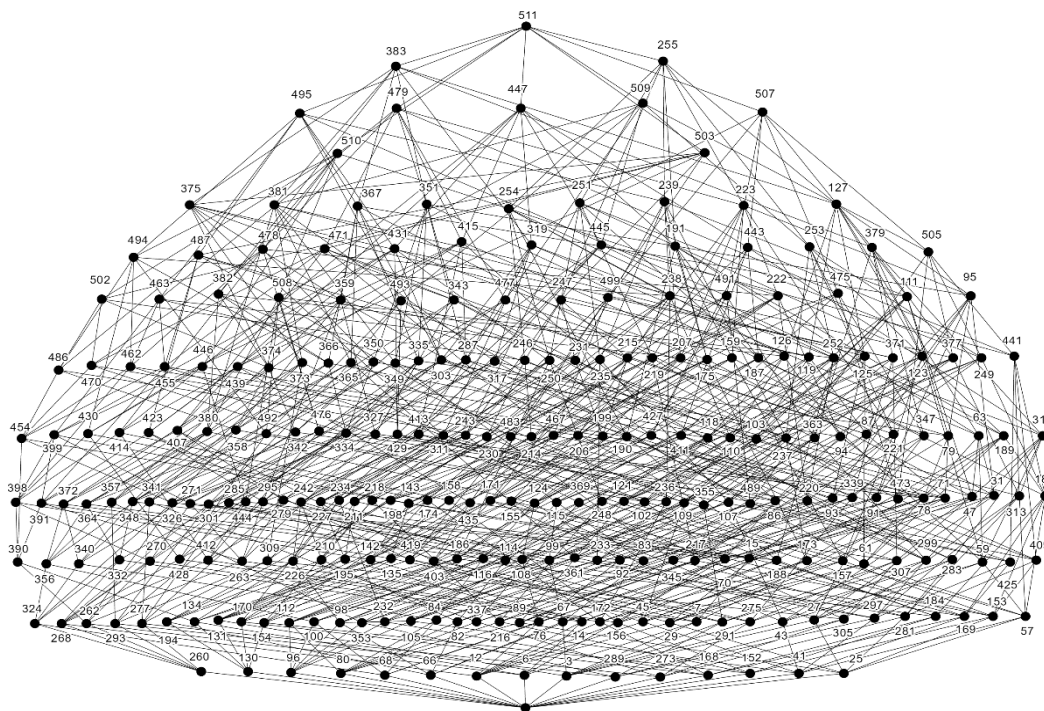


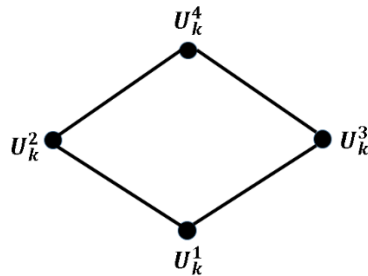
Рис. 5. Базисна решітка фактор-класу M_2/σ .

Оскільки між канонічними алгебрами і базисними векторами існує взаємнооднозначна відповідність, то базисна решітка ізоморфна сигнатурній решітці канонічних алгебр, яка описана в [1]. Для побудови базисної решітки класу алгебр M_2^1 , скористаємось твердженням 6 [1], яке стверджує, що кількість елементів в решітці $R(M_2^1/\sigma)$ по ярусах задає наступна таблиця:

Таблиця 1

Ярус	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість суміжних класів	1	15	39	39	49	39	35	16	13	9	2	5	2	-	-	1

З цієї таблиці випливає, що $|M_2^1/\sigma|$ рівна 265 алгебр. Базисні решітки $R(M_2^2/\sigma)$, $R(M_2^3/\sigma)$, $R(M_2^4/\sigma)$ ізоморфні решітці M_2^1/σ [3]. Якщо об'єднати ці решітки в одну базисну решітку $R(M_2/\sigma)$, то відповідні алгебри U_k^i решіток M_2^i/σ , $i = 1, 2, 3, 4$, утворюють підрешітки такого типу:

Рис. 6. Базисний граф ізоморфних алгебр класів M_2^i/σ .

Звідси випливає теорема.

Теорема 1. *Потужність класу M_2/σ рівна 1060 алгебр.*

Дійсно $|M_2/\sigma| = |M_2^1/\sigma| + |M_2^2/\sigma| + |M_2^3/\sigma| + |M_2^4/\sigma| = 4 \cdot 265 = 1060$.

3. Висновки. З 17 базисів можна скласти 2^{17} різних комбінацій і тільки 1060 таким комбінаціям можна знайти алгебру яка має тільки ті базиси що вказані у вибраній комбінації.

Список використаної літератури

1. Мич І.А., Ніколенко В.В., Варцаба О.В. Дослідження сигнатурного кубу універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2(37), С. 157-167. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).157-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167).
2. Мич І.А., Ніколенко В.В., Варцаба О.В. Структура сигнатурного кубу булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38, №1. С. 149-156. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).149-156](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156).
3. Уилсон Р.Дж. Введение в теорию графов. Спб: ООО «Диалектика», 2019. 240 с.

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V. Basic equivalence in class universal boolean algebras.

In this paper, the concept of basic equivalence has been introduced and the factor-grating $R(M_2^1/\sigma)$ of the class of algebras M_2 is obtained. The ordering of the vertexes of factor-grating of basic equivalence of the class M_2 is installed. The signature graph of the adjacent classes of algebra M_2 is given. 265-elements bases grating factor class M_2^1/σ is investigated. Theorem about the power of class M_2/σ has been proven.

Keywords: Basic Equivalence, basic grating, the signature graph of the adjacent classes.

References

1. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Investigation of signature cube of universal boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2(37), 157-167. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).157-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167) [in Ukrainian].
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2021). Structure of signature cube of Boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 38(1), 149-156. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).149-156](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156) [in Ukrainian].
3. Uilson, R. J. (2019). *Vvedenie v teoriyu grafov [Introduction to graph theory]*. Spb: OOO «Dialektika» [in Russian].

Одержано 31.10.2021

**В. В. Поліщук¹, М. Келемен², Ю. Ю. Млавець³, О. А. Тимошенко⁴,
М. Келемен Мол.⁵**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри програмного забезпечення систем,
кандидат технічних наук
volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² Кошицький технічний університет,
професор кафедри підготовки пілотів,
Dr.h.c. prof. Ing., DrSc. MBA, LL.M., Brigadier General (ret.)
miroslav.kelemen@tuke.sk
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7459-927X>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

⁴ ДНТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
otymoshenkopki@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>

⁵ Кошицький технічний університет,
аспірант кафедри підготовки пілотів
martin.kelemen@tuke.sk
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>

КОНЦЕПТУАЛЬНА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ КЕРОВАНOSTI ПРОЦЕСАМИ У СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ ВРАХОВУЮЧИ РИЗИК-ОРІЄНТОВАНІ ФАКТОРИ

Проведено дослідження актуальної задачі розроблення концептуальної моделі оцінювання рівня керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори.

У дослідженні вперше запропоновано етапи управління ризиками у процесі оцінювання рівня керованості складних систем. Формалізовано вхідні дані, що використовуються для оцінювання ризиків за допомогою нечітких моделей для різних складних систем, а саме: показники ризику, що оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної; кількісної оцінки «достовірностей» експертів щодо міркувань про показник ризику; кількісної оцінки критерію ризику на основі інтелектуального аналізу даних величин, що породжують ризик, із застосуванням теорії нечітких множин та функцій належності; лінгвістичної змінної наслідків реалізації загроз на систему; ступінь можливості реалізації загрози в системі; тяжкість наслідків інциденту по активу системи, що оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної.

Вперше запропоновано концептуальну модель, що розв'язує клас задач оцінювання керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу та алгоритм вибору моделі ризик-орієнтованого оцінювання. В результаті отримуємо вихідну оцінку, що несе зміст керованості процесів у системі враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу. Як інструмент прикладного застосування пропонуються узагальнені алгоритми, за допомогою яких можна адекватно вирішити інноваційну проблему.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним використанням теорії нечітких множин для опрацювання експертних знань, системного підходу, що підтверджується результатами досліджень. Проведене дослідження буде корисним інструментом для підтримки прийняття рішень, щодо підвищення керованості процесами у різних складних системах шляхом врахування ризиків та загроз її функціонування.

Ключові слова: керованості процесами, фактори ризику, нечітка множина, рівень ризику, прийняття рішень, інтелектуальний аналіз.

1. Вступ. Рівень безпеки діяльності людства кожного дня покращується за рахунок удосконалення технологій, аналізу даних, систем управління, та інші. Стандарти навчання персоналу та управління безпекою теж стали помітно вищі. Але тим не менше, стикаємося з множиною ризиків, які потенційно можуть поставити під загрозу успіх операційної діяльності, якщо ними адекватно не керувати. Однією з ключових складових вимірювання ризику функціонування складних систем є генерування сценаріїв розвитку основних факторів ризику.

Кожна складна система функціонування має різний базовий рівень, стосовно унікальності своїх даних. Це певна кількість та якість даних, які можна обробляти. Великі дані в складних системах можуть створюватися з великого набору датчиків, баз даних, інформаційних систем, соціальних мереж і т. д.

Тому діяльність складної системи вимагає прийняття певних рішень, а це в свою чергу пов'язане з оцінюванням майбутнього. Таке оцінювання реалізується шляхом максимального врахування невизначеностей та ризиків. Ефективне управління ризиками забезпечить підвищення якості рішень. Ризики є необхідною складовою людської діяльності, коли існує невпевненість у результатах того чи іншого процесу рішення. При прийнятті управлінських рішень, особливо актуальною є проблема розкриття невизначеності даних, на основі яких приймаються рішення, та адекватного оцінювання для мінімізації ризиків.

Метою дослідження є актуальна задача розробки концептуальної моделі оцінювання рівня керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори. Модель оцінювання представлено сукупністю нечітких методів, що базуються на врахуванні ризик-орієнтованих факторів впливу із застосуванням: досвіду експертів щодо їх оцінювання, лінгвістичного рівня критеріїв оцінювання ризиків, наслідків реалізації різних загроз на систему. Модель оцінювання дозволить оцінити керованість процесами для складної системи враховуючи різні ризики, що впливають на функціонування системи.

Даний підхід можна застосувати для розв'язання низки прикладних задач у різних складних системах, наприклад: для соціо-економічних систем це моделювання фінансових ризиків [1-2]; для соціально технічних це оцінювання ризиків та інцидентів безпеки мережевих та інформаційних систем аеропорту [3]; для гуманістичних систем це оцінювання ризику виконання індивідуальних стрибків парашутистів для підвищення їх безпеки [4]; для технічних систем це оцінювання ризиків польотів безпілотників для дослідження довкілля у гірській місцевості [5], та багато інших.

2. Огляд літератури. У стислому Оксфордському словнику англійської мови ризик визначається як «небезпека, ймовірність поганих наслідків, втрата або схильність до випадковості». Макнейл, Фрей та Ембрехтс [6] ризик визначають, як будь-яку подію або дію, що може негативно вплинути на здатність

організації досягати своїх цілей та виконувати її стратегії. Незважаючи на те, що всі ці визначення охоплюють деякі ключові елементи ризику, неможливо охопити всі його аспекти одним визначенням з одного речення. Однак очевидно, що ризик сильно пов'язаний з невизначеністю щодо майбутніх подій. В загальному випадку, під поняттям ризику можна розглядати ситуацію небезпеки можливості настання несприятливої події або загроз можливих втрат, щодо яких невідомо чи відбудуться вони у майбутньому.

Згідно з [7, 8] виділяють три основні підходи оцінювання ризиків при розв'язанні практичних задач.

1. Інтуїція, досвід та знання експертів, що роблять судження щодо природи особливостей процесів функціонування складної системи. Для нових інноваційних об'єктів дослідження – це єдиний доступний спосіб для аналізу процесів, які не існували або мали іншу структуру в минулому, і статистична історія за якими відсутня або не має сенсу.

2. Спостереження за фактичними ситуаціями та збитками від ризиків на тривалому попередньому періоді часу. У багатьох практичних задачах такі дані відсутні. Крім того, у критичних технічних, соціальних, економічних і екологічних системах, в яких значний вплив має дуже мінливе середовище процесу, такі дані містять опис динаміки процесу при минулих станах середовища, а це часто не відповідає сучасності.

3. Використання даних спостережень за групами окремих ризиків з подібними характеристиками, що можуть бути зроблені протягом невеликого періоду часу. Такий підхід є найбільш придатним і перспективним у складних задачах керування ризиками в умовах всіх типів невизначеностей [9]. Окремі ризикорієнтовані фактори впливу утворюють класи ризиків, які загалом складають певну класифікацію ризиків для задач заданого типу.

До сьогодні не сформовано загальних принципів та ознак класифікації ризиків, практично не існує розробок з узагальнення та формалізації класифікації ризиків, що можуть бути застосовані у міждисциплінарних дослідженнях.

У роботі [10] Згуровський розглядає задачу формалізованої класифікації ризиків, як інформаційно взаємозв'язані задачі класифікації ситуацій ризиків і задачі розпізнавання ситуацій ризиків, на основі множини факторів їх виникнення. При цьому зазначається, що принциповий вплив на якість класифікації, яка виражається у точності і достовірності класифікації ризиків, спричиняє вибір множини факторів ризиків та множини ознак кожного фактору ризику.

У роботі [11] Панягіна виділяє два основні підходи предметної та управлінської класифікації. Предметна класифікація здійснюється за змістом і змістом кожного виду і типу ризику, вона дає можливість проводити ідентифікацію ризиків та характеризувати можливі наслідки від ризиків (операційні, інноваційні, неповернення інвестицій, і т. д.). Управлінська класифікація передбачає виділення класів ризиків за джерелами та етапами виникнення ризиків та за способами керування ризиками (технологічний, екологічний, помилки персоналу, і т. д.).

Підхід групування ризиків за ресурсами, які перебувають під ризиком втрат, дозволяє при прогнозуванні чи виникненні певної ситуації ризику класифікувати ризик та оперативно попередньо визначити групу адекватних заходів і моделей керування конкретним класом ризиків [12].

Х. Фелікс Кломан [13] під управлінням ризиками визначає наступне. Для багатьох аналітиків, політиків та науковців саме управління екологічними та ядерними ризиками – це ті технології, що генерують макроризики, що загрожують нашому існуванню. Для банкірів та фінансових службовців – це розумне використання таких методів, як хеджування валют та своп процентних ставок. Для страхових агентів – це координація страхових ризиків та зменшення страхових витрат. Для адміністраторів лікарні – це може означати «забезпечення якості». Для фахівців з безпеки – це зменшення кількості нещасних випадків та травм.

Таким чином, Кломана вважає, що управління ризиками – це спектр методів, що використовується для ефективнішого управління своїм життям та організаціями в умовах «безпрецедентної невизначеності». Або – це дисципліна для забезпечення стійкості до майбутніх подій, що можуть спричинити несприятливі наслідки.

Аналізуючи джерела, отримаємо, що наступні дослідники описали процес управління ризиками. Наприклад, Ферлі [14] представив сім кроків: виявити фактори ризику; оцінити ймовірність та наслідки ризику; розробляти стратегії зменшення виявлених ризиків; контролювати фактори ризику; застосовувати план дій на випадок непередбачених ситуацій; управляти кризою; вийти з кризи. Бем [15] описав процес із двома основними етапами: оцінка ризику включає ідентифікацію, аналіз, визначення пріоритетів та контроль ризиків, що включає планування управління ризиками, вирішення ризиків та планування, відстеження та коригувальні дії. Подібно циклу поліпшення якості Демінга (планувати, робити, перевіряти, діяти), Клієм та Людін [16] запропонували чотири фазний процес (ідентифікація, аналіз, контроль та звітування). За даними Міжнародної організації зі стандартизації 31000, управління ризиками створює та захищає цінність [17]. У літературі повідомляється про декілька популярних методів аналізу управління ризиками, включаючи моделювання Монте-Карло [18], процес аналітичної ієрархії [19] та теорію нечітких множин [20].

На виявлення факторів ризику впливає галузь діяльності об'єкту дослідження. Наприклад, ключові фактори ризику проектів державно-приватного партнерства поділяються на дві категорії. Перший включає фактори ризику, які мають потужні, незалежні впливи такі, як затримка з затвердженням уряду, державний кредит та недосконалість правової та регуляторної систем. До другої категорії належать фактори ризику, які мають велику мінливість і на які легко вплинути, такі як ризики завершення роботи, недостатній дохід на ринку та зміни плати [21].

Амеяу та Чан [22] згадали про інші фактори ризику, такі як ринкові / дохідні ризики, фінансові ризики, ризики відносин та соціальні ризики. Згідно з Лесардом [23], управління ризиками вимагає систематичного управління ризиками, що генеруються в межах кожної ланки ланцюга та, що більш важливо, в інтерфейсах між ланками, щоб обмежити зриви та їх поширення по всій системі.

Це все доводить, що ефективне управління ризиком вимагає підхід системного мислення – розуміння того, як системи впливають одна на одну в цілому.

На думку Неемана [24], процес управління ризиками став невід'ємною частиною процедур управління оборонними проектами, для яких управління невизначеністю є однією з головних проблем поточного планування та управління

проектами. Більше того, у відповідь на небезпечні події, такі як авіакатастрофи чи зльоти, вимоги безпеки в оборонній промисловості суворі та вимогливі.

Класифікація ризиків при розв'язанні задач оцінювання керованості процесами у складних системах має важливе, а часто, вирішальне значення на формалізацію і постановку задачі, що розв'язується, і, відповідно, на якість результату. Вибір неефективної або недостатньо коректної класифікації ризиків для певної задачі може призвести до звуження і неповноти опису ризиків в задачі, і, як наслідок, може спричинити одержання некоректних розв'язків задачі, або навіть унеможливити одержання адекватних розв'язків [25].

Наприклад, інші підходи оцінювання рівня керованості процесами у загальних динамічних системах розглянуто у роботах [26-27]. Дані моделі описуються за допомогою динамічних збурених систем на основі вінерівського процесу з розв'язанням задач оцінки якості мультиплікативної та адитивної апроксимації розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь. Це дозволяє досліджувати асимптотичну поведінку більш загальних динамічних систем. Також, вейвлет аналіз можна застосовувати для оцінювання керованості процесами. Актуальність такого застосування наведена у роботі [28], що присвячена знаходженню умов рівномірної збіжності вейвлет розкладів класу випадкових процесів із просторів $F_{\Psi}(\Omega)$.

Наведене вище, аргументує та підтверджує актуальність дослідження: розробки концептуальної моделі впливу ризик-орієнтованих факторів на рівень керованості процесів функціонування системи. Актуальність даного дослідження доводиться необхідністю розуміння керованістю процесами у різних складних системах дослідження, враховуючи ризики її функціонування, для досягнення цілей системою та формалізацією таких процесів.

3. Матеріали та методи. Нехай відомо деякий об'єкт дослідження, що буде розглядати, як складну слабо структуровану систему S . Відома множина системних цілей та множина факторів, що впливають на керованість процесами складної системи. Також відомі показники ризик-орієнтованих факторів впливу на систему в межах досягнення цілей системою. На основі відомих показників будуються нечіткі моделі оцінювання системи. В межах цього, потрібно оцінити керованість процесами у об'єкті дослідження для якісного прийняття рішень в залежності від ризик-орієнтованих факторів впливу на систему.

Таким чином, пропонуються етапи управління ризиками у процесі оцінювання рівня керованості складних систем.

1. Формування переліку факторів ризику:

- виділення цілей та задач щодо виявлення ризик-орієнтованих факторів впливу;
- виявлення самих ризик-орієнтованих факторів впливу;
- аналіз ризик-орієнтованих факторів впливу.

Перший етап полягає в усвідомленні специфічності загрози і місця її можливого прояву.

Під ідентифікацією та аналізом ризиків розуміється вивчення його специфіки та особливостей, які обумовлені їх природою та іншими рисами, характерними саме цієї нагоди. Важливо вивчити майбутні втрати, а також зміну ризиків у часі, ступінь загрози щодо конкретного періоду.

2. Побудова моделей для оцінювання ризиків щодо керованості процесами в

складних системах.

Головна мета цього етапу полягає в дослідженні та розроблені моделей, методів, засобів та інструментів, які будуть оцінювати фактори ризиків у діяльності складної системи, а також у дослідженні їх негативного впливу на керованість процесами складної системи.

3. Аналіз, вибір та прийняття рішення зі зменшення загроз ризик-орієнтованих факторів впливу:

- вибір стратегії та тактики управління ризиком;
- вибір програми дій (сценарій) зі зниження ризиків;
- прийняття рішень та організація виконання розробленої програми.

На цьому етапі особа, що приймає рішення (ОПР) формує і підбирає індивідуальний підхід до ризику функціонування складної системи. Потреба цієї процедури вибору пов'язана з різною результативністю способів управління ризиком і різним розміром ресурсів, які потрібні для їх реалізації. Вибираючи ризик і метод його управління, завжди потрібно враховувати ресурсні обмеження і намагатися оптимізувати їх втрати. Для оцінки всіх ресурсів можна узагальнити в одну шкалу – фінансову.

Отже, в залежності від розглядуваної складної системи необхідно: адекватно підібрати фактори ризиків, щодо ресурсу системи, що може зазнати втрат при виникненні ризику; визначити шкали оцінювання ризиків; побудувати методи оцінювання; здійснити аналіз, вибір та прийняття рішення щодо проактивного управління зниження ризику для підвищення керованості процесами у досліджуваній системі.

На основі дослідження системи необхідно визначити набори вхідних даних $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$, згідно яких буде оцінюватись рівень керованості процесами у складній системі S . Показники можуть представляти собою цілу систему критеріїв ризику, факторів та моделей, на основі яких виводиться одна агрегована оцінка. Наприклад на рівень керованості літака впливають показники, що залежать від ризик-орієнтованих ситуацій або на рівень безпечного фінансування інноваційних проектів впливають фактори управління та передбачення ризиками.

Для оцінювання рівня керованості процесів функціонування системи згідно ризик-орієнтованих факторів впливу на систему, пропонується клас задач Z – нечітке оцінювання системи враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу. Розв'язанням задачі Z отримується розуміння керованості процесами в складних системах враховуючи та розкриваючи різні ризики.

Системна теоретико-множинна модель задачі оцінювання керованості процесами у складних системах, враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу може бути представлена наступним чином:

$$Z = \{S, K_R, M_R|Y\}, \tag{1}$$

де S – складна слабо структурована система; K_R – інформаційні моделі критеріїв (груп критеріїв) оцінювання ризик-орієнтованих факторів впливу на систему, чи моделі оцінювання загроз на систему, що потенційно призведуть до послаблення керованості процесами в ній; M_R – вид моделі оцінювання процесів керованості у складних системах враховуючи загрози системи, показники різних ризиків та досвіду експертів.

В результаті отримуємо вихідну оцінку Y , що несе зміст керованості процесів у системі враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу. Дану оцінку будемо називати агрегованою ризик-орієнтованою оцінкою рівня керованості процесами в системі.

На Рис. 1. пропонується алгоритм вибору моделі ризик-орієнтованого оцінювання рівня керованості процесами в складній системі, на основі наявних вхідних даних, врахування загроз системи, показників різних ризиків та досвіду експертів. На виході кожної моделі буде агрегована ризик-орієнтована оцінка рівня керованості процесами у системі, що виходить із оцінки ризику функціонування системи.

Оскільки дане дослідження спрямоване на різні складні системи, тому на основі проведеного теоретичного дослідження можемо формалізувати вхідні дані, що використовуються для оцінювання ризиків за допомогою нечітких моделей.

1. Ризик-орієнтовані фактори впливу – це показники ризику, що оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної. Для цього, на основі досвіду, вмінь та знань про вплив ризиків на систему S група експертів (чи експерт) роблять висновки та ставлять лінгвістичну оцінку кожному показнику K , з деякої терм-множини $T = \{T_1; T_2; \dots; T_l\}$. Терм-множину лінгвістичних змінних представимо, як рівень ймовірності настання ризикової події описану показником K для досягнення цільових потреб системи. Також до кожної оцінки експерт ставить або число «достовірності» $\mu(T)$ своїх міркувань з інтервалу $[0; 1]$, або нормовану кількісну оцінку ризику. Для отримання кількісної оцінки ризику, окремо для кожного критерію, пропонується інтелектуальний аналіз даних величин, що породжують ризик, оснований на теорії нечітких множин та функцій належності [6]. Функція належності будується та досліджується в залежності від типу даних, їх структури, періодичності отримання, суб'єктивізму отримання та інших характеристик. Це дозволить порівнювати отримані оцінки, шляхом переведення у нормовану шкалу, розкрити нечіткість та невизначеність отриманих даних, що підвищить якість прийняття рішень, зроблених з використанням інтелектуального аналізу таких даних.

2. Ризик-орієнтовані фактори впливу – це множина загроз K деяких активів системи, що при можливості виникнення такого явища або події, наслідком якого можуть бути небажані впливи на систему, що призведуть до послаблення керованості процесами в ній. Вхідні дані у даному понятті визначимо наступні:

- T – наслідки реалізації загроз K . Даний показник визначається за допомогою лінгвістичної змінної з деякої терм множини, наприклад: $T = \{M; A; H; C\}$, де M – мінімальні наслідки загрози, A – середні наслідки загрози, H – максимальні наслідки загрози, C – критичні наслідки загрози;
- μ – ступінь можливості реалізації загрози в системі. Ступінь вимірюється кількісно з інтервалу $[0; 1]$, наприклад покладаючи різний зміст: неможливо реалізувати загрозу; мінімальна можливість реалізації загрози; середня можливість реалізації загрози; висока можливість реалізації загрози; критична можливість реалізації загрози;

L – тяжкість наслідків інциденту по активу. Інцидентом називається реалізована загроза.

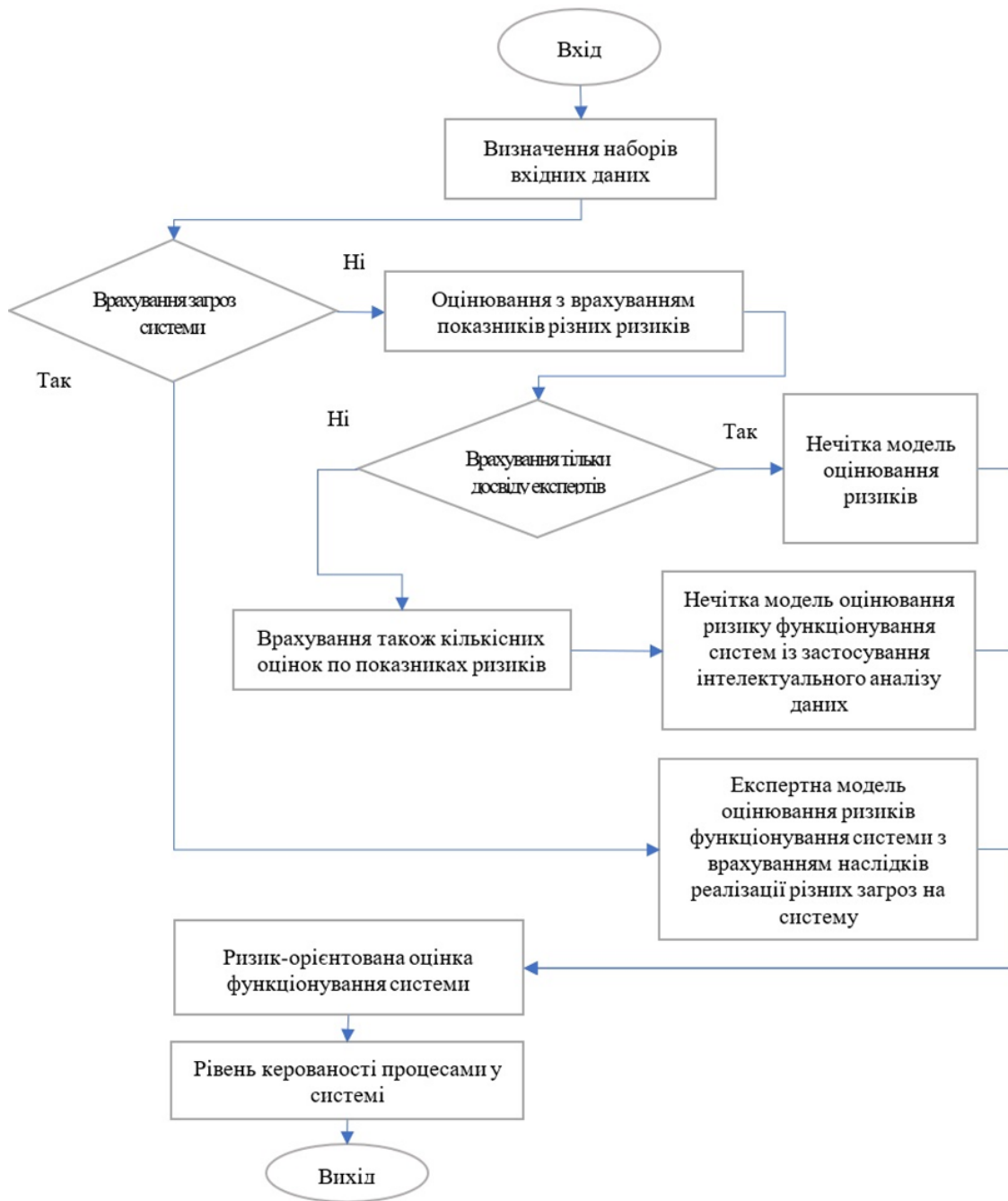


Рис. 1. Алгоритм вибору моделей оцінювання ризику функціонування систем

Даний показник оцінюється експертно за допомогою лінгвістичної змінної з деякої терм множини L , де змінні можуть бути, наприклад: життєво-важливий наслідок (якщо призведе до неможливості досягнення глобальних цілей системою), вирішальний наслідок (якщо призведе до неможливості досягнення локальних цілей системи, та в деякій мірі впливає на якість досягнення глобальних цілей), корисний або не застосовується (інші випадки).

Концептуальна модель отримання агрегованої ризик-орієнтованої оцінки рівня керованості процесами у складних системах може бути представлена за допо-

могою побудованих нечітких моделей та на їх основі узагальнених алгоритмів, а саме: дворівнева нечітка математична модель встановлення ризику функціонування системи та рівень керованості процесами в ній; нечітка модель оцінювання ризику функціонування систем із застосування інтелектуального аналізу даних; експертна модель оцінювання ризиків функціонування системи з врахуванням наслідків реалізації різних загроз на систему та оцінювання фінансових збитків.

Дворівнева математична модель, за допомогою якої можна врахувати процеси керованості у складних системах та оцінити рівень ризику функціонування систем, в повній мірі описана в роботах [1-2]. Дана модель використовує міркування експерта щодо оцінок за різними критеріями оцінювання, достовірності його міркувань та на основі цього відбувається агрегування думок за групами критеріїв у остаточну оцінку. Модель розкриває нечіткість вхідних оцінок, підвищує об'єктивність експертних суджень. База знань моделі не залежить від кількості критеріїв по групах, тому їх можна збільшувати при потребі, а також змінювати рівні прийняття рішень.

Наступна нечітка модель оцінювання ризику функціонування систем із застосування інтелектуального аналізу даних, розроблена, доведена та апробована для задачі оцінювання ризиків безпеки мережевих систем, оцінювання ризиків фінансування проектів, оцінювання ризику системи муніципалітету та інші [4].

Експертна модель оцінювання ризиків функціонування системи з врахуванням наслідків реалізації різних загроз на систему та оцінювання фінансових збитків апробована для прикладної задачі оцінювання безпеки мережевих інформаційних систем аеропорту для безпечного та стійкого повітряного транспорту [3]. Модель спроможна оцінити ризики функціонування складної системи, використовує інтелектуальний аналіз знань експертів, розкриває нечіткість вхідних оцінок, підвищує ступінь обґрунтованості прийняття подальших управлінських рішень на основі отриманих результатів.

4. Обговорення. Для застосування технології визначення рівня керованості процесами у системі, до розв'язання класу прикладних задач нечіткого оцінювання системи враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу, необхідно адекватно визначити множину ризиків оцінювання, вибрати та налаштувати запропоновані нечіткі моделі, налаштувати фазифікацію вхідних даних. Ці всі задачі покладені на системних аналітиків, що розробляють інформаційну систему у межах прикладної задачі. Таким чином, для якісного порівняння даних та розмежування термів, необхідно окремо проводити для кожного показника, оскільки різні показники несуть у собі свій числовий зміст. Для якісного отримання вхідних кількісних оцінок та інтелектуального аналізу даних (знань) з використанням теорії нечітких множин, функцій належності та системного підходу можна використати моделі описані в [1-4].

В рамках дослідження пропонується клас задач нечіткого оцінювання системи враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу, розв'язанням яких отримується розуміння керованості процесами в складних системах враховуючи та розкриваючи різні ризики. Концептуальна модель, що складається із сукупністю методів та базується на врахуванні ризик-орієнтованих факторів впливу має ряд переваг, а саме: підвищує об'єктивність експертних оцінок використо-

вуючи вхідні гібридні дані: лінгвістичні змінні та кількісні оцінки; виводить агреговану ризик-орієнтовану оцінку функціонування системи з огляду на міркування ОПР; виводить рівень керованості процесами у складних системах.

Як інструмент прикладного застосування пропонується узагальнені алгоритми, вибір яких залежить від наявних вхідних даних, врахування загроз системи, показників різних ризиків та досвіду експертів. Узагальнені алгоритми – це інструмент, за допомогою якого можна адекватно вирішити інноваційну проблему.

До недоліків даного підходу можна віднести використання різних моделей згорток для отримання агрегованої оцінки, що може приводити до неоднозначності кінцевих результатів.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У проведеному дослідженні запропоновано концептуальну модель оцінювання рівня керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори. При цьому вперше отримано такі результати:

- запропоновано етапи управління ризиками у процесі оцінювання рівня керованості складних систем на основі проведеного теоретичного дослідження;
- формалізовано вхідні дані, що використовуються для оцінювання ризиків за допомогою нечітких моделей для різних складних систем, а саме: показники ризику, що оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної; кількісної оцінки «достовірностей» експертів щодо міркувань про показник ризику; кількісної оцінки критерію ризику на основі інтелектуального аналізу даних величин, що породжують ризик, із застосуванням теорії нечітких множин та функцій належності; лінгвістичної змінної наслідків реалізації загроз на систему; ступінь можливості реалізації загрози в системі; тяжкість наслідків інциденту по активу системи, що оцінюється деяким експертом за допомогою лінгвістичної змінної;
- запропоновано концептуальну модель, що розв'язує клас задач оцінювання керованості процесами у складних системах враховуючи ризик-орієнтовані фактори впливу та алгоритм вибору моделі ризик-орієнтованого оцінювання.

Раціональність отриманих агрегованих ризик-орієнтованих оцінок функціонування системи для визначення рівня керованості процесами у системі, доводить значними апробаціями моделей для різних прикладних задач. Достовірність отриманих результатів забезпечується коректним використанням теорії нечітких множин для опрацювання експертних знань, системного підходу, що підтверджується результатами досліджень.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо: у конструюванні узагальнених покрокових алгоритмів на основі розроблених моделей. Проведене дослідження буде корисним інструментом для підтримки прийняття рішень, щодо підвищення керованості процесами у різних складних системах шляхом врахування ризиків та загроз її функціонування.

6. Подяка. Робота виконувалась у межах стипендіальної програми співробітництва між Міністерством освіти і науки України та Міністерством освіти Словацької Республіки в галузі освіти на базі Кошицького технічного університету, Авіаційного факультету.

Ця робота була підтримана Словацьким агентством досліджень і розробок

згідно з контрактом № PP-COVID-20-0002.

The work was performed within the framework of the scholarship program of cooperation between the Ministry of Education and Science of Ukraine and the Ministry of Education of the Slovak Republic in the field of education based on the Technical University of Košice, Faculty of Aeronautics.

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency under the Contract no. PP-COVID-20-0002.

Список використаної літератури

1. Мальяр М. М., Поліщук В. В., Шаркаді М. М. Модель інформаційної технології оцінювання ризику фінансування проєктів. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2017. № 2017/2. С. 44-52. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2017-2-5>.
2. Polishchuk V., Voloshyn O., Malyar M., Sharkadi M. Fuzzy mathematical modeling financial risks. *IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), 21-25 August 2018*. Lviv, 2018. P. 65-69. DOI: <https://doi.org/10.1109/DSMP.2018.8478604>.
3. Kelemen M., Polishchuk V., Gavurová B., Andoga R., Szabo S., Yang W., Christodoulakis J., Gera M., Kozuba J., Kaľavský P., Antoško M. Educational Model for Evaluation of Airport NIS Security for Safe and Sustainable Air Transport. *Sustainability*. 2020. 12, 6352. DOI: <https://doi.org/10.3390/su12166352>.
4. Polishchuk V., Malyar M., Sharkadi M., Polishchuk A. Model of Operation Management Systems Risk Assessment. *IEEE Proceedings of 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT), 23-26 September 2020*. Zbarazh, 2020. P. 190-193. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSIT49958.2020.9321930>.
5. Polishchuk V., Polishchuk A., Jevčák J., Choma L., Kelemen M. jr. Criteria for the Information model for assessing the risks of UAV flights in environmental research on mountain terrain. *Proceedings of XXth International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM, 16-25 August 2020 Varna, Bulgaria*, 2020. 2.1, P. 97-102. DOI: <https://doi.org/10.5593/sgem2020/2.1/s07.013>.
6. McNeil A. J., Frey R., Embrechts P. Quantitative risk management. *Concepts, techniques and tools, 2nd ed. Princeton university press*. 2015.
7. Коршевнюк Л. О. Концепція аналітичної класифікації ризиків в задачах системного аналізу складних систем. *Інформаційні системи, механіка та керування*. 2015. 13, С. 19-28. DOI: <https://doi.org/10.20535/2219-380413201568104>.
8. Dicke A. On Risk Classification. A public policy Monograph. American Academy of Actuaries, New York, NY, 2011.
9. Снитюк В. Е. Эволюционные технологии принятия решений в условиях неопределенности. К: «МП Леся», 2015. 347 с.
10. Згуровский М. З., Панкратова Н. Д. Основы системного анализа. К.: Видавнича група ВНУ, 2007. 544 с.
11. Панягина А. Е. Подходы к пониманию и классификации рисков. *Современная экономика: проблемы, тенденции, перспективы*. 2012. 6. С. 1-6.
12. Porrini D. Risk Classification Efficiency and the Insurance Market Regulation. *Risks*. 2015. 4. DOI: <https://doi.org/10.3390/risks3040445>.
13. Kloman H. F. Risk management agonists. *Risk Analysis*, 1990. 10. P. 201-205.
14. Fairley R. Risk Management for software projects. *IEEE Softw.* 1994. 11. P. 61-67.
15. Boehm B. W. Software risk management: Principles and practices. *IEEE Softw.* 1991. 8. P. 32-41.
16. Kliem R. L., Ludin I. S. Reducing Project Risk. UK Gower: Farnham, 1997.
17. Risk Management-Principles and Guidelines ISO 31000:2018. 2018. URL: <https://www.iso.org/standard/65694.html>.
18. Ye S., Tiong R. L. K. NPV-at-risk method in infrastructure project investment evaluation. *J. Constr. Eng. Manag.* 2000. 126. P. 227-233.
19. Hastak M., Shaked A. ICRAM-1: Model for international construction risk assessment. *J. Manag. Eng.* 2000. 16. P. 59-69.
20. Wu Y., Song Z., Li L., Xu R. Risk management of public-private partnership charging

- infrastructure projects in China based on a three-dimension framework. *Energy*. 2018. 165.
21. Wang Y., Wan Y., Wu Y., Li J. Exploring the risk factors of infrastructure PPP projects for sustainable delivery: A social network perspective. *Sustainability*. 2020, 10. 4152. DOI: <https://doi.org/10.3390/su12104152>.
 22. Ameyaw E. E., Chan A. P. C. Evaluation and ranking of risk factors in public-private partnership water supply projects in developing countries using fuzzy synthetic evaluation approach. *Expert Syst. Appl.* 2015. 42. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.02.041>.
 23. Lessard D. R. Uncertainty and Risk in Global Supply Chains. Research Paper No. 4991-13. MIT Sloan School. Cambridge. MA. USA. 2013. DOI: <https://doi.org/10.2139/ssrn.2240274>.
 24. Naaman A. Establishment of the Armed Force-Research Development in Air Force, Between the Poles. Part 3. IDF. Jerusalem. Israel. 2016.
 25. Risk Classification. Statement of Principles. 2014. URL: <http://www.actuarialstandardsboard.org/wpcontent/uploads/2014/07/riskclassificationSOP.pdf>.
 26. Klesov O. I., Tymoshenko O. A. Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges. Switzerland: Springer*. 2019. P. 97–114. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_6.
 27. Булдігін В. В., Клесов О. І., Тимошенко О. А. Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь: монографія. Вінниця: ФОП Кушнір Ю.В., 2018. 164 с.
 28. Млавець Ю. Ю., Синявська О. О. Умови рівномірної збіжності вейвлет розкладів випадкових процесів із просторів $F\Psi(\Omega)$. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2(37). С. 54-62. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).82-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).82-90).

Polishchuk V. V., Kelemen M., Mlavets Yu. Yu., Tymoshenko O. A., Kelemen M. Jr. Conceptual model for assessing the level of process control in complex systems considering risk-oriented factors.

The research of the actual task of developing a conceptual model for assessing the level of process control in complex systems, considering risk-oriented factors.

The study for the first-time proposed stages of risk management in the process of assessing the level of controllability of complex systems. The input data used for risk assessment using fuzzy models for various complex systems are formalized, namely: risk indicators assessed by some expert using a linguistic variable; quantitative assessment of the "reliability" of experts in relation to considerations of the risk indicator; quantitative assessment of the risk criterion on the basis of intellectual analysis of the data generating the risk, using the theory of fuzzy sets and membership functions; linguistic variable consequences of the implementation of threats to the system; the degree of possibility of realization of the threat in the system; the severity of the consequences of the incident on the asset of the system, which is estimated by some expert using a linguistic variable.

For the first time, a conceptual model was proposed that solves a class of problems of process control assessment in complex systems considering risk-oriented factors and an algorithm for selecting a risk-oriented assessment model. As a result, we obtain an initial assessment that carries the content of process control in the system, considering risk-oriented factors of influence. As a tool for application, generalized algorithms are proposed, with the help of which it is possible to adequately solve the innovation problem.

The reliability of the obtained results is ensured by the correct use of fuzzy set theory for the development of expert knowledge, a systematic approach, which is confirmed by research results. The study will be a useful tool to support decision-making to improve process control in various complex systems by considering the risks and threats to its operation.

Keywords: process control, risk factors, fuzzy set, level of risk, decision-making, intellectual analysis.

References

1. Polishchuk, V. V., Malyar, M. M., & Sharkadi, M. M. (2017). Model informatsiynoyi tekhnolohiyi otsynuyuvannya ryzyku finansuvannya proektiv [Model of information technology risk assessment of project financing]. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2017/2. 44-52. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2017-2-5> [in Ukrainian].
2. Polishchuk, V., Voloshyn, O., Malyar, M., & Sharkadi, M. (2018, August 21-25). Fuzzy mathematical modeling financial risks: IEEE Second International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP), Lviv (pp. 65-69). <https://doi.org/10.1109/DSMP.2018.8478604>.
3. Kelemen, M., Polishchuk, V., Gavurová, B., Andoga, R., Szabo, S., Yang, W., Christodoulakis, J., Gera, M., Kozuba, J., Kašavský, P., & Antoško, M. (2020). Educational Model for Evaluation of Airport NIS Security for Safe and Sustainable Air Transport. *Sustainability*, 12(6352). <https://doi.org/10.3390/su12166352>.
4. Polishchuk, V., Malyar, M., Sharkadi, M., & Polishchuk, A. (2020, September 23-26). Model of Operation Management Systems Risk Assessment: IEEE Proceedings of 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT), Zbarazh (pp. 190-193). <https://doi.org/10.1109/CSIT49958.2020.9321930>.
5. Polishchuk, V., Polishchuk, A., Jevčák, J., Choma, L., & Kelemen, M. jr. (2020, August 16-25). Criteria for the Information model for assessing the risks of UAV flights in environmental research on mountain terrain: Proceedings of XXth International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM, Varna, Bulgaria (pp. 97-102). <https://doi.org/10.5593/sgem2020/2.1/s07.013>.
6. McNeil, A.J., Frey, R., & Embrechts P. (2015). Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools, 2nd ed. Princeton university press.
7. Korshevnyuk, L. (2015). Kontseptsiya analitychnoyi klasyfikatsiyi ryzykiv v zadachakh systemnoho analizu skladnykh system [The concept of analytical classification of risks in the problems of system analysis of complex systems]. *Information systems, mechanics and control*, 13, 19-28 [in Ukrainian].
8. Dicke, A. (2011). On Risk Classification: A public policy Monograph. New York, NY: American Academy of Actuaries.
9. Snityuk, V. Ye. (2015). Evolyutsionnyye tekhnologii prinyatiya resheniy v usloviyakh neopredelennosti [Evolutionary technologies of decision making in conditions of uncertainty]. Kiev: MP Lesya [in Russian].
10. Zhurovskyy, M. Z., & Pankratova, N. D. (2007). Osnovy systemnoho analizu [Fundamentals of systems analysis]. Kiev: Vydavnycha hrupa VNV [in Ukrainian].
11. Panyagina, A. Ye. (2012). Podkhody k ponimaniyu i klassifikatsii riskov [Approaches to understanding and classifying risks]. *Sovremennaya ekonomika: problemy, tendentsii, perspektivy – Modern economy: problems, trends, prospects*, 6, 1-6 [in Russian].
12. Porrini, D. (2015). Risk Classification Efficiency and the Insurance Market Regulation. *Risks*, 3(4). <https://doi.org/10.3390/risks3040445>.
13. Kloman, H. F. (1990). Risk management agonists. *Risk Analysis*, 10, 201-205.
14. Fairley, R. (1994). Risk Management for software projects. *IEEE Softw.*, 11, 61-67.
15. Boehm, B. W. (1991). Software risk management: Principles and practices. *IEEE Softw.*, 8, 32-41.
16. Kliem, R. L., & Ludin, I. S. (1997). Reducing Project Risk. UK Gower: Farnham.
17. Risk Management-Principles and Guidelines ISO 31000:2018. (2018). Retrieved from: <https://www.iso.org/standard/65694.html>
18. Ye, S., & Tiong, R. L. K. (2000). NPV-at-risk method in infrastructure project investment evaluation. *J. Constr. Eng. Manag.*, 126, 227-233.
19. Hastak, M., & Shaked, A. (2000). ICRAM-1: Model for international construction risk assessment. *J. Manag. Eng.*, 16, 59-69.
20. Wu, Y., Song, Z., Li, L., & Xu, R. (2018). Risk management of public-private partnership charging infrastructure projects in China based on a three-dimension framework. *Energy*, 165.
21. Wang, Y., Wan, Y., Wu, Y., & Li, J. (2020). Exploring the risk factors of infrastructure PPP projects for sustainable delivery: A social network perspective. *Sustainability*, 12(10). 4152. <https://doi.org/10.3390/su12104152>.
22. Ameyaw, E. E., & Chan, A. P. C. (2015). Evaluation and ranking of risk factors in public-

- private partnership water supply projects in developing countries using fuzzy synthetic evaluation approach. *Expert Syst. Appl.*, 42. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2015.02.041>.
23. Lessard, D. R. (2013). Uncertainty and Risk in Global Supply Chains. Research Paper No. 4991-13. MA, USA: MIT Sloan School. Cambridge. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2240274>.
 24. Naaman, A. (2016). Establishment of the Armed Force-Research Development in Air Force, Between the Poles. Part 3. IDF: Jerusalem. Israel.
 25. Risk Classification. Statement of Principles. (2014). Retrieved from: <http://www.actuarialstandardsboard.org/wpcontent/uploads/2014/07/riskclassificationSOP.pdf>
 26. Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2019). Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *In Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges*, Switzerland: Springer (pp. 97–114). https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_6.
 27. Buldygin, V. V, Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2018). Asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations. Vinnytsia: FOP Kushnir Yu.V. [in Ukrainian].
 28. Mlavets, Yu. Yu., & Syniavska, O. O. (2020). Conditions for the uniform convergence of wavelet expansions of stochastic processes from $F\Psi(\Omega)$ spaces. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 37(2), 82–90. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).82-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).82-90) [in Ukrainian].

Одержано 31.10.2021

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moscow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 39 №2

2021

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), М. Ю. Бортош (технічний секретар),
В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, Ф. Е. Гече, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко,
Н. Е. Кондрук, К. В. Маринець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук,
О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк,
О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua