

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 40 № 1

2022

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 40 № 1

Ужгород 2022

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УЖНУ «Говерла», 2022. Т. 40, № 1. 224 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Бортош М. Ю., канд. фіз.-мат. наук (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — доктор філософії з математики, професор (ОАЕ), Бондаренко В. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна), Гече Ф. Е. — доктор техн. наук, професор (Україна), Гуляницький Л. Ф. — доктор техн. наук, с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — доктор техн. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Кондрук Н. Е. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Маринець К. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Нідерланди), Моклячук М. П. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Поліщук В. В. — канд. техн. наук, доцент (Україна), Рейтій О. К. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Ронто А. М. — доктор фіз.-мат. наук, професор (Чехія), Семенова Н. В. — доктор фіз.-мат. наук, с.н.с. (Україна), Сиявська О. О. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Снитюк В. Є. — доктор техн. наук, професор (Україна), Тилищак О. А. — доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Чупов С. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент (Україна), Шаркаді М. М. — канд. економ. наук, доцент (Україна), Щобак Н. М. — канд. фіз.-мат. наук, професор (Чехія).

Рекомендовано до друку на засіданні Вченої ради ДВНЗ "Ужгородський національний університет" (протокол №5 від 12 травня 2022 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2022

© Ужгородський національний університет,
2022

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 40 No 1

Uzhhorod 2022

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2022. Vol. 40, No 1. 224 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 5 of May 12, 2022)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2020: 72.72.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Вітальне слово ювіляру	7
Розділ 1: Математика і статистика	
1. <i>Бондаренко В. М., Стойка М. А., Стъопочкіна М. В.</i> Коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин найвищого суперкритичного MM -типу	11
2. <i>Бондаренко В. М., Зубарук О. В.</i> Комбінаторні характеристики категорії зображень напівгрупи $S_{(22)}^0$	19
3. <i>Бортош М. Ю., Тилищак О. А., Химинець М. В.</i> Розширені бінарні коди Голея за груповою алгеброю групи діедра	27
4. <i>Варга Я. В., Рего В. Л., Семчишин Г. Я.</i> Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач	33
5. <i>Качайкін М. В.</i> Навколо сталої ейлера	51
6. <i>Кириченко В. В., Лесіна Є. В.</i> Про порушення єдиності розв'язку крайової задачі в багатокутнику	60
7. <i>Мельник І. О.</i> Про диференціально-первинні ідеали нетерових напівкілець	69
8. <i>Тегза А. М., Сливка-Тилищак Г. І., Герич М. С., Погоріляк О. О., Боярищева Т. В.</i> Моделювання гауссового стаціонарного випадкового процесу з необмеженим спектром з використанням теорії $L_2(\Omega)$ -процесів	75
9. <i>Хаць Р. В.</i> Асимптотична поведінка спеціального канонічного добутку	82
Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика	
1. <i>Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф., Жигуц Ю. Ю.</i> Динаміка двохшарового напівпростору з початковим напруженнями при впливі рухомого навантаження	94
2. <i>Бойко Н., Качмарик В.</i> Побудова моделей для прогнозування часових рядів застосовуючи мережі довгострокової пам'яті	109
3. <i>Гурбич О.</i> Метод машинного навчання для створення нових лікарських речовин із заданими властивостями	126
4. <i>Діхтярук М. М., Кравчук О. А.</i> Дослідження поля впливу пружних переміщень і напружень для попередньо напруженої смуги від дії зосередженої сили	146
5. <i>Діхтярук М. М., Ярецька Н. О., Кравчук О. А.</i> Дослідження контактної взаємодії при періодичному підсиленні попередньо напруженої смуги тонкими підкріплюючими елементами	155
6. <i>Кондрук Н. Е.</i> Моделі багатофакторного прогнозування	168
7. <i>Мазютинець Г. В., Шаркаді М. М.</i> Модель багаторівневої нейромережі визначення рівня фінансової безпеки компанії	175
8. <i>Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В., Динис В. С.</i> Алгоритм побудови базисної решітки класу M_2 булевих алгебр	195
9. <i>Сальник С. В.</i> Оцінка ефективності функціонування методів управління потоками даних в мобільних радіомережах на основі нейронних мереж	205

CONTENTS

Congratulations to the jubilee	7
--------------------------------------	---

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. <i>Bondarenko V. M., Stoika M. V., Styopochkina M. V.</i> The coefficients of transitivity of the posets of MM -type being the highest supercritical poset	11
2. <i>Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.</i> Combinatorial characteristics of the category of representations of the semigroup $S_{(22)}^0$	19
3. <i>Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A., Khymynets M. V.</i> Extended binary Golay codes by a group algebra of dihedral group	27
4. <i>Varga I. V., Reho V. L., Semchyshyn H. Y.</i> Investigation of solutions of integral boundary value problems	33
5. <i>Kachaikin M. V.</i> Around the Euler's	51
6. <i>Kyrychenko V. V., Lesina E. V.</i> On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon	60
7. <i>Melnyk I. O.</i> On differentially prime ideals of Noetherian semirings	69
8. <i>Tegza A. M., Slyuka-Tilishchak G. I., Gerich M. S., Pogorilyak O. O., Bojarishcheva T. V.</i> Modeling of Gaussian stationary random process with unlimited spectrum using the theory of $L_2(\Omega)$ - processes	75
9. <i>Khats' R. V.</i> Asymptotic behavior of a special canonical product	82

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. <i>Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Lazar V. F., Zhiguts Yu. Yu.</i> Dynamics of a two-layer half-space with initial stresses under the impact of a moving load	94
2. <i>Boyko N., Kachmaryk V.</i> Building models for time sequence forecasting using long-term memory networks	109
3. <i>Gurbych A.</i> Machine learning method for creation of new medicinal substances with specific properties	126
4. <i>Dikhtiaruk N. N., Kravchuk O. A.</i> Investigation of the field of influence of elastic displacements and stresses for a pre-stressed strip from concentrated force ...	146
5. <i>Dikhtiaruk N. N., Yarets'ka N. O., Kravchuk O. A.</i> Investigation of contact interaction with periodic reinforcement of pre-stressed strip with thin sustaining elements	155
6. <i>Kondruk N. E.</i> Models of multivariate forecasting	168
7. <i>Mazyutynets G. V., Sharkadi M. M.</i> Multilayer network model for determining a company's financial security level	175
8. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Dynys V. S.</i> Algorithm construction of basic grating M_2 of class of Boolean algebra	195
9. <i>Salnyk S. V.</i> Evaluation of the efficiency of the functioning of the methods of data flow control in mobile radio water based on neural networks	205



ВІТАЛЬНЕ СЛОВО ЮВІЛЯРУ

Василь Васильович Маринець – відомий вчений у галузі математики (диференціальні рівняння), доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН вищої школи України по відділенню математики, заслужений працівник народної освіти України, лауреат Державної премії України в галузі освіти в номінації «Вища освіта», закордонний член Угорської Академії наук, Почесний громадянин міста Ужгорода, професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь Ужгородського національного університету відсвяткував свій вісімдесятирічний ювілей.

Народився В. В. Маринець 29 січня 1942 року в місті Мукачеві Закарпатської області у незаможній робітничій родині. Ті часи для закарпатців були нелегкими, а тому й майбутньому вченому довелося з дитячих років залучатися до фізичної праці.

Із 1949 до 1956 року навчався в середній школі № 2, а відтак продовжив навчання у школі № 16 м. Мукачева, яку закінчив у 1959 році.

У цьому ж році Василь Маринець вступив на перший курс фізико-математичного факультету Ужгородського державного університету (відділення математики). Навчання давалось йому відносно легко й після успішного захисту дипломної роботи рішенням Державної екзаменаційної комісії від 11 грудня 1964 року В. В. Маринцю присвоєно кваліфікацію математика-обчислювача та рекомендовано до аспірантури. Після року служби в армії він вступає до аспірантури УжДУ – на кафедру обчислювальної математики (науковий керівник – доц. Буледза А. В.). В аспірантурі Василь Маринець займався науковими проблемами теорії пружності та спектральною теорією бігармонічних операторів.

З 1 вересня 1968 року – асистент, а з 1 вересня 1969 року – ст.викладач кафедри теоретичної механіки і диференціальних рівнянь УжДУ.

21 березня 1972 року в Інституті математики АН УРСР в місті Києві захищає

дисертацію “Двосторонній метод наближеного інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь із запізнюючим аргументом” на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

З вересня 1972 р. до липня 1975 р. – довгострокове відрядження в Алжир, де працює завідувачем кафедри вищої математики Аннабінського університету. За успішне виконання міждержавних угод з Алжирською республікою – з підготовки національних кадрів – В. В. Маринця нагороджують урядовими грамотами СРСР. З 1 вересня 1976 року – доцент кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики, а 12 жовтня 1977 року йому присвоєно вчене звання доцента цієї ж кафедри. У вересні 1978 року його обрано завідувачем згаданої кафедри.

В цей період Маринець В. В. успішно працює над науковими проблемами з розробки нових модифікацій двостороннього методу наближеного інтегрування та дослідження задач теорії диференціально-функціональних рівнянь як звичайних, так і в частинних похідних. Його праці публікуються у провідних наукових виданнях країни, він часто виступає з доповідями на різних наукових форумах і, як результат, 31 жовтня 1995 року в Інституті математики НАН України успішно захистив дисертацію “Диференціальні нерівності та наближені методи в теорії диференціальних рівнянь з відхиляючим аргументом” на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук (науковий консультант академік НАН України проф. М. О. Перестюк). 24 жовтня 1996 року В. В. Маринцю присвоєно вчене звання професора по кафедрі диференціальних рівнянь та математичної фізики.

Після захисту докторської дисертації В. В. Маринець звертає велику увагу на організаційну роботу на підготовку науково-педагогічних кадрів з математики. З цією метою для керівництва аспірантами на кафедру як викладачів-сумісників запрошено провідних вчених НАН України та Київського національного університету ім. Т. Г. Шевченка: академік М. О. Перестюк, професори М. Д. Бабич, М. Й. Ронто. Така робота дала свої результати: чимало випускників аспірантури успішно захистили кандидатські дисертації (зокрема й учні проф. В. В. Маринця), а доцент І. І. Король – докторську дисертацію.

З 1 лютого 1996 року, згідно з наказом ректора УжДУ, В. В. Маринець призначається деканом математичного факультету. Упродовж трьох років на цій посаді він провів значну роботу по зміцненню навчально-технічної бази факультету (три комп’ютерні класи обладнано новою технікою, проведено капітальні ремонти аудиторного фонду факультету тощо).

Беручи до уваги особистий внесок у розвиток національної освіти, впровадження сучасних методів навчання і виховання молоді 2 жовтня 1998 року Указом Президента України проф. В. В. Маринцю було присвоєно Почесне звання „Заслужений працівник народної освіти України”.

У листопаді 1999 року його призначено проректором Ужгородського державного університету з навчальної роботи. На цій посаді до його обов’язків входив значний обсяг робіт (безпосереднє керівництво природничими факультетами, керівництво науково-методичною Радою УжДУ, конкурсною, тендерною, бюджетною комісіями тощо) і виконував він їх добросовісно. Саме за часів проректорування проф. В. В. Маринця Ужгородський університет набув статус національного вищого навчального закладу.

У липні 2004 року згідно з поданою ним заявою (із 29 січня 2002 року, як пенсіонер, Василь Маринець працював на цій посаді на контрактній основі) він звільняється з посади проректора і продовжує керувати кафедрою диференціальних рівнянь і математичної фізики до 31 серпня 2021 року. З 1 червня 2013 року до 29 травня 2015 року – декан математичного факультету.

Професор В. В. Маринець опублікував близько 160 наукових робіт, серед яких чотири монографії, один підручник (співавтор академік М. О. Перестюк) – „Теорія рівнянь математичної фізики” (К., видавництво „Либідь”, 2006, 424 с), виданий МОН України, вісім посібників та методичних розробок. Має патенти на винаходи.

В. В. Маринець виступає організатором низки наукових форумів, шкіл, які проводилися на базі УжНУ був членом оргкомітетів багатьох міжнародних конференцій, симпозіумів, які проводились як в нашій країні, так і за її межами.

За високий рівень наукових результатів на Українських математичних конгресах 2001 та 2009 рр. нагороджувався дипломами та пам'ятними медалями М. В. Остроградського та М. М. Боголюбова. Беручи до уваги наукові досягнення проф. Маринця В. В., з листопада 2003 року Угорська Академія наук приймає його як закордонного члена.

За час роботи в УжНУ проф. В. В. Маринець викладав на різних факультетах такі навчальні дисципліни: „Вища математика”, „Диференціальні рівняння”, „Рівняння математичної фізики” та інші, розробив та читав курси за вибором: „Теорія крайових задач”, „Теорія стійкості”, „Диференціальні рівняння з відхиляючим аргументом”, „Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних”, „Нелінійні задачі математичної фізики” тощо. З цілої низки курсів за вибором підготовлено та видано навчальні посібники.

За вагомі наукові здобутки та вклад у підготовку і виховання науково-педагогічних кадрів для нашої країни у квітні 2007 року проф. В. В. Маринця обрано академіком Академії наук вищої школи України.

За весь період трудової діяльності проф. В. В. Маринець займає активну громадському позицію у житті колективу факультету і університету. Він обирався до керівних органів громадських організацій університету. Упродовж багатьох років був членом науково-методичної ради УжНУ, вченої ради університету, видавничої ради, членом науково-методичної комісії з математики та експертної ради при Міністерстві освіти і науки, молоді та спорту України. Був головним редактором «Наукового вісника Ужгородського університету», серія «Математика і інформатика», головою вченої Ради математичного факультету. Упродовж 50-ти років В. В. Маринець є учасником хорової капели Ужгородського університету «Боян».

В 2012 році Василь Васильович став Лауреатом Державної премії в галузі освіти у номінації «вища освіта» за навчально-методичний комплект «Диференціальні рівняння» (авторський колектив у складі: академіків НАН України А. М. Самойленко, М. О. Перестюк та докторів фіз.-мат.наук С. А Кривошея, В. В. Маринець, М. П. Моклячук, І. О. Парасюк).

У 2013 році став Почесним громадянином міста Ужгорода за вагомий внесок у соціально-економічний розвиток міста, значні досягнення на науково-педагогічній ниві, підготовку висококваліфікованих спеціалістів, високий професіоналізм, творчу працю, активну участь у громадському житті краю.

Слід особливо відзначити його любов до хорового мистецтва. Мабуть, не випадково у студентські роки він був активним учасником художньої самодіяльності, а при заснуванні самодіяльної народної хорової капели викладачів та співробітників УжНУ (лютий 1964 р.) він був одним із її засновників. На запрошення він бере участь і в камерному хорі „Кредо” (м. Ужгород) та духовному хорі ім. Августина Волошина (худ. керівник Кирлик Я. Ю.).

За багаторічну науково-педагогічну, виховну та громадську роботу проф. В. В. Маринець неодноразово відзначався різними нагородами та відзнаками МОН України, Закарпатської області, міста Ужгорода та Ужгородського університету.

В. В. Маринець нагороджений дипломами та пам'ятними медалями М. В. Остроградського в 2001 р. та М. М. Боголюбова у 2009 р. У 2017 році рішенням Президії АН ВШ України нагороджений ювілейною медаллю «25 років Академії наук вищої школи України». Василь Васильович голова закарпатського обласного представництва всеукраїнської благодійної організації «Фонд сприяння розвитку математичної науки», член секції математичної освіти Українського математичного товариства, президент Ужгородського регіонального відділення математичного товариства, член наукової ради МОН України (секція «Математика», наказ МОН № 45 від. 22.01.2016 р.) західного наукового центру НАН і МОН України, відділення фізико-технічних і математичних наук (секція «Математика і математичне моделювання», голова секції по Закарпатській області), науковий керівник редакційної групи з математики «Енциклопедії Закарпаття: визначні особи ХХ ст.». Має трьох захищених учнів – кандидатів фізико-математичних наук, член оргкомітетів низки міжнародних та українських наукових форумів з теорії диференціальних рівнянь (останні відбулися в 2018 році в м. Мішкольц, Угорщина, в 2019 р. м. Київ, у 2020 р. м. Львів).

Колектив факультету математики та цифрових технологій бажає Василю Васильовичу творчих успіхів та зичить здоров'я на многії благії літа.

Маляр М. М. доктор технічних наук, професор, декан факультету математики та цифрових технологій Ужгородського національного університету.

Одержано 15.04.2022

УДК 512.53, 512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).11-18](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).11-18)**V. M. Bondarenko¹, M. V. Stoika², M. V. Styopochkina³**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
Leading researcher of the department of algebra and topology,
Doctor of physical and mathematical sciences
vitalij.bond@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Ferenc Rakoczi II. Transcarpathian Hungarian Institute,
Associate professor of the department of mathematics and informatics,
Candidate of physical and mathematical sciences
stoyka_m@yahoo.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0840-1496>

³ Polissia National University,
Associate professor of the department of higher and applied mathematics,
Candidate of physical and mathematical sciences
stmar@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

THE COEFFICIENTS OF TRANSITIVITY OF THE POSETS OF MM-TYPE BEING THE HIGHEST SYPERCRITICAL POSET

The representations of partially ordered sets (abbreviated as posets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter (in matrix form) in 1972, play an important role in the modern representation theory. In his first paper on this topic M. M. Kleiner proved that a poset S is of finite representation type (i.e. has a finite number, up to equivalence, of indecomposable representations) if and only if it does not contain subposets of the form $\mathcal{K}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{K}_2 = (2, 2, 2)$, $\mathcal{K}_3 = (1, 3, 3)$, $\mathcal{K}_4 = (1, 2, 5)$ and $\mathcal{K}_5 = (N, 4)$. Specified posets are called critical posets relative to the finiteness of the type. They are also called the Kleiner's (critical) posets. In 1974 Yu. A. Drozd proved that a poset S has finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors). Consequently, the Kleiner's posets are critical relative to weak positivity of the Tits quadratic form, and there are no (up to isomorphism) other such posets. In 2005 the authors proved that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset.

A similar situation takes place for posets of tame representation type. In 1975 L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $\mathcal{N}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{N}_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathcal{N}_3 = (2, 2, 3)$, $\mathcal{N}_4 = (1, 3, 4)$, $\mathcal{N}_5 = (1, 2, 6)$ and $\mathcal{N}_6 = (N, 5)$. She called these posets supercritical; they are also critical relative to weak non-negativity of the Tits quadratic. In 2008 the authors proved that a poset is critical relative to non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset.

In this paper we study the combinatorial properties of posets, minimax isomorphic to the supercritical poset of greatest height, i.e. $(1, 2, 6)$. The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are \mathbb{Z} -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined \mathbb{Z} -equivalence of the Tits quadratic forms for posets.

Keywords: representation, critical and supercritical poset, Tits quadratic form, finite and tame representation type, positivity and weak positivity, non-negativity and weak non-negativity, minimax isomorphism, coefficient of transitivity.

1. Introduction. The representations of partially ordered sets (abbreviated as posets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter (in matrix form) in 1972 [1], play an important role in the modern representation theory. In his first paper on this topic M. M. Kleiner [2] proved that a poset S is of finite representation type (i.e. has a finite number, up to equivalence, of indecomposable representations) if and only if it does not contain subposets of the form $\mathcal{K}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{K}_2 = (2, 2, 2)$, $\mathcal{K}_3 = (1, 3, 3)$, $\mathcal{K}_4 = (1, 2, 5)$ and $\mathcal{K}_5 = (N, 4)$. Specified posets are called *critical posets* relative to the finiteness of the type (i.e. they are minimal posets with an infinite number of indecomposable representations, up to equivalence). They are also called the *Kleiner's (critical) posets*. On the other hand, Yu. A. Drozd [3] proved that a poset has finite representation type if and only if its Tits quadratic form is weakly positive (i.e., positive on the set of nonnegative vectors). From these two statements it follows that the critical posets are also critical relatively to the weak positivity of the Tits quadratic form.

In 2005 the authors proved that a poset is critical relatively to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset [4] (such isomorphism was introduced by the first author in [5]); in this paper all such posets, which were named by the authors as *P-critical*, were fully described.

A similar situation takes place in the case of tame posets. A poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $\mathcal{N}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{N}_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathcal{N}_3 = (2, 2, 3)$, $\mathcal{N}_4 = (1, 3, 4)$, $\mathcal{N}_5 = (1, 2, 6)$, $\mathcal{N}_6 = (N, 5)$ [6], and this is equivalent to the weak non-negativity of the Tits quadratic form of S ; these posets are called *supercritical*. In [7] the authors proved that a poset is critical relatively to the non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset. In [8] all such posets, which were named by the authors as *NP-critical*, were fully described.

In addition to the above three papers of the authors, posets with positive and non-negative Tits quadratic form. were also studied in many of their other papers (see e.g. [9] – [17]).

In this paper, continuing to study the combinatorial properties of different classes of posets (see e.g. [18] – [22]), we consider posets that are minimax isomorphic to the supercritical poset of greatest height.

2. The list of posets of *MM-type (1, 2, 6)*. Throught the paper, all posets will be supposed finite.

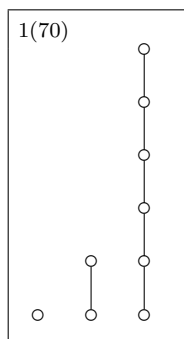
Let S be a poset. For a minimal (resp. maximal) element a of S , denote by $T = S_a^\uparrow$ (respect. $T = S_a^\downarrow$) the following poset: $T = S$ as usual sets, $T \setminus a = S \setminus a$ as posets, the element a is maximal (resp. minimal) in T , and a is comparable with x in T if and only if they are incomparable in S . Two posets S and T are called (min, max)-*equivalent* if there are posets S_1, \dots, S_p ($p \geq 0$) such that, if we put $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then, for every $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$ or $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$ [5]. Obviously, any poset is (min, max)-equivalent to itself. Since some time we also use the term *minimax equivalence*.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of *minimax isomorphism*: posets S and S' are minimax isomorphic if there exists a poset T , which is minimax equivalent to S and isomorphic to S' .

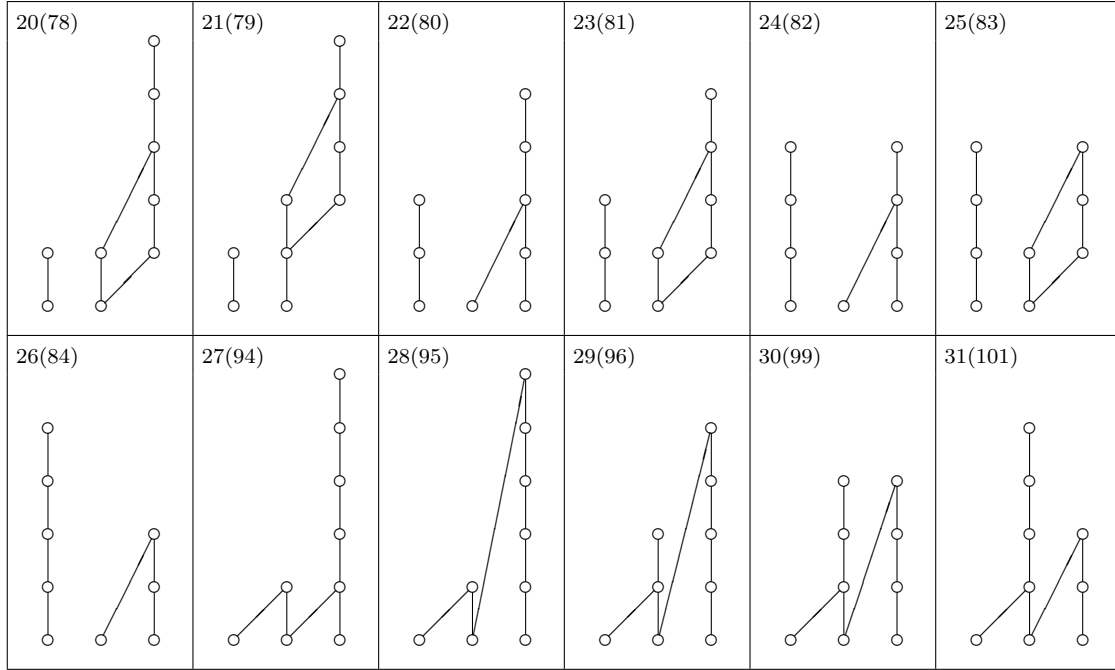
When P is a fix poset, we call that a poset S is of *MM-type P* if S is minimax

isomorphic to P [19].

From the results of [8] it follows that the following table contains all posets (up to isomorphism and duality) of MM -type $(1, 2, 6)$, which is the highest supercritical poset (in the sense of its longest chain):



2(19) 	3(20) 	4(21) 	5(22) 	6(23) 	7(24)
8(25) 	9(26) 	10(27) 	11(28) 	12(29) 	13(30)
14(31) 	15(71) 	16(72) 	17(73) 	18(74) 	19(77)



3. Coefficients of transitivity. Main results. Let S be a poset and $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$. If $(x, y) \in S_{<}^2$ and there is no z satisfying $x < z < y$, then we say that x and y are *neighboring*. Put $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$ and denote by $n_e = n_e(S)$ the number of pairs of neighboring elements. The ratio $k_t = k_t(S)$ of the numbers $n_w - n_e$ and n_w are called the *coefficient of transitiveness of S* ; if $n_w = 0$ (then $n_e = 0$), we assume $k_t = 0$ (this notion was introduced in [18]).

In this part of the paper we calculate k_t for all posets of MM -type $\mathcal{N}_5 = (1, 2, 6) = \{1, 2, \dots, 9 \mid 2 < 3, 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9\}$, which is the highest supercritical one.

Theorem 1. *The following holds for posets 1 – 31 of MM -type \mathcal{N}_5 :*

N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t
1	6	16	0,625	11	8	20	0,6	22	7	16	0,5625
2	8	34	0,76471	12	8	20	0,6	23	8	16	0,5
3	9	34	0,73529	13	8	18	0,55556	24	7	14	0,5
4	9	34	0,73529	14	8	18	0,55556	25	8	14	0,42857
5	9	34	0,73529	15	7	26	0,73077	26	7	14	0,5
6	8	30	0,73333	16	8	26	0,69231	27	8	22	0,63636
7	9	30	0,7	17	8	26	0,69231	28	8	18	0,55556
8	8	28	0,71429	18	7	22	0,68182	29	8	16	0,5
9	8	24	0,66667	19	7	20	0,65	30	8	16	0,5
10	8	24	0,66667	20	8	20	0,6	31	8	18	0,55556
				21	8	20	0,6				

The transitivity coefficients are written out with an accuracy of five decimal places. The value is exact if and only if the number of decimal places is less than five, and two values equal to exactly five digits are equal at all.

The proof is carried out by direct calculations.

Recall that the greatest length among the lengths of all linear ordered subsets of a poset S is called its *height*. An element of a poset is called *nodal*, if it is comparable with all the others elements. A subposet X of T is said to be *dense* if there is not $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$ such that $x_1 < y < x_2$.

Note that a poset of MM -type \mathcal{N}_5 can have at most six nodal elements.

Corollary 1. *The coefficient $k_t(S)$ of a poset S is the largest among all the posets of MM -type \mathcal{N}_5 if and only if S contains a dense subposet with six nodal elements.*

Corollary 2. *The coefficient $k_t(S)$ of a poset S is the smallest among all the posets of MM -type \mathcal{N}_5 if and only if S is a self-dual poset of height four.*

4. Conclusions. In this paper we investigate combinatorial aspects of supercritical posets which arise in the study of tame posets. Namely, we indicate, up to isomorphism and duality, all the posets that are minimax isomorphic to the supercritical posets $(1, 2, 6)$ and describe for them the coefficients of transitivity.

The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are \mathbb{Z} -equivalent. Using this fact the authors, in particular, proved (earlier) that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a critical Kleiner's poset, and a poset is critical relatively to the non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset. They also described all the posets that are minimax isomorphic to any critical or supercritical poset, classified all the posets with positive Tits quadratic form and solved a number of other classification problems,

The obtained results can be used in the study of combinatorial aspects of other classes of posets.

References

1. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
2. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 32–41 [in Russian].
3. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 8(3), 34–42 [in Russian].
4. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2(3), 18–58 [in Russian].
5. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24–25.
6. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5), 963–991 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2008). (Min, max)-equivalence of posets and nonnegative Tits forms. *Ukr. Math. J.* 60(9), 1157–1167 [in Russian].
8. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukr. Math. J.*, 61(5), 611–624 [in Russian].
9. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). On posets of width two with positive Tits form. *Algebra Discrete Mathematics*. 2. 20–35.

10. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). Partially ordered sets of injectively finite type. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 10–11, 22–33 [in Russian].
11. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2006). On finite posets of inj-finite type and their Tits forms. *Algebra Discrete Mathematics*, 2, 17–21.
12. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2006). On the connection between INJ-finiteness of the type and the positivity of the quadratic Tits form for finite partially ordered sets. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 12–13, 33–38 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M., Chervyakov, I. V., & Styopochkina, M. V. (2015). On properties of the Hasse diagram of P-critical posets. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 26, N1, 12–15 [in Russian].
14. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2016). On properties of the Hasse diagram of nonserial posets with positive quadratic Tits form. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 29(2), 31–34.
15. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2018). Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partially ordered sets. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 4, 8–15.
16. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2019). The classification of serial posets with the non-negative quadratic Tits form being principal. *Algebra and Discrete Mathematics*. 27(2), 202–211.
17. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021). On classifying the non-Tits P-critical posets. *Algebra and Discrete Mathematics*, 32(2), 185–196.
18. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2017). Coefficients of transitiveness of P-critical posets. *Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine*, 14(1), 46–51.
19. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2018). On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 32(1), 50–53.
20. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2019). On properties of posets of MM-type (1, 2, 7). *Applied problems of mech. and math.*, 17, 7–10.
21. Bondarenko, V. M., Styopochkina, M. V. , & Stoika, M. V. (2020) The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width. *Applied problems of mech. and math.*, 18, 11–13.
22. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021). On posets of sixth order having over-supercritical MM-type. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 38(1), 7–15.

Бондаренко В. М., Стойка М. В., Стюпочкіна М. В. Коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин найвищого суперкритичного *MM*-типу.

Зображення частково впорядкованих (скорочено ч. в.) множин, які введені Л. А. Назаровою і А. В. Ройтером (в матричній формі) в 1972 р., відіграють важливу роль в сучасній теорії зображень. У своїй першій праці за цією тематикою М. М. Клейнер довів, що ч. в. множина S має скінченний зображувальний тип (тобто має скінченне число нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності) тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $K_1 = (1, 1, 1, 1)$, $K_2 = (2, 2, 2)$, $K_3 = (1, 3, 3)$, $K_4 = (1, 2, 5)$ і $K_5 = (N, 4)$. Вказані ч. в. множини називаються критичними ч. в. множин щодо скінченності типу (тобто вони є мінімальними ч. в. множинами з нескінченним числом нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності). Їх також називають (критичними) ч. в. множинами Клейнера. У 1974 р. Ю. А. Дрозд довів, що ч. в. множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

є слабо додатною (тобто додатною на множині невід’ємних векторів). Таким чином, ч. в. множини Клейнера є критичними щодо слабкої додатності квадратичної форми Тітса, і інших таких ч. в. множин немає (з точністю до ізоморфізму). У 2005 р. автори

довели що ч. в. множина є критичною щодо додатності квадратичної форми Титса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій ч. в. множині Клейнера.

Подібну ситуацію маємо з ч. в. множинами ручного зображувального типу. У 1975 р. Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина S є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $N_2 = (1, 1, 1, 2)$, $N_3 = (2, 2, 3)$, $N_4 = (1, 3, 4)$, $N_5 = (1, 2, 6)$ і $(N, 5)$. Вона назвала ці ч. в. множини суперкритичними; вони є також критичними щодо слабкої невід'ємності квадратичної форми Титса. У 2009 році автори довели, що ч. в. множина є критичною щодо невід'ємності квадратичної форми Титса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій суперкритичній ч. в. множині.

У цій статті вивчаються комбінаторні властивості ч. в. множин, мінімаксно ізоморфних суперкритичній ч. в. множині найбільшої висоти, тобто $(1, 2, 6)$. Важливість вивчення мінімаксно ізоморфних ч. в. множин визначається тим фактом, що їх квадратичні форми Титса \mathbb{Z} -еквівалентні, а сам мінімаксний ізоморфізм є досить загальною конструктивно визначеною \mathbb{Z} -еквівалентністю для квадратичних форм Титса ч. в. множин.

Ключові слова: зображення, критична і суперкритична ч. в. множина, квадратична форма Титса, скінченний і ручний зображувальний тип, додатність і слабка додатність, негативність і слабка негативність, мінімаксний ізоморфізм, коефіцієнт транзитивності.

Список використаної літератури

1. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 5–31.
2. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 32–41.
3. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, Вып. 3. С. 34–42.
4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
5. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка*. Математика. Механіка. 2005. No 1. С. 24–25.
6. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР*. 1975. Т. 39, Вып. 5. С. 963–991.
7. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2008. Т. 60, № 9. С. 1157–1167.
8. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2009. Т. 61, № 5. С. 734–746.
9. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On posets of width two with positive Tits form. *Algebra Discrete Mathematics*. 2005. No 2. P. 20–35.
10. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2005. Вип. 10–11. С. 22–33.
11. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On finite posets of inj-finite type and their Tits forms. *Algebra Discrete Mathematics*. 2006. No 2. P. 17–21.
12. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. О связи между INJ-конечностью типа и положительностью квадратичной формы Титса для конечных частично упорядоченных множеств. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2006. Вип. 12–13. С. 33–38.
13. Bondarenko V. M., Chervyakov I. V., Styopochkina M. V. On properties of the Hasse diagram

- of P-critical posets. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2015. Вип. 26, № 1. С. 12–15.
14. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. On properties of the Hasse diagram of nonserial posets with positive quadratic Tits form. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2016. Вип. 29, № 2. С. 31–34.
 15. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partially ordered sets. *Вісник Київського університету*. Серія: фізико-математичні науки. 2018. 4. С. 8–15.
 16. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. The classification of serial posets with the non-negative quadratic Tits form being principal. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2019. 27, No 2. P. 202–211.
 17. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. On classifying the non-Tits P-critical posets. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2021. 32, No 2. P. 185–196.
 18. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. Coefficients of transitiveness of P-critical posets. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2017. Т. 14, No. 1. С. 46–51.
 19. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2018. Вип. 32, № 1. С. 50–53.
 20. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. On properties of posets of MM-type (1; 2; 7). *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2019. Вип. 17. С. 7–10.
 21. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V., Stoika M. V. The coefficients of transitiveness of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2020. Вип. 18. С. 11–13.
 22. Bondarenko V. M., Styoporchkina M. V. On posets of sixth order having oversupercritical MM-type. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2021. Вип. 38, № 1. С. 7–15.

Одержано 15.04.2022

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).19-26](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).19-26)**В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²**

¹ Інститут математики НАН України,
 провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
 доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
 голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
 канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

КОМБІНАТОРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КАТЕГОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ НАПІВГРУПИ $S_{(22)}^0$

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура, а згодом, у 1955 р., за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайт (в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані першим автором разом з Я. В. Заціхою (2013 р.). Це дало їм змогу, використовуючи методи Київської школи з теорії матричних задач, описати матричні зображення всіх напівгруп третього порядку над довільним полем (2018 р.). Вони також описали зображувальний тип напівгруп третього порядку (серед них немає диких) і вказали канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень).

Автори цієї статті продовжили дослідження в даному напрямку, детально вивчаючи природні наднапівгрупи напівгруп третього порядку (тобто таких, які мають фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі третього порядку), особливу увагу приділяючи їхнім матричним зображенням. Описується зображувальний тип нових напівгруп (серед яких вже зустрічаються і дикі), досліджуються алгебри Ауслендера (як одна із форм задання категорій зображень) та ідейно пов'язані з ними Σ -функції, тощо. Зокрема, автори описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи третього порядку, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, тобто комутативної напівгрупи

$$(0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$$

(в круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках — мінімальну систему твірних; потім вказано визначальні співвідношення). Серед таких наднапівгруп виділяється напівгрупа $S_{(22)}^0$ як найменша серед напівгруп

$$S_{(mn)}^0 := (0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^m = 0, c^n = c, bc = 0.$$

де $m, n \geq 2$. Напівгрупа $S_{(22)}^0$ є “проміжною” між вказаною вище комутативною напівгрупою та ручною напівгрупою, породженою 2-нільпотентним і 2-потентним елементами без додаткових визначальних співвідношень.

Напівгрупа $S_{(22)}^0$ має скінченний зображувальний тип і її нерозкладні зображення описані авторами раніше. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості її категорії матричних зображень.

Ключові слова: поле, розмірність, напівгрупа і наднапівгрупа, визначальні співвідношення, 2-кільпотентний і 2-потентний елементи, матричні зображення, еквівалентність, категорія, ендоморфізм, стабілізатор, зображувальний тип, алгебра Ауслендера, Σ -функція.

1. Вступ. Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура [1], а згодом, у 1955 р. за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайт [2] (в термінах таблиць Келі з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані першим автором разом з Я. В. Заціхою [3]. Це дало їм змогу, використовуючи методи Київської школи з теорії матричних задач, описати матричні зображення всіх напівгруп третього порядку над довільним полем [4] (відносно методів Київської школи див., зокрема, роботи [5]– [17]). У роботі [4] також описано зображувальний тип напівгруп третього порядку (серед них немає диких) і вказано канонічну форму матричних зображень для напівгруп скінченного зображувального типу (тобто таких, які мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень).

Автори цієї статті продовжили дослідження в даному напрямку, детально вивчаючи природні наднапівгрупи напівгруп третього порядку (тобто таких, які мають фактор-напівгрупи, ізоморфні напівгрупи третього порядку), особливу увагу приділяючи їхнім матричним зображенням. Описується зображувальний тип нових напівгруп (серед яких вже зустрічаються і дикі), досліджуються алгебри Ауслендера (як одна із форм задання категорій зображень), тощо (див. [18]– [21]). Зокрема, в [20] автори описали зображувальний тип стандартних наднапівгруп напівгрупи третього порядку, породженої двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами, тобто комутативної напівгрупи з твірними b, c і визначальними співвідношеннями $b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$. Серед таких наднапівгруп виділяється напівгрупа $S_{(22)}^0$ як найменша серед напівгруп з твірними b, c і визначальними співвідношеннями $b^m = 0, c^n = c, bc = 0$, де $m, n \geq 2$. Напівгрупа $S_{(22)}^0$ є “проміжною” між вказаною вище комутативною напівгрупою та ручною напівгрупою, породженою 2-нільпотентним і 2-потентним елементами без додаткових визначальних співвідношень.

Напівгрупа $S_{(22)}^0$ має скінченний зображувальний тип і її нерозкладні зображення описані авторами раніше. У цій статті вивчаються комбінаторні властивості її категорії матричних зображень.

2. Формулювання основного результату. Нехай $T : s \rightarrow T(s)$ — матричне зображення над полем K (скінченно-породженої в нашому випадку) напівгрупи S . Позначимо через $p(T)$ максимальне число незалежних параметрів матриці X , що задовольняє систему лінійних матричних рівнянь $T(s)X = XT(s)$, де s пробігає S . Більш формально, $p(T)$ — розмірність векторного простору, утвореного всіма такими X . Очевидно, що $p(T)$ не змінюється при заміні T на еквівалентне йому зображення. Якщо S — напівгрупа скінченного зображувального типу над K (тобто, за означенням, має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), а $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ — повна система її нерозкладних попарно нееквівалентних матричних зображень, то для $n \in [1, m] =: \{1, 2, \dots, m\}$ покладемо

$$p_n(T) =: \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_n} p(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \dots \oplus T_{i_n}), \quad \Sigma_S(n) =: p_n(T).$$

Введена функція $\Sigma_S : [1, m] \rightarrow \mathbb{N}$ називається Σ -функцією напівгрупи S [22]. Відносно цих означень на категорній мові див. параграф 3.

У цій статті обчислюється Σ -функція напівгрупи $S_{(22)}^0$ (див. вступ).

Теорема 1. *Напівгрупа $S = S_{(22)}^0$ має 5 класів еквівалентності нерозкладних зображень і*

$$\Sigma_S(n) = \begin{cases} 7, & \text{якщо } n = 1, \\ 41, & \text{якщо } n = 2, \\ 81, & \text{якщо } n = 3, \\ 53, & \text{якщо } n = 4, \\ 20, & \text{якщо } n = 5. \end{cases}$$

3. Алгебра Ауслендера напівгрупи $S_{(22)}^0$. Для довільних матриць A і B над полем K позначимо через $St(A, B)$ множину (векторний простір) всіх матриць X таких, що $AX = XB$. У випадку, коли A квадратна, алгебру $St(A) := St(A, A)$ називатимемо стабілізатором матриці A . Множина всіх матриць над (довільним фіксованим) полем K є категорією, якщо множиною морфізмів із A в B вважати $St(A, B)$. Тоді стабілізатор $St(A)$ є множиною всіх ендоморфізмів матриці A . Категорія матричних зображень будь-якої напівгрупи індукується категорією матриць. Зокрема, алгеброю ендоморфізмів матричного зображення $T : s \rightarrow T(s)$ напівгрупи S є алгебра $\bigcap_{s \in S} St(T(s))$ (очевидно, достатньо розглядати s із довільної фіксованої системи твірних елементів).

Згідно загального означення алгеброю Ауслендера $\mathcal{A}(S)$ напівгрупи скінченного зображувального типу S називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (по одному представнику із кожного класу еквівалентності). Якщо зображення розглядаються в матричному вигляді (як і в нашій статті), то алгебра Ауслендера називається матричною алгеброю Ауслендера. Вона не залежить від вибору представників у класах еквівалентності; а саме всі отримані таким чином алгебри будуть ізоморфними і навіть спряженими у відповідній повній матричній алгебрі. Взагалі кажучи, замість вказаної прямої суми зображень можна брати довільне еквівалентне їй зображення.

Переходимо до опису алгебри Ауслендера напівгрупи $S_{(22)}^0$.

Нерозкладні зображення $T = \{T(b) = B, T(c) = C\}$ напівгрупи $S_{(22)}^0$ вичерпуються (з точністю до еквівалентності) наступними зображеннями $T_1 - T_5$ (див. [20]):

$$1) B_1 = (0), \quad C_1 = (1);$$

$$2) B_2 = (0), \quad C_2 = (0);$$

$$3) B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4) B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5) B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}(S_{(22)}^0)$ напівгрупи $S_{(22)}^0$ над полем K (відносно $T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$) складається з усіх матриць вигляду

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{99} & 0 & x_{98} & 0 & x_{97} & 0 & 0 & x_{96} \\ x_{13} & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ 0 & x_{59} & 0 & x_{58} & x_{55} & x_{57} & 0 & x_{54} & x_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{54} \\ x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & x_{49} & 0 & x_{48} & 0 & x_{47} & 0 & x_{22} & x_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K .

Доведення. У роботі [21] пряма сума $T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5$ цих зображень записана з точністю до переставної подібності, а саме у вигляді зображення $T_0 = \{T(b) = B_0, T_c = C_0\}$, де

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

і доведено, що в цьому випадку матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}'(S_{(22)}^0)$ складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12} & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K .

Зображення T отримується із зображення T_0 наступною перестановкою рядків та стовпців: 3, 9, 1, 8, 5, 7, 2, 4, 6. Значить (параметрична) матриця \bar{X} , що задає алгебру Ауслендера відносно T , отримується із матриці X , яка задає алгебру Ауслендера відносно T_0 , також зп допомогою такої перестановки. Легко бачити, що матриця \bar{X} має вигляд, вказаний в умові теореми.

4. Доведення теореми 1. Для доведення теореми потрібно обчислити алгебри ендоморфізмів прямих сум різних комбінацій матричних зображень T_1 – T_5 , а потім їх розмірності.

Але цей процес можна спростити, якщо скористатися наступним твердженням, яке випливає із правила множення блокових матриць.

Лема 1. *Нехай A_1, A_2, \dots, A_m — квадратні матриці над полем K і A — їх пряма сума. Зафіксуємо послідовність натуральних чисел $I = (i_1, i_2, \dots, i_s)$, де $1 \leq s < m$, таку, що $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s$, і позначимо через A_I пряму суму матриць $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_s}$. Параметричні матриці $St(A)$ і $St(A_I)$ будемо вважати, як і матриці A та A_I , блоковими (розміри блоків визначаються розмірностями матриць A_1, A_2, \dots, A_m). Тоді $St(A_I)$ — блокова підматриця матриці $St(A)$, яка стоїть на перетині горизонтальних і вертикальних смуг з номерами із I .*

Нами ця лема використовується наступним чином. Спочатку обчислюємо алгебру Ауслендера (див теорему 2), а решту потрібних стабілізаторів отримуємо із параметричної матриці, якп задає цю алгебру, викреслюванням тих чи інших горизонтальних і вертикальних смуг (а саме, в кожному конкретному випадку, тих, які відповідають зображенням T_i , які не входять в пряму суму). Підрахунок же параметрів є простою задачею. В результаті маємо наступні рівності:

$$1) p(T_1) = p(T_2) = p(T_3) = 1, p(T_4) = p(T_5) = 2;$$

$$2) p(T_1 \oplus T_2) = 2, p(T_1 \oplus T_3) = 3, p(T_1 \oplus T_4) = 3, p(T_1 \oplus T_5) = 4, p(T_2 \oplus T_3) = 3, p(T_2 \oplus T_4) = 5, p(T_2 \oplus T_5) = 5, p(T_3 \oplus T_4) = 4, p(T_3 \oplus T_5) = 5, p(T_4 \oplus T_5) = 7;$$

$$3) p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = 5, p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) = 6, p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_5) = 7, p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) = 6, p(T_1 \oplus T_3 \oplus T_5) = 8, p(T_1 \oplus T_4 \oplus T_5) = 9, p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 8, p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_5) = 9, p(T_2 \oplus T_4 \oplus T_5) = 12, p(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 11,$$

$$4) p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 10, p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_5) = 12, p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4 \oplus T_5) = 14, p(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 17,$$

$$i) p_5(T) = p(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) = 20.$$

Отже, $p_1(T) = 7$, $p_2(T) = 41$, $p_3(T) = 81$, $p_4(T) = 53$, $p_5(T) = 20$, що і треба було довести.

5. Висновки. У роботі вивчаються комбінаторні властивості категорії матричних зображень наднапівгрупи спеціального вигляду напівгрупи третього порядку, яка породжена двома взаємно анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним (ідемпотентним) елементами. Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні категорій зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1953. 3. P. 1–11.
2. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. 6. P. 443–447.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки)*. 2013. № 14. С. 62–67.
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2018. Вип. 32, № 1. С. 36–49.
5. Бондаренко В. М. Связки полуценных множеств и их представления. (*Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.60*). Киев, 1988. 32 с.
6. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Записки науч. семинаров ЛОМИ*. 1977. 71. С. 24–41.
7. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2018. Т. 33, № 2. С. 19–26.
8. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. Представления и квадратичные формы. *Ин-т математики АН УССР*. Киев, 1979. С. 75–105.
9. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. *Ин-т математики АН УССР*. Киев, 1977. С. 104–114.
10. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою простого порядку скінченного зображувального типу. *Наукові записки НаУКМА (Фізико-математичні науки)*. 2016. 178. С. 23–26.
11. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*. 1990. 183. С. 149–159.
12. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. 28. С. 5–31.
13. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications*. 2003. 365. P. 45–90.
14. Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V. Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications*. 2009. 430. P. 86–105.
15. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2013. Vol. 16. No. 1. P. 16–19.
16. Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2008. № 4. P. 15–22.
17. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 21. No. 1. P. 18–23.
18. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2020. Т. 36, № 1. С. 7–15.
19. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера однієї комутативної напівгрупи скінченного зображувального типу. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2020. 18. С. 43–47.
20. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами. *Вісник Київського національного університету. Сер. фіз.-мат. науки*. 2020. № 3. С. 110–114.
21. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2021. Т. 38, № 1. С. 48–54.
22. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Σ -функція числа параметрів для системи матричних зображень. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. 2015. Т. 12, № 3. С. 56–64.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. Combinatorial characteristics of the category of representations of the semigroup $S_{(22)}^0$.

Semigroups of the third order were first described in 1953 by T. Tamura, and later, in 1955, with the help of a computer program by G. E. Forsythe (in terms of Kelly tables, up to isomorphism and antiisomorphism). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups were constructed by the first author together with Ja. V. Zaciha (2013). This allowed them, using the methods of the Kyiv school on the theory of matrix problems, to describe matrix representations of all semigroups of the third order over an arbitrary field (2018). They also described the representation type of third-order semigroups (there are no wild ones among them) and indicated the canonical form of matrix representations for semi-groups of finite representation type (i.e. those that have, up to equivalence, a finite number of indecomposable representations).

The authors of this article continued research in this direction, studying in detail the natural oversemigroups of semigroups of the third order (i.e. those that have a factor semigroup, isomorphic to a semigroup of the third order), paying special attention to their matrix representations. They also described the representation type of new semigroups (among which there are already wild), and investigated the Auslander algebras (as one of the forms of defining the categories of representations) and ideologically related Σ -functions, etc. In particular, the authors described the representation type of standard oversemigroups of semigroups of the third order, generated by two mutually annihilating 2-nilpotent and 2-potent (idempotent) elements, i.e. commutative semigroup

$$(0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0$$

(all the elements of the semigroup are indicated in parentheses, and in the angle brackets the minimal system of generators is indicated; then specified the defining relations). Among such oversemigroups the semigroup stands out $S_{(22)}^0$ as the smallest among semigroups

$$S_{(mn)}^0 := (0, b, c) = \langle b, c \rangle : b^m = 0, c^n = c, bc = 0.$$

where $m, n \geq 2$. The semigroup $S_{(22)}^0$ is “intermediate” between specified above the commutative semigroup and the tame semigroup generated 2-nilpotent and 2-potent elements without additional defining relations.

Semigroup $S_{(22)}^0$ has a finite representation type and its indecomposable representations are described by the authors earlier. This article studies the combinatorial properties of its category of matrix representations.

Keywords: field, dimension, semigroup and oversemigroup, defining relations, 2-nilpotent and 2-potent elements, matrix representations, equivalence, category, endomorphism, stabilizer, representation type, Auslander algebra, Σ -function.

References

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2013). Pro vyznachal’ni spivvidnoshennya dlya minimalnykh system tvirnykh napivhrup tret’oho poryadku [On defining relations for minimal generator systems of three-order semigroups]. *Science Journal of National Pedagogical Dragomanov University, Series 1: Physics and Mathematics*, 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Kanonichni formy matrychnykh zobrazhen’ napivhrup maloho poryadku [Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
5. Bondarenko, V. M. (1988). Svyazki polutsepnnykh mnozhestv i ikh predstavleniya [Bundles of semichained sets and their representations]. (*Prepr. / AN USSR. In-t matematiki; 88.60*). Kiev [in Russian].

6. Bondarenko, V. M., & Drozd, Ju. A. (1977). Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp [The representation type of finite groups]. *Modules and representations. Zap. Nauch. Sem. LOMI, 71*, 24–41 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Pro matrychni zobrazhennya monoyidiv chetvertoho poryadku [On matrix representations of monoids of the fourth order. On matrix representations of monoids of the fourth order]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics 33(2)*, 19–26 [in Ukrainian].
8. Bondarenko, V. M., Nazarova, L. A., & Zavadskii, A. G. (1979). O predstavleniyakh ruchnykh chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of tame partially ordered sets]. *Representations and quadratic forms. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev*, 75–106 [in Russian].
9. Drozd, Ju. A. (1977). O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh [Tame and wild matrix problems]. *Matrix problems, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev*, 104–114 [in Russian].
10. Dyachenko, S. M. (2016). Napivhrupy Rissa nad tsyklichnoyu hrupoyu prostoho poryadku skinchennoho zobrazhuval'noho typu [Riss semigroups over a cyclic group of simple order of finite representation type]. *Scientific Notes of NaUKMA (Physical and Mathematical Sciences), 178*, 23–26 [in Ukrainian].
11. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Ruchnyye chastichno uporyadochennyye mnozhestva s involyutsiyey [Tame partially ordered sets with involution]. *Trudy Mat. Inst. Steklov, 183* 149–159 [in Russian].
12. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Predstavleniya chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of partially ordered sets]. *Zap. Nauch. Sem. LOMI, 28*, 5–31 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications 365*, 45–90.
14. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications, 430(1)*, 86–105.
15. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn E. M. (2013). On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra Discrete Math., 16(1)* 16–19.
16. Bondarenko, V. M., & Tertychna, O. M. (2008). On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra Discrete Math., 4*, 15–22.
17. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math., 21(1)*, 18–23.
18. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzenoyi dvoma vzayemno anul'ovnymy idempotentamy [On matrix representations of oversemigroups of a semigroup generated by two mutually annihilating idempotents]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 36(1)*, 7–15 [in Ukrainian].
19. Zubaruk, O. V. (2020). Pro alhebru Auslendera odniyeyi komutatyvnoyi napivhrupy skinchennoho zobrazhuval'noho typu [On the Auslander algebra of a commutative semigroup of finite representation type]. *Applied problems of mech. and math., 18*, 43–47 [in Ukrainian].
20. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2020). Pro matrychni zobrazhennya nadnapivhrup napivhrupy, porodzenoyi vzayemno anul'ovnymy 2-potentnym i 2-nil'potentnym elementamy [On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements]. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics & Mathematics, 3*, 110–114 [in Ukrainian].
21. Zubaruk, O. V. (2021). Pro alhebru Auslendera napivhrupy, porodzenoyi dvoma anul'ovnymy 2-nil'potentnym i 2-potentnym elementamy [On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics, 38(1)*, 48–54 [in Ukrainian].
22. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2015). Σ -funktsiya chysla parametriv dlya systemy matrychnykh zobrazhen' [Σ -function of the number of parameters for the matrix representations system]. *Proc. Inst. math. NAS of Ukraine, 12(3)*, 56–64 [in Russian].

Одержано 15.04.2022

УДК 519.725

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).27-32](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).27-32)М. Ю. Бортош¹, О. А. Тилищак², М. В. Химинець³

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук

maria.bortos@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

² Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II,
професор кафедри математики та інформатики,
доктор фізико-математичних наук

alxtrlk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
myroslava.khymynets1@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6363-421X>

РОЗШИРЕНІ БІНАРНІ КОДИ ГОЛЕЯ ЗА ГРУПОВОЮ АЛГЕБРОЮ ГРУПИ ДІЕДРА

Для побудови лінійних бінарних самодуальних кодів було встановлено багато різних конструкцій. У статті розглядаємо побудову розширених бінарних кодів Голя за головними ідеалами (лівими) груповою алгеброю $\mathbb{F}_2 D_{24}$ групи діедра D_{24} порядку 24 над полем з двох елементів \mathbb{F}_2 . Розроблено алгоритм відшукування та знайдено програмним шляхом всі елементи $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$, які породжують головні ідеали, що визначають розширених бінарних кодів Голя. Раніше таким способом розширений бінарний код Голя будувався за одним елементом $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$, що $v = v^*$. Було знайдено всі 36 864 елементів $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$ за якими можна побудувати розширений бінарний код Голя та з'ясовано, що 768 з них задовольняє умову $v = v^*$.

Ключові слова: групова алгебра, розширені бінарні коди, коди Голя, самодуальні коди, коди над полями, група діедра.

1. Вступ. В 1967 р. С. Д. Бермана [1] (див. також [8]) запропонував піонерський підхід в побудові кодів, який розглядає односторонні ідеали в групових алгебрах скінченних груп над скінченними полями, як коди над тими ж полями. Більшість відомих на той час кодів з оптимальними параметрами вкладалися в запропоновану схему. І. МакЛоглін та Т. Харлі в [2, 6] використовуючи таку ж конструкцію побудував розширений бінарний код Голя, як головний ідеал породжений деяким елементом v групою алгебри групи діедра $G = D_{24}$ порядку 24 над полем \mathbb{F}_2 з двох елементів. Для інших груп G порядку 24 розширені бінарні коди Голя за головним ідеалом їх групових алгебр будувалися в [3–5]. Зокрема, було з'ясовано для яких груп така побудова можлива, а для групи $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$ (C_n — циклічна група порядку n) була з'ясована точна кількість всіх таких елементів v за якими будуються розширені бінарні коди Голя розглядуваним способом. В статті розглядаємо аналогічну задачу для групи $G = D_{24}$.

Опишемо використовувану конструкцію та означимо розширені бінарні коди Голя. Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ — скінченна група порядку n . Нехай $v = \alpha_{g_1} g_1 + \alpha_{g_2} g_2 + \dots + \alpha_{g_n} g_n \in \mathbb{F}_2 G$ ($\alpha_i \in \mathbb{F}_2$). Визначимо матрицю $\sigma(v) \in M(n, \mathbb{F}_2)$

ВИГЛЯДУ

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \cdots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}.$$

Для заданого елемента $v \in \mathbb{F}_2G$ визначаємо бінарний код: $C(v)$, як підпростір простору \mathbb{F}_2^n породжений рядками матриці $\sigma(v)$. В просторі \mathbb{F}_2^n вводиться скалярний добуток $[(v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)] = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ і відповідне ортогональне доповнення $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_2^n \mid [v, w] = 0, w \in C\}$. Бінарний код C називається самоортогональним, якщо $C \subset C^\perp$ і самодуальним — якщо $C = C^\perp$. Зрозуміло, що код $C(v)$ самоортогональний, якщо $\sigma(v)\sigma(v)^T = 0$. Для елемента $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_n}g_n \in \mathbb{F}_2G$ позначимо $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_n}g_n^{-1} \in \mathbb{F}_2G$. Легко бачити, що $\sigma(v)^T = \sigma(v^*)$.

Розглядаючи лінійний код над полем з двох елементів, використовуватимемо термін $[n, k, d]$ -код для позначення лінійних бінарних кодів, де n — довжина кодових слів, k — розмірність підпростору кодових слів і d — мінімальна відстань Хемінга коду. Легко бачити, що відстань Хемінга між довільними кодовими словами бінарного самодуального коду парна. Розширений бінарний код Голея визначається, як будь-який бінарний лінійний $[24, 12, 8]$ -код. Відомо [7], що розширений бінарний код Голея самодуальний.

Теорема 1 ([6]). *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v групової алгебри \mathbb{F}_2G . Якщо*

- 1) $v = v^*$,
- 2) $v^2 = 0$,
- 3) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$,

тоді код $C(v)$ самодуальний.

У [2–4, 6] встановлено, що з 15 неізоморфних груп 24-го порядку для яких будеється розширений бінарний код Голея D_{24} , S_4 , $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$, $C_3 \times D_8$, $C_2 \times A_4$ він будеється за достатніми властивостями самодуальності коду наведені в теоремі 1. Теорема 2 дає достатню умову, щоб код $C(v)$ був розширеним бінарним кодом Голея Скористаємося таким очевидним критерієм.

Теорема 2. *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v групової алгебри \mathbb{F}_2G . Код $C(v)$ самодуальний тоді і тільки тоді, коли*

- 1) $vv^* = 0$,
- 2) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$.

2. Побудова кодів за групою $G = D_{24}$.

Лема 1. *Нехай $G = D_{24} = \langle x, y \mid x^{12} = 1, y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$, $v = \sum_{i=0}^{11} \alpha_{i+1}x^i + \alpha_{i+13}x^i y$. Якщо код $C(v)$ самодуальний, тоді $\sum_{i=1}^{24} \alpha_i = 0$,*

$$(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) +$$

$$(\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_3 + \alpha_7) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_7 + \alpha_{11}) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_4 + \alpha_8) +$$

$$\gamma_3 = (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_3 + \alpha_7) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_7 + \alpha_{11}) + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_4 + \alpha_8) + (\alpha_2 + \alpha_{10}) \cdot (\alpha_8 + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + (\alpha_{13} + \alpha_{21})(\alpha_{19} + \alpha_{23}) + (\alpha_{14} + \alpha_{18})(\alpha_{16} + \alpha_{20}) + (\alpha_{14} + \alpha_{22})(\alpha_{20} + \alpha_{24}),$$

$$\text{або } \gamma_3 = \alpha_1(\alpha_{11} + \alpha_3) + \alpha_2(\alpha_{12} + \alpha_4) + \alpha_5(\alpha_3 + \alpha_7) + \alpha_6(\alpha_4 + \alpha_8) + \alpha_9(\alpha_7 + \alpha_{11}) + \alpha_{10}(\alpha_8 + \alpha_{12}) + \alpha_{13}(\alpha_{23} + \alpha_{15}) + \alpha_{14}(\alpha_{24} + \alpha_{16}) + \alpha_{17}(\alpha_{15} + \alpha_{19}) + \alpha_{18}(\alpha_{16} + \alpha_{20}) + \alpha_{21}(\alpha_{19} + \alpha_{23}) + \alpha_{22}(\alpha_{20} + \alpha_{24});$$

$$\gamma_4 = (\alpha_1 + \alpha_7)(\alpha_4 + \alpha_{10}) + (\alpha_2 + \alpha_8)(\alpha_5 + \alpha_{11}) + (\alpha_3 + \alpha_9)(\alpha_6 + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{19}) \cdot (\alpha_{16} + \alpha_{22}) + (\alpha_{15} + \alpha_{21})(\alpha_{18} + \alpha_{24}) + (\alpha_{17} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{20});$$

$$\gamma_5 = \alpha_1 + (\alpha_1 + \alpha_5)(\alpha_1 + \alpha_9) + \alpha_2 + (\alpha_2 + \alpha_6)(\alpha_2 + \alpha_{10}) + \alpha_3 + (\alpha_3 + \alpha_7)(\alpha_3 + \alpha_{11}) + \alpha_4 + (\alpha_4 + \alpha_8)(\alpha_4 + \alpha_{12}) + \alpha_{13} + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{13} + \alpha_{21}) + \alpha_{14} + (\alpha_{14} + \alpha_{18})(\alpha_{14} + \alpha_{22}) + \alpha_{15} + (\alpha_{15} + \alpha_{19})(\alpha_{15} + \alpha_{23}) + \alpha_{16} + (\alpha_{16} + \alpha_{20})(\alpha_{16} + \alpha_{24}),$$

$$\text{або } \gamma_5 = \alpha_1(\alpha_9 + \alpha_5) + \alpha_2(\alpha_{10} + \alpha_6) + \alpha_3(\alpha_{11} + \alpha_7) + \alpha_4(\alpha_8 + \alpha_{12}) + \alpha_{24}(\alpha_{20} + \alpha_{16}) + \alpha_{23}(\alpha_{19} + \alpha_{15}) + \alpha_{22}(\alpha_{18} + \alpha_{14}) + \alpha_{17}(\alpha_{21} + \alpha_{13}) + \alpha_9\alpha_5 + \alpha_{10}\alpha_6 + \alpha_{11}\alpha_7 + \alpha_{12}\alpha_8 + \alpha_{18}\alpha_{14} + \alpha_{19}\alpha_{15} + \alpha_{20}\alpha_{16} + \alpha_{13}\alpha_{21};$$

$$\gamma_6 = (\alpha_1 + \alpha_{11})(\alpha_6 + \alpha_4) + (\alpha_1 + \alpha_9)(\alpha_4 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_7)(\alpha_2 + \alpha_{12}) + (\alpha_{21} + \alpha_5) \cdot (\alpha_{12} + \alpha_{10}) + (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_{10} + \alpha_8) + (\alpha_{13} + \alpha_{23})(\alpha_{18} + \alpha_{16}) + (\alpha_{13} + \alpha_{21})(\alpha_{16} + \alpha_{14}) + (\alpha_{13} + \alpha_{19})(\alpha_{14} + \alpha_{24}) + (\alpha_{13} + \alpha_{17})(\alpha_{24} + \alpha_{22}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15})(\alpha_{22} + \alpha_{20});$$

$$\text{або } \gamma_6 = \alpha_1(\alpha_6 + \alpha_8) + \alpha_2(\alpha_7 + \alpha_9) + \alpha_3(\alpha_8 + \alpha_{10}) + \alpha_4(\alpha_9 + \alpha_{11}) + \alpha_5(\alpha_{10} + \alpha_{12}) + \alpha_{20}(\alpha_{13} + \alpha_{15}) + \alpha_{21}(\alpha_{14} + \alpha_{16}) + \alpha_{22}(\alpha_{15} + \alpha_{17}) + \alpha_{23}(\alpha_{16} + \alpha_{18}) + \alpha_{24}(\alpha_{17} + \alpha_{19}) + a_6a_{11} + a_7a_{12} + a_{13}a_{18} + a_{14}a_{19}.$$

Звідси отримаємо,

$$\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}).$$

Якщо код $C(v)$ самодуальний, то за умовою 1 теореми 2 виконуються умови: $vv^* = 0$ і $\sigma(v)\sigma(v)^T = \sigma(vv^*) = 0$ а, отже, $\gamma_i = 0$ ($i = 1, \dots, 6$). Тоді $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 = 0$, $\gamma_3 = 0$, $\gamma_5 = 0$. Звідси отримуємо відповідно рівняння наведені у висновку леми.

Одним з знайдених елементів є, наприклад, $v = x^2 + x^4 + x^6 + x^9 + x^{11} + x^3y + x^9y + x^{11}y$. Для нього $v^* = x^{10} + x^8 + x^6 + x^3 + x + x^3y + x^9y + x^{11}y \neq v$. В таблиці подано добутки всіх доданків з v на доданки з v^* .

Таблиця 1.

Таблиця добутків доданків з v на доданки з v^*

	x^{10}	x^8	x^6	x^3	x	x^3y	x^9y	$x^{11}y$
x^2	1	x^{10}	x^8	x^5	x^3	x^5y	$x^{11}y$	xy
x^4	x^2	1	x^{10}	x^7	x^5	x^7y	xy	x^3y
x^6	x^4	x^2	1	x^9	x^7	x^9y	x^3y	x^5y
x^9	x^7	x^5	x^3	1	x^{10}	y	x^6y	x^8y
x^{11}	x^9	x^7	x^5	x^2	1	x^2y	x^8y	$x^{10}y$
x^3y	x^5y	x^7y	x^9y	y	x^2y	1	x^6	x^4
x^9y	$x^{11}y$	xy	x^3y	x^6y	x^8y	x^6	1	x^{10}
$x^{11}y$	xy	x^3y	x^5y	x^8y	$x^{10}y$	x^8	x^2	1

Таким чином, $vv^* = 0$. З вигляду v одержимо, що

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} 00101010010100010000100000101 \\ 100101010010100010000100000010 \\ 0100101010001010000100000001 \\ 10100101010010010100001000000 \\ 0101000101010001010000100000 \\ 0010100010101000101000010000 \\ 1001010001010000010100001000 \\ 010010100010100000101000010 \\ 101001010001000000010100001 \\ 0101000101000110000001010000 \\ 1010100010100001000000101000 \\ 010101000101000010000001010 \\ 010100000010000101000101010 \\ 001010000001000010100010101 \\ 000101000000110001010001010 \\ 1000010100000001000101000101 \\ 010001010000010100010100010 \\ 0010000101000001010001010001 \\ 0001000010100010101000101000 \\ 000010000101000101010001010 \\ 000001000010100010101000101 \\ 1000000100001010001010100010 \\ 0100000010000101000101010001 \\ 1010000001000010100010101000 \end{pmatrix}.$$

Звичайно важко дати теоретичне обґрунтування, але обчислення в системі комп'ютерної алгебри GAP показують, що $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$, а мінімальна відстань Хемінга коду $C(v)$ рівна 8. Тобто $C(v)$ є розширений бінарний код Голея.

3. Числові результати. Групова алгебра \mathbb{F}_2D_{24} складається, очевидно, з $2^{24} = 16\,777\,216$ елементів v . В результаті обчислень одержуємо кількість елементів $v \in \mathbb{F}_2D_{24}$, що $C(v)$ — розширений бінарний код Голея. Подаємо ці результати для порівняння з кількістю тих же елементів при умові $v = v^*$.

Таблиця 2.

Кількість елементів з групової алгебри \mathbb{F}_2D_{24}

Мінімальна відстань Хемінга $C(v)$	2	4	6	8
Кількість елементів v , що $v = v^*$	640	8 704	768	768
Кількість елементів v	19 200	287 232	36 864	36 864

Таким чином, існує рівно 36 864 елементів $v \in \mathbb{F}_2D_{24}$, що $C(v)$ є розширеним бінарним кодом Голея.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Ця стаття присвячена дослідженню конструкцій розширених бінарних кодів Голея за груповою алгеброю \mathbb{F}_2G групи $G = D_{24}$. Знайдено 36 864 елементів $v \in \mathbb{F}_2D_{24}$, що $C(v)$ є розширеним бінарним кодом Голея. В подальших дослідженнях крім вже розглянутих $(C_6 \times C_2) \rtimes C_2$, D_{24} можна буде розглянути інші групи порядку 24 або групи вищих порядків для отримання кодів більшої довжини.

Автори щиро вдячні професору Бондаренку В. М. за корисні поради та змістовні дискусії при підготовці роботи.

Список використаної літератури

1. Берман С. Д. К теории групповых кодов. *Кибернетика*. 1967. № 1. С. 31–39.
2. Hurley T. Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math.* 2006. Vol. 31. No. 3. P. 319–335.
3. Bernhardt F., Landrock P., Manz O.: The extended Golay codes considered as ideals. *J. Comb. Theory Ser. A*. 1990. 55(2), 235–246.
4. Dougherty S. T., Gildea J., Taylor R., Tylyshchak A. Group rings, G -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*. 2018. 86(9). P. 2115–2138. DOI: 10.1007/s10623-017-0440-7.

5. Бортош М. Ю., Тилищак О. А. Розширені бінарні коди Голя за груповою алгеброю однієї групи. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2020. Вип. 1(36). С. 65–72.
6. McLoughlin I., Hurley T. A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2008. 9(54). P. 4381–4383.
7. Huffman W. C., Pless V. Fundamentals of error-correcting codes. *Cambridge University Press*, Cambridge. 2003.
8. Zimmerman K. H. Beiträge zur algebraischen Codierungstheorie mittels modularer Darstellungstheorie. *Bayreuther Math. Schr.* 1994. P. 48.

Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A., Khymynets M. V. Extended binary Golay codes by a group algebra of dihedral group.

Many different structures for construction linear binary self-dual codes were established. In the paper we consider the construction of extended binary Golay codes according to the principle ideals (left) of the group algebra $\mathbb{F}_2 D_{24}$ of the dihedral group D_{24} of order 24 over a field of two elements \mathbb{F}_2 . A search algorithm has been developed and all elements $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$, which generate the principle ideals that define extended binary Golay codes, have been found programmatically. Previously, in this way the extended binary Golay code was built on one element $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$, which $v = v^*$. All 36 864 elements $v \in \mathbb{F}_2 D_{24}$ were found, on which the define extended binary Golay codes can be constructed, and it was found that 768 of them satisfy the condition $v = v^*$.—

Keywords: group algebra, extended binary codes, Golay codes, self-dual codes, codes over fields, dihedral group.

References

1. Berman, S. D. (1967). К теорії групових кодів [On theory of group codes]. *Кибernetyka*, 1, 31–39. [in Russian].
2. Hurley, T. (2006). Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math*, 31(3), 319–335.
3. Bernhardt, F. Landrock, P., & Manz, O. (1990). The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55(2), 235–246.
4. Dougherty, S. T., Gildea, J., Taylor, R., & Tylyshchak, A. (2018). Group rings, G -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86(9), 2115–2138. <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0440-7>.
5. Bortos, M. Yu., & Tylyshchak, A. A. (2020). Extended binary Golay codes by a group algebra of one group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(36), 65–72.
6. McLoughlin, I., & Hurley, T. (2008). A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 9(54), 4381–4383.
7. Huffman, W. C., & Pless, V. (2003). Fundamentals of error-correcting codes. *Cambridge University Press*, Cambridge.
8. Zimmerman, K. H. (1994). Contribution to algebraic coding theory by means of modular representation theory. *Bayreuther Math. Schr.* 48. [in Germany].

Одержано 15.04.2022

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).33-50](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).33-50)**Я. В. Варга¹, В. Л. Реґо², Г. Я. Семчишин³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доц. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук

iana.varga@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7842-248X>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
ст. викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

vasyl.reho@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4995-2577>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
ст. викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь

halyna.semchyshyn@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1029-579X>

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

У даній статті обґрунтований оригінальний метод побудови чисельно-аналітичної схеми дослідження розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам. В основі методу лежить перехід від заданих інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов. Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно-аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях із покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайових задач. Доведено, що діленням відрізка інтегрування навпіл у два рази можна покращити достатні умови рівномірної збіжності параметризованих послідовних наближень. Цю техніку та її переваги продемонстровано на прикладі інтегральної крайової задачі, в якій для виконання достатніх умов збіжності потрібно поділити відрізок інтегрування навпіл.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелінійна інтегральна крайова задача, неперервно диференційовний розв'язок, параметризація, умова Ліпшиця, ділення відрізка інтегрування, збіжність послідовних наближень.

1. Вступ. Дослідження розв'язків крайових задач пов'язане з властивостями спеціальних послідовностей функцій. Головне обмеження, пов'язане із збіжністю цих послідовностей, полягає в тому, що найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10}K$$

припускається меншим за одиницю:

$$r(Q) < 1. \quad (1)$$

У даній роботі показано, що використовуючи відповідну техніку ділення заданого інтервалу на підінтервали, достатню умову (1) вдається послабити в два рази.

2. Постановка та зведення до двох модельних задач. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (2), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду (3)

$$\frac{du(t)}{dt} = f\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right), \quad t \in [a, b], \quad (2)$$

$$\int_a^b g(s, u(s)) ds = d, \quad (3)$$

де $f : [a, b] \times D \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ і $g : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервними в певній обмеженій області, яка є коректно визначеною нижче, $d \in \mathbb{R}^n$ – заданий вектор.

Зафіксуємо деякі відкриті обмежені області $D_a, D_{\frac{a+b}{2}}, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося неперервно диференційовними розв'язками x крайової задачі (2), (3) такими, що

$$u(a) \in D_a, \quad u\left(\frac{a+b}{2}\right) \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad u(b) \in D_b. \quad (4)$$

Загалом можемо вибрати $D_a, D_{\frac{a+b}{2}}, D_b$ опуклими множинами.

На основі множин D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$ введемо у розгляд множину

$$D_{a, \frac{a+b}{2}} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \theta \in [0, 1] \quad (5)$$

і її покомпонентний векторний ρ^x -окіл

$$D^x = B\left(D_{a, \frac{a+b}{2}}, \rho^x\right). \quad (6)$$

Аналогічно, на основі множин $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b визначимо множину

$$D_{\frac{a+b}{2}, b} = (1 - \theta)\eta + \theta\lambda, \quad \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \quad \lambda \in D_b, \quad \theta \in [0, 1] \quad (7)$$

і її покомпонентний векторний ρ^y -окіл.

$$D^y = B\left(D_{\frac{a+b}{2}, b}, \rho^y\right). \quad (8)$$

Важливо підкреслити, що D^x, D^y є обмеженими множинами, і надалі припускається, що умови Ліпшиця

$$f \in Lip(K_x, D^x), \quad f \in Lip(K_y, D^y), \quad (9)$$

$$|f(t, u, v) - f(t, \tilde{u}, \tilde{v})| \leq K_1^x |u - \tilde{u}| + K_2^x |v - \tilde{v}|, \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad \{u, v\} \in D^x,$$

$$|f(t, u, v) - f(t, \tilde{u}, \tilde{v})| \leq K_1^y |u - \tilde{u}| + K_2^y |v - \tilde{v}|, \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad \{u, v\} \in D^y$$

в цих областях виконуються локально.

Ставимо задачу знаходження неперервно диференційовного розв'язку $u(t)$ задачі (2), (3), для якого має місце включення (4).

Насамперед, спростимо інтегральні крайові умови (3) і зведемо їх до придатних умов модельного типу. Для цього введемо в розгляд векторні параметри

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (10)$$

формально поклавши

$$z = u(a), \quad \eta = u\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad \lambda = u(b). \quad (11)$$

Після цього, замість крайової задачі (2), (3), використовуючи техніку ділення відрізка навпіл, будемо розглядати відповідно на інтервалах $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ та $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ наступні дві параметризовані задачі модельного типу (12)-(13) та (14)-(15):

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x(a) = z, \quad (12)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad x\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta \quad (13)$$

та

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad (14)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y(t), \frac{dy(t)}{dt}\right), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \quad y(b) = \lambda, \quad (15)$$

кожна з яких складається з двох задач Коші, де $z, \eta, \lambda \in \mathbb{R}^n$ вважаються параметрами. Зауважимо, що довжина інтервалу в задачах (12)-(13) та (14)-(15) є $\frac{b-a}{2}$ на противагу $b-a$ у випадку вихідної задачі (2), (3).

Техніка параметризації, яку будемо використовувати, полягає у тому, що замість вихідної задачі (2),(3) вивчаємо сім'ю параметризованих модельних задач (12)-(13) та (14)-(15). Після цього, розв'язки вихідної крайової задачі отримуються відповідним вибором чисельних значень введених параметрів.

Зауваження 1. [9, Зауваження 4] Множина розв'язків крайової задачі (2), (3) співпадає з тією множиною розв'язків параметризованих задач (12)-(13) та (14)-(15), які задовольняють додаткові умови (11).

Наведемо допоміжні означення та твердження, які потрібні для обґрунтування результатів.

Означення 1. [5, Означення 1] Для будь-якого невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ і точки $z \in \mathbb{R}^n$ під компонентним векторним околom точки розуміємо множину

$$B(z, \rho) = \{\psi \in \mathbb{R}^n : |\psi - z| \leq \rho\}.$$

Аналогічно, для будь-якої обмеженої області $\Omega \in \mathbb{R}^n$ і будь-якого невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ під векторним ρ -околom області Ω розуміємо множину

$$B(\Omega, \rho) = B(z, \rho).$$

Означення 2. [5, Означення 2] На основі двох обмежених множин $D_a \in \mathbb{R}^n$, $D_b \in \mathbb{R}^n$ визначимо множину

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad z \in D_a, \quad \eta \in D_b, \quad \theta \in [0, 1]$$

і її векторний ρ -окил

$$D = B(D_{a,b}, \rho).$$

Таким чином, множину $D_{a,b}$ формують всі можливі «відрізки», що з'єднують точки множин D_a та D_b .

Лема 1. [1, Лема 2] Для будь-якої неперервної функції $f : [\tau, \tau + I] \rightarrow \mathbb{R}^n$, має місце оцінка

$$\left| \int_{\tau}^t \left[f(\tau) - \frac{1}{I} \int_{\tau}^{\tau+I} f(s) ds \right] d\tau \right| \leq \alpha_1(t, \tau, I) \frac{\max_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s) - \min_{s \in [\tau, \tau+I]} f(s)}{2} \quad (16)$$

для всіх $t \in [\tau, \tau + I]$, де

$$\alpha_1(t, \tau, I) = 2(t - \tau) \left(a - \frac{t - \tau}{I} \right), \quad |\alpha_1(t, \tau, I)| \leq \frac{I}{2}, \quad t \in [\tau, \tau + I]. \quad (17)$$

Лема 2. [3, Лема 3] Нехай послідовність неперервних функцій $[\alpha_m(t, \tau, I)]_m^{\infty}$ для $t \in [\tau, \tau + I]$ визначається рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1}(t, \tau, I) &= \left(1 - \frac{t - \tau}{I} \right) \int_{\tau}^t \alpha_m(s, \tau, I) ds + \\ &+ \frac{t - \tau}{I} \int_t^{\tau+I} \alpha_m(s, \tau, I) ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

де $\alpha_0(t, \tau, I) = 1$. Тоді мають місце наступні оцінки для всіх $t \in [\tau, \tau + I]$:

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{10}{9} \left(\frac{3I}{10} \right)^m \alpha_1(t, \tau, I), \quad m \geq 0, \quad (19)$$

$$\alpha_{m+1}(t, \tau, I) \leq \frac{3I}{10} \alpha_m(t, \tau, I), \quad m \geq 2,$$

де $\alpha_1(t, \tau, I)$ наводиться в (17).

3. Ділення відрізка інтегрування навпіл та послідовні наближення. Отже, ми пропонуємо замість інтегральної крайової задачі (2), (3) досліджувати спочатку окремо дві допоміжні модельні задачі (12)–(13) та (14)–(15). Для цього побудуємо придатні ітераційні процеси і вивчимо їх властивості.

Покладемо, що областю визначення за фазовою змінною функції f у правій частині системи (2) є множина D^x вигляду (6), тобто $f : [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ з вектором ρ^x , який задовольняє нерівність

$$\rho^x \geq \frac{b - a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad (20)$$

крім того,

$$r(Q_x) < 1, \quad Q_x = \frac{3(b-a)}{20} K_x. \quad (21)$$

Для параметризованої задачі (12)–(13) введемо в розгляд наступну рекурентну параметризовану послідовність функцій $x_m : [a, \frac{a+b}{2}] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, поклавши

$$\begin{aligned} x_0(t, z, \eta) &= z + \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z] = \left[1 - \frac{2(t-a)}{b-a} \right] z + \frac{2(t-a)}{b-a} \eta, \\ x_{m+1}(t, z, \eta) &= z + \int_a^t f \left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) ds - \\ &\quad - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f \left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z], \end{aligned} \quad (22)$$

при $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ для всіх $m = 0, 1, 2, \dots$, яка задовольняє початкові умови $x(a) = z$, $x(\frac{a+b}{2}) = \eta$ для всіх $z, \eta \in \mathbb{R}^n$, де $z \in D_a, \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$ вважаються параметрами.

Подібно, для параметризованої задачі (14)–(15) на підінтервалі $[\frac{a+b}{2}, b]$ покладемо, що областю визначення за фазовою змінною функції f є множина D^y вигляду (8), крім того, припустимо, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ з вектором ρ^y , який задовольняє нерівність

$$\rho^y \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) \quad (23)$$

і

$$r(Q_y) < 1, \quad Q_y = \frac{3(b-a)}{20} K_y. \quad (24)$$

Для вивчення другої модельної задачі (14)–(15) введемо у розгляд параметризовану послідовність функцій $y_m : [\frac{a+b}{2}, b] \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 0, 1, 2, \dots$, поклавши

$$\begin{aligned} y_0(t, \eta, \lambda) &= \eta + \frac{2t-a-b}{b-a} [\lambda - \eta] = \left[1 - \frac{2t-a-b}{b-a} \right] \eta + \frac{2t-a-b}{b-a} \lambda, \\ y_{m+1}(t, \eta, \lambda) &= \eta + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f \left(s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds - \\ &\quad - \frac{2t-a-b}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left(s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds + \frac{2t-a-b}{b-a} [\lambda - \eta], \end{aligned} \quad (25)$$

при $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ для всіх $m = 0, 1, 2, \dots, \lambda \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що всі члени послідовності функцій (22), (25) задовольняють двоточкові модельні крайові умови (11) для всіх $z, \eta, \lambda \in \mathbb{R}^n$.

4. Дослідження збіжності послідовних наближень та визначальні рівняння. Наступне твердження показує, що послідовність функцій (22) рівномірно збігається для всіх $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і її гранична функція є розв'язком певної адитивно збуреної задачі.

Теорема 1. *Припустимо, що існує невід'ємний вектор ρ^x такий, що $f \in Lip(K_x, D^x)$ на інтервалі $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$, і який задовольняє нерівність (20) та виконується*

$$r(Q_x) < 1$$

з матрицею K , для якої виконуються умови (21).

Тоді, для довільної пари векторів $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$:

1. Всі члени послідовності (22) є неперервно диференційовними функціями на відрізьку $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ і задовольняють модельні умови

$$x_m(t = a, z, \eta) = z, \quad x_m\left(t = \frac{a+b}{2}, z, \eta\right) = \eta.$$

2. Послідовність функцій (22) рівномірно збігається відносно $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції

$$x_\infty(t, z, \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \eta).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$x_\infty(a, z, \eta) = z, \quad x_\infty\left(\frac{a+b}{2}, z, \eta\right) = \eta.$$

4. Функція $x_\infty(t, z, \eta)$ в області D^x є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_a^t f\left(s, x(s), \frac{dx(s)}{ds}\right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x(s), \frac{dx(s)}{ds}\right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} [\eta - z], \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]. \quad (26)$$

Інакше кажучи, $x_\infty(t, z, \eta)$ є розв'язком наступної задачі Коші для адитивно збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \frac{dx(t)}{dt}\right) + \frac{2}{b-a} \Delta(z, \lambda), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \quad (27)$$

$$x(a) = z,$$

де збурення $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta) := [\eta - z] - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds. \quad (28)$$

5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned}
& |x_\infty(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) Q_x^m (I_n - Q_x)^{-1} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right], \quad m \geq 0, \quad (29)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = & \frac{1}{2} \left[\max_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') - \right. \\
& \left. - \min_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') \right]. \quad (30)
\end{aligned}$$

Доведення. Справедливість твердження 1 перевіряється прямим обчисленням. Доведемо, що за умов теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$ і $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ послідовність функцій (22) належить області D і є послідовністю Коші у банаховому просторі $C([a, \frac{a+b}{2}], \mathbb{R}^n)$ зі стандартною рівномірною нормою.

Дійсно, з використанням оцінки (16) із леми 1 для $\tau = a$, $I = \frac{b-a}{2}$ і співвідношення (22) при $m = 0$, $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ випливає, що

$$\begin{aligned}
& |x_1(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \left[\max_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(t, x_0(t, z, \eta), x'_0(t, z, \eta)) - \right. \\
& \quad \left. - \min_{t \in [a, \frac{a+b}{2}]} f(t, x_0(t, z, \eta), x'_0(t, z, \eta)) \right] \leq \\
& \leq \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f). \quad (31)
\end{aligned}$$

Отже, приходимо до висновку, що $x_1(t, z, \eta) \in D^x$ при $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$.

Використовуючи це, і міркуючи за індукцією згідно з лемою 2, легко переконатися в тому, що

$$|x_m(t, z, \eta) - x_0(t, z, \eta)| \leq \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f),$$

$$m = 2, 3, \dots,$$

а це означає, що всі функції послідовності (22) містяться в області D^x для всіх $m = 1, 2, 3, \dots$ та $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$.

Розглянемо різницю функцій

$$\begin{aligned}
& x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta) = \\
& = \int_a^t \left[f \left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) - f \left(s, x_{m-1}(s, z, \eta), \frac{dx_{m-1}(s, z, \eta)}{ds} \right) \right] ds -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(t-a)}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[f \left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds} \right) - \right. \\
& \left. - f \left(s, x_{m-1}(s, z, \eta), \frac{dx_{m-1}(s, z, \eta)}{ds} \right) \right] ds, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)
\end{aligned}$$

і введемо позначення

$$r_m(t, z, \eta) = |x_m(t, z, \eta) - x_{m-1}(t, z, \eta)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Відповідно до рекурентного співвідношення (18) леми 1, використовуючи умову Ліпшиця (9) і умову (19) для $m = 1$, з (31) і (32) випливає, що

$$\begin{aligned}
& r_2(t, z, \lambda) \leq \\
& \leq K_x \left[\left(1 - \frac{2(t-a)}{b-a} \right) \int_t^a \alpha_1 \left(s, a, \frac{b-a}{2} \right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} \int_b^t \alpha_1 \left(s, a, \frac{b-a}{2} \right) ds \right] \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \\
& \leq K_x \alpha_2 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) \leq \frac{10}{9} Q_x \alpha_1 \left(s, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f),
\end{aligned}$$

де матриця Q_x має вигляд (21). Методом індукції легко переконатися, що

$$\begin{aligned}
r_{m+1}(t, z, \eta) & \leq K_x^m \alpha_{m+1} \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D, D_x^1}(f) \leq \\
& \leq \frac{10}{9} Q_x^m \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \delta_{[a, b], D, D_x^1}(f).
\end{aligned}$$

Таким чином, з урахуванням останньої нерівності

$$\begin{aligned}
& |x_{m+j}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| \leq \\
& \leq |x_{m+j}(t, z, \eta) - x_{m+j-1}(t, z, \eta)| + |x_{m+j-1}(t, z, \eta) - x_{m+j-2}(t, z, \eta)| + \dots + \\
& + |x_{m+1}(t, z, \eta) - x_m(t, z, \eta)| = \sum_{i=1}^j r_{m+i}(t, z, \eta) \leq \\
& \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) \sum_{i=1}^j Q_x^{m+i-1} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \\
& = \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, a, \frac{b-a}{2} \right) Q_x^m \sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f), \quad (33)
\end{aligned}$$

де $\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f)$ має вигляд (30). Оскільки максимальне власне значення матриці Q_x вигляду (21) не перевищує одиницю, то

$$\sum_{i=0}^{j-1} Q_x^i \leq (I_n - Q_x)^{-1}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} Q_x^m = 0_n.$$

Таким чином, згідно з критерієм Коші, з нерівності (33) випливає, що послідовність функцій $[x_m(t, z, \eta)]_{m=0}^{\infty}$ вигляду (22) рівномірно збігається в області $(t, z, \eta) \in [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ до граничної функції $x_{\infty}(t, z, \eta)$.

Оскільки всі функції послідовності (22) задовольняють умови $x_m(a, z, \eta) = z$, $x_m(b, z, \eta) = \eta$ для всіх значень введених параметрів $z \in D_a$, $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$, можна зробити висновок, що гранична функція $x_{\infty}(t, z, \eta)$ також їх задовольняє. Перейшовши у рівності (22) до границі при $m \rightarrow \infty$ отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (26) або, що те ж саме, є розв'язком задачі Коші (27), де $\Delta(z, \eta)$ задається формулою (28). За переходу до границі при $j \rightarrow \infty$ у (22) отримуємо оцінку (29), що й завершує доведення.

Теорема 2. *Припустимо, що існує невід'ємний вектор ρ^y такий, що $f \in Lip(K_y, D^y)$ на інтервалі $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ і який задовольняє нерівність (20) та виконується умова*

$$r(Q_y) < 1,$$

де матриця Q_y задана (24).

Тоді, для довільної пари векторів $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$:

1. Усі члени послідовності (25) є неперервно диференційовними функціями на відрізку $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ і задовольняють модельні умови

$$y_m \left(t = \frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta, \quad y_m(t = b, \eta, \lambda) = \lambda.$$

2. Послідовність функцій (25) рівномірно збігається відносно $t \in [\frac{a+b}{2}, b]$ при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції

$$y_{\infty}(t, \eta, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t, \eta, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє умови:

$$y_{\infty} \left(\frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta, \quad y_{\infty}(a, \eta, \lambda) = \lambda.$$

4. Функція $y_{\infty}(t, \eta, \lambda)$ в області D^y є єдиним абсолютно неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = \eta + \int_{\frac{a+b}{2}}^t f \left(s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds - \frac{2(t-a)}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left(s, y(s), \frac{dy(s)}{ds} \right) ds + \frac{2(t-a)}{b-a} [\lambda - \eta], \quad t \in \left(\frac{a+b}{2}, b \right). \quad (34)$$

Інакше кажучи, $y_{\infty}(t, \eta, \lambda)$ є розв'язком наступної задачі Коші для адитивно збуреної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = f \left(t, y, \frac{dy(t)}{dt} \right) + \frac{2}{b-a} H(\eta, \lambda), \quad t \in \left(\frac{a+b}{2}, b \right), \quad (35)$$

$$y \left(\frac{a+b}{2} \right) = \eta,$$

де збурення $H(\eta, \lambda) : \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ – відображення, яке визначене формулою:

$$H(\eta, \lambda) := [\lambda - \eta] - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f \left(s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds} \right) ds. \quad (36)$$

5. Справедлива оцінка

$$\begin{aligned} & |y_\infty(t, \eta, \lambda) - y_m(t, \eta, \lambda)| \leq \\ & \leq \frac{10}{9} \alpha_1 \left(t, \frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2} \right) Q_y^m (I_n - Q_y)^{-1} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f), \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right], \quad m \geq 0, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = & \frac{1}{2} \left[\max_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D_1} f(t, y, y') - \right. \\ & \left. - \min_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D_1} f(t, y, y') \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Доведення. За аналогією з теоремою 1 може бути встановлена рівномірна збіжність послідовності функцій (25).

Граничні функції $x_\infty(t, z, \eta)$ і $y_\infty(t, \eta, \lambda)$ послідовностей (22) і (25) на підінтервалах $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ можуть бути корисними для отримання критерію розв'язності інтегральної крайової задачі (2),(3). Виявляється, що функції

$$\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ і } H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$$

які задані рівняннями (28) і (36), дають можливість зробити такий висновок.

Насправді, теореми 1 і 2 гарантують, що за наведених припущень функції

$$x_\infty(t, z, \eta) : \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y_\infty(t, \eta, \lambda) : \left[\frac{a+b}{2}, b \right] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

є коректно визначеними для всіх $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$, $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Тому, якщо покласти

$$u_\infty(t, z, \eta, \lambda) := \begin{cases} x_\infty(t, z, \eta), & t \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ y_\infty(t, \eta, \lambda), & t \in [\frac{a+b}{2}, b] \end{cases} \quad (38)$$

ми одержимо функцію $u_\infty(t, z, \eta, \lambda) : [a, b] \times D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, яка також коректно визначена для тих же значень параметрів $(z, \eta) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}}$ і $(\eta, \lambda) \in D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b$. Очевидно, що ця функція є неперервною, тому що в точці $t = \frac{a+b}{2}$ маємо

$$x_\infty \left(\frac{a+b}{2}, z, \eta \right) = y_\infty \left(\frac{a+b}{2}, \eta, \lambda \right) = \eta. \quad (39)$$

Поряд із рівняннями (12) і (13), визначених відповідно на інтервалах $[a, \frac{a+b}{2}]$ і $[\frac{a+b}{2}, b]$, введемо в розгляд наступні рівняння з адитивним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f \left(t, x, \frac{dx(t)}{dt} \right) + \frac{2}{b-a} \mu^x, \quad t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad (40)$$

з початковою умовою

$$x(a) = z \quad (41)$$

та

$$\frac{dy(t)}{dt} = f\left(t, y, \frac{dy(t)}{dt}\right) + \frac{2}{b-a}\mu^y, \quad t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right] \quad (42)$$

з початковою умовою

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad (43)$$

де

$$\mu^x = \begin{pmatrix} \mu_1^x \\ \vdots \\ \mu_n^x \end{pmatrix}, \quad \mu^y = \begin{pmatrix} \mu_1^y \\ \vdots \\ \mu_n^y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

вважаємо керуючими параметрами.

Теорема 3. Нехай $z \in D_a$ і $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є фіксовані. Припустимо, що всі умови теорем 1, 2 мають місце.

Тоді для того, щоб розв'язки $x(\cdot, a, z)$ і $y(\cdot, \frac{a+b}{2}, \eta)$ задач Коші (40), (41) і (42), (43) відповідно мали властивості модельних умов

$$x(a) = z, \quad x\left(\frac{a+b}{2}, a, z\right) = \eta,$$

$$y\left(\frac{a+b}{2}\right) = \eta, \quad y\left(b, \frac{a+b}{2}, \eta\right) = \lambda,$$

необхідно і достатньо, щоб керуючі параметри μ^x і μ^y були задані формулами:

$$\mu^x = \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds \quad (44)$$

та

$$\mu^y = \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds \quad (45)$$

де $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ і $y_\infty(\cdot, \eta, \lambda)$ є відповідно граничними функціями послідовностей (22) та (25). Більш того, в цьому випадку

$$x(\cdot, a, z) = x_\infty(\cdot, z, \eta), \quad y\left(\cdot, \frac{a+b}{2}, \eta\right) = y_\infty(\cdot, \eta, \lambda). \quad (46)$$

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2 [2].

Наступна теорема встановлює зв'язок функції (38) з розв'язком інтегральної крайової задачі (2), (3) в термінах нулів функцій $\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ та $H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$, які визначені в (28), (36).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теорем 1, 2. Тоді:*

1. *Функція*

$$u_\infty(t, z^*, \eta^*, \lambda^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(t, z^*, \eta^*, \lambda^*)$$

є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (2), (3) тоді й тільки тоді, коли трійка векторів (z^, η^*, λ^*) задовольняє систему $3n$ алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta) &= \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_\infty(s, z, \eta), \frac{dx_\infty(s, z, \eta)}{ds}\right) ds = 0, \\ H(\eta, \lambda) &= \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_\infty(s, \eta, \lambda), \frac{dy_\infty(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\Lambda(z, \eta, \lambda) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_\infty(s, \eta, \lambda)) ds - d = 0.$$

2. *Для будь-якого розв'язку $U(\cdot)$ задачі (2), (3) з властивістю*

$$\left(U(a), U\left(\frac{a+b}{2}\right), U(b)\right) \in D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b,$$

існує така трійка векторів (z_0, η_0, λ_0) , що

$$U(\cdot) = u_\infty(t, z_0, \eta_0, \lambda_0),$$

де функція $u_\infty(t, z_0, \eta_0, \lambda_0)$ задана згідно з (38).

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 3 [6].

Систему рівнянь (47) називають системою визначальних рівнянь тому, що її корені визначають розв'язки заданої крайової задачі.

Хоча теорема 4 теоретично дає відповідь, як побудувати розв'язок крайової задачі (2), (3), однак її застосування пов'язане з труднощами, тому що явний вигляд $x_\infty(t, z, \eta)$, $y_\infty(t, \eta, \lambda)$ і функцій

$$\Delta(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad H(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\Lambda(z, \eta, \lambda) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

які задані в (47), зазвичай є невідомими. Ці труднощі можуть бути подолані, якщо застосувати функції $x_m(s, z, \eta)$, $y_m(s, \eta, \lambda)$ для якогось фіксованого m . На їх основі замість точної визначальної системи можна розглядати так звану m -ту наближену систему визначальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\Delta_m(z, \eta) &= \eta - z - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(s, x_m(s, z, \eta), \frac{dx_m(s, z, \eta)}{ds}\right) ds = 0, \\ H_m(\eta, \lambda) &= \lambda - \eta - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(s, y_m(s, \eta, \lambda), \frac{dy_m(s, \eta, \lambda)}{ds}\right) ds = 0,\end{aligned}\quad (48)$$

$$\Lambda_m(z, \eta, \lambda) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s, x_\infty(s, z, \eta)) ds + \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(s, y_\infty(s, \eta, \lambda)) ds - d = 0.$$

Зауважимо, що на противагу (47) m -та наближена визначальна система (48) містить у собі члени, які залежать від функцій $x_m(\cdot, z, \eta)$, $y_m(\cdot, \eta, \lambda)$ і тому вона явно може бути побудована.

Природно очікувати, що наближення до невідомого розв'язку задачі (2), (3) може бути отримане на основі функції

$$u_m(t, z, \eta, \lambda) := \begin{cases} x_m(t, z, \eta), & t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ y_m(t, \eta, \lambda), & t \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right], \end{cases}\quad (49)$$

яка є «наближеним» варіантом до (38) і яка коректно визначена для всіх $t \in [a, b]$ та $(z, \eta) : D_a \times D_{\frac{a+b}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\eta, \lambda) : D_{\frac{a+b}{2}} \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$.

5. Модельний приклад. Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_1'(t) = \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) - x_1(t)\frac{dx_2}{dt} + \frac{t^2}{4}x_2^2(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^2 + \frac{23}{72}t + \frac{1}{36}, \\ x_2'(t) = \frac{1}{2}x_2^2(t)\frac{dx_1}{dt} + tx_1(t) - \frac{5}{27}t^3 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{3}, \end{cases} \quad t \in [0, 2],\quad (50)$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\begin{cases} \int_0^2 sx_1(s)x_2(s)ds = \frac{58}{135}, \\ \int_0^2 s^2x_2^2(s)ds = \frac{32}{45}. \end{cases}\quad (51)$$

Очевидно, що (50), (51) є окремим випадком (2), (3) при $a := 0$, $b := 2$,

$$f\left(t, x_1, x_2, x_1', x_2'\right) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1(t)x_2(t) - x_1(t)\frac{dx_2}{dt} + \frac{t^2}{4}x_2^2(t) - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{18}t^2 + \frac{23}{72}t + \frac{1}{36} \\ \frac{1}{2}x_2^2(t)\frac{dx_1}{dt} + tx_1(t) - \frac{5}{27}t^3 - \frac{1}{12}t + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \int_0^2 tx_1x_2dt \\ \int_0^2 t^2x_2^2dt \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{58}{135} \\ \frac{32}{45} \end{pmatrix}.$$

Точний розв'язок інтегральної крайової задачі (50), (51) має вигляд:

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{6} + \frac{1}{12}, \quad x_2^*(t) = \frac{t}{3}. \quad (52)$$

Прямі обчислення показують, що для крайової задачі (50), (51) не виконується достатня умова (1):

$$K = \begin{pmatrix} \frac{325}{202} & \frac{295}{202} \\ \frac{254}{101} & \frac{438}{505} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{195}{202} & \frac{177}{202} \\ \frac{762}{505} & \frac{1314}{2525} \end{pmatrix}, \quad r(Q) = 1.914050065 > 1.$$

Тому застосуємо техніку ділення відрізка інтегрування, що описана вище на відрізьку $[0, 2]$. Введемо наступні параметри, згідно з (10):

$$\begin{aligned} z &:= x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ \eta &:= x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \\ \lambda &:= x(2) = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Нехай опуклі підмножини D_a і $D_{\frac{a+b}{2}}$, де шукаємо значення розв'язку $x(a)$ та $x\left(\frac{a+b}{2}\right)$, мають вигляд:

$$\begin{aligned} D_a &= D_{\frac{a+b}{2}} = \{(x_1, x_2) : -0.1 \leq x_1 \leq 0.8, -0.1 \leq x_2 \leq 0.7\}, \\ D_x^1 &= \left\{ \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt} \right) : -0.1 \leq \frac{dx_1}{dt} \leq 0.4, -0.1 \leq \frac{dx_2}{dt} \leq 0.4 \right\}. \end{aligned}$$

А опуклі підмножини $D_{\frac{a+b}{2}}$ і D_b , де шукаємо значення розв'язку $x\left(\frac{a+b}{2}\right)$ та $x(b)$, виглядають наступним чином:

$$\begin{aligned} D_{\frac{a+b}{2}} &= D_b = \{(y_1, y_2) : -0.1 \leq y_1 \leq 0.6, -0.1 \leq y_2 \leq 0.7\}, \\ D_y^1 &= \left\{ \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt} \right) : -0.1 \leq \frac{dy_1}{dt} \leq 0.4, -0.1 \leq \frac{dy_2}{dt} \leq 0.4 \right\}. \end{aligned}$$

У цьому випадку опукла лінійна комбінація $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ вигляду (5) для векторів $z \in D_a, \eta \in D_{\frac{a+b}{2}}$ є наступною: $D_{a, \frac{a+b}{2}} = D_a = D_{\frac{a+b}{2}}$.

А опукла лінійна комбінація $D_{\frac{a+b}{2}, b}$ вигляду (7) для векторів $\eta \in D_{\frac{a+b}{2}}, \lambda \in D_b$ є наступною: $D_{\frac{a+b}{2}, b} = D_{\frac{a+b}{2}} = D_b$.

Вектори ρ^x та ρ^y вибираємо наступним чином:

$$\rho^x = \rho^y = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

Отже, ρ^x -окіл $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ дається наступним чином

$$D^x = \{(x_1, x_2) : -0.7 \leq x_1 \leq 1.4, -0.7 \leq x_2 \leq 1.3\}. \quad (53)$$

Векторний ρ^y -окіл $D_{a, \frac{a+b}{2}}$ задається наступним чином

$$D^y = \{(y_1, y_2) : -0.7 \leq x_1 \leq 1.2, -0.7 \leq x_2 \leq 1.3\}. \quad (54)$$

Після ділення відрізка інтегрування навпіл в областях D^x та D^y умова Ліпшиця виконується, відповідно з матрицями K_x, K_y , на підставі яких

$$Q_x := \frac{3}{20}K_x = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} \frac{75}{101} & \frac{225}{202} \\ \frac{154}{101} & \frac{438}{505} \end{pmatrix}, \quad r(Q_x) = 0.63289 < 1,$$

$$Q_y := \frac{3}{20}K_y = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} \frac{195}{404} & \frac{177}{404} \\ \frac{381}{505} & \frac{657}{2525} \end{pmatrix}, \quad r(Q_y) = 0.95702 < 1.$$

Крім того, з (30), (37) отримаємо

$$\delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \max_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') - \\ & \min_{(t, x, x') \in [a, \frac{a+b}{2}] \times D^x \times D^1} f(t, x, x') \end{aligned} \right] = \begin{bmatrix} 0.579 \\ 0.511 \end{bmatrix},$$

$$\rho^x = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[a, \frac{a+b}{2}], D^x}(f) = \begin{bmatrix} 0.289 \\ 0.2556 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \max_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D^1} f(t, y, y') - \\ & \min_{(t, y, y') \in [\frac{a+b}{2}, b] \times D^y \times D^1} f(t, y, y') \end{aligned} \right] = \begin{bmatrix} 0.6724 \\ 1.151 \end{bmatrix},$$

$$\rho^y = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.6 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{4} \delta_{[\frac{a+b}{2}, b], D^y}(f) = \begin{bmatrix} 0.336 \\ 0.575 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, ми перевірили, що всі умови теорем 1, 2 виконуються для крайової задачі (50), (51).

Використовуючи пакет символної математики Maple, розв'язуємо наближену систему визначальних рівнянь (48) при $m = 0, 1, 2, 3, 4$ і отримуємо чисельні результати, які подані у Табл. 1.

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів для точного розв'язку (52)

m	z_1	z_2	η_1	η_2	λ_1	λ_2
0	0.0544236	0.00383804	0.7235553	0.6653011	0.221925	0.3354314
1	0.0838575	-0.0036436	0.7507277	0.6633951	0.2499014	0.32943908
2	0.0872916	-0.0014107	0.7524909	0.6670138	0.25282909	0.333472055
3	0.08318309	0.00018941	0.74997514	0.66677822	0.2498736	0.333419237
4	0.0829641	0.01294231	0.7497939	0.66660603	0.24973132	0.3333301

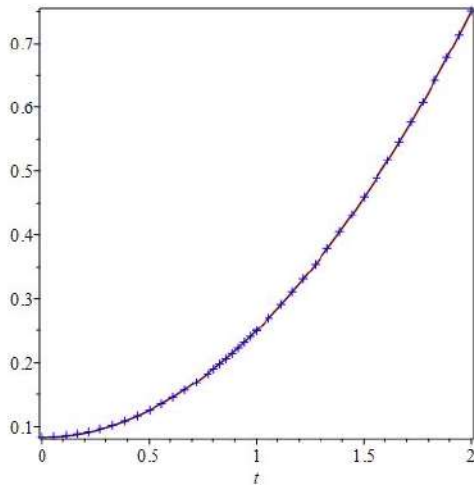
$$x1_{nabl1} := 0.08385759124 - 0.006960104218t^4 + 0.02743264167t^3 + 0.1389005564t^2 + \\ + 0.00667146813t,$$

$$x2_{nabl1} := -0.003643689810 - \frac{5}{108}t^4 + 0.05841846573t^3 + 0.0001613689350t^2 + \\ + 0.3207992385t,$$

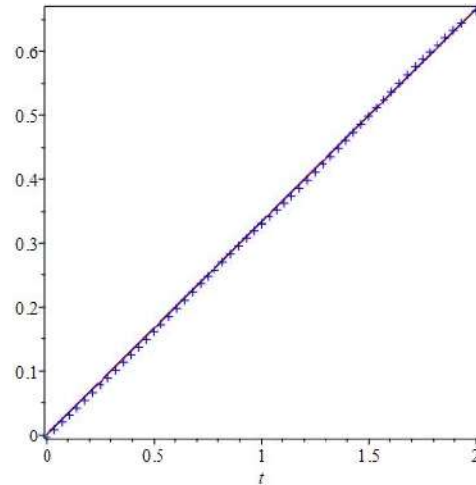
$$y1_{nabl1} := 0.0376664262 - 0.006905526170t^4 + 0.04601773050t^3 + 0.05458044925t^2 + \\ + 0.1185430734t,$$

$$y2_{nabl1} := 0.0698292949 - \frac{5}{108}t^4 + 0.1762511131t^3 - 0.1675061485t^2 + 0.2971611239t.$$

Графіки точного розв'язку (лінія) та його першого наближення (\times) виглядають наступним чином:



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 1. Точний розв'язок (52) (лінія) та його перше наближення (\times).

Похибка першої апроксимації ($m = 1$):

$$\max_{t \in [0,2]} |x_1^*(t) - x1_1(t)| \approx 0.008, \quad \max_{t \in [0,2]} |x_2^*(t) - x2_1(t)| \approx 0.006.$$

Похибка четвертої апроксимації ($m = 4$):

$$\max_{t \in [0,2]} |x_1^*(t) - x_{1_4}(t)| \approx 0.0005, \quad \max_{t \in [0,2]} |x_2^*(t) - x_{2_4}(t)| \approx 0.00012.$$

6. Висновки. У даній статті показано, що у тих випадках, коли не виконуються достатні умови збіжності для нелінійної системи диференціальних рівнянь, а саме коли найбільше власне значення певної матриці більше за одиницю, тоді доцільно застосовувати техніку ділення відрізка інтегрування на підінтервали.

Будуються дві модельні параметризовані послідовності функцій. Доведена їх рівномірна збіжність. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної інтегральної крайової задачі.

Теоретичні результати перевірили на прикладі крайової задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами.

Універсальність даного методу підтверджується тим, що він може легко застосовуватися у випадку крайових умов більш складного вигляду, включаючи нелінійні функціональні та інтегральні обмеження. Цікаво відзначити, що для вивчення параметризованої модельної задачі застосовується одна і та же чисельно-аналітична схема, яка орієнтована спеціально на модельну задачу.

Список використаної літератури

1. Ronto M., Ronto A., Varha Y. A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 250. P. 689–700.
2. Rontó M., Varha Y., Marynets K. Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems. *Tatra Mountains, Mathematical Publications*. 2015. 63. P. 247–267. DOI: 10515/tmmp-2015-0035.
3. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*. 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1233–1241.
4. Ronto M., Ronto A. Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations. *Handbook of differential equations, ordinary differential equations*. 2008. Vol. IV. P. 441–592.
5. Ronto M., Varha Y. Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*. 2014. Vol. 15, No. 2. P. 725–742.
6. Ronto M., Varha Y. Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*. 2015. Vol. 16, No. 2, P. 1129–1152.
7. Варга Я. В. Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2015. Вип. 26, № 1. С. 23–24.
8. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*. 2018. Vol. 19, № 2. P. 1221–1229.
9. Ronto A., Ronto M., Varga I. Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions, *Miskolc Mathematical Notes*. 2017. Vol. 18, № 2. P. 1001–1014, DOI: 10.181514/MMN.2017.2000.

Varga I. V., Reho V. L., Semchyshyn H. Y. Investigation of solutions of integral boundary value problems .

In this article the original method of constructing a numerical-analytical scheme for investigation the solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions is substantiated. At the heart of the method lies transition from given integral boundary conditions to parameterized conditions of model type, which have a simple appearance of the initial conditions. For a model parameterized problem, a constructive numerically-analytical scheme is constructed, which is built on

parameterized approximations with improved convergence characteristics. The connection between the solutions of the model and transitional boundary value problems is established. It is proved that by dividing the segment of integration in half, twice can be improved the sufficient conditions of uniform convergence for parameterized sequential approximations. This technique and its advantages are illustrated by example of one integral boundary value problem, in which to perform sufficient convergence conditions you need to split the integration segment in half.

Keywords: ordinary differential equations, nonlinear integral boundary value problems, continuously differentiated solution, parameterization, Lipschitz conditions, division of integration segment, convergence of successive approximations.

References

1. Ronto, M., Ronto, A., & Varha, Y. (2015). A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, (Vol. 250), 689–700.
2. Rontó, M., Varha, Y., & Marynets, K. (2015). Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems. *Tatra Mountains, Mathematical Publications*, 63, 247–267. <https://doi.org/10.515/tmmp-2015-0035>.
3. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*, 19(2), 1233–1241.
4. Ronto, M., & Ronto, A. (2008). Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations. *Handbook of differential equations, ordinary differential equations*, (Vol. IV), 441–592.
5. Ronto, M., & Varha, Y. (2014). Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*, 15(2), 725–742.
6. Ronto, M., & Varha, Y. (2015). Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*, 16(2), 1129–1152.
7. Varga, I. V. (2015). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 26(1), 23–34. [in Ukrainian]
8. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*, 19(2), 1221–1229.
9. Ronto, A., Ronto, M., & Varga, I. (2017). Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions, *Miskolc Mathematical Notes*, 18(2), 1001–1014, <https://doi.org/10.181514/MMN.2017.2000>.

Одержано 15.04.2022

УДК 517.18

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).51-59](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).51-59)

М. В. Качайкін

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

студент,

kachaikinmarko.sci@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5158-9116>

НАВКОЛО СТАЛОЇ ЕЙЛЕРА

За аналогією зі сталою Ейлера побудована однопараметрична сім'я сталих, яка визначається як границя різниці послідовності часткових сум узагальненого гармонічного ряду та відповідного інтеграла залежного від параметра. Доведена нескінченна диференційовність по параметру на додатній півосі, виявлена розривність в нулі та знайдена границя при прямуванні параметра до нескінченності.

Ключові слова: узагальнений гармонічний ряд, стала Ейлера, узагальнення сталої Ейлера.

1. Вступ. Вперше стала Ейлера була відкрита швейцарським математиком Леонардом Ейлером при дослідженні асимптотичної поведінки часткових сум гармонічного ряду. Пізніше вона виникла у дослідженнях італійського математика Лоренцо Маскероні при розкладі первісних функцій $g(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 0$, $x \neq 1$ та $h(x) = \frac{e^x}{x}$, $x \neq 0$ у функціональні ряди і була порахована ним до 32 знаку після коми.

Стала Ейлера визначається як границя різниці часткових сум гармонічного ряду і натурального логарифма:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0,577215\dots$$

Записавши натуральний логарифм за допомогою інтегралу, отримаємо:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t} \right).$$

Відмיתимо, що кожна з послідовностей $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \geq 1 \right\}$, $\left\{ \int_1^n \frac{1}{t} dt, n \geq 1 \right\}$ розбіжна. Але для існування границі вигляду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(t) dt \right), \tag{1}$$

де функція $f : [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ локально інтегровна за Ріманом на $[1, +\infty)$, взагалі кажучи, збіжність кожної з послідовностей $\left\{ \sum_{k=1}^n f(k), n \geq 1 \right\}$, $\left\{ \int_1^n f(t) dt, n \geq 1 \right\}$ не є обов'язковою. А тому, цікаво визначити для якого класу функцій $f : [1, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ існує границя вигляду (1).

У статті [1] показано, що клас функцій для яких існує границя вигляду (1) містить в собі клас монотонних, неперервних і збіжних до нуля функцій.

У статті [2] результат був покращений. В теоремі 1 цієї статті було показано, що границя вигляду (1) існує для всіх монотонних і обмежених функцій, що не обов'язково неперервні. В теоремі 3 — що для функції $f \in C^\infty((0, +\infty))$, що для кожного натурального n розклада в степеневий ряд на інтервалі $(n-1-\varepsilon_n, n+1+\varepsilon_n)$, для деякого $\varepsilon_n > 0$, границя (1) існує тоді і лише тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, де $b_n := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{f^{(k)}(n)}{(k+1)!}$, $n \geq 1$. А в теоремі 5 було доведено, що для функції $f \in C^1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1)\right)$, що неперервна зліва і має границю справа в натуральних точках, границя (1) існує тоді і лише тоді, коли існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f'(x) \{x\} dx$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x .

Ґрунтуючись на результатах статей [1] та [2], ми побудували однопараметричну сім'ю сталих, яка для кожного фіксованого значення параметра є границею різниці часткових сум узагальненого гармонічного ряду та відповідного інтегралу:

$$\nu(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \right], \quad \alpha \geq 0. \quad (2)$$

Цю параметричну сім'ю сталих можна розглядати як функцію дійсної змінної α . Для цієї функції $\nu(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, розглянемо питання неперервності та диференційовності на $[0, +\infty)$, обмеженості для всіх $\alpha \in [0, +\infty)$, знайдемо границю $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \nu(\alpha)$.

2. Основний результат. В прикладі 2 до теореми 1 статті [1] доведено існування границі наступної послідовності, для кожного значення параметра $\alpha > 0$:

$$\nu_n(\alpha) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha}, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

А в точці $\alpha = 0$ безпосередньо отримуємо рівність:

$$\nu_n(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^0} - \int_1^n \frac{dt}{t^0} = \sum_{k=1}^n 1 - \int_1^n dt = n - (n-1) = 1, \quad n \geq 1.$$

Таким чином, функція $\nu(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, що задана рівністю (2) — визначена коректно.

Основним результатом статті є теореми в яких доведена нескінченна диференційовність функції $\nu(\cdot)$ на $(0, +\infty)$, з'ясована розривність в нулі та обмеженість для всіх $\alpha \in [0, +\infty)$, знайдено $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \nu(\alpha)$.

Теорема 1. Для функції $\nu(\alpha)$, $\alpha \geq 0$ справедливі наступні твердження:

- (i) Для довільного $\alpha \in [0, +\infty)$: $0 \leq \nu(\alpha) \leq 1$;
- (ii) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \nu(\alpha) = 1$.

Доведення. Відмітимо, що $\nu(0) = 1$, а тому нехай далі $\alpha > 0$. В теоремі 1 з статті [2] показано, що для кожного фіксованого значення параметра $\alpha > 0$, для числових послідовностей $\{a_n(\alpha), n \geq 1\}, \{b_n(\alpha), n \geq 1\}$, визначених рівностями:

$$b_n(\alpha) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \nu_n(\alpha), a_n(\alpha) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}, \alpha > 0, n \geq 1.$$

Виконується наступний ланцюжок нерівностей:

$$a_1(\alpha) < a_2(\alpha) < \dots < a_n(\alpha) < b_n(\alpha) < \dots < b_2(\alpha) < b_1(\alpha), n \geq 1, \alpha > 0.$$

При цьому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\alpha) = \nu(\alpha), \alpha \geq 0$. Звідси випливає, що має місце нерівність для кожного $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$a_1(\alpha) < b_n(\alpha) < b_1(\alpha), n \geq 1.$$

Перейшовши в отриманій нерівності до границі при $n \rightarrow \infty$, маємо, що для всіх $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$0 \leq a_1(\alpha) = 1 - \int_1^2 t^{-\alpha} dt \leq \nu(\alpha) \leq b_1(\alpha) = 1.$$

Отримали твердження (i). Далі, так як:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} a_1(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[1 - \int_1^2 t^{-\alpha} dt \right] = 1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} b_1(\alpha) = 1,$$

то існує границя

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \nu(\alpha) = 1.$$

Теорему доведено.

Для дослідження властивостей функції $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ зобразимо її у вигляді суми функціонального ряду, щоб застосувати теорему про диференційовність суми ряду.

Лема 1. *Функція $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ є сумою функціонального ряду:*

$$\nu(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha),$$

$$\text{де } u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha}, k \geq 1, \alpha \geq 0.$$

Доведення. В точці $\alpha = 0$ це перевіряється безпосередньо. Для кожних $\alpha \in (0, +\infty)$, $n \geq 1$ має місце рівність:

$$\begin{aligned} \nu_n(\alpha) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} - \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \right] = \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{k^\alpha} - \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha} \right] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right] := 1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha), \end{aligned}$$

де $u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha}$, $k \geq 1$, $\alpha \geq 0$.

Тоді має місце рівність:

$$\nu(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha) \right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha), \quad \alpha \geq 0.$$

Лему доведено.

Зауваження 1. Для кожного фіксованого $\alpha \in [0, +\infty)$, $u_k(\alpha) \leq 0$, $k \geq 1$. Дійсно,

$$u_k(\alpha) = \frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = - \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) dt \leq 0, \quad k \geq 1.$$

Для дослідження функції на нескінченну диференційовність нам знадобляться похідні всіх порядків доданків суми функціонального ряду. Відмітимо, що послідовність функцій $u_k(\alpha)$, $k \geq 1$ є послідовністю нескінченно диференційовних функцій на інтервалі $(0, +\infty)$ і для всіх $m \geq 1$; $k \geq 1$; $\alpha > 0$ має місце наступна рівність:

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha)) = \frac{(-1)^m (\ln(1+k))^m}{(1+k)^\alpha} - \int_k^{k+1} (-1)^m (\ln t)^m \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Теорема 2. Функція $\nu(\alpha)$, $\alpha \geq 0$ нескінченно диференційовна на інтервалі $(0, +\infty)$. При цьому, для кожного фіксованого $m \geq 1$ має місце наступна рівність:

$$\frac{d^m \nu}{d\alpha^m}(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha)), \quad \alpha > 0.$$

Доведення. Доведемо рівномірну збіжність кожного з функціональних рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha))$ для всіх $m \geq 1$ на кожній з множин $[\delta, L]$, для всіх $0 < \delta < L$. Для всіх $m \geq 1$; $k \geq 1$; $\alpha > 0$ застосуємо теорему про середнє у інтегралі Рімана, тоді, для деякого $\mu = \mu(k, \alpha) : k < \mu < k+1$:

$$\int_k^{k+1} (-1)^m (\ln t)^m \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(-1)^m (\ln \mu(k, \alpha))^m}{(\mu(k, \alpha))^\alpha}.$$

Далі, для всіх фіксованих $m \geq 1, \alpha > 0$, для диференційовної на $[1, +\infty)$ функції $h(t) := \frac{(\ln t)^m}{t^\alpha}$, можемо застосувати теорему Лагранжа на кожному з відрізків $[\mu(k, \alpha), k + 1]$, тоді існує $\xi = \xi(k, \alpha) : k < \mu < \xi < k + 1$, таке що:

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(k+1))^m}{(k+1)^\alpha} - \frac{(\ln \mu(k, \alpha))^m}{(\mu(k, \alpha))^\alpha} &= (k+1 - \mu(k, \alpha)) \frac{d}{dt} \left(\frac{(\ln t)^m}{t^\alpha} \right) \Big|_{t=\xi} = \\ &= (k+1 - \mu(k, \alpha)) \frac{m(\ln \xi(k, \alpha))^{m-1} - \alpha(\ln \xi(k, \alpha))^m}{(\xi(k, \alpha))^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Далі, для всіх $m \geq 1, k \geq 1, L > \delta > 0, \alpha \in [\delta, L]$ маємо:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha)) \right| &= \left| (k+1 - \mu(k, \alpha)) \frac{m(\ln \xi(k, \alpha))^{m-1} - \alpha(\ln \xi(k, \alpha))^m}{(\xi(k, \alpha))^{1+\alpha}} \right| \leq \\ &\leq \frac{m(\ln \xi(k, \alpha))^{m-1} + L(\ln \xi(k, \alpha))^m}{(\xi(k, \alpha))^{1+\alpha}} \leq \frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

При чому, для всіх $m \geq 1$ числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}},$$

збіжний за ознакою порівняння, оскільки:

$$\frac{m(\ln(k+1))^{m-1} + L(\ln(k+1))^m}{k^{1+\delta}} = o\left(\frac{1}{k^{1+\frac{\delta}{2}}}\right), k \rightarrow \infty.$$

А тому, кожен з рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha))$, $m \geq 1$ рівномірно збігається на кожному з відрізків $[\delta, L]$, $0 < \delta < L$ за ознакою Вейерштрасса рівномірної збіжності. Далі, послідовно застосовуючи теорему про диференційовність суми функціонального ряду, врахувавши довільність вибору m, δ, L , отримуємо твердження теореми. При цьому, для кожного фіксованого $m \geq 1$ має місце наступна рівність:

$$\frac{d^m \nu}{d\alpha^m}(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^m}{d\alpha^m} (u_k(\alpha)), \alpha > 0.$$

Теорему доведено.

Для доведення розривності в точці $\alpha = 0$ нам знадобиться наступна лема.

Лема 2. *Має місце рівність:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})} - \frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})} \right) = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Доведення. Шукану границю позначимо символом L . Вираз під знаком границі приведемо до спільного знаменника, так як:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 2,$$

тоді

$$L = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(2 - \frac{1}{n} \right) (n+1)^{1-\frac{1}{n}} - (n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}} \right).$$

Далі, за формулою Маклорена з залишковим членом у формі Пеано:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), x \rightarrow 0.$$

Враховуючи, що $\frac{\ln(n+1)}{n}, \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, отримуємо, що:

$$(n+1)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} - \frac{\ln^3(n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3}\right), n \rightarrow \infty.$$

При цьому

$$-\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3} + o\left(\frac{\ln^3(n+1)}{6n^3}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty.$$

А тому

$$(n+1)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty,$$

і аналогічно

$$n^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), n \rightarrow \infty.$$

Таким чином

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(2 - \frac{1}{n} \right) (n+1) \left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - (n+1)^2 \left(1 - \frac{\ln(n+1)}{n} + \frac{\ln^2(n+1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - n^2 \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln^2(n)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right). \end{aligned}$$

Після спрощення виразу під знаком границі отримаємо, що:

$$L = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + 4 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{\ln^2(n) - \ln^2(n+1)}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Лему доведено.

Теорема 3. Функція $\nu(\alpha), \alpha \geq 0$ є розривною в точці $\alpha = 0$.

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що функція

$$\nu(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\alpha),$$

є неперервною на відрізку $[0, \frac{1}{2}]$. Тоді вона задовольняє умови теореми Діні з [3: 431], адже члени ряду $u_k(\alpha), k \geq 1$ неперервні, та внаслідок зауваження до

леми 1 — недодатні на всьому відрізку $[0, \frac{1}{2}]$. Тоді функціональна послідовність часткових сум $S_n(\alpha) := 1 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k(\alpha)$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ рівномірно збігається до функції $\nu = \nu(\alpha)$ на відрізку $[0, \frac{1}{2}]$, а тому для супремуму залишку ряду справедливо:

$$\sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} |\nu(\alpha) - S_n(\alpha)| = \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(\alpha) \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \tag{5}$$

З іншого боку, функція $p_\alpha(s) := -\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha}$ така, що для всіх $k \geq 1$: $p_\alpha(k) = -\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = u_k(\alpha)$, для кожного фіксованого $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ монотонна незростаюча на $[1, +\infty)$. Бо, за формулою Лейбніца з [4: 202] маємо, що:

$$\begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{ds}(s) &= \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right) = \frac{\alpha}{(s+1)^{\alpha+1}} + \frac{1}{(s+1)^\alpha} - \frac{1}{s^\alpha} = \\ &= \frac{\alpha}{(s+1)^{\alpha+1}} - \alpha \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \alpha \int_s^{s+1} \left[\frac{1}{(s+1)^{1+\alpha}} - \frac{1}{t^{1+\alpha}} \right] dt \leq 0, \end{aligned}$$

для кожного фіксованого параметра $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ та будь-якого $s \in [1, +\infty)$. А для випадку коли $\alpha = 0$, монотонність очевидна, бо $p_\alpha(s) = 0, s \geq 1$.

А тому, супремум залишку ряду можна коректно оцінити за допомогою нерівності 10а з [3: 284]:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k(\alpha) \right| &= \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right) \right| = \\ \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \sum_{k=n}^{\infty} \left(-\frac{1}{(k+1)^\alpha} + \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right) &\geq \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \int_n^{+\infty} \left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right) ds \end{aligned}$$

Далі, за властивістю супремуму, отримаємо:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} \left[\int_n^{+\infty} \left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \int_s^{s+1} \frac{dt}{t^\alpha} \right) ds \right] &\geq \\ \geq \sup_{\alpha \in (0, \frac{1}{2}]} \left[\int_n^{+\infty} \left(-\frac{1}{(s+1)^\alpha} + \frac{(s+1)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) ds \right] &\geq \\ \geq \sup_{\alpha \in (0, \frac{1}{2}]} \left(\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right] \Big|_n^{+\infty} \right). \end{aligned}$$

Далі, доведемо що

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right] = 0, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Дійсно, позначимо шукану границю через A , тоді

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \lim_{s \rightarrow +\infty} [(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha} - (2-\alpha)(s+1)^{1-\alpha}] = \\ &= \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \lim_{s \rightarrow +\infty} s^{2-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{2-\alpha} - 1 - \frac{(2-\alpha)}{s} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{1-\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Далі, за формулою Маклорена:

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} t^2 + o(t^2), t \rightarrow 0.$$

Для $t = \frac{1}{s}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \lim_{s \rightarrow +\infty} s^{2-\alpha} \left[1 + \frac{2-\alpha}{s} + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2s^2} + \right. \\ &\quad \left. + o\left(\frac{1}{s^2}\right) - 1 - \frac{2-\alpha}{s} \left(1 + \frac{1-\alpha}{s} + o\left(\frac{1}{s}\right)\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

А тому

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in (0, \frac{1}{2}]} \left(\left[-\frac{(s+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(s+1)^{2-\alpha} - s^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right] \Big|_n^{+\infty} \right) &\geq \\ &\geq \frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})} - \frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Тоді згідно з (4), остаточно отримаємо, що:

$$\sup_{\alpha \in [0, \frac{1}{2}]} |\nu(\alpha) - S_n(\alpha)| \geq \frac{(n+1)^{1-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})} - \frac{(n+1)^{2-\frac{1}{n}} - n^{2-\frac{1}{n}}}{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})} \rightarrow \frac{1}{2}, n \rightarrow \infty.$$

Це суперечить рівності (5). Отже, методом від супротивного $\nu(\alpha)$, $\alpha \geq 0$ — розривна в нулі.

Теорему доведено.

Цікаво буде дослідити характер точки розриву та знайти границю функції $\nu(\alpha)$ в нулі справа.

Гіпотеза. $\nu(\alpha) \rightarrow \frac{1}{2}$, $\alpha \rightarrow 0^+$.

3. Висновки. У статті, для побудованої однопараметричної сім'ї сталих, яка є аналогом сталої Ейлера на випадок узагальненого гармонічного ряду, показана нескінченна диференційовність за параметром, обмеженість для всіх значень параметра. Отримано значення границі при прямуванні параметра до нескінченності. Сформульовано гіпотезу щодо значення границі в нулі справа.

Список використаної літератури

1. Курченко О. О. Аналог сталої Ейлера для монотонної, збіжної до нуля функції. *Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, сер. фізико-математичні науки*. 2011. Вип. 4. С. 26–29.
2. Скуратовський Р. Узагальнення сталої Ейлера. *Мат. Вісник НТШ*. 2013. Т. 10. С. 163–168.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Т. II. Москва: Наука, 1969. 800 с.
4. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: Підручник у двох частинах. Частина 1. Київ: Либідь, 1993. 320 с.

Kachaikin M. V. Around the Euler's.

By analogy to Euler's constant, we constructed one-parameter family of constants, which defined as a limit of a difference of sequence of partial sums of the generalized harmonic series and related integral which depends on parameter. Proved that it is infinitely differentiable at all positive points, discovered that it discontinuous at zero and found a limit as parameter approaches to infinity.

Keywords: generalized harmonic series, Euler's constant, generalization of Euler's constant.

References

1. Kurchenko, O. O. (2011). Analoh staloi Oilera dlia monotonnoi, zbizhnoi do nulia funktsii [Analogy of Euler's constant for monotone function, which converges to zero]. *Scientific Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics*, (Vol. 4), 26–29. [in Ukrainian].
2. Skuratowskiy, R. (2013). A generalization of the Euler constant. *Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc*, (Vol. 10), 163–168. [in Ukrainian].
3. Fikhtengolts, G. M. (1969). *Differential and integral calculus course. In 3 volumes*. (Vol. II). Moscow: Nauka [in Russian].
4. Dorogovtsev, A. Ya. (1993). *Mathematchniy analiz: Pidruchnyk u dvokh chastynakh. Chastyna 1* [Mathematical analysis: Textbook in two parts. Part 1]. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].

Одержано 28.02.2022

УДК 517.95

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).60-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).60-68)**В. В. Кириченко¹, Є. В. Лесіна²**¹ Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”,

доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів,

кандидат фізико-математичних наук

v.kyrychenko@kpi.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2387-2261>² Донецький національний технічний університет,

доцент кафедри вищої математики і фізики,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

eugenia.lesina@donntu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>**ПРО ПОРУШЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ
ЗАДАЧІ В БАГАТОКУТНИКУ**

В роботі одержано критерій однозначної розв'язності однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипового диференціального рівняння в багатокутнику. Порядок рівняння збігається з кількістю сторін багатокутника. Доведення результату базується на принципі двоїстості рівняння-область. Схему побудови нетривіального розв'язку проілюстровано на прикладі задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

Ключові слова: багатокутник, нетривіальний розв'язок, двоїстість рівняння-область, диференціальний оператор, однорідний символ.

1. Вступ. Дослідженню загальних крайових задач в областях з кутовими точками присвячено роботи багатьох відомих авторів [1, 2, 3, 4]. Так, Г. І. Ескін [1] довів нормальну розв'язність задачі в пласкій області з даними, що задовольняють умову Лопатинського. В роботі В. В. Фуфаєва [2] розглядається перша крайова задача, і вивчаються диференціальні властивості гармонічної на площині функції. В. О. Кондратьєв [4] довів, що функції, похідні яких сумовні з певною вагою, є розв'язками загальної крайової задачі в області з кіничними точками. В роботі [5] доведено необхідну умову існування нетривіального розв'язку «майже задачі Коші» в багатокутнику для рівняння високого порядку з однорідним за порядком диференціювання символом.

В даній роботі, за допомогою схеми, наведеної в [5], та методу двоїстості рівняння-область [6], доведено критерій однозначної розв'язності задачі з однією крайовою умовою в багатокутнику. Побудовано приклад нетривіального розв'язку задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

2. Основний результат. Нехай

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : H^1 \cdot x + d_1 > 0, H^2 \cdot x + d_2 > 0, \dots, H^n \cdot x + d_n > 0\}$$

— деякий багатокутник на площині, обмежений прямими $H^j \cdot x + d_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, з нормальними векторами $H^j = (H_1^j, H_2^j)$ (див. рис. 1).

Для рівняння

$$Lu \equiv (a^1 \cdot \nabla) \cdot (a^2 \cdot \nabla) \cdot \dots \cdot (a^n \cdot \nabla) u = 0, \quad (1)$$

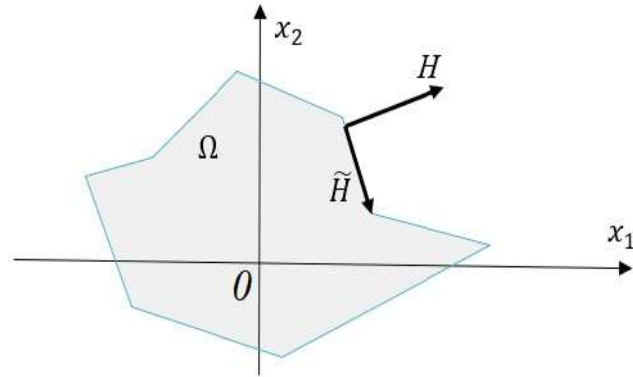


Рис. 1. Багатокутник

де

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad a^k = (a_1^k, a_2^k) \in \mathbb{C}^2,$$

$$k = 1, 2, \dots, n, \quad u = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)),$$

розглянемо наступну крайову задачу:

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Відзначимо, що порядок розглянутого рівняння повинен збігатися з кількістю сторін багатокутника Ω .

Виникає питання щодо порушення єдиності розв'язку задачі (1), (2), відповідь на яке дає наступна теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала нетривіальний розв'язок в просторі $C^n(\bar{\Omega})$, необхідно і достатньо, щоб послідовність визначників $\{\Delta_M\}$, $M \geq n$, де*

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^1)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^1)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^1)^M \\ (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^2)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^2)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^2)^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^n)^M & (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^n)^M & \dots & (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^n)^M \end{vmatrix}, \quad (3)$$

мала хоча б один нуль. При цьому, якщо деякий визначник $\Delta_M = 0$, то M — мінімальне число, для якого виконується рівність (3), тобто:

$$\Delta_n \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0, \quad \dots, \quad \Delta_{M-1} \neq 0, \quad \Delta_M = 0.$$

Тут \tilde{H}^j і \tilde{a}^k — вектори, ортогональні векторам H^j і a^k відповідно.

Доведення. Необхідність. Нехай $u \in C^n(\bar{\Omega})$ — нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), $\tilde{u} \in C^n(\mathbb{R}^2)$ — довільне продовження функції $u(x)$ на простір. Позначимо через θ_Ω характеристичну функцію області:

$$\theta_\Omega = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Подіємо оператором L на добуток $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$:

$$L(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = -l(v) \tilde{u}'_v \delta_{\partial\Omega}. \quad (4)$$

Тут v — зовнішня нормаль до межі $\partial\Omega$ багатокутника, $\delta_{\partial\Omega}$ — міра, зосереджена на межі $\partial\Omega$ багатокутника, $l(v) = (a^1 \cdot v)(a^2 \cdot v) \dots (a^n \cdot v)$ — однорідний символ диференціального оператора, $\delta_{\partial\Omega} \varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi ds$, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial v} = -\delta_{\partial\Omega}$.

Помножимо рівність (4) на добуток поліномів, що визначають межу області; одержимо:

$$(H^1 x + d_1)(H^2 x + d_2) \dots (H^n x + d_n) L[(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega)(x)] = 0. \quad (5)$$

Застосуємо до рівності (5) перетворення Фур'є:

$$\left(H^1 \cdot i \frac{\partial}{\partial \xi} + d_1\right) \left(H^2 \cdot i \frac{\partial}{\partial \xi} + d_2\right) \dots \left(H^n \cdot i \frac{\partial}{\partial \xi} + d_n\right) l(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega})(\xi) = 0. \quad (6)$$

Оскільки добуток $(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega)(x)$ — узагальнена функція з компактним носієм, то, за теоремою Пелі-Вінера [7], перетворення Фур'є $(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega})(\xi)$ є цілою функцією, яка може бути представлена у вигляді:

$$(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega})(\xi) = v_0 + v_1(\xi) + v_2(\xi) \dots + v_m(\xi) \dots$$

Тоді із рівності (6) для молодшої однорідної частини $v_m(\xi)$ випливає:

$$(H^1 \cdot \nabla)(H^2 \cdot \nabla) \dots (H^n \cdot \nabla) [l(\xi) v_m(\xi)] = 0. \quad (7)$$

Позначимо через $w(\xi) = l(\xi) v_m(\xi)$ довільний поліноміальний розв'язок рівняння (7), який є однорідним поліномом степеня $M = m + n$:

$$w(\xi) = \sum_{k=1}^n w_k (\tilde{H}^k \cdot \xi) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (\tilde{H}^k \cdot \xi)^M. \quad (8)$$

Очевидно, що $w(\xi) = 0$, коли символ $l(\xi) = 0$, тобто коли ξ дорівнює $\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^n$. Отже, рівність (8), за умови $w(\xi) = 0$, перетворюється на систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів c_1, \dots, c_n , причому визначник системи співпадає з визначником (3):

$$\begin{cases} c_1 (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^1)^M + c_2 (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^1)^M + \dots + c_n (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^1)^M = 0; \\ c_1 (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^2)^M + c_2 (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^2)^M + \dots + c_n (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^2)^M = 0; \\ \dots \\ c_1 (\tilde{H}^1 \cdot \tilde{a}^n)^M + c_2 (\tilde{H}^2 \cdot \tilde{a}^n)^M + \dots + c_n (\tilde{H}^n \cdot \tilde{a}^n)^M = 0. \end{cases}$$

Оскільки, за припущенням, існує нетривіальний розв'язок $u \in C^n(\bar{\Omega})$ задачі (1), (2), то, згідно з методом двоїстості [6], поряд із тим існує нетривіальний розв'язок рівняння (7). Нагадаємо, що твердження двоїстості полягає в наступному: *для кожного нетривіального розв'язку задачі (1), (2) існує єдиний*

нетривіальний розв'язок рівняння (7), що належить деякому класу \mathbb{Z} цілих функцій, і навпаки. Клас \mathbb{Z} визначається як простір образів Фур'є функцій виду $\tilde{y} \cdot \theta_\Omega$.

Вищесказане означає, що існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) призводить до наявності нетривіального розв'язання останньої системи, а, отже, до рівності нулю її визначника. Що і потрібно довести в необхідності.

Достатність. Покажемо, що для існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) достатньо виконання рівності

$$\Delta_M = 0. \quad (9)$$

Для доведення достатності при виконанні рівності (9) побудуємо нетривіальний поліноміальний розв'язок $u(x)$ задачі (1), (2) в явному вигляді. З урахуванням того, що будь-який поліном степеня M можна представити у вигляді суми однорідних поліномів, степінь яких не перевищує M , а також в силу ортогональності векторів a_k і \tilde{a}_k при кожному $k = 1, 2, \dots, n$, — будь-який поліноміальний розв'язок рівняння (1) можна записати в наступній формі:

$$u(x) = \sum_{l=1}^M u_l(x) + u_0 = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n c_k^l (\tilde{a}^k \cdot x)^l + u_0. \quad (10)$$

Тут c_k^l — константи, $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, M$. Зауважимо, що для побудови нетривіального розв'язку задачі (1), (2) необхідно так підібрати функції u_l , щоб функція (10) задовольняла, крім того, граничні умови (2) при деякому ненульовому наборі сталих $\{c_k^l\}$.

Виходячи з того, що на межі багатокутника мають місце рівності

$$H^j \cdot x + d_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

в якості x візьмемо $x = \tilde{H}^j t + e^j$, де \tilde{H}^j — вектори, ортогональні нормальним векторам H^j прямих, які обмежують багатокутник Ω . При цьому вектори e^j повинні мати координати:

$$e^j = \left(e_1^j; -\frac{H_1^j e_1^j + d_j}{H_2^j} \right).$$

Підставимо у вираз (10) $x = \tilde{H}^j t + e^j$:

$$u(t) = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n c_k^l \left(\tilde{a}^k \tilde{H}^j t + \tilde{a}^k e^j \right)^l + u_0. \quad (11)$$

Після зведення у степінь у виразі (11), з урахуванням граничних умов (2), приходимо до рівності:

$$\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^l \frac{c_k^l l!}{i! (l-i)!} \left(\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j t \right)^{l-i} \left(\tilde{a}^k \cdot e^j \right)^i + u_0 = 0. \quad (12)$$

В рівності (12) спрямуємо t до нуля, після чого отримаємо співвідношення, яке пов'язує сталі c_k^l , де $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, M$:

$$\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n c_k^l (\tilde{a}^k e^j)^l + u_0 = 0.$$

Очевидно, що це співвідношення призводить до обертання в нуль вільного члену в рівності (12). Отже,

$$\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{l-1} \frac{c_k^l l!}{i! (l-i)!} (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j t)^{l-i} (\tilde{a}^k \cdot e^j)^i = 0. \quad (13)$$

Розділимо рівність (13) на t , після чого перейдемо до границі при $t \rightarrow 0$. Зрозуміло, що в результаті одержимо співвідношення, яке зв'язує коефіцієнти при перших степенях t в (12):

$$\sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^n c_k^l l (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^k e^j)^{l-1} = 0.$$

З урахуванням цього співвідношення, в (13) анулюються лінійні за t доданки. Таким чином,

$$\sum_{l=2}^M \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{l-2} \frac{c_k^l l!}{i! (l-i)!} (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j)^{l-i} t^{l-i-1} (\tilde{a}^k \cdot e^j)^i = 0. \quad (14)$$

Далі, виконавши в (14) ділення на t і знову спрямувавши t до нуля, отримаємо співвідношення, яке зв'язує коефіцієнти при других степенях t в (12). Повторюючи цю процедуру скінченну кількість разів, на останньому кроці отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n c_k^M (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j)^M = 0. \quad (15)$$

Система (15) є однорідною системою з n невідомими c_1^M, \dots, c_n^M . Визначник системи співпадає з визначником, який знаходиться в лівій частині рівності (9), якщо в ньому переставити місцями рядки і стовпці з відповідними номерами. Оскільки такий визначник дорівнює нулю, система (15) має ненульовий розв'язок c_1^M, \dots, c_n^M .

Тепер повернемося до співвідношення, отриманого раніше співвідношення (15), а саме:

$$\sum_{k=1}^n c_k^{M-1} (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j)^{M-1} = - \sum_{k=1}^n c_k^M M (\tilde{a}^k \cdot \tilde{H}^j)^{M-1} (\tilde{a}^k \cdot e^j). \quad (16)$$

Оскільки визначник в лівій частині (16)

$$|A| = \begin{vmatrix} (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^1)^{M-1} & (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^1)^{M-1} & \dots & (\tilde{a}^n \cdot \tilde{H}^1)^{M-1} \\ (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^2)^{M-1} & (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^2)^{M-1} & \dots & (\tilde{a}^n \cdot \tilde{H}^2)^{M-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^n)^{M-1} & (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^n)^{M-1} & \dots & (\tilde{a}^n \cdot \tilde{H}^n)^{M-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

в силу твердження теореми, то матриця A є невідродженою, і розв'язок $c_1^{M-1}, \dots, c_n^{M-1}$ системи (16) однозначно визначається за вже знайденими c_1^M, \dots, c_n^M . Аналогічно обчислюються інші коефіцієнти $c_1^{M-2}, \dots, c_n^{M-2}, \dots, c_1^1, \dots, c_n^1$ функції $u(x)$. Таким чином, в результаті буде побудовано шуканий нетривіальний розв'язок задачі (1), (2).

3. Приклад (задача у трикутнику). Розглянемо наступну крайову задачу

$$u|_{\partial T} = 0$$

для рівняння третього порядку

$$Lu \equiv (a^1 \cdot \nabla) \cdot (a^2 \cdot \nabla) \cdot (a^3 \cdot \nabla) u = 0$$

з векторами $a^1 = (1, i)$, $a^2 = (1, -i)$, $a^3 = (1, 0)$ в рівносторонньому трикутнику T . Довжина сторони трикутника дорівнює 2, а вершини розташовані в точках $A(-1, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$, $C(1, 0)$ (див. рис. 2).

За побудовою нормальні вектори H^j , $j = 1, 2, 3$, до прямих, на яких лежать сторони трикутника T , мають компоненти:

$$H^1 = (\sqrt{3}, -1), \quad H^2 = (\sqrt{3}, 1), \quad H^3 = (0, 1).$$

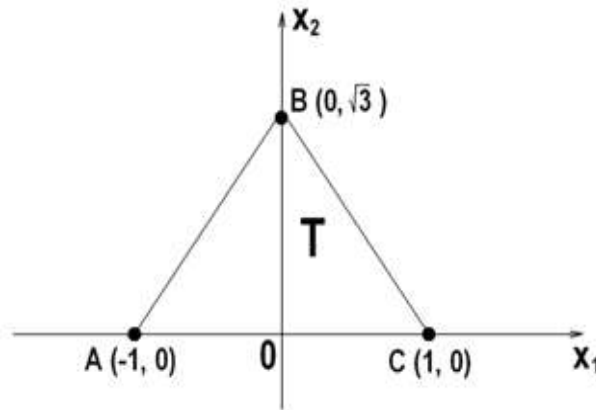


Рис. 2. Трикутник

Тоді відповідні ортогональні вектори \tilde{H}^j , $j = 1, 2, 3$, такі:

$$\tilde{H}^1 = (1, \sqrt{3}), \quad \tilde{H}^2 = (-1, \sqrt{3}), \quad \tilde{H}^3 = (-1, 0).$$

Зауважимо також, що

$$\tilde{a}^1 = (-i, 1), \quad \tilde{a}^2 = (i, 1), \quad \tilde{a}^3 = (0, 1).$$

Звертаючись до теореми, складемо визначник

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} (\sqrt{3} - i)^M & (\sqrt{3} + i)^M & i^M \\ (\sqrt{3} + i)^M & (\sqrt{3} - i)^M & (-i)^M \\ (\sqrt{3})^M & (\sqrt{3})^M & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(i\sqrt{3}\right)^M \cdot \left(1 + (-1)^M\right) \cdot \left(\left(\sqrt{3} + i\right)^M - \left(\sqrt{3} - i\right)^M\right).$$

Ясно, що $\Delta_M = 0$ при непарних M . З урахуванням обмеження на M , що приводиться в умові теореми, в даній ситуації $M \geq 3$.

Тепер побудуємо в явному вигляді поліноміальний розв'язок $u(x)$ третього степеня задачі $u|_{\partial T} = 0$ для рівняння третього порядку:

$$u(x) = c_1 (\tilde{a}^1 \cdot x)^3 + c_2 (\tilde{a}^2 \cdot x)^3 + c_3 (\tilde{a}^3 \cdot x)^3 + c_4 (\tilde{a}^1 \cdot x)^2 + c_5 (\tilde{a}^2 \cdot x)^2 + \\ + c_6 (\tilde{a}^3 \cdot x)^2 + c_7 (\tilde{a}^1 \cdot x) + c_8 (\tilde{a}^2 \cdot x) + c_9 (\tilde{a}^3 \cdot x) + c_{10}.$$

Використовуємо алгоритм, описаний при доведенні достатності. Система (15) в нашому випадку набуває вигляду:

$$\begin{cases} c_1 (\sqrt{3} - i)^3 + c_2 (\sqrt{3} + i)^3 + c_3 \sqrt{27} = 0, \\ c_1 (\sqrt{3} + i)^3 + c_2 (\sqrt{3} - i)^3 + c_3 \sqrt{27} = 0, \\ -c_1 + c_2 = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Визначник Δ_3 лінійної однорідної системи (17) алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів c_1, c_2, c_3 дорівнює нулю внаслідок приведених вище міркувань, тому система (17) має нескінченну кількість ненульових розв'язків. Наведемо один з нетривіальних наборів: $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 0)$.

Далі, скористаємося співвідношенням (16) і отримаємо:

$$c_4 (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j)^2 + c_5 (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j)^2 + c_6 (\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j)^2 = \\ = -3 \left[(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j)^2 (\tilde{a}^1 \cdot e^j) + (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j)^2 (\tilde{a}^2 \cdot e^j) \right].$$

Оскільки $e^j = \left(e_1^j; -\frac{H_1^j e_1^j + d_j}{H_2^j}\right)$, то, поклавши $e^1 = (1, 2\sqrt{3})$, $e^2 = (1, 0)$, $e^3 = (-1, 0)$, запишемо систему для знаходження коефіцієнтів c_4, c_5, c_6 :

$$\begin{cases} c_4 \cdot (\sqrt{3} - i)^2 + c_5 \cdot (\sqrt{3} + i)^2 + 3c_6 = \\ = -3 \left((\sqrt{3} - i)^2 \cdot (2\sqrt{3} - i) + (\sqrt{3} + i)^2 \cdot (2\sqrt{3} + i) \right), \\ c_4 \cdot (\sqrt{3} + i)^2 + c_5 \cdot (\sqrt{3} - i)^2 + 3c_6 = \\ = -3 \left((\sqrt{3} + i)^2 \cdot (-i) + (\sqrt{3} - i)^2 \cdot i \right), \\ -c_4 - c_5 = 3(-i + i). \end{cases} \quad (18)$$

Неважко переконатися, що розв'язком системи (18) є набір $(c_4, c_5, c_6) = (0, 0, -4\sqrt{3})$.

Наступну трійку коефіцієнтів (c_7, c_8, c_9) визначимо із співвідношення

$$3c_1 (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^1 \cdot e^j)^2 + 3c_2 (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^2 \cdot e^j)^2 + 3c_3 (\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^3 \cdot e^j)^2 + \\ + 2c_4 (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^1 \cdot e^j) + 2c_5 (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^2 \cdot e^j) + 2c_6 (\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j) (\tilde{a}^3 \cdot e^j) +$$

$$+c_7 (\tilde{a}^1 \cdot \tilde{H}^j) + c_8 (\tilde{a}^2 \cdot \tilde{H}^j) + c_9 (\tilde{a}^3 \cdot \tilde{H}^j) = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

яке після підстановки знайдених скалярних добутків і значень коефіцієнтів $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ перетвориться на лінійну однорідну систему:

$$\begin{cases} 3(\sqrt{3}-i)(2\sqrt{3}-i)^2 + 3(\sqrt{3}+i)(2\sqrt{3}+i)^2 - 48\sqrt{3} = \\ \quad = -(c_7(\sqrt{3}-i) + c_8(\sqrt{3}+i) + c_9\sqrt{3}), \\ 3(\sqrt{3}+i)(-i)^2 + 3(\sqrt{3}+i) \cdot i^2 = \\ \quad = -(c_7(\sqrt{3}+i) + c_8(\sqrt{3}-i) + c_9\sqrt{3}), \\ -3i + 3i = -(ic_7 - ic_8). \end{cases}$$

Розв'язком отриманої системи є трійка $(c_7, c_7, 6 - 2c_7)$, де c_7 довільне, тому, поклавши для визначеності $c_7 = 1$, матимемо один з розв'язків наступного вигляду: $(c_7, c_8, c_9) = (1, 1, 4)$.

Нарешті, виходячи з рівності

$$c_1 (\tilde{a}^1 \cdot e^j)^3 + c_2 (\tilde{a}^2 \cdot e^j)^3 + c_3 (\tilde{a}^3 \cdot e^j)^3 + c_4 (\tilde{a}^1 \cdot e^j)^2 + c_5 (\tilde{a}^2 \cdot e^j)^2 + \\ + c_6 (\tilde{a}^3 \cdot e^j)^2 + c_7 (\tilde{a}^1 \cdot e^j) + c_8 (\tilde{a}^2 \cdot e^j) + c_9 (\tilde{a}^3 \cdot e^j) + c_{10} = 0,$$

робимо висновок, що $c_{10} = 0$.

Таким чином, отримано ненульовий набір коефіцієнтів

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}) = (1, 1, 0, 0, 0, -4\sqrt{3}, 1, 1, 4, 0),$$

і побудовано нетривіальний поліноміальний розв'язок третього степеня задачі

$$Lu \equiv (a_1 \cdot \nabla)(a_2 \cdot \nabla)(a_3 \cdot \nabla)u = 0, \quad u|_{\partial T} = 0.$$

Запишемо побудований розв'язок $u(x)$ в остаточному вигляді:

$$u(x) = (-ix_1 + x_2)^3 + (ix_1 + x_2)^3 - 4\sqrt{3}(-x_1)^2 + (-ix_1 + x_2) + \\ + (ix_1 + x_2) - 4x_1 = 2x_2^3 - 6x_1^2x_2 - 4\sqrt{3}x_1^2 - 4x_1 + 2x_2.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі одержано критерій порушення єдиності розв'язку однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипового диференціального рівняння в багатокутнику. Порядок рівняння співпадає з кількістю сторін багатокутника. Доведення результату базується на принципі двоїстості рівняння-область. В якості прикладу побудовано нетривіальний розв'язок задачі в трикутнику для рівняння третього порядку.

Список використаної літератури

1. Эскин Г. И. Общие краевые задачи для уравнений главного типа в плоскости с угловыми точками. *Успехи математических наук*. 1963. Т. 18, вып. 3. С. 241–242.
2. Фуфаев В. В. К задаче Дирихле для областей с углами. *Доклады академии наук*. 1960. Т. 131, № 1. С. 37–39.
3. Волков Е.А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике. *Доклады академии наук*. 1963. Т. 147, № 1. С. 13–16.
4. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. *Труды Московского мат. общества*. 1967. Т. 16. С. 209–292.

5. Кириченко Е. В. О решении одной краевой задачи в многоугольнике. *Труды ИПММ*. 2007. Т. 13. С. 103–109.
6. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка. 2002. 316 с.
7. Винер И., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. Москва: Наука. 1964. 268 с.

Kyrychenko V. V., Lesina E. V. On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon.

The criterion of unique solvability of a homogeneous boundary value problem with one condition for an atypical differential equation in a polygon is obtained. The order of the equation coincides with the number of sides of the polygon. Proof of the result is based on the principle of duality equation-domain. The scheme for constructing a nontrivial solution is illustrated by the example of a problem in a triangle for a third-order differential equation.

Keywords: polygon, non-trivial solution, duality equation-domain, differential operator, homogeneous symbol.

References

1. Eskin, G. I. (1963). General boundary value problems for equations of the main type in a plane with corner points. *Advances in Mathematical Sciences*, 18(3), 241–242. [in Russian].
2. Fufayev, V. V. (1960). On the Dirichlet problem for domains with angles. *Reports of the Academy of Sciences*, 131(1), 37–39. [in Russian].
3. Volkov, E. A. (1963). On the solution of boundary value problems for the Poisson equation in a rectangle. *Reports of the Academy of Sciences*, 147(1), 13–16. [in Russian].
4. Kondratiev, V. A. (1967). Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angle points. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 16, 209–292. [in Russian].
5. Kirichenko, E. V. (2007). On the solution of a boundary value problem in a polygon. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics*, 13, 103–109. [in Russian].
6. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations*. Kyiv: Naukova dumka. [in Russian].
7. Paley, R., & Wiener, N. (1964) *Fourier transforms in the complex domain*. Moscow: Nauka. [in Russian].

Одержано 27.01.2022

УДК 512.628.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).69-74](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).69-74)**I. O. Melnyk**

Ivan Franko National University of Lviv,
Associate Professor of the Department of Algebra, Topology and Fundamentals of Mathematics,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
ivannamelnyk@yahoo.com, ivanna.melnyk@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7650-5190>

ON DIFFERENTIALLY PRIME IDEALS OF NOETHERIAN SEMIRINGS

The paper is devoted to the investigation of the notion of a **differentially prime ideal** of a differential commutative semiring (i. e. a semiring equipped with a derivation), and its interrelation with the notions of a **quasi-prime ideal** and a **primary ideal**. The notion of a semiring derivation is traditionally defined as an additive map satisfying the Leibnitz rule, i. e. a map $\delta: R \rightarrow R$ is called a derivation on R if $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ for any $a, b \in R$.

A differential ideal P of R is called a **differentially prime ideal** if for any $a, b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$, $ab^{(k)} \in P$ follows $a \in P$ or $b \in P$. It is proved that an ideal P of a semiring R is prime if and only if for any ideals I and J of R the inclusion $IJ \subseteq P$ follows $I \subseteq P$ or $J \subseteq P$. A **quasi-prime ideal** is a differential ideal of a semiring which is maximal among those ideals disjoint from some multiplicatively closed subset of a semiring.

In this paper we investigate some properties of such differentially prime ideals, in particular in case of differential Noetherian semirings. The paper consists of two main parts. The first part of the paper is devoted to establishing some properties of differentially prime ideals and gives some examples of such ideals. In the second part, the author investigates the connection existing between **quasi-prime ideals**, **primary ideals** and **differentially prime ideals** in differential Noetherian semirings. It is established that in a differential Noetherian semiring R a differential ideal I of R is differentially prime if and only if I is a quasi-prime ideal.

Keywords: semiring derivation, differential semiring, differential semiring ideal, differentially prime ideal, quasi-prime ideal, primary ideal, Noetherian semiring.

1. Introduction. The notion of a derivation for semirings, defined in [1] as an additive map satisfying the Leibnitz rule, as well as the notion of a differential semiring recently received a lot of attention in [2–4]. Different properties of semiring derivations, differential semirings, ideals of differential semirings were investigated. Quasi-prime ideals of differential rings were introduced and studied in [5, 6], its generalizations for differential modules, semirings and semimodules were studied in [3, 4, 7, 8]. Differentially prime ideals were introduced in [9] for differential, not necessarily commutative, rings. Differentially prime submodules of modules over associative rings were studied in [10]. In [11] the author studied the relations between differentially prime and quasi-prime submodules of differential modules. The objective of this paper is to investigate some properties of differentially prime ideals of differential commutative semirings. We aim to find the connections between differentially prime ideals and other types of ideals of differential semirings with the ascending chain condition for their ideals (Noetherian semirings), in particular quasi-prime ideals.

For the sake of completeness some definitions and properties used in the paper will be given here. For more information see [1, 12–14].

Throughout the paper \mathbb{N} denotes the set of positive integers and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ the set of non-negative integers. Let R be a nonempty set and let $+$ and \cdot be binary operations on R . An algebraic system $(R, +, \cdot)$ is called a *semiring* if $(R, +, 0)$ is a commutative monoid, (R, \cdot) is a semigroup and multiplication distributes over addition from either side. A semiring $(R, +, \cdot)$ is said to be *commutative* if \cdot is commutative on R . A semiring which is not a ring is called a *proper semiring*.

Zero $0_R \in R$ is called (*multiplicatively*) *absorbing* if $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0$ for all $a \in R$. Note that $0_R \in R$ cannot be additively absorbing when R contains more than one element. An element $1_R \in R$ is called *identity* if $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a$ for all $a \in R$. A subset S of R closed under addition and multiplication is called a *subsemiring* of R .

A *left ideal* of a semiring R is a nonempty set $I \neq R$ which is closed under $+$ and satisfying the following conditions $ra \in I$ for all $a \in I, r \in R$. Similarly we can define right ideal and two-sided ideal of a semiring. An ideal I of a semiring R is called *subtractive* (or *k-ideal*) if $a \in I$ and $a + b \in I$ follow $b \in I$.

An element $a \in R$ is called *additively cancellable* if $a + b = a + c$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. Denote by $K^+(R)$ the set of all additively cancellable elements of R . A semiring R is called *additively cancellative* if every element of R is additively cancellable, i. e. $K^+(R) = R$. An element $a \in R$ is called *additively idempotent* if $r + r = r$. Denote by $I^+(R)$ the set of all additively idempotent elements of R . A semiring R is called *additively idempotent* if every element of M is additively idempotent, i. e. $I^+(R) = R$.

Let R be a semiring. A map $\delta: R \rightarrow R$ is called a *derivation on R* [1] if $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ and $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ for any $a, b \in R$.

A semiring R equipped with a derivation δ is called a *differential semiring* with respect to the derivation δ (or *δ -semiring*), and denoted by (R, δ) [2]. An ideal I of the semiring R is called *differential* if $d(I) \subseteq I$. Any differential semiring has two trivial differential ideals: $\{0_R\}$ and itself.

Throughout the paper we consider commutative semirings.

2. Quasi-prime differential ideals and *dmsp*-semirings. Let A be a subset of R . Denote the smallest differential ideal containing the set A by $[A]$, the smallest radical differential ideal containing A by $\{A\}$, the smallest differential *k-ideal* containing the set A by $|A|$, and the smallest radical differential *k-ideal* containing A by $\langle A \rangle$. A non-empty subset S of the semiring R is called a *multiplicatively closed subset* of R if $ab \in S$ for every $a, b \in S$.

Let S be a multiplicatively closed subset of $R, 0 \notin S$. If I is a radical differential *k-ideal* of R maximal among radical differential *k-ideals* disjoint from S , then I is prime. If I is any radical differential subtractive ideal disjoint from S , then there exists a prime differential *k-ideal* P containing I which is disjoint from S . If I is a radical differential *k-ideal* of R , then it is an intersection of all the prime differential *k-ideals* containing I . [3]

Definition 1. A differential ideal I of the semiring R is called *quasi-prime* if there exists a multiplicatively closed subset S of R such that I is maximal differential ideal such that $I \cap S = \emptyset$.

For a subset A of R the set $A_{\#} = \{a \in R \mid a^{(n)} \in A \text{ for all } n \in \mathbb{N}_0\}$ is called the *differential* of A .

Examples. Any prime differential ideal of R is quasi-prime. If Q is a maximal differential ideal of R then Q is quasi-prime. In any differential semiring R for any prime ideal P of R the differential ideal $P_{\#}$ is quasi-prime. [3, 4]

Definition 2. A differential semirings R is called a *dmsp*-semiring (or a Keigher semiring) if for any prime k -ideal P of R , $P_{\#}$ is prime.

Examples. Every differentially trivial semiring is a *dmsp*-semiring. $\{0\}$ is a *dmsp*-semiring. Any differential semifield is a *dmsp*-semiring. Any Keigher ring is a *dmsp*-semiring.

In a *dmsp*-semiring maximal among differential k -ideals are prime. [3, 4] In a *dmsp*-semiring the radical of an arbitrary differential k -ideal is the intersection of all the prime differential k -ideals containing I . [3]

3. Differentially prime ideals of semirings. We investigate some properties of differentially prime ideals of differential commutative semirings.

Definition 3. A differential k -ideal P of R is called differentially prime if for any $a, b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$, $ab^{(k)} \in P$ follows $a \in P$ or $b \in P$.

If the ideal I is quasi-prime, then I is a differentially prime ideal of R .

Definition 4. Let $S \neq \emptyset$ be a subset of R . A subset S is called d -multiplicatively closed if for any $a, b \in S$ there exists $n \in \mathbb{N}_0$ such that $ab^{(n)} \in S$.

If a subset is d -multiplicatively closed, then it is multiplicatively closed.

Proposition 1. An ideal I of R is differentially prime if and only if $R \setminus I$ is d -multiplicatively closed.

Proof. Suppose I is a differentially prime ideal of R and there exist $a, b \notin I$ such that $ab^{(n)} \in I$ for all $n \in \mathbb{N}_0$. Then $a \in I$ or $b \in I$, which contradicts to $a, b \in R \setminus I$. Conversely, suppose $R \setminus I$ is d -multiplicatively closed, and for all $a, b \in R$ and all $n \in \mathbb{N}_0$, $ab^{(n)} \in I$, $a, b \notin I$. Then $ab^{(k)} \notin I$ for some $k \in \mathbb{N}_0$, which is a contradiction.

Theorem 1. For a differential ideal $P \neq R$ of R , the following conditions are equivalent:

- 1) For any $a, b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$, $ab^{(k)} \in P$ follows $a \in P$ or $b \in P$;
- 2) For any $a, b \in R$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, $a^{(l)}b^{(k)} \in P$ follows $a \in P$ or $b \in P$;
- 3) For any $a, b \in R$, $[a] \cdot [b] \subseteq P$ follows $a \in P$ or $b \in P$;
- 4) For any differential ideals I and J of R , $IJ \subseteq P$ follows $I \subseteq P$ or $J \subseteq P$.

Proof. (1 \implies 2) Suppose $a^{(l)}b^{(k)} \in P$ for any $k, l \in \mathbb{N}_0$. Denote $t = l + k$. For $t = 0$ we have $a^{(0)}b^{(0)} = ab \in P$. Therefore, $\delta(ab) \in P$. For a k -ideal P , $(ab)' = a'b + ab' \in P$, $ab' \in P$ follow $a'b \in P$.

Consider $(ab^{(k)})' = a'b^{(k)} + ab^{(k+1)}$ for all $k \in \mathbb{N}_0$. Similarly, $(ab^{(k)})' \in P$, $ab^{(k+1)} \in P$ follow $a'b^{(k)} \in P$. Then from $(a'b^{(k-1)})' = a''b^{(k-1)} + a'b^{(k)} \in P$, $a'b^{(k)} \in P$ and the subtractiveness of P we obtain $a''b^{(k)} \in P$, etc. (2 \implies 1) Obvious when $l = 0$.

(2 \implies 3) Conversely, if $[a] \cdot [b] \subseteq P$ then $\sum_{k, l \in \mathbb{N}_0} Ra^{(l)}b^{(k)} \subseteq P$, in particular $a^{(l)}b^{(k)} \in P$. Hence, $a \in P$ or $b \in P$. (3 \implies 2) It is clear that $[a] = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} Ra^{(l)}$, $[b] = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} Rb^{(k)}$, and so $[a] \cdot [b] = \sum_{k, l \in \mathbb{N}_0} Ra^{(l)}b^{(k)}$. If $a^{(l)}b^{(k)} \in P$, then $\sum_{k, l \in \mathbb{N}_0} Ra^{(l)}b^{(k)} \subseteq P$. Therefore, $[a] \cdot [b] \subseteq P$, which follows $a \in P$ or $b \in P$.

(3 \implies 4). Suppose $I \not\subseteq P$ and $J \not\subseteq P$. There exists $a \in I$, $a \notin P$, and $b \in J$, $b \notin P$. Clearly, $[a] \cdot [b] \subseteq IJ \subseteq P$. Therefore, $a \in P$ or $b \in P$, which is a contradiction. (4 \implies 3) is obvious.

Theorem 2. *Let S be d -multiplicatively closed subset of R . If the ideal I is d -maximal in $R \setminus S$, then I is a differentially prime ideal of R .*

Proof. Suppose that there exist $a, b \in R$ and $n \in \mathbb{N}_0$ such that $ab^{(n)} \in N$, $a, b \notin P$. It is clear that $P \subset P + [a]$ and $P \subset P + [b]$. Since P is maximal among the differential ideals not meeting some d -multiplicatively closed subset S , $(P + [a]) \cap S \neq \emptyset$, $(P + [b]) \cap S \neq \emptyset$. Therefore there exist $a, b \in S$ such that $a \in P + [a]$ and $b \in P + [b]$. On the other hand, since S is a d -multiplicatively closed subset, then $a, b \in S$ follows the existence of $n \in \mathbb{N}_0$ such that $ab^{(n)} \in S$. Therefore $b^{(n)} \in (P + [a]) \cap S$. Then $ab^{(n)} \in (P + [a]) \cdot (P + [b]) \subseteq P$. Therefore, $ab^{(n)} \in P \cap S \neq \emptyset$, but it contradicts the assumption that $S \cap P = \emptyset$. Hence P is a differentially prime ideal.

4. Quasi-prime and differentially prime ideals in Noetherian semirings.

Here we study the interrelationship between differentially prime, quasi-prime and primary ideals of differential Noetherian semirings.

Proposition 2. *Let $a \in R$. There exists $n \in \mathbb{N}_0$ such that $(I : a^n)$ is a differential ideal and $(I : a^n) = (I : a^k)$ for any $k \geq n$.*

Proof. Denote $U = \cup_{l=0}^{\infty} (I : a^l) \subseteq R$. For any $b \in U$ there exists $l \in \mathbb{N}_0$ such that $b \in (I : a^l)$. Then $a^l b \in I$. Since I is a differential ideal of R , then $\delta(a^l b) \in I$. From $\delta(a^l b) = la^{l-1} \delta a b + a^l \delta b \in I$ and subtractiveness of I we have that $a^l \delta(b) \in I$. Thus, $\delta(b) \in (I : a^l)$, which follows $\delta(b) \in U$.

The ideals $(I : a^n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, form a chain, therefore there exists $n \in \mathbb{N}_0$ such that $(I : a^n) = (I : a^k)$ for any $k \geq n$.

Theorem 3. *Let R be a Noetherian semiring. If the ideal P of R is differentially prime, then P is a primary ideal of R .*

Proof. Suppose $ab \in P$. For an ideal P we have that $a^n b \in P$, which follows $b \in (P : a^n)$. By Proposition 2, $[b] \subseteq (P : a^n)$. From $a^n b \in P$ we also have that $a^n \in (P : [b])$. Therefore, $[a^n] \subseteq (P : [b])$. Then $[a^n][b] \subseteq P$. By Theorem 1, we have $[a^n] \subseteq P$ or $[b] \subseteq P$. Hence, $a^n \in P$ or $b \in P$, i. e. P is a primary ideal.

Theorem 4. *For every differential ideal I of the Noetherian semiring R the following are equivalent:*

- 1) I is a quasi-prime ideal;
- 2) $I = P_{\#}$ for some prime ideal P of R ;
- 3) I is a differentially prime ideal.

Proof. (1) \implies (2) Let I be a quasi-prime ideal of R , i. e. maximal among differential ideals disjoint from the multiplicatively closed subset S , and let K be maximal among ordinary ideals disjoint from S and containing I . Then K is prime ideal of R as each d -multiplicatively closed subset is multiplicatively closed. Show that $I = K_{\#}$. Since I is a differential ideal of R , then $I \subseteq K_{\#}$. The converse inclusion implies due to maximality of the differential ideal I among those disjoint from S , because $K_{\#}$ is disjoint from S and it is differential ideal of R .

(2) \implies (3) Let $I = P_{\#}$ for some prime ideal of R of M . Then I is maximal among differential ideals disjoint from P . Let $S = R \setminus P$. Assuming that all the derivations are trivial, we see that S is a multiplicatively closed subset of R . Denote by K the intersection of all d -multiplicatively closed subsets of R , which contain S .

Then S is the least d -multiplicatively closed subset of those containing S . Hence I is a differentially prime ideal of R because of 1. It remains to verify that $I = R \setminus K$. Since $R \setminus K$ is disjoint from S , then $R \setminus K \subseteq P$, and due to the fact that $R \setminus K$ is a differential ideal of R , we have the inclusion $R \setminus K \subseteq I$. Given the minimality of the set K , we obtain that the set $R \setminus K$ is a maximal ideal among the differential ideals of I . Hereby $R \setminus K = N$.

(3) \implies (1) Let I be some differentially prime ideal of R . Then, by Proposition 1, the set $R \setminus I$ is a d -multiplicatively closed subset of the semiring R . Since I is maximal differential ideal disjoint from $R \setminus I$, then, by definition, it is quasi-prime.

5. Conclusions. This paper is devoted to investigating differentially prime ideals of differential semirings. We continue studying the interrelationship between different types of differential ideals of differential semirings, in particular differentially prime, quasi-prime and primary ideals of differential Noetherian semirings, i. e. differential semirings with the ascending chain conditions for their ideals. The obtained results can be used in the further study of differential ideals.

References

1. Golan, J. S. (1999). *Semirings and their Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
2. Chandramouleeswaran, M., & Thiruvani, V. (2010). *On derivations of semirings. Advances in Algebra, 1*, 123–131.
3. Melnyk, I. (2016). On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math., 82*, 163–173.
4. Melnyk, I. (2020). On quasi-prime differential semiring ideals. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat., 37 (2)*, 63–69.
5. Keigher, W. (1977). Prime differential ideals in differential rings. *Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press*, 239–249.
6. Keigher, W. F. (1978). Quasi-prime ideals in differential rings. *Houston J. Math., 4 (3)*, 379–388.
7. Nowicki, A. (1979). The primary decomposition of differential modules. *Commentationes Mathematicae, 21*, 341–346.
8. Nowicki, A. (1982). Some remarks on d -MP-rings. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics, 30 (7-8)*, 311–317.
9. Khadjiev, Dj., & Çallıalp, F. (1996). On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings. *Tr. J. of Math., 4 (20)*, 571–582.
10. Melnyk, I. (2008). *Sdm*-systems, differentially prime and differentially primary modules. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat, 16*, 110–118. [in Ukrainian].
11. Melnyk, I. (2008). Differentially prime, quasi-prime and Δ -MP-modules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica, 3 (58)*, 112–115.
12. Hebisch, U., & Weinert, H. J. (1998). Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science. *World Scientific*.
13. Kaplansky, I. (1999). Introduction to differential algebra. *Graduate Texts in Mathematics, 189*, New York: Springer-Verlag.
14. Kolchin, S. E. (1973). Differential Algebra and Algebraic Groups. *New York: Academic Press*.

Мельник І. О. Про диференціально-первинні ідеали нетерових напівкілець.

Ця стаття присвячена дослідженню поняття диференціально-первинного ідеалу в диференціальному комутативному напівкілці (напівкілці разом із заданому на ньому диференціюванням) та його зв'язками з поняттями квазіпервинного ідеалу та примарного ідеалу. Поняття диференціювання напівкілця традиційно визначають як адитивне відображення, яке задовольняє правило Лейбніца, тобто відображення $\delta: R \rightarrow R$ називають диференціюванням напівкілця R , якщо $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$ і $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ для будь-яких $a, b \in R$.

Диференціальний ідеал P напівкілця R називають диференціально-первинним

ідеалом, якщо для будь-яких $a, b \in R$, $k \in \mathbb{N}_0$, з $ab^{(k)} \in P$ випливає, що $a \in P$ або $b \in P$. Доведено, що ідеал P напівкільця R є диференціально-первинним тоді і тільки тоді, коли для ідеалів I та J напівкільця R з включення $IJ \subseteq P$ випливає, що $I \subseteq P$ або $J \subseteq P$. Квазіпервинний ідеал напівкільця — це диференціальний ідеал, максимальний серед диференціальних ідеалів, що мають порожній перетин з деякою мультиплікативно-замкненою підмножиною даного напівкільця.

У цій статті досліджуються деякі властивості диференціально-первинних ідеалів, зокрема таких ідеалів в диференціальних нетерових напівкільцях.

Стаття складається з двох основних частин. У першій частині встановлено деякі властивості диференціально-первинних ідеалів та подано приклади таких ідеалів. У другій частині статті автор досліджує зв'язки, що існують між поняттями квазіпервинний, примарний ідеал та диференціально-первинний ідеал в нетерових диференціальних напівкільцях. Встановлено, що в диференціальному нетеровому напівкільці R диференціальний ідеал I напівкільця R є диференціально-первинним ідеалом тоді і тільки тоді, коли I є квазіпервинний ідеал.

Ключові слова: диференціювання напівкільця, диференціальне напівкільце, диференціальний ідеал напівкільця, диференціально-первинний ідеал, квазіпервинний ідеал, примарний ідеал, нетерове напівкільце.

Список використаної літератури

1. Golan, J. S. *Semirings and their Applications*. 1999. Kluwer Academic Publishers, 1999.
2. Chandramouleeswaran, M., Thiruvani, V. *On derivations of semirings*. *Advances in Algebra* 2010. 1. P. 123–131.
3. Melnyk, I. On the radical of a differential semiring ideal. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.* 2016. 82. P. 163–173.
4. Melnyk, I. On quasi-prime differential semiring ideals. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat.* 2020. 37 (2). P. 63–69.
5. Keigher, W. Prime differential ideals in differential rings. *Contributions to Algebra, A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin, Academic Press*. (1977). P. 239–249.
6. Keigher, W. F. Quasi-prime ideals in differential rings. *Houston J. Math.* 1978. 4 (3). P. 379–388.
7. Nowicki, A. The primary decomposition of differential modules. *Commentationes Mathematicae*. 1979. 21. P. 341–346.
8. Nowicki, A. Some remarks on $d - MP$ -rings. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*. 1982. 30 (7-8). P. 311–317.
9. Khadjiev, Dj., Çalhalp, F. On a differential analog of the prime-radical and properties of the lattice of the radical differential ideals in associative differential rings. *Tr. J. of Math.* 1996. 4 (20). P. 571–582.
10. Melnyk, I. *Sdm*-системи, диференціально-первинні та диференціально-примарні модулі. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2008. Вип. 1(16). С. 110–118.
11. Melnyk, I. Differentially prime, quasi-prime and $\Delta - MP$ -modules. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Moldova. Matematica*. 2008. 3 (58). P. 112–115.
12. Hebisch, U., Weinert, H. J. *Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science*. *World Scientific*. 1998.
13. Kaplansky, I. Introduction to differential algebra. *Graduate Texts in Mathematics, 189, New York: Springer-Verlag*. 1999.
14. Kolchin, S. E. *Differential Algebra and Algebraic Groups*. *New York: Academic Press*. 1973.

Одержано 15.04.2022

А. М. Тегза¹, Г. І. Сливка-Тилищак², М. С. Герич³,
О. О. Погоріляк⁴, Т. В. Боярищева⁵

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5310-4311>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, доцент
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9634-5254>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.pogoriliak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0501-4861>

⁵ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
tetjana.bojarishcheva@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2899-4900>

МОДЕЛЮВАННЯ ГАУССОВОГО СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З НЕОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ З ВИКОРИСТАННЯМ ТЕОРІЇ $L_2(\Omega)$ -ПРОЦЕСІВ

Робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко. Розглянуто застосування теорії $L_2(\Omega)$ -процесів при моделюванні гауссових стаціонарних випадкових процесів. Використовуючи оцінки норм та деякі властивості і теореми $L_2(\Omega)$ -процесів, для моделі одержано розбиття спектрального проміжку, при якому модель наблизатиме процес з заданими точністю і надійністю в рівномірній метриці. У середовищі Python було змодельовано процес для часткового випадку.

Ключові слова: $L_2(\Omega)$ -процеси, гауссів стаціонарний випадковий процес, модель процесу, точність, надійність моделі.

1. Вступ. Однією з актуальних задач теорії випадкових процесів є побудова математичної моделі, а також дослідження її загальних властивостей. На сьогоднішній день активно розроблюються загальні методи чисельного моделювання випадкових процесів, а також швидко зростає область застосування стохастичних моделей, зокрема в радіотехніці, електроніці, у актуарній математиці і т.д.

Оскільки більшість фізичних явищ залежить від багатьох факторів, то при їх моделюванні намагаються відтворити процеси, що є сумою великого числа випадкових факторів, тобто, згідно з центральною граничною теоремою, гауссові або близькі до них процеси. Тому найбільш поширеними і найбільш розробленими є методи моделювання гауссових випадкових процесів і полів. Ряд нових напрямків у галузі моделювання випадкових процесів та полів розроблено Г. О. Михайловим, Ю. В. Козаченком та їх учнями [1]- [3], [6]. Дана робота присвячена подальшому розвитку теорії моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів за методом, який запропонував і розвивав Ю. В. Козаченко. У даній роботі розглянуто простір Орлича, що породжується функцією $U(x) = |x|^2$. Випадковий процес у цьому просторі називають $L_2(\Omega)$ -процесом. Використовуючи властивості цього процесу, побудовано модель гауссового стаціонарного процесу з заданими точністю і надійністю і для часткового випадку комп'ютерно змодельовано процес.

2. Основний результат. Розглянемо гауссовий стаціонарний дійсний центрований неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $X(t)$ з коваріаційною функцією:

$$r(\tau) = EX(t + \tau)X(t) = \int_0^{\infty} \cos \lambda t dF(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ – неперервна спектральна функція цього процесу.

Тоді випадковий процес має зображення

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos \lambda t d\eta_1(\lambda) + \int_0^{\infty} \sin \lambda t d\eta_2(\lambda),$$

де $\eta_1(\lambda)$ та $\eta_2(\lambda)$ такі незалежні центровані гауссові випадкові процеси, що $E(\eta_i(\lambda_2) - \eta_i(\lambda_1))^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$, $i = 1, 2$.

За модель процесу візьмемо випадковий процес

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^M [\eta_{k1} \cos \zeta_k t + \eta_{k2} \sin \zeta_k t], \quad (1)$$

де η_{l1} , η_{m2} , ζ_k – незалежні при всіх l, m та k випадкові величини, $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M+1}\}$ – таке розбиття проміжку $[0, +\infty)$, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_{M+1} = +\infty$, η_{k1} , η_{k2} – гауссові випадкові величини, такі що $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$, ζ_k – випадкові величини, що приймають значення на відрізках $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$, та якщо $b_k^2 > 0$, то

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Якщо $b_k^2 = 0$, то $\eta_{k1} = 0$, $\eta_{k2} = 0$, $\zeta_k = 0$ з ймовірністю одиниця.

Означення 1. [1] Випадкову величину ξ називатимемо субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E \exp \{ \lambda \xi \} \leq \exp \left\{ \frac{a^2 \lambda^2}{2} \right\}.$$

Клас всіх субгауссових величин будемо позначати $Sub(\Omega)$.

Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathcal{T}\}$ називається субгауссовим процесом, якщо для всіх $t \in \mathcal{T}$, $X(t)$ – субгауссова випадкова величина та $\sup_{t \in \mathcal{T}} \tau(X(t)) < \infty$.

Нехай $\eta_M(t) = X(t) - X_M(t)$. Тоді

$$\eta_M(t) = \sum_{k=0}^M \left(\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\cos \lambda t - \cos \zeta_k t) d\eta_1(\lambda) + \int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} (\sin \lambda t - \sin \zeta_k t) d\eta_2(\lambda) \right). \quad (2)$$

Лема 1. [4] Нехай $\|\xi\|_{L_p} = (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, $\xi_i \in L_p$ – послідовність незалежних випадкових величин з $E\xi_i = 0$, $i = \overline{1, \infty}$. Тоді

$$\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|_{L_p}^2 \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|_{L_p}^2 \right),$$

де

$$C_p = 8 \left(\frac{(p+1)}{2\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{2}{p}}.$$

З досліджень дисертації [7] для часткового випадку $L_2(\Omega)$ -процесу сформулюємо леми:

Лема 2. Якщо $\int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty$, то для субгауссового випадкового процесу $\eta_M(t)$ справедлива нерівність

$$\|\eta_M(t)\|_{L_2} \leq 2(C_2 \tilde{\Delta}_2)^{\frac{1}{2}} T \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 F(\lambda_M) + \left(\int_{\lambda_M}^\infty |\lambda - \lambda_M|^2 dF(\lambda) \right)^{\frac{2}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Лема 3. Якщо $\int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda) < \infty$, $p \geq 2$, то справедливе співвідношення

$$\|\eta_M(t) - \eta_M(s)\|_{L_2} \leq 2(C_2 \tilde{\Delta}_2)^{\frac{1}{2}} |s - t| \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 (1 + \lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^\infty |3u - \lambda_M|^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Обчислимо коефіцієнти для нашого випадку: $C_2 = 8 \left(\frac{\Gamma(3)}{2\sqrt{\pi}} \right) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$;

$\tilde{\Delta}_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2/2} dt$, провівши заміну змінних, матимемо $\tilde{\Delta}_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 1$.

Справедливою буде теорема:

Теорема 1. Якщо в моделі $X_M(t)$ розбиття Λ таке, що виконуються нерівності:

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 dF(\lambda) < \infty, \quad (5)$$

$$\sqrt{TL\varepsilon_0} + \sqrt{2\varepsilon_0} \leq \frac{\delta}{3} \sqrt{\frac{2\beta}{3}}, \quad (6)$$

де $L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 (1 + \lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (3u - \lambda_M)^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}$, а $\varepsilon_0 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} T \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (u - \lambda_M)^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}$, то існує випадковий гауссієв процес $X(t)$ до якого дана модель $X_M(t)$ буде наближатись з надійністю $1 - \beta$, $0 < \beta < 1$ та точністю $\delta > 0$ в рівномірній метриці.

Доведення. Випадковий процес $X(t)$ і його модель, а отже і $\eta_M(t)$ є сепарабельними неперервними з ймовірністю одиниця процесами.

Якщо виконується умова (6), то з лемі 2 випливає, що процес $\eta_M(t) \in L_2(\Omega)$ -процесом (оскільки $\varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_M(t)\|_{L_p} < \infty$).

А для $L_2(\Omega)$ -процесу справедлива нерівність:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_M(t)| > \delta \right\} \leq \frac{\tilde{B}_2^2}{\delta^2},$$

де $\tilde{B}_2 = \inf_{0 \leq t \leq T} (E|\eta_M(t)|^2)^{\frac{1}{2}} + \inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\theta 2\varepsilon_0} N^{\frac{1}{2}}(\varepsilon) d\varepsilon$, $\varepsilon_0 = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_M(t)\|_{L_2}$.

Оскільки з [5] $N(\varepsilon) = \frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1$, $\sigma(h) = \sup_{|t-s|<h} \|\eta_M(t) - \eta_M(s)\|_{L_2}$.

В нашому випадку $\sigma(h) = hL$, де L визначено в лемі 2:

$$L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M} \right)^2 (1 + \lambda_M T)^2 F(\lambda_M) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (3u - \lambda_M)^2 dF(u) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h}{L}, \quad \inf_{0 \leq t \leq T} (E|\eta_M(t)|^2)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{2\theta\varepsilon_0} \left(\frac{TL}{2\varepsilon} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{\theta(1-\theta)} \left[\left(\frac{TL}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (\theta\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}} 2 + 2\theta\varepsilon_0 \right] \\ &\leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{\theta(1-\theta)} \left[\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0 \right] \end{aligned}$$

Мінімум досягається при $\theta = \frac{1}{3}$, тому

$$B_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left[\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0 \right].$$

$$\text{Тоді} \quad P\left\{\sup_{0 < t \leq T} |\eta_M(t)| > \delta\right\} \leq \frac{27}{4\delta^2} \left(\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0\right)^2.$$

Оскільки можна підібрати такі λ_M та M , щоб ε_0 та L були зроблені як завгодно малими, то існує таке розбиття Λ , для якого згідно означення збіжності моделі до процесу з певною точністю і надійністю повинна виконуватись нерівність

$$\frac{27}{4\delta^2} \left(\sqrt{2TL\varepsilon_0} + 2\varepsilon_0\right)^2 \leq \beta.$$

Розглянемо частковий випадок цієї теореми.

Візьмемо таку спектральну функцію: $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$. Тоді умова (5) виконується:

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda} d\lambda = \Gamma(3) = 2$$

Знайдемо коефіцієнти нерівності (6), поклавши $T = 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (u - \lambda_M)^2 e^{-u} du \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + 2e^{-\lambda_M} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 + \lambda_M)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + \int_{\lambda_M}^{\infty} (3u - \lambda_M)^2 e^{-u} du \right]^{\frac{1}{2}}$$

Обчисливши визначений інтеграл у другому доданку, матимемо:

$$L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left[\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 + \lambda_M)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + e^{-\lambda_M} (4\lambda_M^2 + 12\lambda_M + 3) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Підставимо результати у (6), матимемо:

$$\begin{aligned} &\sqrt[4]{\left(\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + \frac{2}{e^{\lambda_M}}\right) \left(\left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 + \lambda_M)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + \frac{4\lambda_M^2 + 12\lambda_M + 3}{e^{\lambda_M}}\right) +} \\ &\quad + \sqrt{2 \left(\frac{\lambda_M}{M}\right)^2 (1 - e^{-\lambda_M}) + 4e^{-\lambda_M}} \leq \frac{\delta}{12} \sqrt{\frac{\beta\sqrt{\pi}}{3}} \end{aligned}$$

Підставляючи різні значення точності і надійності, можемо одержати залежність числа M доданків моделі процесу від довжини спектру λ_M . Для розв'язання цієї нерівності складено програму на мові Python. Результати подані у зведеній таблиці 1.

Комп'ютерно змодельюємо процес (1) для одного з часткових випадків, використовуючи мову програмування Python.

Для цього потрібно змодельювати компоненти моделі (1), тобто гауссові випадкові величини η_{k1} , η_{k2} , для яких $E\eta_{k1} = E\eta_{k2} = 0$, $E\eta_{k1}^2 = E\eta_{k2}^2 = F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k) = b_k^2$ та випадкові величини ζ_k , що приймають значення на відрізках

Таблиця 1.

Залежність числа M від точності і надійності моделі.

δ	β	λ_M	M
0.1	0.1	25	80 416
		50	211 226
		100	565 982
0.01	0.1	25	820 756
		50	2 111 936
		100	5 659 720
0.01	0.01	25	3 276 316
		50	6 678 481
		100	17 897 584

$[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ з функцією розподілу

$$F_k(\lambda) = P\{\zeta_k < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_k)}{F(\lambda_{k+1}) - F(\lambda_k)}.$$

Для моделювання випадкових величин ζ_k використано метод Смірнова, а для моделювання нормально розподілених випадкових величин, використано готові функції бібліотеки `numpy.random`; часову змінну t взято з проміжку $[0, 1]$. Одержимо графічне представлення процесу на рис. 1.

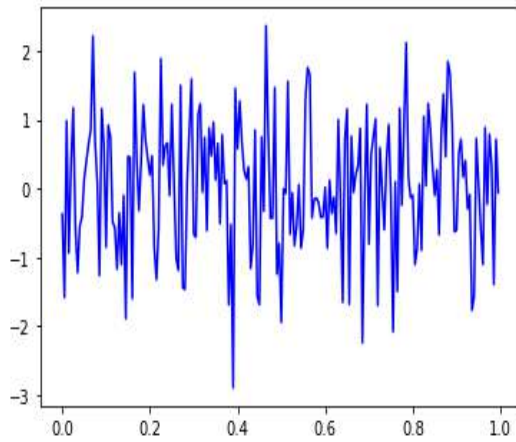


Рис. 1. Модель випадкового процесу, при $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$.

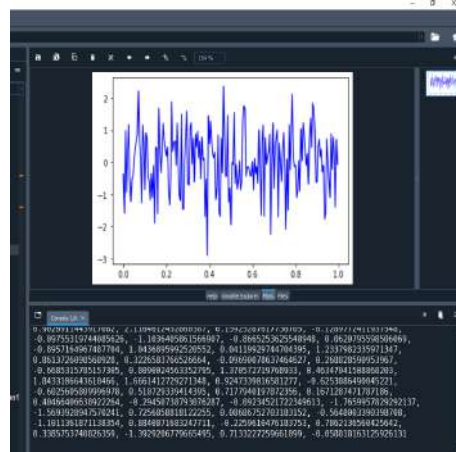


Рис. 2. Скріншот результату.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі побудовано модель гауссового стаціонарного випадкового процесу з заданими точністю і надійністю у рівномірній метриці, використовуючи теорію $L_2(\Omega)$ -процесів. Для часткового випадку спектральної функції та деяких значень точності і надійності одержано таблицю значень числа M в залежності від величини спектрального проміжку. Проаналізувавши її, видно, що із покращенням точності і надійності, зростає кількість доданків у моделі (1). Для точності

$\delta = 0, 1$, надійності $1 - \beta = 0, 9$ і спектральної функції $F(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}$, одержано графічне представлення процесу (див. рис. 1).

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI*.
2. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. (1999). Моделювання випадкових процесів. *К.: Київський університет*, 223 с.
3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О. (1988). Точність моделювання випадкових процесів в нормах просторів Орлича І. *Теор. ймовірн. та матем. стат.*, № 58, С. 45–60.
4. Мацак И. К., Пличко А. Н. (1988). Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах. *Теория вероятн. и матем. статист.*, № 38, С. 81–86.
5. Тегза А. М. (2001). Про точність та надійність деяких моделей гауссових процесів з обмеженим спектром. *Науковий вісник Ужгородського університету*, Вип. 6, С. 125–131.
6. Джуліано Антоніні Р., Козаченко Ю. В., Тегза А. М. (2002). Нерівності для норм субгауссових векторів та точність моделювання випадкових процесів. *Теор. ймовірност. та матем. статист.*, Вип. 66, С. 58–66.
7. Tegza A. M. (2003). Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів. *Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук*.

Tegza A. M., Slyvka-Tilishchak G. I., Gerich M. S., Pogorilyak O. O., Bojarishcheva T. V. Modeling of Gaussian stationary random process with unlimited spectrum using the theory of $L_2(\Omega)$ - processes.

The work is devoted to the further development of the theory of modeling of Gaussian stationary random processes by the method proposed and developed by Yu. V. Kozachenko. The application of the theory of $L_2(\Omega)$ - processes in the modeling of Gaussian stationary random processes is considered. Using estimates of norms and some properties and theorems of $L_2(\Omega)$ - processes, the model is divided into a spectral interval at which the model will approximate the process with given accuracy and reliability in a uniform metric. For the partial case, the process was modeled in the Python environment.

Keywords: Gaussian stationary random process, model of random process, entropy characteristics, accuracy, model reliability.

References

1. Buldygin, V. V. & Kozachenko, Yu. V. (2000). Metric characterisation of random variables and random processes. *Amer. Math. Soc. Providence RI*.
2. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1999). Modeling of random processes. *К.: Kyiv University*, 223 p. [In Ukrainian].
3. Kozachenko, Yu. V., & Pashko, A. O. (1988). Accuracy of modeling of random processes in norms of Orlych spaces I. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 58, 45–60. [In Ukrainian].
4. Macak, I. K., & Plichko, A. N. (1988). Some inequalities for the sums of independent random variables in Banach spaces. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 38, 81–86.
5. Tegza, A. M. (2021). On the accuracy and reliability of some models of Gaussian processes with a limited spectrum *Scientific Bulletin of Uzhgorod University*, 6, 125–131.
6. Giuliano Antonini, R., Kozachenko, Y. V., & Tegza, A. M. (2002). Inequalities for norms of subgaussian vectors and accuracy of modeling of random processes. *Theory of Prob. and Math. Stat.*, 66, 58–66.
7. Tegza, A. M. (2003). Substantiation of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes. it Dissertation for the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences [In Ukrainian].

Одержано 15.04.2022

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).82-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93)**Р. В. Хаць**

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,

доцент кафедри математики,

кандидат фізико-математичних наук

khats@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>**АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СПЕЦІАЛЬНОГО
КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ**

Встановлено рівномірні асимптотичні оцінки логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму спеціального канонічного добутку з покращеним розподілом нулів на скінченній системі променів з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин. Крім того, досліджено асимптотичну поведінку похідної спеціального канонічного добутку в його нулях. При цьому, отримано нові асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів цього канонічного добутку.

Ключові слова: виняткова множина, лічильна функція нулів, покращений розподіл нулів, скінченна система променів, спеціальний канонічний добуток, ціла функція.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (див. [1: 19], [2: 58]),

$$N(r) = \sum_{\lambda_n \leq r} \log \frac{r}{\lambda_n} = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, r > 0,$$

– Неванліннова (усереднена) лічильна функція послідовності $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ([1: 19]), і

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Функцію $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$, $z = re^{i\varphi}$, вважатимемо визначеною за формулою ([7])

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw, z \in \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{s=0}^{m-1} \left\{ z : \arg z = \frac{2\pi s}{m}, |z| \geq \lambda_1 \right\} \right), \quad \log f(0) = 0.$$

Цілі функції вигляду (1) відіграють важливу роль в теорії рядів Діріхле [2–4], теорії цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1, 2, 5, 6], теорії цілих функцій покращеного регулярного зростання [7–22], тауберовій теорії [23], при дослідженні базисів із систем експонент і розв’язуванні деяких інтерполяційних задач [1–4, 24, 25]. Асимптотичні властивості таких цілих функцій досліджено в працях багатьох математиків (див. [1–13, 23–25]). Зокрема, добре відомо ([2: 70]), що якщо послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho)$ ($t \rightarrow +\infty$), де $\Delta \in (0; +\infty)$,

$\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$, то для канонічного добутку (1) для кожного $\delta \in (0; \pi/2)$ рівномірно за $\varphi \in [\delta; \frac{2\pi}{m} - \delta]$ виконується співвідношення

$$\log |f(re^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta}{\sin(\frac{\pi\rho}{m})} r^\rho \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{m} \right).$$

Крім цього, якщо послідовність $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє додаткову умову $\lambda_{n+1} - \lambda_n > c\lambda_n^{1-\rho}$, $c > 0$, то ([2: 71])

$$\log |f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) + o(\lambda_n^\rho), \quad n \rightarrow +\infty.$$

За інших умов на нулі цілої функції (1) можна отримати точніші асимптотичні оцінки (див. [4, 7–25]). Зокрема, в [7] доведено, що якщо $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $\rho_1 \in (0; \rho)$, $m > \rho$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), то для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left(\frac{2\pi s}{m}; \frac{2\pi(s+1)}{m} \right)$ виконується

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin(\frac{\pi\rho}{m})} e^{-i\frac{\pi\rho}{m}} r^\rho e^{i\rho\varphi} + \frac{o(r^{\rho_1})}{|\sin \frac{m\varphi}{2}|}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Крім цього ([7]), якщо послідовність $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє додаткову умову

$$(\exists n_0 > 0) (\forall n \geq n_0) : \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \leq \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

то

$$\log |\lambda_n f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) + o(\lambda_n^{\rho_1}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Метою статті є вивчення асимптотичних властивостей спеціальних канонічних добутків вигляду (1) з покращеним розподілом нулів (див. нижче умову (2)), що передбачає вирішення таких задач: отримання рівномірних асимптотичних оцінок логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму цілої функції (1) з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин; встановлення нових асимптотичних співвідношень для лічильних функцій послідовностей нулів; дослідження асимптотичної поведінки похідної цілої функції (1) в її нулях.

2. Основні результати. Через $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ позначатимемо деякі додатні сталі. Основними результатами даної статті є наступні твердження, які доповнюють результати робіт [7–22].

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$N(t) = \frac{\Delta}{\rho} t^\rho + O(1), \quad t \rightarrow +\infty. \tag{2}$$

Тоді для цілої функції (1) для кожного $\delta \in (0; \pi/2)$ рівномірно відносно $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left[\frac{2\pi s}{m} + \delta; \frac{2\pi(s+1)}{m} - \delta \right]$ виконується

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin(\frac{\pi\rho}{m})} r^\rho e^{i\rho(\varphi - \frac{\pi}{m})} + O(1), \quad r \rightarrow +\infty. \tag{3}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left(\frac{2\pi s}{m}; \frac{2\pi(s+1)}{m} \right)$. Тоді, за умови (2), двічі інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned} \log f(re^{i\varphi}) &= -m^2 z^m \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1}}{(t^m - z^m)^2} N(t) dt + O(1) = \\ &= -\frac{\Delta}{\rho} m^2 r^m e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho+m-1}}{(t^m - r^m e^{im\varphi})^2} dt - \\ &- m^2 r^m e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{O(t^{m-1})}{(t^m - r^m e^{im\varphi})^2} dt + O(1) := \\ &= I_1 + I_2 + O(1), r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Нехай $t = rx^{\frac{1}{m}}$. Згідно з теорією лишків (див. [5: 94]), отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\Delta}{\rho} m r^\rho e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{\rho}{m}}}{(x - e^{im\varphi})^2} dx = \\ &= -\frac{\Delta}{\rho} m r^\rho e^{im\varphi} \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi \frac{\rho}{m} i}} \operatorname{res}_{x=e^{im\varphi}} x^{\frac{\rho}{m}} \frac{1}{(x - e^{im\varphi})^2} = \frac{\pi \Delta}{\sin\left(\frac{\pi \rho}{m}\right)} r^\rho e^{i\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Далі,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c_1 \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{|u^m - e^{im\varphi}|^2} du = c_1 \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u^{2m} - 2u^m \cos m\varphi + 1} du \leq \\ &\leq c_1 \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1}}{u^{2m} - 2u^m \cos m\delta + 1} du = c_2 < +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, з (4)–(6) отримуємо (3). Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (2). Тоді для цілої функції (1) для кожного $\delta \in (0; \pi/2)$ рівномірно відносно $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left[\frac{2\pi s}{m} + \delta; \frac{2\pi(s+1)}{m} - \delta \right]$ виконується

$$\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} = \frac{\pi \Delta \rho}{\sin\left(\frac{\pi \rho}{m}\right)} e^{-i\frac{\pi \rho}{m}} r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} + O(1), r \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left(\frac{2\pi s}{m}; \frac{2\pi(s+1)}{m} \right)$. Тоді, за умови (2), двічі інтегруючи частинами, при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} &= m^3 z^{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{m-1} z^m + t^{2m-1}}{(z^m - t^m)^3} N(t) dt = \\ &= \frac{\Delta}{\rho} m^3 z^{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho+m-1} z^m + t^{\rho+2m-1}}{(z^m - t^m)^3} dt + m^3 z^{m-1} \int_0^{+\infty} \frac{O(t^{m-1}) z^m + O(t^{2m-1})}{(z^m - t^m)^3} dt = \\ &= \frac{\Delta}{\rho} m^3 r^{\rho-1} e^{i(m-1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho+m-1} e^{im\varphi} + u^{\rho+2m-1}}{(e^{im\varphi} - u^m)^3} du + \end{aligned}$$

$$+m^3 r^{-1} e^{i(m-1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{O(u^{m-1})e^{im\varphi} + O(u^{2m-1})}{(e^{im\varphi} - u^m)^3} du := J_1 + J_2. \tag{8}$$

Нехай $u = x^{\frac{1}{m}}$, $du = \frac{1}{m} x^{\frac{1-m}{m}} dx$. Тоді, подібно як вище, отримаємо

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\Delta}{\rho} m^2 r^{\rho-1} e^{i(m-1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{\rho}{m}} e^{im\varphi} + x^{\frac{\rho}{m}+1}}{(e^{im\varphi} - x)^3} dx = \frac{\Delta}{\rho} m^2 r^{\rho-1} e^{i(m-1)\varphi} \times \\ &\times \left(\frac{2\pi i e^{im\varphi}}{1 - e^{2\pi \frac{\rho}{m} i}} \operatorname{res}_{x=e^{im\varphi}} \frac{x^{\frac{\rho}{m}}}{(e^{im\varphi} - x)^3} + \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi(\frac{\rho}{m}+1)i}} \operatorname{res}_{x=e^{im\varphi}} \frac{x^{\frac{\rho}{m}+1}}{(e^{im\varphi} - x)^3} \right) = \\ &= \frac{\pi \Delta \rho}{\sin\left(\frac{\pi \rho}{m}\right)} e^{-\pi \frac{\rho}{m} i} r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi}. \end{aligned} \tag{9}$$

До того ж, аналогічно як у доведенні теореми 1, одержимо

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq c_3 r^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{m-1} + u^{2m-1}}{|e^{im\varphi} - u^m|^3} du \leq c_4 r^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2m-1}}{(u^{2m} - 2u^m \cos m\varphi + 1)^{3/2}} du \leq \\ &\leq c_4 r^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{2m-1}}{(u^{2m} - 2u^m \cos m\delta + 1)^{3/2}} du = c_5 < +\infty, r > 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким чином, з (8)–(10) випливає (7). Теорему 2 доведено.

Лема 1. *Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$N(t) = \frac{\Delta}{\rho} t^\rho + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right), \quad t \rightarrow +\infty. \tag{11}$$

Тоді

$$n(t) = \Delta t^\rho + O(1), \quad t \rightarrow +\infty. \tag{12}$$

Доведення. Нехай $r = t + c_6 t^{1-\rho}$. Тоді при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} n(t) &\leq \frac{N(r) - N(t)}{\ln(r/t)} = \\ &= \frac{\frac{\Delta}{\rho} (t + c_6 t^{1-\rho})^\rho - \frac{\Delta}{\rho} t^\rho + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\ln\left(1 + \frac{c_6}{t^\rho}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} t^\rho \left(\left(1 + \frac{c_6}{t^\rho}\right)^\rho - 1\right) + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\frac{c_6}{t^\rho} + O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right)} = \\ &= \frac{\frac{\Delta}{\rho} t^\rho \left(1 + \rho \frac{c_6}{t^\rho} + O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right) - 1\right) + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)}{\frac{c_6}{t^\rho} + O\left(\frac{1}{t^{2\rho}}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} t^\rho \left(\rho + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)\right) + O(1)}{1 + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)} = \\ &= (\Delta t^\rho + O(1)) \left(1 + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right)\right) = \Delta t^\rho + O(1) + O\left(\frac{1}{t^\rho}\right) = \Delta t^\rho + O(1). \end{aligned}$$

З іншого боку, взявши $t = r - c_6 r^{1-\rho}$, при $r \rightarrow +\infty$ отримаємо

$$n(r) \geq \frac{N(r) - N(t)}{\ln(r/t)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho - \frac{\Delta}{\rho} (r - c_6 r^{1-\rho})^\rho + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{-\ln\left(1 - \frac{c_6}{r^\rho}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(1 - \left(1 - \frac{c_6}{r^\rho}\right)^\rho\right) + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{\frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\rho \frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)}{\frac{c_6}{r^\rho} + O\left(\frac{1}{r^{2\rho}}\right)} = \\
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\rho + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)\right) + O(1)}{1 + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)} = (\Delta r^\rho + O(1)) \left(1 + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right)\right) = \Delta r^\rho + O(1).
\end{aligned}$$

З обидвох останніх нерівностей випливає (12). Лему 1 доведено.

Лема 2. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$ і $m > \rho$. Тоді умова (12) є еквівалентною до умови

$$\lambda_m^\rho = \frac{m}{\Delta} + O(1), \quad m \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Доведення. Нехай $\lambda_m \leq t < \lambda_{m+1}$. Тоді при $t \rightarrow +\infty$, маємо $n(t) = m = \Delta \lambda_m^\rho + O(1) \leq \Delta t^\rho + O(1)$ і $n(t) = m + 1 - 1 = \Delta \lambda_{m+1}^\rho + O(1) - 1 \geq \Delta t^\rho + O(1)$. Отже, з (13) випливає (12). Навпаки, якщо виконується (12), то $m \leq n(\lambda_m) = \Delta \lambda_m^\rho + O(1)$, $m \rightarrow +\infty$. З іншого боку,

$$\begin{aligned}
m &\geq n(\lambda_m - c_7 \lambda_m^{1-\rho}) = \Delta (\lambda_m - c_7 \lambda_m^{1-\rho})^\rho + O(1) = \Delta \lambda_m^\rho \left(1 - \frac{c_7}{\lambda_m^\rho}\right)^\rho + O(1) = \\
&= \Delta \lambda_m^\rho \left(1 - \frac{\rho c_7}{\lambda_m^\rho} + O\left(\frac{1}{\lambda_m^{2\rho}}\right)\right) + O(1) = \Delta \lambda_m^\rho + O(1), \quad m \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Отже, виконується умова (13). Лему 2 доведено.

Теорема 3. Нехай $m_f(r) = \min \{|f(z)| : |z| = r\}$, $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (11). Тоді для цілої функції (1) за деякого $c_8 > 0$ і кожного $c_0 > \max \left\{ \frac{m c_8}{\Delta \rho}, \frac{m(1-c_8)}{\Delta \rho} \right\}$ виконується

$$\log m_f(r) = \log |f(r)| \geq \pi \Delta r^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi \rho}{m} \right) + O(1), \quad (14)$$

при $E_0 \not\equiv r \rightarrow +\infty$, де $E_0 = \{r : |\lambda_k^m - r^m| \leq c_0 \lambda_k^{m-\rho}\}$.

Доведення. Якщо виконується умова (11), то за лемами 1 і 2, правильними є нерівності $\lambda_k^\rho = \frac{k}{\Delta} + O(1) \geq \frac{k}{\Delta} - \frac{c_8}{\Delta}$ і $\lambda_n^\rho = \frac{n}{\Delta} + O(1) \leq \frac{n}{\Delta} + \frac{c_8}{\Delta}$. З останніх двох нерівностей, отримуємо

$$(\exists c_8 > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) (\forall k \geq n) : \frac{\lambda_n}{\lambda_k} \leq \left(\frac{n + c_8}{k - c_8} \right)^{1/\rho}. \quad (15)$$

Далі,

$$\begin{aligned}
\log |f(r)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \left| 1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right| = \\
&= m \sum_{\lambda_n \leq r} \log \frac{r}{\lambda_n} + \sum_{\lambda_n \leq r} \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m} \right) + \sum_{\lambda_n > r} \log \left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right) = \\
&= mN(r) + \sum_{\lambda_n \leq r} \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m} \right) + \sum_{\lambda_n > r} \log \left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right). \quad (16)
\end{aligned}$$

Нехай $\lambda_k \leq r < \lambda_{k+1}$. Тоді, використовуючи (15), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n \leq r} \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m} \right) &= \sum_{n=1}^k \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m} \right) = - \sum_{n=1}^k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_n}{r} \right)^{mj} = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_k}{r} \right)^{mj} \sum_{n=1}^k \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right)^{mj} \geq - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_k}{r} \right)^{mj} \sum_{n=1}^k \left(\frac{n + c_8}{k - c_8} \right)^{mj/\rho} = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_k}{r(k - c_8)^{1/\rho}} \right)^{mj} \sum_{n=1}^k (n + c_8)^{mj/\rho}, \end{aligned}$$

і, подібно,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_n > r} \log \left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right) &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right) = - \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{r}{\lambda_n} \right)^{mj} = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{r}{\lambda_{k+1}} \right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_n} \right)^{mj} \geq \\ &\geq - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{r}{\lambda_{k+1}} \right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{k + 1 - c_8}{n + c_8} \right)^{mj/\rho} = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{r(k + 1 - c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}} \right)^{mj} \sum_{n=k+1}^{\infty} (n + c_8)^{-mj/\rho}. \end{aligned}$$

Позаяк функції $(k + x)^\nu$ і $(k + x)^{-\nu}$ з $\nu > 1$ є опуклими на $(-k; +\infty)$, то для $t \in [-1/2; 1/2]$, подібно до [5: 247] (див. також [8]), маємо

$$\begin{aligned} (n + c_8)^\nu &= \left(n - \frac{1}{2} + c_8 + \frac{1}{2} \right)^\nu = \left(n - \frac{1}{2} \right)^\nu \left(1 + \frac{c_8 + 1/2}{n - 1/2} \right)^\nu = \\ &= \left(n - \frac{1}{2} \right)^\nu \left(1 + \nu \frac{c_8 + 1/2}{n - 1/2} (1 + o(1)) \right) \leq \left(n - \frac{1}{2} \right)^\nu + c_8 \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\nu-1} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \{ (n - 1/2 + t)^\nu + (n - 1/2 - t)^\nu \} + \frac{c_9}{2} \{ (n - 1/2 + t)^{\nu-1} + (n - 1/2 - t)^{\nu-1} \}, \end{aligned}$$

і, аналогічно,

$$\begin{aligned} (n + c_8)^{-\nu} &\leq \frac{1}{2} \left\{ (n - 1/2 + t)^{-\nu} + (n - 1/2 - t)^{-\nu} \right\} + \\ &+ \frac{c_{10}}{2} \left\{ (n - 1/2 + t)^{-\nu-1} + (n - 1/2 - t)^{-\nu-1} \right\}. \end{aligned}$$

Інтегруючи першу з цих нерівностей по t в межах від 0 до 1/2, отримуємо

$$(n + c_8)^\nu \leq \int_0^{1/2} \left\{ (n - 1/2 + t)^\nu + (n - 1/2 - t)^\nu \right\} dt +$$

$$\begin{aligned}
& +c_9 \int_0^{1/2} \left\{ (n-1/2+t)^{\nu-1} + (n-1/2-t)^{\nu-1} \right\} dt = \\
& = \int_{-1/2}^{1/2} (n-1/2+u)^\nu du + c_9 \int_{-1/2}^{1/2} (n-1/2+u)^{\nu-1} du = \int_{n-1}^n t^\nu dt + c_9 \int_{n-1}^n t^{\nu-1} dt,
\end{aligned}$$

і, аналогічно,

$$(n+c_8)^{-\nu} \leq \int_{n-1}^n t^{-\nu} dt + c_{10} \int_{n-1}^n t^{-\nu-1} dt.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^k (n+c_8)^{mj/\rho} & \leq \sum_{n=1}^k \left\{ \int_{n-1}^n t^{mj/\rho} dt + c_9 \int_{n-1}^n t^{\frac{mj}{\rho}-1} dt \right\} = \\
& = \int_0^k t^{mj/\rho} dt + c_9 \int_0^k t^{\frac{mj}{\rho}-1} dt = \frac{k^{\frac{mj}{\rho}+1}}{\frac{mj}{\rho}+1} + c_9 \frac{k^{\frac{mj}{\rho}}}{\frac{mj}{\rho}}, \\
\sum_{n=k+1}^{\infty} (n+c_8)^{-\frac{mj}{\rho}} & \leq -\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}+1}}{-\frac{mj}{\rho}+1} - c_{10} \frac{k^{-\frac{mj}{\rho}}}{-\frac{mj}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda_n \leq r} \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m} \right) + \sum_{\lambda_n > r} \log \left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m} \right) \geq \\
& \geq -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_k}{r(k-c_8)^{1/\rho}} \right)^{mj} \left(\frac{k^{\frac{mj}{\rho}+1}}{\frac{mj}{\rho}+1} + c_9 \frac{k^{\frac{mj}{\rho}}}{\frac{mj}{\rho}} \right) - \\
& - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1}} \right)^{mj} \left(-\frac{k^{-\frac{mj}{\rho}+1}}{-\frac{mj}{\rho}+1} - c_{10} \frac{k^{-\frac{mj}{\rho}}}{-\frac{mj}{\rho}} \right) = \\
& = -k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} + 1 \right)} \left(\frac{\lambda_k k^{1/\rho}}{r(k-c_8)^{1/\rho}} \right)^{mj} - c_9 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{mj^2}{\rho}} \left(\frac{\lambda_k k^{1/\rho}}{r(k-c_8)^{1/\rho}} \right)^{mj} - \\
& -k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} - 1 \right)} \left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1} k^{1/\rho}} \right)^{mj} - c_{10} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{mj^2}{\rho}} \left(\frac{r(k+1-c_8)^{1/\rho}}{\lambda_{k+1} k^{1/\rho}} \right)^{mj}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Оскільки $|\lambda_k^m - r^m| \geq c_0 \lambda_k^{m-\rho}$, то $\lambda_k^m + c_0 \lambda_k^{m-\rho} \leq r^m \leq \lambda_{k+1}^m - c_0 \lambda_k^{m-\rho}$. Крім цього, за умови (11), виконується співвідношення $\lambda_k^\rho = \frac{k}{\Delta} + O(1)$, $k \rightarrow +\infty$ (див. леми 1 і 2). Тому для $c_0 > \frac{mc_8}{\Delta\rho}$ маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_k^m k^{m/\rho}}{r^m (k-c_8)^{m/\rho}} & \leq \frac{k^{m/\rho}}{\left(1 + \frac{c_0}{\lambda_k^\rho}\right) (k-c_8)^{m/\rho}} = \\
& = \frac{k^{m/\rho}}{\left(1 + \frac{c_0 \Delta(1+o(1))}{k}\right) (k-c_8)^{m/\rho}} = \frac{(k-c_8+c_8)^{m/\rho}}{\left(1 + \frac{c_0 \Delta(1+o(1))}{k}\right) (k-c_8)^{m/\rho}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{c_8}{k - c_8}\right)^{m/\rho}}{1 + \frac{c_0 \Delta (1 + o(1))}{k}} = \frac{1 + \frac{m c_8}{\rho(k - c_{11})}(1 + o(1))}{1 + \frac{c_0 \Delta}{k}(1 + o(1))} = \frac{1 + \frac{m c_8}{\rho k}(1 + o(1))}{1 + \frac{c_0 \Delta}{k}(1 + o(1))} \leq 1, \quad k \rightarrow +\infty.$$

Подібно, для $c_0 > m \frac{1 - c_8}{\Delta \rho}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{r^m (k + 1 - c_8)^{m/\rho}}{\lambda_{k+1}^m k^{m/\rho}} &\leq \frac{\left(\lambda_{k+1}^m - c_0 \lambda_k^{m-\rho}\right) (k + 1 - c_8)^{m/\rho}}{\lambda_{k+1}^m k^{m/\rho}} \leq \\ &\leq \left(1 - \frac{c_0}{\lambda_k^\rho}\right) \left(\frac{k + 1 - c_8}{k}\right)^{m/\rho} = \left(1 - \frac{c_0 \Delta (1 + o(1))}{k}\right) \left(1 + \frac{1 - c_8}{k}\right)^{m/\rho} = \\ &= \left(1 - \frac{c_0 \Delta}{k}(1 + o(1))\right) \left(1 + \frac{1 - c_8}{\rho k} m(1 + o(1))\right) = \\ &= 1 - \frac{c_0 \Delta}{k}(1 + o(1)) + \frac{1 - c_8}{\rho k} m(1 + o(1)) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1, \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

З огляду на це, з (17) одержимо

$$\begin{aligned} &\sum_{\lambda_n \leq r} \log\left(1 - \frac{\lambda_n^m}{r^m}\right) + \sum_{\lambda_n > r} \log\left(1 - \frac{r^m}{\lambda_n^m}\right) \geq \\ &\geq -k \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} + 1\right)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} - 1\right)} \right) + O(1), \quad E_0 \not\exists r \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Далі, позаяк $\lambda_k^\rho \leq r^\rho < \lambda_{k+1}^\rho$, то $-k \geq -\Delta r^\rho - c_8$. Тому, з (11), (16) і (18), отримуємо

$$\begin{aligned} \log |f(r)| &\geq mN(r) - k \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} + 1\right)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j \left(\frac{mj}{\rho} - 1\right)} \right) + O(1) = \\ &= mN(r) - 2mk\rho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(mj)^2 - \rho^2} + O(1) = \\ &= \frac{m\Delta}{\rho} r^\rho + O\left(\frac{1}{r^\rho}\right) - \frac{mk}{\rho} \left(1 - \frac{\pi\rho}{m} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)\right) + O(1) \geq \\ &\geq \frac{m\Delta}{\rho} r^\rho - m \frac{\Delta r^\rho + c_8}{\rho} \left(1 - \frac{\pi\rho}{m} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)\right) + O(1) = \\ &= \pi \Delta r^\rho \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi\rho}{m}\right) + O(1), \quad E_0 \not\exists r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Таким чином, виконується (14). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (11). Тоді для цілої*

функції (1) за деякого $c_8 > 0$ і будь-яких сталих $c_0 > \max \left\{ \frac{mc_8}{\Delta\rho}, \frac{m(1-c_8)}{\Delta\rho} \right\}$ та $c_{11} > 0$, виконується

$$\log |f(z)| \geq \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) + O(1), \quad E \ni z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty, \quad (19)$$

де $E = \{re^{i\varphi} : |\varphi| > \frac{c_{11}}{r^\rho}, |\lambda_n^m - r^m| \leq c_0\lambda_n^{m-\rho}\}$ і $\varphi \in \bigcup_{s=0}^{m-1} \left(\frac{2\pi s}{m}, \frac{2\pi(s+1)}{m} \right)$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{c_{11}}{r^\rho}$ і $|\lambda_n^m - r^m| > c_0\lambda_n^{m-\rho}$. Тоді, згідно з теоремою 3, отримуємо

$$\begin{aligned} \log |f(re^{i\varphi})| &\geq \log m_f(r) = \pi\Delta r^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) + O(1) = \\ &= \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) + \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \left(\cos \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) - \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) \right) + O(1) \geq \\ &\geq \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) - \frac{2\pi\Delta r^\rho}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} \left| \sin \frac{\rho\varphi}{2} \sin \frac{\rho}{2} \left(\frac{2\pi}{m} - \varphi \right) \right| + O(1) = \\ &= \frac{\pi\Delta}{\sin\left(\frac{\pi\rho}{m}\right)} r^\rho \cos \rho \left(\varphi - \frac{\pi}{m} \right) + O(1), \quad E \ni z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отож, виконується (19). Теорему 4 доведено.

Теорема 5. Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty)$, $m > \rho$ і неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (11) і

$$(\exists k_0)(\forall k \geq k_0)(\forall n \geq k) : \frac{\lambda_k}{\lambda_n} \leq \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (20)$$

Тоді для цілої функції (1) виконується

$$\log |\lambda_n f'(\lambda_n)| \geq \pi\Delta\lambda_n^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) + O(1), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

Доведення. Маємо ([2: 108], [4: 70], [7])

$$f'(\lambda_n) = -\frac{m}{\lambda_n} \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq n}}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m} \right).$$

Тому

$$\log |\lambda_n f'(\lambda_n)| = \log m + m \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{\lambda_n}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{n-1} \log \left(1 - \frac{\lambda_k^m}{\lambda_n^m} \right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{\lambda_n^m}{\lambda_k^m} \right).$$

Використовуючи (11), (13) і (20), подібно як в [4: 70] і [7], отримуємо

$$\log |\lambda_n f'(\lambda_n)| = \log m + m \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{\lambda_n}{\lambda_k} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} \right)^{mj} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \right)^{mj} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq m \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{\lambda_n}{\lambda_k} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{j} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}} - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{mj}{\rho}} + O(1) \geq \\
&\geq m \sum_{k=1}^{n-1} \log \frac{\lambda_n}{\lambda_k} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_0^n \left(\frac{\xi}{n}\right)^{\frac{mj}{\rho}} d\xi - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \int_n^{\infty} \left(\frac{n}{\xi}\right)^{\frac{mj}{\rho}} d\xi + O(1) = \\
&= mN(\lambda_n) - 2mn\rho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2 - (mj)^2} + O(1) = \\
&= mN(\lambda_n) + n \left(\pi \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) - \frac{m}{\rho} \right) + O(1) = \\
&= m \left(\frac{\Delta}{\rho} \lambda_n^\rho + O \left(\frac{1}{\lambda_n^\rho} \right) \right) + (\Delta \lambda_n^\rho + O(1)) \left(\pi \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) - \frac{m}{\rho} \right) + O(1) = \\
&= \pi \Delta \lambda_n^\rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\rho}{m} \right) + O(1), \quad n \rightarrow +\infty,
\end{aligned}$$

тобто виконується (21). Теорему 5 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті досліджено асимптотичні властивості спеціального канонічного добутку з покращеним розподілом нулів на скінченній системі променів. Зокрема, встановлено рівномірні асимптотичні оцінки логарифмічної похідної, логарифму модуля та логарифму такого канонічного добутку з точністю до обмеженої величини зовні деяких виняткових множин. Крім цього, описано асимптотичну поведінку похідної спеціального канонічного добутку в його нулях. При цьому, отримано нові асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів.

Результати роботи можуть бути використані в теорії цілих функцій регулярного зростання, теорії рядів Діріхле, а також при дослідженні базисів із систем експонент та розв'язуванні деяких інтерполяційних задач.

Список використаної літератури

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Москва: Гостехиздат, 1956. 632 с.
2. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. Москва: Наука, 1983. 176 с.
3. Леонтьев А. Ф. Представление функций рядами обобщенных экспонент. *Матем. сб.* 1987. Т. 134(176), № 4(12). С. 496–510.
4. Винницький Б. В. Некоторые аппроксимационные свойства обобщенных систем экспонент. Дрогобич: Деп. в Укр. НИИНТИ, № 277–Ук91, 1991. 195 с.
5. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. Москва: Наука, 1970. 591 с.
6. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. Львов: Вища школа, 1988. 196 с.
7. Хаць Р. В. Асимптотика спеціальної цілої функції. *Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики*. 2011. № 3. С. 40–42.
8. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one. *Мат. студ.* 2003. Т. 19, № 1. С. 97–105.
9. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 2. С. 140–150.
10. Хаць Р. В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 22, № 1. С. 105–110.
11. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів. *Мат. студ.* 2005. Т. 24, № 1. С. 31–38.
12. Khats' R. V. On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Мат. студ.* 2006. Т. 26, № 1. С. 17–24.

13. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені. *Мат. студії*. 2010. Т. 33, № 2. С. 215–219.
14. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки»*. 2011. Вип. 718, № 718. С. 5–9. URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12811>
15. Khats' R. V. Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки»*. 2011. Вип. 718, № 718. С. 10–14. URL: <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12813>
16. Хаць Р. В. Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 12. С. 1717–1723. DOI: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/2837>
17. Khats' R. V. Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 1. С. 129–133. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133>
18. Khats' R. V. Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Карпатські матем. публ.* 2013, Т. 5, № 2. С. 341–344. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344>
19. Khats' R. V. Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Буковин. матем. журн.* 2019, Т. 7, № 1. С. 114–120. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114>
20. Khats' R. V. Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Карпатські матем. публ.* 2020. Т. 12, № 1. С. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54>
21. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^q[0; 2\pi]$ -метриці. *Укр. мат. журн.* 2020, Т. 72, № 4. С. 557–564. DOI: <https://doi.org/10.37863/umzh.v72i4.500>
22. Khats' R. V. Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Буковин. матем. журн.* 2021. Т. 9, № 1. С. 49–55. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04>
23. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком. Москва: Наука, 1976. 399 с.
24. Левин Б. Я., Любарский Ю. И. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. *Изв. АН СССР. Сер. мат.* 1975. Т. 39, № 3. С. 657–702.
25. Любарский Ю. И., Содин М. Л. Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей. Харьков: Препр. / ФТИНТ АН УССР; 17–86, 1986. 42 с.

Khats' R. V. Asymptotic behavior of a special canonical product.

We establish asymptotic estimates for the logarithm and logarithmic derivative of a special canonical product with improved zero-distribution on a finite system of rays up to a limited value outside some exceptional sets. Besides, we investigate an asymptotic behavior of the derivative of a special canonical product at its zeros. In addition, we obtain new asymptotic relations for the counting functions of the sequences of zeros of this canonical product.

Keywords: exceptional set, counting function of zeros, improved zero-distribution, finite system of rays, special canonical product, entire function.

References

1. Levin, B. Ya. (1956). Distribution of zeros of entire functions. *Moscow: Nauka* [in Russian].
2. Leont'ev, A. F. (1983). Entire functions. Exponential series. *Moscow: Nauka* [in Russian].
3. Leont'ev, A. F. (1989). Representation of functions by generalized exponential series. *Math. USSR-Sb.*, 62 (2), 491–505. <https://doi.org/10.1070/SM1989v062n02ABEH003250>
4. Vinnitskii, B. V. (1991). Some approximation properties of generalized exponential systems. *Drohobych: Preprint 277*. [in Russian].

5. Goldberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (1970). Distribution of values of meromorphic functions. *Moscow: Nauka* [in Russian].
6. Kondratyuk, A. A. (1988). Fourier series and meromorphic functions. *Lviv: Vyscha shkola* [in Russian].
7. Khats', R. V. (2011). Asymptotics of a special entire function. *Actual problems of physics, mathematics and informatics*, 3, 40–42. [in Ukrainian].
8. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud.*, 19(1), 97–105.
9. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud.*, 21(2), 140–150. [in Ukrainian].
10. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud.*, 22(1), 105–110. [in Ukrainian].
11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 24(1), 31–38. [in Ukrainian].
12. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 26(1), 17–24.
13. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud.*, 33(2), 215–219. [in Ukrainian].
14. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2011). On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky*, 718(718), 5–9. Retrieved from <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12811>
15. Khats', R. V. (2011). Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky*, 718(718), 10–14. Retrieved from <http://ena.lp.edu.ua:8080/handle/ntb/12813>
16. Khats', R. V. (2012). Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth. *Ukr. Math. J.*, 63(12), 1953–1960. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0624-2>
17. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ.*, 5(1), 129–133. <https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133>
18. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Carpathian Math. Publ.*, 5(2), 341–344. <https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344>
19. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J.*, 7(1), 114–120. <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114>
20. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ.*, 12(1), 46–54. <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54>
21. Khats', R. V. (2020). Asymptotic behavior of the logarithms of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Ukr. Math. J.*, 72(4), 642–650. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01805-x>
22. Khats', R. V. (2021). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Bukovinian Math. J.*, 9(1), 49–55. <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04>
23. Subhankulov, M. A. (1976). Tauberian theorems with remainder. *Moscow: Nauka* [in Russian].
24. Levin, B. Ya., & Lyubarskii, Yu. I. (1975). Interpolation by means of special classes of entire functions and related expansions in series of exponentials. *Math. USSR-Izv.*, 9(3), 621–662. <https://doi.org/10.1070/IM1975v009n03ABEH001493>
25. Lyubarskii, Yu. I., & Sodin, M. L. (1986). Analogues of functions of sinusoidal type for convex domains. *Kharkov: Preprint 17, Fiz.-Tekhn. Inst. Nizkikh Temperatur Akad. Nauk Ukr. SSR*. [in Russian].

Одержано 12.01.2022

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).94-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).94-108)**S. Yu. Babich¹, Yu. P. Glukhov², V. F. Lazar³, Yu. Yu. Zhiguts⁴**

¹ Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko of the National Academy of Sciences of Ukraine, leading researcher, Professor, Doctor of Technical Sciences,

babich_sy@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Institute of Mechanics S.P. Tymoshenko of the National Academy of Sciences of Ukraine, Senior Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

gluchov.uriy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

³ Mukachevo State University,

Mechanical Engineering, Natural Sciences and Information Technologies, Candidate of Technical Sciences,

vflazar@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

⁴ Uzhgorod National University,

Professor of the Department of Mechanical Engineering Technology,

Doctor of Engineering

yuzhiguts@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7477-7619>

DYNAMICS OF A TWO-LAYER HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES UNDER THE IMPACT OF A MOVING LOAD

In this article, within the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, we consider a plane steady-state problem of perturbation of a two-layer half-space with an arbitrary form of elastic potential by a surface load moving at a constant speed with initial stresses. The solution is obtained in a general form for a compressible and incompressible half-space and various contact conditions. Numerical results are given for half-spaces of compressible and incompressible materials, respectively, with an elastic potential of a harmonic type and an elastic potential of the Bartenev-Khazanovich type under rigid and sliding contact conditions.

Keywords: layered half-space, initial stresses, moving load.

1. Introduction. Currently, in the dynamics of elastic bodies with initial (residual) stresses, a number of scientific areas are being developed, of which the following can be noted: studies of the laws of wave propagation in bodies of various shapes (monographs [1,2]); study of the mechanics of moving cracks inhomogeneous materials (for example, [3-6] and a number of other publications) and in the interfaces of materials [7-10]; study of the dynamics of materials under moving loads (for example, [2,11-13] and a number of other publications). A modern analysis of the construction of the main relations of the linearized mechanics of deformed bodies (statics, dynamics, and stability) is presented in publications [14-16] and in a number of others; in this case, in [16], the main attention is paid to the analysis of the features of the construction of constitutive equations for elastic and elastic-plastic materials in the linearized mechanics of deformable bodies. An analysis of the construction of exact solutions to mixed plane problems of linearized mechanics of deformable bodies is presented in [17]; exact solutions are constructed using the apparatus of the theory of functions of complex variables, which are introduced in such a way that

the initial (residual) stresses enter into the complex variables. A number of related results in nonlinear and linearized mechanics of deformable bodies are presented in publications [18-20].

In this article, within the framework of formulations [11,12], using the integral Fourier transform, we obtain a solution to the problem in a general form for compressible and incompressible materials and for rigid and sliding contacts between the layer and the base.

2. Statement of the problem. Consider a layer of thickness $2h$, lying on a half-space, the initial stress-strain state of which is determined by the following components of the displacement vector and the generalized stress tensor:

$$u_j^0 = \delta_{ij} (\lambda_i + 1) x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

where λ_i – elongations ($\lambda_i = \text{const}$) along Lagrangian axes coordinate system x_i , which is overlapping in the natural condition of the Cartesian coordinate system. Along with the Lagrangian coordinates let us bring Cartesian coordinates ξ_i of initial deform condition, connected with coordinates x_i by $\xi_i = \lambda_i x_i$.

To a free boundary layer moving with a constant speed \mathbf{v} load, independent of the coordinates ξ_3 , is attached. Such a load causes plain deformed condition in this layered medium.

For the solution of the task let's seize relations in linearized theory of elasticity for compressible bodies with initial stresses [16]. Assuming that the picture of the deformations is invariant about the time of moving along with a load system (y_1, y_2) , where $y_1 = \xi_1 - vt$; $y_2 = \xi_2$, the equation of the established moving of the semispace by the function $\chi(y_1, y_2)$ can be written as

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0, j = 1, 2. \tag{2}$$

Equation roots η_1 and η_2 are formed from the next equation:

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \tag{3}$$

$$2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = \tilde{\omega}_{2222} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^2; \tag{4}$$

$$2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho;$$

and in the case of an incompressible material from the relations

$$\begin{aligned} 2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2 (\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}); \\ 2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2 (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \quad \tilde{\rho} = \rho; \end{aligned} \tag{5}$$

In formulas (4) and (5) ρ is the density of the material of the half-space in its natural state.

Let us assume that the motion of the layer can be described by a system of equations from the theory of plates, taking into account the influence of rotational inertia and transverse shear. For a plate under the influence of transverse and tangential surface forces, the corresponding equations are given in [22]. In the coordinate system (y_1, y_2) , the equations of plate theory can be written as

$$\begin{aligned} 2h \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \tau &= P_1; \\ 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q &= P_2; \\ \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \delta_0 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau &= 0; \end{aligned} \tag{6}$$

In equations (4) G_1 , ν_1 , and ρ_1 are, respectively, the shear modulus, Poisson's ratio, and the density of the plate material; u w and are displacements of the middle surface of the plate ($y_2 = 0$), δ_0 is a constant that takes the value 1 or 0 depending on whether the plate rotation inertia is taken into account or neglected when deriving equations (6); φ is the angle of rotation of the plate cross-section; κ is the Timoshenko shift coefficient; q and τ are, respectively, the normal and shear stresses acting on the interface between the plate and the half-space; P_1 and P_2 are the tangential and normal components of the load on the free surface of the plate. The magnitude of the bending moment in the plate is determined by the formula

$$M = \frac{4}{3} \frac{G_1 h^3}{1 - \nu_1} \frac{d\varphi}{dy_1}. \quad (7)$$

Let us consider two cases of contact between the plate and the half-space at $y_2 = -h$:

$$\tilde{Q}_{21} = \tau; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w; \quad u_1 = u + h\varphi; \quad (8)$$

soft contact

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tau = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w. \quad (9)$$

Thus, the problem is reduced to solving the equations of motion (2) and (6) under boundary conditions (8) or (9).

Using the equations of motion of the plate (6) and conditions (8) and (9), the boundary conditions can be written in the general form

$$\begin{aligned} \delta_1 \theta_1 \left(\frac{d^2 u_1}{dy_1^2} - h \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} \right) - \tilde{Q}_{21} &= \delta_1 P_1, \\ \theta_3 \frac{d^2 u_2}{dy_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{d\varphi}{dy_1} - \tilde{Q}_{22} &= P_2, \\ \theta_2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{du_2}{dy_1} - \varphi \right) - \delta_1 \tilde{Q}_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Here we have introduced the following notation

$$\theta_1 = 2h \left(\frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_2 = \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \delta_0 \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_3 = 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2).$$

The parameter δ_1 is 1 for hard contact and 0 for soft contact.

The values of the functions $\eta_1^2(v)$ and $\eta_2^2(v)$ determine the form of the equations of motion (2) and, accordingly, the choice of the form for solving the considered equations. The effect of the load movement speed on the value of the roots of equation (3) for a compressible and incompressible half-space is studied in detail in [11,12]. Let us write the solution of the problem in general form for equal and unequal roots of equation (3).

The stresses, displacements, and velocities of displacements in the half-space through functions $\chi^{(j)}$ are determined by the formulas [1]

$$\tilde{Q}_{ij} = \left(\alpha_{ij}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\alpha_{ij}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}; \quad i, j = 1, 2; \quad (11)$$

$$u_i = -\beta_{i1}^{(i)} \frac{\partial^2 \chi^{(i)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\beta_{i1}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (12)$$

$$\dot{u}_i = v \left[\beta_{i1}^{(i)} \frac{\partial^3 \chi^{(i)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\beta_{i1}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(j)}}{\partial y_1} \right]; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \quad (13)$$

where in the case of a compressible material

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{ii22} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} v^2) - \tilde{\omega}_{ii11} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); \\ \alpha_{ii}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{ii11} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} v^2); \quad \alpha_{ii}^{(21)} = \tilde{\omega}_{ii22} \tilde{\omega}_{2112}; \\ \alpha_{ii}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{ii11} \tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{ii22} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); \\ \alpha_{ij}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{ij21} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho} v^2); \quad \alpha_{ij}^{(22)} = \tilde{\omega}_{ij12} \tilde{\omega}_{2222}; \\ \alpha_{ij}^{(12)} &= \tilde{\omega}_{ij12} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho} v^2) - \tilde{\omega}_{ij21} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); \\ \alpha_{12}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{ij21} \tilde{\omega}_{2112} - \tilde{\omega}_{ij12} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); \\ \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{21}^{(2)} = \beta = \tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}; \\ \beta_{i2}^{(j)} &= \tilde{\omega}_{2jj2}; \quad \beta_{i1}^{(j)} = \tilde{\omega}_{1jj1} - \tilde{\rho} v^2; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \end{aligned}$$

and in the case of an incompressible material

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(ii)} &= (-1)^i \tilde{q}_{jj}^{-1} \tilde{\kappa}_{1212} - \delta_{j2} \tilde{\rho} v^2 \tilde{q}_{11}^{-1}; \\ \alpha_{jj}^{(ii)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{ii}^{-2} (\tilde{\kappa}_{iiii} - \delta_{j2} \tilde{\rho} v^2) + \tilde{\kappa}_{jjjj} \tilde{q}_{jj}^{-1} - \tilde{q}_{ii}^{-1} (2\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}); \\ \alpha_{ij}^{(12)} &= -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; \quad \alpha_{ij}^{(22)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij12}; \quad \alpha_{ij}^{(11)} = \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; \\ \alpha_{ij}^{(21)} &= -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij12}; \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j; \\ \alpha_{22}^{(12)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho} v^2); \quad \alpha_{11}^{(12)} = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \alpha_{22}^{(12)}; \\ \alpha_{11}^{(21)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \alpha_{22}^{(21)} = \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} \alpha_{11}^{(21)}; \\ \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{12}^{(2)} = \beta = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \beta_{21}^{(2)} = \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(1)} = 0; \end{aligned}$$

Taking into account (11) and (12), boundary conditions (10) can be written as

$$\begin{aligned} & \left[\delta_1 \theta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left(\beta_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\alpha_{21}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(2)} - \\ & - \left[\delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left(\alpha_{21}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} - \delta_1 \theta_1 h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = \delta_1 P_1; \\ & - 2\kappa h G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left[\theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left(\alpha_{22}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \\ & + \left[\theta_3 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left(\beta_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\alpha_{22}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(1)} = P_2; \\ & \theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 \varphi - \left[\left(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \delta_1 \alpha_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \end{aligned} \quad (14)$$

$$+ \left[\left(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(11)} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \left(2\kappa G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(21)} \right) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} = 0;$$

Thus, the problem of the steady motion of a two-layer compressible half-space under the action of a moving load is reduced to finding the functions $\chi^{(j)}$ and φ from the boundary conditions (14).

3. Solution of the problem in the field of images.. We find the solution of the problem using the integral Fourier transform with respect to the variable and the corresponding inversion formula. Applying the Fourier transform to equations (2), we obtain

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^{(j)F} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (15)$$

Let us define the solution of the problem in a general form for the cases of unequal and equal roots, for various conditions of conjugation of the layer and half-space, and for any speed of the load (subsonic, transonic, and supersonic).

Boundary conditions (14) in the space of Fourier images have the form

$$\begin{aligned} & \left(-\alpha_{21}^{(22)} \frac{d^3}{dy_2^3} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{12}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \alpha_{21}^{(12)} \frac{d}{dy_2} + k^4 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(2)} \right) \chi^{(2)F} - \\ & - ik \left(\alpha_{21}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{d}{dy_2} - k^2 \alpha_{21}^{(11)} \right) \chi^{(1)F} + k^2 \delta_1 \theta_1 h \varphi^F = \delta_1 P_1^F; \\ & - 2ik\kappa h G_1 \varphi^F + ik \left(-\alpha_{22}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} + k^2 \alpha_{22}^{(12)} \right) \chi^{(2)F} - \\ & - \left(\alpha_{22}^{(21)} \frac{d^3}{dy_2^3} + k^2 \theta_3 \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \alpha_{22}^{(11)} \frac{d}{dy_2} - k^4 \theta_3 \beta_{21}^{(1)} \right) \chi^{(1)F} = P_2^F; \\ & (k^2 \theta_2 + 2\kappa G_1) \varphi^F - \left[k^2 \left(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)} \right) - \delta_1 \alpha_{21}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \frac{d\chi^{(2)F}}{dy_2} + \\ & + ik \left[k^2 \left(2\kappa G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(11)} \right) - \left(2\kappa G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(21)} \right) \frac{d^2}{dy_2^2} \right] \chi^{(1)F} = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

The solution of the transformed equation (15), taking into account damping at infinity, will be sought in the form

$$\begin{aligned} & \chi^{F(j)} = [1 - \delta_{j2}(1 - \delta_{\eta_1 \eta_2})] \times \\ & \times \left\{ C_1^{(j)} e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)} + [\delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) + 1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}] C_2^{(j)} e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)} \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

where $C_m^{(j)}$ ($j, m = 1, 2$) are constants of integration,

$$\gamma_j = k_j \eta_j; \quad j = 1, 2; \quad \delta_{\eta_1 \eta_2} = \begin{cases} 0, & \eta_1 \neq \eta_2 \\ 1, & \eta_1 = \eta_2 \end{cases}; \quad \delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}.$$

Let us introduce constants of integration

$$C_1^{(1)} = iC_1; \quad C_2^{(1)} = iC_2; \quad C_1^{(2)} = C_1; \quad C_2^{(2)} = C_2; \quad (18)$$

Substituting (17) and (18) into (16), we obtain a system of algebraic equations for the unknowns C_1 , C_2 and φ^F

$$\begin{aligned} k \left(a_{11}^{(1)} + ka_{11}^{(2)} \right) C_1 + \left(a_{12}^{(1)} + ka_{12}^{(2)} + k^2 a_{12}^{(3)} \right) C_2 + a_{13} \varphi^F &= k^{-2} \delta_1 P_1^F; \\ k^2 \left(a_{21}^{(1)} + ka_{21}^{(2)} \right) C_1 + k \left(a_{22}^{(1)} + ka_{22}^{(2)} + k^2 a_{22}^{(3)} \right) C_2 + a_{23} \varphi^F &= -ik^{-1} P_2^F; \\ k^3 a_{31} C_1 + k^2 \left(a_{32}^{(1)} + ka_{32}^{(2)} \right) C_2 + \left(a_{33}^{(1)} + k^2 a_{33}^{(2)} \right) \varphi^F &= 0; \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= -\gamma_{21}^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \gamma_{21}^{(21)}; & a_{11}^{(2)} &= \delta_1 \theta_1 \left(\delta_{\eta_1 \eta_2} \theta_1^{(21)} - \beta_{11}^{(1)} \gamma_1 \right); \\ a_{12}^{(1)} &= \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[\gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2 \left(\alpha_{21}^{(21)} - \alpha_{21}^{(22)} \gamma_2 \right) \right]; \\ a_{12}^{(2)} &= - \left[\delta_1 \delta_{\eta_1 \eta_2} \theta_1 \left(\beta_{11}^{(1)} + 2\beta_{12}^{(2)} \gamma_2 \right) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_{21}^{(12)} \right]; \\ a_{12}^{(3)} &= -\delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \gamma_2 (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}); & a_{13} &= \delta_1 \theta_1 h; \\ a_{21}^{(1)} &= \gamma_1 \gamma_{22}^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_{22}^{(21)}; & a_{21}^{(2)} &= \theta_3 \left(\theta_2^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \beta_{21}^{(2)} \gamma_1 \right); \\ a_{22}^{(1)} &= \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[\gamma_{22}^{(12)} - 2\gamma_2 \left(\alpha_{22}^{(22)} + \alpha_{22}^{(21)} \gamma_2 \right) \right]; \\ a_{22}^{(2)} &= \delta_{\eta_1 \eta_2} \theta_3 \left(\beta_{21}^{(2)} - 2\beta_{22}^{(1)} \gamma_2 \right) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_2 \gamma_{22}^{(12)}; \\ a_{22}^{(3)} &= \theta_3 \theta_2^{(12)} (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}); & a_{23} &= -2\kappa h G_1; \\ a_{31} &= 2\kappa G_1 \left(\theta_2^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \beta_{21}^{(2)} \right) + \delta_1 \left(\delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \gamma_{21}^{(21)} - \gamma_{21}^{(11)} \right); \\ a_{32}^{(2)} &= (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \left(2\kappa G_1 \theta_2^{(12)} - \delta_1 \gamma_{21}^{(12)} \right); \\ a_{32}^{(1)} &= \delta_{\eta_1 \eta_2} \left\{ 2\kappa G_1 \left(\beta_{21}^{(2)} - 2\gamma_2 \beta_{22}^{(1)} \right) + \delta_1 \left[\gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2 \left(\alpha_{21}^{(21)} - \alpha_{21}^{(22)} \gamma_2 \right) \right] \right\}; \\ a_{33}^{(1)} &= -2\kappa G_1; & a_{33}^{(2)} &= -\theta_2; \\ \theta_m^{(kj)} &= \beta_{m1}^{(k)} - \beta_{m2}^{(k)} \gamma_j^2; & \gamma_{mk}^{(nj)} &= \alpha_{mk}^{(1n)} - \alpha_{mk}^{(2n)} \gamma_j^2; & j, k, m &= 1, 2; \end{aligned}$$

The solution of system (19) can be written as follows

$$C_j = \frac{\delta_1 P_1^F U_1^{(j)} + iP_2^F U_2^{(j)}}{\Delta(k)}; \quad j = 1, 2; \quad \varphi^F = \frac{\delta_1 P_1^F U_1 + iP_2^F U_2}{\Delta(k)}; \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k^2 (b_0 + kb_1 + k^2 b_2 + k^3 b_3 + k^4 b_4 + k^5 b_5); \\ U_j^{(1)} &= k^{-1} \left(b_{10}^{(j)} + kb_{11}^{(j)} + k^2 b_{12}^{(j)} + k^3 b_{13}^{(j)} + k^4 b_{14}^{(j)} \right); \\ U_j^{(2)} &= - \left(b_{20}^{(j)} + kb_{21}^{(j)} + k^2 b_{22}^{(j)} + k^3 b_{23}^{(j)} \right); & U_j &= k^2 \left(b_{30}^{(j)} + kb_{31}^{(j)} + k^2 b_{32}^{(j)} \right); & j &= 1, 2; \\ b_0 &= a_{33}^{(1)} \left(a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{33}^{(1)} \left(a_{11}^{(2)} a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{23} \left(a_{31} a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(1)} a_{32}^{(1)} \right); \\
b_2 &= a_{33}^{(1)} \left(a_{22}^{(2)} a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(3)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(1)} \right) + \\
&+ a_{23} \left(a_{31} a_{12}^{(2)} - a_{11}^{(1)} a_{32}^{(2)} - a_{11}^{(2)} a_{32}^{(1)} \right) + a_{33}^{(2)} \left(a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{13} \left(a_{21}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{31} a_{22}^{(1)} \right); \\
b_3 &= a_{33}^{(2)} \left(a_{11}^{(2)} a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(1)} \right) + \\
&+ a_{13} \left(a_{21}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{31} a_{22}^{(2)} \right) + a_{23} \left(a_{31} a_{12}^{(3)} - a_{11}^{(2)} a_{32}^{(2)} \right) + a_{33}^{(1)} \left(a_{22}^{(3)} a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(2)} \right); \\
b_4 &= a_{33}^{(2)} \left(a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} + a_{11}^{(1)} a_{22}^{(3)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{13} \left(a_{21}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)} a_{31} \right); \\
b_5 &= a_{33}^{(2)} \left(a_{22}^{(3)} a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(2)} \right); \\
b_{10}^{(1)} &= a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(1)} = a_{22}^{(2)} a_{33}^{(1)} - a_{23} a_{32}^{(1)}; \quad b_{12}^{(1)} = a_{22}^{(3)} a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)} a_{22}^{(1)} - a_{23} a_{32}^{(2)}; \\
b_{13}^{(1)} &= a_{33}^{(2)} a_{22}^{(2)}; \quad b_{14}^{(1)} = a_{33}^{(2)} a_{22}^{(3)}; \\
b_{10}^{(2)} &= a_{12}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{12}^{(2)} = a_{12}^{(3)} a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)} a_{12}^{(1)} - a_{13} a_{32}^{(1)}; \\
b_{13}^{(2)} &= a_{33}^{(2)} a_{12}^{(2)} - a_{13} a_{32}^{(2)}; \quad b_{14}^{(2)} = a_{33}^{(2)} a_{12}^{(3)}; \\
b_{20}^{(1)} &= a_{21}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(1)} = a_{21}^{(2)} a_{33}^{(1)} - a_{23} a_{31}; \quad b_{22}^{(1)} = a_{21}^{(1)} a_{33}^{(2)}; \quad b_{23}^{(1)} = a_{21}^{(2)} a_{33}^{(2)}; \\
b_{20}^{(2)} &= a_{11}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{22}^{(2)} = a_{11}^{(1)} a_{33}^{(2)} - a_{13} a_{31}; \quad b_{23}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{33}^{(2)}; \\
b_{30}^{(1)} &= a_{21}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{31}; \quad b_{31}^{(1)} = a_{21}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(2)} a_{31}; \quad b_{32}^{(1)} = a_{21}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)} a_{31}; \\
b_{30}^{(2)} &= a_{11}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{31}; \quad b_{31}^{(2)} = a_{11}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{11}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(2)} a_{31}; \quad b_{32}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{31};
\end{aligned}$$

We apply the Fourier transform to formulas (7), (11) and (13)

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{jm}^F &= \left(-k^2 \alpha_{jm}^{(12-\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(22-\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d\chi^{(2-\delta_{jm})F}}{dy_2} + \\
&+ ik \left(-k^2 \alpha_{jm}^{(11+\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(21+\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(1+\delta_{jm})F}; \quad j, m = 1, 2;
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\dot{u}_j^F = -ikv \left(-k^2 \beta_{j1}^{(m)} + \beta_{j2}^{(m)} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(m)F} - k^2 v \beta_{j1}^{(j)} \frac{d\chi^{(j)F}}{dy_2}; \quad j, m = 1, 2; \quad i \neq m;$$

$$M^F = \frac{4ikG_1 h^3}{3} \frac{1}{1-\nu_1} \varphi^F;$$

Taking into account (17), (18), and (20), expressions (21) can be represented as

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{mj}^F &= (-i)^{\delta_{mj}} k^2 \Delta^{-1}(k) \left(\delta_1 P_1^F \Gamma_{mj}^{(1)} + i P_2^F \Gamma_{mj}^{(2)} \right); \\
\dot{u}_j^F &= i^{2-j} v k^2 \Delta^{-1}(k) \left(\delta_1 P_1^F \Gamma_2^{(1)} + i P_2^F \Gamma_2^{(2)} \right); \quad m, j = 1, 2; \\
M^F &= k \Delta^{-1}(k) \left(i \delta_1 P_1^F \Gamma_\varphi^{(1)} - P_2^F \Gamma_\varphi^{(2)} \right);
\end{aligned} \tag{22}$$

where

$$\begin{aligned}\Gamma_{mm}^{(j)} &= k \left(\gamma_1 \gamma_{mm}^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_{mm}^{(21)} \right) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} - \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[2\gamma_2 \left(\gamma_2 \alpha_{mm}^{(21)} + \alpha_{mm}^{(22)} \right) - \gamma_{mm}^{(12)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - k \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) \left(\gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} + \gamma_{mm}^{(22)} \right) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} \right\} \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\ \Gamma_{mn}^{(j)} &= k \left(\gamma_{mn}^{(11)} - \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \gamma_{mn}^{(21)} \right) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} + \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[2\gamma_2 \left(\gamma_2 \alpha_{mn}^{(22)} - \alpha_{21}^{(21)} \right) - \gamma_{mn}^{(22)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + k \left[\delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) \left(\gamma_{mn}^{(12)} - \gamma_2 \gamma_{mn}^{(22)} \right) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_{mn}^{(12)} \right] \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\ \Gamma_{\varphi}^{(j)} &= \frac{4 G_1 h^3 U_j}{3 (1 - \nu_1)}.\end{aligned}$$

Thus, the solution of the problem of the steady motion of a two-layer elastic half-space with initial stresses under the influence of a moving load in the region of Fourier images has the form (22).

From (22) it follows that the value of the quantities characterizing the stress-strain state of a two-layer elastic half-space increases without limit at $\Delta(k) \rightarrow 0$. Under the condition that real positive multiple roots of the equation $\Delta(k) = 0$ exist, resonance is possible [22].

The results of studying the function $\Delta(k)$ for a compressible and incompressible half-space and various cases of conjugation of a plate and a half-space are given in [11,12].

It follows from the results obtained in [11,12] that the number of critical velocities of the load movement significantly depends on the initial stresses in the half-space, the mechanical characteristics of the plate and the half-space, and the conditions of their contact. The effect of initial stresses on the values of critical velocities is more significant for relatively soft plates and for non-rigid contacts. The value of the lowest critical speed for a non-rigid contact is always less than for a hard one.

4. Numerical studies. In order to pass in formulas (22) to the originals, one should use the inverse Fourier transform.

It follows from the results obtained in [11,12] that the calculation of the inversion integrals essentially depends on the speed of the load. Depending on the velocity v , the denominator $\Delta(k)$ in the inversion integrals may or may not have real positive roots. If no root lies on the real axis, then the inversion integrals have no singularities and can be calculated directly using tables. In the presence of unequal real positive roots of the denominator $\Delta(k)$, the integrals along the integration contour from to can be replaced by the sum of the principal value of the integral $-\infty + i\gamma$ and $+\infty + i\gamma$ the sum of all residues multiplied by $(-i\pi)$ [21]. In the case of the existence of a double positive root, the inversion integrals do not exist even in the Cauchy sense, i.e. resonance appears.

Since it was assumed in the formulation of the problem that the perturbations caused by the moving load are very small, the resonant region was excluded from consideration.

Figures 1-4 show how the initial stresses in the base affect the characteristics of the stress-strain state in a two-layer half-space at different speeds of the load (subsonic, transonic, and supersonic) and the conditions of contact between the plate and the half-space.

The following designations are used in the figures: c_{11} and c_{12} are the velocities of propagation in the direction of the axis Oy_1 , respectively, of longitudinal and transverse polarized waves in an unlimited compressible body with initial stresses, c_1 and c_2 are the velocities of propagation of transverse waves in the direction of the axes Oy_1 and Oy_2 in an unlimited incompressible body with initial stresses, c_s is the speed of movement of shear waves in the layer, v^* is the critical speed of the load [11,12].

As an example, a compressible half-space with an elastic potential of harmonic type and an incompressible half-space with the Bartenev-Khazanovich potential are considered [1]. It was assumed that the initial deformed state is flat and there is no surface load.

The calculation results are given for a concentrated linear load, the normal and tangential components of which are determined by the formulas

$$P_1 = P\delta(y_1) \cos \alpha; \quad P_2 = P\delta(y_1) \sin \alpha; \quad P = G_1;$$

where α is the angle of inclination of the load to the axis Oy_1 .

5. Conclusions and prospects for further research. An analysis of the results shows that the presence of initial stresses has a significant effect on the distribution of stresses and displacement velocities in the half-space and the bending moment in the plate. This effect is different depending on the position of the considered point of the layered body relative to the point of application of the load.

The values of the parameters of the stress-strain state at a particular point of the layered body depend on the initial stresses, its coordinates, and contact conditions.

For subcritical speeds of movement of the load with rigid contact of stress, the speed of movement in the half-space and the bending moment in the plate is less than with non-rigid contact. At the same time, in the studied range of values, the growth rate of the amplitude of the studied quantities during compression is greater than during tension. Attenuation with distance from the point of application of the load in compression is slower than in tension.

The influence of the initial stresses increases significantly with the increase in the speed of the load. This is especially true during pre-compression. With rigid contact, the influence of velocity and initial stresses is less significant than with non-rigid contact.

Accounting for rotational inertia within the considered velocities of the surface load and values λ_1 in the case of rigid contact introduces an insignificant correction (less than 2.6%), but in the case of non-rigid contact, the difference in the results will be very large (up to 30%). It is especially necessary to take into account the inertia of rotation at $\lambda_1 < 1$ and high speeds of the load.

It can be seen that as the velocity increases, the symmetry is more and more violated, and the direct wave decays much faster and is practically absent in the supersonic case. However, it does not completely disappear. This is apparently explained by the layering of the medium.

In the case of rigid contact, the direct wave decays much faster than in a non-rigid contact.

Harmonic potential

$$(\rho/\rho_1 = 0,5; \mu/G_1 = 0,5; \kappa = 0,845; \nu = 0,3; \nu_1 = 0,25; \alpha = \pi/2; \delta_0 = 1)$$

$$v < v^* < c_{12}; v^2 = 0,1c_s^2 \quad c_{12} < v < c_{11}; v^2 = 2c_s^2 \quad v > c_{11}; v^2 = 6c_s^2$$

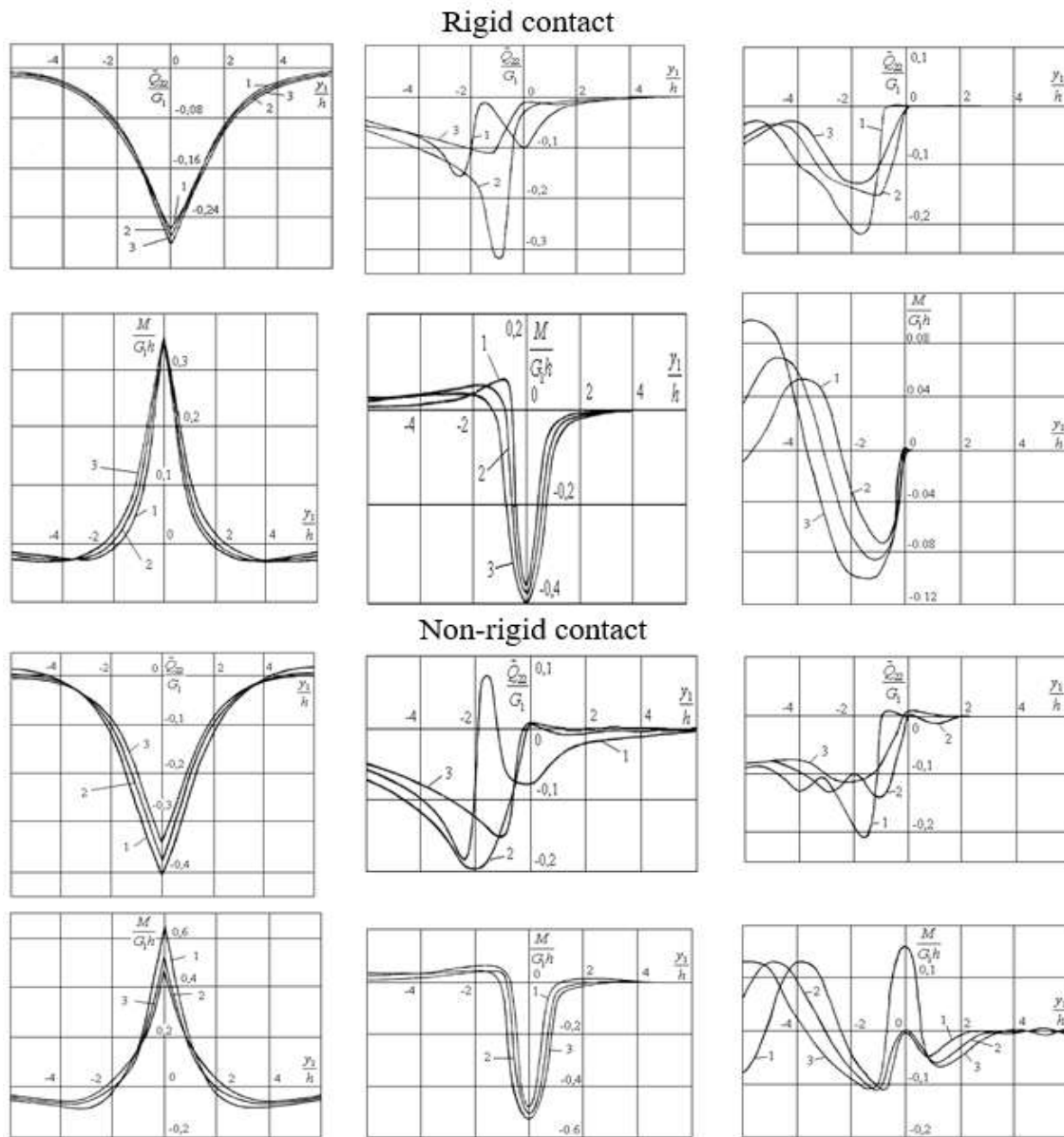
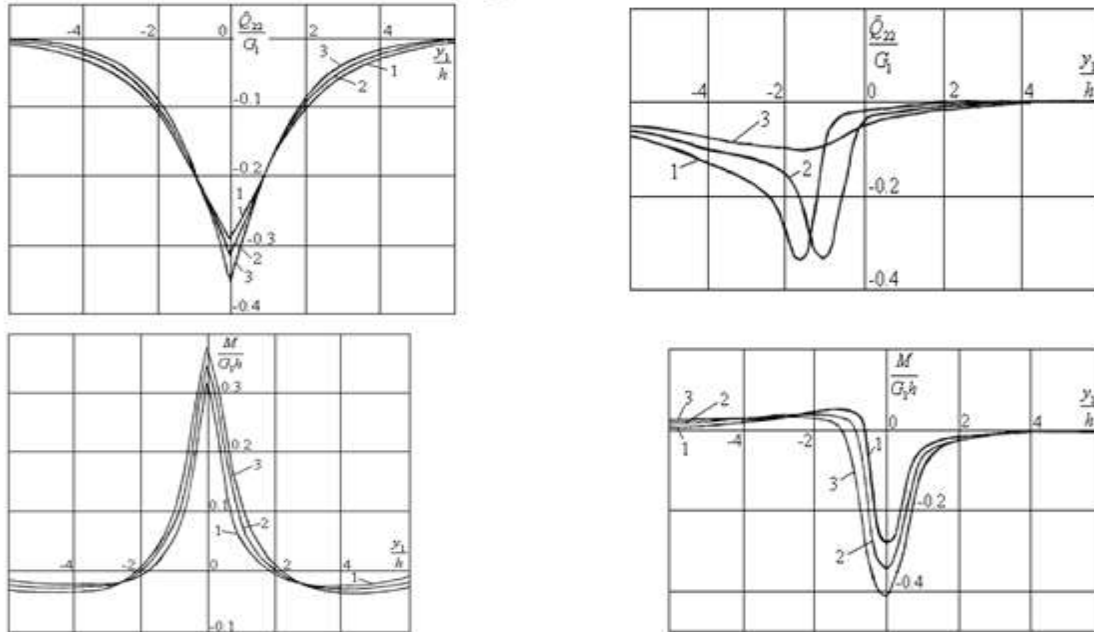


Figure 1. Distribution of stresses and displacement velocities in the half-space at depth $y_2 = -2h/\lambda_2$ and the bending moment in the plate at depth $y_2 = -h/2$ (curve 1 corresponds to $\lambda_1 = 0,8$; curve 2 - $\lambda_1 = 1$; curve 3 - $\lambda_1 = 1,2$)

Elastic potential of the Bartenev-Khazanovich type
 $(\kappa = 0,845; \mu/G_1 = 0,5; \rho/\rho_1 = 0,5; \nu_1 = 0,25; \alpha = \pi/2; \delta_0 = 1)$
 $v < v^* < c_1; v^2 = 0,1c_s^2$ $v > c_1; v^2 = 2c_s^2$

Rigid contact



Non-rigid contact

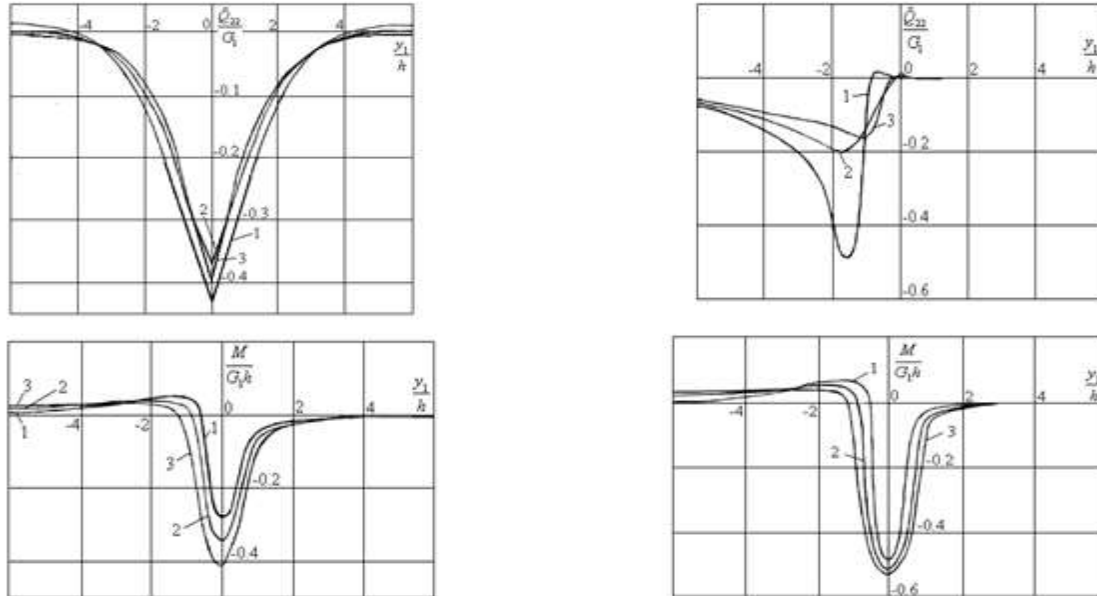
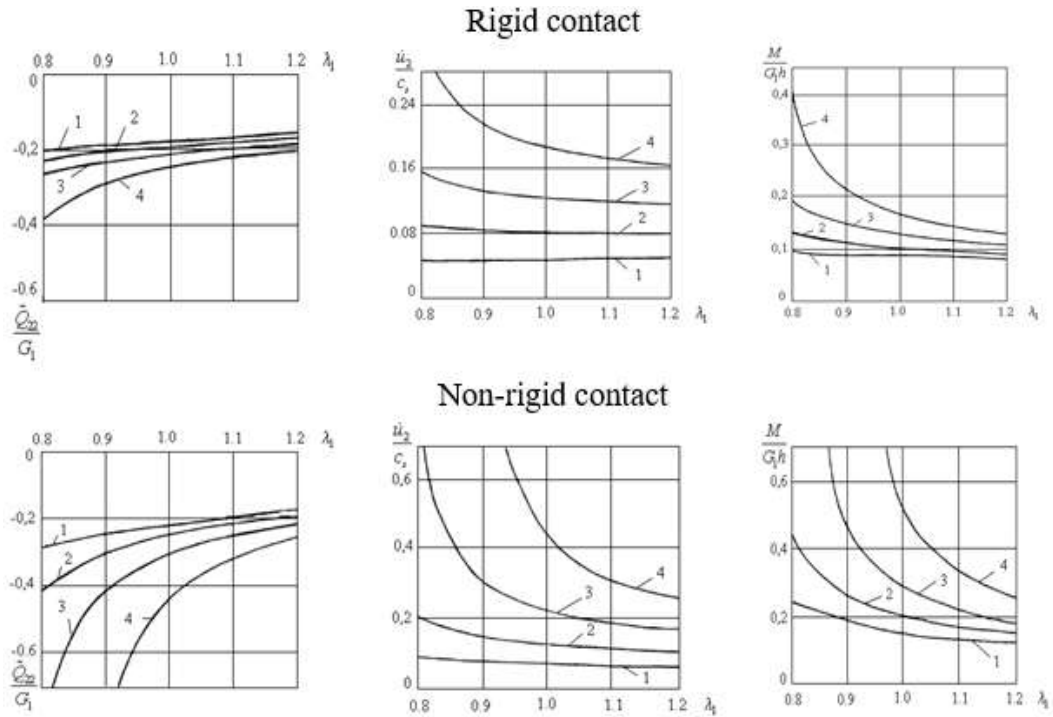


Figure 2. Distribution of stresses and displacement velocities in the half-space at depth $y_2 = -2h/\lambda_2$ and the bending moment in the plate at depth $y_2 = -h/2$ (curve 1 corresponds to $\lambda_1 = 0,8$; curve 2 - $\lambda_1 = 1$; curve 3 - $\lambda_1 = 1,2$)

Harmonic potential



Elastic potential of the Bartenev-Khazanovich type

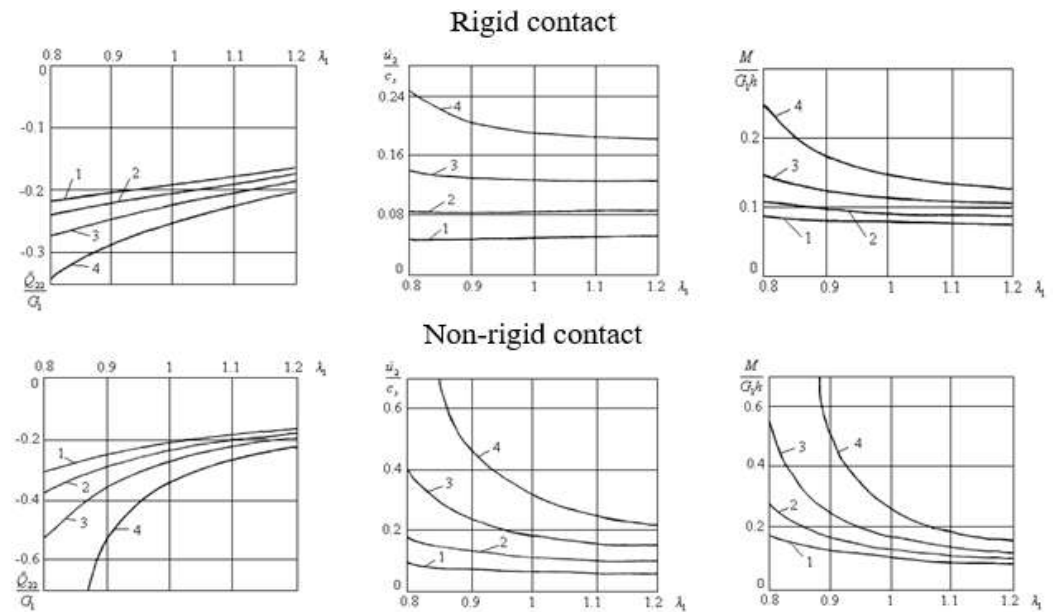


Figure 3. Dependence of the values characterizing the stress-strain state of the underlying half-space on the initial stresses at different subcritical speeds of the load at the point $y_1 = -\lambda_1 h$, $y_2 = -2h/\lambda_2$ (curve 1 corresponds to $v^2 = 0,1c_s^2$, curve 2 – $v^2 = 0,2c_s^2$, curve 3 – $v^2 = 0,3c_s^2$, curve 4 – $v^2 = 0,4c_s^2$)

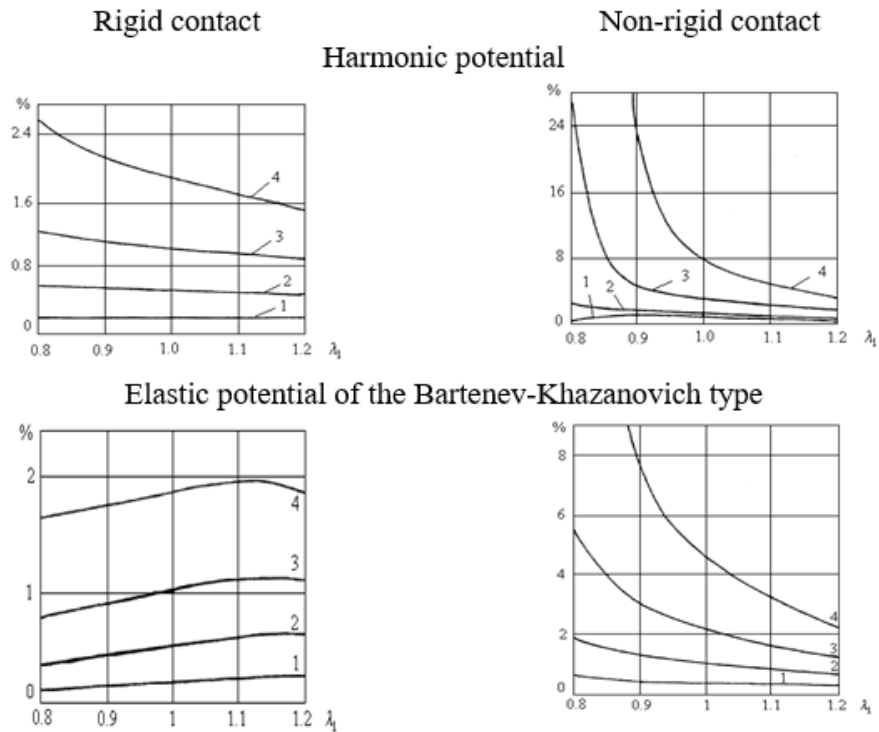


Figure 4. Influence of taking into account the inertia of rotation at different speeds of movement of the load and initial deformations on the value of the stress component \tilde{Q}_{22} at the point $y_1 = -\lambda_1 h$; $y_2 = -2h/\lambda_2$ (curve 1 corresponds to $v^2 = 0,1c_s^2$, curve 2 to $v^2 = 0,2c_s^2$, curve 3 to $v^2 = 0,3c_s^2$, curve 4 to $v^2 = 0,4c_s^2$)

References

1. Guz, A. N. (2004). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Kiev: Publisher "A.S.K"*.
2. Guz, A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2007) Statics and dynamics of the elastic grounds with initial (residual) stresses. *Kremenchug: Publisher "Kremenchug"*.
3. Guz, A. N. (1998). Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 1. Problem statement and general relationships. *Int. Appl. Mech.*, 34(12), 1175–1186.
4. Guz, A. N. (1999). Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 2. Cracks of normal separation (Mode I). *Int. Appl. Mech.*, 35(1), 1–12.
5. Guz, A. N. (1999). Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 3. Transverse-Shear (Mode II) and Longitudinal-Shear (Mode III). *Int. Appl. Mech.*, 35(2), P. 109–119.
6. Guz, A. N. (1999). Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 4. Wedge problems. *Int. Appl. Mech.*, 35(3), 225–232.
7. Guz, A. N. (2002). Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations. *Int. Appl. Mech.*, 38(4), 423–431.
8. Guz, A. N. (2002). Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 2. Exact solution. The case of unequal roots. *Int. Appl. Mech.*, 38(5), 548–555.
9. Guz, A. N. (2002). Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 3. Exact solution. The case of equal roots. *Int. Appl. Mech.*, 38(6), 693–700.
10. Guz, A. N. (2002). Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 4. Exact solution. The case of unequal and equal roots. *Int. Appl. Mech.*, 38(7), 806–814.

11. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P. & Guz, A. N. (2008). Dynamics of a Prestressed Incompressible Layered Half-Space under Moving Load. *Int. Appl. Mech.*, 44(3), 268–285.
12. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P. & Guz, A. N. (2008). Dynamic Problem for a Prestressed Compressible Layered Half-Space. *Int. Appl. Mech.*, 44(4), 388–405.
13. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P. and Guz, A. N. (2008). Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.*, 44(5), 481–492.
14. Guz, A. N. (2004). Desing models in linearized solid mechanics. *Int. Appl. Mech.*, 40(1), 1–37.
15. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.*, 38(1), 23–59.
16. Guz, A. N. (2001). Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. *Int. Appl. Mech.*, 37(1), 1–37.
17. Guz, A. N., & Guz, I. A. (2004). Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions. *Int. Appl. Mech.*, 40(1), 1–29.
18. Guz, A. N., Menshykov, O. V., Zozulya, V. V. & Guz, I. A. (2007). Contact Problem for the Flat Elliptical Crack under Normally Incident Shear Wave. *CMES*. 17(3), 205–214.
19. Guz, A. N., Rushchitsky, J. J. & Guz, I. A. (2008). Comparative Computer Modeling of Carbon-Polymer Composites with Carbon or Graphite Microfibers or Carbon Nanotubes. *CMES*. 26(3), P. 139–156.
20. Guz, A. N., & Zozulya, V. V. (2007). Investigation of the Effect of Frictional Contact in III Mode Crack under of the SH-Wave Harmonic Load. *CMES*. 22(2), 119–128.
21. Wright, J. P., & Baron, M. L. (1970). Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 37(1), 148–159.
22. Achenbach, J. D., Keshawa, S. P., & Herrmann, G. (1967). Moving load on a plate resting on an elastic half space. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 34(4), 183–189.

Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф., Жигуц Ю. Ю. Динаміка двошарового напівпростору з початковим напругами при впливі рухомого навантаження.

У даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напругами розглянуто плоске завдання про обурення, що рухається з постійною швидкістю поверхневим навантаженням двошарового напівпростору з початковими напругами з довільною формою пружного потенціалу. Розв'язок отримано у загальному вигляді для стисливого та стисливого напівпростору та різних умов контакту. Численні результати наведені для напівпросторів з матеріалів, що стискається і стискається відповідно з пружним потенціалом гармонійного типу і пружним потенціалом типу Бартенева-Хазановича при жорсткому і ковзному умовах контакту.

Ключові слова: шаруватий напівпростір, початкова напруга, рухоме навантаження.

Список використаної літератури

1. Guz, A. N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Kiev: Publisher “A.S.K”, 2004. 672 p.
2. Guz, A. N., Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. Statics and dynamics of the elastic grounds with initial (residual) stresses. Kremenchug: Publisher “Kremenchug”, 2007. 795 p.
3. Guz, A. N. Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 1. Problem statement and general relationships. *Int. Appl. Mech.* 1998. Vol. 34, No 12. P. 1175–1186.
4. Guz, A. N. Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 2. Craks of normal separation (Mode I). *Int. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35, No 1. P. 1–12.
5. Guz, A. N. Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 3. Transverse-Shear (Mode II) and Longitudinal-Shear (Mode III). *Int. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35, No 2. P. 109–119.

6. Guz, A. N. Dynamic problems of the mechanics of the brittle fracture of materials with initial stresses for moving cracks. 4. Wedge problems. *Int. Appl. Mech.* 1999. Vol. 35, No 3. P. 225–232.
7. Guz, A. N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 1. Problem formulation and basic relations. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 4. P. 423–431.
8. Guz, A. N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 2. Exact solution. The case of unequal roots. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 5. P. 548–555.
9. Guz, A. N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 3. Exact solution. The case of equal roots. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 6. P. 693–700.
10. Guz, A. N. Critical phenomena in cracking of the interface between two prestressed materials. 4. Exact solution. The case of unequal and equal roots. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 7. P. 806–814.
11. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Guz A. N. Dynamics of a Prestressed Incompressible Layered Half-Space under Moving Load. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No 3. P. 268–285.
12. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Guz A. N. Dynamic Problem for a Prestressed Compressible Layered Half-Space. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No 4. P. 388–405.
13. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Guz A. N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No 5. P. 481–492.
14. Guz, A. N. Desing models in linearized solid mechanics. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, No 1. P. 1–37.
15. Guz, A. N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Int. Appl. Mech.* 2002. Vol. 38, No 1. P. 23–59.
16. Guz, A. N. Constructing the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. *Int. Appl. Mech.* 2001. Vol. 37, No 1. P. 1–37.
17. Guz, A. N., Guz, I. A. Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions. *Int. Appl. Mech.* 2004. Vol. 40, No 1. P. 1–29.
18. Guz, A. N., Menshykov O. V., Zozulya V. V., Guz I. A. Contact Problem for the Flat Elliptical Crack under Normally Incident Shear Wave. CMES. 2007. Vol. 17, No 3. P. 205–214.
19. Guz, A. N., Rushchitsky J. J., Guz I. A. Comparative Computer Modeling of Carbon-Polymer Composites with Carbon or Graphite Microfibers or Carbon Nanotubes. CMES. 2008. Vol. 26, No 3. P. 139–156.
20. Guz, A. N., Zozulya V.V. Investigation of the Effect of Frictional Contact in III Mode Crack under of the SH-Wave Harmonic Load. CMES. 2007. Vol. 22, No 2. P. 119–128.
21. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1970. Vol. 37, No 1. P. 148–159.
22. Achenbach J. D., Keshawa S. P., Herrmann, G. Moving load on a plate resting on an elastic half space. *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1967. Vol. 34, No 4. P. 183–189.

Одержано 08.04.2022

УДК 004.942

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).109-125](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).109-125)**Н. Бойко¹, В. Качмарик²**

¹ Національний університет “Львівська політехніка”,
доцент кафедри Системи штучного інтелекту,
кандидат економічних наук
nataliya.i.boyko@lpnu.ua,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6962-9363>

² Національний університет “Львівська політехніка”,
студент 4-го курсу кафедри Системи штучного інтелекту,
viktor.kachmaryk.knm.2018@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1074-2721>

ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЗАСТОСОВУЮЧИ МЕРЕЖІ ДОВГОСТРОКОВОЇ ПАМ'ЯТІ

Дослідження присвячено комплексному вивченню мереж довгої короткочасної пам'яті (ДКЧП). Дана архітектура є видом рекурентних нейронних мереж (РНМ), у яких з'єднання між вузлами утворюють граф, орієнтований у часі. У дослідженні проводиться огляд будови та роботи ДКЧП. Також здійснюється аналіз матеріалів і методів. У статті проводяться експерименти: будуються різні моделі для передбачення часових рядів. Аналізуються отримані результати дослідження. У цьому дослідженні будуть розглянуті цінність ДКЧП з практичної сторони у плані застосування, в залежності від виду вхідних даних, а також з теоретичної сторони, яка базуватиметься на розумінні будови блоку ДКЧП.

Ключові слова: довга короткочасна пам'ять, рекурентна нейронна мережа, машинне навчання, k-nearest neighbors, Long short term memory, Root mean square error.

1. Вступ. В своєму принципі РНМ можуть використовувати свою внутрішню пам'ять для зберігання представлень останніх вхідних подій у формі активацій (короткочасної пам'яті), а також для обробки довільних послідовностей входів. Це робить їх потенційно важливими для багатьох застосунків, зокрема розпізнавання мовлення, розпізнавання несеgmentованого неперервного рукописного тексту та композиції музики.

Не зважаючи на свої переваги, в таких традиційних РНМ, як зворотному поширенню в часі (Werbos, 1988) або рекурентному навчанні в реальному часі (Robinson & Fallside, 1987) існує проблема зникання або вибухання зворотно поширюваних похибок [1, 3]. Це в свою чергу спричиняє повільну роботу програми або взагалі її припинення, коли часові затримки між важливими подіями є занадто великими.

Для усунення даних недоліків, було запропоновано новий метод побудови РНМ: довгої короткочасної пам'яті (Sepp Hochreiter & Jürgen Schmidhuber, 1997) [1, 5]. Будова ДКЧП призначена для подолання цих проблем із зворотним потоком помилок. Дана мережа може навчитися асоціювати важливі події при часових затримках невідомої тривалості, які перевищують 1000 кроків, навіть у випадку шумних, нестиснутих вхідних послідовностей. Це досягається ефективним, заснованим на градієнті, алгоритмом для даної архітектури, який забезпечує постійний потік помилок через внутрішні стани спеціальних одиниць ДКЧП.

Ефективність даної мережі, а також її нечутливість до довжини часових проміжків між важливими подіями дає ДКЧП перевагу в численних застосуваннях над традиційними РНМ, прихованими марковськими моделями та іншими методами навчання послідовностей. Всі переваги мережі ДКЧП привели до її застосування в багатьох сферах інтелектуального аналізу даних, а саме: визначення аномалій в часових рядах, прогнозування: фінансового ринку, швидкості дорожнього руху, температури поверхні моря і т.д. Все більшої популярності набувають технології узагальнення по тексту чи відеозаписі, адже кожного дня генерується така кількість відео, що для їх перегляду необхідно понад 82 роки. Необхідність автоматичних інструментів для аналізу та розуміння великої кількості даних стверджують про актуальність обраної теми, вивчення якої в даній роботі надасть новий ракурс аналізу мереж ДКЧП.

Метою виконання даного дослідження полягає у ефективності мереж ДКЧП для застосувань навчання з досвіду з метою передбачення часових рядів, а саме пошук тенденції в даних часових рядах. Для здійснення заданої мети служать наступні **завдання**:

- З'ясувати способи використання ДКЧП в різних методах машинного навчання (МН).
- Розглянути приклади задач з використанням ДКЧП.
- Провести порівняння обробки та передбачення часових рядів з іншими відомими методами.

2. Огляд літературних джерел. Для розуміння аспектів та принципів мереж ДКЧП, аналізу та підсумовування існуючих підходів та методів, які використовуються при побудові даних мереж, було проведено аналіз літературних джерел, результати якого будуть використанні при проведенні досліджень, описаних в наступних розділах.

Стаття “Long Short-Term Memory” дозволила дізнатись детальний опис переваг ДКЧП та результати практичних досліджень, які дали можливість чітко побачити переваги та користь даної архітектури РНМ (Sepp Hochreiter & Jurgen Schmidhuber) [2, 14]. Зміна способу побудови блоку рекурентних нейронних мереж а також створення нового алгоритму заснованого на градієнті, створило цілком нову архітектуру, яка значно перевершує в точності традиційні РНМ, а також усуває проблему із зворотним потоком помилок, що робить її нечутливою до довжини часових проміжків між важливими подіями.

Якісно новим стало звернення до статті “Improved Semantic Representations From Tree-Structured Long Short-Term Memory Networks” [3, 5, 15], що дозволило дізнатись про покращену будову ДКЧП, де замість базової структури лінійного ланцюга, було представлено узагальнення ДКЧП до деревоподібної структури топології мережі (Kai Sheng Tai, Richard Socher, Christopher D. Manning) [4, 5, 10]. Це в свою чергу, призвело до того, що дана мережа перевершила всі існуючі системи та сильні базові показники звичайних ДКЧП.

3. Методи та засоби дослідження. Мережа ДКЧП є штучною нейронною мережею, яка завдяки своїй будові, яка містить вузли ДКЧП, не має проблеми зникання градієнту, на відміну від традиційних РНМ. Вузол ДКЧП – це вузол рекурентної нейронної мережі, який виділяється запам'ятовуванням значень для довгих, або коротких проміжків часу. Ключем до цієї здатності є наявність у будові вузла - рекурентного вентиля, який називають “забувальним”

[4, 8, 18]. Таким чином, значення, що зберігаються, не розплющуються ітеративно з плином часу, коли між значеннями великий проміжок, і члени градієнту не мають схильності розмиватися, коли для їх тренування застосовується зворотне поширення в часі.

Мережі ДКЧП часто втілюють у блоках, які складаються з вузлів ДКЧП. Така конструкція є типовою для глибоких багат шарових нейронних мереж, адже вона дає можливість реалізації на паралельному апаратному забезпеченні [2, 7, 17].

Типовий блок ДКЧП містить три вентиля (gates), які використовуються для керування потоку інформації до або з їхньої пам'яті. Ці вентиля реалізовані із застосуванням логістичних функцій, а саме сигмоїдної для обчислення значень між 0 та 1. Наприклад, "вхідний" вентиль керує мірою, до якої нове значення входить в пам'яті. "Забувальний" вентиль керує мірою, до якої значення залишається в пам'яті. А "вихідний" вентиль керує мірою, до якої значення в пам'яті використовується для обчислення активування виходу з блоку [6, 10, 12].

Єдині ваги, які є в блоці ДКЧП (W та U), використовуються для спрямування дії вентилів. Ці ваги застосовуються між значеннями, які надходять в блок (включно з вхідним вектором x_t та виходом з попереднього моменту часу h_{t-1}) та кожним із вентилів (Формула 1) [11, 13, 16]. Отже, блок ДКЧП визначає, яким чином підтримувати свою пам'ять як функцію від цих значень, яка мінімізує втрати. Дані блоки зазвичай тренують за допомогою алгоритму зворотного поширення в часі.

Традиційна ДКЧП із "забувальними" вузлами представлена на Рис. 1.

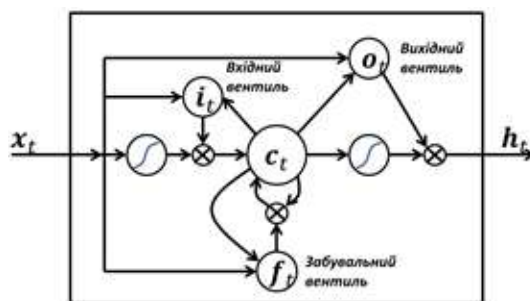


Рис. 1. Будова блоку ДКЧП

$$\begin{aligned}
 f_t &= \sigma_g(W_f x_t + U_f h_{t-1} + b_f) \\
 i_t &= \sigma_g(W_i x_t + U_i h_{t-1} + b_i) \\
 o_t &= \sigma_g(W_o x_t + U_o h_{t-1} + b_o) \\
 c_t &= f_t \circ c_{t-1} + i_t \circ \sigma_c(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c) \\
 h_t &= o_t \circ \sigma_h(c_t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

де \circ - позначає добуток Адамара (по-елементний матричний добуток);

Змінні (нижній індекс t вказує на час):

x_t - "вхідний" вектор;

h_t - "вихідний" вектор ($h_0 = 0$);

c_t – вектор стану комірки ($c_0 = 0$);

W, U і b – матриці та вектор параметрів;

f_t, i_t та o_t – вектори вентилів;

f_t – вектор “забувального” вентиля. Вага пам’ятання старої інформації;

i_t – вектор “вхідного” вентиля. Вага отримання нової інформації;

o_t – вектор “вихідного” вентиля, вирішує яку інформацію подавати на вихід.

Функції активації:

σ_g – в оригіналі є сигмоїдною функцією;

σ_c – в оригіналі є гіперболічним тангенсом;

σ_h – в оригіналі є гіперболічним тангенсом.

Експерименти. Аналіз часових рядів відноситься до аналізу зміни тенденції даних протягом певного періоду часу й має різноманітне застосування. Одним із таких додатків є прогнозування майбутньої вартості товару на основі його минулих значень. Прогнозування майбутніх цін на акції є, мабуть, найкращим прикладом такого застосування [5, 9, 10].

Метою виконання даного завдання є побудова мережі довгої короткочасної пам’яті з метою передбачення тенденцій даних за певний період часу та порівняння отриманих результатів з результатами, отриманими за допомогою інших методів машинного навчання [6, 11, 18].

Для програмної реалізації був обраний датасет Apple Inc. (AAPL), який був завантажений з сайту з finance.yahoo.com. Для навчання наших алгоритмів ми будемо використовувати ціни акцій Apple з 2 січня 2013 року по 26 лютого 2021 року. Для прогнозування ми будемо використовувати ціни акцій Apple за березень 2021 року. Зразок даних наведено на Рис. 2.

	Date	Open	High	Low	Close	Volume
0	2013-01-02	19.779285	19.821428	19.343929	19.688213	568518800
1	2013-01-03	19.567142	19.631871	19.321428	19.368714	352965200
2	2013-01-04	19.177500	19.236786	18.779642	18.821428	594333600
3	2013-01-07	18.642857	18.983578	18.488800	18.718714	484156400
4	2013-01-08	18.988356	18.996871	18.616872	18.761878	458787200
...
2048	2021-02-22	128.089995	129.728801	125.599998	126.088800	183916400
2049	2021-02-23	123.768802	126.789999	118.389999	125.868801	158273800
2050	2021-02-24	124.948802	125.559998	122.238803	125.349998	111839900
2051	2021-02-25	124.688800	126.459999	128.548801	128.989998	148199500
2052	2021-02-26	122.589996	124.849998	121.199997	121.268802	164328800

Рис. 2. Структура даних статистики цін на акції Apple з 2013 по 2021 роки

Як можемо побачити датасет складається з наступних 6 атрибутів:

- Date – дата (об’єкт дати і часу);
- Open – ціна під час відкриття (неперервне значення);
- High – найвища ціна (неперервне значення);
- Low – найнижча ціна (неперервне значення);
- Close – ціна під час закриття (неперервне значення);
- Volume – обсяг (неперервне значення).

При роботі з такими часовими рядами, як: ціни на акції певних компаній або ж ціни на криптовалюти нас найбільше цікавлять Open та Close ціни.

Як ми знаємо, ціни на фондовому ринку є вкрай непередбачуваними та нестабільними. Це означає, що в даних часових рядах немає відповідних закономірностей, які б дозволили майже ідеально змоделювати ціни протягом певного відрізка часу [13, 15].

Проте, ми принаймні можемо створити таку модель машинного навчання, завдяки якій ми зробимо такі передбачення, які корелюють з фактичною поведінкою даних. Іншими словами, нам потрібно передбачити лише коливання майбутньої ціни акції, а не її точні значення.

Оскільки ми будемо передбачувати ціну акцій під час закриття (close), то нас не цікавлять інші колонки, тому ми видалимо їх з дата сету (Рис. 3).

	Date	Close
0	2013-01-02	19.600213
1	2013-01-03	19.360714
2	2013-01-04	18.821428
3	2013-01-07	18.710714
4	2013-01-08	18.761078
5	2013-01-09	18.467857
6	2013-01-10	18.696787
7	2013-01-11	18.582144

Рис. 3. Датасет після видалення зайвих колонок

Як можемо побачити на Рис. `refimage3`, після видалення зайвих колонок ми отримали датасет залежності між датою та ціною за одиницю акції Apple.

Якщо візуалізувати дану залежність: ціни за одиницю акції під час закриття (close) відносно дати, то можна побачити наступний Рис. `refimage4`.

Як можемо побачити на Рис. 4, тенденція є вкрай нелінійною, що робить важким завданням її(тенденцію) вловити, використовуючи дану інформацію. Ще одну річ, яку можемо побачити є те, що ціни за одиницю акції Apple близькі до 2021 року є значно вищими ніж ціни до 2019 року, що ускладнює наше завдання в знаходженні кореляції між даними. Саме для такого завдання нам пригодиться потужність мережі довгої короткочасної пам'яті, а також ми зможемо на наглядному прикладі переконатися в перевагах даних мереж відносно інших методів машинного навчання [7, 9].

Для того, щоб вивчити вплив прогнозуючих сил у фінансових часових рядах ми побудували одну традиційну модель часових рядів, дві базові моделі машинного навчання, а також дві моделі глибинного навчання. Даніми моделями є:

- Рухоме середнє;
- Лінійна регресія;
- K-найближчих сусідів (KNN);
- Стандартна мережа довгої короткочасної пам'яті (LSTM);
- Розширена мережа довгої короткочасної пам'яті, яка має кілька додаткових прихованих шарів ДКЧП (Stacked-LSTM).

Для оцінки даних моделей ми будемо використовувати середньоквадратичну помилку (RMSE) в якості метрики ефективності моделі, а також візуалізовані

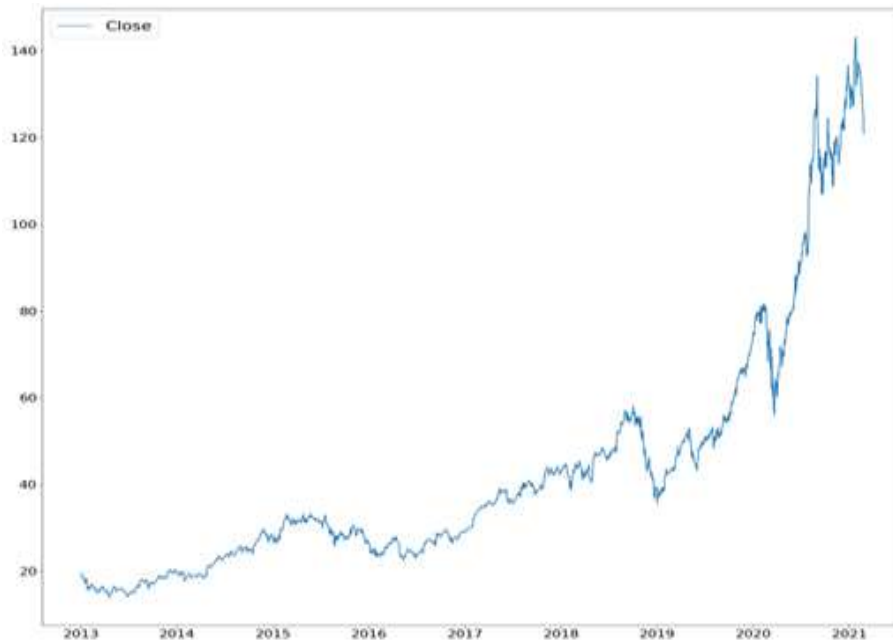


Рис. 4. Тенденція ціни на акції Apple

отримані дані для кращого розуміння точності відтворення тенденції ціни на акції Apple.

Програмна реалізація даних моделей виконувалась за допомогою високорівневої мови програмування Python. Для побудови базових моделей машинного навчання була використана бібліотека `scikit-learn`, а для побудови моделей глибокого навчання – бібліотеки `keras` та `tensorflow`.

“Середнє” є однією з базових арифметичних дій, яку ми часто використовуємо в повсякденному житті. Наприклад знаходження середньої температури за кілька останніх днів, щоб знати приблизну температуру сьогодні. Отже це є хорошою відправною точкою в використанні її на нашому датасеті, щоб передбачити ціну акцій Apple.

Передбачена ціна для кожного дня буде середнім від набору раніше спостережених значень. Замість того, щоб використовувати просте середнє, ми застосуємо алгоритм рухомого середнього, який використовує найновіший набір значень для кожного передбачення [8]. Іншими словами, для кожного наступного кроку передбачувані значення враховуються, вилучаючи найстаріше спостережуване значення з набору. Для більш легкого розуміння даний алгоритм зображений на Рис. 5.

Застосувавши модель рухомого середнього, ми отримали наступні результати: Середньоквадратична помилка дорівнює 7.654, що є не надто хорошим значенням.

Як ми можемо побачити на Рис. 6, передбачення, зроблені за допомогою нашої модель, не корелюють з фактичною поведінкою, що вказує на те, що алгоритм не впорався з відшукуванням тенденції на ціну акцій Apple. Перейдемо до моделей машинного навчання.

Найпростішим алгоритмом машинного навчання, який ми можемо застосувати до даних такого типу є лінійна регресія. Модель лінійної регресії повертає

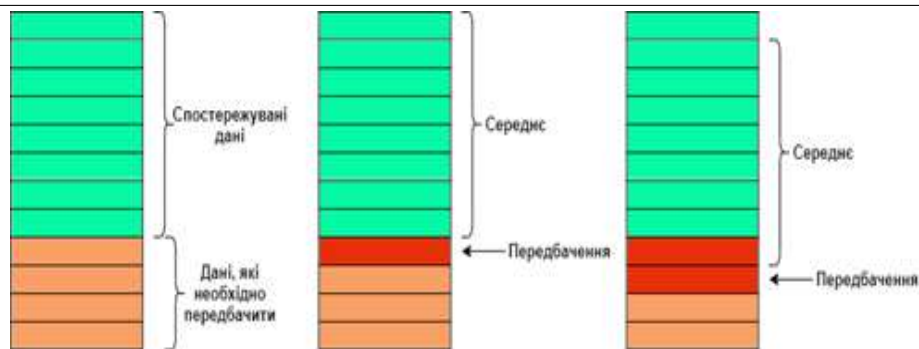


Рис. 5. Алгоритм рухомого середнього

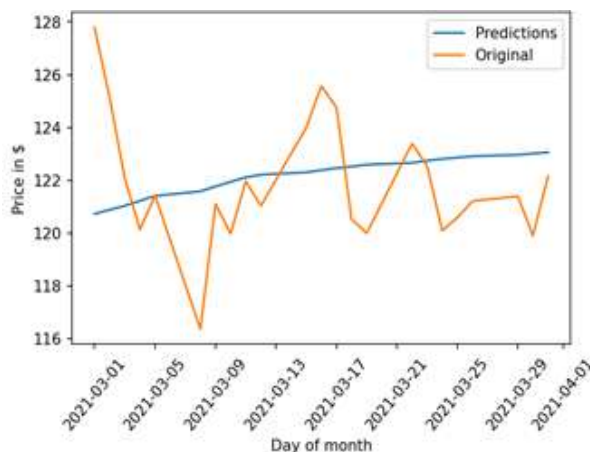


Рис. 6. Передбачення ціни на акції Apple при використанні рухомого середнього

рівняння, яке визначає взаємозв'язок між незалежними змінними та залежною змінною.

Рівняння для лінійної регресії можна зобразити наступним чином (Формула 2):

$$Y = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_n x_n, \tag{2}$$

де x_1, x_2, \dots, x_n представляють незалежні змінні, тоді як коефіцієнти $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ представляють ваги.

Для вирішення проблеми ми не маємо набору незалежних змінних, а лише дати і відповідні їм ціни на акції Apple. Тому ми використаємо стовпець дати для вилучення таких характеристик, як – день тижня, початок/кінець місяця, рік тощо, за допомогою бібліотеки *fastai*.

Як можемо побачити на Рис. 7, новоутворений датасет окрім дати та ціни акцій під час закриття (*close*) містить низку додаткових незалежних змінних таких як: день тижня/місяця/року, номер тижня, початок/кінець місяця/четверті/року, за допомогою яких ми будемо будувати нашу модель для передбачень.

Date	Close	Year	Month	Week	Day	Dayofweek	Dayofyear	Is_month_end
2013-01-02	19.608213	2013	1	1	2	2	2	False
2013-01-03	19.360714	2013	1	1	3	3	3	False
2013-01-04	18.821428	2013	1	1	4	4	4	False
2013-01-07	18.710714	2013	1	2	7	0	7	False
2013-01-08	18.761870	2013	1	2	8	1	8	False
	Is_month_start	Is_quarter_end	Is_quarter_start	Is_year_end	Is_year_start			
	False	False	False	False	False			
	False	False	False	False	False			
	False	False	False	False	False			
	False	False	False	False	False			
	False	False	False	False	False			

Рис. 7. Утворений датасет з додатковими змінними

Застосувавши модель лінійної регресії, ми отримали наступні результати: Середньоквадратична помилка дорівнює 46.458, що однозначно не є хорошим показником.

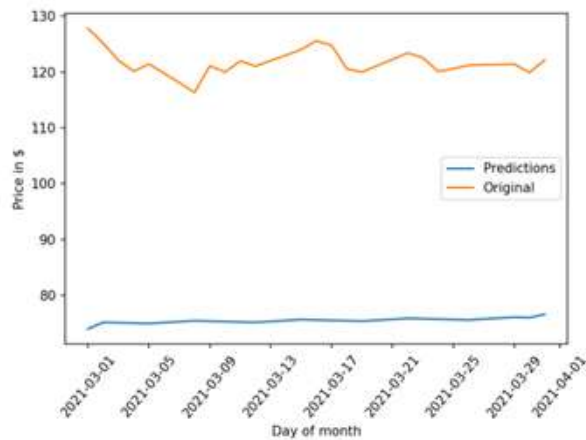


Рис. 8. Передбачення ціни на акції Apple при використанні лінійної регресії

Як можемо побачити на Рис. 8, через те, що значення цін сильно відрізняються між роками, наша модель перенавчається відносно колонок дати та місяця, тому наші передбачення не дають суттєвого результату.

Замість того, щоб враховувати попередні значення з точки прогнозування, модель враховує значення з аналогічної дати місяць тому, або тієї ж дати/місяця проте рік тому.

Якщо ж спробувати нормалізувати дані по різних проміжкам часу (batch normalization) і побудувати модель по отриманих даних, то ми отримаємо наступний результат: Середньоквадратична помилка дорівнює 6.61, що вже є кращим показником, ніж минулий результат, проте не є достатньо хорошим.

Як можемо побачити на Рис. 9, ми отримали однозначно кращий результат на нормалізованих даних, в порівнянні з передбаченнями зроблених по звичай-

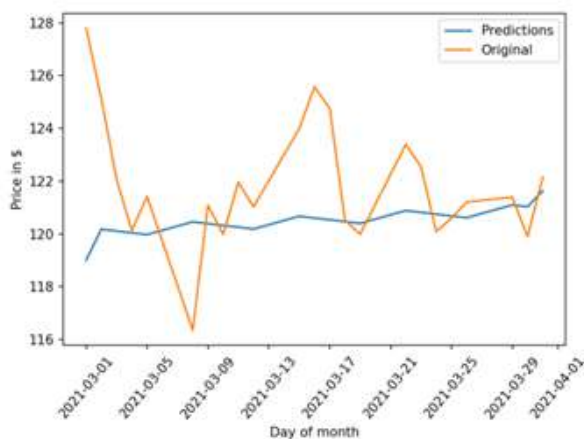


Рис. 9. Передбачення ціни на акції Apple (нормалізовані) при використанні лінійної регресії

них даних. Проте як ми можемо побачити на графіку, передбачення, зроблені за допомогою нашої моделі, не корелюють з фактичною поведінкою, а отже наша модель не справилась з поставленим завданням.

Так само як і лінійна регресійна модель, даний алгоритм базується на незалежних змінних – знаходить схожість між новими та старими даними.

Алгоритм KNN може бути використаний як для задач класифікації, так і для регресійних проблем. Даний алгоритм використовує “подібність ознак” для прогнозування значень будь-яких нових даних. Це означає, що новим точкам присвоюються значення на основі того, наскільки вони схожі на точки в навчальному наборі.

Даний алгоритм складається з трьох кроків:

- Першим кроком є розрахунок відстані між новою точкою і всіма точками в тренувальному датасеті. Існують різні методи розрахунку даних відстаней, серед яких найбільш відомими є: Евклідова відстань, Манхеттенська метрика (для безперервних даних) та відстань Хеммінга (для категоріальних даних).
- Другим кроком є вибір значення k , яке визначає кількість найближчих сусідів, які ми будемо розглядати, при присвоєнні значення будь-якому новому спостереженню. Для його виконання була використана функція Grid Search CV, за допомогою якої ми змогли підібрати найкраще значення k для нашої проблеми.
- Третім кроком є передбачення значення нового спостереження, шляхом розрахунку середнього між значеннями k найближчих сусідів, визначених в другому кроці.

Як і для лінійної регресії, для побудови моделі, заснованої на алгоритмі KNN, нам необхідно, щоб наші дані мали набір незалежних змінних, тому ми використовуємо датасет, утворений для побудови лінійної регресії (Рис. 10).

Застосувавши модель К-найближчих сусідів, ми отримали наступні результати: Середньоквадратична помилка дорівнює 103.02, що, як і в випадку лінійної регресії, також є однозначно не хорошим показником.

Як можемо побачити на Рис. 10, через те, що значення цін сильно відрізня-

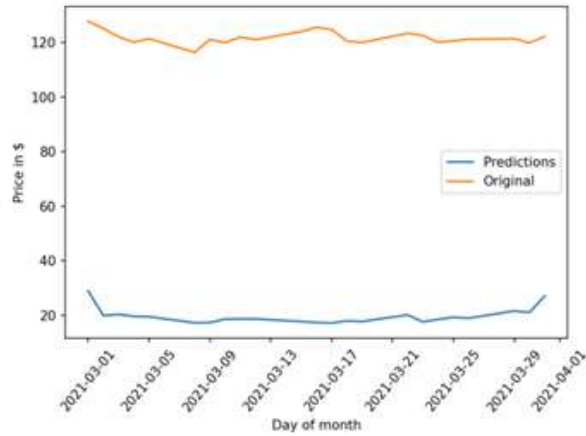


Рис. 10. Передбачення ціни на акції Apple при використанні KNN

ються між роками, наша модель, заснована на алгоритмі KNN, так само як і лінійна регресія, перенавчається відносно колонок дати та місяця, тому наші передбачення не дають суттєвого результату.

Спробуємо, як і для лінійної регресії, нормалізувати дані по різним проміжкам часу (batch normalization) і побудувати модель по отриманих даних: Середньоквадратична помилка дорівнює 6.74, що вже є кращим показником, ніж минулий результат, проте не є достатньо хорошим.

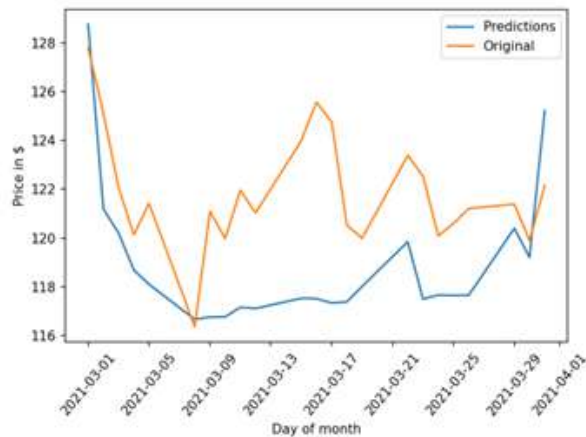


Рис. 11. Передбачення ціни на акції Apple (нормалізовані) при використанні KNN

Як можемо побачити на Рис. 11, ми отримали однозначно кращий результат на нормалізованих даних, в порівнянні з передбаченнями зроблених по звичайних даних.

Також можемо побачити, що на відміну від лінійної регресії, наша модель, заснована на алгоритмі KNN, наближено відтворила тенденцію на ціну акцій Apple. Проте, отримані передбачення не надто добре корелюють з фактичною поведінкою, особливо на середньому проміжку, тому спробуємо добитись кращого результату, за допомогою побудови інших моделей.

Для обох моделей LSTM для прихованих шарів використовувалась функція

активації гіперболічного тангенса, а для вихідних шарів – сигмоїдна функція активації, було практично доведено, що ці функції активації показують кращі результати для даного часового ряду, ніж інші функції активації. Також ми застосували 20% відкидання (dropoutrate) для кожного прихованого шару, як звичайний метод регуляризації, щоб уникнути проблеми перенавчання. Ми використали оптимізаційний алгоритм Адама для вивчення параметрів, а середню квадратичну помилку- як функцію втрат.

Щоб збільшити швидкість навчання та збільшити збіжність, ми використовуємо так звані “mini-batches” під час тренування. Ми спробували велику кількість розмірів “mini-batches” і дослідили, що найкращим розміром, який слід використовувати є 30, оскільки більший розмір не гарантує збіжність і є великий шанс потрапити у сідлову точку.

Також для покращення точності передбачення наших мереж, а також пришвидшення тренування їх тренування, ми застосували функцію GridSearch, завдяки якій ми підбрали найбільш підходящі гіперпараметри для наших моделей.

Через високу стохастичність фінансових часових рядів ми побудуємо дві різні моделі ДКЧП: стандартну мережу ДКЧП та розширену мережу довгої короткочасної пам'яті, яка має кілька додаткових прихованих шарів ДКЧП, а також порівняємо їх продуктивність. Очікувалось, що розширена мережа ДКЧП може краще вловити тенденцію ціни на акції Apple через свою більш складну структуру. Однак наші експерименти показали протилежні результати, що ми обговоримо пізніше.

Застосувавши стандартну мережу довгої короткочасної пам'яті, ми отримали наступні результати: Середньоквадратична помилка дорівнює 2.617, що є достатньо малим значенням, що вказує на високу подібність даних.

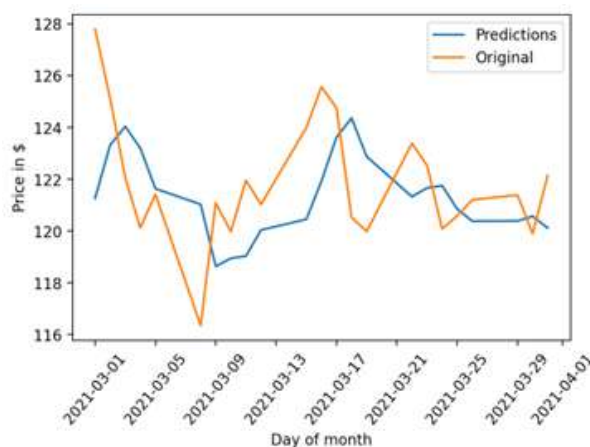


Рис. 12. Передбачення ціни на акції Apple при використанні стандартної мережі ДКЧП

Як можемо побачити на Рис. 12, на відміну від всіх попередніх моделей, наша стандартна мережа ДКЧП, достатньо точно відтворила тенденцію на ціну акцій Apple, а саме передбачила, де наша ціна буде підніматись, а де опускатись. Також ми можемо дізнатись приблизні міри падіння і піднімання ціни і робити відповідні висновки з цього. Отримані передбачення добре корелюють

з фактичною поведінкою, що вказує на те, що наша мережа добре впоралась з поставленим завданням.

Розширена мережа довгої короткочасної пам'яті, яка має кілька додаткових прихованих шарів ДКЧП (Stacked-LSTM).

Для побудови даної розширеної моделі ми добавили 3 додаткових прихованих шарів ДКЧП. Застосувавши розширену мережу довгої короткочасної пам'яті, ми отримали наступні результати: Середньоквадратична помилка дорівнює 3.14, що, як і в випадку зі стандартною мережею, є достатньо малим значенням, проте одразу можна зробити висновки, що дана мережа гірше передбачила ціну на акції Apple.

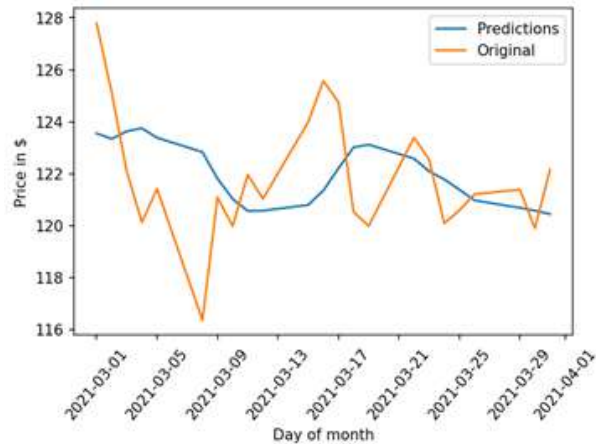


Рис. 13. Передбачення ціни на акції Apple при використанні розширеної мережі ДКЧП

Як можемо побачити на Рис. 13, дана розширена мережа не так точно відтворює тенденцію ціни на акції Apple, як стандартна мережа, проте в порівнянні з іншими методами, застосованими в даній роботі вона показала достатньо хороші результати. За допомогою даної мережі ми досі можемо передбачувати чи ціна підніметься, чи знизиться, проте не можемо робити передбачення про міру падіння/піднімання ціни. Отримані передбачення, за допомогою даної розширеної мережі, хоч і не настільки добре як зі стандартною мережею, проте корелюють з фактичною поведінкою, що вказує на те, що наша мережа достатньо добре впоралась з поставленим завданням.

Результати дослідження. Основною метою даної роботи було дослідження ефективності мереж ДКЧП в передбаченні часових рядів, а саме пошук тенденції в даних часових рядах, а також порівняння її ефективності з іншими відомими методами.

Для виконання даного завдання було побудовано п'ять моделей часових рядів, застосувавши наступні методи:

1. Рухоме середнє (традиційна модель часових рядів)

Алгоритмом створення даної моделі є: передбачена ціна для кожного дня буде середнім від набору раніше спостережених значень (вилучаючи найстаріше спостережуване значення з набору), що можна представити наступною формулою 3:

$$\bar{a}_{SM} = \frac{x_{n-M} + x_{n-(M-1)} + \dots + x_{(n-1)}}{M} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{n-(M-i)}, \quad (3)$$

де x_n – значення за певний проміжок часу (в нашому випадку за один день);

M – проміжок часу, відносно якого ми будемо вираховувати середнє.

Перевагою даного алгоритму є швидке виконання передбачення (0.7 с).

Недоліком даного алгоритму є те, що передбачення, зроблені за допомогою нього, показують лише наближену ціну на акції, яка не корелює з фактичними даними.

2. Лінійна регресія (базова модель МН)

Рівняння для лінійної регресії представлено у формулі 3. Перевагою використання даної моделі є швидке виконання передбачення (0.003 с).

Недоліками її використання є: передбачення, зроблені за допомогою неї, як і в випадку з алгоритмом рухомого середнього, показують лише наближену ціну на акції, яка не корелює з фактичними даними.

Для того, щоб уникнути проблеми з перенавчанням, потрібно додатково нормалізувати дані по певним проміжкам часу (batch normalization).

3. К-найближчих сусідів (базова модель МН)

Алгоритмом створення даної моделі є:

- На першому кроці потрібно розрахувати відстані між новою точкою і всіма точками в тренувальному датасеті.
- Другим кроком є знаходження k найближчих сусідів (k -визначене наперед).
- Третім кроком є передбачення значення нового спостереження, шляхом розрахунку середнього між значеннями k найближчих сусідів, визначених в другому кроці.

Перевагами використання даного алгоритму є:

- Швидке виконання передбачення (0.004 с).
- Наближене відтворення тенденції на ціну.

Недоліками використання даної моделі є:

- Як і в випадку з лінійною регресією, для того, щоб уникнути проблеми з перенавчанням, потрібно додатково нормалізувати дані по певним проміжкам часу (batch normalization).
- Хоч тенденція і є наближено відтвореною, проте недостатньо точно, а отже ми можемо використовувати її лише як орієнтир для подальших досліджень.

4. Стандартна мережа ДКЧП (модель глибинного навчання)

Перевагою використання даної мережі є те, що в порівнянні з іншими методами, дана мережа відтворює тенденцію на ціну досить точно, що і є найважливішим критерієм в даній роботі.

Хоча час тренування склав 109 с, проте це не є недоліком, адже це відносно невеликий час для тренування моделей МН.

5. Розширена мережа довгої короткочасної пам'яті, яка має кілька додаткових прихованих шарів ДКЧП (Stacked-LSTM)

Перевагою використання даної мережі є те, що дана мережа досить добре відтворює тенденцію на ціну (краще впоралася з цим, порівнюючи з традиційною моделлю часових рядів і базовими моделями МН).

Недоліками використання даної мережі є:

- Не настільки хороша точність відтворення тенденції в порівнянні зі стандартною мережею.
 - Довший час тренування, в порівнянні зі стандартною мережею ДКЧП (911 с).
- Отже, давайте підсумуємо усі результати, отримані при виконанні попереднього розділу у наступній таблиці 1.

Таблиця 1.

Результати передбачень різними моделями

Модель	Час виконання, с	RMSE	Кореляція передбачених даних з фактичними
Рухоме середнє	0.7	7.654	Відсутня кореляція (Рис. 6)
Лінійна регресія	0.003	6.61	Відсутня кореляція (Рис. 8)
KNN	0.004	6.74	Часткова кореляція (Рис. 11)
Стандартна мережа ДКЧП	109.3	2.617	Хороша кореляція (Рис. 12)

В Табл. 1 ми можемо переглянути підсумок результатів нашого дослідження. Давайте перейдемо до аналізу отриманих результатів, а також зробимо попередні висновки.

Обговорення результатів. Аналізуючи результати, отримані при виконанні попереднього розділу можна зробити наступні висновки:

Через те, що наші дані мають високу стохастичність, а будь яка прихована залежність є непрямою дана традиційна модель часових рядів – рухоме середнє не впоралась з покладеним завданням – передбачити тенденцію майбутньої ціни на акції Apple. Даний алгоритм передбачує лише наближену майбутню ціну, а тому не підходить для вирішення нашої проблеми (передбачення тенденції на ціну).

Як і рухоме середнє, лінійна регресія не впоралась з покладеним завданням – передбачити тенденцію майбутньої ціни на акції Apple. Недоліком використання даного алгоритму для нашої проблеми є вимога до даних, а саме: наявність незалежних змінних. Для цього ми додатково створювали ряд незалежних змінних, які дістали з колонки дати/час. Проте давайте більш докладно розглянемо чому лінійна регресія не впоралась з даним завданням:

- Оскільки дані, які були використані та містять високу стохастичними, а також будь яка прихована залежність є непрямою, лінійна регресія просто не може її відшукати.
- Як вже було сказано раніше, ціна на акції Apple за різних років значно відрізняються, через що наша модель перенавчається відносно колонок дати та місяця. Тому, щоб зробити нормальне передбачення нам потрібно застосувати “batch normalization” для усунення даної проблеми.

Низка даних обмежень, а також той факт, що дана модель не відтворила тенденцію робить її не підходящою для заданої проблеми.

На відміну від двох попередніх алгоритмів, алгоритм KNN наближено відтворив тенденцію на ціну акцій Apple, проте на певному проміжку дані взагалі

не корелювали з фактичними. Тому передбачення, отримані за допомогою даного алгоритму, ми можемо лише використовувати як довідку для передбачень, зроблених за допомогою методів глибинного навчання.

Як вже було сказано у попередньому розділі, очікувалось, що розширена мережа ДКЧП може краще вловити тенденцію ціни на акції Apple через свою більш складну структуру, проте наші експерименти показали протилежні результати. В порівнянні з іншими моделями, застосованими у цій роботі, наша розширена мережа ДКЧП досить добре відтворила тенденцію ціни на акції Apple, проте не настільки добре, як стандартна мережа ДКЧП.

Як правило, чим “глибша” нейронна мережа (та, яка має більше прихованих шарів), тим краще вона здатна пояснити більш складні проблеми, на відміну від одношарової нейронної мережі. Однак відкриттям, яке ми виявили був той факт, що розширена мережа ДКЧП не перевершує стандартну мережу ДКЧП в контексті прогнозування ціни акцій, а тобто проблем, пов’язаних з часовими рядами. Натомість, розширена мережа ДКЧП показала меншу продуктивність від стандартної мережі. Доведено, що більш складний представник нейронної мережі не обов’язково покращує якість передбачення.

Даний результат ми можемо пояснити наступними причинами:

- Більш складна будова нейронної мережі спричиняє проблему перенавчання, а тобто розширена мережі ДКЧП погано узагальнює приховані залежності у часових рядах, через більшу кількість параметрів, які вона розглядає.
- Розширена мережа ДКЧП більше підходить для розв’язування проблем класифікації, а не неперервних часових рядів, таких як ціни на акції.

Після підсумування та обговорення всіх результатів доходимо до висновку, що найкращою моделлю машинного навчання для передбачення таких стохастичних часових рядів, як ціни на акції, є модель глибинного навчання – стандартна мережа ДКЧП.

4. Висновки. В даній роботі було детально досліджено одну з архітектур рекурентних нейронних мереж – мережу довгої короткочасної пам’яті. На відміну від звичайних РНМ, мережа ДКЧП добре підходить для навчання з досвіду з метою передбачення часових рядів в умовах, коли вони є стохастичними або ж приховані залежності є непрямыми і їх складно віднайти.

Для того, щоб показати усю потужність мереж ДКЧП ми обрали датасет цін на акції Apple з вкрай нелінійною тенденцією, що ускладнило наше завдання – передбачити її (тенденцію) за певний проміжок часу.

Загалом для максимально точної та об’єктивної оцінки ми запропонували, розробили, натренували й протестували 5 моделей, а саме: плаваюче середнє, лінійну регресію, KNN, стандартну мережу ДКЧП та розширену мережу ДКЧП з кількома додатковими прихованими шарами ДКЧП. Найкраще себе показала стандартна мережа ДКЧП, яка достатньо точно відтворила майбутню тенденцію на ціну акцій Apple й значно перевершила у цьому усі інші моделі.

Також ми зробили відкриття й показали, що незважаючи на більш складну структуру моделі розширеної мережі ДКЧП у порівнянні зі стандартною мережею, розширена мережа не перевершує стандартну в контексті прогнозування ціни акцій, а тобто проблем, пов’язаних з часовими рядами, через можливість перенавчання.

Також було досліджено, що при побудові будь якої мережі ДКЧП, важливо

звернути увагу на правильний підбір параметрів моделі, адже навіть невелика її зміна може як значно покращити, так і значно погіршити дану модель.

Подальші дослідження слід проводити зі ще більш стохастичними даними, такими як: ціни на криптовалюти і поглянути наскільки точно наша мережа зможе відтворити тенденцію в такому часовому ряді. Також хорошим варіантом буде побудова більш складної структури мережі ДКЧП, а саме мережа ДКЧП з механізмом уваги й перевірити чи зможе вона краще впоратись з завданням передбачення тенденції в часовому ряді.

Boyko N., Kachmaryk V. Building models for time sequence forecasting using long-term memory networks .

The study is devoted to a comprehensive analysis of long short-term memory (LSTM) networks. This architecture is a type of recurrent neural network (RNN), in which the connections between nodes form a time-oriented graph. In this study, we review the structure and performance of the LSTM networks. Materials and methods are also analyzed. This paper conducts experiments, such as building different models to predict time series. The obtained research results are also analyzed. In this study, we will consider both the value of LSTM from a practical point of view in terms of exploitation, depending on the type of input data, and from a theoretical point of view, which will be based on understanding the structure of the LSTM block.

Keywords: Long short-term memory, recurrent neural network, machine learning, k-Nearest Neighbors, Root mean square error.

References

1. Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735> [in English].
2. Brownlee, J. A. (2022). Gentle Introduction to Long Short-Term Memory Networks by the Experts, Machine Learning Mastery. Retrieved from <https://machinelearningmastery.com/gentle-introduction-long-short-term-memory-networks-experts/> [in English].
3. Brownlee, J. (2021). Mini-Course on Long Short-Term Memory Recurrent Neural Networks with Keras, Machine Learning Mastery. Retrieved from <https://machinelearningmastery.com/long-short-term-memory-recurrent-neural-networks-minicourse/> [in English].
4. Brownlee, J. (2021). Stacked Long Short-Term Memory Networks, Machine Learning Mastery. Retrieved from <https://machinelearningmastery.com/stacked-long-short-term-memory-networks/> [in English].
5. Özlü, A. (2021). Long Short Term Memory (LSTM) Networks in a nutshell, Medium. Retrieved from <https://ahmetozlu93.medium.com/long-short-term-memory-lstm-networks-in-a-nutshell-363cd470ccac> [in English].
6. Malik, U. (2021). Time Series Analysis with LSTM using Python's Keras Library, StackAbuse. Retrieved from <https://stackabuse.com/time-series-analysis-with-lstm-using-pythons-keras-library/> [in English].
7. Ganegedara, Th. (2021). Stock Market Predictions with LSTM in Python. Retrieved from <https://www.datacamp.com/community/tutorials/lstm-python-stock-market> [in English].
8. Zou, Zh., & Qu, Z. Using LSTM in Stock prediction and Quantitative Trading. *CS230: Deep Learning* [in English].
9. Singh, A. (2021). Stock Prices Prediction Using Machine Learning and Deep Learning Techniques, Analytics Vidhya. Retrieved from <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2018/10/predicting-stock-price-machine-learning-and-deep-learning-techniques-python/> [in English].
10. Hongju, Y., & Hongbing, O. (2018). Financial time series prediction based on deep learning. *Wireless Personal Communications*, 102(2), 683–700. <https://doi.org/10.1007/s11277-017-5086-2> [in English].
11. Box, G. E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C. & Ljung, G. M. (2015) Time Series Analysis: Forecasting and Control. John Wiley & Sons, Hoboken, 715 [in English].

12. Boyko, N. (2016). Application of mathematical models for improvement of “cloud” data processes organization. *Mathematical Modeling and Computing: scientific journal "Computational problems elektrotehniky"*, 3(2), 111–119. <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.111> [in English].
13. Boyko, N., & Shakhovska, N. (2018). Prospects for Using Cloud Data Warehouses in Information Systems, *International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT 2018*, 2, 136–139. <https://doi.org/10.1109/STC-CSIT.2018.8526745> [in English].
14. Taylor, G. W. (2009). *Composable, distributed-state models for high-dimensional time series*. Toronto: University of Toronto [in English].
15. Simonyan, K., & Zisserman, A. (2014). *Very deep convolutional networks for large-scale image recognition*. arXiv:1409.1556 [in English].
16. Sarikaya, R., Hinton, G. E., & Deoras, A. (2014). Application of Deep Belief Networks for natural language understanding. *ACM Transactions on Audio Speech and Language Processing*, 22(4), 778–784 [in English].
17. Trafalis, T. B., & Ince, H. (2000). Support vector machine for regression and applications to financial forecasting. Neural Networks. In *Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS international joint conference on IJCNN 2000*, 348–353 [in English].
18. Guresen, E., Kayakutlu, G., & Daim, T. U. (2011). Using artificial neural network models in stock market index prediction. *Expert Systems with Applications*, 38, 10389–10397 [in English].

Одержано 15.04.2022

УДК 004.89

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).126-145](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).126-145)

О. Гурбич

Національний університет “Львівська політехніка”,
асистент кафедри системи штучного інтелекту,
oleksandr.v.hurbych@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6821-3390>

МЕТОД МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ СТВОРЕННЯ НОВИХ ЛІКАРСЬКИХ РЕЧОВИН ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Створення нових біологічно активних речовин є однією із найважливіших проблем фармацевтичної галузі. У цій статті запропоновано метод, у якому поєднуються кілька глибоких нейронних мереж для генерування унікальних молекул із заданими властивостями. Генерування доповнюється виправленням хімічної будови молекул із помилками за допомогою рекурентної нейронної мережі з механізмом уваги. Для створених молекулярних структур проведено аналіз хімічних властивостей та оцінку схожості на лікарські речовини. Запропонований ансамбль дозволяє створювати нові унікальні лікарські речовини, контролюючи ступінь розчинності та інші молекулярні дескриптори.

Ключові слова: біологічно активні речовини, нейронна мережа, молекула, машинне навчання, молекулярна структура, молекулярний дескриптор.

1. Вступ. Розробка нових матеріалів є складною та тривалою роботою [1-3]. Зокрема, розробка ліків — це поетапний, ітеративний процес, що включає такі необхідні етапи як відкриття, розробка, пре-клінічні та клінічні дослідження, перевірка та затвердження регулюючими органами, і лише потім — виробництво та дистрибуція. Як правило, від початку цього процесу до остаточного схвалення та комерційного розповсюдження проходить від 10 до 15 років [4, 5]. Такі терміни здебільшого визначаються труднощами з пошуком та відбором молекул-претендентів на лікарську речовину, які успішно пройдуть клінічні випробування. Матеріалознавство дослідило лише крихітну частину усіх потенційних лікарських сполук: підраховано, що на сьогодні синтезовано лише близько 10^8 малих молекул із понад 10^{60} можливих [6, 7]. Синтез нових молекул-кандидатів вимагає збільшення інвестицій у дослідження і розробки [8], головним чином через складність пошуку молекул із необхідними властивостями.

Методи машинного навчання (МН) довели свою результативність у багатьох областях [9]. Глибокі нейронні мережі (DNN) успішно використовуються для розпізнавання природньої мови та комп'ютерного зору, проте універсальність глибоких нейронних мереж у вивченні представлень даних дозволяє розширити сфери їхнього застосування до наукових проблем [10, 11].

Хімічна та фармацевтична промисловість виявляють значний інтерес до методів машинного навчання та глибоких нейронних мереж, які допомагають підвищити ефективність розробки нових матеріалів [12-14]. У цьому відношенні варто згадати нещодавню роботу Жаворонкова та ін. [15], у якій повідомляється про створення лікарської речовини з використанням МН усього за **21** день, що безпрецедентно скорочує доклінічний етап.

2. Машинне навчання для дизайну матеріалів. Останні досягнення у машинному навчанні дозволяють ефективно вирішувати численні проблеми від наближення квантових хвильових функцій до передбачення хімічних властивостей, фазових переходів і часової динаміки [16-24].

На молекулярному рівні DNN використовуються для апроксимації квантово-механічних обчислень [17, 25], декомпозиції енергії кластерів або передбачення наступного кроку молекулярної динаміки замість традиційних ресурсоємких процедур [26-31]. Нещодавно, декілька симуляційних систем включили ці підходи до своїх обчислювальних інструментів [32-37].

DNN також використовуються для прогнозування кількісних фізико-хімічних та біологічних властивостей за хімічною будовою сполук [10]. За такими моделями історично закріпилася англійська назва Quantitative Structure-Activity Relationship (QSAR). Серед модельованих властивостей можна згадати розчинність у воді або органічних розчинниках, температуру плавлення, енергії сольватації тощо [38-40]. Здатність МН пов'язувати структуру речовини із властивостями дає змогу оцінювати успішність молекул-кандидатів за показниками ADME (абсорбція, розподіл, метаболізм, екскреція) або ADMET (якщо також враховується токсичність). У цьому випадку акцент зосереджений на таких властивостях як спорідненість до рецепторів, токсичність та швидкість біологічного розпаду [41-50]. Своєрідним «золотим стандартом» у скринінгу схожості на ліки є так зване *правило п'яти*, запропоноване Ліпінським та ін. [51], та його близькі варіації [52-55], що дозволяє фармакологічним компаніям значно скоротити кількість молекул-кандидатів на ранніх стадіях розробки ліків.

У методах МН, що мають справу з молекулярними структурами, вирішальним кроком є ефективне представлення структурних даних. У вищезгаданих підходах використовуються різні формати вхідних даних: молекулярні графи, відбитки, дескриптори та їхні комбінації [45], позначення друкованими символами (наприклад, SMILES — Simplified Molecular-Input Line-Entry System). Останній спосіб представлення молекул уможливує застосування методів обробки природної мови до проблем хімії, включаючи генерацію нових сполук [56, 57]. У роботах [58, 59] рядки SMILES перетворюються на двовимірні зображення, а потім передаються в DNN. Подібний підхід до використання зображень 2D-структур як вхідних даних також представлений в роботі [60].

Методи, засновані на графових нейронних мережах [61, 62], використовують графове представлення молекул. Таке представлення є природним вибором для вивчення молекулярних структур, взаємодій та синтезу [63]. Згорткові графові нейронні мережі та молекулярні графи використовуються для прогнозування розчинності, токсичності та інших властивостей сполук [63, 64]. У роботі [65] поєднано графові представлення із змагальним навчанням (Adversarial Training) та навчанням з підкріпленням для генерування молекул із бажаними властивостями. Графові нейронні мережі використовуються для передбачення поверхні білка [66]. У дослідженні Зітніка та ін. [67] графові згорткові мережі використовуються для передбачення можливих побічних ефектів ліків. Пропонується також генеративна мережа MolGAN [68] для створення молекулярних графів.

Останні досягнення глибинного навчання значною мірою стосуються різних застосувань генеративних змагальних мереж (англ. GAN - Generative Adversarial Network) та інших глибоких генеративних моделей, здатних генерувати або

реконструювати дані із заданого розподілу [69, 70]. У контексті молекулярних даних це відкриває шлях до синтезу нових структур із заданими властивостями (див., наприклад, огляд Jørgensen та ін. [71]). Автоенкодер (АЕ) та варіаційного автоенкодер (VAE) використовуються для відображення дискретних рядків SMILES в безперервному просторі [60, 72]. Вибір векторів-екземплярів у такому просторі та наступне їх декодування назад у рядки SMILES дозволяє отримувати нові унікальні структури. Різні DNN моделі були запропоновані та порівняні для підвищення якості векторних представлень та зменшення помилки реконструкції [71, 73, 74]. Дослідження, що представляє генеративний змагальний автоенкодер, описано в посиланні 75 — автори тестували різні архітектури для генерації молекул та зворотного відображення QSAR, семплінгом нових структур із застосуванням обмежень біологічної активності. Детальне обговорення проблеми «хімічного простору» та реконструкції молекул на основі його векторів представлено в нещодавньому дослідженні Б'єррума та Саттарова [76]. Модель на основі GAN від Guimaraes та ін. [77] вчиться генерувати молекули у представленні рядків SMILES, оптимізуючи їх властивості до набору хімічних показників.

Незважаючи на безперервну природу латентного векторного простору та нескінченні можливості вибору довільних векторів, не всі вибрані вектори відповідають “правильним” рядкам SMILES. Деякі з цих векторів можуть декодуватися у хімічно неправильні SMILES, тоді як інші (навіть «граматично» правильні) можуть відповідати нестабільним хімічним сполукам. Успішну спробу вирішити цю проблему було зроблено шляхом заміни звичайного VAE на Grammar VAE [57]. Іншим напрямком вирішення проблеми дотримання “хімічної” правильності представлень є збагачення граматики SMILES контекстними атрибутами [78].

3. Мета та завдання дослідження. У цій статті представлено ансамбль із моделей, які навчаються на великих публічних наборах даних. Ансамбль спроектовано для застосування на ранніх етапах розробки ліків - від пропозиції нової структури до прогнозування фізико-хімічних властивостей та підтвердження їх у чисельному моделюванні (див. рис. 1).

Автоенкодер використовується для закодування дискретних рядків SMILES в безперервний векторний простір [79, 80]. В роботі описується, що розмір набору даних відіграє вирішальну роль у досягненні вищої якості узагальнення та реконструкції. Оскільки розмічені набори даних часто мають обмежений розмір, замість наскрізного навчання слід навчати окремі моделі для реконструкції структур, виправлення помилок і передбачення властивостей.

Щоб збільшити кількість хімічно “правильних” згенерованих молекул, потрібно обирати нові точки у латентному векторному просторі на основі еталонних. Додатковий крок включає виправлення помилок за допомогою рекурентної нейронної мережі (Attention-based Sequence-to-Sequence).

Для оцінки якості отриманих молекул-кандидатів потрібно ввести етап постобробки, що дозволяє обчислювати властивості згенерованих молекул безпосередньо зі структури. Цей етап забезпечує порівняльний аналіз каркасів молекул, відбитків, дескрипторів і функціональних груп для оцінки якості згенерованих молекул. Доводиться, що новостворені унікальні SMILES мають подібний розподіл структурних особливостей і молекулярних дескрипторів до еталонного

набору даних. Загальний конвеєр показаний на рис. 1. На Рис. 1 представлено конвеєр більш детально.



Рис. 1. Запропонована система охоплює кілька ранніх етапів розробки ліків.

Спершу, точки даних генеруються (2) в безперервному просторі в деякому околі від еталонного набору даних (1). Потім оцінюються хімічні властивості (3). Далі для декодованих у SMILES (4) молекул-кандидатів виконується виправлення помилок (5).

Опис методології. В основі описаної методології лежить ідея апроксимації безперервного розподілу для представлення малих органічних молекул. Для створення такого відображення потрібно використати автоенкодер (AE), що складається з двох підмереж — енкодера (2) і декодера (4), як показано на Рис. 2. Латентний векторний простір архітектурно є центральним шаром нейронів автоенкодера. Його ваги вивчаються у процесі реконструкції валідних молекулярних структур у форматі SMILES (1), що подаються на вхід і на вихід автоенкодера. Після тренування, ці ваги апроксимують розподіл вхідних SMILES (1) та дозволяють семплювати вектори-представлення, які надалі декодуються (2) у нові молекулярні структури-кандидати (9).

Далі передбачена розчинність ($\log S$) молекули-кандидата перевіряється за допомогою QSAR-фільтру на відповідність дійсним значенням, а згенерована молекулярна структура у форматі SMILES подається на рекурентну модель (див. Рис. 4) для виправлення можливих помилок (ALSTM). ALSTM відноситься до Attention-based Sequence-to-Sequence моделей із Long Short-Term Memory (LSTM) комірками.

Деталі молекулярних представлень. Існують різні представлення молекул, які дозволяють кодувати просторову структуру за допомогою компактних однорядкових позначень. Найпопулярнішими серед них є SMILES.

SMILES містить всю необхідну інформацію для обчислення необхідних метрик (донори Н-зв'язку, акцептори, молекулярна маса тощо), за винятком ліпофільності та розчинності у воді. Рядок SMILES не може бути поданий в нейронну мережу у вихідній формі і має бути виражений у числовому вигляді. Категоріальні дані (наприклад, символи SMILES) зручно представляти за допомогою так званого one-hot кодування, яке у випадку SMILES є матрицею (N на M) із 0 і 1 у комірках. N — це кількість унікальних елементів SMILES (наприклад, C, c, =, @, O, дужок тощо), тоді як M позначає символи рядка SMILES. Один з таких прикладів проілюстрований на Рис. 3, де показано one-hot кодування пропіонового альдегіду. У дослідженні розглядаються рядки SMILES не довше 60 елементів, застосовуючи заповнення нулями для коротших. У роботі також обмежили розмір словника елементами, які зустрічаються в наборах даних для тренування та оцінки (58 унікальних символів).

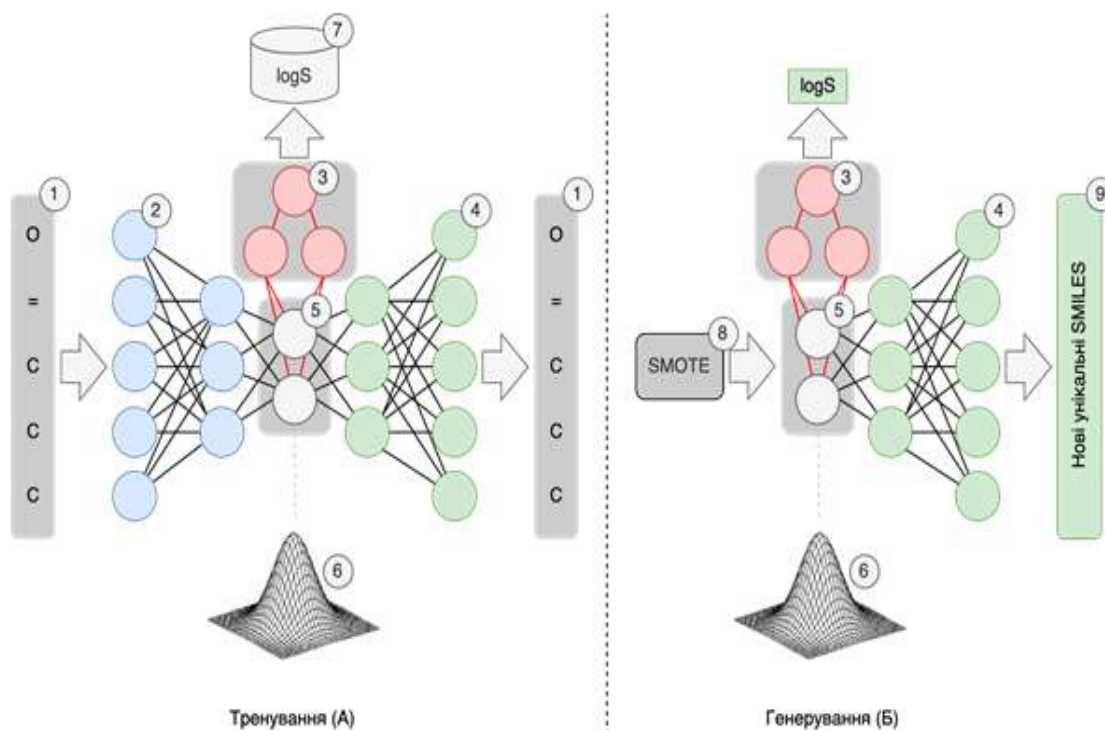


Рис. 2. Концептуальна архітектура автоенкодера складається з автоенкодера (2), центрального шару (5) та енкодера (4). Додатковим бічним шаром нейронної мережі виступає регресор (3), який виконує функцію контролю фізико-хімічних властивостей генерованих молекул-кандидатів (9). В даному випадку такою характеристикою є логарифм розчинності у воді - $\log S$ (7). В результаті тренування (А) автоенкодера, ваги центрального шару (6) апроксимують розподіл вхідних даних (6). Після цього, натреновані центральний шар (5), регресор (3) та декодер (4) використовуються для генерування (Б) нових молекул-кандидатів (9). SMOTE (8) виступає алгоритмом вибору початкових векторів з латентного простору (6).

Дані генератора. У цьому дослідженні використано 190 тисяч SMILES із бази даних eMolecules [81] для навчання автоенкодера. Для навчання моделі реконструкції цих молекулярних представлень, на вхід і на вихід подавалося по два однакові рядки SMILES.

Як приклад фізико-хімічної властивості для контролю, було обрано розчинність у воді ($\log S$). Для тренування моделей було зібрано та об'єднано дані із серії відкритих наборів, опублікованих Huuskonen [82], Hou та ін. [83], Delaney [84] та Mitchell [85]. Крім того, набір даних про розчинність було розширено шляхом перетворення рядків SMILES до канонічної форми, що в сумі дало 4300 міток розчинності для рядків SMILES не довше 60 елементів. Усі розчинності представлені у вигляді логарифмічної розчинності — десятковий логарифм максимальної концентрації розчиненої речовини у воді, вираженої в моль/л.

Важливо мати на увазі, що загальнодоступні набори даних часто об'єднують дані, отримані в різних лабораторіях за різними методиками. Це може сильно

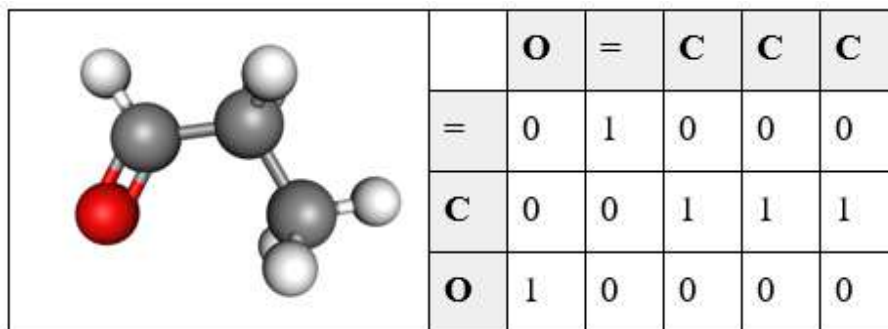


Рис. 3. Просторова конфігурація пропіонового альдегіду, SMILES-представлення та відповідна one-hot матриця. Карбони (C) на тривимірному зображенні показані сірим, кисень (O) – червоним, водень (H) – білим.

погіршити якість даних [86, 87].

Архітектура генератора. Архітектура автоенкодера була створена за результатами серії експериментів із пошуком по сітці параметрів. Змінювалася кількість шарів (з 4 до 12), їх типи (повнозв'язні (FC) і згорткові (Conv)), кількість нейронів у FC шарах (від 2 до 3500) та кількість Conv шарів (від 2 до 10) з різною кількістю і формою фільтрів. Додавання Conv шарів покращило точність автокодера. Експерименти з функціями активації (сигмоїдна, ReLU, PReLU) показали перевагу ReLU, за винятком сигмоїдної активації на вихідному шарі. Фінальна архітектура автоенкодера була наступною:

- 1) **Енкодер** — перша частина автоенкодера — складається з чотирьох Conv шарів (кількість каналів, висота, ширина): (1, 58, 60), (60, 1, 58), (87, 1, 40), (116, 1, 30), (120, 1, 29), за якими слідує Conv шар (512 нейронів).
- 2) **Декодер** — друга частина автокодера — призначений для декодування прихованих представлень назад до оригінальних рядків SMILES. Архітектурно він є дзеркальним відображенням енкодера та складається з FC шару і чотирьох Conv.
- 3) **Регресор** приймає на вхід активації останнього FC шару енкодера (латентне векторне представлення) та навчається, зіставляючи їх з набором даних про розчинність у воді ($\log S$). Регресор складається з чотирьох FC блоків зі зворотніми зв'язками (Residual): (512, 256), (256, 128), (128, 64), (64, 32) і чотирьох звичайних FC шарів: (8), (4), (2), (1). Шари предиктора поступово зменшують свій розмір, і останній виводить одне число, яке розглядається як передбачення розчинності.

Для аналізу слід використати оптимізатор Adam для навчання як автокодера, так і предиктора, регулюючи лише швидкість навчання в межах від 10^{-5} до 10^{-3} . У дослідженні застосовували наступні функції втрат: для автоенкодера — бінарна крос-ентропія, для регресора — середньоквадратичне відхилення.

Семплінг. Наведена архітектура дозволяє апроксимувати дискретні SMILES у неперервний розподіл, надаючи необмежені можливості вибору довільних векторів у ньому. Це може призвести як до правильних хімічних структур, так і до неправильних або заскладних для синтезу. Зважаючи на це, замість випадкового вибору прихованих векторів, слід використати підхід SMOTE

(Synthetic Minority Oversampling Technique) [88], взявши його реалізацію з бібліотеки Imblearn [89]. SMOTE працює наступним чином: обирає пару вихідних зразків, розташованих поблизу у підпросторі ознак, інтерполує їх та генерує випадкові точки вздовж лінії між обраними зразками.

Модель для виправлення помилок у SMILES. SMILES із помилками складають від 30% до 99% від усіх згенерованих [72]. Помилки виникають через розрідженість та неоднорідність векторного простору вивченого автоенкодером, а також негнучкість граматики SMILES: один неправильний символ може призвести до зовсім іншої молекули, в той час як одна помилкова ймовірність на виході з кінцевого шару декодера не вплине на функцію втрат суттєво. Тому слід зосередитися на цій проблемі, яка за своєю суттю нагадує перевірку орфографії в обробці природної мови. Потрібно розробити нейронну мережу, яка виправлятиме синтаксичні помилки в рядках SMILES і використовуватиметься як постобробка для результатів автокодера.

Виправлення помилок у SMILES є проблемою навчання від послідовності до послідовності (sequence-to-sequence або seq2seq), яка вирішується за допомогою рекурентних моделей із механізмом уваги [91, 92]. Енкодер та декодер seq2seq моделі виготовлено із комірок LSTM (Long Short-Term Memory) [93] із розміром прихованого шару нейронів 512. Енкодер перетворює вхідний рядок SMILES (X) у послідовність прихованих станів (h_1, h_2, \dots, h_n), а декодер генерує по одному символу SMILES у цільовому рядку SMILES \hat{Y} . Формально, модель вивчає переходи $a : X \rightarrow F^{512}, b : F^{512} \rightarrow \hat{Y}$ так, що $a, b = \operatorname{argmin}(Y - b(a(X)))^2$. Вибір кожного наступного символу y^t обумовлений попереднім символом y^{t-1} і вектором контексту c_t . Вектором контексту обчислюється як зважена сума прихованих станів кодера (1):

$$c_t = \sum_{i=1}^{|X|} a_{ti} h_i, \quad (1)$$

ваги яких визначаються за допомогою механізму уваги (2):

$$a_{ti} = \operatorname{softmax}(e_{ti}), \quad e_t = A(\hat{y}_{t-1}, s_{t-1}), \quad (2)$$

де A — нейронна мережа прямого поширення з одного повнозв'язного шару (див. Рис. 4, елемент **1**), а s^{t-1} — попередній прихований стан декодера.

SMILES у формі ембедінгів [94] подаються до спеціального шару нейронів (Рис. 4, елементи **3**, **8**). Модель тренується шляхом мінімізації від'ємної логарифмічної ймовірності між згенерованим рядком SMILES \hat{Y} і цільовим (правильним) рядком SMILES Y [95].

Дані для виправлення помилок. Оскільки початковим наміром було виправити помилки, допущені на етапі декодування, то слід зібрати всі помилкові SMILES і відповідні “правильні” представлення. Таким чином, було отримано набір даних для виправлення помилок AE розміром 300 000 пар SMILES. Узв'язавши за приклад підготовку даних для знешумлювального автоенкодера [96], та додати до вихідних рядків SMILES помилки — випадкові заміни, видалення та вставки символів зі словника SMILES за визначеним розподілом. Модель повинна навчитися перетворювати такі пошкоджені представлення у правильний

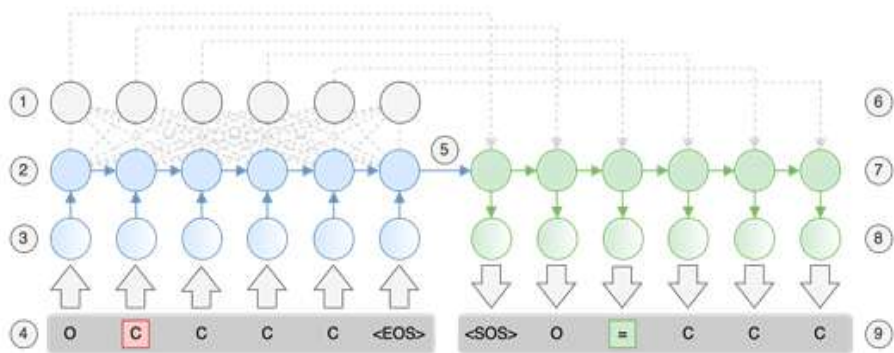


Рис. 4. Концептуальна архітектура моделі для виправлення помилок у SMILES. Для тренування, SMILES із помилками (4) подаються на вхід, а відповідні “коректні” SMILES (9) – на вихід. Енкодер (2,3) позначено синім. Декодер (7,8) позначено зеленим. Енкодер та декодер обмінюються контекстом (5), посилені ембедінг-шарами (3,8) та механізмом уваги (1)

вихідний рядок. Такий підхід змусив би модель вивчити більше можливих помилок та навчитися їх виправляти. У вищеприказаний спосіб було підготовлено 200 000 пар SMILES та додано до даних із помилками автоенкодера. Таким чином, фінальний датасет для навчання автоенкодера становив 500 000 пар рядків.

4. Показники виправлення помилок. Точність роботи моделі для виправлення помилок оцінювалися за трьома показниками:

1. Здатність реконструювати SMILES без помилок.
2. Здатність виправляти SMILES із помилками автоенкодера.
3. Здатність виправляти SMILES із випадковими помилками.

Кожен тестовий набір складався із 15000 пар SMILES. Модель виправлення помилок показала наступні результати:

1. Точність реконструкції — 87%.
2. Якість виправлення помилок автоенкодера — 68%.
3. Якість виправлення випадкових помилок — 83%.

Статистика згенерованих стрічок SMILES. Випадковим чином було обрано 190 тисяч SMILES з eMolecules [81]. Шляхом тренування автоенкодера, для цього набору даних було створено латентне представлення. За допомогою натренованого декодера та алгоритму SMOTE було згенеровано 95446 нових молекул-кандидатів. З них, 60,3% (57556 шт.) виявилися хімічно правильними, а 39,7% (37890 рядків) — помилковими, найчастіше через химерні ароматичні системи або неправильні валентності атомів.

Хімічно неправильні SMILES були виправлені моделлю корекції помилок. 12040 (31,8%) рядків були успішно виправлені.

Важливим питанням є новизна згенерованих та виправлених молекул. Майже усі виправлені стрічки SMILES були унікальними (99,8% або 12024 з 12040). З 57556 правильних молекул, згенерованих AE, лише 10,2% (5836 шт.) виявилися унікальними, інші 89,8% (51720) були ідентичними до молекул у початковому наборі даних. Отож, загалом було створено 17860 унікальних нових молекул — 5836 з AE і 12024 з моделі виправлення помилок.

Структурна схожість. Аналіз скаффолдів. Скаффолд (з англ. scaffold – риштування, каркас) – це частина молекули, що залишається після видалення некільцевих замісників, а для молекул без кілець – найдовший вуглецевий ланцюг. Набір із 5836 новостворених структур містив 3945 унікальних скаффолдів. Для порівняння, вхідний набір даних із 189936 молекул, використаних для процедури відбору SMOTE, містив 58229 скаффолдів. Перекриття між згенерованими та вхідними наборами даних становило 2558 скаффолдів (64,8% згенерованих скаффолдів); перекриття між згенерованими та виправленими наборами становило 742 скаффолди (8,8% від виправлених або 18,8% згенерованих скаффолдів); перекриття між виправленими та вхідними наборами даних становило 2594 скаффолди (30,8% виправлених скаффолдів). Ці числа показують, що досліджуваний ансамбль генерує нові молекули та виправляє помилкові в межах подібного розподілу, не копіюючи при цьому існуючі підструктури повністю.

Передбачення розчинності. Під час навчання регресора потрібно використовувати процедуру ранньої зупинки, щоб запобігти перенавчанню. Передбачення $\log S$ на тестовому наборі даних показано на Рис. 5. Абсолютно точні передбачення відповідають функції $y = x$ (показано червоною лінією на графіку). Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,84$ для передбачень $\log S$ показує певний ступінь розсіювання.

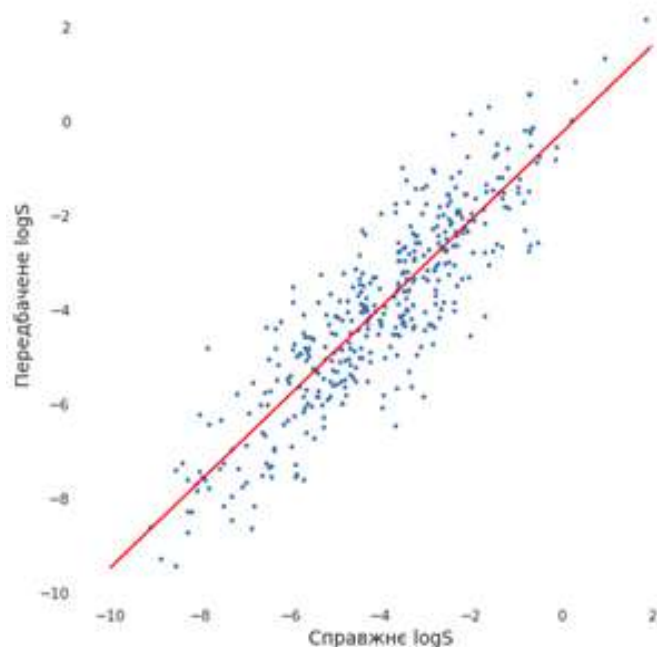


Рис. 5. Проекція справжніх та передбачених значень $\log S$. Червона лінія (бісектриса) позначає ідеальне передбачення розчинності.

Схожість на ліки. Ще одним важливим аспектом, окрім унікальності та хімічної “правильності” згенерованих молекул-кандидатів, є їх потенційна фармакологічна активність. Її можна оцінити за допомогою показника drug-likeness.

Проведемо оцінку drug-likeness для однієї із згенерованих молекул – COCC(O)C(CC)CO, скориставшись вже відомими фільтрами [51-55] реалізованими у бібліотеці RDKit та натренованими моделями: кількість донорів во-

дневого зв'язку (2 шт.), акцепторів Н-зв'язку (3 шт.), молекулярна маса (148,2 г/моль), площа полярної поверхні (49,69 Å²), молярна рефракційна здатність (38,75), розчинність у воді logS (-0,26) та октанолі logP (0,01), частка sp³-гібридизованого вуглецю (1,00) та кількість обертових зв'язків (5 шт).

Опис правил оцінки drug-likeness можна знайти в оригінальних статтях, в пропонованому дослідженні наведені лише результати аналізу: фільтри Lipinski [51], Egan [53] і Veber [55], які повідомляють про схожість на ліки сполуки COCC(O)C(CC)CO.

5. Висновки. У роботі запропоновано конвеєр із фільтрів та двох моделей машинного навчання: автоенкодеру та рекурентної нейронної мережі із механізмом уваги. Конвеєр дозволяє створювати нові лікарські речовини майже миттєво, прогнозувати їхні властивості без проведення лабораторних випробувань та досліджувати схожість на ліки.

Першу модель конвеєру — автоенкодер — було натреновано на наборі з 190 тисяч фармакологічно активних молекул у форматі SMILES узятих із бази даних eMolecules. Декодер з натренованого автоенкодеру та алгоритм SMOKE використовувалися надалі для генерування нових хімічних структур. Значна частина (близько 40%) згенерованих структур містила помилки. Помилкові SMILES було об'єднано зі SMILES, у які навмисне були внесені випадкові помилки. Таким чином був отриманий набір даних з 500 тисяч пар для тренування другої моделі конвеєру — для виправлення помилок. Кількість виправлених помилок цією моделлю склала 68% — для помилок автоенкодеру та 83% — для випадкових помилок. Регресійна модель, навчена паралельно із автоенкодером, дає хорошу оцінку розчинності молекул-кандидатів у воді (logS). Аналіз структурної подібності еталонних і згенерованих структур показує їхню подібність із одночасним збереженням унікальності останніх.

Список використаної літератури

1. Dickson M., Gagnon J. P. Key factors in the rising cost of new drug discovery and development. *Nat Rev Drug Discov.* 2004. Vol. 3. Pp. 417–429. DOI: 10.1038/nrd1382
2. Jahan A., Ismail M. Y., Sapuan S. M., Mustapha F. Material Screening and Choosing Methods. *Materials and DesignMater.* 2010. № 31. Pp. 696–705. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.08.013
3. Schuhmacher A., Gassmann O., Hinder M. Changing R&D models in research-based pharmaceutical companies. *Journal of Translational Medicine.* 2016. № 14. Pp. 105. DOI: 10.1186/s12967-016-0838-4
4. Babiarz J. C. In *FDA Regulatory affairs. A guide for prescription drugs, medical devices and biologics* (2nd ed). Informa Healthcare. Chapter 1: New York, 2008, pp. 34–45.
5. Petrova E. In *Innovation and Marketing in the Pharmaceutical Industry. International Series in Quantitative Marketing 20*; Springer-Verlag: New York, 2014. DOI: 10.1007/978-1-4614-7801-0
6. Kim S., Thiessen P. A., Bolton E. E., Chen J., Fu G., Gindulyte A., Han L., He J., He S., Shoemaker B. A., Wang J., Yu B., Zhang J., Bryant S. H. *Nucleic Acids Res.* 2016. 44(D1). D1202-13. DOI: 10.1093/nar/gkv951
7. Kirkpatrick P., Ellis C. *Nature.* 2004. Vol. 432. P. 823. DOI: 10.1038/432823a
8. Bloom N., Jones C. I., Van Reenen J. Webb M. Are Ideas Getting Harder to Find? *American Economic Review.* 2020. Vol. 110(4). Pp. 1104–1144. DOI: 10.3386/w23782
9. LeCunn Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning. *Nature.* 2015. Vol. 521. Pp. 436–444. DOI: 10.1038/nature14539
10. Goh G. B., Hodas N. O., Vishnu A. Deep learning for computational chemistry. *Journal Computational Chemistry.* 2017. Vol. 38. Pp. 1291–1307. DOI: 10.1002/jcc.24764
11. Miotto R., Wang F., Wang S., Jiang X., Dudley J. T. Deep learning for healthcare: review, opportunities and challenges. *Briefings in Bioinformatics.* 2018. Vol. 19(6). Pp. 1236–1246.

- DOI: 10.1093/bib/bbx044.
12. Schneider G. Automating drug discovery. *Nature Reviews Drug Discovery*. 2018. Vol. 17. Pp. 97–113. DOI: 10.1038/nrd.2017.232
 13. Bostrom J., Brow D. G., Young R. J., Keseru G. M. Expanding the medicinal chemistry synthetic toolbox. *Nature Reviews Drug Discovery* volume. 2018. Vol. 17. Pp. 709–727. DOI: 10.1038/nrd.2018.116
 14. Butler, K. T., Davies, D. W., Cartwright, H., Isayev, O. and A. Walsh *Nature* 2018, 559, 547–555. DOI: 10.1038/s41586-018-0337-2
 15. Zhavoronkov A., Ivanenkov Y. A., Aliper A., Veselov M. S., Aladinskiy V. A., Aladinskaya A. V., Terentiev V. A., Polykovskiy D. A., Kuznetsov M. D., Asadulaev A., Volkov Y., Zholus A., Shayakhmetov R. R., Zhebrak A., Minaeva L. I., Zagribelnyy B. A., Lee L. H., Soll R., Madge D., Xing L., Guo T., Aspuru-Guzik A. Deep learning enables rapid identification of potent DDR1 kinase inhibitors. *Nature biotechnology*. 2019. Vol. 37. Pp. 1038–1040. DOI: 10.1038/s41587-019-0224-x
 16. Steinhäuser M. O., Hiermaier S. A Review of Computational Methods in Materials Science: Examples from Shock-Wave and Polymer Physics. *International Journal of Molecular Sciences*. 2009. Vol. 10(12). Pp. 5135–5216. DOI: 10.3390/ijms10125135
 17. Behler J. *Neural network potential-energy surfaces for atomistic simulations. Chemical Modelling: Applications and Theory* : New York. 2010. Vol. 7. Pp. 141. DOI: 10.1039/9781849730884-00001
 18. Ghasemi S. A., Hofstetter A., Saha S., Goedecker S. Interatomic potentials for ionic systems with density functional accuracy based on charge densities obtained by a neural network. *Physical review B*. 2015. Vol. 92. P. 131. DOI: 10.1103/PhysRevB.92.045131
 19. Schutt K. T., Arbabzadah F., Chmiela S., Muller K. R., Tkatchenko A. Quantum-chemical insights from deep tensor neural networks. *Nature Communication*. 2017. Vol. 8. P. 890. DOI: 10.1038/ncomms13890
 20. Carrasquilla J., Melko R. G. Machine learning phases of matter. *Nature Physics*. 2017. Vol. 13. Pp. 431–434. DOI: 10.1038/nphys4035
 21. Xie T., Grossman J. C. Crystal Graph Convolutional Neural Networks for an Accurate and Interpretable Prediction of Material Properties. *Physical review letters*. 2018. Vol. 120. P. 301. DOI: 10.1103/Phys-RevLett.120.145301
 22. Ryan K., Lengyel J., Shatruck M. J. Crystal Structure Prediction via Deep Learning. *American Chemical Society Publication*. 2018. Vol. 140(32). Pp. 10158–10168. DOI: 10.1021/jacs.8b03913
 23. Amabilino S., Bratholm L. A., Bennie S. J., Vaucher A. C., Reiher M., Glowacki D. R. Training Neural Nets To Learn Reactive Potential Energy Surfaces Using Interactive Quantum Chemistry in Virtual Reality. *American Chemical Society Publication*. 2019. Vol. 123(20). pp. 4486–4499. DOI: 10.1021/acs.jpca.9b01006
 24. Bock F. E., Aydin R. C., Cyron C. J., Huber N., Kalidindi S. R., Klusemann B. A Review of the Application of Machine Learning and Data Mining Approaches in Continuum Materials Mechanics. *Machine Learning and Data Mining in Materials Science*. 2019. Vol. 6. P. 110. DOI: 10.3389/fmats.2019.00110
 25. Haghghatlari M., Hachmann J. Advances of machine learning in molecular modeling and simulation. *Current Opinion in Chemical Engineering*. 2019. Vol. 23. Pp. 51–57. DOI: 10.1016/j.coche.2019.02.009
 26. Chiriki S., Bulusu S. S. Modeling of DFT quality neural network potential for sodium clusters: Application to melting of sodium clusters (Na₂₀ to Na₄₀). *Chemical Physics Letters*. 2016. Vol. 652. Pp. 130–135. DOI: 10.1016/j.cplett.2016.04.013
 27. Shen L., Yang W. J. *Molecular Dynamics Simulations with Quantum Mechanics/Molecular Mechanics and Adaptive Neural Networks*. *American Chemical Society Publication*. 2018. Vol. 14. Pp. 1442–1455. DOI: 10.1021/acs.jctc.7b01195
 28. Jindal S., Bulusu S. S. A transferable artificial neural network model for atomic forces in nanoparticles. *The Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 149. P. 101. DOI: 10.1063/1.5043247
 29. Kondor, R. A transferable artificial neural network model for atomic forces in nanoparticles. 2018. arXiv:1810.06204.
 30. Schutt K. T., Sauceda H. E., Kindermans P. J., Tkatchenko A., Muller K. R. SchNet – A deep

- learning architecture for molecules and materials. *The Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 148. Pp. 722. DOI: 10.1063/1.5019779
31. Perez A., Martinez-Rosell G., De Fabritii. Simulations meet machine learning in structural biology. *Curr. Opin. Struct. Biol.* 2018. Vol. 49. Pp. 139–144. DOI: 10.1016/j.sbi.2018.02.004
 32. Herr J., Yao K., McIntyre K., Toth D. W., Parkhill J. Metadynamics for training neural network model chemistries: A competitive assessment. *The Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 148. P. 241. DOI: 10.1063/1.5020067
 33. Yao K., Herr J. E., Toth D. W., McIntyre R., Parkhill J. The TensorMol-0.1 model chemistry: a neural network augmented with long-range physics. *Chemical Science*. 2018. Vol. 9. Pp. 2261–2269. DOI: 10.1039/C7SC04934J
 34. Wang H., Zhang L., Han J. DeePMD-kit: A deep learning package for many-body potential energy representation and molecular dynamics. *Computer Physics Communications*. 2018. Vol. 228. Pp. 178–184. DOI: 10.1016/j.cpc.2018.03.016
 35. Zhang L., Wang H., Han J., Car R. Deep Potential Molecular Dynamics: A Scalable Model with the Accuracy of Quantum Mechanics. *Physical review letters*. 2018. Vol. 120. P. 3001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.143001
 36. Zhang L., Wang H. Adaptive coupling of a deep neural network potential to a classical force field. *The Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 149. Pp. 154. DOI: 10.1063/1.5042714
 37. Zhang L., Han J., Wang H., Car R. J. DeePCG: Constructing coarse-grained models via deep neural networks. *The Journal of Chemical Physics*. 2018. Vol. 149. P. 4101. DOI: 10.1063/1.5027645
 38. Lusci A., Pollastri G., Baldi P. J. Deep Architectures and Deep Learning in Chemoinformatics: The Prediction of Aqueous Solubility for Drug-Like Molecules. *American Chemical Society Publications*. 2013. Vol. 53. Pp. 1563–1575. DOI: 10.1021/ci400187y
 39. Dahl G. E., Jaitly N., Salakhutdinov R. Multi-task Neural Networks for QSAR Predictions. 2014. arXiv:1406.1231.
 40. Pyzer-Knapp E. O., Li K., Aspuru-Guzik A. Learning from the Harvard Clean Energy Project: The Use of Neural Networks to Accelerate Materials Discovery. *Advanced Functional Materials*. 2015. Vol. 25. Pp. 6495–6502. DOI: 10.1002/adfm.201501919
 41. Alipanahi B., Delong A., Weirauch M. T., Frey B. J. Predicting the sequence specificities of DNA- and RNA-binding proteins by deep learning. *Nature Biotechnology*. 2015. Vol. 33. Pp. 831–838. DOI: 10.1038/nbt.3300
 42. Wallach I., Dzamba M., Heifets A. AtomNet: A Deep Convolutional Neural Network for Bioactivity Prediction in Structure-based Drug Discovery. 2015. arXiv:1510.02855.
 43. Mayr A., Klambauer G., Unterthiner T., Hochreiter S. DeepTox: Toxicity Prediction using Deep Learning. *Frontiers Environmental*. 2016. Vol. 3. P. 80. DOI: 10.3389/fenvs.2015.00080
 44. Bjerrum E. J. SMILES Enumeration as Data Augmentation for Neural Network Modeling of Molecules. 2017. arXiv:1703.07076.
 45. Sharma A. K., Srivastava G. N., Roy A., Sharma V. K. *Front. Pharmacol.* 2017. Vol. 8. P. 880. DOI: 10.3389/fphar.2017.00880
 46. Kearnes S., Goldman B., Pande V. Modeling Industrial ADMET Data with Multitask Networks. 2017. arXiv:1606.08793.
 47. Jimenez J., Skalic M., Martinez-Rosell G., De Fabritii G. J. KDEEP: Protein–Ligand Absolute Binding Affinity Prediction via 3D-Convolutional Neural Networks. *Journal of Chemical Information and Modeling*. 2018. Vol. 58. Pp. 287–296. DOI: 10.1021/acs.jcim.7b00650
 48. Goh G. B., Hodas N. O., Siegel C., Vishnu A. SMILES2Vec: An Interpretable General-Purpose Deep Neural Network for Predicting Chemical Properties. 2018. arXiv:1712.02034.
 49. Goh G. B., Siegel C., Vishnu A., Hodas N. O. Using Rule-Based Labels for Weak Supervised Learning: A ChemNet for Transferable Chemical Property Prediction. 2018. arXiv:1712.02734.
 50. Stahl N., Falkman G., Karlsson A., Mathiason G., Bostrom J. J. Deep Convolutional Neural Networks for the Prediction of Molecular Properties: Challenges and Opportunities Connected to the Data. *Journal of Integrative Bioinformatics*. 2018. Vol. 65. Pp. 1613–4516. DOI: 10.1515/jib-2018-0065
 51. Lipinski C. A., Lombardo F., Dominy B. W., Feeney P. J. Experimental and computational approaches to estimate solubility and permeability in drug discovery and development settings. *Advanced Drug Delivery Reviews*. 2018. Vol. 46. Pp. 3–26. DOI: 10.1016/S0169-

- 409X(96)00423-1
52. Ghose A. K., Viswanadhan V. N., Wendoloski J. J. A Knowledge-Based Approach in Designing Combinatorial or Medicinal Chemistry Libraries for Drug Discovery. 1. A Qualitative and Quantitative Characterization of Known Drug Databases. American Chemical Society Publications. 2013. Vol. 1. Pp. 55–68. DOI: 10.1021/cc9800071
 53. Egan W. J., Merz K. M., Baldwin J. J. Prediction of Drug Absorption Using Multivariate Statistics. American Chemical Society Publications. American Chemical Society Publications. 2000. Vol. 43. Pp. 3867–3877. DOI: 10.1021/jm000292e
 54. Muegge I., Heald S. L., Brittelli D. Simple Selection Criteria for Drug-like Chemical Matter. American Chemical Society Publications. 2001. Vol. 44. Pp. 1841–1846. DOI: 10.1021/jm015507e
 55. Veber D. F., Johnson S. R., Cheng H. Y., Smith B. R., Ward K. W., Kopple K. D. Molecular Properties That Influence the Oral Bioavailability of Drug Candidates. American Chemical Society Publications. 2002. Vol. 45. Pp. 2615–2623. DOI: 10.1021/jm020017n
 56. Segler M. H., Kogej T., Tyrchan C., Waller M. P. Synthesis and Cytotoxic Evaluation of Arimetamycin A and Its Daunorubicin and Doxorubicin Hybrids. American Chemical Society Publications. 2018. Vol. 4(1). Pp. 120–131. DOI: 10.1021/acscentsci.7b0051z
 57. Kusner M. J., Paige B., Hernandez-Lobato J. M. Grammar Variational Autoencoder. 2017. arXiv:1703.01925v1.
 58. Goh G. B., Siegel C., Vishnu A., Hodas N. O., Baker N. How Much Chemistry Does a Deep Neural Network Need to Know to Make Accurate Predictions? 2018. arXiv:1710.02238.
 59. Goh G. B., Sakloth K., Siegel C., Vishnu A., Pfandtner J. Multimodal Deep Neural Networks using Both Engineered and Learned Representations for Biodegradability Prediction. 2018. arXiv:1808.04456.
 60. Kuzminykh D., Polykovskiy D., Kadurin A., Zhebrak A., Baskov I., Nikolenko S., Shayakhmetov R., Zhavoronkov A. 3D Molecular Representations Based on the Wave Transform for Convolutional Neural Networks. American Chemical Society Publications. 2018. Vol. 15. Pp. 4378–4385. DOI: 10.1021/acs.molpharmaceut.7b01134
 61. Wu Z., Pan S., Chen F., Long G., Zhang C., Yu P. S. A Comprehensive Survey on Graph Neural Networks. 2019. arXiv:1901.00596v2.
 62. Zhou J., Cui G., Zhang Z., Yang C., Liu Z., Wang L., Li C., Sun M. Graph Neural Networks: A Review of Methods and Applications. 2019. arXiv:1812.08434v3.
 63. Kearnes S., McCloskey K., Berndl M., Pande V., Riley P. Molecular graph convolutions: moving beyond fingerprints. *Journal of Computer-Aided Molecular Design*. 2016. Vol. 30(8). Pp. 595–608. DOI: 10.1007/s10822-016-9938-8
 64. Duvenaud D., Maclaurin D., Aguilera-Iparraguirre J., Gomez-Bombarelli R., Hirzel T., Aspuru-Guzik A., Adams R. P. Automatic chemical design using a data-driven continuous representation of molecules, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 28 (NIPS 2015)*, Montreal, Canada, Dec 7-12, 2015; Cortes, C. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2016, pp. 2224–2232.
 65. You J., Liu B., Ying R., Pande V., Leskovec J. Graph Convolutional Policy Network for Goal-Directed Molecular Graph Generation. 2019. arXiv:1806.02473v3.
 66. Fout A., Byrd J., Shariat B., Ben-Hur A. Composition-Based Multi-Relational Graph Convolutional Networks, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NIPS 2017)*, Long Beach, CA, USA, Dec 4-9, 2017; Guyon, I. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2018, pp. 6530–6539.
 67. Zitnik M., Agrawal M., Leskovec J. Modeling polypharmacy side effects with graph convolutional networks. 2018. arXiv:1802.00543v2.
 68. De Cao N., Kipf T. MolGAN: An implicit generative model for small molecular graphs. 2018. arXiv:1805.11973v1.
 69. Goodfellow I., Pouget-Abadie J., Mirza M., Xu B., Warde-Farley D., Ozair S., Courville A., Bengio Y. A generative adversarial network for artifact removal in photoacoustic computed tomography with a linear-array transducer, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 27 (NIPS 2014)*, Montreal, Canada, Dec 8-13, 2014; Ghahramani, Z. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2015, pp. 2672–2680.
 70. Creswell A., White T., Dumoulin V., Arulkumaran K., Sengupta B., Bharath A. A. IEEE

- Signal Processing Magazine. 2018. Vol. 35(1). Pp. 53–65. DOI: 10.1109/MSP.2017.2765202
71. Jorgensen P. B., Schmidt M. N., Winther O. Deep Generative Models for Molecular Science. *Molecular Informatic*. 2018. Vol. 37. P. 133. DOI: 10.1002/minf.201700133
 72. Gomez-Bombarelli R., Wei J. N., Duvenaud D., Hernandez-Lobato J. M., Sanchez-Lengeling B., Sheberla D., Aguilera-Iparraguirre J., Hirzel T. D., Adams R. P., Aspuru-Guzik A. Automatic Chemical Design Using a Data-Driven Continuous Representation of Molecules. *American Chemical Society Publications*. 2018. Vol. 4(2). Pp. 268–276. DOI: 10.1021/acscentsci.7b00572
 73. Kadurin A., Nikolenko S., Khrabrov K., Aliper A., Zhavoronkov A. druGAN: An Advanced Generative Adversarial Autoencoder Model for de Novo Generation of New Molecules with Desired Molecular Properties in Silico. *American Chemical Society Publications*. 2017. Vol. 14. Pp. 3098–3104. DOI: 10.1021/acs.molpharmaceut.7b00346
 74. Putin E., Asadulaev A., Vanhaelen Q., Ivanenkov Y., Aladinskaya A. V., Aliper A., Zhavoronkov A. Adversarial Threshold Neural Computer for Molecular de Novo Design. *American Chemical Society Publications*. 2018. Vol. 15. Pp. 4386–4397. DOI: 10.1021/acs.molpharmaceut.7b01137
 75. Blaschke T., Olivecrona M., Engkvist O., Bajorath J., Chen, H. Application of Generative Autoencoder in De Novo Molecular Design. *Special Issue: Generative Model*. 2018. Vol. 37. P. 123. DOI: 10.1002/minf.201700123
 76. Bjerrum E. J., Sattarov B. Improving Chemical Autoencoder Latent Space and Molecular De Novo Generation Diversity with Heteroencoders. *Biomolecules*. 2018. Vol. 8. P. 131. DOI: 10.3390/biom8040131
 77. Guimaraes G., Sanchez-Lengeling B., Outeiral C., Farias P. L. C., Aspuru-Guzik A. Objective-Reinforced Generative Adversarial Networks (ORGAN) for Sequence Generation Models. 2018. arXiv:1705.10843v3.
 78. Dai H., Tian Y., Dai B., Skiena S., Song L. Syntax-Directed Variational Autoencoder for Structured Data. 2018. arXiv:1802.08786v1.
 79. Hinton G. E., Zemel R. S. Autoencoders, Minimum Description Length, and Helmholtz Free Energy. *Advances*, in: *Proceedings of the 6th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 1993)*, Denver, CO, USA, Nov 30-Dec 2, 1993; Cowan, J. D. et al. Eds.; Morgan Kaufmann Publishers Inc.: San Francisco, CA, 1994, pp. 3–10.
 80. Kingma D. P., Welling M. Auto-Encoding Variational Bayes. 2014. arXiv:1312.6114v10.
 81. eMolecules Announces Version 2.0 of its Chemical Search Engine: URL: <https://www.emolecules.com/info/plus/download-database> (Access: 1.02.2022)
 82. Huuskonen J. J. Estimation of Aqueous Solubility for a Diverse Set of Organic Compounds Based on Molecular Topology. *American Chemical Society Publications*. 2000. Vol. 40. Pp. 773–777. DOI: 10.1021/ci9901338
 83. Hou T., Xia K., Zhang W., Xu X. ADME Evaluation in Drug Discovery. 4. Prediction of Aqueous Solubility Based on Atom Contribution Approach. *American Chemical Society Publications*. 2004. Vol. 44. Pp. 266–275. DOI: 10.1021/ci034184n
 84. Delaney J. S. ESOL: Estimating Aqueous Solubility Directly from Molecular Structure. *American Chemical Society Publications. Sci*. 2004. Vol. 44. Pp. 1000–1005. DOI: 10.1021/ci034243x
 85. DLS-100 Solubility Dataset: URL: <https://risweb.st-andrews.ac.uk/> (Access: 28.01.2022) DOI: 10.17630/3a3a5abc-8458-4924-8e6c-b804347605e8
 86. Llinas A., Glen R. C., Goodman J. M. Solubility Challenge: Can You Predict Solubilities of 32 Molecules Using a Database of 100 Reliable Measurements? *American Chemical Society Publications*. 2008. Vol. 48. Pp. 1289–1303. DOI: 10.1021/ci800058v
 87. Hopfinger A. J., Esposito E. X., Llinas A., Glen R. C., Goodman J. M. Findings of the Challenge To Predict Aqueous Solubility. *American Chemical Society Publications*. 2009. Vol. 49. Pp. 1–5. DOI: 10.1021/ci800436c
 88. Chawla N. V., Bowyer K. W., Hall L. O., Kegelmeyer W. P. SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique. *Journal Artificial Intelligence Recache*. 2002. Vol. 16. Pp. 321–357. DOI: 10.1613/jair.953
 89. Lemaitre G., Nogueira F., Aridas C. K. Imbalanced-learn: A python toolbox to tackle the curse of imbalanced datasets in machine learning. *The Journal of Machine Learning Research*. 2017. Vol. 18(1). Pp. 559–563.

90. RDKit: Open-source cheminformatics: URL: <http://www.rdkit.org> (Access: 1.02.2022)
91. Sutskever I., Vinyals O., Le Q. V. Sequence to Sequence Learning with Neural Networks, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 27 (NIPS 2014)*, Montreal, Canada, Dec 8-13, 2014; Ghahramani, Z. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2015, pp. 3104–3112.
92. Bahdanau D., Cho K., Bengio Y. Neural Machine Translation by Jointly Learning to Align and Translate. 2014. arXiv:1409.0473.
93. Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory. *Neural Computer*. 1997. Vol. 9(8). Pp. 1735–1780. DOI: 10.1162/neco.1997.9.8.1735
94. Mikolov T., Sutskever I., Chen K., Corrado G. S., Dean J. Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 26 (NIPS 2013)*, Lake Tahoe, NV, USA, Dec 5-10, 2013; Burges, C. J. C. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2014, pp. 3111–3119.
95. Lamb A., Goyal A., Zhang S., Courville A. C., Bengio Y. Professor Forcing: A New Algorithm for Training Recurrent Networks, in: *Advances in Neural Information Processing Systems 29 (NIPS 2016)*, Barcelona, Spain, Dec 5-10, 2016; Lee, D. D. et al. Eds.; Curran Associates, Inc.: Red Hook, NY, 2017, pp. 4601–4609.
96. Vincent P., Larochelle H. Bengio Y., Manzagol P. Extracting and composing robust features with denoising autoencoders, in: *Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning*, Helsinki, Finland, July 5-9, 2008; McCallum, A. and Roweis, S. Eds.; Omnipress: Madison, WI, USA, 2008, pp. 1096–1103. DOI: 10.1145/1390156.1390294.

Gurbych A. Machine learning method for creation of new medicinal substances with specific properties.

The creation of new biologically active substances is one of the most critical problems in the pharmaceutical industry. This paper proposes a method that combines several deep neural networks to generate unique molecules with given properties. Generation is complemented by correcting the chemical structure of defective molecules using a recurrent neural network with an attention mechanism. Chemical properties and similarity estimation to medicinal substances are carried out for the created molecular structures. The proposed ensemble allows the creation of new unique drugs, controlling the degree of solubility and other molecular descriptors.

Keywords: biologically active substances, neural network, molecule, machine learning, molecular structure, molecular descriptor.

References

1. Dickson, M., & Gagnon, J. P. (2004). Key factors in the rising cost of new drug discovery and development. *Nat Rev Drug Discov*, 3, 417–429. <https://doi.org/10.1038/nrd1382> [in English].
2. Jahan, A., Ismail, M. Y., Sapuan, S. M., & Mustapha, F. (2010). Material Screening and Choosng Methods. *Materials and DesignMater*, 31, 696–705. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.08.013> [in English].
3. Schuhmacher, A., Gassmann, O., & Hinder, M. (2016). Changing R&D models in research-based pharmaceutical companies. *Journal of Translational Medicine*, 14, 105. <https://doi.org/10.1186/s12967-016-0838-4> [in English].
4. Babiarz, J. C. (2008). *In FDA Regulatory affairs. A guide for prescription drugs, medical devices and biologics* (2nd ed). Informa Healthcare. New York, 34–45 [in English].
5. Petrova, E. (2014). *Innovation and Marketing in the Pharmaceutical Industry*. International Series in Quantitative Marketing 20, Springer-Verlag: New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7801-0> [in English].
6. Kim, S., Thiessen, P. A., Bolton, E. E., Chen, J., Fu, G., Gindulyte, A., Han, L., He, J., He, S., Shoemaker, B. A., Wang, J., Yu, B., Zhang, J., & Bryant, S. H. (2016). PubChem Substance and Compound databases. *Nucleic Acids Res*, 44(D1), D1202–D1213. <https://doi.org/10.1093/nar/gkv951> [in English].
7. Kirkpatrick, P., Ellis, C. (2004). Chemical space. *Nature*, 432, 823. <https://doi.org/10.1038/432823a> [in English].

8. Bloom, N., Jones, C. I., Van Reenen, J., & Webb, M. (2020). Are Ideas Getting Harder to Find? *American Economic Review*, 110(4), 1104–1144. <https://doi.org/10.3386/w23782> [in English].
9. LeCunn, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *Nature*, 521, 436–444. <https://doi.org/10.1038/nature14539> [in English].
10. Goh, G. B., Hodas, N. O., & Vishnu, A. (2017). Deep learning for computational chemistry. *Journal Computational Chemistry*, 38, 1291–1307. <https://doi.org/10.1002/jcc.24764> [in English].
11. Miotto, R., Wang, F., Wang, S., Jiang, X., & Dudley, J. T. (2018). Deep learning for health-care: review, opportunities and challenges. *Briefings in Bioinformatics*, 19(6), 1236–1246. <https://doi.org/10.1093/bib/bbx044> [in English].
12. Schneider, G. (2018). Automating drug discovery. *Nature Reviews Drug Discovery*, 17, 97–113. <https://doi.org/10.1038/nrd.2017.232> [in English].
13. Bostrom, J., Brow, D. G., Young, R. J., & Keseru, G. M. (2018). Expanding the medicinal chemistry synthetic toolbox. *Nature Reviews Drug Discovery*, 17, 709–727. <https://doi.org/10.1038/nrd.2018.116> [in English].
14. Butler, K. T., Davies, D. W., Cartwright, H., Isayev, O., & Walsh, A. (2018). Machine learning for molecular and materials science. *Nature*, 559, 547–555. <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0337-2> [in English].
15. Zhavoronkov, A., Ivanenkov, Y. A., Aliper, A., Veselov, M. S., Aladinskiy, V. A., Aladinskaya, A. V., Terentiev, V. A., Polykovskiy, D. A., Kuznetsov, M. D., Asadulaev, A., Volkov, Y., Zholus, A., Shayakhmetov, R. R., Zhebrak, A., Minaeva, L. I., Zagribelnyy, B. A., Lee, L. H., Soll, R., Madge, D., Xing, L., Guo, T., & Aspuru-Guzik, A. (2019). Deep learning enables rapid identification of potent DDR1 kinase inhibitors. *Nature biotechnology*, 37, 1038–1040. <https://doi.org/10.1038/s41587-019-0224-x> [in English].
16. Steinhäuser, M. O., & Hiermaier, S. (2009). A Review of Computational Methods in Materials Science: Examples from Shock-Wave and Polymer Physics. *International Journal of Molecular Sciences*, 10(12), 5135–5216. <https://doi.org/10.3390/ijms10125135> [in English].
17. Behler, J. (2010). Neural network potential-energy surfaces for atomistic simulations. *Chemical Modelling: Applications and Theory*, 7, 141. <https://doi.org/10.1039/9781849730884-00001> [in English].
18. Ghasemi, S. A., Hofstetter, A., Saha, S., & Goedecker, S. (2015). Interatomic potentials for ionic systems with density functional accuracy based on charge densities obtained by a neural network. *Physical review B*, 92, 131. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.045131> [in English].
19. Schutt, K. T., Arbabzadah, F., Chmiela, S., Müller, K. R., & Tkatchenko, A. (2017). Quantum-chemical insights from deep tensor neural networks. *Nature Communication*, 8, 890. <https://doi.org/10.1038/ncomms13890> [in English].
20. Carrasquilla, J., Melko, R. G. (2017). Machine learning phases of matter. *Nature Physics*, 13, 431–434. <https://doi.org/10.1038/nphys4035> [in English].
21. Xie, T., & Grossman, J. C. (2018). Crystal Graph Convolutional Neural Networks for an Accurate and Interpretable Prediction of Material Properties. *Physical review letters*, 120, 301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.145301> [in English].
22. Ryan, K., Lengyel, J., & Shatruk, M. J. (2018). Crystal Structure Prediction via Deep Learning. *American Chemical Society Publication*, 140(32), 10158–10168. <https://doi.org/10.1021/jacs.8b03913> [in English].
23. Amabilino, S., Bratholm, L. A., Bennie, S. J., Vaucher, A. C., Reiher, M., & Glowacki, D. R. (2019). Training Neural Nets To Learn Reactive Potential Energy Surfaces Using Interactive Quantum Chemistry in Virtual Reality. *American Chemical Society Publication*, 123(20), 4486–4499. <https://doi.org/10.1021/acs.jpca.9b01006> [in English].
24. Bock, F. E., Aydin, R. C., Cyron, C. J., Huber, N., Kalidindi, S. R., & Klusemann, B. (2019). A Review of the Application of Machine Learning and Data Mining Approaches in Continuum Materials Mechanics. *Machine Learning and Data Mining in Materials Science*, 6, 110. <https://doi.org/10.3389/fmats.2019.00110> [in English].
25. Haghghatdari, M., & Hachmann, J. (2019). Advances of machine learning in molecular modeling and simulation. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 23, 51–57. <https://doi.org/10.1016/j.coche.2019.02.009> [in English].

26. Chiriki, S., & Bulusu, S. S. (2016). Modeling of DFT quality neural network potential for sodium clusters: Application to melting of sodium clusters (Na₂₀ to Na₄₀). *Chemical Physics Letters*, 652, 130–135. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2016.04.013> [in English].
27. Shen, L., & Yang, W. J. (2018). Molecular Dynamics Simulations with Quantum Mechanics/Molecular Mechanics and Adaptive Neural Networks. *American Chemical Society Publication*, 14, 1442–1455. <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.7b01195> [in English].
28. Jindal, S., Bulusu, S. S. (2018). A transferable artificial neural network model for atomic forces in nanoparticles. *The Journal of Chemical Physics*, 149, 101. <https://doi.org/10.1063/1.5043247> [in English].
29. Shweta, J., Satya, S. & Bulusu S. (2018). A transferable artificial neural network model for atomic forces in nanoparticles. *Chemical Physics*. arXiv:1810.06204 [in English].
30. Schutt, K. T., Sauceda, H. E., Kindermans, P. J., Tkatchenko, A., & Muller, K. R. (2018). SchNet – A deep learning architecture for molecules and materials. *The Journal of Chemical Physics*, 148, 722. <https://doi.org/10.1063/1.5019779> [in English].
31. Perez, A., & Martinez-Rosell, G. (2018). Simulations meet machine learning in structural biology. *Curr. Opin. Struct. Biol.*, 49, 139–144. <https://doi.org/10.1016/j.sbi.2018.02.004> [in English].
32. Herr, J., Yao, K., McIntyre, K., Toth, D. W., & Parkhill, J. (2018). Metadynamics for training neural network model chemistries: A competitive assessment. *The Journal of Chemical Physics*, 148, 241. <https://doi.org/10.1063/1.5020067> [in English].
33. Yao, K., Herr, J. E., Toth, D. W., MckIntyre, R., & Parkhill, J. (2018). The TensorMol-0.1 model chemistry: a neural network augmented with long-range physics. *Chemical Science*, 9, 2261–2269. <https://doi.org/10.1039/C7SC04934J> [in English].
34. Wang, H., Zhang, L., & Han, J. (2018). DeePMD-kit: A deep learning package for many-body potential energy representation and molecular dynamics. *Computer Physics Communications*, 228, 178–184. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2018.03.016> [in English].
35. Zhang, L., Wang, H., Han, J., & Car, R. (2018). Deep Potential Molecular Dynamics: A Scalable Model with the Accuracy of Quantum Mechanics. *Physical review letters*, 120, 3001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.143001> [in English].
36. Zhang, L., & Wang, H. (2018). Adaptive coupling of a deep neural network potential to a classical force field. *The Journal of Chemical Physics*, 149, 154. <https://doi.org/10.1063/1.5042714> [in English].
37. Zhang, L., Han, J., Wang, H., & Car, R. J. (2018). DeePCG: Constructing coarse-grained models via deep neural networks. *The Journal of Chemical Physics*, 149, 4101. <https://doi.org/10.1063/1.5027645> [in English].
38. Lusci, A., Pollastri, G., & Baldi, P. J. (2013). Deep Architectures and Deep Learning in Chemoinformatics: The Prediction of Aqueous Solubility for Drug-Like Molecules. *American Chemical Society Publications*, 53, 1563–1575. <https://doi.org/10.1021/ci400187y> [in English].
39. Dahl, G. E. Jaitly, N., & Salakhutdinov, R. (2014). Multi-task Neural Networks for QSAR Predictions. *Machine Learning*. arXiv:1406.1231 [in English].
40. Pyzer-Knapp, E. O., Li, K., & Aspuru-Guzik, A. (2015). Learning from the Harvard Clean Energy Project: The Use of Neural Networks to Accelerate Materials Discovery. *Advanced Functional Materials*, 25, 6495–6502. <https://doi.org/10.1002/adfm.201501919> [in English].
41. Alipanahi, B., Delong, A., Weirauch, M. T., & Frey, B. J. (2015). Predicting the sequence specificities of DNA- and RNA-binding proteins by deep learning. *Nature Biotechnology*, 33, 831–838. <https://doi.org/10.1038/nbt.3300> [in English].
42. Wallach, I., Dzamba, M., & Heifets, A. (2015). AtomNet: A Deep Convolutional Neural Network for Bioactivity Prediction in Structure-based Drug Discovery. *Machine Learning*. arXiv:1510.02855 [in English].
43. Mayr, A., Klambauer, G., Unterthiner, T., & Hochreiter, S. (2016). DeepTox: Toxicity Prediction using Deep Learning. *Frontiers Environmental*, 3, 80. <https://doi.org/10.3389/fenvs.2015.00080> [in English].
44. Bjerrum, E. J. (2017). SMILES Enumeration as Data Augmentation for Neural Network Modeling of Molecules. *Machine Learning*. arXiv:1703.07076 [in English].
45. Sharma, A. K., Srivastava, G. N., Roy, A., & Sharma, V. K. (2017). ToxiM: A Toxicity Prediction Tool for Small Molecules Developed Using Machine Learning and Chemoinformat-

- ics Approaches. *Frontiers in Pharmacology*, 8, 880. <https://doi.org/10.3389/fphar.2017.00880> [in English].
46. Kearnes, S., Goldman, B., & Pande, V. (2017). Modeling Industrial ADMET Data with Multitask Networks. *Machine Learning*. arXiv:1606.08793 [in English].
47. Jimenez, J., Skalic, M., Martinez-Rosell, G., & De Fabritiis, G. J. (2018). KDEEP: Protein-Ligand Absolute Binding Affinity Prediction via 3D-Convolutional Neural Networks. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 58, 287–296. <https://doi.org/10.1021/acs.jcim.7b00650> [in English].
48. Goh, G. B., Hodas, N. O., Siegel, C., & Vishnu, A. (2018). SMILES2Vec: An Interpretable General-Purpose Deep Neural Network for Predicting Chemical Properties. *Machine Learning*. arXiv:1712.02034 [in English].
49. Goh, G. B., Siegel, C., Vishnu, A., & Hodas, N. O. (2018). Using Rule-Based Labels for Weak Supervised Learning: A ChemNet for Transferable Chemical Property Prediction. *Machine Learning*. arXiv:1712.02734 [in English].
50. Stahl, N., Falkman, G., Karlsson, A., Mathiason, G., & Bostrom, J. J. (2018). Deep Convolutional Neural Networks for the Prediction of Molecular Properties: Challenges and Opportunities Connected to the Data. *Journal of Integrative Bioinformatics*, 65, 1613–4516. <https://doi.org/10.1515/jib-2018-0065> [in English].
51. Lipinski, C. A., Lombardo, F., Dominy, B. W., & Feeney, P. J. Experimental and computational approaches to estimate solubility and permeability in drug discovery and development settings. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 46, 3–26. [https://doi.org/10.1016/S0169-409X\(96\)00423-1](https://doi.org/10.1016/S0169-409X(96)00423-1) [in English].
52. Ghose, A. K., Viswanadhan, V. N., & Wendoloski, J. J. (2013). A Knowledge-Based Approach in Designing Combinatorial or Medicinal Chemistry Libraries for Drug Discovery. A Qualitative and Quantitative Characterization of Known Drug Databases. *American Chemical Society Publications*, 1, 55–68. <https://doi.org/10.1021/cc9800071> [in English].
53. Egan, W. J., Merz, K. M., & Baldwin, J. J. (2000). Prediction of Drug Absorption Using Multivariate Statistics. American Chemical Society Publications. *American Chemical Society Publications*, 43, 3867–3877. <https://doi.org/10.1021/jm000292e> [in English].
54. Muegge, I., Heald, S. L., & Brittelli, D. (2001). Simple Selection Criteria for Drug-like Chemical Matter. *American Chemical Society Publications*, 44, 1841–1846. <https://doi.org/10.1021/jm015507e> [in English].
55. Veber, D. F., Johnson, S. R., Cheng, H. Y., Smith, B. R., Ward, K. W., & Kopple, K. D. (2002). Molecular Properties That Influence the Oral Bioavailability of Drug Candidates. *American Chemical Society Publications*, 45, 2615–2623. <https://doi.org/10.1021/jm020017n> [in English].
56. Segler, M. H., Kogej, T., Tyrchan, C., & Waller, M. P. (2018). Synthesis and Cytotoxic Evaluation of Arimetamycin A and Its Daunorubicin and Doxorubicin Hybrids. *American Chemical Society Publications*, 4(1), 120–131. <https://doi.org/10.1021/acscentsci.7b0051z> [in English].
57. Kusner, M. J., Paige, B., & Hernandez-Lobato, J. M. (2017). Grammar Variational Autoencoder. *Machine Learning*. arXiv:1703.01925v1 [in English].
58. Goh, G. B., Siegel, C., Vishnu, A., Hodas, N. O., & Baker, N. (2018). How Much Chemistry Does a Deep Neural Network Need to Know to Make Accurate Predictions? *Machine Learning*. arXiv:1710.02238 [in English].
59. Goh, G. B., Sakloth, K., Siegel, C., Vishnu, A., & Pfaendtner, J. (2018). Multimodal Deep Neural Networks using Both Engineered and Learned Representations for Biodegradability Prediction. *Machine Learning*. arXiv:1808.04456 [in English].
60. Kuzminykh, D., Polykovskiy, D., Kadurin, A., Zhebrak, A., Baskov, I., Nikolenko, S., Shayakhmetov, R., & Zhavoronkov, A. (2018). 3D Molecular Representations Based on the Wave Transform for Convolutional Neural Networks. *American Chemical Society Publications*, 15, 4378–4385. <https://doi.org/10.1021/acs.molpharmaceut.7b01134> [in English].
61. Wu, Z., Pan, S., Chen, F., Long, G., Zhang, C., & Yu, P. S. (2019). A Comprehensive Survey on Graph Neural Networks. *Machine Learning*. arXiv:1901.00596v2 [in English].
62. Zhou, J., Cui, G., Zhang, Z., Yang, C., Liu, Z., Wang, L., Li, C., & Sun, M. (2019). Graph Neural Networks: A Review of Methods and Applications. *Machine Learning*. arXiv:1812.08434v3 [in English].
63. Kearnes, S., McCloskey, K., Berndl, M., Pande, V., & Riley, P. (2016). Molecular graph con-

- volution: moving beyond fingerprints. *Journal of Computer-Aided Molecular Design*, 30(8), 595–608. <https://doi.org/10.1007/s10822-016-9938-8> [in English].
64. Duvenaud, D., Maclaurin, D., Aguilera-Iparraguirre, J., Gomez-Bombarelli, R., Hirzel, T., Aspuru-Guzik, A. & Adams, R. P. (2015). Automatic chemical design using a data-driven continuous representation of molecules, *Advances in Neural Information Processing Systems 28 (NIPS 2015)*, Montreal, 2016, 2224–2232 [in English].
 65. You, J., Liu, B., Ying, R., Pande, V., & Leskovec, J. (2019). Graph Convolutional Policy Network for Goal-Directed Molecular Graph Generation. *Machine Learning*. arXiv:1806.02473v3 [in English].
 66. Fout, A., Byrd, J., Shariat, B., & Ben-Hur, A. (2017). Composition-Based Multi-Relational Graph Convolutional Networks, *Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NIPS 2017)*, Long Beach, 6530–6539 [in English].
 67. Zitnik, M., Agrawal, M., & Leskovec, J. (2018). Modeling polypharmacy side effects with graph convolutional networks. *Machine Learning*. arXiv:1802.00543v2 [in English].
 68. De Cao, N., Kipf, T. (2018). MolGAN: An implicit generative model for small molecular graphs. *Machine Learning*. arXiv:1805.11973v1 [in English].
 69. Goodfellow, I., Pouget-Abadie, J., Mirza, M., Xu, B., Warde-Farley, D., Ozair, S., Courville, A., & Bengio, Y. (2014). A generative adversarial network for artifact removal in photoacoustic computed tomography with a linear-array transducer, *Advances in Neural Information Processing Systems 27 (NIPS 2014)*, Montreal, 2672–2680 [in English].
 70. Creswell, A., White, T., Dumoulin, V., Arulkumaran, K., Sengupta, B., & Bharath, A. A. (2018). Generative Adversarial Networks: An Overview. *IEEE Signal Processing Magazine*, 35(1), 53–65. <https://doi.org/10.1109/MSP.2017.2765202> [in English].
 71. Jorgensen, P. B., Schmidt, M. N., & Winther, O. (2018). Deep Generative Models for Molecular Science. *Molecular Informatic*, 37, 133. <https://doi.org/10.1002/minf.201700133> [in English].
 72. Gomez-Bombarelli, R., Wei, J. N., Duvenaud, D., Hernandez-Lobato, J. M., Sanchez-Lengeling, B., Sheberla, D., Aguilera-Iparraguirre, J., Hirzel, T. D., Adams, R. P., & Aspuru-Guzik, A. (2018). Automatic Chemical Design Using a Data-Driven Continuous Representation of Molecules. *American Chemical Society Publications*, 4(2), 268–276. <https://doi.org/10.1021/acscentsci.7b00572> [in English].
 73. Kadurin, A., Nikolenko, S., Khrabrov, K., Aliper, A., & Zhavoronkov, A. (2017). druGAN: An Advanced Generative Adversarial Autoencoder Model for de Novo Generation of New Molecules with Desired Molecular Properties in Silico. *American Chemical Society Publications*, 14, 3098–3104. <https://doi.org/10.1021/acs.molpharmaceut.7b00346> [in English].
 74. Putin, E., Asadulaev, A., Vanhaelen, Q., Ivanenkov, Y., Aladinskaya, A. V., Aliper, A., & Zhavoronkov, A. (2018). Adversarial Threshold Neural Computer for Molecular de Novo Design. *American Chemical Society Publications*, 15, 4386–4397. <https://doi.org/10.1021/acs.molpharmaceut.7b01137> [in English].
 75. Blaschke, T., Olivecrona, M., Engkvist, O., Bajorath, J., & Chen, H. (2018). Application of Generative Autoencoder in De Novo Molecular Design. *Special Issue: Generative Model*, 37, 123. <https://doi.org/10.1002/minf.201700123> [in English].
 76. Bjerrum, E. J., & Sattarov, B. (2018). Improving Chemical Autoencoder Latent Space and Molecular De Novo Generation Diversity with Heteroencoders. *Biomolecules*, 8, 131. <https://doi.org/10.3390/biom8040131> [in English].
 77. Guimaraes, G., Sanchez-Lengeling, B., Outeiral, C., Farias, P. L. C., & Aspuru-Guzik, A. (2018). Objective-Reinforced Generative Adversarial Networks (ORGAN) for Sequence Generation Models. *Machine Learning*. arXiv:1705.10843v3 [in English].
 78. Dai, H., Tian, Y., Dai, B., Skiena, S., & Song, L. (2018). Syntax-Directed Variational Autoencoder for Structured Data. *Machine Learning*. arXiv:1802.08786v1 [in English].
 79. Hinton, G. E., & Zemel, R. S. (1993). Autoencoders, Minimum Description Length, and Helmholtz Free Energy, *Proceedings of the 6th International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 1993)*, Denver, 3–10. [in English].
 80. Kingma, D. P., & Welling, M. (2014). Auto-Encoding Variational Bayes. *Machine Learning*. arXiv:1312.6114v10 [in English].
 81. eMolecules Announces Version 2.0 of its Chemical Search Engine (2022). Retrieved from <https://www.emolecules.com/info/plus/download-database> [in English].

82. Huuskonen, J. J. (2000). Estimation of Aqueous Solubility for a Diverse Set of Organic Compounds Based on Molecular Topology. *American Chemical Society Publications*, 40, 773–777. <https://doi.org/10.1021/ci9901338> [in English].
83. Hou, T., Xia, K., Zhang, W., & Xu, X. (2004). ADME Evaluation in Drug Discovery, *Prediction of Aqueous Solubility Based on Atom Contribution Approach*. *American Chemical Society Publications*, 44, 266–275. <https://doi.org/10.1021/ci034184n> [in English].
84. Delaney, J. S. (2004). ESOL: Estimating Aqueous Solubility Directly from Molecular Structure. *American Chemical Society Publications*, 44, 1000–1005. <https://doi.org/10.1021/ci034243x> [in English].
85. DLS-100 Solubility Dataset (2022). Retrieved from <https://risweb.st-andrews.ac.uk/>. <https://doi.org/10.17630/3a3a5abc-8458-4924-8e6c-b804347605e8> [in English].
86. Llinas, A., Glen, R. C., & Goodman, J. M. (2008). Solubility Challenge: Can You Predict Solubilities of 32 Molecules Using a Database of 100 Reliable Measurements? *American Chemical Society Publications*, 48, 1289–1303. <https://doi.org/10.1021/ci800058v> [in English].
87. Hopfinger, A. J., Esposito, E. X., Llinas, A., Glen, R. C., & Goodman, J. M. (2009). Findings of the Challenge To Predict Aqueous Solubility. *American Chemical Society Publications*, 49, 1–5. <https://doi.org/10.1021/ci800436c> [in English].
88. Chawla, N. V., Bowyer, K. W., Hall, L. O., & Kegelmeyer, W. P. (2002). SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique. *Journal Artificial Intelligence Recache*, 16, 321–357. <https://doi.org/10.1613/jair.953> [in English].
89. Lemaitre, G., Nogueira, F., & Aridas, C. K. (2017). Imbalanced-learn: A python toolbox to tackle the curse of imbalanced datasets in machine learning. *The Journal of Machine Learning Research*, 18(1), 559–563 [in English].
90. RDKit: Open-source cheminformatics (2022). Retrieved from <http://www.rdkit.org> [in English].
91. Sutskever, I., Vinyals, O., & Le, Q. V. (2015). Sequence to Sequence Learning with Neural Networks, *Advances in Neural Information Processing Systems 27 (NIPS 2014)*, Montreal, 3104–3112 [in English].
92. Bahdanau, D., Cho, K., & Bengio, Y. (2014). Neural Machine Translation by Jointly Learning to Align and Translate. *Machine Learning*. arXiv:1409.0473 [in English].
93. Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long Short-Term Memory. *Neural Computer*, 9(8), 1735–1780. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735> [in English].
94. Mikolov, T., Sutskever, I., Chen, K., Corrado, G.S., Dean, J. (2013). Distributed Representations of Words and Phrases and their Compositionality, *Advances in Neural Information Processing Systems 26 (NIPS 2013)*, Lake Tahoe, 3111–3119 [in English].
95. Lamb, A., Goyal, A., Zhang, S., Courville, A. C., & Bengio, Y. (2016). Professor Forcing: A New Algorithm for Training Recurrent Networks, *Advances in Neural Information Processing Systems 29 (NIPS 2016)*, Barcelona, 4601–4609 [in English].
96. Vincent, P., Larochelle, H., Bengio, Y., & Manzagol, P. (2008). Extracting and composing robust features with denoising autoencoders, *Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning*, Helsinki, 1096–1103. <https://doi.org/10.1145/1390156.1390294> [in English].

Одержано 07.02.2022

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).146-154)**М. М. Діхтярук¹, О. А. Кравчук²**

¹ Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
mega-dihtyaruk@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>

² Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
kravchukoa2@khmnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6937-5001>

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛЯ ВПЛИВУ ПРУЖНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ І НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ВІД ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ

В даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності досліджується вплив пружних переміщень і напружень для пружної смуги з початковим (залишковим) напруженням від дії зосередженої сили. Розглядаються випадки коли сила діє під довільним кутом α , коли на попередньо напружену смугу діє тільки вертикальна сила і випадок дії тільки горизонтальної сили. Отримано систему розв'язуючих інтегрально-диференціальних рівнянь, для пружної смуги з початковими напруженнями підсиленої пружним скінченним стрингером. Для випадків відсутності горизонтальних навантажень, або вертикальних навантажень система зведена до розрахункових інтегрально-диференціальних рівнянь. Всі дослідження виконані в рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих і нестисливих тіл, у випадку пружних потенціалів довільної структури, в загальному вигляді для теорії великих (скінченних) початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій.

Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже, суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому. Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились у достатній кількості лише наприкінці минулого століття. В першу чергу, це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залишкових напружень. У загальному випадку строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом. Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач.

Ключові слова: пружні тіла, контактна задача, граничні умови, функція Дірака.

1. Вступ. Задачі, що виникають при передачі навантаження від накладки скріпленої з пружною смугою (пластиною) – класичної теорії пружності знову привернули увагу у випадках, коли в останній виникають початкові (залишкові) напруження. Особлива необхідність їхнього розгляду виникає в наслідок їхньої важливості при дослідженні конструкцій взагалі і особливо в зв'язку з проектуванням конструкції літальних апаратів. Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд

дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже, суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому. Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому. Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились у достатній кількості лише наприкінці минулого століття. В першу чергу, це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залишкових напружень. У загальному випадку строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень можна обмежитись її лінеаризованим варіантом. Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач.

У дійсній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності викладається постановка і розв'язок змішаної задачі про відшукування функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями (товщини t) від дії зосередженого навантаження $P\delta(y_1)$, в напрямку під кутом α до осі Oy_1 (рис. 1), де $\delta(y_1)$ – одинична функція Дірака.

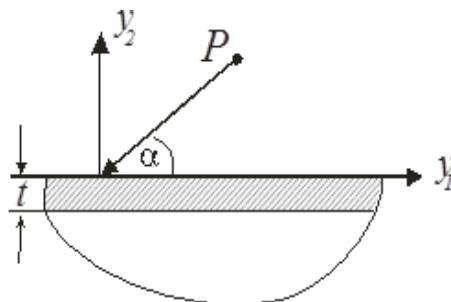


Рис. 1. Пружна смуга з початковими напруженнями.

Всі дослідження виконані для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів довільної структури в загальному вигляді для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій. Для переходу до різних варіантів теорії малих початкових деформацій необхідно провести спрощення, зазначені в [1].

2. Граничні умови і вихідні співвідношення. Будемо вважати, що початковий стан у пружній смугі з початковими напруженнями ($-\infty < y_1 < \infty$; $-t \leq y_2 \leq t$) є однорідним і виконуються умови плоскої деформації [1], тобто $\lambda_3 = 1$, $S_{22}^0 = 0$. Дотримуючись [1, 2] дослідження проведемо в координатах початкового деформованого стану y_i , що зв'язані з лагранжевими координатами (природного стану співвідношеннями: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = 1, 2$), де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i = \delta_{im} (\lambda_i - 1) \lambda_i^{-1} y_i; \quad \lambda_i = const, \quad (1)$$

u_m^0 – переміщення, яке визначає початковий стан у випадку однорідних початкових напружень.

Розглянемо плоску деформацію однорідного початкового стану, для якого

$$S_0^{11} \neq 0, \quad S_0^{22} = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_3 = 1. \quad (2)$$

Для визначення поля пружних переміщень і напружень (функції впливу) від прикладеної на її грані зосередженої сили $P\delta(y_1)$, прикладеної під кутом α до осі Oy_1 , одержуємо наступні граничні умови на кромці пружної смуги при $y_2 = 0$ (рис. 1).

$$Q_{22}(y_1, 0) = -P \sin \alpha \cdot \delta(y_1); \quad Q_{21}(y_1, 0) = -P \cos \alpha \cdot \delta(y_1) \quad (3)$$

на лінії з'єднання пружної смуги і півплощини при $y_2 = -t$:

$$u_1(y_1, -t) = 0; \quad u_2(y_1, -t) = 0, \quad -\infty < y_1 < \infty \quad (4)$$

Дотримуючись [1, 3], вирази для переміщень і напружень граничних точок смуги з початковими напруженнями у випадку рівних і нерівних коренів визначального рівняння [1], запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} u_1(y_1, z_j) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(A_1 + A_2) + \alpha z_1 L^-(B_1 + B_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha \\ u_2(y_1, z_j) &= \frac{m_1}{2\pi\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} [L^+(B_1 + s_1 B_2) + \alpha z_1 L^-(A_1 + s_1 A_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{22}(y_1, z_j) &= \frac{c_{44}(1+m_1)l_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [L^+(A_1 + sA_2) + \\ &\quad + \alpha z_1 L^-(B_1 + sB_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{21}(y_1, z_j) &= -\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{c_{44}(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha [L^+(B_1 + s_0 B_2) + \\ &\quad + \alpha z_1 L^-(A_1 + s_0 A_2)] \exp(-i\alpha y_1) d\alpha; \end{aligned}$$

Тут

$$z_j = (n_j)^{-\frac{1}{2}} y_2; \quad (j = 1, 2); \quad s_0 = \frac{1 + m_1}{1 + m_2}; \quad s = s_0 \frac{l_2}{l_1}; \quad s_1 = \frac{m_2 - 1}{m_1}.$$

$$L^+(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz) \operatorname{ch} \alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ A \operatorname{ch} \alpha z_1 + Bz \operatorname{ch} \alpha z_2; & n_1 \neq n_2; \end{cases} \quad (7)$$

$$L^-(A + Bz) = \begin{cases} (A + Bz) (\alpha z_1)^{-1} \operatorname{sh} \alpha z_1 + B \operatorname{ch} \alpha z_1; & n_1 = n_2; \\ A \operatorname{sh} \alpha z_1 + B (\alpha z_1)^{-1} \operatorname{sh} \alpha z_2; & n_1 \neq n_2; \end{cases} \quad (8)$$

l_i, m_i ($i = 1, 2$), c_{44} – параметри, що визначають початковий напружений стан в пружній смугі, n_i ($i = 1, 2$) – корені визначального рівняння [1].

Задовольнивши граничні умови (3) і (4) з (5) і (6) після ряду перетворень

$$\begin{cases} A_1 + A_2 s = n_0 \\ B_1 + B_2 s_0 = m_0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + A_2 (\operatorname{ch} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1) - B_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 - \\ \quad - B_2 (\operatorname{sh} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{ch} \alpha t_1) = 0 \\ A_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha_1 - A_2 (s_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{ch} \alpha t_1) + B_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + \\ \quad + B_2 (s_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

для нерівних коренів $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 s = n_0 \\ B_1 + B_2 s_0 = m_0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha t_1 + A_2 \operatorname{ch} \alpha t_2 + B_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 - B_1 \operatorname{sh} \alpha t_2 = 0 \\ A_1 \alpha t_1 \operatorname{sh} \alpha_1 - A_2 s_1 \operatorname{sh} \alpha t_1 + B_2 \operatorname{ch} \alpha t_1 + B_2 s_1 \operatorname{ch} \alpha t_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тут введемо такі позначення:

$$n_0 = -\frac{P\delta(y_1) \sin \alpha_0}{\alpha c_{44} (1 + m_1) l_1}; \quad m_0 = \frac{\varphi_i \sqrt{n_i} \delta(y_1) \cos \alpha_0}{|\alpha| c_{44} (1 + m_1)}; \quad \varphi_i = \frac{\alpha \cdot t}{\sqrt{n_i}}. \quad (11)$$

До систем (9) і (10) застосуємо метод Крамера і розв'язавши знайдемо невідомі коефіцієнти A_i B_i ($i = 1, 2$), що виражаються через параметри, які визначають початковий напружений стан. Вираз для цих коефіцієнтів запишемо відповідно у вигляді:

✓ для рівних коренів визначального рівняння [3, 4, 5] $n_1 = n_2$ знаходимо коефіцієнти A_i B_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ -n_0 \left[-s_1 (s_0 + 1) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - \varphi_1^2 + (s_1 - s_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + m_0 \left[-s \bar{s}_0 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 - s l_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ A_2 &= \left\{ n_0 \left[(s_1 - s_0) - \bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 \right] + m_0 \left[\varphi_1 + \bar{s}_1 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ B_1 &= \left\{ -n_0 \left[-s_0 \bar{s}_1 \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 \right] + m_0 \left[s \bar{s}_0 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 - s \bar{s}_1 \right] \right\} \xi_1^{-1} \\ B_2 &= \left\{ n_0 \left[-\bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \varphi_1 \right] + m_0 \left[-\bar{s}_1 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \bar{s} \right] \right\} \xi_1^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

✓ для нерівних коренів визначального рівняння [1] $n_1 \neq n_2$ знаходимо A_i B_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ -n_0 \left[s_0 \omega_1(\alpha) - s_1 s_0 \varphi_1 \omega_1(\alpha) - 2s_1 \operatorname{sh}^2 \varphi^2 - s_1 \right] - \right. \\ &\quad \left. - m_0 \left[\bar{s} s_1 \omega_2(\alpha) + s \omega_4(\alpha) \right] \right\} \xi_1^{-1}(\alpha) \\ A_2 &= \left\{ n_0 \left[s_0 (\varphi_1^2 - 2) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + s_1 \omega_1(\alpha) + \varphi_1 \omega_4(\alpha) - s_0 \right] + \right. \\ &\quad \left. + m_0 \left[s_1 \varphi_1 \omega_2(\alpha) + \omega_3(\alpha) \right] \right\} \xi_2^{-1}(\alpha) \\ B_1 &= \left\{ n_0 \left[s_0 s_1 \omega_3(\alpha) - s_0 \varphi_1 \omega_2(\alpha) \right] + m_0 \left[s s_1 \omega_1(\alpha) + s \varphi_1 \omega_2(\alpha) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_1 \operatorname{ch} 2\varphi_2 \right] \right\} \xi_2^{-1} \\ B_2 &= \left\{ n_0 \left[\varphi_1 \omega_2(x) + s_1 \omega_3(\alpha) \right] + m_0 \left[s_1 (\varphi_1^2 - 2) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - s_1 \varphi_1 \omega_4(\alpha) + \omega_1(x) - s \right] \right\} \xi_2^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

Тут введені наступні позначення:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_1 &= \omega_0(x); & \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 &= \omega_1(x); & \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 &= \omega_2(x); \\ \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 &= \omega_3(x); & \operatorname{sh} \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2 &= \omega_4(x). \\ \bar{s} &= 1 - s; & \bar{s}_1 &= 1 - s_1; & \bar{s}_0 &= 1 - s_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_1(\alpha) &= (s - s_0) (s_1 - 1) \operatorname{sh}^2 \varphi_1 + \varphi_1^2 + (s_1 - s_0) (s - s_1) \\ \xi_2(\alpha) &= s s_0 \varphi_1^2 \operatorname{sh}^2 \varphi_1 - s s_0 \operatorname{ch}^2 \varphi_1 - (s_1 s_0 - s) \varphi_1 \omega_4(x) + \\ &\quad + (s s_1 - s_0) \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 - s_1 \operatorname{ch} 2\varphi_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Підставивши значення (12) і (13) у (5) знайдемо функцію впливу в пружній смузі з початковими напруженнями відповідно для рівних і нерівних коренів визначального рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha_1 y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \\ u_{12}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha_1 y_2) e^{-i\alpha y_1} d\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Розглянемо два випадки граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями.

I. Одинична сила $\delta(y_1)$ діє нормально до верхньої грані пружної смуги з початковими напруженнями [6] ($P = 1$).

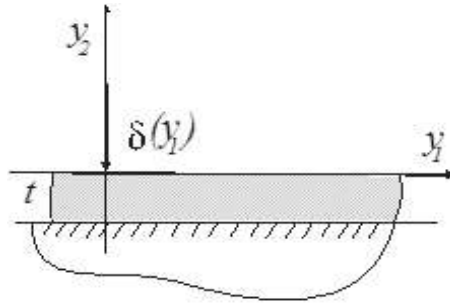


Рис. 2. Нормальна дія одиничної сили на пружну смугу.

У цьому випадку (рис. 2) зміщення граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями можна обчислити за формулами:

$$\begin{aligned} u_{11}(y_1, 0) &= u_1(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha \\ u_{12}(y_1, 0) &= u_2(y_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

Тут при $n_1 = n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = n_0 [(s_0 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 + s_1 s_0 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1 N + (\alpha \varphi_1)^2 - \bar{s}_1 N + \varphi_1] \xi_1^{-1}(\alpha) \quad (17)$$

при $n_1 \neq n_2$:

$$H_{11}(\alpha) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [s_0 s_1 N_3 - s_0 (\alpha \varphi_1) N_2 + s_1 ((\alpha \varphi_1) N_2 - s_1 N_3)] \xi_2^{-1}(\alpha) \quad (18)$$

Крім того, для функцій $H_{11}(\alpha)$, $H_{12}(\alpha)$ справедливі наступні граничні співвідношення:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{11}(\alpha) = Q(1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{12}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) \quad (19)$$

II. Одинична сила $\delta(y_1)$ ($P \equiv 1$) діє тангенціально до верхньої точки пружної смуги з початковими напруженнями [7] (рис. 3).

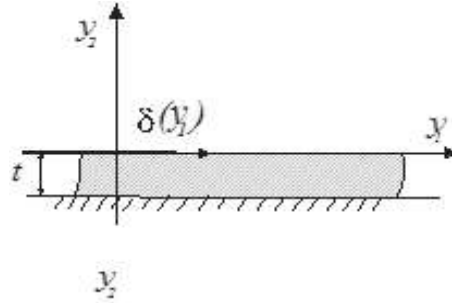


Рис. 3. Тангенціальна дія одиничної сили на пружну смугу.

У цьому випадку переміщення знайдемо по аналогічних формулах:

$$\begin{aligned} u_{21}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; & -\infty < y_1 < \infty \\ u_{22}(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; & -\infty < y_1 < \infty \end{aligned} \quad (20)$$

Тут при $n_1 = n_2$, $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ визначаються з виразів:

$$\begin{aligned} H_{21} &= m_0 [-(s+1)(s \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 \cdot \operatorname{ch} \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - s_1 \operatorname{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s] \xi_1^{-1}(\alpha) \\ H_{22} &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 + (\alpha \varphi_1)^2 - \alpha \varphi_1 N - s_1^2 \operatorname{ch}^2(\alpha \varphi_1) - ss_1] \xi_1^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (21)$$

при $n_1 \neq n_2$:

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 [ss_1(\alpha \varphi_1) N_2 - s N_3 + s(\alpha \varphi_1) N_2 + N_3] \xi_1^{-1}(\alpha) \\ H_{22}(\alpha) &= \frac{im_0 m_1}{\sqrt{n_1}} [1 - s_1 \operatorname{ch}(2\alpha \varphi_1) + ss_1 N + s\alpha \varphi_1 N_4 + ss_1(\alpha \varphi_1)^2 \operatorname{sh} \alpha \varphi_1 - \\ &\quad - ss_1 \operatorname{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_2^2(\alpha \varphi_1) N_4 + N_3] \xi_2^{-1}(\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

Відмітимо, що для функцій $H_{21}(\alpha)$ і $H_{22}(\alpha)$ як і у випадку (2.16) мають місце асимптотичні розклади:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{21}(\alpha) = Q(1) \qquad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{22}(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) \quad (23)$$

Отже, зміщення у випадку задачі I (рис. 2) і горизонтальні зміщення в другій задачі (рис. 3) в точці прикладання мають логарифмічну особливість.

Використовуючи принцип суперпозиції переміщення точок пружної смуги з початковими напруженнями за напрямком осей Oy_1, Oy_2 від одночасно діючих нормальних $p(y_1)$ і тангенціальних $q(y_1)$ напружень, згідно (21) і (22), визначаються формулами:

$$\begin{aligned} u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12}(y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \\ u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

де u_{ij} , ($ij = 1, 2$) – функції впливу.

Для випадку навантаження поперечно напруженої смуги одночасно вертикальними і горизонтальними силами (рис. 4), врахувавши відомі з опору матеріалів рівняння згину балки, а також рівняння розтягу стрижня і (24), після ряду перетворень, для невідомих контактних напружень, отримуємо розв'язуючу систему інтегро-диференціальних рівнянь для пружної смуги з початковими напруженнями [2, 5].

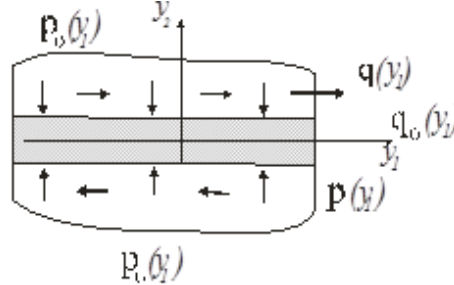


Рис. 4. Одночасне навантаження смуги вертикальними та горизонтальними силами.

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4}{dy_1^4} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{12} (y_1 - \tau) q(\tau) d\tau \right\} &= \\
 &= p(y_1) - p_0(y_1) \\
 E_1 h \frac{d}{dy_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_{21} (y_1 - \tau) p(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau \right\} &= \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [q(\tau) - q_0(\tau)] d\tau
 \end{aligned} \quad (25)$$

У випадку дії тільки вертикальних сил $q_0(y_1) \equiv 0$, замість системи (3.4) будемо мати тільки одне інтегро-диференціальне рівняння:

$$D \frac{d^4}{dy_1^4} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = p(y_1) - p_0(y_1), \quad |x| \leq \infty, \quad (26)$$

а у випадку відсутності вертикальних сил $p_0(y_2) \equiv 0$, накладка лише розтягується, тоді одержимо:

$$E_1 \frac{d}{dy_1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_{22} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} [q(y_1) - q_0(y_1)] d\tau \quad (27)$$

3. Висновки. На основі проведеного аналітичного дослідження двох випадків граничних точок ($y_2 = 0$) пружної смуги з початковими напруженнями, коли одинична сила $\delta(y_1)$ діє нормально та тангенціально до верхньої грані пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями, було виписано аналітичні залежності та інтегро-диференціальні рівняння, за якими визначаються переміщення граничних точок ($y_2 = 0$) поперечно напруженої смуги. З асимптотичних розкладів виявлено, що контактні переміщення у випадку першої задачі та горизонтальні зміщення у другій задачі в точці прикладання мають логарифмічну особливість. Отже, присутність початкових напружень має вагомий вплив на розподіл переміщень пружної смуги від дії зосереджених сил.

Список використаної літератури

1. Гузь А. И. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев: Наук. думка. 1983. 296 с.
2. Дихтярук Н. Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. Прикл. механика. 2004. Т. 40, № 3. С. 63–70.
3. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. Доповіді національної академії наук. 2004. № 3. С. 46–49.
4. Бабич С. Ю., Дихтярук Н. Н. Передача нагрузки от бесконечного неоднородного стрингера к заземленной одной гранью упругой полосе с начальными напряжениями. Прикл. механика. 2020. Т. 56, № 6. С. 1–10.
5. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
6. Герсеванов И. М., Магерет Я. Л. К вопросу о бесконечно длинной балке на упругой почве нагруженной силой. Гидротехническое строительство, 1935.
7. Melan E., Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. Ingenieur Archiv. 1932. Bd. 3, Negt. 2. s. 126–128.

Dikhtiaruk N. N., Kravchuk O. A. Investigation of the field of influence of elastic displacements and stresses for a pre-stressed strip from concentrated force.

In this paper, the influence of elastic displacements and stresses for an elastic band with an initial (residual) stress from the action of a concentrated force is investigated within the framework of the linearized theory of elasticity. Cases are considered when the force acts at an arbitrary angle α , when only the vertical force acts on the prestressed strip and only the horizontal force acts. A system of solving integral - differential equations for an elastic band with initial stresses reinforced by an elastic finite stringer is obtained. For cases of absence of horizontal loads or vertical loads, the system is reduced to the calculated integral-differential equations. All studies are performed within the linearized theory of elasticity for compressible and incompressible bodies, in the case of elastic potentials of arbitrary structure, in general for the theory of large (finite) initial deformations and two versions of the theory of small initial deformations.

Taking into account the residual deformations in the calculation of important elements of structures, machines and structures allows you to more accurately assess the strength of the material, and therefore significantly reduce its costs, while maintaining the necessary functional characteristics of the elements as a whole. That is why the study of the contact interaction of elastic bodies with residual deformations is an extremely important task today and will remain so in the future. Studies of the contact interaction of prestressed bodies in our country and abroad appeared in sufficient numbers only at the end of the last century. This is primarily due to the fact that the linear theory of elasticity does not take into account the presence of residual stresses in bodies. In the general case, the strict formulation of such problems requires the use of the apparatus of nonlinear theory of elasticity, however, at sufficiently large values of the initial stresses can be limited to its linearized version. The current level of linearized theory of elasticity and mathematical methods, combined with the rapid development of computer technology, make it possible to effectively form a variety of computational models for a wide range of problems.

Keywords: elastic bodies, contact problem, boundary conditions, Dirac function.

References

1. Guz, A. I. (1983). Mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses. Kyiv: *Nauk. dumka*, 296. [in Russian].
2. Dikhtyaruk, N. N. (2004). On the equilibrium of a strip with initial stresses reinforced by elastic overlays. *Appl. mechanics*, 40(3), 63–70. [in Russian].
3. Dikhtyaruk, M. M. (2004). Periodic contact problem for an elastic band with initial (residual) stresses. *Reports of the National Academy of Sciences*, 3, 46–49. [in Ukrainian].
4. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous

- stringer to an elastic band with initial stresses clamped by one face. *App. mechanics*, 56(6), 1–10. [in Russian].
5. Sargsyan, V. S. (1983). Contact tasks for half-planes and strips with elastic overlays. Yerevan: *Ed. Yerevan. University*, 260. [in Russian].
 6. Gersevanov, I. M., & Mageret, J. L. (1935). On the question of an infinitely long beam on elastic soil loaded with force. *Hydraulic construction*. [in Russian].
 7. Melan, E. (1932). Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen. *Ingenieur Archiv*, 3(2), 126–128.

Одержано 15.04.2022

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).155-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).155-167)**М. М. Діхтярук¹, Н. О. Ярецька², О. А. Кравчук³**

¹ Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
mega-dihtyaruk@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0819-3842>

² Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
kravchukoa2@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6937-5001>

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПРИ ПЕРІОДИЧНОМУ ПІДСИЛЕННІ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОЇ СМУГИ ТОНКИМИ ПІДКРІПЛЮЮЧИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

У статті досліджено якісний і кількісний вплив початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик при взаємодії пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з попередньою напруженою смугою. Дослідження виконане у рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл з використанням методів інтегральних перетворень Фур'є, методів розв'язку гармонійних диференціальних рівнянь, сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь та числових методів. Вважаємо, що пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одноісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Виведено сингулярне інтегрально-диференціальне рівняння з ядром Гілберта, що дозволяє розв'язати поставлену задачу. Аналітичний розв'язок рівняння знаходимо у вигляді рядів від функції Якобі. Для матеріалів з пружними потенціалами гармонічного типу (стисливі тіла) та пружними потенціалами Бартенєва-Хазановича і Трелоара (нестисливі тіла) проведені числові дослідження. Розглянуто випадок, коли всі періодично розміщені накладки, що підкріплюють пружну смугу з початковими (залишковими) напруженнями, навантажені тангенціальною силою. Аналіз числових результатів свідчить про суттєвий вплив попередньо напруженого деформованого стану на розподіл контактних характеристик періодично підсиленої смуги тонкими підкріплюючими елементами. Отримані результати можуть бути використані для інженерних розрахунків на міцність та довговічність конструкцій з урахуванням початкових (залишкових) напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

Ключові слова: напружено-деформований стан, початкові (залишкові) напруження, функції Якобі, перетворення Фур'є.

1. Вступ. Контактні задачі класичної теорії пружності в нашій країні і за кордоном в останні десятиліття одержали подальший розвиток як по глибині нових підходів, так і по ширині досліджень. Про це свідчить велика кількість вчених, які працюють над заданою проблемою і кількість поданих доповідей на

симпозіуми, з'їзди та конференції як у нашій країні, так і за кордоном в останні десятиліття.

Існує велика кількість оглядових праць, які містять детальний аналіз основних результатів і сучасний стан різних аспектів розвитку механіки контактної взаємодії, в яких приведена кількісно велика бібліографія з вищезгаданих питань. Не дивлячись на досить великий спектр праць по дослідженню закону розподілу контактних характеристик у конструкціях та деталях машин у класичній теорії пружності, не вдається, виходячи з прийнятої фізичної моделі, врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають в контакті. Як відомо, початкові (залишкові) напруження практично завжди присутні в елементах конструкцій і деталях машин. Причини їх появи різноманітні: незворотні деформації, структурні зміни в матеріалах, зміни агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, фізико-механічні, хімічні і технологічні процеси, збірка конструкцій або навмисне їх створення. Дія останніх, викликає в попередньо напруженому тілі такий самий ефект, як і будь-які інші напруження, які можуть викликати деформації, руйнування, що спричиняє збільшення тенденції до втрати стійкості та внутрішнього тертя. Отже, врахування початкових (залишкових) напружень при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин і споруд дозволило б (при їх створенні) ефективно враховувати ресурси міцності матеріалів шляхом правильної оцінки запасів цієї міцності й істотно знизити їх матеріалоемність. Цей підхід дозволяє зберегти необхідні функціональні характеристики в цілому.

Навіть враховуючи досить великий діапазон досліджень по визначенню закону розподілу контактних характеристик у конструкціях і деталях машин класичної теорії пружності, не можливо (виходячи з прийнятої лінійної моделі), як вказано вище, врахувати початковий (залишковий) напружено-деформований стан тіл, що перебувають у контакті. Але його можна врахувати, використавши лінеаризовану теорію пружності, розроблену у 70 роках минулого століття академіком НАН України О. М. Гузем. Хоча в загальному випадку, чітка постановка таких задач вимагає застосування нелінійної теорії пружності. Проте при досить великих величинах початкових (залишкових) напружень можна обмежитися її лінеаризованим варіантом.

Історично дослідження контактних задач в рамках лінеаризованої теорії пружності складалося по двох напрямках. Перший пов'язаний з дослідженнями контактної взаємодії тіл з конкретною формою пружного потенціалу [1]. Другий підхід це дослідження просторових та плоских задач контактної взаємодії тіл з початковими (залишковими) напруженнями з довільною структурою пружного потенціалу для стисливих і нестисливих матеріалів у випадку теорії скінченних (великих) і декількох варіантів теорії малих початкових (залишкових) деформацій [2 – 17].

2. Актуальність. Вивчення і дослідження якісного і кількісного впливу початкових (залишкових) напружень на закон розподілу контактних характеристик є досить актуальною проблемою як в теоретичному, так і в практичному аспектах. Зокрема, теоретичне та практичне значення одержаних результатів дослідження полягає в тому, що всі розв'язки поставленої задачі подані у вигляді аналітичних виразів, формул та графіків. Їх можна безпосередньо використовувати в інженерних розрахунках міцності і довговічності конструкцій з

урахуванням початкових (залишкових) напружень для широкого вибору конструкційних матеріалів.

3. Постановка задачі. Метою роботи є розв'язок задачі про контактну взаємодію пружних скінчених накладок (стрингерів), при їх періодичному розміщенні, з попередньо напруженою смугою в рамках лінеаризованої теорії пружності. Дослідження виконане у рамках лінеаризованої теорії пружності для стисливих та нестисливих тіл [2 – 4].

Для вивчення впливу початкового (залишкового) напружено-деформованого стану на закон розподілу контактних характеристик розглянемо пружну нескінченну смугу з початковими напруженнями товщиною t , яка на скінчених відрізках $L_k \{-a + 2lk, a + 2lk\}$, $k = 1, 2$ своєї грані $y_1 = 0$, що підкріплена періодично розміщеними пружними накладками з періодом $2l$, а грань $y_2 = -t$ жорстко заземлена (Рис. 1).

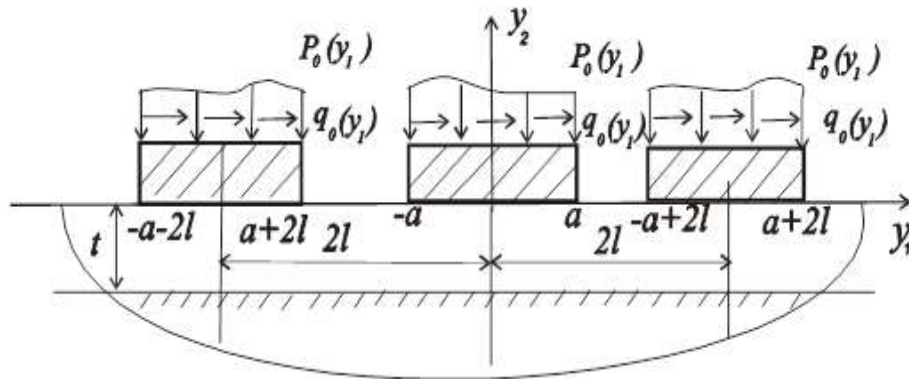


Рис. 1. Попередньо напружена смуга, підсилена тонкими стрингерами.

Необхідно визначити вплив початкових (залишкових) напружень в пружній смузі з початковими (залишковими) напруженнями на закон розподілу нормальних і тангенціальних контактних напружень в області контакту пружних накладок з пружною смугою, коли на останні діють вертикальні і горизонтальні навантаження інтенсивності $p_0(y_1)$ і $q_0(y_1)$ відповідно.

4. Метод розв'язку. В силу періодичності розглянутої задачі вплив початкових (залишкових) напружень на L_k при $y_2 = 0$ під пружними тонкими накладками буде однаковий [1, 5, 6], тобто контактні напруження, що виникають на L_k – відрізках зі сторони накладок пружної смуги будуть функціями періодичними з періодом $2l$.

$$\tau_{12}(y_1)|_{y_2=0} = \tau(y_1) = \tau(y_1 - 2l) = \tau(y_1 + 2l),$$

$$\tilde{Q}_{22}(y_1) = Q_{22}(y_1 - 2l) = Q_{22}(y_1 + 2L),$$

$$\tilde{Q}_{21}(y_1) = Q_{21}(y_1 - 2l) = Q_{21}(y_1 + 2L).$$

Отже, можна обмежитися розглядом однієї із них, наприклад, тієї, для якої $k = 0$. Будемо вважати також, що відносно пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями і пружних накладок справедливі припущення, а саме: пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями знаходиться в умовах плоскої деформації, а для пружної накладки, навантаженої одночасно

вертикальними і горизонтальними силами, справедлива загальноприйнята модель згину балки в поєднанні з моделлю одновісного напружено-деформованого стану пружної накладки. Це означає, що пружна накладка в вертикальному напрямку Oy_2 згинається, як звичайна балка, а у горизонтальному напрямку осі Oy_1 стискається або розтягується, як звичайний стержень в одновісному напружено-деформованому стані з скінченою жорсткістю. Виходячи з останнього, для поставленої задачі будуть мати місце рівняння

$$\frac{du(y_1)}{dy_1} = \frac{1}{E_1 t} \int_{-\infty}^{y_1} [q(t) - q_0(t)] dt \quad (-\infty < y_1 < \infty).$$

Так як стрингер (накладка) в вертикальному напрямку згинається як звичайна балка, то згин балки опишемо у вигляді

$$D \frac{d^4 v(y_1)}{dy_1^4} = P(y_1) - P_0(y_1), \quad (-\infty < y_1 < \infty)$$

при граничних умовах

$$u(y_1) = u_1(y_1); \quad v(y_1) = u_2(y_1); \quad y_1 \in (-a + 2kl < y_1 < a + 2kl); \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де u, v – відповідно горизонтальні і вертикальні переміщення пружної накладки в позначеннях класичної теорії пружності; $u_1(y_1), u_2(y_1)$ – відповідно горизонтальні і вертикальні переміщення граничних точок пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями; $p(y_1), q(y_1)$ – інтенсивності нормальних і горизонтальних контактних напружень.

При виведенні основної системи диференціальних рівнянь, що дозволяють розв'язати поставлену задачу, відзначимо, що на основі принципу суперпозиції [1, 7] отримаємо і використаємо функцію впливу для скінченного стрингера $y_1 \in [-a, a]$ у вигляді:

$$u_1(y_1) = \int_{-a}^a h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a}^a h_{12}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau, \\ u_2(y_1) = \int_{-a}^a h_{21}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a}^a h_{22}(|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Аналогічно функції впливу для вертикальних і горизонтальних переміщень граничних точок грані пружної смуги $y_2 = 0$ з урахуванням періодичності останніх [6, 8, 9] можна записати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \int_{-a}^a h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \\ + \int_{-a-2l}^{a-2l} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a+2l}^{a+2l} h_{11}(|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_{-a+4l}^{a+4l} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \int_{-a+4l}^{a+4l} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau + \dots \quad (2)$$

При отриманні значення інтеграла (2) використаємо періодичність нормальних і тангенціальних контактних напружень $p(\tau)$ і $q(\tau)$

$$p(\tau) = p(\tau - 2kl) = p(\tau + 2kl) = \dots,$$

$$q(\tau) = q(\tau - 2kl) = q(\tau + 2kl) = \dots$$

Заміна змінних

$$\tau = \eta + 2kl, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

з врахуванням значення переміщень від дії одиничної нормальної і тангенціальної сили [7, 10, 11] після ряду перетворень приводить до інтегралу вигляду (2):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H_{11} (\alpha) \cos (y_1 \eta) s \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2kls \right] ds \right\} p(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3)$$

Інтеграл (3) можна дещо спростити, якщо використати значення [1, 12, 13]:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos ky_1 = \frac{2\pi}{l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta (y - 2\pi k),$$

$$\delta (\alpha y_1) = \frac{1}{\alpha} \delta (y_1),$$

де $\delta (y_1)$ – одинична функція Дірака [2, 3, 14].

Після деяких перетворень [1, 6, 15] отримаємо :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau = \frac{P_0}{2l} H_{11} (0) + \\ & + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \cos \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] p(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Застосувавши аналогічні перетворення до інших інтегралів, отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h_{12} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau = \\ & = \frac{Q_0}{2l} H_{12} (0) + \frac{1}{l} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] q(\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{21} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{P_0}{2l} H_{21} (0) + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{21} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] p(\eta) d\eta, \\ \int_{-\infty}^{\infty} h_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{Q_0}{2l} H_{22} (0) + \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) \times \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] q(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Запишемо асимптотичні вирази $H_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$, при $\alpha \rightarrow 0$ і $\alpha \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{11}(\alpha) &= -A; & \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{12}(\alpha) &= O(\alpha); \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} H_{22}(\alpha) &= A_1; & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{11}(\alpha) &= -B \cdot O(\alpha^{-1}); \\ \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{22}(\alpha) &= B \cdot O(\alpha^{-1}); & \lim_{\alpha \rightarrow \infty} H_{12}(\alpha) &= -B_1 \cdot O(\alpha^{-1}), \end{aligned}$$

де A, A_1, B, B_2 – величини, що характеризують початковий (залишковий) напружено-деформований стан у пружній смузі, які визначаються для стисливих і нестисливих тіл у випадку конкретної структури пружних потенціалів згідно [2, 7, 16].

Якщо врахувати значення суми [1, 3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|,$$

то інтеграли (3) і (4) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{11} (|y_1 - \tau|) p(\tau) d\tau &= -\frac{A}{2l} P_0 + \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a p(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| dt + \\ &+ \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right\} p(\eta) d\eta, \quad (5) \\ \int_{-\infty}^{\infty} h_{22} (|y_1 - \tau|) q(\tau) d\tau &= -\frac{A_1}{2l} Q_0 - \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\tau) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| d\eta + \\ &+ \frac{1}{l} \int_{-a}^a \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right\} q(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Врахувавши (4) та значення суми [1, 3]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ky_1}{k} = \frac{\pi - |y_1|}{2} \sin qy_1, \quad (-2\pi < y < 2\pi)$$

інтеграли (5) можна записати у вигляді таких формул:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{12} (y_1 - \tau) q(\tau) d\tau &= \\ &= \frac{1}{l} \int_{-a}^a \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \left[\sin \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] \right\} q(\eta) d\eta - \end{aligned}$$

$$-\frac{B_1}{2l} \int_{-a}^a q(\tau) \sin q(y_1 - \eta) d\eta + \frac{B_1}{2l} [Q_0 y_1 - \bar{M}_0]; \quad |y_1| \leq a, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - \tau) p(\tau) d\tau = \\ = \frac{1}{l} \int_{-a}^a \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \left[\frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta) \right] \right\} p(\eta) d\eta - \\ - \frac{B_1}{2l} \int_{-a}^a p(\tau) \sin q(y_1 - \eta) d\eta + \frac{B_1}{2l} [P_0 y_1 - M_0]; \quad |y_1| \leq a \end{aligned}$$

при

$$\bar{M}_0 = \int_{-a}^a xq(x) dx, \quad M_0 = \int_{-a}^a xp(x) d\xi.$$

Виконаємо підстановку значень (4), (5) та (6) у (1) і знайдемо переміщення граничних точок в області контакту $y_1 \in [-a, a]$ на межі $y_2 = 0$ пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями.

$$u_1(y_1) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{2l} (y_1 - \eta) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} +$$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a L_{12}(|y_1 - t|) p(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(|y_1 - t|) q(\eta) d\eta - \\ - \frac{1}{2l} [B_1 (Q_0 y - \bar{M}_0) - AP_0], \quad |y_1| < a \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_2(y_1) = -\frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{2l} (y_1 - \eta) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a p(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta +$$

$$+ \int_{-a}^a L_{22}(|y_1 - \eta|) q(\eta) d\eta + \int_{-a}^a N_{12}(y_1 - \eta) p(\eta) d\eta + \frac{1}{2l} [B_1 (P_0 y - M_0) - A_1 Q_0].$$

Введемо позначення

$$L_{11}(|y_1 - \eta|) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{11} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta),$$

$$L_{12}(y_1 - \eta) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{12} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{B_1 l}{\pi k} \right] \sin \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta),$$

$$L_{22}(|y_1 - \eta|) = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[H_{22} \left(\frac{\pi k}{l} \right) + \frac{Bl}{\pi k} \right] \cos \frac{\pi k}{l} (y_1 - \eta).$$

Для того, щоб одержати вихідні функціональні рівняння, з яких визначаються невідомі контактні напруження, підставимо (7) в (1), одержимо наступну систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь.

$$\begin{aligned}
 D \frac{d^4}{dy_1^4} \left\{ \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a p(\eta) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right| d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a q(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \int_{-a}^a L_{11}(|y_1 - \eta|) p(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(y_1 - \eta) q(\eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2l} [B_1(Q_0 y_1 - \bar{M}_0) - AP_0] \right\} = p(y_1) - p_0(y_1), \\
 \frac{d}{dy_1} = \left\{ \frac{B}{\pi} \int_{-a}^a q(\eta) d\eta \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{y_1 - \eta}{2} \right) \right] d\eta - \frac{B_1}{2} \int_{-a}^a p(\eta) \operatorname{sign}(y_1 - \eta) d\eta + \right. \\
 \left. + \int_{-a}^a L_{22}(|y_1 - \eta|) q(\eta) d\eta + \int_{-a}^a L_{12}(y_1 - \eta) p(\eta) d\eta + \frac{1}{2l} [B_0(P_0 y - M_0) - A_1 Q_0] \right\} = \\
 = \frac{1}{E_1 h} \int_{-a}^a [q(\eta) - q_0(\eta)] d\eta, \quad |y_1| \leq a.
 \end{aligned}$$

Ця система розв'язується при таких граничних умовах:
при $y_1 = a$

$$\int_{-a}^a \eta p(\eta) d\eta = M_0; \quad \int_{-a}^a q(\eta) d\eta = Q_0; \quad \int_{-a}^a p(\eta) d\eta = P_0. \quad (8)$$

Систему сингулярних інтегральних рівнянь можна спростити аналогічно, як і у [1, 6, 17], ввівши нові функції.

$$\begin{aligned}
 X(\tau) &= \tilde{p}(\tau) + i\tilde{q}, \\
 \tilde{p}(\tau) &= p \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{P_0}, \quad \tilde{q}(\tau) = q \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{Q_0}, \\
 \tilde{p}_0(\tau) &= p \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{P_0}, \quad \tilde{q}_0(\tau) = q_0 \left(\frac{l\tau}{\pi} \right) \frac{1}{Q_0}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Після складних громіздких перетворень і заміни змінних

$$\frac{\pi}{l} y_1 = \tau, \quad \frac{\pi}{l} \eta = \xi.$$

одержимо

$$\beta_1 X(\tau) + \int_{-a}^a X(\tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \xi}{2} d\tau - \int_{-a}^a \tilde{L}_{11}(\tau - \xi) X(\tau) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -i \int_{-a}^a \tilde{L}_{12}(\tau - \xi) X(\tau) d\tau - \int_{-a}^a \tilde{L}_{22}(\tau - \xi) \tilde{X}(\tau) d\tau - \\
& - \int_{-a}^a [\beta_2(\tau - \xi)^2 - \beta_3] \tilde{X}(\tau) d\tau - \int_{-a}^a [\beta_2(\tau - \xi) + \beta_3] \tilde{X}(\tau) d\tau = \\
& = i \left[2\beta_3 \tilde{Q}_1(\tau) + \lambda_4 \right] d\tau - 2\beta_2 \tilde{M}_1(\tau) + C.
\end{aligned} \tag{10}$$

Величини $\tilde{L}_{ij}(\tau)$, β_i – визначають початковий (залишковий) напружений стан, обчислюються для стисливих і нестисливих тіл у випадку пружних потенціалів конкретної структури для рівних і нерівних коренів визначального рівняння згідно [2, 3, 7].

Отже розв'язок поставленої задачі зведено до розв'язку сингулярного інтегрально-диференціального рівняння (10) з ядром Гілберта. Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді рядів від функції Якобі [1, 2, 7].

$$X(\tau) = w(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} \operatorname{tg} \frac{\tau}{2} \right), \quad |\tau| < \delta, \tag{11}$$

а функцію ваги $w(\tau)$ візьмемо у вигляді

$$\begin{aligned}
w(\tau) &= \sec \frac{\tau}{2} \left(\sin \frac{\delta - \tau}{2} \right)^\alpha \left(\sin \frac{\delta + \tau}{2} \right)^\beta, \\
\alpha &= -\frac{1}{2} - i\alpha_1; \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\alpha_1; \quad , \alpha_1 = \frac{\ln(3 - 4c_{44})}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Відмітимо, що \tilde{X}_n – нескінченний ряд невідомих комплексних коефіцієнтів, які потрібно визначити. Для їх визначення підкладемо значення (11) в рівняння (9). В результаті, використовуючи властивості ортогональності функції Якобі [1, 3, 12], для визначення невідомих величин X_m , одержимо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
l_m \tilde{X}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_{m,n}^{(1)} \tilde{X}_n + P_{m,n}^{(2)} \bar{X}_n \right] &= \\
&= - \left[P_m^{(1)} \tilde{X}_0 + P_m^{(2)} \bar{X}_0 + P_m^{(3)} + R \cdot P_m^{(1)} \right], \quad (m = 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{12}$$

У (12) введено позначення [1, 6]

Для розв'язку системи (12) числовим методом, визначимо коефіцієнт \bar{X}_0 і сталу R , що входять у праву частину (12). Коефіцієнт \bar{X}_0 знаходимо із першої граничної умови (8).

$$\bar{X}_0 = \frac{\operatorname{ch} \pi \alpha_1 \cdot \cos \frac{\delta}{2}}{2l} \left(1 + i \frac{Q_0}{P_0} \right).$$

Сталу R знаходимо із системи алгебраїчних рівнянь (12).

Система (12) квазірегулярна, оскільки суми

$$P_m = l_m m^4 \sum_{n^\varepsilon} \frac{1}{n^\varepsilon} \left[|P_{m,n}^{(1)}| + |P_{m,n}^{(2)}| \right] \quad (m = 1, 2, \dots)$$

та вільний член (12) мають порядок при $m \rightarrow \infty$, $O\left(m^{-\frac{1}{2}+2}\right)$. Це означає, що коефіцієнт матриці системи швидко спадає із зростанням m і n від діагональних елементів. Отже, систему (12) можна розв'язати відомими числовими методами.

5. Аналіз числових результатів. Для реалізації числового результату розглянемо випадок, коли всі періодично розміщені накладки, які підкріплюють пружну смугу з початковими (залишковими) напруженнями, навантажені тангенціальною силою $Q_0(\alpha) = Q$.

Числові результати отримані з використанням комп'ютерної ліцензованої програми Maple 15, для потенціалів у випадку рівних коренів визначального рівняння [2–4, 16] (гармонічного потенціалу та потенціалу Бартенєва-Хазановича); та у випадку нерівних коренів [2–4, 17] (потенціалу Трелоара). При обчисленні використовувалися параметри таких матеріалів [2, 4], $Ca 0$, $S1$, $Na 0$, $S2$ – пружні накладки; $Cu 0,06$, $Fe 0,045$ – пружна смуга з початковими (залишковими) напруженнями.

На рис. 2–4 проілюстровано вплив початкових (залишкових) напружень у пружній смугі на закон розподілу контактних напружень під періодично розміщеними накладками від дії тангенціальної сили $q_0(y_1) = Q_0$ для безрозмірних величин (12).

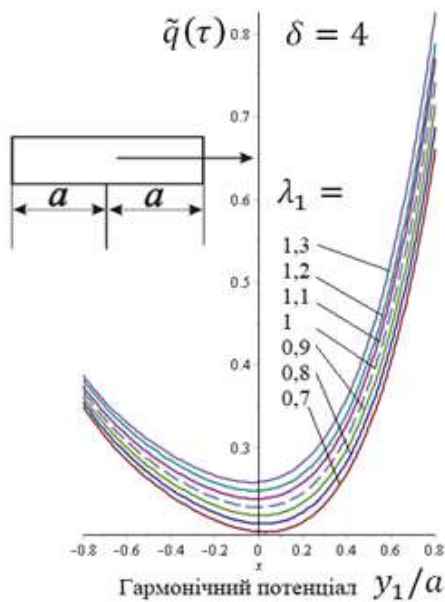


Рис. 2. Розподіл контактних напружень

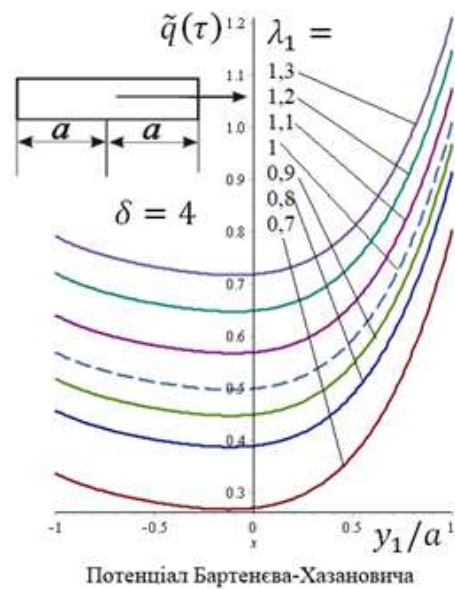


Рис. 3. Розподіл контактних напружень

На рис. 2–4 показано розміщення кривих для значення параметра $\lambda_1 = 1,3; 1,2; 1,1; 1; 0,9; 0,8; 0,7$, що характеризує початковий (залишковий) напружено-деформований стан. Пунктирна лінія відповідає пружній смугі без початкових (залишкових) напружень ($\lambda_1 = 1$), тобто відображає розв'язок аналогічної задачі у рамках класичної теорії пружності [1, 2].

6. Висновки. На основі проведеного числового аналізу можна зробити висновок про те, що закономірність впливу початкових напружень у пружній смугі на розподіл контактних тангенціальних напружень істотним чином зале-

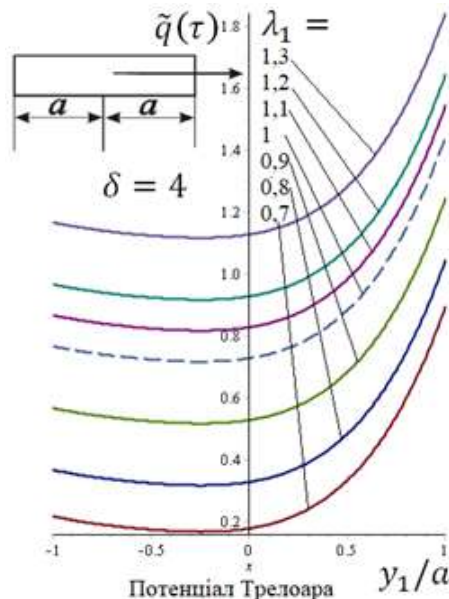


Рис. 4. Розподіл контактних напружень

жить від структури пружного потенціалу в смузі.

Більш істотний вплив кількісного характеру початкові напруження мають у високо еластичних матеріалах, порівняно з жорсткими, а якісний вплив – співпадає. Причому, при стиску ($\lambda_1 < 1$) контактні напруження зменшуються, а у випадку розтягу ($\lambda_1 > 1$) збільшуються. Цей результат можна ефективно використовувати для регулювання контактних характеристик при розрахунку конструкцій на міцність.

Список використаної літератури

1. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван : Изд. Ереван. ун-та, 1983. 260 с.
2. Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ : Вища шк., 1995. 305 с.
3. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
4. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences*: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. P. 261–295.
5. Babich S. Yu., Guz A. N., Rudnitsky V. B. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, № 7. P. 744–765.
6. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N., Degtyar S. V. Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55, № 6. P. 629–635.
7. Діхтярук М. М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. Пр. 4-го Міжнародного симпозіуму з трибофатики (ISTF), (м. Тернопіль, Україна, 23–27 вересня 2002 р.). Відп. ред. В. Т. Трощенко. Тернопіль : Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. С. 426–431.
8. Діхтярук М. М. Періодична контактна задача для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. *Доповіді НАН України*, 2004. № 3. С. 46–49.
9. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. A prestressed elastic strip with elastic reinforcements.

- International Applied Mechanics*. 2002. Vol. 38, № 11. P. 1354–1360.
10. Babich. S. Yu., Dikhtyaruk N. N. Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, № 6. P. 346–356.
 11. Dikhtyaruk N. N. Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*. 2016. Vol. 83, № 3. P. 51–61.
 12. Dikhtyaruk N. N. Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *International Applied Mechanics*. 2004. Vol. 40, № 3. P. 290–296.
 13. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53, № 2. P. 149–155.
 14. Babych S. Y., Yarets'ka N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. № 3. P. 297–305.
 15. Рудницький В. Б., Дихтярук Н. Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. *Прикладна механіка*. 2002. Вип. 38, № 11. С. 81–88.
 16. Yaretskaya N. A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*. 2014. Vol. 50, № 4. P. 378–388.
 17. Yaretskaya N. F. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54, № 5. P. 539–543.

Dikhtiaruk N. N., Yarets'ka N. O., Kravchuk O. A. Investigation of contact interaction with periodic reinforcement of pre-stressed strip with thin sustaining elements.

The qualitative and quantitative influence of initial (residual) stresses on the law of distribution of contact characteristics at interaction of elastic finished overlays (stringers), at their placement, with a preliminary tension strip is investigated. The study was performed within the framework of the linearized theory of elasticity for compressible and incompressible bodies. Fourier integral methods, methods for solving harmonic differential equations, singular integral-differential equations and numerical methods were used. We make the assumption that the elastic band with initial (residual) stresses is in the conditions of plane deformation. Also, for an elastic lining loaded with both vertical and horizontal forces, the generally accepted model of beam bending in combination with the model of uniaxial stress-strain state of the elastic lining is valid. A singular integral-differential equation with the Gilbert kernel was derived, which allows us to solve this problem. We find the analytical solution of the equation in the form of series from the Jacobi function. Numerical studies were performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloar (incompressible bodies). Numerical studies have been performed for materials with elastic potentials of harmonic type (compressible bodies) and elastic potentials of Bartenev-Khazanovich and Treloir (incompressible bodies). We have considered the case when all periodically placed pads that support the elastic band with the initial (residual) stresses were loaded with tangential force. Analysis of numerical results shows a significant effect of pre-stressed deformed state on the distribution of contact characteristics of the periodically reinforced strip with thin reinforcing elements. The results obtained can be used for engineering calculations for the strength and durability of structures, taking into account the initial (residual) stresses for a wide range of structural materials.

Keywords: stress-strain state, initial (residual) stresses, Jacobi function, Fourier transform.

References

1. Sarkisyan, V. S. (1983). Kontaktnyye zadachi dlya poluploskostey i polos s uprugimi nakladkami. *Yerevan : Izd. Yerevan. un-ta*. [in Russian].

2. Huz, O. M., Babych, S. Yu., & Rudnytskyi, V. B. (1995). Kontaktna vzaiemodiia pruzhnykh til z pochatkovymy napruzhenniamy. *Kyiv : Vyshcha shk.* [in Ukrainian].
3. Guz', A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). Smeshannye zadachi dlya uprugogo osnovaniya s nachal'nymi napryazheniyami [Mixed problems for an elastic base with initial stresses]. LAP LAMBERT Academic Publishing. [in Russian].
4. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. [Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph]. "Baltija Publishing". 261–295.
5. Babich, S. Yu., Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2004). Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches. *International Applied Mechanics*, 40(7), 744–765.
6. Babich, S. Yu., Dikhtyaruk, N. N., & Degtyar, S. V. (2019). Contact Problem for Two Identical Strips Reinforced by Periodically Arranged Fasteners with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 55(6), 629–635.
7. Dikhtiaruk, M. M. (2002). Vyznachennia funktsii vplyvu dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy. [Title]. *Pr. 4-ho Mizhnarodnoho sympoziumu z trybofatyky (ISTF)*, (m. Ternopil, Ukraina, 23–27 veresnia 2002 r.) / Vidp. red. V. T. Troshchenko. Ternopil: Ternop. derzh. tekhn. un-t im. Ivana Puliuia, 426–431. [in Ukrainian].
8. Dikhtiaruk, M. M. (2004). Periodychna kontaktna zadacha dlia pruzhnoi smuhy z pochatkovymy (zalyshkovymy) napruzhenniamy. *Dopovidi NAN Ukrainy*, 3, 46–49. [in Ukrainian].
9. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). A prestressed elastic strip with elastic reinforcements. *International Applied Mechanics*, 38(11), 1354–1360.
10. Babich, S. Yu., & Dikhtyaruk, N. N. (2020). Load transfer from an infinite inhomogeneous stringer to an elastic strip clamped by one face with initial stresses. *International Applied Mechanics*, 56(6). 346–356.
11. Dikhtyaruk, N. N. (2016). Load transfer from the infinite stringer to the two jammed along one edge identical stripes with initial (residual) stresses. *Scientific journal of the Ternopil national technical university*, 83(3). 51–61.
12. Dikhtyaruk, N. N. (2004). Equilibrium of a Prestressed Strip Reinforced with Elastic Plates. *International Applied Mechanics*, 40(3), 290–296.
13. Rudnitsky, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *Int. Appl. Mech.*, 53(2), 149–155.
14. Babych, S. Y., & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(3), 297–305.
15. Rudnitskiy, V. B., & Dikhtyaruk, N. N. (2002). Uprugaya polosa s nachal'nymi napryazheniyami, usilennaya uprugimi nakladkami. *Prikladna mekhanika*, 38(11), 81–88. [in Russian].
16. Yaretskaya, N. A. (2014). Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses. *International Applied Mechanics*, 50(4), 378–388.
17. Yaretskaya, N. F. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543.

Одержано 15.04.2022

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)**Н. Е. Кондрук**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

МОДЕЛІ БАГАТОФАКТОРНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ

Дане дослідження є розвитком напрямку прикладного аналізу даних. Він відіграє важливу роль у виявленні значущої інформації в наборах даних, яка допомагає приймати обґрунтовані рішення в різних сферах людської діяльності. Наведено інформаційні технології багатофакторного прогнозування, які базуються на моделях MLR та DR і є частиною класичного машинного навчання. Розроблена інформаційно-аналітична система на мові програмування Python та бібліотеки scikit-learn, що реалізує описаний підхід. В якості апробаційної моделі обрана актуальна задача прогнозування ВВП України за показниками: індекс інфляції, чисельність населення, офіційний курс долара, рівень безробіття у відсотках та міграційний приріст. Навчальна вибірка містила 16 спостережень. В ході експериментального дослідження кращою виявилось модель дерева регресії із показником коефіцієнту детермінації 99% та середньої абсолютної відсоткової похибки 6%. Дані індекси якості моделі вказують на її високу точність. Перспективні дослідження полягають у розвитку підходу прикладного аналізу даних для розв'язання різних видів прикладних задач.

Ключові слова: багатофакторне прогнозування, дерева регресії, багатофакторний лінійний аналіз, прогнозування ВВП.

1. Вступ. В наш час все важливішим стає аналіз даних різної природи, тобто процес застосування статистичних та логічних методів для опису, візуалізації, скорочення, перегляду, узагальнення та оцінки даних. Він відіграє важливу роль у виявленні значущої інформації в наборах даних, яка допомагає приймати обґрунтовані рішення.

Ціль будь-якого аналізу даних полягає в тому, щоб отримати з необробленої інформації точну оцінку. Однією із найбільш важливих та поширеніших проблем є встановлення наявності статистичного зв'язку між змінною відгуком (Y) та незалежними (пояснювальними) змінними предикторами (X_i). Дану проблему можна вирішити провівши регресійний аналіз. Вид регресійної моделі залежить від типу розподілу Y : якщо він неперервний та приблизно нормальний, використовується модель лінійної регресії; якщо дихотомічний, то – логістичну регресію; якщо пуассонівський чи поліноміальний необхідним є логарифмічно-лінійний аналіз [1, 2]. Обрана модель «намагається» передбачити результат (Y) на основі значень набору змінних-предикторів (X_i).

Багатофакторна лінійна регресія — це процедура, яка оцінює коефіцієнти лінійного рівняння за участю кількох предикторів, які найкраще передбачають значення залежної кількісної змінної [3].

Іншим підходом до проведення багатофакторного аналізу даних є дерева прийняття рішень. Дерева класифікації та регресії — це методи класичного машинного навчання для побудови моделей прогнозування на основі навчальних даних [4]. Реалізуються такі моделі шляхом рекурсивного поділу простору

даних та підбору методу прогнозування у кожній підмножині. В результаті, розбиття може бути представлено графічно, як дерево рішень. Дерева регресії призначені для визначення значення цільової змінної, яка є неперервною та числовою [5].

Задача розрахунку прогнозного значення ВВП є багатofакторною, бо щонайменше має включати особисті витрати населення на кінцеве споживання товарів та послуг, державні витрати на купівлю товарів та послуг, валові інвестиції та чистий експорт [6]. В даному дослідженні ставиться задача підбору моделі прогнозування величини ВВП України на основі предикторів, які опосередковано впливають на його формування.

2. Багатofакторний (множинний) лінійний аналіз [7]. (Multivariate Linear Regression, MLR). Мета регресії – передбачити Y на основі X або описати, як Y залежить від X . X_i (X_1, X_2, \dots, X_k) визначається як "предикторні" "пояснювальні" або "незалежні" змінні, тоді як Y називають "залежною змінною" "реакцією" або "результатом".

Математичне рівняння моделі:

$$y_i = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_{ij} + e_i,$$

y_i – фактичні значення залежної змінної;

b_0 – коефіцієнт перетину;

b_j – коефіцієнт нахилу (середнє збільшення результату на одиницю збільшення предиктора);

e_i – похибки моделі.

Коефіцієнт детермінації це доля дисперсії прогнозованої змінної, яка пояснюється розглядуваною моделлю:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Він може приймати значення від нуля до одиниці. Чим ближче значення коефіцієнта до 1, тим сильнішою є залежність. При оцінці регресійних моделей це інтерпретується як відповідність моделі вхідним даним. В загальному, R^2 має бути не меншим ніж 0,5. Моделі із коефіцієнтом детермінації більшим за 80% можна визначити як достатньо добре підігнані. Основним недоліком використання R^2 є те, що його значення не зменшується із додаванням в модель регресорів навіть, якщо вони ніякого відношення до залежної змінної не мають. Для зняття цього недоліку користуються скоригованим коефіцієнтом детермінації:

$$R_{adj}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k},$$

де k – кількість параметрів, n – кількість спостережень.

На відміну від R^2 скоригований коефіцієнт може бути і від'ємним.

3. Дерева регресії [8]. (Regression Tree, RT). Дерева прийняття рішень це методи, які описують правила класифікації в ієрархічній структурі, що складається з двох типів елементів – вузлів та листів. У вузлах розміщені правила

класифікації та виконується перевірка відповідності спостережень цьому правилу за деяким атрибутом навчальної вибірки. В найпростішому випадку в результаті перевірки спостереження що знаходяться у вузлі розбиваються на дві підмножини: ті що задовольняють правила, та ті що ні. Далі кожній підмножині ставиться у відповідність інше правило і процедура рекурсивно повторюється, доки не досягається умова зупинки алгоритма (коли лист містить одне спостереження, або задовольняється умова обмеження на допустиму глибину дерева). В результаті, в останньому вузлі перевірка і розбиття не проводиться і він стає листом. Для дерева регресії кожен лист відповідає деякому значенню прогнозованої змінної. Для оцінки прогностичної сили дерева регресії використовується також коефіцієнт детермінації.

При визначенні точки розбиття у певному вузлі неперервного атрибуту регресійне дерево обирає ту, яка мінімізує середньоквадратичну похибку:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^{\text{прог}})^2,$$

де $y_i^{\text{прог}}$ – прогнозне значення залежної змінної.

4. Індекс оцінки якості моделі. Для оцінки якості моделі додатково будемо користуватись середньою абсолютною похибкою в процентах MAPE:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - y_i^{\text{прог}}}{y_i} \right|.$$

5. Експерименти.

1. Постановка задачі. Для проведення практичних експериментів обрано задачу прогнозування ВВП України. Відомо, що існує ряд параметрів, які безпосередньо є складовими даного показника: споживчі витрати, валове нагромадження, експорт та імпорт товарів та послуг [6]. Тому для прогнозування обрано інші показники, які можуть опосередковано впливати на нього: індекс інфляції, чисельність населення, офіційний курс долара, рівень безробіття у відсотках та міграційний приріст. Створено навчальну вибірку із 2005 по 2020 рік на основі відкритих даних Держкомстату та Мінфіну України [6, 9]. Для розв'язання поставленої задачі була створена інформаційно-аналітична система на мові програмування Python.

2. Модель MLR. Для початку оцінимо силу кореляційного зв'язку між ознаками за тепловою картою (рис. 1).

Найбільше із «ВВП» корелюють «Чисельність населення» та «Курс долара», але між собою ці ознаки також мають високий коефіцієнт кореляції, хоча змістовно вони не пов'язані. Це буває у тих випадках, коли динаміка зміни процесів схожа. Всі інші ознаки можемо вважати достатньо незалежними. Враховуючи теплову карту, пропонується навчати модель поступово додаючи предикторні змінні у наступній послідовності: X_1 – «Чисельність населення», X_2 – «Рівень безробіття», X_3 – «Індекс інфляції», X_4 – «Міграційний приріст» і на кінець X_5 – «Курс долара». Залежна змінна Y – «ВВП». При цьому будемо обчислювати два показника якості моделі R_{adj}^2 та R^2 .

Із наведеної таблиці видно, що скоригований параметр детермінації досягає найбільшого значення при чотирьох предикторних змінних, тому змінна X_5 не

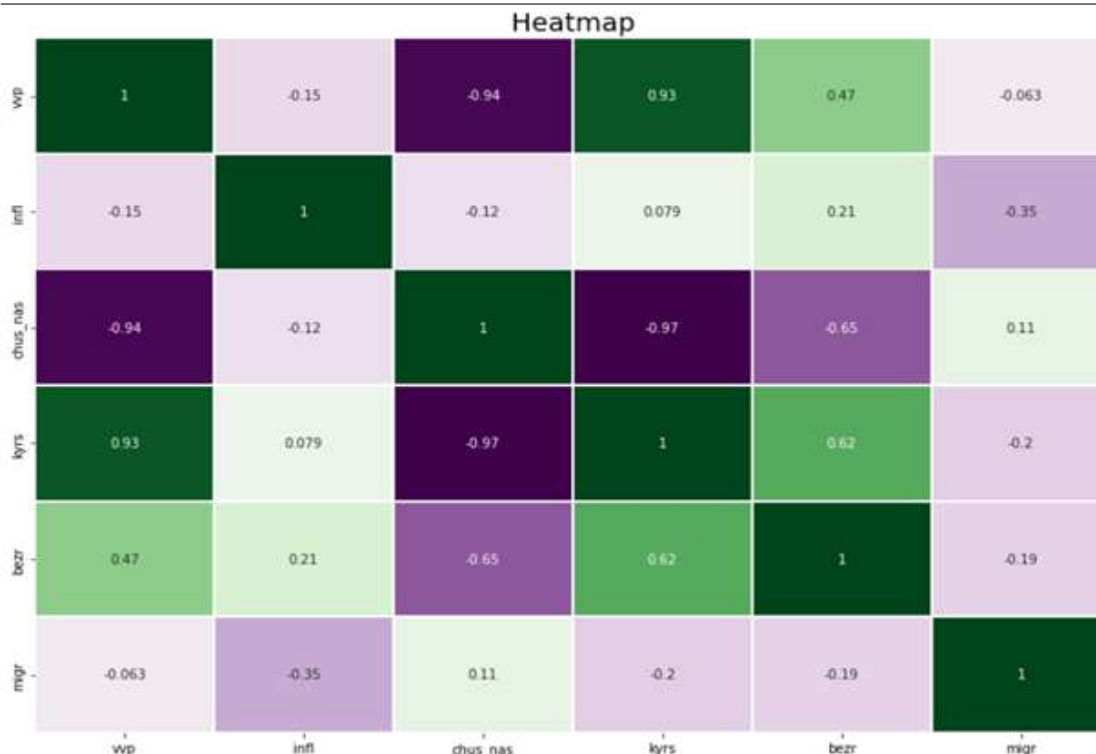


Рис. 1. Теплова карта кореляційного зв'язку між ознаками.

Таблиця 1.

Значення коефіцієнтів детермінації для MLR моделі

Предикторні змінні моделі	X_1	X_1, X_2	X_1, X_2, X_3	X_1, X_2, X_3, X_4	X_1, X_2, X_3, X_4, X_5
R^2	0.876754	0.908755	0.965630	0.969940	0.970321
R^2_{adj}	0.876754	0.902238	0.960342	0.962425	0.959529

покращує MLR модель і виявилась зайвою. Коефіцієнт R^2 при цьому вказує, що варіація предикторних змінних X_1, X_2, X_3, X_4 на 97% призводить до зміни значення Y , тобто модель дуже добре підгнана.

3. Модель RT. При побудові дерев регресії для зупинки алгоритму будемо враховувати параметр максимальної глибини дерева max_depth .

Таблиця 2.

Значення коефіцієнту детермінації для DT моделі

Параметр max_depth	2	3	4
R^2	0.95695	0.99499	0.99929

Очевидно (табл. 2), що найоптимальніший параметр глибини дерева регресії рівний трьом шарам (рис.2).

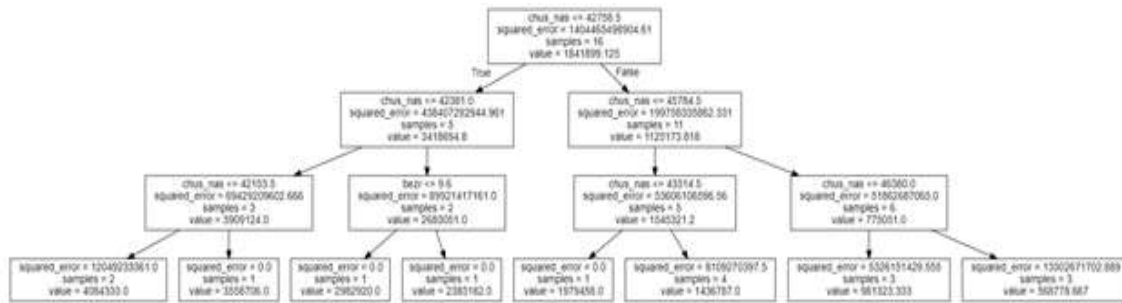


Рис. 2. Дерево регресії глибини 3.

Для побудови дерева використано лише два параметри: «Чисельність населення» та «Рівень безробіття».

4. Оцінка якості моделей. Обчислимо індекси якості моделей та візуалізуємо отримані прогнози.

Таблиця 3.

Значення індексів якості моделей

Модель	MLR	RT
MSE	42217110036	7026376106
MAPE	10,7%	6%

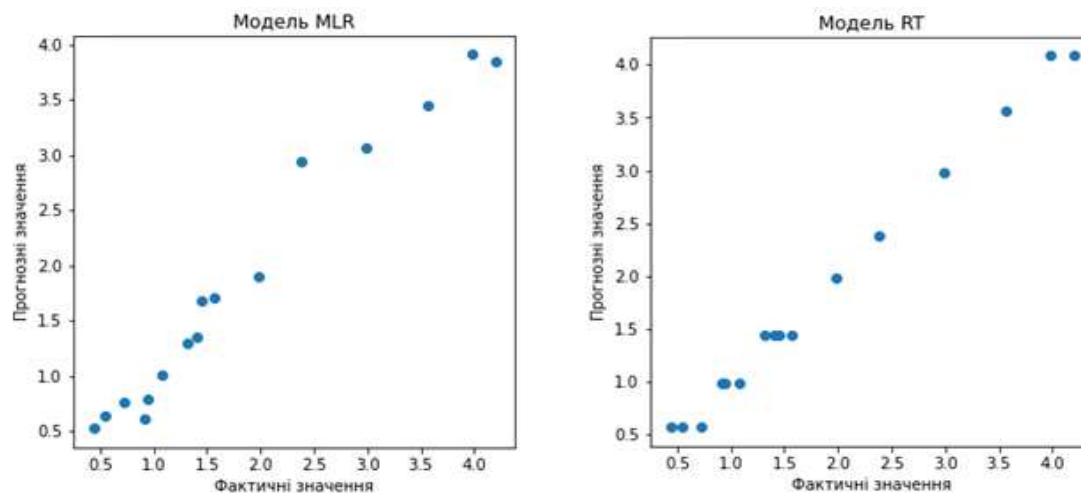


Рис. 3. Візуалізація результатів моделей.

Очевидно, що модель RT краще підігнана до вхідних даних, що підтверджено індексами якості моделі (табл. 3) та візуалізацією результатів (рис. 3).

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дане дослідження є розвитком напрямку прикладного аналізу даних [10–13].

Наведено інформаційні технології багатofакторного прогнозування, які базуються на моделях MLR та DR і є частиною класичного машинного навчання. Розроблена інформаційно-аналітична система на мові програмування Python

та бібліотеки scikit-learn, що реалізує описаний підхід. В якості апробаційної моделі обрана актуальна задача прогнозування ВВП України за показниками: індекс інфляції, чисельність населення, офіційний курс долара, рівень безробіття у відсотках та міграційний приріст. Навчальна вибірка містила 16 спостережень. В ході експериментального дослідження кращою виявилось модель дерева регресії (RT) із показником коефіцієнту детермінації 99% та середньої абсолютної відсоткової похибки 6%. Дані індекси якості моделі вказують на її високу точність.

Перспективні дослідження полягають у розвитку підходу прикладного аналізу даних для розв'язання різних видів прикладних задач.

Список використаної літератури

1. Gogtay N. J., Deshpande S. P., Thatte U. M. Principles of regression analysis. *Journal of the Association of Physicians of India*. 2017. Vol. 65(48). P. 48–52.
2. Daoud, Jamal I. Multicollinearity and regression analysis. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. 2017. Vol. 949, No. 1. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/949/1/012009>
3. Shrestha, Noora. Detecting multicollinearity in regression analysis. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2020. Vol 8(2). P. 39–42. DOI: <https://doi.org/10.12691/ajams-8-2-1>
4. Torgo L. Regression Trees. In: Sammut C., Webb G. *Encyclopedia of Machine Learning and Data Mining*. Springer, Boston, MA. 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7687-1_717
5. Breiman L., Friedman J. H., Olshen R. A., Stone C. J. *Classification and regression trees*. Routledge. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315139470>
6. Мінфін України. URL: <https://minfin.com.ua/ua/>
7. Аyyаdevаrа V., Kishore. Linear regression. *Pro Machine Learning Algorithms*. Apress, Berkeley, CA. 2018. Pp. 17–47. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.04.003>
8. Song Y. Y., Lu Y. Decision tree methods: applications for classification and prediction. *Shanghai Arch Psychiatry*. 2015. Vol. 27(2). Pp. 130–135. DOI: <https://doi.org/10.11919/j.issn.1002-0829.215044>
9. Дежкомстат України. URL: <http://www.ukrstat.gov.ua/>
10. Кондрук Н. Е. Використання мір подібності в методах класифікації. *Науковий вісник Ужгородського університету : серія: Математика і інформатика*. 2021. Вип. 1(38). С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148)
11. Kondruk N. E. Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2018. 3(46). P. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
12. Kondruk N. E., Malyar M. M. Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybernetics and Systems Analysis*, 2021. Vol. 57. Pp. 436–441. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
13. Kondruk N., Malyar M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. International Conference “Computational Intelligence”, 28–30 September, Kyiv-Uzhhorod, Ukraine, 2021. Pp. 112–121. DOI: http://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf

Kondruk N. E. Models of multivariate forecasting.

This study is a development of applied data analysis. Information technologies of multi-factor forecasting based on MLR and DR models are presented. An information-analytical system in the Python programming language and the scikit-learn library has been developed, which implements the descriptions of the approach. As an approbation model, the current task of forecasting Ukraine’s GDP by indicators: inflation index, population, official dollar exchange rate, unemployment rate and migration growth was chosen. The training sample contained 16 observations. The regression tree model is adjusted with a coefficient of determination of 99% and an average absolute percentage error of 6%. These

quality indices of the model show its high accuracy. These quality indices of the model indicate its high accuracy.

Keywords: multivariate forecasting, regression trees, multivariate linear analysis, GDP forecasting.

References

1. Gogtay, N. J., Deshpande, S. P., & Thatte, U. M. (2017). Principles of regression analysis. *Journal of the Association of Physicians of India*, 65(48), 48–52.
2. Daoud, J. I. (2017, December). Multicollinearity and regression analysis. In *Journal of Physics: Conference Series*, 949(1), p. 012009. IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/949/1/012009>
3. Shrestha, N. (2020). Detecting multicollinearity in regression analysis. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 8(2), 39–42. <https://doi.org/10.12691/ajams-8-2-1>
4. Torgo, L. (2017). Regression Trees. In: Sammut C., Webb G. I. (eds) *Encyclopedia of Machine Learning and Data Mining*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7687-1_717
5. Breiman, L., Friedman, J. H., Olshen, R. A., & Stone, C. J. (1984). *Classification And Regression Trees* (1st ed.). *Routledge*. <https://doi.org/10.1201/9781315139470>
6. Ministry of Finance of Ukraine. Retrieved from <https://minfin.com.ua/ua/>
7. Ayyadevara, V. K. (2018). Linear regression. In *Pro Machine Learning Algorithms*, 17–47. Apress, Berkeley, CA. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.04.003>
8. Song, Y. Y., & Ying, L. U. (2015). Decision tree methods: applications for classification and prediction. *Shanghai archives of psychiatry*, 27(2), 130. <https://doi.org/10.11919/j.issn.1002-0829.215044>
9. State Statistics Service of Ukraine. Retrieved from <http://www.ukrstat.gov.ua/>
10. Kondruk, N. E. (2021). Use of similarity measures in classification methods. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(38), 85–91. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148)
11. Kondruk, N. E. (2018). Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 3(46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
12. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (2021). Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybern Syst Anal*, 57, 436–441. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
13. Kondruk, N., & Malyar, M. (2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems, 112–121. http://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf

Одержано 15.04.2022

УДК 044.89

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).175-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).175-194)**Г. В. Мазютинець¹, М. М. Шаркаді²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
пошукач,

gabbi.maz@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3070-1831>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук

marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

МОДЕЛЬ БАГАТОРІВНЕВОЇ НЕЙРОМЕРЕЖІ ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯ ФІНАНСОВОЇ БЕЗПЕКИ КОМПАНІЇ

Діяльність господарюючих суб'єктів у ринковій економіці обумовлюється насамперед станом їх фінансів, що призводить до необхідності розгляду проблем управління фінансовою безпекою підприємства. Забезпечення стійкого розвитку підприємства, стабільності результатів його діяльності, досягнення цілей, що відповідають інтересам власників та суспільства в цілому, неможливі без розробки та проведення самостійної стратегії суб'єкта господарювання, яка в сучасній економіці визначається наявністю надійної системи його фінансової безпеки. Зростання темпів бізнесу викликає все більшу залежність підприємства від зовнішніх джерел фінансування і, можливо, втрату самостійності в прийнятті управлінських рішень. Навіть за високої доходності бізнесу недостатня увага до проблем його фінансової безпеки може призвести до того, що компанія може стати об'єктом зовнішнього впливу або поглинання. Прогнозування рівня фінансової безпеки є складним аналітично-розрахунковим процесом і потребує детального дослідження тенденцій розвитку та передбачення впливу складових досліджуваного фактору на рівень економічної безпеки компанії. Проведено дослідження актуальної задачі розроблення моделі багаторівневої нейромережі для інформаційних технологій на прикладі визначення рівня фінансової безпеки компанії, яка зустрічається при функціонуванні соціо-економічних систем і базується на застосуванні постулатів нечіткої логіки, нечітких множин і нейро-фазі мережі. Метою даної роботи є розробка моделі багаторівневої нейромережі визначення рівня фінансової безпеки компанії при функціонуванні соціо-економічних систем в умовах невизначеності за входними експертними оцінками. Об'єктом дослідження є визначення рівня фінансової безпеки компанії на основі функцій належності для входних експертних оцінок за критеріями з використанням нейро-фазі мережі. Предметом дослідження є методи і моделі представлення багаторівневої нейромережі для визначення рівня фінансової безпеки компанії в умовах невизначеностей. Вперше запропоновано методологічні засади поєднання елементів теорії нечіткої логіки та нейронних мереж при моделюванні процесів управління фінансовою безпекою компанії, що надає можливості адаптації запропонованої моделі багаторівневої нейромережі визначення рівня фінансової безпеки компанії з урахуванням специфіки роботи заданого економічного об'єкта в умовах неоднорідності та неповноти вихідної інформації. В процесі дослідження використовувалися методи теорії нечітких множин і нейромережевого моделювання, методи експертних оцінок. У роботі розв'язано науково-прикладне завдання розроблення моделі багаторівневої нейромережі визначення рівня фінансової безпеки компанії за входними експертними оцінками. Практичне значення одержаних результатів моделі багаторівневої нейромережі визначення рівня фінансової безпеки компанії дасть можливість адекватно підійти до оцінювання альтернативних рішень для забезпечення управління фінансовою безпекою вітчизняних підприємств. Використовуючи побудовану модель, фахівці мають змогу оцінювати рівень фінансової безпеки компанії, попереджати його

погіршення, визначати вплив окремих факторів на рівень фінансової безпеки. Таким чином, використання запропонованої моделі в менеджменті є зручним інструментом вчасного контролю за фінансовим станом підприємства, адекватної реакції на його погіршення. Кредитори, в свою чергу, мають змогу отримати реальну інформацію щодо фінансового стану позичальника та правильно проводити кредитну політику. Інвестори отримують інформацію для прийняття рішення щодо можливості проведення інвестиційної діяльності. Отримані результати можуть бути використані для удосконалення системи управління фінансовою безпекою вітчизняних компаній.

Ключові слова: штучна нейронна мережа, математичні моделі, нечіткі множини, функція належності, рівень фінансової безпеки, експертна оцінка, прийняття рішень.

1. Вступ. В економіці багатьох країн спостерігається істотне збільшення кількості фінансових криз і зростання їх масштабів в останні десятиліття. Одна тільки глобальна фінансова криза 2020 року, яка є найбільшою з часів великої депресії і 2008 року, проявилася у падінні світового фондового ринку та поштовхом якої став коронавірус SARS-CoV-2, що вразив усі країни світу. Глобальна фінансова криза 2020 року супроводжується зменшенням ділової активності у багатьох галузях та відповідним падінням ВВП у багатьох країнах.

У сучасному глобалізованому світі існування будь-якої держави залежить від її економічної безпеки, яка є однією із важливих компонент національної безпеки країни в цілому. На сьогоднішній день відсутнє єдине універсальне визначення сутності та структури економічної безпеки. Категорія «безпека» характеризується як одна з невід'ємних рис стабільного функціонування соціо-економічної системи в цілому, її життєдіяльності, стабільного розвитку та стійкості до зовнішніх і внутрішніх подразників.

В сучасних економічних умовах діяльність підприємств знаходиться під впливом перманентних ризиків та загроз, які генеруються факторами зовнішнього та внутрішнього середовища їх функціонування. Тому надзвичайно важливим є аналіз рівня фінансової безпеки з точки зору попередження виникнення загроз та своєчасності застосування превентивних заходів. Одним із основних сегментів економічної безпеки, який вагомо впливає на її рівень, виступає фінансовий сегмент, тобто сукупність фінансових показників суб'єкта економічного господарювання, які об'єднуються в глобальний показник. Прогнозування цього показника є складним аналітично-розрахунковим процесом і потребує детального дослідження тенденцій розвитку та передбачення впливу складових досліджуваного фактору на рівень економічної безпеки держави.

Існуючі теорії фінансового аналізу і методи прогнозування розвитку фінансово-економічних систем практично себе вичерпали. Тому постає потреба істотного переосмислення використовуваних методів економіко-математичного моделювання. Вчені схиляються до використання нейронних мереж, які вважаються одним з найбільш відомих та ефективних інструментів інтелектуального аналізу даних.

Оскільки бурхливий розвиток комп'ютерної техніки створює передумови для появи нейрокомп'ютерів, які, за прогнозами фахівців, будуть обробляти інформацію за тими ж принципами, що і людський мозок, то інтерес до нейромережових технологій поступово охоплює все більш широке коло користувачів. Серед таких користувачів опинилися фінансові аналітики та архітектори фінансових систем підприємств, про що свідчать широкі дискусії у фінансових

чатах щодо ефективності застосування нейромереж для прогнозування рівня фінансової безпеки суб'єктів господарювання [9].

Використання інформаційних технологій у різних сферах людської діяльності супроводжується розробкою інтелектуальних систем, які використовують зв'язок знань у загальному випадку з навколишнім світом. Постановка і розв'язання будь-якої задачі зв'язана з конкретними предметними областями, які, як правило, є погано або слабко структурованими.

Нечітке математичне моделювання являється одним із найбільш активних і перспективних напрямів прикладних досліджень в області управління і прийняття рішень у слабко структурованих системах. Діапазон застосування нечітких методів з кожним роком розширюється, охоплюючи різні нові області. Нечітке математичне моделювання – це коли елементами дослідження являються не числа, а деякі нечіткі множини або їх поєднання. В основі такого підходу лежить не традиційна логіка, а логіка з нечіткою істинністю, нечіткими зв'язками і нечіткими правилами виводу. Основними характеристиками такого підходу є використання лінгвістичних змінних замість числових змінних, відношення між змінними описуються за допомогою нечітких висловлювань, складні відношення описуються нечіткими алгоритмами.

Значна кількість важливих проблем підтримки прийняття управлінських рішень, що виникають у різних сферах людської діяльності, зводиться до задач оцінки різного роду явищ і процесів. При проектуванні і управлінні складною соціо-економічною системою виникає проблема, коли людина не здатна дати точні і в той же час практичні значення суджень про їх поведінку. Тому для аналізу стану рівня фінансової безпеки і прогнозування загроз сьогодні будуються моделі із застосуванням апарату нечітких множин [4]. Оскільки фінансова безпека підприємства є досить індивідуальною характеристикою, яка залежить від значної кількості факторів зовнішнього та внутрішнього походження, доцільно використати саме нечіткі множини. Вплив даних факторів і наслідки цього впливу окремо для кожного підприємства можливо оцінити лише з долею суб'єктивної ймовірності, що задана у якості інтервалу значень.

2. Постановка проблеми. Фінансова безпека – це складова економічної безпеки, яка являє собою такий стан підприємства, що: дозволяє забезпечити фінансову стійкість, платоспроможність, ліквідність і достатню фінансову незалежність підприємства в довгостроковому періоді; забезпечує оптимальне залучення та ефективне використання фінансових ресурсів підприємства; дозволяє ідентифікувати небезпеки і загрози стану підприємства та розробляти заходи для їх вчасного усунення; дозволяє самостійно розробляти та впроваджувати фінансову стратегію; має бути оцінена кількісними та якісними показниками, які мають граничні значення [10].

Проблема забезпечення фінансової безпеки є актуальною для будь-якого суб'єкта господарювання, оскільки постійно перебуває в стані впливу великої кількості та різноманітності загроз, що здатні зруйнувати стабільне функціонування підприємства через порушення фінансової безпеки. Так, безладне позичання коштів рано чи пізно призведе до того, що обсяг позикових засобів перевищить реальні можливості підприємства розраховуватись із кредиторами. Це означає втрату фінансової стійкості, що може бути виявлено за балансом компанії.

Останнім часом увага вчених все більше зосереджується саме на проблемі забезпечення фінансової безпеки підприємства. Це, передусім, зумовлено тим, що саме підприємства здійснюють безпосередній вплив на формування більшої частини валового внутрішнього продукту держави, а також створюють матеріальне підґрунтя для її розвитку, забезпечуючи формування доходної частини бюджетів через податкову систему. Фінансова безпека компанії є інтегральною характеристикою здатності підприємства протистояти існуючим і виникаючим внутрішнім й зовнішнім небезпекам і загрозам, спроможності системи управління забезпечувати й підтримувати фінансову рівновагу, стійкість, платоспроможність та ліквідність в поточному і перспективному періодах.

Покращення показників економічної діяльності суб'єктів господарювання залежить від складових якісного і кількісного характеру та функціональних складових економічної безпеки. Функціональними складовими вважаються фінансова, інтелектуальна, кадрова, техніко-технологічна, політико-правова, інформаційна, соціальна безпеки. Кожна функціональна складова несе в собі власний зміст, систему критеріїв оцінювання та методи забезпечення своєї мети.

Головним завданням формування структури економічної безпеки є розроблення планів на майбутнє, моніторинг їх реалізації. Для цього необхідно розробити методику аналітичного прогнозування всіх функціональних складових економічної безпеки і, зокрема, фінансової безпеки об'єкта економічного господарювання.

Для визначення фактичного рівня фінансової економічної безпеки використовується аналітична інформація функціонування підприємства, яка дозволяє побачити стан як на даний момент часу, так і у перспективі.

Загальна постановка проблеми (завдання/задачі) може бути представлена наступним чином. Нехай для певного суб'єкта економічного господарювання відома множина кількісних і якісних показників його функціонування, а також відома історія цих показників за певні періоди часу. Виникає завдання передбачити оцінку рівня економічної безпеки даного суб'єкта господарювання.

Для вирішення даної проблеми пропонується схема, яка потребує вирішення низки задач (завдань), у вигляді нейро-фазі мережі (рис. 1), структура якої складається із сукупності послідовних етапів, на кожному із яких розв'язується конкретний клас задач [8].

Таким чином, для ефективного забезпечення фінансово-економічної безпеки на підприємстві необхідно розробити та успішно імплементувати відповідний механізм, який повинен включати в себе інструменти, методи і важелі формування фінансової безпеки підприємства та систему інформаційно-аналітичної складової такої безпеки, функціонуючу на основі сучасних інформаційних технологій. Запропонований підхід дозволяє контролювати рівень фінансової безпеки підприємства та, у випадку необхідності, приймати управлінські рішення для його покращення.

На першому етапі розв'язується клас задач передбачення. Тобто, на основі історії показників за певні періоди часу прогнозуються значення цих показників на майбутні періоди з використанням економетричних моделей та методів машинного навчання.

На другому етапі розв'язується задача фазифікації показників (критеріїв) ефективності за допомогою апарату нечіткої математики [4].

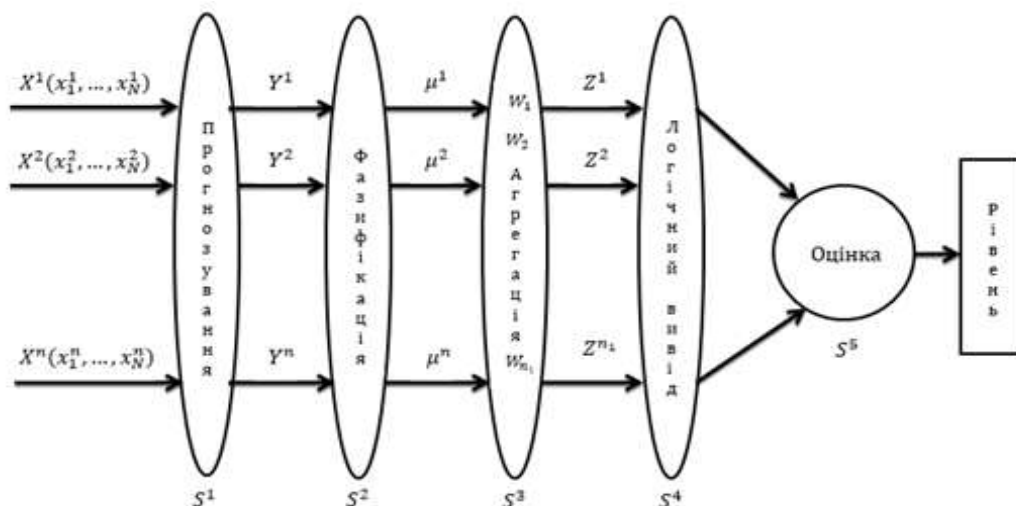


Рис. 1. Структурна схема нейро-фазі мережі

Третій етап включає агрегацію показників представлених у вигляді нечітких чисел у певні групи (кластери). Кластеризація даних є процесом розподілу елементів на класи або групи так, щоб елементи в одному класі були якомога близькими, а елементи різних класів є настільки різнорідними, наскільки це можливо. Для цього використовуються різні міри подібності, причому міра подібності визначає самі кластери. Кластерний аналіз займає одне з центральних місць серед методів аналізу даних і є сукупністю підходів, методів і алгоритмів, призначених для знаходження деякого розбиття досліджуваної сукупності об'єктів на підмножини схожих між собою об'єктів. При цьому вихідним припущенням для виділення таких підмножин, що отримали спеціальну назву кластерів, служить лише неформальне припущення про те, що об'єкти, які відносяться до одного кластера, повинні мати більшу схожість між собою, чим з об'єктами з інших кластерів. Тут використовуються моделі та методи вибору вагових коефіцієнтів і згорток.

Наступний етап передбачає, за допомогою методів логічного виведення, визначати нечітку оцінку, яка є інтегрованим показником. Для цього необхідно формування нечіткої бази знань, яка грубо відображає нелінійний взаємозв'язок «входи - вихід» за допомогою лінгвістичних правил <Якщо-то>. Ці правила генеруються експертом або отримуються в результаті екстракції нечітких знань з експериментальних даних. Параметрами, що настроюються, є ваги правил і параметри функцій належності нечітких термів.

На кінцевому етапі отримана нечітка оцінка дефазифікується у чітке значення і визначається її рівень.

У даній роботі пропонуються підходи розв'язання задач:

1. Передбачення показників (критеріїв) за допомогою R/S аналізу та лінійно-зваженого ковзного середнього (LWMA).
2. Фазифікації показників (критеріїв) ефективності за допомогою теорії нечітких множин.
3. Кластеризації даних на групи за допомогою моделі та методу вибору вагових коефіцієнтів і згорток.

Доцільність використання теорії нечітких множин зумовлено тим, що фінансова безпека компанії є досить індивідуальною характеристикою, яка залежить від значної кількості факторів зовнішнього та внутрішнього походження. Вплив даних факторів і наслідки цього впливу окремо для кожної компанії можливо оцінити лише з долею ймовірності. Іншою мовою, у економіці об'єктивним є існування невизначеності при віднесенні деякого об'єкта (у даному випадку – компанії) до чіткої множини (що задана у якості інтервалу).

3. Огляд літератури. Найчастіше нейронні мережі використовуються у працях Kuan C., White H., Swanson N. та інших науковців для прогнозування фінансових ринків. Garcia R., Genfay R., Qi M. і Madala G. обґрунтували користь нейронних мереж для аналізу трендів на фондовому ринку, а Jorion P. – для прогнозування валютного курсу. Нейронні мережі у працях вітчизняних науковців, таких як Н. Я. Савка, О. Ф. Івашина, І. І. Стрельченко, А. Б. Миколайчук та ін., більшою мірою застосовуються для прогнозування рівня фінансової безпеки держави та окремих її складових (податкової, боргової, у розрізі рівнів – регіону). На рівні суб'єктів підприємництва досі залишається незавершеним вивчення питань застосування нейронних мереж для аналізу та прогнозування рівня фінансової безпеки.

Також питанням оцінки рівня фінансової безпеки компаній присвятили свої роботи такі вчені, як Бланк І. О., Барановський О. І., Єрмошенко М. М., Ашуєв А. М., Кириченко О. А., Кудря І. В. [1, 2, 5, 6] та інші. Однак існуючі розробки у цій сфері є досить різноспрямованими, що лише підкреслює необхідність формування єдиної ефективної методики оцінки рівня фінансової безпеки, яка повинна базуватися на використанні сучасних методів. Зауважене розширення методичного апарату є доцільним з огляду на те, що сама безпека є досить відносною характеристикою, що практично унеможливорює чітке визначення меж між, наприклад, високим і низьким її рівнем. Логічним у цьому випадку є використання теорії нечітких множин при оцінці рівня фінансової безпеки суб'єктів господарювання різних галузей.

Зараз, під час пандемії коронавірусної інфекції (COVID-19), проблема оцінки рівня фінансової безпеки компанії є однією з найбільш актуальних. Серед вчених, котрі досліджують фінансовий стан та безпеку компаній, можна відмітити: К. С. Горячеву [12], Н. В. Іванову [13], А. В. Матвійчука [9, 14], Т. О. Мєліхову, [15] А. О. Недосєкіна [16], Н. Н. Пойда-Носик [17, 18], О. П. Ротштейн [19], В. Г. Чернов [20], які у своїх дослідженнях використовують теорію нечітких множин або нейронні мережі.

Останні наукові дослідження свідчать про необхідність інформаційного моделювання нечітких знань, що дозволять на основі нечіткої, неповної, а особливо експертної інформації отримувати адекватні та об'єктивні знання про об'єкт дослідження.

Для того, щоб визначити методи прогнозування, які можливо використати для прогнозування значення показників на майбутні періоди, необхідним є попереднє проведення фрактального аналізу кожного показника не менш як за 10 років. Фрактальним аналізом часових рядів займалися зарубіжні та вітчизняні науковці: Е. Петерс [23; 24; 25], Г. Херст [30], Р. Glegg [31], В. Дубницький [26], І. Ликов [27], Н. Новікова [28], Е. Найман [29], Г. Бистрай [32], О. Шелухин [33] та ін. Методами прогнозування займались такі вчені: І. Чучуєва [34],

Е. Тихонов [35], J. Armstrong [36], J. Yang [37], Ю. Лукашин [38], С. Holt [39] та ін. Незважаючи на велику кількість наукових праць у даній сфері, проблеми прогнозування невеликих часових рядів, до яких відносяться показники компаній, з урахуванням фрактальних властивостей часових рядів є недостатньо вивченими та потребують подальшого дослідження. Зокрема, залишаються недостатньо розробленими методи виявлення трендовості невеликих часових рядів. Для аналізу фрактальних властивостей таких часових рядів пропонується застосування методу Херста [9; 12], а для короткострокового прогнозування на період 1-2 роки – метод лінійно-зваженого ковзного середнього (LWMA).

4. Матеріали і методи. Нейронні мережі виникли із досліджень у галузі штучного інтелекту, а саме зі спроб відтворити здатність біологічних нервових систем навчатися й виправляти помилки, моделюючи низькорівневу структуру мозку. Штучні нейронні мережі являють собою нову й досить перспективну обчислювальну технологію, що дає нові підходи до дослідження динамічних завдань у фінансовій області. Спочатку нейронні мережі відкрили нові можливості в області розпізнавання образів, потім до цього додалися статистичні і засновані на методах штучного інтелекту засоби підтримки прийняття рішень і вирішення завдань у сфері фінансів, у тому числі для діагностики банкрутства підприємства.

Вирішення задач аналізу рівня фінансової безпеки акціонерних компаній за допомогою нейронних мереж складається з наступних етапів: пошук даних для навчання; підготовка і нормалізація даних; вибір типу нейронної мережі; експериментальний підбір характеристик мережі; експериментальний підбір параметрів навчання; навчання штучної нейронної мережі; перевірка адекватності навчання; коригування параметрів; кінцеве навчання; вербалізація нейронної мережі для її подальшого використання.

Сформулюємо постановку задачі оцінювання наступним чином. Нехай на вході маємо деякий об'єкт дослідження O , який оцінюється за багатьма показниками $K = (K_1, K_2, \dots, K_m)$. Показники K можуть представляти собою цілу систему критеріїв та моделей. Кожен показник є кількісною оцінкою, отримання якої можливо, наприклад, за допомогою моделей фінансової звітності.

Представимо підхід щодо моделювання показників визначення рівня фінансової безпеки компанії на основі інструменту нечіткої математики [7, 21] і побудови їх функцій належності. Розглядається випадок, коли існують як кількісні, так і якісні критерії оцінок. У такому разі, пропонується методика формалізації критеріїв оцінки за допомогою функцій належності. Приведемо найбільш вживані види функції належності, які можуть задавати множину критеріїв для розглядуваної задачі. Розіб'ємо множину критеріїв на групи відносно описання тим чи іншим видом функції належності [7]. Розробимо інтегральну модель, на основі функцій належності, яка буде визначати рівень економічної безпеки компанії.

Вхідними даними, які закладені в методику, являється система якісних та кількісних показників акціонерних товариств [18], що були ретельно відібрані на основі нормативних документів та праць вітчизняних і зарубіжних авторів, а також на основі опитування керівників підприємств. Всі критерії несуть у собі певний суб'єктивізм, невизначеність даних та інформації і виникає необхідність об'єднання кількісної та якісної інформації. В результаті цього, стає можливим

використовувати апарат нечіткої математики для розкриття невизначеності і формалізації якісної інформації [21]. Такий підхід до побудови функцій належності для кожного критерію дасть можливість більш адекватно підійти до проблеми оцінювання. Пропонується розділити критерії оцінок за групами видів функцій належності наступним чином.

I. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою функції належності, яка включає в себе трикутну, трапецієподібну та дзвіноподібну функції.

У нашому випадку кожна з розглядуваних функцій належності буде задаватися на інтервалі значень тих чи інших коефіцієнтів. Загальний вигляд такої функції задається наступною формулою:

$$\mu_1(K; a; a_1; b; \alpha; \beta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } K \leq a; \\ \frac{K-a}{b-a}, & \text{якщо } a < K < a_1; \\ 1, & \text{якщо } a_1 \leq K \leq b; \\ \frac{1}{1+(\frac{b-K}{\alpha})^{2 \times \beta}}, & \text{якщо } K > b. \end{cases},$$

де a, a_1, b – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a \leq a_1 \leq b$, а параметри α і β впливають на форму кривої.

Критерії, які можна представити у вигляді вищевказаної функції належності:

- **Показники фінансової стійкості:** коефіцієнт фінансової незалежності; коефіцієнт фінансової стабільності; коефіцієнт фінансового левериджу; коефіцієнт забезпечення власними коштами; коефіцієнт покриття необоротних активів власним капіталом.
- **Показники ліквідності:** коефіцієнт покриття; коефіцієнт швидкої (проміжної) ліквідності; коефіцієнт абсолютної ліквідності.

II. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної S-подібної функції належності.

Лінійну S-подібну функцію належності задаємо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_2(K; a; b) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } K \leq a; \\ \frac{K-a}{b-a}, & \text{якщо } a < K < b; \\ 1, & \text{якщо } K \geq b. \end{cases},$$

де a, b – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a < b$.

Критерії, які можна представити у вигляді лінійної S-подібної функції належності:

- **Показники ділової активності:** середня тривалість одного обороту активів; середня тривалість одного обороту запасів; коефіцієнт оборотності дебіторської заборгованості; середній період погашення кредиторської заборгованості.
- **Показники рентабельності:** коефіцієнт рентабельності продажу за фінансовими результатами від операційної діяльності (ЕВІТ); рівень рентабельності продукції; чистий дохід від реалізації (в динаміці); фінансовий

результат від операційної діяльності (в динаміці); фінансовий результат від звичайної діяльності (в динаміці); чистий прибуток (в динаміці); операційний Cash-flow (в динаміці); активи (в динаміці); власний капітал (в динаміці).

- **Ринкові показники:** ринкова ціна акцій; free-float; дивідендна дохідність.

III. Група критеріїв, яку можна представити за допомогою лінійної Z-подібної функції належності.

Лінійну Z-подібну функцію належності задамо наступним аналітичним виразом:

$$\mu_z(K; a; b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } K \leq a; \\ \frac{b-K}{b-a}, & \text{якщо } a < K < b; \\ 0, & \text{якщо } K \geq b. \end{cases}$$

де a, b – числові параметри, що можуть приймати критерії оцінки і впорядковані співвідношенням: $a < b$.

Критерії, які можна представити у вигляді лінійної Z-подібної функції належності:

- **Показники ділової активності:** коефіцієнт оборотності активів; коефіцієнт оборотності оборотних активів; коефіцієнт оборотності запасів; середній період погашення дебіторської заборгованості; коефіцієнт оборотності позикового капіталу за фінансовими результатами від звичайної діяльності (ЕВІТДА).
- **Показники рентабельності:** рівень рентабельності продажу (реалізації); коефіцієнт рентабельності продажу за фінансовими результатами від звичайної діяльності (ЕВІТДА); рівень рентабельності активів; рівень рентабельності власного капіталу.

Беручи до уваги, що прогнозування на основі моделей, побудованих за експериментальними (статистичними) даними – один із найбільш популярних підходів до прогнозування динаміки процесів у соціально-економічних, фінансових, технічних та інших системах, коротко- та середньострокового прогнозування об'ємів виробництва та накопичення продукції на складах, оцінювання альтернативних економічних стратегій, формування бюджетів підприємств та держави, прогнозування та менеджменту ризиків довільної природи та розв'язання інших задач, для вибору деяких функцій належності потрібно провести передпрогнозне оцінювання вхідних даних на базі фрактального R/S аналізу та прогноз на 1 і/або 2 точки вперед на основі лінійно-зваженого ковзного середнього (LWMA).

R/S аналіз був розроблений англійським гідрологом Гарольдом Едвіном Херстом. Метод дозволяє визначити, чи є часовий ряд випадковим або персистентним, тобто володіє довготривалою пам'яттю.

Формула R/S дозволяє визначити для різних періодів часу, чи буде розмах більшим чи меншим того, якого можна очікувати в разі, коли кожен окремий елемент вихідних даних не залежить від попереднього. Якщо розкид відрізняється від очікуваного, то важлива точна послідовність даних: низка прибуткових або збиткових моментів зміщує екстремальні значення далі, ніж в випадку їх виникнення по чистій випадковості [25].

Розрахунок показника Херста можна зробити за такою формулою:

$$\frac{R}{S} = (\alpha N)^H,$$

$$H = \frac{\log(R/S)}{\log(\alpha N)},$$

де H – показник Херста;

S – середньоквадратичне відхилення ряду спостережень x ;

N – число періодів спостережень;

α – задана константа, додатне число.

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - X_{\text{cp}})^2},$$

де X_{cp} – середнє арифметичне ряду спостережень x за N періодів:

$$X_{\text{cp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Розмах накопиченого відхилення R є найбільш важливим елементом формули розрахунку показника Херста. У загальному вигляді його обчислюють таким способом:

$$R = \max_{1 \leq u \leq N} (Z_u) - \min_{1 \leq u \leq N} (Z_u),$$

де Z_u – накопичене відхилення ряду x від середнього X_{cp} :

$$Z_u = \sum_{i=1}^u (x_i - X_{\text{cp}}).$$

З формули розрахунку показника Херста видно, що на його зростання впливають:

- Збільшення розмаху коливань R .
- Зменшення середньоквадратичного відхилення S .
- Зменшення кількості спостережень N .

При невеликій кількості спостережень N показник Херста має схильність навіть на випадкових рядах оцінювати їх як персистентні (володіють трендами).

Є три різних класифікації для різних показників Херста:

- при $0 < H < 0,5$ – антиперсистентний часовий ряд, тобто ряд, при якому відбувається «повернення до середнього»: якщо система зростає в якийсь період, то в наступний період треба очікувати спад. Якщо вчора йшло зниження значення коефіцієнта, то завтра треба чекати його підвищення. Чим ближче H до нуля, тим стійкіші ці коливання. Але таких процесів в реальності дуже мало. Антиперсистентний часовий ряд називають «рожевим шумом».
- $H = 0,5$ – часовий ряд стохастичний. Такий процес називають «білим шумом».

- $0,5 < H < 1$ – персистентний часовий ряд (ці процеси ще називають «чорним шумом») і це трендостійкі ряди. Часовий ряд характеризується ефектом довготривалої пам'яті. Якщо ряд почав зростати, чекайте, що він буде зростати і далі, якщо він убуває сьогодні, завтра теж буде спадати [40]. Трендостійкість тим більше, чим ближче H до 1, тому що чим більша кореляція між процесами, тим більше однаково вони себе ведуть. Чим ближче H до 0,5, тим більше зашумлений і менш виражений тренд на виході.

Після передпрогнозного оцінювання вхідних даних на базі фрактального R/S аналізу пропонується зробити прогноз на 1 і/або 2 точки вперед на основі лінійно-зваженого ковзного середнього (LWMA).

Лінійно-зважене ковзне середнє (LWMA) – це розрахунок ковзного середнього, що більш важко зважує останні дані про значення коефіцієнта. Останнє значення має найбільшу вагу, і кожне попереднє значення має поступово меншу вагу. Ваги падають лінійно. LWMA швидше реагують на зміну значень, ніж прості ковзаючі середні (SMA) та експоненціальні ковзні середні (EMA).

Для встановлення ієрархічних зв'язків між коефіцієнтами, що впливають на рівень фінансової безпеки, доцільно згрупувати їх в такі групи (згідно з табл. 1): показники фінансової стійкості (ФС); показники ліквідності (Л); показники ділової активності (ДА), показники рентабельності (Р), вартісні показники (В), ринкові показники (РП), якісні показники (Я).

Таблиця 1.

Узагальнені вхідні показники та їх лінгвістична оцінка.

Назва	Позначення	Вхідні параметри	Лінгвістична оцінка вхідних параметрів (терми)
Показники фінансової стійкості	ФС	$K_{11} - K_{15}$	Низький, 0-0,3 (Н) Середній, 0,3-0,5 (С) Вище середнього, 0,5-0,75 (ВС) Високий, 0,75-1 (В)
Показники ліквідності	Л	$K_{21} - K_{23}$	
Показники ділової активності	ДА	$K_{31} - K_{39}$	
Показники рентабельності	Р	$K_{41} - K_{46}$	
Вартісні показники	В	$K_{51} - K_{57}$	
Ринкові показники	РП	$K_{61} - K_{63}$	
Якісні показники	Я	$K_{70} - K_{79}$	

Зазначені групи коефіцієнтів впливу у вигляді «дерева виведення» наведено на рис. 2-8.

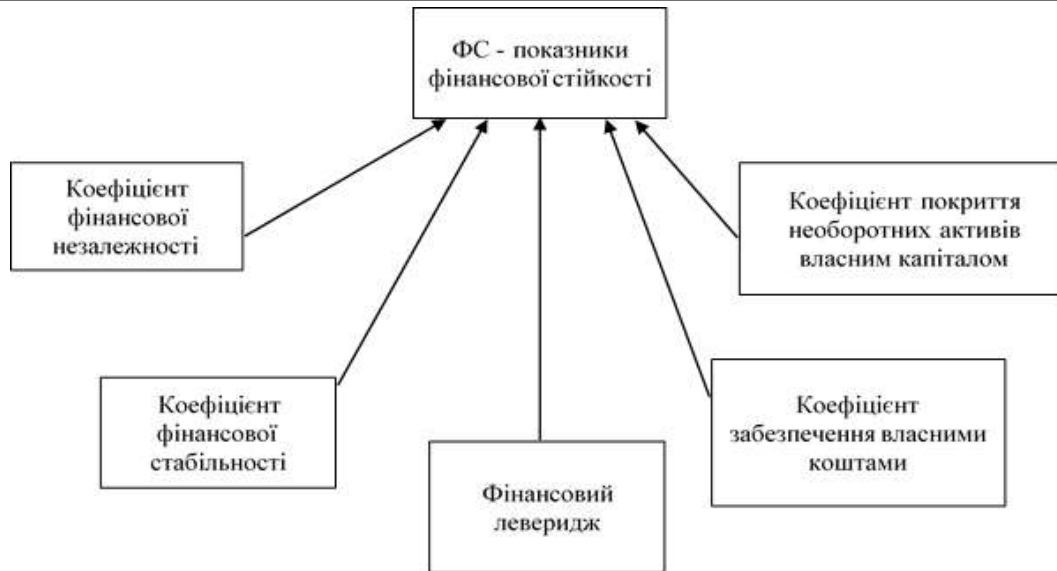


Рис. 2. Класифікація показників фінансової стійкості



Рис. 3. Класифікація показників ліквідності

За допомогою структурних схем, наведених на рис. 2-8, позначимо лінгвістичні змінні коефіцієнтів ФС, Л, ДА, Р, В, РП, Я за допомогою таких співвідношень:

$$\text{ФС} = f_{\text{ФС}}(K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{14}, K_{15}),$$

$$\text{Л} = f_{\text{Л}}(K_{21}, K_{22}, K_{23}),$$

$$\text{ДА} = f_{\text{ДА}}(K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34}, K_{35}, K_{36}, K_{37}, K_{38}, K_{39}),$$

$$\text{Р} = f_{\text{Р}}(K_{41}, K_{42}, K_{43}, K_{44}, K_{45}, K_{46}),$$

$$\text{В} = f_{\text{В}}(K_{51}, K_{52}, K_{53}, K_{54}, K_{55}, K_{56}, K_{57}),$$

$$\text{РП} = f_{\text{РП}}(K_{61}, K_{62}, K_{63}),$$



Рис. 4. Класифікація показників ділової активності

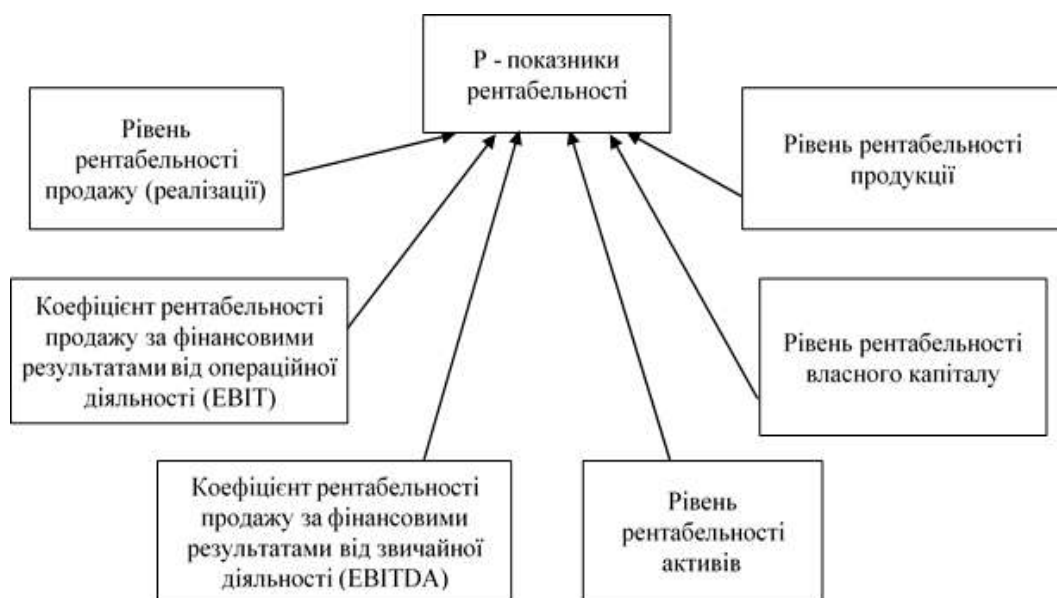


Рис. 5. Класифікація показників рентабельності

$$Я = f_{Я}(K_{71}, K_{72}, K_{73}, K_{74}, K_{75}, K_{76}, K_{77}, K_{78}, K_{79}, K_{70}),$$

де $K_{11} - K_{15}$ — показники фінансової стійкості;

$K_{21} - K_{23}$ — показники ліквідності;

$K_{31} - K_{39}$ — показники ділової активності;

$K_{41} - K_{46}$ — показники рентабельності;

$K_{51} - K_{57}$ — вартісні показники;

$K_{61} - K_{63}$ — ринкові показники;

$K_{70} - K_{79}$ — якісні показники.

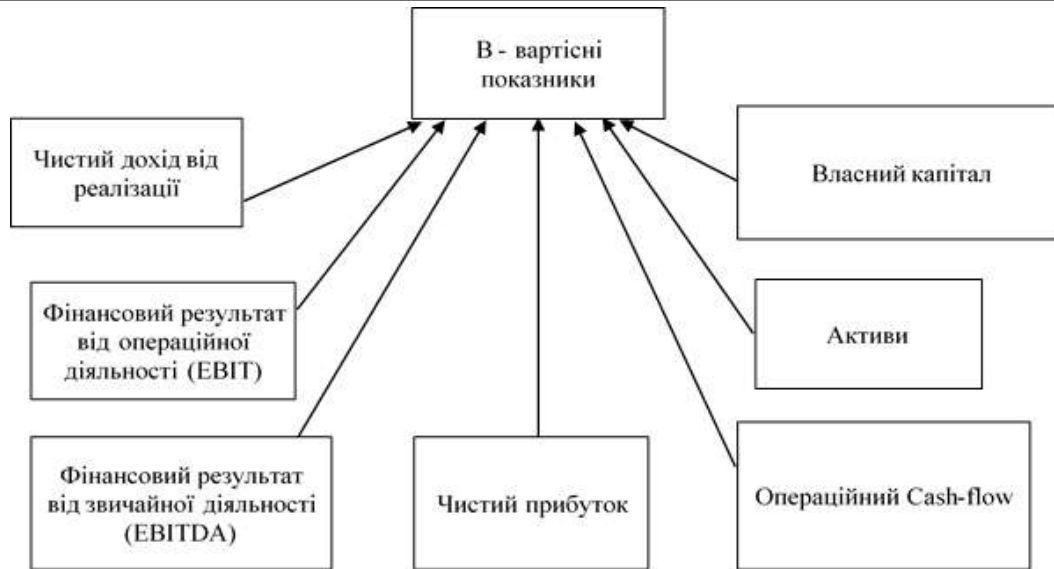


Рис. 6. Класифікація вартісних показників

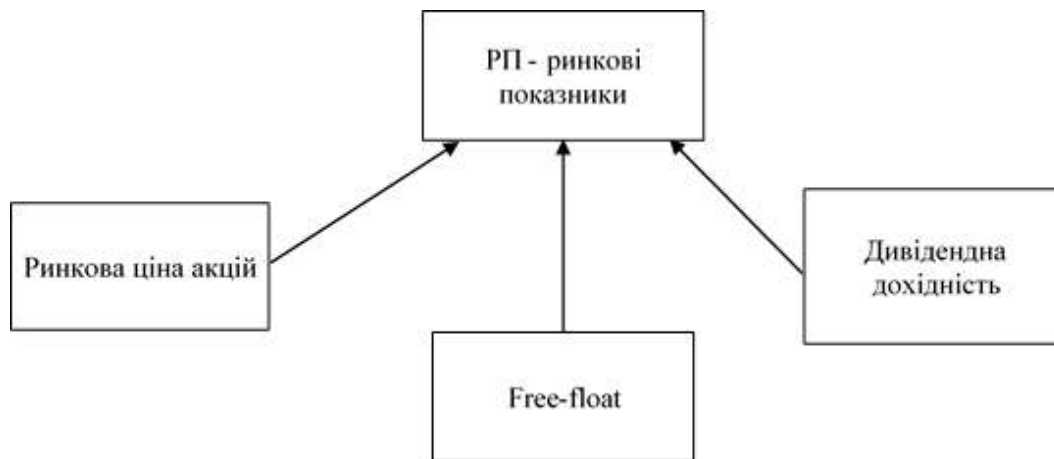


Рис. 7. Класифікація ринкових показників

Вихідну величину, тобто рівень фінансової безпеки компанії ФБ, можна визначити за формулою:

$$\text{ФБ} = f_{\text{ФБ}}(\text{ФС}, \text{Л}, \text{ДА}, \text{Р}, \text{В}, \text{РП}, \text{Я}) \quad (1)$$

де ФС, Л, ДА, Р, В, РП, Я — лінгвістичні змінні, що описують відповідно показники фінансової стійкості, показники ліквідності, показники ділової активності, показники рентабельності, вартісні показники, ринкові показники, якісні показники.

Використовуючи рекомендації експертів та відповідно до конкретної економічної ситуації, що склалася в економіці України, рівень фінансової безпеки можна охарактеризувати за такою шкалою:

ФБ₁ (0,85-1) — дуже високий рівень;

ФБ₂ (0,66-0,84) — високий рівень;

ФБ₃ (0,51-0,65) — прийнятний рівень;

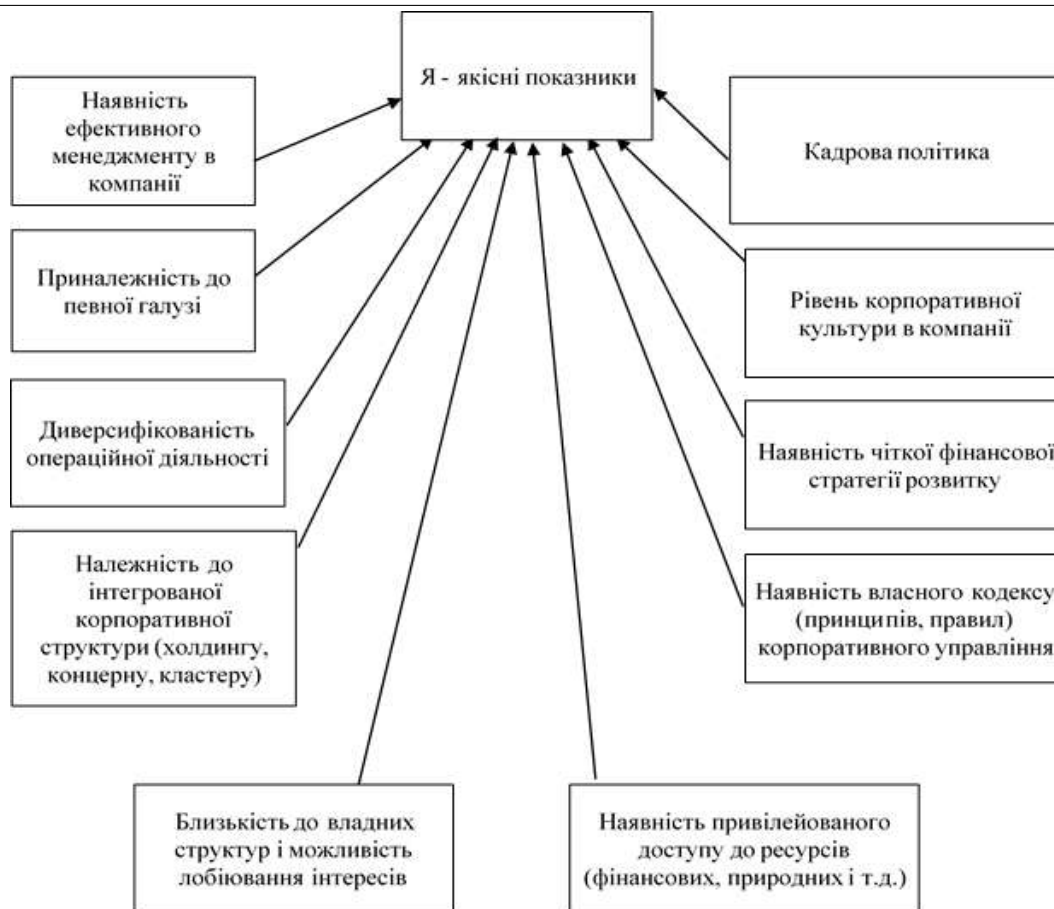


Рис. 8. Класифікація якісних показників

ФБ₄ (0,31-0,5) — критичний рівень;

ФБ₅ (0-0,3) — надкритичний рівень.

Наступним кроком моделювання рівня фінансової безпеки є складання ієрархічної бази знань. Розглянемо співвідношення (1). Для оцінки значення лінгвістичних змінних, які показують причинно-наслідковий зв'язок між рівнем фінансової безпеки ФБ та показниками фінансової стійкості, показниками ліквідності, показниками ділової активності, показниками рентабельності, вартісними показниками, ринковими показниками, якісними показниками, використаємо систему терм-множин, яку наведено в таблиці 1. Відомо, що кожне правило бази знань є висловлювання — «ЯКЩО-ТО». Правила, які мають однаковий вихідний параметр, об'єднуються у рядках таблиці логічним висловлюванням «АБО».

Для реалізації нечіткого логічного висновку необхідно здійснити перехід від логічних висловлювань до нечітких логічних рівнянь. Такі рівняння можна отримати шляхом заміни лінгвістичних значень на значення функцій належності, а операції «І» та «АБО» — нечіткими логічними операціями перетину і об'єднання.

Процедура дефазифікації є останнім етапом моделювання і є оберненим перетворенням знайденого нечіткого логічного висловлювання (висновку) у вихідний оціночний чи прогнозний параметр (змінну), який підлягає моделюванню

і прогнозуванню. Існують різні методи дефазифікації, вибір і застосування яких залежить від об'єкта моделювання.

5. Висновки. Розроблена економіко-математична модель оцінювання та прогнозування рівня фінансової безпеки компанії може розглядатись як типова для цього класу об'єктів, а розроблена на її базі методологія моделювання може застосовуватись для моделювання будь-яких економічних процесів, що характеризуються нечітким зв'язком між вхідними та вихідними параметрами, значними труднощами при формалізації факторів впливу, можливістю залучати лінгвістичні висловлювання (висновки) експертів для побудови моделей тощо.

Список використаної літератури

1. Барановський О. І. Фінансова безпека: Монографія / Інститут економічного прогнозування. Київ: Фенікс, 1999. 338 с.
2. Бланк И. А. Управление финансовой безопасностью предприятия / 2-е изд., стереотип. Киев: Эльга, 2009. 776 с.
3. Дилигенский Н. В., Дымова Л. Г., Севастьянов П. В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология: монография. Москва: Издательство Машиностроение-1, 2004. 397 с.
4. Зайченко Ю. П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах [Текст]: учеб. пособие. Киев: Слово, 2008. 341 с.
5. Єрмошенко М. М., Горячева К. С., Ашуев А. М. Економічні та організаційні засади забезпечення фінансової безпеки підприємства: Препринт наукової доповіді / За наук. ред. д.е.н, проф. М. М. Єрмошенка. Київ: Національна академія управління, 2005. 78 с.
6. Кириченко О. А., Кудря І. В. Вдосконалення управління фінансовою безпекою підприємств в умовах фінансової кризи. *Інвестиції: практика та досвід*. 2009. № 10. С. 22–26.
7. Polishchuk V. Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences*. Begell house, Inc, New York, 2019. Volume 51, 2019 Issue 9. P. 66–76. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60.
8. Шаркаді М. М., Маляр М. М., Мазютинець Г. В. Нечітке моделювання показників фінансової безпеки підприємства. *Вісник Ужгородського університету, серія «Математика і інформатика»*. 2020. № 2(37). С. 176–183. DOI: 10.24144/2616-7700.2020.2(37).176-183
9. Матвійчук А. В. Штучний інтелект в економіці: нейронні мережі, нечітка логіка: Монографія. Київ: КНЕУ, 2011. 439 с.
10. Финансовая безопасность: [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: http://www.faito.ru/pages/infresources/fkglossary/add_comment.php?id=259
11. Шаркаді М. М., Роботишин М. В., Маляр М. М. Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. № 1(36). С. 112–122.
12. Горячева К. С. Оцінка рівня фінансової безпеки підприємства. URL: <http://dspace.uabs.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/3159/1/Gorjacheva.pdf>
13. Иванова Н. С. Оцінка ефективності системи економічної безпеки агропромислових підприємств: дис. канд. екон. наук: 08.00.04. Запоріжжя, 2011. 268 с.
14. Матвійчук А. В. Моделювання фінансової стійкості підприємств із застосуванням теорій нечіткої логіки, нейронних мереж і дискримінантного аналізу. *Вісник НАН України*. 2010. № 9. С. 24–46.
15. Меліхова Т. О. Оцінка рівня економічної безпеки підприємства за допомогою нейронних мереж та кластерного аналізу. *Східна Європа: економіка, бізнес та управління*. № 2_2018. URL: <http://www.easterneuropeebm.in.ua/index.php/12-2018> (0,75 д.а.).
16. Недосекин А. О. Фондовый менеджмент в распылчатых условиях. СПб.: Типография “Сезам”, 2003. 201 с.
17. Пойда-Носик Н. Н., Мазютинець Г. В. Застосування штучних нейромереж для аналізу рівня фінансової безпеки компаній. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Економіка»*. 2020. № 1(55). С. 112–117.

18. Пойда-Носик Н. Н. Сутність фінансової безпеки суб'єктів підприємництва та її роль в забезпеченні національної економічної безпеки. *Вісник ЖДТУ*. 2011. № 1(55). С. 340–342.
19. Ротштейн О. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечёткие множества, генетичні алгоритми, нейронні мережі. Вінниця: «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1999. 320 с.
20. Чернов В. Г. Модели поддержки принятия решений в инвестиционной деятельности на основе аппарата нечетких множеств. М.: Горячая линия - Телеком, 2007. 312 с.
21. Маляр М. М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород: РА «АУТДОР-ШАРК», 2016. 222 с.
22. Шило В. П. Аналіз фінансового стану виробничої та комерційної діяльності підприємства: Навч. Посібник. К.: Кондор, 2005. 240 с.
23. Peters E. *Chaos and Order in the Capital Markets*. New York: John Wiley, 1991. 240 p.
24. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.
25. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000. 333 с.
26. Дубницький В. Ю. Вибір методу прогнозування вартості цінних паперів з урахуванням фрактальної вимірності ряду спостережень. *Бізнес Інформ*. 2011. № 7(1). С. 120–121.
27. Лыков И. А., Охотников С. А. Влияние изменения функции Херста на возможности экономического прогнозирования. *Фундаментальные исследования*. 2013. № 10. С. 1539–1544.
28. Новикова Н. Б. Фрактальные методы и концепция экономически минимальных производственных систем в управлении инновациями. *Вестник ЮРГТУ (НПИ)*. 2011. № 2. С. 162–166.
29. Найман Э. Расчёт показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических индикаторов. *Економіст*. 2009. № 10. С. 25–29.
30. Херст Г. Э. Долгосрочная вместимость водохранилищ. *Труды Американского общества гражданских инженеров*. 1951. Т. 116. С. 770–808.
31. Clegg R. G. A Practical guide to measuring the Hurst parameter. *International Journal of Simulation: Systems, Science & Technology*. 2006. Vol. 7. Issue 2. P. 3–14.
32. Методы нелинейной динамики в анализе и прогнозировании экономических систем регионального уровня / Г. П. Быстрой, Л. А. Коршунов, И. А. Лыков и др. *Журнал экономической теории*. 2010. № 3. С. 103–114.
33. Шелухин О. И., Осин А. В., Смольский С. М. Самоподобие и фракталы. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
34. Чучуева И. А. Модель прогнозирования временных рядов по выборке максимального подобия: дис. канд. тех. наук. М., 2012.
35. Тихонов Э. Е. Прогнозирование в условиях рынка. Невинномысск, 2006. 221 с.
36. Armstrong J. S., Brodie R. J. *Forecasting for Marketing*. In: *Quantitative Methods in Marketing* / Graham J. Hooley and Michael K. Hussey (ed.). London: International Thompson Business Press, 1999. P. 92–120.
37. Yang J. *Power System Short-term Load Forecasting: Thesis for PhD degree*. Germany, Darmstadt, Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität, 2006. 139 p.
38. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2003. 416 с.
39. Holt C. C. Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *International Journal of Forecasting*. 2004. Vol. 20. Issue 1. P. 5–10.
40. Кроновер Р. М. (2000). Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет.

Mazyutynets G. V., Sharkadi M. M. Multilayer network model for determining a company's financial security level.

The activity of economic entities in a market economy is determined primarily by the state of their finances, which leads to the need to consider the problems of financial security management of the enterprise. Ensuring sustainable development of the enterprise, stability of its results, achieving goals that meet the interests of owners and society as a whole, is impossible without developing and implementing an independent strategy of the entity,

which in today's economy is determined by a reliable system of financial security. The growth of business is causing the company to become more dependent on external sources of funding and, possibly, the loss of independence in making management decisions. Even with a high profitability of the business, insufficient attention to the problems of its financial security can lead to the fact that the company may become the object of external influence or takeover. Forecasting the level of financial security is a complex analytical and computational process and requires a detailed study of development trends and predict the impact of the studied factor's components on the level of the company's economic security. A study of the current problem of developing a multilevel neural network model for information technology on the example of determining the level of the company's financial security, which occurs in the functioning of socio-economic systems and is based on the use of fuzzy logic, fuzzy sets and neural phase. The purpose of this work is to develop a model of a multilevel neural network to determine the level of the company's financial security in the functioning of socio-economic systems in conditions of uncertainty according to incoming expert estimates. The object of the research is to determine the level of financial security of the company on the basis of membership functions for incoming expert evaluations by criteria using the neural phase of the network. The subject of the study are methods and models of multilevel neural network representation to determine the level of the company's financial security in conditions of uncertainty. For the first time, methodological principles of combining elements of fuzzy logic theory and neural networks in modeling company financial security management processes are proposed, which provides opportunities to adapt the proposed model of multilevel neural network. In the course of research methods of the fuzzy sets theory and neural network modeling, methods of expert estimations were used. The paper solves the scientific and applied task of developing a model of a multilevel neural network to determine the level of the company's financial security according to incoming expert assessments. The practical significance of the obtained results of the multilevel neural network model of determining the level of the company's financial security will allow to adequately approach the evaluation of alternative solutions to ensure the management of financial security of domestic enterprises. Using the built model, specialists have the opportunity to assess the level of the company's financial security, to prevent its deterioration, to determine the impact of certain factors on the level of financial security. Thus, the use of the proposed model in management is a convenient tool for timely control over the financial condition of the enterprise, an adequate response to its deterioration. Lenders, in turn, have the opportunity to obtain real information about the financial condition of the borrower and to properly conduct credit policy. Investors receive information to decide on the possibility of investment activities. The obtained results can be used to improve the financial security management system of domestic companies.

Keywords: artificial neural network, mathematical models, fuzzy sets, membership function, level of financial security, expert assessment, decision making.

References

1. Baranovsky, O. (1999). *Finansova bezpeka* [Financial security]. Kyiv: Fenix [in Ukrainian].
2. Blank, I. (2009). *Upravlenie finansovoy bezopasnostiu predpriiatiia* [Management of the enterprise's financial security]. Kyiv: Elha [in Russian].
3. Diligensky, N., Dymova, L. & Sevastyanov, P. (2004). *Nechetkoie modelirovaniie i mnohokriterialnaia optimizaciia proizvodstvennykh sistem v usloviakh neopredelennosti; tekhnolohiia, ekonomika, ekolohiia: monohrafiia* [Fuzzy modeling and multicriteria optimization of production systems in conditions of uncertainty: technology, economics, ecology: a monograph]. Moscow: Mashinostroenie [in Russian].
4. Zaichenko, Yu. (2008). *Nechetkie modeli i metody v intelektualnykh sistemakh* [Fuzzy models and methods in intelligent systems]. Kyiv: Slovo [in Russian].
5. Yermoshenko, M., Goryacheva, K., & Ashuyev, A. (2005). *Ekonomichni ta orhanizacini zasady zabezpechennia finansovoi bezpeky pidpriiemstva: Preprynt naukovoii dopovidi* [Economic and organizational principles of financial security of the enterprise: Preprint of the scientific report]. Kyiv: National Academy of Management [in Ukrainian].

6. Kirichenko, O., & Kudria, I. (2009). Vdoskonalennia upravlinnia finansovoiu bezpekoiu pidpriemstva v umovakh finansovoi kryzy [Improving the management of financial security of enterprises in a financial crisis]. *Investments: practice and experience*, 10, 22–26 [in Ukrainian].
7. Polishchuk, V. (2019). Technology to Improve the Safety of Choosing Alternatives by Groups of Goals. *Journal of Automation and Information Sciences*, (Vol. 51), 9, 66–76. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.60> [in English].
8. Sharkadi, M., Malyar, M., & Mazyutynets, G. (2020). Nechitke modeliuvannia pokaznykiv finansovoi bezpeky pidpriemstva [Fuzzy modeling of financial security indicators of the enterprise]. *Bulletin of Uzhgorod University, series "Mathematics and Informatics"*, 2(37), 176–183. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).176-183](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).176-183) [in Ukrainian].
9. Matviychuk, A. (2011). *Shtuchnyi intelekt v ekonomici: neironni merezhi, nechitka lohika: Monohrafia* [Artificial intelligence in economics: neural networks, fuzzy logic: Monograph]. Kyiv: KNEU [in Ukrainian].
10. *Finansovaia bezopasnost* [Financial security]. Retrieved from http://www.faito.ru/pages/infresources/fkglossary/add_comment.php?id=259 [in Russian].
11. Sharkadi, M., Robotyshyn, M., & Malyar, M. (2020). Modeli i metody mashynnoho navchannia dlia zavdan peredbachennia. [Models and methods of machine learning for predictive tasks]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Mathematics and Informatics Series*, 1(36), 112–122 [in Ukrainian].
12. Goriacheva, K. *Ocinka rivnia finansovoi bezpeky pidpriemstva* [Assessment of the level of financial security of the enterprise]. Retrieved from <http://dspace.uabs.edu.ua/jspui/bitstream/123456789/3159/1/Gorjacheva.pdf> [in Ukrainian].
13. Ivanova, N. (2011). *Ocinka efektyvnosti systemy ekonomichnoi bezpeky ahropromyslovykh pidpriemstv* [Estimation of efficiency of system of economic safety of agroindustrial enterprises]. (Candidate's thesis). Zaporozhye [in Ukrainian].
14. Matviychuk, A. (2010). Modeliuvannia finansovoi stiykosti pidpriemstva iz zastosuvanniam teorii nechitkoi lohiky, neironnykh merezh i dyskryminantnoho analizu. [Modeling of financial stability of enterprises with the use of theories of fuzzy logic, neural networks and discriminant analysis]. *Bulletin NAS of Ukraine*, 9, 24–46 [in Ukrainian].
15. Melikhova, T. (2018). *Ocinka rivnia ekonomichnoi bezpeky pidpriemstva za dopomohoiu neironnykh merezh ta klasterneho analizu*. [Assessment of the level of economic security of the enterprise using neural networks and cluster analysis]. *Eastern Europe: Economy, Business and Management*, 2. Retrieved from <http://www.easterneuropeebm.in.ua/index.php/12-2018> [in Ukrainian].
16. Nedosekin, A. (2003). *Fondovyi menegment v rasplyvchatykh usloviakh* [Stock management in vague conditions]. St. Petersburg: Sesame Printing House [in Russian].
17. Poida-Nosyk, N., & Mazyutynets, G. (2020). Zastosuvannia shtuchnykh neiromerezh dlia analizu rivnia finansovoi bezpeky kompaniy. [Application of artificial neural networks for the analysis of the level of financial security of companies]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. "Economics" series*, 1(55), 112–117 [in Ukrainian].
18. Poida-Nosyk, N. (2011). Sutnist finansovoi bezpeky subiektiv pidpriemnytva ta ii rol v zabezpechenni nacionalnoi ekonomichnoi bezpeky. [The essence of financial security of business entities and its role in ensuring national economic security]. *Bulletin of ZhSTU*, 1(55), 340–342 [in Ukrainian].
19. Rotshtein, O. (1999). *Intelektualni tekhnologii identyfikacii: nechitki mnozhyny, henetychni alhorytmy, neironni merezhi* [Intelligent identification technologies: fuzzy sets, genetic algorithms, neural networks]. Vinnytsia: "UNIVERSUM-Vinnytsia" [in Ukrainian].
20. Chernov, V. (2007). *Modeli podderzhki priniatia resheniy v investicionnoi deiatelnosti na osnovie aparata nechetskikh mnozhestv* [Models of decision support in investment activities based on the apparatus of fuzzy sets]. Moscow: Horiacaia linia [in Russian].
21. Malyar, M. (2016). *Modeli i metody bahatokryterialnoho obmezhenno-racionalnoho vyboru: Monohrafia* [Models and methods of multicriteria limited-rational choice: Monograph]. Uzhhorod: RA "AUTDOR-SHARK" [in Ukrainian].
22. Shylo, V. (2005). *Analiz finansovoho stanu vyrobnychoi ta komerciynoi dialnosti pidpriemstva* [Analysis of the financial condition of production and commercial activities of the enterprise]. Kyiv: Kondor [in Ukrainian].

23. Peters, E. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets*. New York: John Wiley [in English].
24. Peters, E. (2004). *Fraktalniy analiz finansovykh rynkov: Primenenie teorii Khaosa v investitsiyakh i ekonomike* [Fractal Analysis of Financial Markets: Applying Chaos Theory to Investment and the Economy]. Moscow: Internet-treidinh [in Russian].
25. Peters, E. (2000). *Khaos i poriadok na ryinkakh kapitala* [Chaos and order in the capital markets]. Moscow: Mir [in Russian].
26. Dubnytsky, V. (2011). Vybir metodu prohnozuvannya vartosti cinnykh paperiv z urakhuvaniem fraktalnoi vymirnosti riadu sposterezhen. [The choice of method for forecasting the value of securities taking into account the fractal dimension of a number of observations]. *Business Inform*, 7(1), 120–121 [in Ukrainian].
27. Lykov, I., & Okhotnikov, S. (2013). Vlianie izmeneniya funktsii Khresta na vozmozhnosti ekonomicheskogo prohnozirovaniya. [Influence of change of Hirst function on possibilities of economic forecasting]. *Basic research*, 10, 1539–1544 [in Russian].
28. Novikova, N. (2011). Fraktalnyiye metody i koncepcia ekonomicheskimi minimalnykh proizvodstvennykh system v upravlenii innovatsiyami. [Fractal methods and the concept of economically minimal production systems in innovation management]. *Journal of YURGTU (NPI)*, 2, 162–166 [in Russian].
29. Naiman, E. (2009). Raschot pokazatelya Khersta s celiu byiavlenniya trendovosti (persistentnosti) finansovykh rynkov i makroekonomicheskikh indikatorov. [Calculation of the Hearst indicator in order to identify the trend (persistence) of financial markets and macroeconomic indicators]. *Economist*, 10, 25–29 [in Russian].
30. Hearst, G. (1951). Dolhosrochnaia vmestimost vodokhranilisch. [Long-term reservoir capacity]. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–808 [in Russian].
31. Clegg, R. (2006). A Practical guide to measuring the Hurst parameter. *International Journal of Simulation: Systems, Science & Technology*, 7, 2, 3–14 [in English].
32. Bystrai, H., Korshunov, L., & Lykov, I. (2010). Metody nelineinoy dinamiki v analize I prohnozirovaniy ekonomicheskikh system rehionalnogo urovnia. [Methods of nonlinear dynamics in the analysis and forecasting of economic systems at the regional level]. *Journal of economic theory*, 3, 103–114 [in Russian].
33. Shelukhin, O., Osin, A., & Smolsky, S. (2008). *Samopodobie i fraktaly* [Self-similarity and fractals]. Moscow: Fizmatlit [in Russian].
34. Chuchueva, I. (2012). *Model prohnozirovaniya vremennykh riadov po vyborke maksimalnogo podobia* [Model of forecasting time series by sampling of maximum similarity]. (Candidate's thesis). Moscow [in Russian].
35. Tikhonov, E. (2006). *Prohnozirovaniie v usloviakh rynka* [Forecasting in market conditions]. Nevinnomyssk [in Russian].
36. Armstrong, J., & Brodie, R. (1999). *Forecasting for Marketing*. In: *Quantitative Methods in Marketing*. London: International Thompson Business Press [in English].
37. Yang, J. (2006). *Power System Short-term Load Forecasting*. (Thesis for PhD degree). Electrical Engineering and Information Technology of the Technical University. Darmstadt [in English].
38. Lukashin, Yu. (2003). *Adaptivnyye metody kratkosrochnoho prohnozirovaniya vremennykh riadov* [Adaptive methods of short-term forecasting of time series]. Moscow: Finansy i statistika [in Russian].
39. Holt, C. (2004). Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *International Journal of Forecasting*, 20, 5–10 [in English].
40. Kronover R. (2000). *Fraktaly i khaos v dinamicheskikh sistemakh* [Fractals and chaos in dynamical systems. Fundamentals of theory]. Moscow: Postmarket [in Russian].

Одержано 15.04.2022

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).195-204](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).195-204)**І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³, В. С. Динис⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,
vadim02091996@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5952-9326>

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ БАЗИСНОЇ РЕШІТКИ КЛАСУ M_2 БУЛЕВИХ АЛГЕБР

У даній роботі продовжується дослідження базисної решітки класу алгебр M_2 . Базисну решітку класу M_2 можна побудувати з сигнатурної решітки цього класу. Базисні решітки є фактор решітками відповідних сигнатурних решіток. У даній роботі наводиться алгоритм побудови базисної решітки (фактор-решітки) класу алгебр M_2 , наводиться повна інформація про базисну решітку у вигляді таблиць, які вказують розташування суміжних класів і ребер, що їх з'єднують.

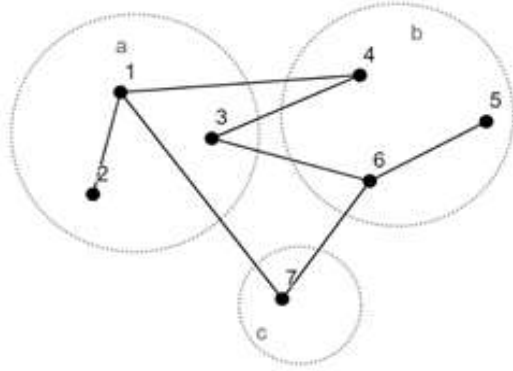
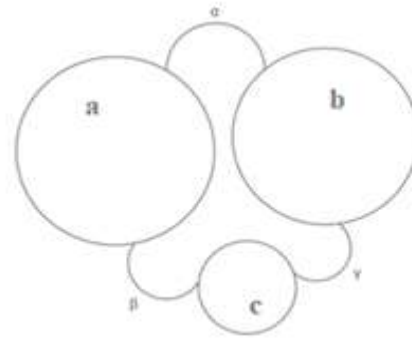
Ключові слова: булева алгебра, фактор решітка, базисна еквівалентність.

1. Вступ. У роботах [1, 2, 3] досліджується клас універсальних булевих алгебр з сигнатурою у яких арність не перевищує два. У [1, 2] побудовані сигнатурні решітки цього класу алгебр, а у роботі [3] вводиться поняття базисної еквівалентності та базисних графів.

Наведемо означення фактор-решітки за еквівалентністю σ . Нехай $R(BD)$ – решітка, де B – множина вершин, D – множина ребер. На множині B задана еквівалентність σ , яка розбиває B на суміжні класи, які утворюють фактор-клас B/σ . Побудуємо ребра решітки R/σ . Множину ребер D розіб'ємо на класи:

- 1) Ребра, які з'єднують вершини, що належать одному суміжному класу, зникають.
- 2) Множини ребер, які з'єднують вершини двох суміжних класів об'єднуються в одне ребро, між цими класами.

Наприклад, нехай задано $R = (BD)$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $D = \{(1, 2), (1, 7), (1, 4), (3, 4), (3, 6), (6, 5), (6, 7)\}$. Задамо еквівалентність σ : $a = \{1, 2, 3\}$, $b = \{4, 5, 6\}$, $c = \{7\}$. Ребра $(1, 2)$, $(6, 5)$ зникають, ребра $(1, 4)$,

Рис. 1. Решітка $R = (BD)$.Рис. 2. Решітка R/σ

(3, 4), (3, 6) перетворюються в ребро $\alpha = (ab)$; ребро (1, 7) в ребро $\beta = (ac)$; ребро (6, 7) в ребро $\gamma = (bc)$. Отримана решітка буде решіткою R/σ .

2. Алгоритм побудови фактор-решітки. $M_2 \setminus \sigma$.

1. На множині універсальних булевих алгебр M_2 задамо базисну еквівалентність σ , яка розбиває множину M на суміжні класи, що утворюють фактор-множину $M_2 \setminus \sigma$. Суміжні класи за базисною еквівалентністю, описані в [3]. Кожен суміжний клас є вершиною фактор решітки $M_2 \setminus \sigma$ і його можна представити номером канонічної алгебри, або множиною номерів базисів, які можна сформуувати з операцій канонічної алгебри.
2. Для знаходження вершини решітки скористаємося множиною канонічних алгебр M_2^1 , які описані в [1]. У цій роботі показано, що в класі M_2^1 існує 265 канонічних алгебр.
3. Для кожної канонічної алгебри U_i знаходимо характеристичний базисний вектор $B(U_i)$ і число $|B(U_i)|$, яке вказує скільки базисів можна побудувати з операцій сигнатури алгебри U_i . Відомо, що $1 \leq |B(U_i)| \leq 15$. Алгебри, у яких $|B(U_i)| = k$ будуть знаходитись на k -ому ярусі базисної фактор решітки M_2^1/σ . Таблиця 1 містить інформацію про кількість суміжних класів решітки M_2^1/σ по ярусах.

Таблиця 1.

Кількість суміжних класів

Ярус	0	1	2	3	4	5	6	7
Кількість суміжних класів	1	15	39	39	49	39	35	16
Ярус	8	9	10	11	12	13	14	15
Кількість суміжних класів	13	9	2	5	2	0	0	1

Суміжні класи по ярусах приведені в таблиці 2. У цій таблиці для кожного ярусу вказано канонічні алгебри. Клас $[U_i^k]$ можна задавати множиною базисів $B(U_i^k)$, які можна утворити з операцій алгебр U_i^k . Задамо відношення часткового порядку над суміжними класами: $[U_i^k] \geq [U_j^n]$ тоді і тільки тоді, коли

$B(U_j^n) \subset B(U_i^k)$. Для кожного суміжного класу U_i^k знайдемо множину суміжних класів $N(U_i^k) = \{U_j^n | B(U_j^n) \subset B(U_i^k)\}$. Оскільки в множині $N(U_i^k)$ задано відношення часткового порядку, то в множині $N(U_i^k) - U_i^k$ існують максимальні суміжні класи $N_{\max}(U_i^k)$. З'єднуючи суміжний клас $[U_i^k]$ з суміжними класами $N_{\max}(U_i^k)$ отримуємо множину нижніх ребер класу $[U_i^k]$. Рухаючись по ярусах знизу вгору і будуючи ребра нижніх суміжних класів для U_i^k , отримуємо решітку M_2^1/σ .

Таблиця 2.

Розподіл суміжних класів по ярусах

1 ярус		2 ярус			3 ярус			4 ярус				5 ярус											
260	1	324	1	5	390	1	2	8	398	1	2	7	8	454	1	2	5	6	8				
130	2	268	1	7	356	1	3	5	391	1	2	8	9	399	1	2	7	8	9				
96	3	262	1	8	340	1	4	5	372	1	3	4	5	430	1	2	7	8	12				
80	4	293	1	10	332	1	5	7	364	1	3	5	7	414	1	2	7	8	13				
68	5	277	1	11	270	1	7	8	357	1	3	5	10	423	1	2	8	9	10				
66	6	194	2	6	428	1	7	12	348	1	4	5	7	407	1	2	8	9	11				
12	7	134	2	8	412	1	7	13	341	1	4	5	11	380	1	3	4	5	7				
6	8	131	2	9	263	1	8	9	326	1	5	6	8	358	1	3	5	6	8				
3	9	170	2	12	309	1	10	11	271	1	7	8	9	492	1	3	5	7	12				
289	10	154	2	13	226	2	3	6	301	1	7	10	14	342	1	4	5	6	8				
273	11	112	3	4	210	2	4	6	285	1	7	11	15	476	1	4	5	7	13				
168	12	100	3	5	195	2	6	9	444	1	7	12	13	334	1	5	6	7	8				
152	13	98	3	6	142	2	7	8	295	1	8	9	10	327	1	5	6	8	9				
41	14	353	3	10	135	2	8	9	279	1	8	9	11	429	1	7	10	12	14				
25	15	232	3	12	419	2	9	10	242	2	3	4	6	413	1	7	11	13	15				
		105	3	14	403	2	9	11	227	2	3	6	9	311	1	8	9	10	11				
		84	4	5	186	2	12	13	234	2	3	6	12	243	2	3	4	6	9				
		82	4	6	116	3	4	5	211	2	4	6	9	230	2	3	5	6	8				
		337	4	11	114	3	4	6	218	2	4	6	13	483	2	3	6	9	10				
		216	4	13	108	3	5	7	198	2	5	6	8	214	2	4	5	6	8				
		89	4	15	99	3	6	9	143	2	7	8	9	467	2	4	6	9	11				
		76	5	7	361	3	10	14	174	2	7	8	12	206	2	5	6	7	8				
		67	6	9	233	3	12	14	158	2	7	8	13	199	2	5	6	8	9				
		14	7	8	92	4	5	7	435	2	9	10	11	190	2	7	8	12	13				
		172	7	12	83	4	6	9	171	2	9	12	14	427	2	9	10	12	14				
		156	7	13	345	4	11	15	155	2	9	13	15	411	2	9	11	13	15				
		45	7	14	217	4	13	15	124	3	4	5	7	118	3	4	5	6	8				
		29	7	15	70	5	6	8	115	3	4	6	9	110	3	5	6	7	8				
		7	8	9	15	7	8	9	369	3	4	10	11	103	3	5	6	8	9				
		291	9	10	188	7	12	13	248	3	4	12	13	237	3	5	7	12	14				
		275	9	11	173	7	12	14	121	3	4	14	15	363	3	6	9	10	14				
		43	9	14	157	7	13	15	102	3	5	6	8	94	4	5	6	7	8				
		27	9	15	61	7	14	15	236	3	5	7	12	87	4	5	6	8	9				
		305	10	11	307	9	10	11	109	3	5	7	14	221	4	5	7	13	15				
		297	10	14	299	9	10	14	355	3	6	9	10	347	4	6	9	11	15				
		281	11	15	283	9	11	15	107	3	6	9	14	79	5	6	7	8	9				
		184	12	13	59	9	14	15	489	3	10	12	14	63	7	8	9	14	15				
		169	12	14	425	10	12	14	86	4	5	6	8	189	7	12	13	14	15				
		153	13	15	409	11	13	15	220	4	5	7	13	315	9	10	11	14	15				
		57	14	15					93	4	5	7	15										
									339	4	6	9	11										
									91	4	6	9	15										
									473	4	11	13	15										
									78	5	6	7	8										
									71	5	6	8	9										
									47	7	8	9	14										
									31	7	8	9	15										
									313	10	11	14	15										
									185	12	13	14	15										
6 ярус					7 ярус					8 ярус													
486	1	2	3	5	6	8	502	1	2	3	4	5	6	8	494	1	2	3	5	6	7	8	12
470	1	2	4	5	6	8	463	1	2	5	6	7	8	9	487	1	2	3	5	6	8	9	10
462	1	2	5	6	7	8	382	1	3	4	5	6	7	8	478	1	2	4	5	6	7	8	13
455	1	2	5	6	8	9	508	1	3	4	5	7	12	13	471	1	2	4	5	6	8	9	11
446	1	2	7	8	12	13	359	1	3	5	6	8	9	10	431	1	2	7	8	9	10	12	14
439	1	2	8	9	10	11	493	1	3	5	7	10	12	14	415	1	2	7	8	9	11	13	15
374	1	3	4	5	6	8	343	1	4	5	6	8	9	11	319	1	7	8	9	10	11	14	15
373	1	3	4	5	10	11	477	1	4	5	7	11	13	15	445	1	7	10	11	12	13	14	15
366	1	3	5	6	7	8	247	2	3	4	5	6	8	9	191	2	7	8	9	12	13	14	15
365	1	3	5	7	10	14	499	2	3	4	6	9	10	11	443	2	9	10	11	12	13	14	15
350	1	4	5	6	7	8	238	2	3	5	6	7	8	12	253	3	4	5	7	12	13	14	15
349	1	4	5	7	11	15	491	2	3	6	9	10	12	14	379	3	4	6	9	10	11	14	15
335	1	5	6	7	8	9	222	2	4	5	6	7	8	13	505	3	4	10	11	12	13	14	15
303	1	7	8	9	10	14	475	2	4	6	9	11	13	15									
287	1	7	8	9	11	15	111	3	5	6	7	8	9	14									
317	1	7	10	11	14	15	95	4	5	6	7	8	9	15									
246	2	3	4	5	6	8																	
250	2	3	4	6	12	13																	
231	2	3	5	6	8	9	375	1	3	4	5	6	8	9	10	11							
235	2	3	6	9	12	14	381	1	3	4	5	7	10	11	14	15							
215	2	4	5	6	8	9	367	1	3	5	6	7	8	9	10	14							
219	2	4	6	9	13	15	351	1	4	5	6	7	8	9	11	15							
207	2	5	6	7	8	9	254	2	3	4	5	6	7	8	12	13							
175	2	7	8	9	12	14	251	2	3	4	6	9	12	13	14	15							
159	2	7	8	9	13	15	239	2	3	5	6	7	8	9	12	14							
							223	2	4	5	6	7	8	9	13	15							

6 ярус							9 ярус																									
87	2	9	12	13	14	15	127	3	4	5	6	7	8	9	14	15																
126	3	4	5	6	7	8	10 ярус																									
119	3	4	5	6	8	9	510	1	2	3	4	5	6	7	8	12	13															
252	3	4	5	7	12	13	503	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11															
125	3	4	5	7	14	15	11 ярус																									
371	3	4	6	9	10	11	495	1	2	3	5	6	7	8	9	10	12	14														
123	3	4	6	9	14	15	479	1	2	4	5	6	7	8	9	11	13	15														
377	3	4	10	11	14	15	447	1	2	7	8	9	10	11	12	13	14	15														
249	3	4	12	13	14	15	509	1	3	4	5	7	10	11	12	13	14	15														
441	10	11	12	13	14	15	12 ярус																									
							383	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	14	15													
							255	2	3	4	5	6	7	8	9	12	13	14	15													
							15 ярус																									
							511	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15										

3. Побудова ребер решітки M_2^1/σ . Позначимо через $[U_i^k]_\sigma$ суміжний клас алгебри M_2^1/σ , який задається канонічною алгеброю U_i^k , яка знаходиться на k -ому ярусі фактор решітки. Знайдемо для $[U_i^k]_\sigma$ всі суміжні класи $[U_i^t]_\sigma$ такі, що $t < k$. Для $[U_i^t]_\sigma$ знаходимо множину суміжних класів $N[U_i^t]_\sigma$ таких, що $\forall [U_j^k]_\sigma \in N[U_i^t]_\sigma, U_j^k < U_i^t$. У множині $N[U_i^k]_\sigma$ знаходимо множину максимальних суміжних класів $[U_j^t]_\sigma$ і з'єднуємо з ребрами з $[U_i^k]_\sigma$. Рухаючись по ярусах знизу вгору і будуючи ребра нижніх суміжних класів, отримуємо решітку M_2^1/σ . Дані про базисну решітку класу M_2^1/σ приведені по ярусах у таблиці 3. Наприклад,

- 1) у таблиці 3 всі п'ятнадцять однобазисних канонічних алгебр знаходяться на першому ярусі, кожна з цих алгебр з'єднується ребром з алгеброю нульового ярусу;
- 2) у таблиці 3 перший стовпець містить номери канонічних двобазисних алгебр; у другому і третьому стовпчиках вказані номери базисів, які можна утворити з сигнатур відповідних алгебр, а у четвертому і п'ятому стовпчиках – суміжні алгебри нижніх ярусів і їх базиси. Наприклад, 324 алгебра з базисами (1,5) з'єднується ребрами з алгебрами 260 (1) та 68 (5), алгебра 390 (1,2,8) з'єднана ребрами з суміжними алгебрами 262 (1,8) і 134 (2,8), а 332 (1,5,7) з 324 (1,5), 268 (1,7), 76 (5,7).

Таблиця 3.

Розподіл суміжних класів по ярусах

2 ярус			3 ярус				4 ярус				
324	260 (1)	68 (5)	390	262 (1,8)	134 (2,8)		398	390 (1,2,8)	270 (1,7,8)	142 (2,7,8)	
268	260 (1)	12 (7)	356	324 (1,5)	100 (3,5)		391	390 (1,2,8)	263 (1,8,9)	135 (2,8,9)	
262	260 (1)	6 (8)	340	324 (1,5)	84 (4,5)		372	356 (1,3,5)	340 (1,4,5)	116 (3,4,5)	
293	260 (1)	289(10)	332	324 (1,5)	268 (1,7)	76 (5,7)	364	356 (1,3,5)	332 (1,5,7)	108 (3,5,7)	
277	260 (1)	273(11)	270	268 (1,7)	262 (1,8)	14 (7,8)	357	356 (1,3,5)	293 (1,10)	353 (3,10)	
194	130 (2)	66 (6)	428	268 (1,7)	172 (7,12)		348	340 (1,4,5)	332 (1,5,7)	92 (4,5,7)	
134	130 (2)	6 (8)	412	268 (1,7)	156 (7,13)		341	340 (1,4,5)	277 (1,11)	337 (4,11)	
131	130 (2)	3 (9)	263	262 (1,8)	7 (8,9)		326	70 (5,6,8)	324 (1,5)	262 (1,8)	
170	130 (2)	168(12)	309	293(1,10)	277 (1,11)	305(10,11)	271	270 (1,7,8)	263 (1,8,9)	15 (7,8,9)	
154	130 (2)	152(13)	226	194 (2,6)	98 (3,6)		301	268 (1,7)	293 (1,10)	45 (7,14)	297(10,14)
112	96 (3)	80 (4)	210	194 (2,6)	82 (4,6)		285	268 (1,7)	277 (1,11)	29 (7,15)	281(11,15)
100	96 (3)	68 (5)	195	194 (2,6)	131 (2,9)	67 (6,9)	444	428 (1,7,12)	412 (1,7,13)	188 (7,12,13)	
98	96 (3)	66 (6)	142	134 (2,8)	14 (7,8)		295	263 (1,8,9)	293 (1,10)	291 (9,10)	
353	96 (3)	289(10)	135	134 (2,8)	131 (2,9)	7 (8,9)	279	263 (1,8,9)	277 (1,11)	275 (9,11)	
232	96 (3)	168(12)	419	131 (2,9)	291 (9,10)		242	226 (2,3,6)	210 (2,4,6)	114 (3,4,6)	
105	96 (3)	41 (14)	403	131 (2,9)	275 (9,11)		227	226 (2,3,6)	195 (2,6,9)	99 (3,6,9)	

2 ярус			3 ярус				4 ярус				
84	80 (4)	68 (5)	186	170(2,12)	154 (2,13)	184(12,13)	234	226 (2,3,6)	170 (2,12)	232 (3,12)	
82	80 (4)	66 (6)	116	112 (3,4)	100 (3,5)	84 (4,5)	211	210 (2,4,6)	195 (2,6,9)	83 (4,6,9)	
337	80 (4)	273(11)	114	112 (3,4)	98 (3,6)	82 (4,6)	218	210 (2,4,6)	154 (2,13)	216 (4,13)	
216	80 (4)	152(13)	108	100 (3,5)	76 (5,7)		198	70 (5,6,8)	194 (2,6)	134 (2,8)	
89	80 (4)	25 (15)	99	98 (3,6)	67 (6,9)		143	142 (2,7,8)	135 (2,8,9)	15 (7,8,9)	
76	68 (5)	12 (7)	361	353(3,10)	105(3,14)	297(10,14)	174	142 (2,7,8)	170 (2,12)	172 (7,12)	
67	66 (6)	3 (9)	233	232(3,12)	105(3,14)	169(12,14)	158	142 (2,7,8)	154 (2,13)	156 (7,13)	
14	12 (7)	6 (8)	92	84 (4,5)	76 (5,7)		435	419 (2,9,10)	403 (2,9,11)	307 (9,10,11)	
172	12 (7)	168(12)	83	82 (4,6)	67 (6,9)		171	131 (2,9)	170 (2,12)	43 (9,14)	169(12,14)
156	12 (7)	152(13)	345	337(4,11)	89 (4,15)	281(11,15)	155	131 (2,9)	154 (2,13)	27 (9,15)	153(13,15)
45	12 (7)	41 (14)	217	216(4,13)	89 (4,15)	153(13,15)	124	116 (3,4,5)	108 (3,5,7)	92 (4,5,7)	
29	12 (7)	25 (15)	70	68 (5)	66 (6)	6 (8)	115	114 (3,4,6)	99 (3,6,9)	83 (4,6,9)	
7	6 (8)	3 (9)	15	14 (7,8)	7 (8,9)		369	112 (3,4)	353 (3,10)	337 (4,11)	305(10,11)
291	3 (9)	289(10)	188	172(7,12)	156(7,13)	184(12,13)	248	112 (3,4)	232 (3,12)	216 (4,13)	184(12,13)
275	3 (9)	273(11)	173	172(7,12)	45 (7,14)	169(12,14)	121	112 (3,4)	105 (3,14)	89 (4,15)	57 (14,15)
43	3 (9)	41 (14)	157	156(7,13)	29 (7,15)	153(13,15)	102	70 (5,6,8)	100 (3,5)	98 (3,6)	
27	3 (9)	25 (15)	61	45 (7,14)	29 (7,15)	57 (14,15)	236	108 (3,5,7)	232 (3,12)	172 (7,12)	
305	289(10)	273(11)	307	291(9,10)	275(9,11)	305(10,11)	109	108 (3,5,7)	105 (3,14)	45 (7,14)	
297	289(10)	41 (14)	299	291(9,10)	43 (9,14)	297(10,14)	355	99 (3,6,9)	353 (3,10)	291 (9,10)	
281	273(11)	25 (15)	283	275(9,11)	27 (9,15)	281(11,15)	107	99 (3,6,9)	105 (3,14)	43 (9,14)	
184	168(12)	152(13)	59	43 (9,14)	27 (9,15)	57 (14,15)	489	361(3,10,14)	233 (3,12,14)	425(10,12,14)	
169	168(12)	41 (14)	425	297(10,14)	169(12,14)		86	70 (5,6,8)	84 (4,5)	82 (4,6)	
153	152(13)	25 (15)	409	281(11,15)	153(13,15)		220	92 (4,5,7)	216 (4,13)	156 (7,13)	
57	41 (14)	25 (15)					93	92 (4,5,7)	89 (4,15)	29 (7,15)	
							339	83 (4,6,9)	337 (4,11)	275 (9,11)	
							91	83 (4,6,9)	89 (4,15)	27 (9,15)	
							473	345(4,11,15)	217 (4,13,15)	409(11,13,15)	
							78	70 (5,6,8)	76 (5,7)	14 (7,8)	
							71	70 (5,6,8)	67 (6,9)	7 (8,9)	
							47	15 (7,8,9)	45 (7,14)	43 (9,14)	
							31	15 (7,8,9)	29 (7,15)	27 (9,15)	
							313	305 (10,11)	297 (10,14)	281 (11,15)	57 (14,15)
							185	184 (12,13)	169 (12,14)	153 (13,15)	57 (14,15)
							398	390 (1,2,8)	270 (1,7,8)	142 (2,7,8)	
5 ярус											
454	326 (1,5,6,8)		198 (2,5,6,8)		390 (1,2,8)						
399	398 (1,2,7,8)		391 (1,2,8,9)		271 (1,7,8,9)		143 (2,7,8,9)				
430	398 (1,2,7,8)		174 (2,7,8,12)		428 (1,7,12)						
414	398 (1,2,7,8)		158 (2,7,8,13)		412 (1,7,13)						
423	391 (1,2,8,9)		295 (1,8,9,10)		419 (2,9,10)						
407	391 (1,2,8,9)		279 (1,8,9,11)		403 (2,9,11)						
380	372 (1,3,4,5)		364 (1,3,5,7)		348 (1,4,5,7)		124 (3,4,5,7)				
358	326 (1,5,6,8)		102 (3,5,6,8)		356 (1,3,5)						
492	364 (1,3,5,7)		236 (3,5,7,12)		428 (1,7,12)						
342	326 (1,5,6,8)		86 (4,5,6,8)		340 (1,4,5)						
476	348 (1,4,5,7)		220 (4,5,7,13)		412 (1,7,13)						
334	326 (1,5,6,8)		78 (5,6,7,8)		332 (1,5,7)		270 (1,7,8)				
327	326 (1,5,6,8)		71 (5,6,8,9)		263 (1,8,9)						

5 ярус					
429	301 (1,7,10,14)	428 (1,7,12)	173 (7,12,14)	425 (10,12,14)	
413	285 (1,7,11,15)	412 (1,7,13)	157 (7,13,15)	409 (11,13,15)	
311	295 (1,8,9,10)	279 (1,8,9,11)	309 (1,10,11)	307 (9,10,11)	
243	242 (2,3,4,6)	227 (2,3,6,9)	211 (2,4,6,9)	115 (3,4,6,9)	
230	198 (2,5,6,8)	102 (3,5,6,8)	226 (2,3,6)		
483	227 (2,3,6,9)	355 (3,6,9,10)	419 (2,9,10)		
214	198 (2,5,6,8)	86 (4,5,6,8)	210 (2,4,6)		
467	211 (2,4,6,9)	339 (4,6,9,11)	403 (2,9,11)		
206	198 (2,5,6,8)	78 (5,6,7,8)	142 (2,7,8)		
199	198 (2,5,6,8)	71 (5,6,8,9)	195 (2,6,9)	135 (2,8,9)	
190	174 (2,7,8,12)	158 (2,7,8,13)	186 (2,12,13)	188 (7,12,13)	
427	171 (2,9,12,14)	419 (2,9,10)	299 (9,10,14)	425 (10,12,14)	
411	155 (2,9,13,15)	403 (2,9,11)	283 (9,11,15)	409 (11,13,15)	
118	102 (3,5,6,8)	86 (4,5,6,8)	116 (3,4,5)	114 (3,4,6)	
110	102 (3,5,6,8)	78 (5,6,7,8)	108 (3,5,7)		
103	102 (3,5,6,8)	71 (5,6,8,9)	99 (3,6,9)		
237	236 (3,5,7,12)	109 (3,5,7,14)	233 (3,12,14)	173 (7,12,14)	
363	355 (3,6,9,10)	107 (3,6,9,14)	361 (3,10,14)	299 (9,10,14)	
94	86 (4,5,6,8)	78 (5,6,7,8)	92 (4,5,7)		
87	86 (4,5,6,8)	71 (5,6,8,9)	83 (4,6,9)		
221	220 (4,5,7,13)	93 (4,5,7,15)	217 (4,13,15)	157 (7,13,15)	
347	339 (4,6,9,11)	91 (4,6,9,15)	345 (4,11,15)	283 (9,11,15)	
79	78 (5,6,7,8)	71 (5,6,8,9)	15 (7,8,9)		
63	47 (7,8,9,14)	31 (7,8,9,15)	61 (7,14,15)	59 (9,14,15)	
189	185 (12,13,14,15)	188 (7,12,13)	173 (7,12,14)	157 (7,13,15)	61 (7,14,15)
315	313 (10,11,14,15)	307 (9,10,11)	299 (9,10,14)	283 (9,11,15)	59 (9,14,15)
6 ярус					
486	454(1,2,5,6,8)	358 (1,3,5,6,8)	230 (2,3,5,6,8)		
470	454 (1,2,5,6,8)	342 (1,4,5,6,8)	214 (2,4,5,6,8)		
462	454 (1,2,5,6,8)	334 (1,5,6,7,8)	206 (2,5,6,7,8)	398 (1,2,7,8)	
455	454 (1,2,5,6,8)	327 (1,5,6,8,9)	199 (2,5,6,8,9)	391 (1,2,8,9)	
446	430(1,2,7,8,12)	414 (1,2,7,8,13)	190 (2,7,8,12,13)	444 (1,7,12,13)	
439	423(1,2,8,9,10)	407 (1,2,8,9,11)	311 (1,8,9,10,11)	435 (2,9,10,11)	
374	358(1,3,5,6,8)	342 (1,4,5,6,8)	118 (3,4,5,6,8)	372 (1,3,4,5)	
373	372 (1,3,4,5)	357 (1,3,5,10)	341 (1,4,5,11)	369 (3,4,10,11)	309 (1,10,11)
366	358 (1,3,5,6,8)	334 (1,5,6,7,8)	110 (3,5,6,7,8)	364 (1,3,5,7)	
365	364 (1,3,5,7)	357 (1,3,5,10)	301(1,7,10,14)	109 (3,5,7,14)	361 (3,10,14)
350	342 (1,4,5,6,8)	334 (1,5,6,7,8)	94 (4,5,6,7,8)	348 (1,4,5,7)	
349	348 (1,4,5,7)	341 (1,4,5,11)	285(1,7,11,15)	93 (4,5,7,15)	345 (4,11,15)
335	334 (1,5,6,7,8)	327 (1,5,6,8,9)	79 (5,6,7,8,9)	271 (1,7,8,9)	
303	271 (1,7,8,9)	301 (1,7,10,14)	295 (1,8,9,10)	47 (7,8,9,14)	299 (9,10,14)
287	271 (1,7,8,9)	285 (1,7,11,15)	279 (1,8,9,11)	31 (7,8,9,15)	283 (9,11,15)
317	301(1,7,10,14)	285 (1,7,11,15)	313 (10,11,14,15)	309 (1,10,11)	61 (7,14,15)
246	230 (2,3,5,6,8)	214 (2,4,5,6,8)	118 (3,4,5,6,8)	242 (2,3,4,6)	
250	242 (2,3,4,6)	234 (2,3,6,12)	218 (2,4,6,13)	248 (3,4,12,13)	186 (2,12,13)
231	230 (2,3,5,6,8)	199 (2,5,6,8,9)	103 (3,5,6,8,9)	227 (2,3,6,9)	
235	227 (2,3,6,9)	234 (2,3,6,12)	171(2,9,12,14)	107 (3,6,9,14)	233 (3,12,14)

6 ярус					
215	214 (2,4,5,6,8)	199 (2,5,6,8,9)	87 (4,5,6,8,9)	211 (2,4,6,9)	
219	211 (2,4,6,9)	218 (2,4,6,13)	155(2,9,13,15)	91 (4,6,9,15)	217 (4,13,15)
207	206 (2,5,6,7,8)	199 (2,5,6,8,9)	79 (5,6,7,8,9)	143 (2,7,8,9)	
175	143 (2,7,8,9)	174 (2,7,8,12)	171(2,9,12,14)	47 (7,8,9,14)	173 (7,12,14)
159	143 (2,7,8,9)	158 (2,7,8,13)	155(2,9,13,15)	31 (7,8,9,15)	157 (7,13,15)
187	171(2,9,12,14)	155 (2,9,13,15)	185(12,13,14,15)	186 (2,12,13)	59 (9,14,15)
126	118 (3,4,5,6,8)	110 (3,5,6,7,8)	94 (4,5,6,7,8)	124 (3,4,5,7)	
119	118 (3,4,5,6,8)	103 (3,5,6,8,9)	87 (4,5,6,8,9)	115 (3,4,6,9)	
252	124 (3,4,5,7)	248 (3,4,12,13)	236 (3,5,7,12)	220 (4,5,7,13)	188 (7,12,13)
125	124 (3,4,5,7)	121 (3,4,14,15)	109 (3,5,7,14)	93 (4,5,7,15)	61 (7,14,15)
371	115 (3,4,6,9)	369(3,4,10,11)	355 (3,6,9,10)	339 (4,6,9,11)	307 (9,10,11)
123	115 (3,4,6,9)	121 (3,4,14,15)	107 (3,6,9,14)	91 (4,6,9,15)	59 (9,14,15)
377	369(3,4,10,11)	121 (3,4,14,15)	313 (10,11,14,15)	361 (3,10,14)	345 (4,11,15)
249	248(3,4,12,13)	121 (3,4,14,15)	185(12,13,14,15)	233 (3,12,14)	217 (4,13,15)
441	313(10,11,14,15)	185 (12,13,14,15)	425 (10,12,14)	409 (11,13,15)	

Шостий ярус базисної решітки складається з 35 суміжних класів. Суміжні класи 486 і 470 мають по три нижніх ребра, які з'єднуються з суміжними класами п'ятого ярусу, а суміжні класи 462, 455, 446, 439, 374 мають по чотири нижніх ребра, три з яких з'єднані суміжними класами п'ятого ярусу, а одне ребро з суміжним класом четвертого ярусу. Суміжний клас 373 має п'ять нижніх ребер, чотири з яких з'єднують суміжні класи четвертого ярусу і один – третього ярусу. Суміжні класи 377, 249 мають по п'ять нижніх ребер, три з яких з'єднані суміжними класами четвертого ярусу, два – третього. Суміжний клас 444 має чотири нижніх ребра, два з'єднуються суміжними класами четвертого ярусу, а два – третього.

На дванадцятому ярусі суміжні класи 375, 255 мають одні з найдовших ребер, які з'єднують їх суміжними класами з шостого по дванадцятий ярус.

Таблиця 3.

Продовження

7 ярус						
502	486 (1,2,3,5,6,8)	470 (1,2,4,5,6,8)	374 (1,3,4,5,6,8)	246 (2,3,4,5,6,8)		
463	462 (1,2,5,6,7,8)	455 (1,2,5,6,8,9)	335 (1,5,6,7,8,9)	207 (2,5,6,7,8,9)	399 (1,2,7,8,9)	
382	374 (1,3,4,5,6,8)	366 (1,3,5,6,7,8)	350 (1,4,5,6,7,8)	126 (3,4,5,6,7,8)	380 (1,3,4,5,7)	
508	252 (3,4,5,7,12,13)	380 (1,3,4,5,7)	492 (1,3,5,7,12)	476 (1,4,5,7,13)	444 (1,7,12,13)	
359	358 (1,3,5,6,8)	327 (1,5,6,8,9)	103 (3,5,6,8,9)	357 (1,3,5,10)	295 (1,8,9,10)	355 (3,6,9,10)
493	365 (1,3,5,7,10,14)	492 (1,3,5,7,12)	429 (1,7,10,12,14)	237 (3,5,7,12,14)	489 (3,10,12,14)	
343	342 (1,4,5,6,8)	327 (1,5,6,8,9)	87 (4,5,6,8,9)	341 (1,4,5,11)	279 (1,8,9,11)	339 (4,6,9,11)
477	349 (1,4,5,7,11,15)	476 (1,4,5,7,13)	413 (1,7,11,13,15)	221 (4,5,7,13,15)	473 (4,11,13,15)	

7 ярус						
247	246 (2,3,4,5,6,8)	231 (2,3,5,6,8,9)	215 (2,4,5,6,8,9)	119 (3,4,5,6,8,9)	243 (2,3,4,6,9)	
499	371 (3,4,6,9,10,11)	243 (2,3,4,6,9)	483 (2,3,6,9,10)	467 (2,4,6,9,11)	435 (2,9,10,11)	
238	230 (2,3,5,6,8)	206 (2,5,6,7,8)	110 (3,5,6,7,8)	234 (2,3,6,12)	174 (2,7,8,12)	236 (3,5,7,12)
491	235 (2,3,6,9,12,14)	483 (2,3,6,9,10)	427 (2,9,10,12,14)	363 (3,6,9,10,14)	489 (3,10,12,14)	
222	214 (2,4,5,6,8)	206 (2,5,6,7,8)	94 (4,5,6,7,8)	218 (2,4,6,13)	158 (2,7,8,13)	220 (4,5,7,13)
475	219 (2,4,6,9,13,15)	467 (2,4,6,9,11)	411 (2,9,11,13,15)	347 (4,6,9,11,15)	473 (4,11,13,15)	
111	110 (3,5,6,7,8)	103 (3,5,6,8,9)	79 (5,6,7,8,9)	109 (3,5,7,14)	107 (3,6,9,14)	47 (7,8,9,14)
8 ярус						
494	238 (2,3,5,6,7,8,12)	486 (1,2,3,5,6,8)	462 (1,2,5,6,7,8)	366 (1,3,5,6,7,8)	430 (1,2,7,8,12)	492 (1,3,5,7,12)
487	359 (1,3,5,6,8,9,10)	486 (1,2,3,5,6,8)	455 (1,2,5,6,8,9)	231 (2,3,5,6,8,9)	423 (1,2,8,9,10)	483 (2,3,6,9,10)
478	222 (2,4,5,6,7,8,13)	470 (1,2,4,5,6,8)	462 (1,2,5,6,7,8)	350 (1,4,5,6,7,8)	414 (1,2,7,8,13)	476 (1,4,5,7,13)
471	343 (1,4,5,6,8,9,11)	470 (1,2,4,5,6,8)	455 (1,2,5,6,8,9)	215 (2,4,5,6,8,9)	407 (1,2,8,9,11)	467 (2,4,6,9,11)
431	303 (1,7,8,9,10,14)	175 (2,7,8,9,12,14)	399 (1,2,7,8,9)	430 (1,2,7,8,12)	423 (1,2,8,9,10)	429 (1,7,10,12,14)
415	287 (1,7,8,9,11,15)	159 (2,7,8,9,13,15)	399 (1,2,7,8,9)	414 (1,2,7,8,13)	407 (1,2,8,9,11)	413 (1,7,11,13,15)
319	303 (1,7,8,9,10,14)	287 (1,7,8,9,11,15)	317 (1,7,10,11,14,15)	311 (1,8,9,10,11)	63 (7,8,9,14,15)	315 (9,10,11,14,15)
445	317 (1,7,10,11,14,15)	441 (10,11,12,13,14,15)	429 (1,7,10,12,14)	413 (1,7,11,13,15)	189 (7,12,13,14,15)	444 (1,7,12,13)
191	175 (2,7,8,9,12,14)	159 (2,7,8,9,13,15)	187 (2,9,12,13,14,15)	190 (2,7,8,12,13)	63 (7,8,9,14,15)	189 (7,12,13,14,15)
443	187 (2,9,12,13,14,15)	441 (10,11,12,13,14,15)	427 (2,9,10,12,14)	411 (2,9,11,13,15)	315 (9,10,11,14,15)	435 (2,9,10,11)
253	252 (3,4,5,7,12,13)	125 (3,4,5,7,14,15)	249 (3,4,12,13,14,15)	237 (3,5,7,12,14)	221 (4,5,7,13,15)	189 (7,12,13,14,15)
379	371 (3,4,6,9,10,11)	123 (3,4,6,9,14,15)	377 (3,4,10,11,14,15)	363 (3,6,9,10,14)	347 (4,6,9,11,15)	315 (9,10,11,14,15)
505	377 (3,4,10,11,14,15)	249 (3,4,12,13,14,15)	441 (10,11,12,13,14,15)	489 (3,10,12,14)	473 (4,11,13,15)	
9 ярус						
375	359 (1,3,5,6,8,9,10)	343 (1,4,5,6,8,9,11)	374 (1,3,4,5,6,8)	373 (1,3,4,5,10,11)	119 (3,4,5,6,8,9)	371 (3,4,6,9,10,11)
381	373 (1,3,4,5,10,11)	365 (1,3,5,7,10,14)	349 (1,4,5,7,11,15)	317 (1,7,10,11,14,15)	125 (3,4,5,7,14,15)	377 (3,4,10,11,14,15)
367	359 (1,3,5,6,8,9,10)	111 (3,5,6,7,8,9,14)	366 (1,3,5,6,7,8)	365 (1,3,5,7,10,14)	335 (1,5,6,7,8,9)	303 (1,7,8,9,10,14)
351	343 (1,4,5,6,8,9,11)	95 (4,5,6,7,8,9,15)	350 (1,4,5,6,7,8)	349 (1,4,5,7,11,15)	335 (1,5,6,7,8,9)	287 (1,7,8,9,11,15)
254	238 (2,3,5,6,7,8,12)	222 (2,4,5,6,7,8,13)	246 (2,3,4,5,6,8)	250 (2,3,4,6,12,13)	126 (3,4,5,6,7,8)	252 (3,4,5,7,12,13)
251	250 (2,3,4,6,12,13)	235 (2,3,6,9,12,14)	219 (2,4,6,9,13,15)	187 (2,9,12,13,14,15)	123 (3,4,6,9,14,15)	249 (3,4,12,13,14,15)
239	238 (2,3,5,6,7,8,12)	111 (3,5,6,7,8,9,14)	231 (2,3,5,6,8,9)	235 (2,3,6,9,12,14)	207 (2,5,6,7,8,9)	175 (2,7,8,9,12,14)
223	222 (2,4,5,6,7,8,13)	95 (4,5,6,7,8,9,15)	215 (2,4,5,6,8,9)	219 (2,4,6,9,13,15)	207 (2,5,6,7,8,9)	159 (2,7,8,9,13,15)
127	111 (3,5,6,7,8,9,14)	95 (4,5,6,7,8,9,15)	126 (3,4,5,6,7,8)	119 (3,4,5,6,8,9)	125 (3,4,5,7,14,15)	123 (3,4,6,9,14,15)
10 ярус						
503	375 (1,3,4,5,6,8,9,10,11)	487 (1,2,3,5,6,8,9,10)	471 (1,2,4,5,6,8,9,11)	502 (1,2,3,4,5,6,8)	247 (2,3,4,5,6,8,9)	499 (2,3,4,6,9,10,11)
510	254 (2,3,4,5,6,7,8,12,13)	494 (1,2,3,5,6,7,8,12)	478 (1,2,4,5,6,7,8,13)	502 (1,2,3,4,5,6,8)	382 (1,3,4,5,6,7,8)	508 (1,3,4,5,7,12,13)

11 ярус									
495	367 (1,3,5,6,7, 8,9,10,14)	239 (2,3,5,6,7,8, 9,12,14)	494 (1,2,3,5,6,7, 8,12)	487 (1,2,3,5,6,8, 9,10)	431 (1,2,7,8,9, 10,12,14)	463 (1,2,5,6,7,8,9)	493 (1,3,5,7,10, 12,14)	491 (2,3,6,9,10, 12,14)	
479	351 (1,4,5,6,7, 8,9,11,15)	223 (2,4,5,6,7,8, 9,13,15)	478 (1,2,4,5,6,7, 8,13)	471 (1,2,4,5,6,8, 9,11)	415 (1,2,7,8,9, 11,13,15)	463 (1,2,5,6,7,8,9)	477 (1,4,5,7,11, 13,15)	475 (2,4,6,9,11, 13,15)	
447	431 (1,2,7,8,9, 10,12,14)	415 (1,2,7,8,9,11, 13,15)	319 (1,7,8,9,10, 11,14,15)	445 (1,7,10,11, 12,13,14,15)	191 (2,7,8,9,12, 13,14,15)	443 (2,9,10,11,12, 13,14,15)	446 (1,2,7,8,12,13)	439 (1,2,8,9,10,11)	
509	381 (1,3,4,5,7, 10,11,14,15)	445 (1,7,10,11, 12,13,14,15)	253 (3,4,5,7,12, 13,14,15)	505 (3,4,10,11, 12,13,14,15)	508 (1,3,4,5,7, 12,13)	493 (1,3,5,7,10, 12,14)	477 (1,4,5,7,11, 13,15)		
12 ярус									
383	375(1,3,4,5, 6,8,9,10,11)	381 (1,3,4,5,7, 10,11,14,15)	367 (1,3,5,6,7,8, 9,10,14)	351 (1,4,5,6,7,8, 9,11,15)	127 (3,4,5,6,7,8, 9,14,15)	319 (1,7,8,9,10, 11,14,15)	379 (3,4,6,9, 10,11,14,15)	382 (1,3,4,5,6,7,8)	
255	254 (2,3,4,5,6,7, 8,12,13)	251 (2,3,4,6,9, 12,13,14,15)	239 (2,3,5,6,7,8, 9,12,14)	223 (2,4,5,6,7,8, 9,13,15)	127 (3,4,5,6,7,8, 9,14,15)	191 (2,7,8,9,12, 13,14,15)	253 (3,4,5,7,12, 13,14,15)	247 (2,3,4,5,6,8,9)	
15 ярус									
511	383 (1,3,4,5, 6,7,8,9, 10,11,14,15)	255 (2,3,4,5, 6,7,8,9, 12,13,14,15)	495 (1,2,3,5, 6,7,8,9, 10,12,14)	479 (1,2,4,5, 6,7,8,9, 11,13,15)	447 (1,2,7,8, 9,10,11,12, 13,14,15)	509 (1,3,4,5, 7,10,11,12, 13,14,15)	507 (2,3,4,6, 9,10,11,12, 13,14,15)	510 (1,2,3,4, 5,6,7,8, 12,13)	503 (1,2,3,4, 5,6,8,9, 10,11)

П'ятнадцятий ярус базисної решітки складається з 511-го суміжного класу, який має дев'ять нижніх ребер: два ребра з'єднують цей клас з суміжними класами 383 і 255, які знаходяться на дванадцятому ярусі; п'ять ребер з'єднуються з суміжними класами 495, 479, 447, 509, які належать одинадцятому ярусу, а два ребра з'єднуються з суміжними класами 510, 503 десятого ярусу.

Використовуючи таблиці 2, 3, побудуємо базисну решітку класу M_2/σ , яка є фактор решіткою сигнатурної решітки цього класу. Ця решітка наведена на рис. 3.

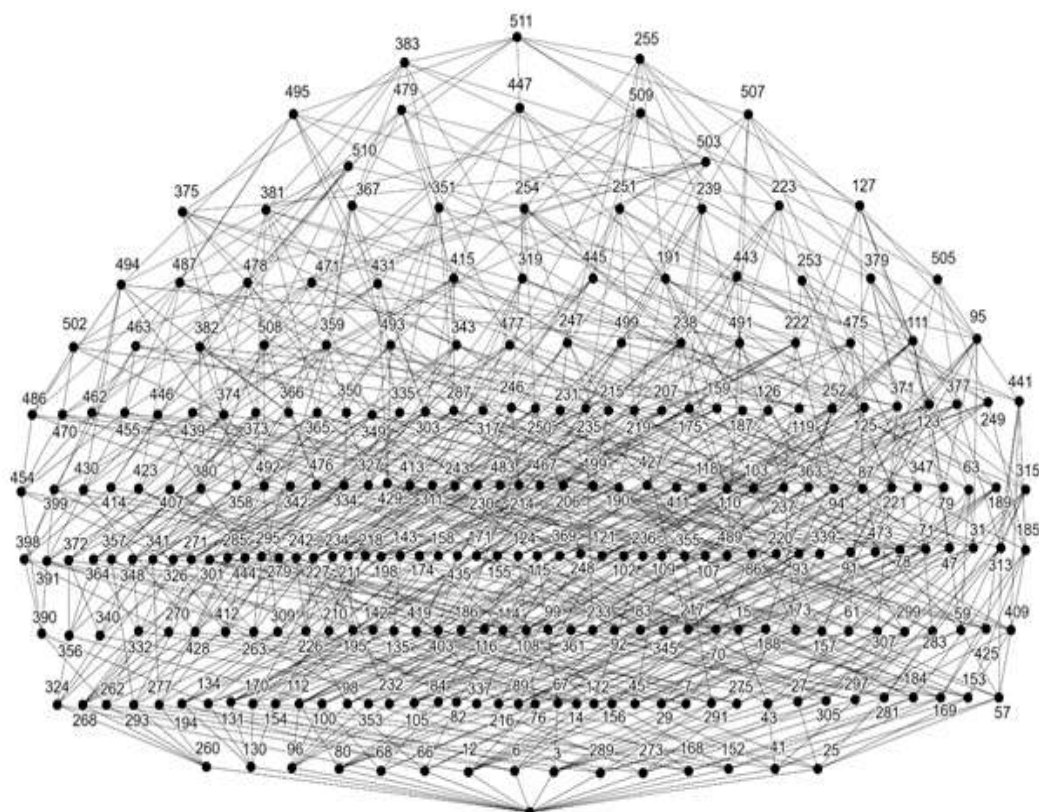


Рис. 3. Базисна решітка фактор-класу M_2/σ .

4. Висновок. У роботі наводиться повне описання всіх суміжних класів. Для побудови фактор-решітки класу M_2/σ були використані програмні результати, які наведені у таблицях 2, 3.

Список використаної літератури

1. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Дослідження сигнатурного кубу універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 2(37), С. 157–167. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).157-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).157-167).
2. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Структура сигнатурного кубу булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 1(38), С. 149–156. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).149-156](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156)
3. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Базисна еквівалентність у класі універсальних булевих алгебр. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 2(39), С. 152–157. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).152-157](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).152-157)

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Dynys V. S. Algorithm construction of basic grating M_2 of class of Boolean algebra.

In this paper, the investigation of the basic grating of the algebra class M_2 has been continued. The basic gratings of a class M_2 can be constructed from the signature lattice of this class, and basic gratings are the factor lattice of the corresponding signature gratings. This paper presents an algorithm for constructing a basic lattice (factor lattice) of a class of algebras M_2 and provides complete information about the basic grating in the form of tables that indicate the location of adjacent classes and the edges that connect them.

Keywords: Boolean Algebra, factor-grating, Basic Equivalence.

References

1. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Investigation of signature cube of universal boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 157–167. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86). [in Ukrainian].
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2020). Structure of signature cube of Boolean algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(38), 149–156. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).149-156](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).149-156) [in Ukrainian].
3. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2021). Basic equivalence in class universal boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(39), 152–157. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).152-157](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).152-157) [in Ukrainian].

Одержано 15.04.2022

УДК 621.396

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).205-219](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).205-219)**С. В. Сальник**

Інститут спеціального зв'язку та захисту інформації Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",

Провідний науковий співробітник науково-організаційного відділу науково-дослідного центру,

Кандидат технічних наук

sergey-v-s@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4463-5705>

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ МЕТОДІВ УПРАВЛІННЯ ПОТОКАМИ ДАНИХ В МОБІЛЬНИХ РАДІОМЕРЕЖАХ НА ОСНОВІ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

В роботі проведена оцінка ефективності функціонування методів управління потоками даних в мобільних радіомережах на основі нейронних мереж яка оснований на моделюванні мобільних радіомереж з урахуванням функціонування підсистеми управління потоками даних з використанням мови програмування Python, відкритої програмної бібліотеки TensorFlow та модулів-сигнатур KEGG MODULE. Зокрема проведено: оцінку ідентифікації параметрів трафіка в мобільних радіомереж, оцінку навчання бази знань підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомереж для методу оцінки навчання бази знань, оцінку прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних в мобільних радіомереж для методів прогнозування, оцінку побудови та підтримки маршрутів передачі даних в мобільних радіомереж для методів побудови та підтримки маршрутів передачі даних, оцінку процесу моніторингу стану функціонування підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомереж для методів оцінки процесу моніторингу стану функціонування підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомереж. Відповідно зазначеного було зафіксовано підвищення точності ідентифікації параметрів даних, зменшення часу навчання бази даних, зменшення часу прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у мобільних радіомережах, збільшення часу існування маршрутів передачі даних, збільшення пропускну здатності інформаційного напрямку, зменшення часу прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомереж, збільшення точності прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомереж за рахунок застосування інтелектуалізації процесів прийняття рішень на основі використання нейронних мереж. Проведено оцінку рівня адекватності запропонованої моделі та економічна оцінка, яка показала прибутковий рівень економічної ефективності.

Ключові слова: мобільна радіомережа, управління потоками даних, оцінка ефективності функціонування, інтелектуалізація процесів прийняття рішень, нейронна мережа.

1. Вступ. Постановка проблеми. Проведений аналіз предметної області показує, що процес порушення функціонування процесу управління потоками даних (УПД) є відповідно характеристикою рівня функціонування мобільних радіомережах на основі нейронних мереж із заданою якістю обслуговування, а будь яке порушення функціонування УПД несе у собі загрозу здійснення впливу на інформаційну, програмну, апаратну складові МР, елементи мережі або мережу в цілому. Враховуючи особливості побудови мобільних радіомереж (МР),

УПД потребує багаторівневої структури управління направленої на підтримання заданої якості обслуговування МР [1,2]. Однак основна частина запропонованих на сьогодні рішень щодо оцінки рівня ефективності функціонування УПД в МР не надають числових методів визначення рівня функціонування системи. Оцінка таких показників, зазвичай, дається відповідними експертами. Також, слід зазначити, що в переважній більшості розробка підходів щодо оцінки ефективності здійснюється для систем, які не враховують характеристичних особливостей МР, тобто прослідковується обмеженість саме таких підходів. Тому, доцільно адаптувати нині існуючі підходи оцінки ефективності для проведення оцінки розроблених методів та методики з урахуванням особливостей МР.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існуючі УПД показують, що їх побудова ґрунтується на застосуванні інформаційних, програмних та апаратних засобів, які функціонують в комп'ютерних, проводових, стаціонарних мережах та мобільних радіомережах. Тому, для оцінювання ефективності функціонування УПД в МР необхідно використовувати стандарти оцінки характеристик їх якості. Головним завданням стандартів які регламентують питання управління потоками даних є узгодженість позицій та запитів щодо порядку функціонування продуктів інформаційних технологій. У якості загальних показників стандартів можливо назвати такі, як: універсальність, гнучкість, гарантованість, реалізація, актуальність, простота критеріїв, однозначність параметрів вибору функціонування системи. До відомих стандартів в даній області відносяться: ISO/IEC 7498-4; ISO 10164-16.2; ISO/IEC 10737-1; ISO/IEC 10733; ISO/IEC 20000:2005; ISO/IEC 38500; ISO / IEC 23988: 2007; TANAG 4024 та 4246, Диаграмма потоков данных; Спецификация IEEE 802 та інші [3,4].

Виходячи із вимог стандартів, ефективність функціонування УПД залежить від множини взаємопов'язаних між собою критеріїв: адекватності, точності та швидкості прийняття управлінських рішень, функціональності, захищеності, надійності, стійкості до відмов, здатності до відновлення, продуктивності, часової адаптованості та інших. Однак на сьогодні не існує універсального підходу до визначення критеріїв оцінки якості функціонування УПД, а в основі визначення критеріїв знаходиться множина цілей, які повинна виконувати УПД [5,6].

Розглядаючи питання проведення оцінки ефективності УПД в МР, методика оцінки повинна враховувати особливості МР та забезпечити проведення окремої оцінки ефективності роботи методів УПД; отримання порівняльних графіків оцінки УПД. Виходячи з зазначеного та проведеного огляду методів оцінки ефективності, з урахуванням огляду проведення оцінок ефективності розробляємих методів [7,8].

Метою статі є проведення оцінки ефективності функціонування розроблених методів управління потоками даних в мобільних радіомережах на основі нейронних мереж, для оцінювання рівня функціонування УПД в МР.

Об'єктом розгляду статті є процес забезпечення якості передачі інформації в МР.

Предметом дослідження є методи функціонування УПД в МР.

2. Виклад основного матеріалу. Вхідними даними оцінки ефективності є параметри зазначені в методах. Обмеження: повнота вибірки обмежена об'ємом бази даних з можливість самонавчання, точність прийняття управлінського рішення не може перевищувати 100%; швидкість прийняття управлін-

ського рішення повинне наближуватись до рівня режиму реального часу; час існування маршрутів передачі даних та пропускна спроможність інформаційного напрямку не повинна бути гіршою ніж у подібних методах [9,10].

Розглядаючи питання проведення оцінки ефективності УПД в МР, процес оцінки повинен враховувати особливості МР та забезпечити проведення: окремої оцінки ефективності роботи елементів УПД; розрахунків з урахуванням впливів типів даних на елементи мережі; отримання порівняльних графіків оцінки УПД.

В цілому виходячи з зазначеного та проведеного огляду методів оцінки ефективності [7,8], з урахуванням огляду проведення оцінок ефективності розробляємих методів, структурна схема нейронних мереж методів УПД та взаємозв'язок між ними зазначена на рис. 1.

Моделювання нейронних мереж методів УПД відбувається із застосуванням програмних пакетів та включає наступні процедури: побудова передаючої/приймальної частини МР з відповідної УПД, зв'язності між елементами МР, генерацію/розсилка/отримання повідомлень, побудова/наповнення/навчання бази знань, тощо; параметрами моделі є: спосіб розсилки повідомлень (періодичний або пов'язаний з подіями); частота генерації повідомлень; глибина розсилання повідомлень (кількість елементів УПД, вузлів); генерація повідомлення для відправки; зайняття і звільнення повідомленням вхідної (вихідної) черги вузла; відмова і відновлення каналу радіозв'язку; виникнення піку вхідного трафіка; нормалізація трафіка та ін.). Модель буде створено з використанням мови програмування Python, відкритої програмної бібліотеки для навчання та тренувати нейронних мереж TensorFlow, та модуля-сигнатур KEGG MODULE. Формалізування процесу оцінки ефективності методів виконано завдяки графічному моделюванню в графічних нотаціях. Функціональна модель являє собою набір блоків, кожен з яких представляється як "чорний ящик" з входами і виходами, управлінням та механізмами, що деталізуються до необхідного рівня [4].

В цілому процес моделювання управління потоками даних буде зведений до кроків:

- Отримання вхідних даних, трафіка на основі протоколів, методів управління;
- Розподіл вхідних даних – розподіл параметрів трафіка відповідно до функціональних особливостей окремих елементів моделі УПД;
- Моделювання функціонування окремих елементів моделі УПД в МР та їх зв'язності;
- Отримання вихідних значень (відповідного управлінського рішення) функціонування моделі УПД.

Контроль управління потоками даних здійснюється на основі спостереження за станом мережі з метою з'ясування рівня функціонування мережі, контролю функціонування УПД та проведення тестування елементів УПД. При розробці програмного модулю моделі очікується, що для розробленого програмного модуля час, який витрачається для контролю одного вузла складатиме приблизно 30 мілісекунд. Процес контролю виконується одночасно на кожному вузлі, тому час аналізу та контролю не залежить від кількості вузлів. З цього виходить, що кількість вузлів, які будуть контролюватися, не впливатимуть на продуктивність роботи розробленого модуля, а навантаження буде зростати виключно на

обчислювальну мережу [2,11].

Наступним етапом, є – отримання даних функціонування моделі, дослідження властивостей моделі та вирішення завдань пов'язаних з функціонуванням УПД.

Вхідними даними оцінки ефективності є параметри зазначені в методах.

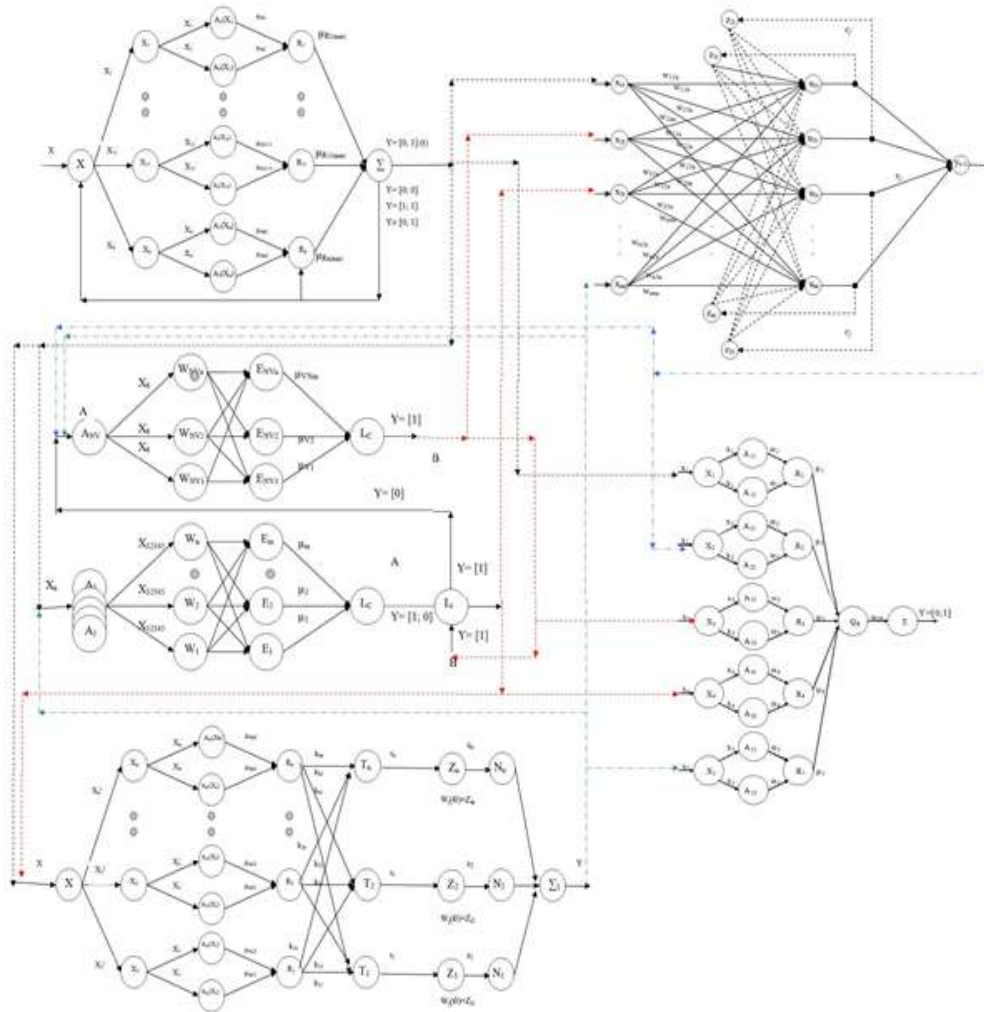


Рис. 1. Структурна схема нейронних мереж методів УПД та взаємозв'язок між ними

Обмеження: повнота вибірки обмежена об'ємом бази даних з можливість самонавчання, точність прийняття управлінського рішення не може перевищувати 100%; швидкість прийняття управлінського рішення повинне наближуватись до рівня режиму реального часу; час існування маршрутів передачі даних та пропускна спроможність інформаційного напрямку не повинна бути гіршою ніж у подібних методів.

Для рішення задачі, де необхідно одночасно враховувати множину критеріїв, приходимо до оптимального рішення, з наступною умовою. Нехай є множина допустимих рішень у деякому завданні – допустиме рішення. Допустимо, що кожне рішення оцінюється за критеріями. На сьогоднішній день є ефектив-

на конструкція для рішення подібних багатокритеріальних задач. Для цього, сформулюємо необхідну умову Парето – оптимальності Каруша-Куна-Такера:

Обмеження $g_i(l)$ у точці l^* називається активним, якщо $g_i(l^*) = 0$. Множину усіх активних обмежень $\{i \in 1, \dots, k \mid g_i(l^*) = 0\}$ позначимо $A(l^*)$.

Нехай виконується умова: множина векторів $\{\nabla g(l^*) \mid i \in A(l^*)\}$ лінійно незалежна. Якщо точка l^* є (локальною) Парето-оптимальною для задачі оптимізації, яка матиме загальний вигляд:

$$\min_{l \in R^n} f(l), \quad (1)$$

при обмеженнях $g(l) \leq 0$, де $l = (l_1, \dots, l_n)$ – вектор змінних; $f = (f_1, \dots, f_k)$ – цільова векторозначна функція; $g = (g_1, \dots, g_m)$ – векторозначна функція обмежень.

Точка l , яка задовольняє всі обмеження, є допустимою, а множина всіх допустимих точок матиме значення: $\Omega = \{l \mid g(l) \leq 0\}$.

З урахуванням декількох f компонентів, при застосуванні вказаних вище значень отримаємо значення багатокритеріальної оптимізації:

$$(f_1(l), \dots, f_k(l)) \rightarrow \min, \quad l \in \Omega \quad (2)$$

то існують вектори $\lambda \in R^k$ та $\mu \in R^m$ такі, що:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(l^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(l^*) = 0, \quad (3)$$

$$\mu_j g_j(l^*) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Якщо точка l^* є локальною Парето-оптимальною для значення багатокритеріальної оптимізації (4.24), то система 4.26, не матиме рішення.

$$(\nabla f_i(l^*))^T \nu < 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \nu \in T_\Omega(l) \quad (4)$$

де ν – вектор коефіцієнтів з бази розв'язків.

А точка, в якій виконані умови Парето – оптимальності (3) та (4) будуть критичними. Рішення $l^* \in L$ буде Парето-оптимальним (ефективним), якщо не існує іншого рішення $l \in L$, для якого $H_i(l) \geq H_i(l^*)$, $i = \overline{1, n}$, $\exists i_0 : H_{i_0}(l) > H_{i_0}(l^*)$ [8,10].

Показники ефективності методів УПД в МР. В ході проведення моделювання, було отримано наступні значення показників ефективності:

В цілому вказана на графіках оцінка ефективності функціонування УПД демонструє: підвищення точності прийняття управлінського рішення (ідентифікації параметрів даних, прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у МР, моніторингу стану функціонування МР; зменшення часу прийняття управлінського рішення (навчання бази даних даних, прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у МР, моніторингу стану функціонування МР); збільшення часу існування маршрутів передачі даних; збільшення пропускну здатності інформаційного напрямку для запропонованих методів УПД в порівнянні з існуючими або подібними методами, завдяки використанню розподілу множини різномірних параметрів, застосуванні

алгоритмів управління потоками даних з використанням нейронних мереж. В свою чергу з графіків видно, що при збільшенні кількості ітерацій функціонування, значення оціночних показників змінюється у бік покращення в наслідок застосування алгоритмів навчання.

1. Оцінка ідентифікації параметрів графіка в МР, для запропонованого методу та подібних методів ідентифікації [12] та [13] відповідно:

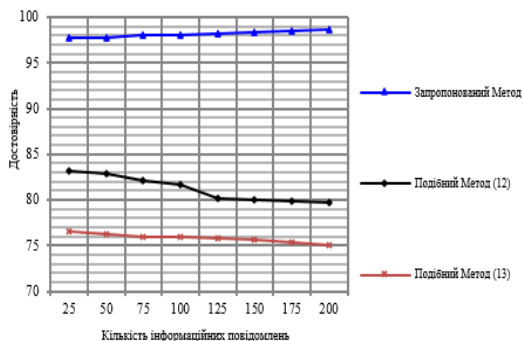


Рис. 2. Залежність достовірності прийняття управлінського рішення від кількості інформаційних повідомлень

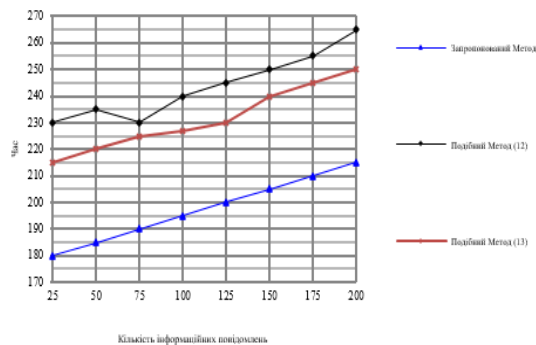


Рис. 3. Залежність часу прийняття управлінського рішення від кількості інформаційних повідомлень

2. Оцінка навчання бази знань УПД в МР для запропонованого методу та подібного методу [14] оцінки навчання бази знань:

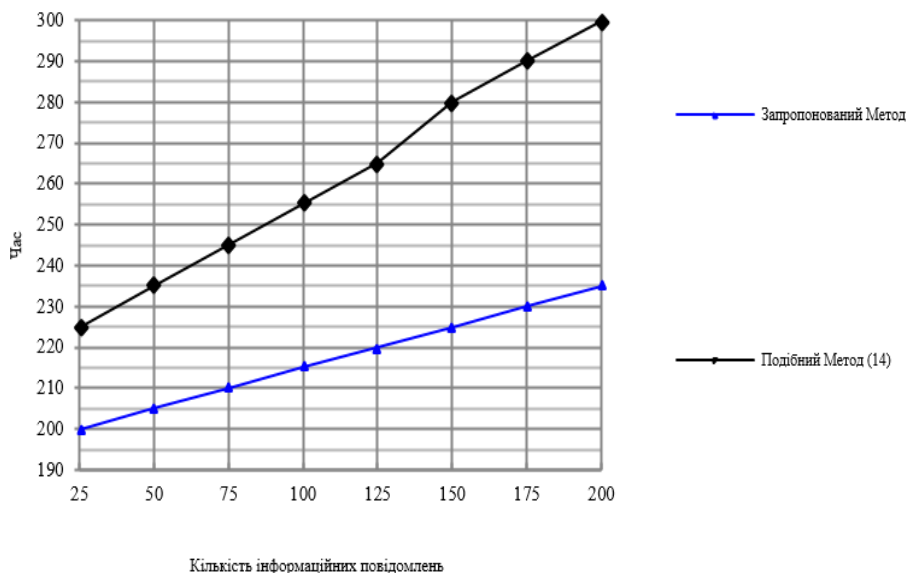


Рис. 4. Залежність часу навчання від кількості інформаційних повідомлень

3. Оцінка прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних в МР, для запропонованого методу та подібних методів прогнозування [15] та [16] відповідно:

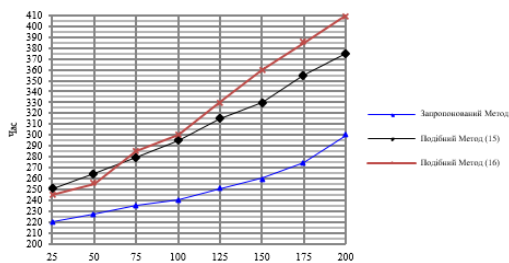


Рис. 5. Залежність часу прогнозування управлінського рішення від кількості інформаційних повідомлень

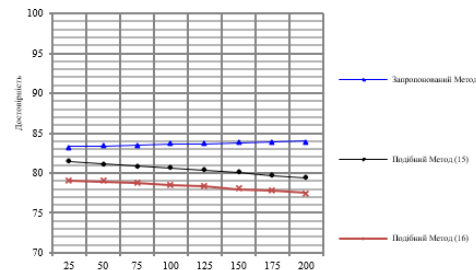


Рис. 6. Залежність достовірності прогнозування управлінського рішення від кількості інформаційних повідомлень

4. Оцінка побудови та підтримки маршрутів передачі даних в МР, для запропонованого метода та подібних методів побудови та підтримки маршрутів передачі даних [17] та [18] відповідно:

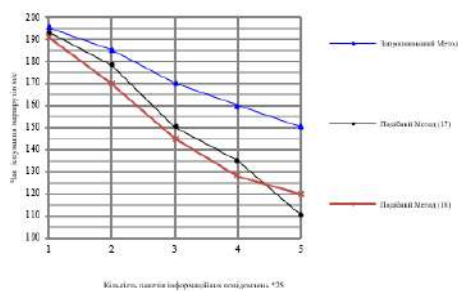


Рис. 7. Залежність часу існування маршрутів передачі даних від кількості пакетів інформаційних повідомлень

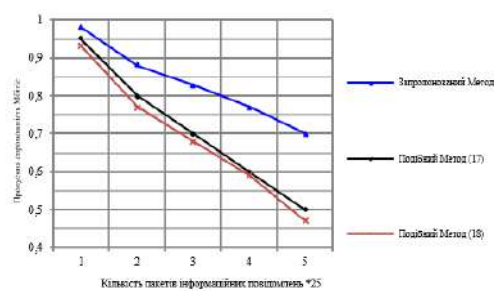


Рис. 8. Залежність пропускнуєї спроможності інформаційного напрямку від кількості пакетів інформаційних повідомлень

Значення оціночних показників удосконалених методів УПД мають вигравш у порівнянні з існуючими та подібними методами, а саме:

- підвищити точність ідентифікації параметрів даних на 18–23% при збереженні значення рівня часу прийняття управлінського рішення не вищого, ніж у існуючих методів, за рахунок використання алгоритмів самонавчання НМ (рис. 2 та 3);
- зменшити час навчання бази даних даних на 15–20% за рахунок використання алгоритму кластеризації даних на основі нечіткого виводу ANFIS (рис. 4);
- зменшити час прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у МР зменшується на 20–25% за умов що точність прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у МР не гірший ніж у подібних методів за рахунок застосування алгоритму навчання нейронної мережі та проведенні підрахунку потенціалу нейронів мережі (рис. 5 та 6);

5. Оцінка процесу моніторингу стану функціонування УПД в МР, для запропонованого метода та подібних методів оцінки процесу моніторингу стану функціонування УПД в МР [19] та [20] відповідно:

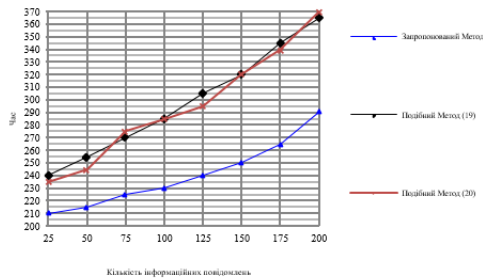


Рис. 9. Залежність часу прийняття управлінського рішення щодо моніторингу стану функціонування мережі від кількості інформаційних повідомлень

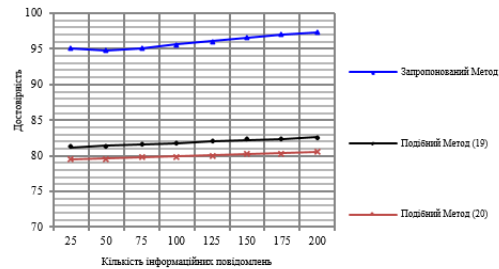


Рис. 10. Залежність достовірності прийняття управлінського рішення щодо моніторингу стану функціонування мережі від кількості інформаційних повідомлень

- збільшити час існування маршрутів передачі даних на 18–23% та збільшити пропускну спроможність інформаційного напрямку на 14–19%, за рахунок зменшення завантаження каналів мережі та скорочення об'ємів службового трафіка при збереженні значення рівня часу прийняття управлінського рішення не вищого, ніж у подібних способів (методів), з використанням алгоритмів контролю даних мережі НМ (рис. 7 та 8);
- зменшити час прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування УПД в МР на 17–22%, збільшити точність прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування УПД в МР на 16–23%, при збереженні повноти навчальної виборки запропонованого методу не нижчого, ніж у існуючих методів, за рахунок використання нейронних мереж, алгоритму розподільчої ідентифікації та ідентифікації нових типів порушень (рис. 9 та 10).

Оцінка адекватності. Під адекватністю будемо розуміти ступінь відповідності розробляємої моделі тому стану, для якого модель була розроблена. Зазвичай з цією метою застосовують методи математичної статистики. Суть зазначених методів полягає у перевірці висунутої гіпотези щодо адекватності моделі на основі певних критеріїв, здійснення якої можливе наступними способами: за відповідністю середніх значень випадкової величини (параметра), або по відповідності дисперсій випадкової величини (параметра) [21].

Процедура оцінки заснована на порівнянні вимірювань на реальній системі (чи її прототипі) і результатів досліджень на моделі. Так як на даний момент існуючий прототип МР відсутній, то оцінка адекватності моделі будемо проводити шляхом її порівняння з моделлю, яка передбачала більш детальний опис функціонування моделі на рівнях моделі OSI. Зокрема, модель, яка слугуватиме у якості прототипу, передбачає детальніший опис функціонування МР на рівнях моделі OSI. При цьому, дослідження адекватності запропонованої моде-

лі було використано перший спосіб (відповідність середніх значень випадкової величин (параметрів) [1,22].

У ході дослідження здійснюється перевірка гіпотези про близькість середніх значень кожної n -ї компоненти відгуків досліджуваної моделі Y_k відомим середнім значенням n -ї компоненти відгуків моделі-прототипу Y_k^* . На кожній з моделей проводять $N^* = N$ експериментів, а за отриманими вибірками обчислюються оцінки математичного сподівання та дисперсії відгуків обох моделей з використанням наступних співвідношень: $Y_k Y_k^*$.

Всього було здійснено п'ять досліджень ($k = 5$) на кожній з моделей. Результати експериментів моделей зазначені в таблиці 1.

Перевірка адекватності здійснювалася шляхом оцінки середніх значень відгуків моделі-прототипу та досліджуваної моделі при однакових параметрах системи, де

– інтервал часу прийняття управлінського рішення та точність (достовірність) прийняття рішення.

З використанням виразів:

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_{nk}; \quad D_n = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (Y_{nk} - \bar{Y}_n)^2, \quad (5)$$

оцінимо значення оцінок математичного сподівання та дисперсії відгуків ІМ і (табл. 1): де $N^* = N = 5$ – кількість експериментів, яка була здійснена для кожної з моделей.

Основою перевірки гіпотези є різниця $E_n = (\bar{Y}_n - \bar{Y}_n^*)$, за формулою:

$$D_{\delta n} = \frac{(N^* - 1)D_n + (N - 1)D_n^*}{N + N^* - 2}, \quad (6)$$

Таблиця 1.

Результати експериментів моделей

№ з/п	Позначення відгуку ІМ	Значення складових вибірки при					Середнє значення відгуку
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	
1.	T	0,90	0,88	0,89	0,90	0,91	0,896
2.	T^*	0,89	0,88	0,87	0,89	0,9	0,886
3.	P_r	1,2	1,3	1,2	1,3	1,3	1,26
4.	P_r^*	1,3	1,4	1,3	1,3	1,4	1,34

робимо оцінку $D_{\delta n}$ дисперсії різниці $(\bar{Y}_n^* - \bar{Y}_n)$ для кожної n -ї компоненти відгуків моделей, а результати записуємо в табл. 2. Так як величини $D_{\delta n}$ та $(\bar{Y}_n^* - \bar{Y}_n)$ є статистично незалежними, то можемо використати t -статистику:

$$t_n = (\bar{Y}_n^* - \bar{Y}_n) \sqrt{\frac{N^* N}{D_{\delta n} (N + N^*)}}. \quad (7)$$

Використовуючи вираз знайдемо значення t -статистики (вибравши кількість ступенів рівним $\gamma = N + N^* - 2 = 5 + 5 - 2 = 8$), які задаються рівнем залежності $\alpha = 0,05$ та за конкретним значенням кількості ступенів γ , та за таблицями знаходять критичне значення t -статистики t_δ .

Таблиця 2.

Результати експериментів моделей

№ з/п	Позначення відгуку ІМ	Оцінка дисперсії відгуку $D_n \vee D_n^*$	Дисперсія різниці $D_{\delta n}$	Значення статистики t_n
1.	T	0,00018	0,00015	1,65
2.	T^*	0,00015		
3.	P_r	0,003	0,005	1,76
4.	P_r^*	0,007		

Якщо виконується нерівність $t_n \leq t_{\delta}$, то гіпотеза про близькість середніх значень n -ї компоненти відгуків моделей приймається. Тільки при наближеності відгуків за всіма компонентами векторів Y_k^* та Y_k можна говорити про адекватність моделей.

Скористаємося таблицею розподілу t -статистики, задавшись рівнем залежності $\alpha = 0,05$ та $\gamma = 8$, для визначення критичного значення t -статистики ($t_n=1,85$). Порівнюючи кожне із значень t -статистики в табл. 2 з t_n ,

$$(t_s = 1,65) < (1,85 = t_n);$$

$$(t_{\delta} = 1,76) < (1,85 = t_n),$$

можна прийняти гіпотезу про наближеність середніх значень за кожною компонентою відгуків моделей, які відрізняються ступенем деталізації процесу передачі даних в МР, що свідчить про їх адекватність.

В цілому з отриманих результатів можна зробити *висновок* про близькість середніх значень за кожним компонентом відгуків моделей, які розглядалися.

Калібрування. Калібруванням називається зміна структури і складу моделі таким чином, щоб відредагована модель була адекватна по кожному з визначених параметрів p , встановлених в моделі. Калібрування проводиться в 3 етапи: калібрування порівнянням законів розподілу ймовірності; калібрування балансуванням моделі; калібрування оптимізацією моделі. Кожен із етапів містить власний функціональний алгоритм дій з використанням спеціальних засоби оцінки калібрування моделі по кожному з параметрів. Калібрування ведеться в наступній послідовності. Спочатку калібрування моделі проводять шляхом порівняння розподілу ймовірності результатів, отриманих на об'єкті - Y_{pk}^* і на моделі - Y_{pk} . Якщо розподіли збігаються, а адекватності не досягнуто, переходять до балансування моделі. На цьому етапі визначення параметрів моделі змінюють таким чином, щоб результати співпадали. Якщо балансування не призводить до адекватності моделі, переходять до оптимізації. В ході проведення оцінки адекватності, було встановлено адекватність розробленої моделі, саме тому калібрування моделі не потребується [10,23].

Економічна оцінка ефективності функціонування методів УПД. Оцінка використання УПД в МР ґрунтується на співвідношенні корисних результатів її функціонування до використаних ресурсів на її побудову [21,24]. Основним показником ефективності УПД є коефіцієнт ефективності K_{ef} , як показник її наближення до граничних затрат на побудову УПД, де $S_{пууд}$ – за-

трати на побудову УПД; $M_{ПУПД}$ – граничні витрати на процес функціонування УПД:

$$K_{ef} = \frac{S_{ПУПД}}{M_{ПУПД}}, \quad (8)$$

Таким чином найбільш ефективним буде метод УПД в якому при найменших витратах на його побудову необхідні найбільші витрати направлені на порушення його функціонування [25,26].

В свою чергу, основними показниками економічної ефективності УПД є коефіцієнт захищеності та економічна ефективність. Економічно ефективним буде метод УПД, в якому виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} S_{ПУПД} \leq \Delta R_I + \Delta R_{OI} + \Delta R_{ПУПД} \\ S_{ПУПД} \leq S_I + S_{OI} \end{cases}, \quad (9)$$

де $\Delta R_I + \Delta R_{OI} + \Delta R_{ПУПД}$ – загальне зниження ризиків порушення для УПД; S_I – вартість інформації; S_{OI} – вартість об'єкту інформації; $S_{ПУПД}$ – сумарна вартість УПД; R_I – сумарний ризик порушення інформації; R_{OI} – сумарний ризик порушення об'єкту інформації; $R_{ПУПД}$ – сумарний ризик порушення УПД.

Вартість передаваної інформації, що передається на n рівні моделі OSI розраховується:

$$S_n = S_0 \cdot V_n, \quad (10)$$

де S_0 – вартість одиниці об'єму інформації; V_n – об'єм інформації, що передається на n рівні OSI.

З'ясуємо об'єм та вартість інформації, що передається на n рівні OSI:

$$V_n = \sum_{n=1}^N V_n, \quad (11)$$

$$S_0 = \sum_{n=1}^N S_n, \quad (12)$$

Однак для кожного i порушення по відношенню до j рівня моделі OSI визначається ймовірність реалізації p_{rij} цього порушення [27,28].

В свою чергу вартість порушення для кожного рівня моделі OSI дорівнює:

$$R_j = p_{rij} \cdot q_j. \quad (13)$$

де q_j вартість інформації j рівня.

Вартість повного порушення дорівнює сумі всіх порушень на рівнях OSI:

$$R_{II} = \sum_{j=1}^m R_j. \quad (14)$$

Як наслідок коефіцієнт економічної ефективності матиме вигляд:

$$K_{ef} = \frac{S_{ПУПД} - R_{ПУПД}}{M_{ПУПД}} \quad (15)$$

В ході оцінювання встановлено що $K_{ef} > 1$ (1,24), то це свідчить що запропонована УПД є ефективною.

3. Висновки. Було проведено оцінку ефективності функціонування методів УПД на основі нейронних мереж, яка основана на моделюванні МР з урахуванням функціонування УПД з використанням мови програмування Python, відкритої програмної бібліотеки TensorFlow, та модулів-сигнатур KEGG MODULE, зокрема проведено: оцінку ідентифікації параметрів трафіка в МР, оцінку навчання бази знань УПД в МР для методу оцінки навчання бази знань, оцінку прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних в МР для методів прогнозування, оцінку побудови та підтримки маршрутів передачі даних в МР для методів побудови та підтримки маршрутів передачі даних, оцінку процесу моніторингу стану функціонування УПД в МР для методів оцінки процесу моніторингу стану функціонування УПД в МР. Відповідно зазначеного було зафіксовано підвищення точності ідентифікації параметрів даних на 18–23%, зменшення часу навчання бази даних на 15–20%, зменшення часу прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних у МР на 20–25%, збільшення часу існування маршрутів передачі даних на 18–23%, збільшення пропускної спроможності інформаційного напрямку на 14–19%, зменшення часу прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування УПД в МР на 17–22%, збільшення точності прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування УПД в МР на 16–23% за рахунок застосування інтелектуалізації процесів прийняття рішень на основі використання нейронних мереж. Проведено оцінку рівня адекватності запропонованої моделі та економічна оцінка, яка показала прибутковий рівень економічної ефективності.

Список використаної літератури

1. Икаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Зайченко Д. О. Искусственный интеллект и интеллектуальные системы управления. *Москва: Наука*, 2006. 333 с.
2. Минович А. И., Романюк В. А. Методология оперативного управления мобильными радиосетями. *Зв'язок*, 2005. № 2. С. 53–58.
3. Романюк В. А. Архитектура системы оперативного управления тактичными радиомережами. *Збірник наукових праць ВІТІ НТУУ „КПІ”*, 2009. № 3. С. 70–76.
4. Романюк В. А. Мобильные радиосети – перспективы беспроводных технологий. *Сети и телекоммуникации*, 2003. № 12. С. 62–68.
5. Войтишек А. В. Основы метода Монте – Карло в алгоритмах и задачах. Части I-V. *Новосибирск: Новосибирский Государственный университет*, 2004. 198 с.
6. Маслова Н. О. Методы оценки эффективности систем защиты информационных систем. *Искусственный интеллект. М.: МУТ*. 2008. С. 253–264.
7. Калинина В. Н., Панкин В. Ф. Математическая статистика. *Москва: Дрофа*, 2002. 336 с.
8. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. *Москва: Радио и связь*, 1992. 504 с.
9. Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений. *Москва: МАКС Пресс*. 2008. 197 с.
10. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. *Москва: Наука. Главная редакция физмат литературы*. 1982. 64 с.
11. Романюк В. А., Сова О. Я., Жук П. В., Романюк А. В. Концепция иерархического построения интеллектуальных систем управления тактическими радиосетями класса MANET. *Сборник тезисов докладов и выступлений участников XXII Международной Крымской конференции [“СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”]*, (Крым-Ко). 2012. С. 265.
12. Сальник С. В. Метод інтелектуальної ідентифікації параметрів трафіка в мобільних радіомережах військового призначення. *Збірник наукових праць Військового інституту телекомунікацій та інформатизації*. 2018. № 3. С. 94–102.

13. Дівіцький А. С., Сальник С. В., Голь В. Д., Сторчак А. С. Метод ідентифікації маршрутів передачі даних в бездротових самоорганізованих мережах спеціального призначення. *Збірник наукових праць «Information technology and security» Institute of special communication and information NTUU "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute"*, 2021. 9(1). С. 111–123.
14. Сальник С. В. Методика інтелектуального навчання бази знань підсистеми управління потоків даних в мобільних радіомережах військового призначення. *Збірник наукових праць Військового інституту телекомунікацій та інформатизації*. 2018. № 4. С. 103–112.
15. Олексенко В. П., Сальник С. В., Сальник В. В., Міночкін А. І. Метод прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних в мобільних радіомережах. *Збірник наукових праць Військового інституту телекомунікацій та інформатизації*. 2017. № 4. С. 84–90.
16. Дівіцький А. С., Сальник С. В., Голь В. Д., Сидоркін П. Г., Сторчак А. С. Розробка моделі підсистеми прогнозування змін маршрутів передачі даних в мобільних радіомережах спеціального призначення. *Журнал "Східно-Європейський журнал передових технологій"*. 2021. № 3/9(111). С. 125-134.
17. Ефанова К. О., Бригадир С. П., Сальник С. В. Метод гібридної побудови маршрутів передачі даних в телекомунікаційних мережах спеціального призначення. *Науковий журнал "Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони". Національний університет оборони України імені Івана Черняківського*. 2019. № 1(34). С. 161–166.
18. Сальник В. В., Сальник С. В., Стрела Т. С., Олексенко В. П. Метод підтримки маршрутів передачі даних в мобільних радіомережах військового призначення на основі нечіткої логіки. *Збірник наукових праць «Наука і техніка повітряних сил Збройних Сил України» Харківський Національний університет Повітряних Сил імені І. Кожедуба*. 2017. № 4(29). С. 60–68.
19. Сторчак А. С. Модель оцінки стану захищеності інформації на основі керованих багатокрокових процесів прийняття рішення. *Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2013. № 2(24). С. 112–118.
20. Сальник С. В., Сторчак А. С., Герасімов К. К. Аналіз функціонування систем управління державними інформаційними ресурсами. *Науково-технічний журнал Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України*. 2019. № 2(35). С. 47–54.
21. Ярушкіна Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем. *Москва: Финансы и статистика, 2004*. 320 с.
22. Морозов А. С. Моделирование систем и процессов. URL: <http://studfile.net/preview/3073744/> (дата звернення: 01.12.2021).
23. Альянах И. Н. Моделирование вычислительных систем. *Ленинград: Машиностроение, 1988*. 223 с.
24. Головкин В. А. Нейронные сети: обучение, организация, применение. Нейрокомпьютеры и их применение: учебное пособие. *Москва: Наука*. 2001. 256 с.
25. Язов Ю. К. Основы методологии количественной оценки защищенности и эффективности защиты информации в компьютерных системах. *Ростов-на-Дону: Северо-Кавказский научный центр высшей школы*. 2006. 276 с.
26. Заенцев И. В. Нейронные сети: основные модели. Учебное пособие к курсу Нейронные сети для студентов 5 курса. *Воронеж*. 1999. 76 с.
27. Land A. H., Doig A. G. (2012). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520.

Salnyk S. V. Evaluation of the efficiency of the functioning of the methods of data flow control in mobile radio water based on neural networks.

The paper evaluates the effectiveness of the functioning of data flow control methods in mobile radio networks based on neural networks, based on the modeling of mobile radio networks, taking into account the functioning of the data flow control subsystem using the Python programming language, the TensorFlow open software library and KEGG MODULE signature modules. In particular, the following were conducted: assessment of identification of traffic parameters in mobile radio networks, assessment of training of knowledge base of data flow management subsystem in mobile radio networks for method of

assessment of knowledge base training, assessment of congestion forecasting time in mobile radio networks for methods of construction and maintenance of data transmission routes, assessment of the process of monitoring the state of operation of the data flow control subsystem in mobile radio networks for methods of assessing the process of monitoring the functioning of the data flow control subsystem in mobile radio networks. Accordingly, there was an increase in the accuracy of identification of data parameters, reduction of database training time, reduction of prediction time of congestion of data transmission routes in mobile radio networks, increase of existence of data transmission routes, increase of information bandwidth, decrease of decision-making time. data flow management in mobile radio networks, increasing the accuracy of decision-making to monitor the functioning of the subsystem of data flow management in mobile radio networks through the use of intellectualization of decision-making processes based on the use of neural networks. An assessment of the level of adequacy of the proposed model and economic assessment, which showed a profitable level of economic efficiency.

Keywords: mobile radio network, data flow management, performance evaluation, intellectualization of decision-making processes, neural network.

References

1. Ykarov, Y. M., Lokhyn, V. M., Manko, S. V., Romanov, M. P., & Zaichenko, D. O. (2006). Yskusstvennii yntellekt y yntellektualnie systemi upravleniya. *Moskva: Nauka*, 333.
2. Mynochkyn, A. Y., & Romaniuk, V. A. (2005). Metodolohiya operatyvnoho upravleniya mobyl'nymy radyosetiamy. *Zviazok*, 2. 53–58.
3. Romaniuk, V. A. (2009). Arkhitektura systemy operatyvnoho upravlinnia taktychnymy radiomerezhamy. *Zbirnyk naukovykh prats VITI NTUU „KPI”*, 3. 70–76.
4. Romaniuk, V. A. (2003). Mobyl'nie radyosety – perspektyvi besprovodnikh tekhnolohyi. *Sety y telekommunikatsyy*, 12. 62–68.
5. Voityshek, A. V. (2004). Osnovy metoda Monte – Karlo v alhorytmakh y zadachakh. *Chasty I-V. Novosybyrsk: Novosybyrskiyi Hosudarstvennyi unyversytet*, 198.
6. Maslova, N. O. (2008). Metod otsenky efektyvnosti system zashchyty ynformatsyonnykh system. *Yskusstvennii yntellekt. Moskva: MUT*. 253–264.
7. Kalynyna, V. N., & Pankyn V. F. (2002). Matematycheskaia statystyka. *Moskva: Drofa*, 336.
8. Shtoyer, R. (1992). Mnokryteryalnaia optymizatsiya. *Moskva: Radyo y sviaz*, 504.
9. Lotov, A. V., Pospelova, Y. Y. (2008). Mnokryteryalnye zadachy pryniatyia reshenyi. *Moskva: MAKS Press*. 197.
10. Podynovskiy, V. V., & Nohyn, V. D. (1982). Pareto-optymalnye resheniya mnokryteryalnykh zadach. *Moskva: Nauka. Hlavnaia redaktsiya fizmat lyteratury*. 64.
11. Romaniuk, V. A., Sova, O. Ia., Zhuk, P. V., & Romaniuk, A. V. (2012). Kontseptsyia yerarkhycheskoho postroeniya yntellektualnykh system upravleniya taktycheskymy radyosetiamy klassa MANET. *Sbornyk tezysov dokladov y vystuplenyi uchastnykov KhKhII Mezhdunarodnoi Krymskoi konferentsii ["SVCh-tekhnika y telekommu-nykatsyonnie tekhnolohyy"]*, (KryMyKo). 265.
12. Salnyk, S. V. (2018). Metod intelektualnoi identyfikatsii parametriv trafika v mobilnykh radiomerezhakh viiskovoho pryznachennia. *Zbirnyk naukovykh prats Viiskovyi instytut telekomunikatsii ta informatyzatsii*. 3. 94–102.
13. Divitskiy, A. S., Salnyk, S. V., Hol, V. D., & Storchak, A. S. (2021). Metod identyfikatsii marshrutiv peredachi danykh v bezdrotovykh samoorhanizovanykh merezhakh spetsialnoho pryznachennia. *Zbirnyk naukovykh prats «Information technology and security» Institute of special communication and information NTUU “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic institute”*, 9(1). 111–123.
14. Salnyk, S. V. (2018). Metodyka intelektualnoho navchannia bazy znan pidsystemy upravlinnia potokiv danykh v mobilnykh radiomerezhakh viiskovoho pryznachennia. *Zbirnyk naukovykh prats Viiskovyi instytut telekomunikatsii ta informatyzatsii*. 4. 103–112.
15. Oleksenko, V. P., Salnyk, S. V., Salnyk, V. V., & Minochkin, A. I. (2017). Metod prohnozuvannia chasu perevantazhennia marshrutiv peredachi danykh v mobilnykh radiomerezhakh. *Zbirnyk naukovykh prats Viiskovyi instytut telekomunikatsii ta informatyzatsii*. 4. 84–90.
16. Divitskiy, A. S., Salnyk, S. V., Hol, V. D., Sydorkin, P. H., & Storchak, A. S. (2021).

- Rozrobka modeli pidsystemy prohnozuvannya zmin marshrutiv peredachi danykh v mobilnykh radiomerezhakh spetsialnoho pryznachennia. *Zhurnal "Skhidno-Yevropeiskyi zhurnal peredovykh tekhnologii"*. 3/9(111). 125–134.
17. Efanova, K. O., Bryhadyr, S. P., Salnyk, S. V. (2019). Metod hibrydnoi pobudovy marshrutiv peredachi danykh v telekomunikatsiinykh merezhakh spetsialnoho pryznachennia. *Naukovyi zhurnal "Suchasni informatsiini tekhnologii u sferi bezpeky ta oborony". Natsionalnyi universytet oborony Ukrainy imeni Ivana Cherniakhivskoho*. 1(34). 161–166.
 18. Salnyk, V. V., Salnyk, S. V., Strela, T. S., & Oleksenko, V. P. (2017). Metod pidtrymky marshrutiv peredachi danykh v mobilnykh radiomerezhakh viiskovoho pryznachennia na osnovi nechitkoi lohiky. *Zbirnyk naukovykh prats «Nauka i tekhnika povitrianykh syl Zbroinykh Syl Ukrainy» Kharkivskiy Natsionalnyi universytet Povitrianykh Syl imeni I. Kozheduba*. 4(29). 60–68.
 19. Storchak, A. S. (2013). Model otsinky stanu zakhyschenosti informatsii na osnovi kerovanykh bahatokrokovykh protsesiv pryiniattia rishennia. *Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*. 2(24). 112–118.
 20. Salnyk, S. V., Storchak, A. S., & Herasimov, K. K. (2019). Analiz funktsionuvannya system upravlinnia derzhavnymy informatsiinyi resursamy. *Naukovo-tekhnichniy zhurnal Nauka i tekhnika Povitrianykh Syl Zbroinykh Syl Ukrainy*. 2(35). 47–54.
 21. Yarushkyna, N. H. (2004). Osnovi teoryi nechetykhykh y hibrydnykh system. *Moskva: Fynansi y statystyka*, 320.
 22. Morozov, A. S. (2021). Modelyrovanye system y protsesov. Retrieved from: <http://studfile.net/preview/3073744>
 23. Alianakh, Y. N. (1988). Modelyrovanye vichyslytelnykh system. Lenynhrad: *Mashynostroenye*, 223.
 24. Holovko, V. A. (2001). Neironnye sety: obuchenye, orhanyzatsiya, pryomenenye. *Neirokompiuteri i yih pryomenenye: uchebnoe posobye*. Moskva: Nauka. 256.
 25. Yazov, Yu. K. (2006). Osnov metodolohyy kolychestvennoi otsenky zashchyschenosti y efektyvnosti zashchity informatsii v kompiuternykh systemakh. *Rostov-na-Donu: Severo-Kavkazskiy nauchnyi tsentr visshei shkoli*. 276.
 26. Zaentsev, Y. V. (1999). Neironnye sety: osnovnie modely. *Uchebnoe posobye k kursu Neironnye sety dlia studentov 5 kursa*. Voronezh. 76.
 27. Land, A. H., & Doig, A. G. (2012). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520.

Одержано 15.04.2022

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moscow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 40 №1

2022

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), М. Ю. Бортош (технічний секретар),
В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, Ф. Е. Гече, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко,
Н. Е. Кондрук, К. В. Маринець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук,
О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк,
О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua