

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 41 № 2

2022

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 41 № 2

Ужгород 2022

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2022. Т. 41, № 2. 175 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Чупов С. В. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.екон.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №7 від 21 жовтня 2022 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №9 від 25 жовтня 2022 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2022

© Ужгородський національний університет,
2022

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 41 No 2

Uzhhorod 2022

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2022. Vol. 41, No 2. 175 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), S. Chupov, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 7 of October 21, 2022) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 9 of October 25, 2022)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2021 = 78.86.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. Білощицький А. О., Андрашко Ю. В., Кучанський О. Ю., Файзулін А. Р., Токсанов С. Н. Модель багатокритеріального вибору науковців та ЗВО для організації наукової співпраці 7
2. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Про критерій скінченності зображувального типу для сімейств категорій ін'єктивних зображень 16
3. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про категорію зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів 23
4. Десницький О. М., Млавець Ю. Ю., Орловський І. В., Тимошенко О. А. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних диференціальних рівнянь загального вигляду збурених за допомогою вінерівського процесу 29
5. Ільєнко М. К., Поліщук А. Ю. Про збіжність рядів Баума-Каца для сум елементів лінійної авторегресійної послідовності випадкових величин 2-го порядку 41
6. Капустян О. В., Юсипів Т. В. Стійкість граничних режимів для загального випадку систем типу реакція-дифузія 48
7. Лисецький Т. Б. Про кількість емігрантів в розкладному гіллястому процесі з перетвореннями, залежними від віку 61
8. Лукашів Т. О., Малик І. В., Горбатенко М. Ю. Достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями 69
9. Собчук В. В., Зеленська І. О. Побудова асимптотики розв'язку системи СЗДР 4-го порядку з диференціальною точкою звороту методом істотно особливих функцій 78

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф., Щекань Н. П. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями 91
2. Бедратюк Л. П., Бедратюк Г. І. Моменти Ерміта зображень та їхні інваріанти 103
3. Добуляк Л. П., Фербей Д. О., Костенко С. Б. Використання глибинного навчання у задачах класифікації звуків навколишнього середовища 118
4. Поліщук В. В., Петранова М. Ю., Повханіч В. І. Комплексна гібридна математична модель доцільності фінансування проектів 128
5. Роботишин М. В., Маляр М. М. Аналіз деяких методів розв'язання задачі розпізнавання дефектів на зображеннях 141
6. Сальник С. В. Метод моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах з використанням нейронних мереж 151
7. Шаркаді М. М. Нечіткі множини другого роду 163

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Biloshchytskyi A. O., Andrashko Y. V., Kuchansky A. Y., Faizullin A. R., Toranov S. N.* Model of multi-criteria selection of scientists and higher education institutions for the scientific organization 7
2. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On a criterion of the finiteness of the representation type for families of the categories of injective representations 16
3. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements 23
4. *Desnytskiy O. M., Mlavets Yu. Yu., Orlovskiy I. V., Tymoshenko O. A.* Asymptotic Behavior of Solutions of General Linear Differential Equations Peretrubated by Wiener Process 29
5. *Iliencko M. K., Polishchuk A. Yu.* On the convergence of Baum-Katz series for sums of linear 2-nd order autoregressive sequences 41
6. *Kapustyan O. V., Yusyviv T. V.* Stability of limit regimes in general reaction-diffusion type systems 48
7. *Lysetskiy T. B.* On a number of emigrants in decomposable age-dependent branching processes 61
8. *Lukashiv T. O., Malyk I. V., Gorbatenko M. Yu.* Sufficient conditions of the existence of admissible control for linear stochastic systems of random structure with Markov switches and Poisson perturbations 69
9. *Sobchuk V. V., Zelenska I. O.* Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of essentially singular functions 78

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Shchekan N. P.* Analytical solutions of the static problem on the pressure of pre-tensioned half-spaces and an elastic cylinder with initial stresses 91
2. *Bedratyuk L. P., Bedratyuk A. I.* Image Hermite moments and their invariants 103
3. *Dobuliak L. P., Ferbei D. O., Kostenko S. B.* Using deep learning for environmental sound's classification 118
4. *Polishchuk V. V., Petranova M. Yu., Povkhanych V. I.* Complex hybrid mathematical model of feasibility of financing project 128
5. *Robotyshyn M. V., Malyar M. M.* Analysis of some methods for solving the problem of detecting defect in images 141
6. *Salnyk S. V.* Method of monitoring the state of functioning of the data flow management system in mobile radio networks using neural networks 151
7. *Sharkadi M. M.* Fuzzy Sets of the Second Kind 163

УДК 005.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).7-15](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).7-15)

**A. O. Biloshchytskyi¹, Y. V. Andrashko², A. Y. Kuchansky³,
A. R. Faizullin⁴, S. N. Toxanov⁵**

¹ Astana IT University,
Vice-Rector for Science and Innovation,
Doctor of Technical Sciences, Professor
a.b@astanait.edu.kz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9548-1959>

² State University «Uzhhorod National University»,
Associate Professor of Department of System Analysis and Optimization Theory,
Ph.D. in Engineering, Associate Professor
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

³ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Head of the Department of Information Systems and Technologies,
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor
kuczanski@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1277-8031>

⁴ Manash Kozybayev North Kazakhstan University,
PhD candidate
adil.faizullin@astanait.edu.kz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5644-9841>

⁵ D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University,
PhD candidate
sapar.toxanov@astanait.edu.kz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2915-9619>

MODEL OF MULTI-CRITERIA SELECTION OF SCIENTISTS AND HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS FOR THE SCIENTIFIC ORGANIZATION

The research formulated the task of selecting potential partners for cooperation within the framework of scientific and educational projects. The formulation of the problem in which each project consists of a finite number of work packages is considered.

To find the generalized aggregated evaluations of applicants, a system of fuzzy logical inference is used, which is built to harmonize the opinions of experts regarding the creation of project groups. This method consists of three stages. At the first stage, fuzzification is carried out through the implementation of the scientist's affiliation function to the direction of scientific research. The second stage of fuzzy logic inference consists of experts forming requirements for candidates for a place in the project group. The final stage involves defuzzification using the center of gravity method.

Keywords: scientific research, partners, choice problem, fuzzy logical inference.

1. Introduction. The formation of scientific communities takes place in the conditions of competition among scientists from all over the world. Scientific societies consist of universities, research institutes and private companies, which form applications for joint grant research. It is possible to distinguish three forms of relations between subjects of scientific communities and between their individual structural subdivisions [1]: competition, neutral relations, and partnership.

The task of finding a partner is relevant in the context of globalization and the intensive development of mobility of scientific communities. In this regard, it is possible to highlight the task of calculating the rating of competitors, evaluating the activities of other companies and institutions that can potentially become partners. The principle of constructing metrics can be used to determine assessments of the subjects of scientific communities and individual scientists. It is important to take into account the fluidity and dynamism of the performance of scientific communities and individual scientists, as well as the specifics of partner activities and the specifics of established competitors.

2. Research review. In the context of globalization due to the intensive development of mobility of scientific communities, it is important to rationalize the choice of partners by: Establishing the possible contributions of partners to the project, evaluating the performance of potential partners according to well-defined criteria, and solving the multi-criteria selection problem.

A partial solution to the first problem for the scientific community is provided in [2]. The paper proposes a method of clustering scientists' publications by scientific fields. Within the framework of this method, two ways of finding the distance between publications are proposed. The first method uses the length of the route in the citation graph between publications. The second method takes into account the calculation of the similarity between publication annotations based on the locally sensitive hashing method.

The second task has also been partially solved for the evaluation of research activity on the basis of the publication activity of scientists. The work [3] proposes a method of finding integral estimates of the scientists' research activity results. The method can be used in carrying out a comprehensive assessment of scientists, higher educational institutions and their structural units. The work [4] proposes a method of a comprehensive evaluation of the results of the activities of higher education institutions, based on the calculation of the generalized volume of the m -simplex, the vertices of which are the evaluations of the activities of higher educational institutions in different categories. In addition to evaluating the results of scientific and research activities, it is important to understand the dynamics of changes in this evaluation in the future.

The work [5] analyzed the latest scientific research, which consists in evaluating the scientific research activity of subjects and objects of scientific environments. The work also defines the main features of partners (universities, research institutes, state authorities, private companies, professional associations and foundations), which determine the methods of communication and cooperation between them. The key factors influencing the creation of joint forms of scientific cooperation are described in works [6]. It is determined that the main factors are the level of reputation of the agents and the specifics of cooperation mechanisms, which may have certain limitations. Mathematical methods of choosing partners for cooperation are described in works [5, 6]. In particular, it is proposed to use the analytical hierarchy method and a modification of the genetic algorithm for this task. Theoretical aspects of the formation of factors regarding the choice of partners for cooperation in innovative projects are given in the work [7]. The process of selecting partners in joint international enterprises is described in [8, 1]. Some aspects of this process can be used to select partners for scientific and educational projects.

3. Formalization of the selection problem. The research formulated the task of selecting potential partners for cooperation within the framework of scientific and educational projects. Each project in this setting consists of a finite number of work packages, for each of which it is necessary to select executors. For each work package of each project, a list of key criteria for partner selection must be formed. To determine the optimal composition of executors of the work packages of each project, the method of aggregation of expert assessments can be used. Based on the results of the expert evaluation, the decision on whether to select performers for the implementation of the relevant package is made by the project manager or the person who makes the decision.

Let a finite set of scientific and educational projects or grants be given as [8]:

$$G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\},$$

n – the number of projects for which it is necessary to select executors. Let a finite set of potential executors for these projects be given.

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_t\},$$

t – is the number of potential performers as subjects of the educational and scientific environment. Executors can be scientists, project managers, research institutions, institutions of higher education, etc.

Any project consists of a number of work packages

$$G_i = \{g_1^i, g_2^i, \dots, g_{r_i}^i\},$$

r_i – the number of work packages of the project G_i , $i = \overline{1, n}$, which are executed in a certain sequence and linked by results. For the execution of each of these work packages, it is necessary to select executors who have the experience and competence to complete the package in a timely and efficient manner. That is, it is necessary to find the following sets of potential performers:

$$W(g_j^i) = \{v_d \in V \mid (v_d, g_j^i) \in Q^i\}, Q^i \subset V \times G_i, j = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, n}, d = \overline{1, t}.$$

For each work package of each project, a list of key partner selection criteria must be created. That is, the vectors of evaluation criteria will have the form:

$$f^{ij}(v) = \left(f_1^{ij}(v), f_2^{ij}(v), \dots, f_{N_{ij}}^{ij}(v) \right), v \in V,$$

N_{ij} – the number of evaluation criteria of potential partners of work packages g_j^i projects G_i , $j = \overline{1, r_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Some criteria are maximized, so we denote the set of indices of such criteria by $J_1^{ij} = \{1, 2, \dots, h_{ij}\}$. Other criteria with indexes $J_2^{ij} = \{h_{ij} + 1, h_{ij} + 2, \dots, N_{ij}\}$ – are minimized $J^{ij} = \{1, 2, \dots, N_{ij}\}$, $J_1^{ij} \cup J_2^{ij} = J^{ij}$. Then

$$\sum_{k \in J_1^{ij}} \lambda_k f_k^{ij}(v) \rightarrow \max, \sum_{k \in J_1^{ij}} \lambda_k = 1,$$

$$\sum_{k \in J_2^{ij}} \delta_k f_k^{ij}(v) \rightarrow \min, \sum_{k \in J_2^{ij}} \delta_k = 1,$$

for each package and project, the limit of the set of potential executors is built $v \in V^{ij}$,

$$V^{ij} = \{v \in V \mid y_u^{ij}(v) \geq \rho_u^{ij}, u = \overline{1, z_{ij}}, j = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, n}\},$$

where z_{ij} – is the number of threshold values for the constraint vector function $y_u^{ij}(v)$.

The coefficients λ_k and δ_k determine the importance of each of the criteria in the calculation of the comprehensive assessment.

The decision on whether to select executors for the implementation of the relevant package is made by the project management team or the person who makes the decision. To determine the optimal composition of executors of the work packages of each of the projects, the method of aggregation of expert assessments can be used.

Let the given set of experts

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_s\},$$

s – is the number of experts. Each of the experts compiles the preferences of potential performers considering the vector of criteria. An incomplete preference profile is allowed. Let $\xi_{c,b}^{ij}$ – is the average frequency of occurrence of each of the advantages among potential performers v_c and v_b , $c \neq b$, $v_c \in V$, $v_b \in V$. Then we get preference matrices of the form:

$$\Psi^{ij} = \begin{pmatrix} \xi_{1,1}^{ij} & \xi_{1,2}^{ij} & \dots & \xi_{1,t}^{ij} \\ \xi_{2,1}^{ij} & \xi_{2,2}^{ij} & \dots & \xi_{2,t}^{ij} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{t,1}^{ij} & \xi_{t,2}^{ij} & \dots & \xi_{t,t}^{ij} \end{pmatrix},$$

$$j = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, n}.$$

It is possible to obtain an ordered list $v_{k_1}^{ij} \succ v_{k_2}^{ij} \succ \dots \succ v_{k_t}^{ij}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_t$, $k_q \in \{1, 2, \dots, t\}$, $v_{k_q}^{ij} \in V^{ij}$, $q = \overline{1, t}$ of potential performers for each package g_j^i of project G_i using methods of collective formation, based on the matrix of pairwise comparisons.

Taking into account the specified list, the project manager selects specific performers and forms a working group.

The general statement of the problem may change depending on which partners are considered. Potential partners can be universities, research institutions, private companies, state organizations, individual scientists. Depending on the objectives of such partners in the project, it is possible to choose appropriate criteria for their evaluation. In particular, for scientists, the evaluation criterion can be publication activity on a topic that meets the tasks of the corresponding work package. In this case, the set of all publications of a potential partner will be denoted by

$$Q(v_d) = \{q_e \in Q \mid (v_d, q_e) \in T\}, T \subset V \times Q, e = \overline{1, M}, d = \overline{1, t},$$

where P – is the set of all publications of scientists that are available in the database, $M = \text{card}(P)$.

The set of publications in which the scientist's publications are cited will be denoted by

$$C(v_d) = \{q_e \in Q \mid (q_e, pq) \in C, q_E \in Q(v_d), E = \overline{1, M}, e \neq E\}, e = \overline{1, M},$$

where $C \subset Q \times Q$ define citations of the publication.

Then the task of evaluating the productivity of scientific research activity of scientists for their selection to the project is to find for each scientist v_d , based on the given information regarding the citation of his publications, some evaluation b_d , which can be represented in the form of a functional

$$Q^{ij} : V \rightarrow R,$$

which is determined depending on the needs of the project and the corresponding project package. The estimate will then look like this:

$$b_d = Q^{ij}(Q(v_d), C(v_d)), d = \overline{1, t}, j = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, n}.$$

Then the preferences between scientists v_d are determined by the value of estimate q_d . The greater the value of b_d , the greater advantage the corresponding scientist has for the selection of packages g_j^i of projects G_i into working groups.

If the potential partner is a university or research institute and the scientific component of the activities of the corresponding institution is important for the purposes of the work package, this scheme can also be used. In this case, the evaluation of scientific research activity is calculated for each scientist from a certain structural subdivision, or the university as a whole b_d . And the overall evaluation of the university O will be determined as the average value of the estimates:

$$O = \frac{1}{t} \sum_{d=1}^t b_d.$$

One of the international or national indexes can also be used to evaluate universities as potential partners:

- rating of the British consulting company Quacquarelli Symonds (QS);
- the academic ranking of universities in the world, compiled by the Institute of Higher Education of Shanghai Jiao Tong University (Shanghai Ranking);
- Top-200 rating.

Other foundations, associations, and state institutions (for example, ministries, departments, etc.) can also be executors of the project. In this case, the criteria for selecting an executor may include experience in implementing similar projects, the degree of innovation in decision-making, financial ability, assessment of reputation, etc. The evaluation of such criteria can be conducted on the basis of an expert survey, taking into account fuzzy staging.

According to the results of the formation of working groups of project packages, a consortium or project cluster is legally established. It is necessary to take into account the possible participation of stakeholders in the process of project implementation. However, investigating the possibility of including them in the project cluster is a separate task. Since the inclusion of new interested organizations or persons at the stage when the project is already being implemented requires a careful study of the functional responsibilities of the parties, considering the interests of all participants of the project cluster or consortium.

4. Determination of requirements for the method of selecting partners. To solve the problem of choosing partners for cooperation in the framework of scientific and educational projects, it is necessary to develop such a multi-criteria decision-making method that meets the following conditions:

1. Evaluation criteria and alternatives should adequately reflect the complex processes of selecting project executors, should take into account project features, types of executors, etc.
2. Simplicity and clarity in the interpretation of the results of the evaluation of alternatives, that is, the creation of appropriate scales and descriptions of the evaluation results, which would facilitate the work of the person who makes the decision.
3. The ability of the person who makes the decision to choose other alternatives in case the proposed ones do not suit him. This is ensured by introducing clear advantages between alternatives.
4. The possibility of adapting methods or the possibility of using other decision-making methods, as well as exporting the results from one method to another, which would allow to confirm or refute the evaluation results.

5. Development of a method for selecting partners. Let a certain project be at the planning stage, that is, the stage of defining the project environment, and the formulation of the project has already been completed. So, the internal and external factors are determined, the goals and objectives of the project are formed. Then the project can be seen as a set of individual processes, which consist of solving individual tasks of the project. Each of the processes requires resources for its implementation. One of the main resources are task executors.

Let us consider the task of selecting project executors based on a fuzzy expert survey. For simplification, we will assume that each process from the beginning to the end is conducted by one executor. Let us decompose the task of selecting project executors on the subtask of selecting exactly one executor for each of the processes. Let us form a set of persons who can be executors

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

where n – is the number of persons who can be executors of the process (hereafter referred to as candidates). Each of the candidates can be evaluated based on the list of criteria c_1, c_2, \dots, c_k , k – the number of candidate evaluation criteria. The purpose of the research is to build a method of evaluation and selection of a rational executor among candidates $a^* \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ taking into account a set of criteria. Moreover, the result of applying the method can be either one rational executor a^* or an ordered set of executors $\{a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*\}$.

The solution, as an ordered set, has a number of advantages. In particular, if a rational candidate refused to participate in the project due to certain external unforeseen factors, the next candidate may be involved in the project.

To evaluate candidates, use a multi-criteria group expert survey. To find the generalized aggregated evaluations of the applicants, the system of fuzzy logical inference (FLI) will be applied. The procedure of fuzzy logic inference consists in defining the mapping of a vector of estimates of input data into a scalar initial value using fuzzy rules.

Fuzzy logical inference consists of three stages.

The first stage is fuzzification. This stage is based on some linguistic variables with corresponding linguistic scales. The main procedure of the stage is to determine the degree of belonging of the input value to each of the linguistic variables.

Consider the mapping obtained as a result of solving the identification of research directions of scientists as a discrete fuzzy mapping, with a membership function determined by the ratio of the number of publications of the author in a given scientific direction to the total number of publications. That is,

$$\Lambda(a_i) = (\eta_b | \mu_b^i), b = \overline{1, \psi}, i = \overline{1, n},$$

a belonging is determined by the formula

$$\mu_b^i = \frac{\|Q(a_i) \cap Y_b\|}{\|Q(a_i)\|},$$

where $Q(a_i)$ is the set of all publications of the scientist a_i , and Y_b – is the cluster of publications corresponding to the direction of scientific research η_b .

The second stage is a mechanism of logical inference. This stage is based on the fuzzy rules that specify the mapping of input fuzzy sets into the output fuzzy set. These rules are formed on the basis of appropriate expert evaluations. There are different procedures for obtaining fuzzy inference, including procedures of Mamdani, Sugeno, Larsen.

Fuzzy rules are formed in the format "If the candidate has the competence η_b with the degree of belonging μ_b , then he meets the requirements of the project with the degree of belonging α ". For example, the following rule can be formulated: "If the candidate knows project management methods, then he is an excellent candidate for the position." In the given example of mastery of project management methods - competence η_b , "excellent" is a verbal qualitative assessment. A certain scale should be used to translate qualitative assessments into quantitative values of the membership function. An example of such a scale is given in Table 1. The fuzzy

Table 1.

Scale for verbal evaluation of the statement

№	Verbal qualitative assessment	The value of the membership function
1	Perfectly	0,9
2	Fine	0,75
3	Satisfactorily	0,6
4	Unsatisfactorily	0,35

inference procedure consists in the aggregation of all rules. The process of fuzzy logical inference in the FLI system consists in finding the degree of fulfillment of each rule based on the degree of truth of its premise using the composition $\alpha = \min\{\mu_b\}$. FLI according to Mamdani uses the minimum operator, in the system of FLI according to Larsen based on the product operator.

The final stage – defuzzification consists in transforming a fuzzy value into a clear one. The most common method of defuzzification is the method of finding the center of gravity of a fuzzy set.

Defuzzification occurs using the formula for finding the center of mass

$$\frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \mu(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu(x) dx},$$

where x is a fuzzy value and $\mu(x)$ – is its membership function. Since we are dealing with a discrete quantity, the Stiltjes integral should be understood as a sum, i.e. the defuzzification occurs according to the formula:

$$\frac{\sum_{b=1}^{\psi} \alpha^i \mu_b^i}{\sum_{b=1}^{\psi} \mu_b^i}.$$

The choice of the executor of the scientific project consists in finding such a scientist who corresponds to the maximum value of defuzzification. An ordered set of executors is constructed from scientists by decreasing defuzzification value.

This approach makes it possible to simplify the selection of potential scientific partners for the creation of a joint project and provides tools for the project manager, which, on a scientific basis, establishes the advantages of partners for the project, as well as for its components.

6. Conclusions and perspectives for further research. The task of selecting potential partners for cooperation within the framework of scientific and educational projects is formulated. Each project in this production consists of a finite number of work packages, for each of which it is necessary to select executors. In practice, project packages have different directions (information dissemination, management, maintaining the stability of project results, scientific research), etc. Forming the criteria for selecting partners for each of the packages is an important task. To find generalized aggregated evaluations of the applicants it was proposed to apply a system of fuzzy logical inference.

This paper was written in the framework of the state order to implement the science program for budget program 217 “Development of Science”, IRN No. AP08857218 with the topic: “Information technology for assessment of scientific activity of universities, research institutes, and their subdivisions”

References

1. Xu, H. & Andrashko, Yu. (2019). The problem of partnership choices for scientific projects cooperation. *Management of development of complex systems*, 37, 111–115.
2. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Andrashko, Y., Biloshchytska, S., Kuzka, O., Shabala, Y., & Lyashchenko, T. (2017). A method for the identification of scientists’ research areas based on a cluster analysis of scientific publications. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 5(2(89)), 4–11. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.112323>
3. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Andrashko, Y., Biloshchytska, S., Kuzka, O., & Terentyev O. (2017). Evaluation methods of the results of scientific research activity of scientists based on the analysis of publication citations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 3(2(87)), 4–10. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.103651>
4. Kuchansky, A., Andrashko, Y., Biloshchytskyi, A., Danchenko, E., Ilarionov, O., Vatskel, I., & Honcharenko, T. (2018). The method for evaluation of educational environment subjects’ performance based on the calculation of volumes of msimplexes. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4(92)), 15–25. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126287>
5. Kretschmer, H. (1985). Cooperation structure, group size and productivity in research groups. *Scientometrics*, 7, 39–53. <https://doi.org/10.1007/BF02020140>
6. Wagner, C. S., & Leydesdorff, L. (2005). Network structure, self-organization, and the growth of international collaboration in science, *Research Policy*, 34(10), 1608–1618. <https://doi.org/10.1016/j.respol.2005.08.002>

7. Xu, H., & Kuchansky, A. (2019). The problem of choice of partners for organization of cooperation in the framework of scientist of scientific and educational projects. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 2(35), 134–142. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2\(35\).134-142](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).134-142)
8. Godin, B., & Gingras, Y. (2000). Impact of collaborative research on academic science. *Science and Public Policy*, 27(1), 65–73. <https://doi.org/10.3152/147154300781782147>

Білощицький А. О., Андрашко Ю. В., Кучанський О. Ю., Файзулін А. Р., Токсанов С. Н. Модель багатокритеріального вибору науковців та зво для організації наукової співпраці.

В дослідженні сформульовано задачу вибору потенційних партнерів для співпраці в рамках наукових та освітніх проєктів. Розглянуто постановку задачі в якій кожен проєкт складається зі скінченного числа робочих пакетів.

Для знаходження узагальнених агрегованих оцінок претендентів застосовано систему нечіткого логічного виводу, який будується для узгодження думок експертів щодо створення проєктних груп. Даний метод складається із трьох етапів. На першому етапі фазифікація здійснюється через введення функції належності науковця до напрямку наукових досліджень. Другий етап нечіткого логічного виводу полягає формуванні експертами вимог до кандидатів на місце в проєктній групі. На заключному етапі відбувається дефазифікація за допомогою методу центра ваги.

Ключові слова: наукові дослідження, партнерство, задача вибору, нечіткий логічний вивід.

Список використаної літератури

1. Xu H., Andrashko Yu. The problem of partnership choices for scientific projects cooperation. *Management of development of complex systems*, 2019. 37. 111–115.
2. Biloshchytskyi A., Kuchansky A., Andrashko Yu., Biloshchytska S., Kuzka O., Shabala Ye., Lyashchenko T. A method for the identification of scientists' research areas based on cluster analysis of scientific publications. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 5/2(87). P. 4–11. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.112323>
3. Biloshchytskyi A., Andrashko Yu., Kuchansky A., Biloshchytska S., Kuzka O., Terentyev O. Evaluation methods of the results of scientific research activity of scientists based on the analysis of publication citations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. № 3/2(87). P. 4–10. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.103651>
4. Kuchansky A., Andrashko Yu., Biloshchytskyi A., Danchenko O., Parionov O., Vatskel I., Honcharenko T. The method for evaluation of educational environment subjects' performance based on the calculation of volumes of m-simplexes. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2018. № 2/4(92). P. 15–25. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.126287>
5. Kretschmer, H. Cooperation structure, group size and productivity in research groups. *Scientometrics* 7, 1985, 39–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02020140>
6. Wagner C. S., Leydesdorff L. Network structure, self-organization, and the growth of international collaboration in science, *Research Policy*. 2005. Vol. 34, Issue 10. P. 1608–1618. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.respol.2005.08.002>
7. Xu H., Kuchansky A. The problem of choice of partners for organization of cooperation in the framework of scientist of scientific and educational projects. *Scientific Bulletin of Uzhhorod National University. Series of Mathematics and Informatics*. 2019. 2(35), P. 134–142. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2\(35\).134-142](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.2(35).134-142)
8. Godin B., Gingras Y. Impact of collaborative research on academic science. *Science and Public Policy*. 2000. Vol. 27, Issue 1. P. 65–73. DOI: <https://doi.org/10.3152/147154300781782147>

Одержано 09.08.2022

УДК 512.56, 512.58

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).16-22](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).16-22)**V. M. Bondarenko¹, M. V. Styopochkina²**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
 Leading researcher of the department of algebra and topology,
 Doctor of physical and mathematical sciences
vitalij.bond@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Polissia National University,
 Associate professor of the department of higher and applied mathematics,
 Candidate of physical and mathematical sciences
stmar@ukr.net
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

ON A CRITERION OF THE FINITENESS OF THE REPRESENTATION TYPE FOR FAMILIES OF THE CATEGORIES OF INJECTIVE REPRESENTATIONS

The representations of posets (partially ordered sets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter in 1972, play an important role in the modern representation theory and its applications. M. M. Kleiner obtained a description of posets of finite representation type in terms of critical posets (the minimal ones of infinite representation type) and Yu. A. Drozd proved that a poset S (not containing an element designated as 0) is of finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive, i.e. positive on the set of non-negative vectors (in 1972 and 1974, respectively). In this paper we consider a situation (which deals with infinite posets), when the main role is played not by weakly positivity but by positivity of the Tits quadratic form. The situation relates to the study of the categories of representations of a special form, and in this case we use established by the first author a connection between the Tits quadratic forms for partially ordered sets and commutative quivers.

Keywords: injective representation, critical poset, Tits quadratic form for posets, Tits quadratic form for commutative quivers, finite representation type, positivity and weak positivity.

1. Introduction. The representations of partially ordered sets (abbreviated as posets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter (in matrix form) in 1972 [1], play an important role in the modern representation theory. In his first paper on this topic M. M. Kleiner [2] proved that a poset S is of finite representation type (i.e. has, up to equivalence, a finite number of indecomposable representations) if and only if it does not contain subposets of the form $\mathcal{K}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathcal{K}_2 = (2, 2, 2)$, $\mathcal{K}_3 = (1, 3, 3)$, $\mathcal{K}_4 = (1, 2, 5)$ and $\mathcal{K}_5 = (N, 4)$. Specified posets are called the *critical posets* relative to the finiteness of the type (i.e. they exhaust all the minimal posets with an infinite number of indecomposable representations, up to equivalence). On the other hand, in 1974 Yu. A. Drozd [3] proved that a poset has finite representation type if and only if the Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors). From these two statements it follows that the critical posets are also critical relatively to the weak positivity of the above quadratic form.

We single out the main further works of Kyiv mathematicians on this topic [4] – [14], which is related to the above indicated papers (limited to the period of 30 years and without claiming the completeness of this list).

In 2005 the authors [15] proved that a poset is critical relatively to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic (in the sence of [16]) to a Kleiner’s poset; in [15] all such posets and also posets with their quadratic forms to be positive were fully described.

In this paper, which is naturally considered as a continuation of the papers [17] and [18], we study a situation (dealing with infinite posets), when the main role is played not by weakly positivity but by positivity of the Tits quadratic form. The situation relates to the study of the categories of representations of a special form, and in this case we use established by the first author a connection between the Tits quadratic forms for posets and commutative quivers.

2. Representations of posets. Throughout the paper, k denotes a field and all k -vector spaces are finite-dimensional. The category of k -vector spaces is denoted by $\text{mod } k$. Linear mappings and morphisms of categories multiply from left to right. For formal reasons, we always assume that a poset does not contain an element designated as 0 or $+\infty$.

Recall the well-known definitions about representations of posets in terms of vector spaces graded by posets (see [13]).

Let A be a finite poset. An A -graded vector space over k is by definition the direct sum $U = \bigoplus_{a \in A} U_a$ of k -vector spaces U_a . A linear map $\varphi : U \rightarrow U'$ between A -graded vector spaces U and U' is called an A -map if $\varphi_{bc} = 0$ for each $b, c \in A$ not satisfying $b \leq c$, where φ_{xy} denotes the linear map of U_x into U'_y induced by the map φ .

A representation of a poset A over k is a triple $W = (V, U, \gamma)$ formed by a k -vector space V , an A -graded space U and a linear map $\gamma : V \rightarrow U$; a morphism of representations $W \rightarrow W'$ is a pair (μ, ν) , formed by a linear map $\mu : V \rightarrow V'$ and an A -map $\nu : U \rightarrow U'$, such that $\gamma\nu = \mu\gamma'$. The category of representations of A will be denoted by $\text{Rep}_k A$.

Injective and projective representations of posets are defined in a standard way. In this paper, we are interested in injective representations.

For representations X and Y of a poset A , we write $0 \Rightarrow X \xrightarrow{\alpha} Y$ if all maps $\varphi_{xx}, x \in A$, are injective. A representation X of a poset A is said to be *injective* if any diagram

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Rightarrow & R' \rightarrow R \\ & & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

can be embedded in a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} 0 & \Rightarrow & R' \rightarrow R \\ & & \downarrow \swarrow \\ & & X \end{array} .$$

The full subcategory of $Rep_k A$ consisting of all injective objects will be denoted by $Inj_k A$. The poset A is said to be of *inj-finite representation type over k* if the category $Funct(Inj_k A, \text{mod } k)$ of functors from the category $Inj_k A$ to the category $\text{mod } k$, which is called (according to the general definition for categories) the category of representations of $Inj_k A$, is of finite type, i.e. has, up to isomorphism, a finite number of indecomposable objects.

3. Main result. Let S be an infinite poset and \mathbb{Z} denotes the integer numbers. Denote by $\mathbb{Z}_0^{S \cup 0}$ the subset of the cartesian product $\mathbb{Z}^{S \cup 0} = \{z = (z_i) \mid i \in S \cup 0\}$ consisting of all vectors $z = (z_i)$ with finite number of nonzero coordinates. We call *the quadratic Tits form of S* (by analogy with the case of a finite poset) the form $q_S : \mathbb{Z}_0^{S \cup 0} \rightarrow \mathbb{Z}$ defined by the equality

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

This form is called *positive* if it take positive values for all nonzero $z \in \mathbb{Z}_0^{S \cup 0}$.

We formulate now the main result of this paper.

Theorem 1. *Let S be an unlimited poset, i.e. it has no both the minimal and maximal elements, and k be a field. Then the following conditions are equivalent:*

- (I) *every finite subposet of S is of inj-finite representation type over k ;*
- (II) *the Tits quadratic form of S is positive.*

4. Representations of commutative quivers and their connections with injective representations of posets. Let $Q = (Q_0, Q_1)$ be a finite quiver with the set. of vertices Q_0 and the set of arrows Q_1 .

A representation \bar{U} of the quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ over a field k consists of vector spaces $U_i \in \text{mod } k, i \in Q_0$, and linear mappings $\gamma_\alpha : U_x \rightarrow U_y$, where $\alpha : x \rightarrow y$ runs through Q_1 . Morphism φ from \bar{U} to \bar{U}' consists of linear mappings $\varphi_x : U_x \rightarrow U'_x, x \in Q_0$, such that for each arrow $\alpha : x \rightarrow y$ the diagram

$$\begin{array}{ccc} U_x & \xrightarrow{\gamma_\alpha} & U_y \\ \varphi_x \downarrow & & \downarrow \varphi_y \\ U'_x & \xrightarrow{\gamma'_\alpha} & U'_y \end{array}$$

is commutative. The category representations over k of the quiver Q is denoted by $Rep_k Q$. The quiver Q is said to be of finite representation type over k if the category $Rep_k Q$ is of finite type.

A quiver $Q = (Q_0, Q_1)$ is called *commutative* if it has no multiple arrows and oriented cycles, and any two path with the same starting and terminating vertices are equal (it is assumed that there are no other relations on the paths).

The Tits quadratic form $br_Q(z)$ of a commutative quiver $Q = (Q_0, Q_1)$, the study of which was initiated by S. Brenner [19], differs from the Tits quadratic form $q_Q(z)$ of $Q = (Q_0, Q_1)$ as an usual quiver [20] by the presence of an additional term, which depends on the number of independent relations (in both cases $z = (z_1, \dots, z_n)$, where $n = |Q_0|$). Consider this situation more precisely; we shall look at it based on [19]–[22].

Denote by kQ the k -algebra of paths, whose basis is all paths on the quiver Q , by J the ideal in it generated by all arrows of Q , and by I the ideal generated

by all elements $f - g \in kQ$, where f and g are paths with the same starting and terminating vertices. Then by definition the quadratic Tits form $br_Q : \mathbb{Z}^{Q_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ of the commutative quiver Q is defined by the equality

$$br_Q(z) =: q_Q(z) + \sum_{i,j \in S} r_{ij} z_i z_j = \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{(i \rightarrow j) \in Q_1} z_i z_j + \sum_{(i,j \in S)} r_{ij} z_i z_j$$

with $r_{ij} = \dim_k e_i(I/IJ + JI)e_j$, where e_s denotes the primitive idempotent of kQ corresponding to the trivial path $s \rightarrow s$.

Theorem 2. *Let Q be a (finite) commutative quiver and k be an arbitrary field. Then the following condition are equivalent:*

- (a) Q is of finite representation type;
- (b) the Tits quadratic form $br_Q(z)$ is weakly positive.

Note that a similar theorem holds for an usual quiver and the Tits quadratic form $q_Q(z)$ (Gabriel's theorem [20]) but in this case the weak positivity is equivalent to the positivity. As indicated in [17], Theorem 2 follows from the results of [23]. This is also mentioned in [21], but the corresponding calculations are not given in [23].

Let now S be a finite poset. We associate to S the quiver $\vec{S} = (\vec{S}_0, \vec{S}_1)$ with the set of vertices \vec{S}_0 consisting of the elements of S and the set of arrows

$$\vec{S}_1 = \{i \rightarrow j \mid i < j, i \text{ and } j \text{ are adjacent}\}$$

(elements i and $j > i$ is called *adjacent* if there is not an element s with $j > s > i$). We always shall consider the quiver $\vec{S} = (\vec{S}_0, \vec{S}_1)$ as a commutative one.

Theorem 3 ([17]). *Let S be a finite poset and k be a field. Denote by S^+ the poset $S \cup +\infty$ with $x < +\infty$ for any $x \in S$. Then the following conditions are equivalent:*

- (1) the poset S is of inj-finite representation type;
- (2) the commutative quiver \vec{S}^+ is of finite representation type.

5. Proof of Theorem 1. Theorem 1 follows from the above theorems and the following one:

Theorem 4 ([24]). *Let S be an unlimited poset. Then the following conditions are equivalent:*

- (A) the Tits quadratic form $q_S(z)$ is positive for any finite subposet $P \subset S$;
- (B) the Tits quadratic form $br_{\vec{S}}(z)$ is positive for any finite subposet $P \subset S$;
- (C) the Tits quadratic form $br_{\vec{S}}(z)$ is weakly positive for any finite subposet $P \subset S$.

Namely, the implication (I) \Rightarrow (II) follows from the implications (1) \Rightarrow (2) (Theorem 3), (a) \Rightarrow (b) (Theorem 2) and (B) \Rightarrow (A) (Theorem 4); the implication (II) \Rightarrow (I) follows from the implications (A) \Rightarrow (C) (Theorem 4), (b) \Rightarrow (a) (Theorem 2) and (2) \Rightarrow (1) (Theorem 3).

6. Conclusions. In this paper we study representations of posets and consider a dealing with infinite posets situation, when the main role is played not by weakly positivity (as in the cases of finite posets) but by positivity of the Tits quadratic

form. The situation relates to the investigation of subcategories of injective objects in the categories of representations of posets.

We prove that every finite subposet of an unlimited poset is of *inj*-finite representation type over a field k (i.e. the category of injective representations has, up to isomorphism, a finite number of indecomposable objects) if and only if the Tits quadratic form of S is positive. In this proof, an impotent role is played by commutative quivers and their Tits quadratic form.

The obtained results can be used in the study of similar problems.

References

1. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
2. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 32–41 [in Russian].
3. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkts. Anal. Prilozh.*, 8(3), 34–42 [in Russian].
4. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5), 963–991 [in Russian].
5. Plakhotnik, V. V. (1976). Representations of partially ordered sets over commutative rings. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 40(3), 527–543 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., Zavadskij, A. G., & Nazarova, L. A. (1979). On representations of tame partially ordered sets. *Representations and Quadratic Forms. Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR*, 75–105 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M. (1988). Bundles of semi-chains and their representations. *Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR, Preprint 88.50* [in Russian].
8. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1991). Tame partially ordered sets with involution. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 183, 149–159 [in Russian].
9. Bondarenko, V. M., & Zavadskij, A. G. (1991). Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth. *CSM Conf. Proc.*, 11, 67–88.
10. Zavadskij, A. G. (1991). Differentiation algorithm and classification of representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 55(5), 1007–1048 [in Russian].
11. Belousov, K. I., Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1997). Finitely representable triadic sets. *Algebra Anal.*, 9(4), 3–27 [in Russian].
12. Belousov, K. I., Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1997). Finitely represented dyadic sets and their multielementary representations. *Ukr. Mat. Zh.*, 49(11), 1465–1477 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear Algebra Appl.*, 365, 45–90.
14. Zavadskij, A. G. (2003). Tame equipped posets. *Linear Algebra Appl.*, 365, 389–465.
15. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2(3), 18–58 [in Russian].
16. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24–25.
17. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). Partially ordered sets of injective type. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 10–11, 22–33 [in Russian].
18. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2006). On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms. *Algebra Discret. Math.*, 2, 17–21.
19. Brenner, S. (1974). Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms. *Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. Carleton Univ., Ottawa, Ontario*.
20. Gabriel, P. (1972). Unzerlegbare Darstellungen. *Manuscripta Math.*, 6, 71–103.
21. Brenner, S., & Butler, M. C. R. (1979). Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Representation theory, II (Proc. Second Intern. Conference, Carleton Univ., Ottawa, Ont.)*, 103–169.

22. Bongartz, K. (1983). Algebras and quadratic forms. *J. London Math. Soc.* 2, 28(3), 461–469.
23. Zavadskij, A. G., & Shkabara, A. C. (1976). Commutative quivers and matrix algebras of finite type. *Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR, Preprint 76.03* [in Russian].
24. Bondarenko, V. M. (2006). On a connection between Drozd and Brenner quadratic forms (the case of unbounded posets). *Ukr. Mat. Visn.*, 3(2), 153–165 [in Russian].

Бондаренко В. М., Стъпочкіна М. В. Про критерій скінченності зображувального типу для сімейств категорій ін'єктивних зображень.

Зображення ч. в. множин (частково впорядкованих множин), введені Л. А. Назаровою і А. В. Ройтером у 1972 р., відіграють важливу роль у сучасній теорії зображень та її застосуваннях. М. М. Клейнер отримав опис ч. в. множин скінченного зображувального типу в термінах критичних ч. в. множин (мінімальних ч. в. множин нескінченного зображувального типу), а Ю. А. Дрозд довів, що ч. в. множина S (яка не містить елемента, позначеного як 0) має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

є слабо додатною, тобто додатною на множині невід'ємних векторів (у 1972 та 1974 роках відповідно). У цій статті ми розглядаємо ситуацію (що стосується нескінченних ч. в. множин), коли головну роль відіграє не слабка додатність, а додатність квадратичної форми Тітса. Ситуація стосується дослідження категорій зображень спеціального вигляду, і в цьому випадку ми використовуємо встановлений першим автором зв'язок між квадратичними формами Тітса для частково впорядкованих множин і комутативних сагайдаків.

Ключові слова: ін'єктивне зображення, критична ч. в. множина, квадратична форма Тітса для ч. в. множин, квадратична форма Тітса для комутативних сагайдаків, скінченний зображувальний тип, додатність і слабка додатність.

Список використаної літератури

1. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 5–31.
2. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 32–41.
3. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, № 3. С. 34–42.
4. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР. Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39, № 5. С. 963–991.
5. Плахотник В. В. Представления частично упорядоченных множеств над коммутативными кольцами. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1976. Т. 40, № 3. С. 527–543.
6. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. *Представления и квадратичные формы. Киев: Ин-т математики АН УССР*. 1979. С. 75–105.
7. Бондаренко В. М. Связки полуцепных множеств и их представления. *Препр. Ин-т математики АН УССР*. 1988. 88.60. 32 с.
8. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*. 1990. Т. 183. С. 149–159.
9. Bondarenko V. M., Zavadskij A. G. Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth. *CSM Conf. Proc.* 1991. Vol. 11. P. 67–88.
10. Завадский А. Г. Алгоритм дифференцирования и классификация представлений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55. № 5. С. 1007–1048.
11. Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В. Конечнопредставимые триадические множества. *Алгебра и анализ*. 1997. Т. 9. № 4. С. 3–27.

12. Белоусов К. И., Назарова Л. А., Ройтер А. В. Конечнопредставимые диадические множества и их мультиэлементарные представления. *УМЖ*. 1997. Т. 49. № 11. С. 1465–1477.
13. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces *Linear Algebra Appl.* 2003. Vol. 365. P. 45–90.
14. Zavadskij A. G. Tame equipped posets. *Linear Algebra Appl.* 2003. Vol. 365. P. 389–465.
15. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
16. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2005. № 1. С. 24–25.
17. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Частично упорядоченные множества инъективно конечного типа. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2005. № 10–11. С. 22–33.
18. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On finite posets of inj-finite type and their Tits forms. *Algebra Discret. Math.* 2006. No. 2. P. 17–21.
19. Brenner S. Quivers with commutativity conditions and some phenomenology of forms. *Proc. of Intern. Conference of Representations of Algebras. Carleton Univ., Ottawa, Ontario*. 1974.
20. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen. *Manuscripta Math.* 1972. No. 6. P. 71–103.
21. Brenner S., Butler M. C. R. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont.)*. 1979. P. 103–169.
22. Bongartz K. Algebras and quadratic forms. *J. London Math. Soc. 2*. Vol. 28. No. 3. 1983. P. 461–469.
23. Завадский А. Г., Шкабара А. С. Коммутативные колчаны и матричные алгебры конечного типа. *Препр. Ин-т математики АН УССР*. 1976. 76.03. 52 с.
24. Бондаренко В. М. О связи между квадратичными формами Дрозда и Бреннер (случай неограниченных частично упорядоченных множеств). *Український математичний вісник*. 2006. Т. 3. № 2. С. 153–165.

Одержано 10.10.2022

В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²

¹ Інститут математики НАН України,
 провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
 доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
 голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
 канд. фіз.-мат. наук
sambrinka@ukr.net
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

ПРО КАТЕГОРІЮ ЗОБРАЖЕНЬ КОМУТАТИВНОЇ НЕЦИКЛІЧНОЇ НАПІВГРУПИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ОДИНИЧНОГО І НУЛЬОВОГО ЕЛЕМЕНТІВ

Класифікацію напівгрупи третього порядку (в термінах таблиць Келі, з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) вперше отримав Т. Тамура в 1953 р., а згодом, але вже за допомогою комп'ютерної програми, Г. Е. Форсайт (1955 р.). Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп побудовані в працях В. М. Бондаренка і Я. В. Заціхи. Вони також описали зображувальний тип напівгруп третього порядку над довільним полем і у випадку напівгруп скінченного зображувального типу вказали канонічні форми матричних зображень.

У низці попередніх праць автори вивчали категорні властивості напівгруп малого порядку і, зокрема, досліджували матричні алгебри Ауслендера для напівгруп третього порядку. У цій статті продовжуються такі дослідження.

Ключові слова: поле, напівгрупа, антиізоморфізм, визначальні співвідношення, матричні зображення, зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку описано в [1]. Якщо розглядати лише комутативні напівгрупи, та ще й такі, що не є ні циклічними, ні циклічними з приєднаним одиничним чи нульовим елементом, то існує, з точністю до ізоморфізму), лише чотири напівгрупи (в круглих дужках вказано всі елементи, в кутових — мінімальну систему твірних, а потім — визначальні співвідношення):

$$(a) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$$

$$(b) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = cb = 0;$$

$$(c) (0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = cb = 0;$$

$$(d) (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c \text{ (є наслідком решти співвідношень)}, \\ b^2 = c^2, bc = cb = c.$$

Зауважимо, що тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних 0 і e (якщо вони є) не виписуються.

Всі ці напівгрупи ручні, причому, окрім напівгрупи (a), — скінченного зображувального типу, тобто мають скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень [1].

У випадку скінченного зображувального типу однією із форм дослідження категорії зображень є опис алгебри Ауслендера як алгебри ендоморфізмів пря-

мої суми представників усіх класів еквівалентності нерозкладних зображень. У простому випадку (b) алгебра Ауслендера розглядалася як приклад в роботі [2], а у випадку (c) вивчалася в [3]. У цій роботі ми вивчаємо алгебру Ауслендера напівгрупи (d).

2. Формулювання основного результату. Нехай S — напівгрупа і $T = \{T(x) | x \in S\}$ — її матричне зображення. Ендоморфізмом зображення T називається матриця X така, що $T(x)X = XT(x)$ для будь-якого $x \in S$. Зрозуміло, що коли зафіксована система твірних напівгрупи, то вказану рівність достатньо розглядати лише для твірних елементів. Всі матриці з такою властивістю утворюють алгебру, яка називається *алгеброю ендоморфізмів зображення T* . У випадку, коли напівгрупа S має скінченний зображувальний тип, алгебра ендоморфізмів прямої суми Σ всіх, з точністю до еквівалентності, нерозкладних зображень (тобто, по одному представнику з кожного класу еквівалентності) називається *алгеброю Ауслендера напівгрупи S над полем K* і позначається нами через $Aus_K(S)$. Оскільки ми розглядаємо матричні зображення, то алгебру $Aus_K(S)$ природно називати *матричною алгеброю Ауслендера*. Зауважимо, що вона не залежить від вибору представників у класах еквівалентності в тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри ізоморфні; більш того, вони спряжені як підалгебри повної матричної алгебри відповідного порядку.

Сформулюємо тепер основний результат. Напівгрупу вигляду (d) позначимо через S_d .

Теорема 1. *Матрична алгебра Ауслендера $Aus_K(S_d)$ напівгрупи S_d над полем K характеристики, відмінної від двох, складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K .

3. Доведення теореми 1. Канонічні форми матричних зображень комутативних напівгруп третього порядку отримано в роботі [1] з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач та зображень (див., напр., [4]–[15]). Зокрема, для напівгрупи S_d канонічна форма має такий вигляд:

$$b \rightarrow B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \rightarrow C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

де E — деякі одиничні клітини (розмірність яких ми не фіксуємо). Оскільки будь-яке зображення еквівалентне зображенню вигляду (*) (при цьому деякі одиничні клітини можуть бути “порожніми”, тобто мати розмірність 0), то і для прямої суми Σ всіх представників класів еквівалентності нерозкладних зображень виконується ця властивість. Значить для обчислення алгебри Ауслендера можна вважати, що зображення Σ має вигляд (*). Зрозуміло, що при цьому

(якщо міркувати лише чисто формально) всі одиничні клітини мають розмірність 1 або 0 (інакше деяке зображення входить в Σ два рази або більше). Та ефективність методу, застосованого для отримання канонічної форми, полягає і в тому, що якщо в матриці Σ всі одиничні клітини вважати одновимірними, то переставно нерозкладні прямі доданки будуть взагалі нерозкладними і попарно нееквівалентними. Це легко перевірити (в даному випадку) і безпосередньо. Дійсно, зображення Σ дорівнює прямій сумі зображень

- 1) $B_1 = (1), C_1 = (1);$
- 2) $B_2 = (1), C_2 = (-1);$
- 3) $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$
- 4) $B_4 = (0), C_4 = (0),$

кожне з яких, очевидно, нерозкладне, і всі вони попарно нееквівалентні. Звідси маємо, що зображеннями 1)–4) вичерпуються всі (з точністю до еквівалентності) нерозкладні зображення напівгрупи S_d і, отже, алгебру Ауслендера можна обчислювати, виходячи із зображення Σ_0 вигляду (*) з одновимірними одиничними клітинами. Таким чином, зображення Σ_0 має такий вигляд:

$$b \rightarrow B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c \rightarrow C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а значить матрична алгебра Ауслендера задається рівностями $B_0X = XB_0, C_0X = XC_0$ як рівняннями відносно матриці $X = (x_{ij}), 1 \leq i, j \leq 5$.

Оскільки матриця C_0 діагональна, то рівність $C_0X = XC_0$ еквівалентна рівностям $x_{ij} = 0$ для $i = 1, j = 2, 3, 4, 5, i = 2, j = 1, 3, 4, 5, i = 3, 4, 5, j = 1, 2$. Цей факт є частинним випадком загальних теорем (див., напр., [16, VIII, §2]), але легко впливає безпосередньо із рівності $C_0X = XC_0$. Дійсно, запишемо останню рівність в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси (після перемноження матриць)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} & -x_{24} & -x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & -x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & -x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & -x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & -x_{42} & 0 & 0 & 0 \\ x_{51} & -x_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки, в свою чергу,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність $B_0X = XB_0$ має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{53} & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

4. Висновки. У роботі вивчається категорія матричних зображень комутативної нециклічної напівгрупи третього порядку без одиничного і нульового елементів. Описана матрична алгебра Ауслендера над довільним полем характеристики, відмінної від 2. Отримані результати (разом з відповідними методами досліджень) знайдуть застосування при вивченні категорій зображень інших напівгруп.

Список використаної літератури

1. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2018. Вип. 1. № 32. С. 36–49.
2. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Σ -функція числа параметрів для системи матричних зображень. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*. 2015. Т. 12, № 3. С. 56–64.
3. Зубарук О. В. Про алгебру Ауслендера напівгрупи, породженої двома анульовними 2-нільпотентним і 2-потентним елементами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2021. Вип. 38. № 1. С. 48–54.
4. Бондаренко В. М. Связки полупростых множеств и их представления. (Препр. АН УССР. Ин-т математики; 88.60). Киев, 1988. 32 с.
5. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп. *Записки науч. семинаров ЛОМИ*. 1977. Т. 71. С. 24–41.
6. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про матричні зображення моноїдів четвертого порядку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика*. 2018. Т. 33. № 2. С. 19–26.
7. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. Представления и квадратичные формы. *Ин-т математики АН УССР. Киев*. 1979. С. 75–105.
8. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. *Ин-т математики АН УССР. Киев*. 1977. С. 104–114.
9. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*. 1990. Т. 183. С. 149–159.
10. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 5–31.
11. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces. *Linear algebra and its applications*. 2003. Vol. 365. P. 45–90.
12. Bondarenko V. M., Gerasimova T. G., Sergeichuk V. V. Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications*. 2009. Vol. 430. No. 1. P. 86–105.
13. Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M. On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2013. Vol. 16. No. 1. P. 16–19.
14. Bondarenko V. M., Tertychna O. M. On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2008. No. 4. P. 15–22.
15. Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V. On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2016. Vol. 21. No. 1. P. 18–23.
16. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Москва : Наука, 1966. 576 с.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unit and zero elements.

The classification of semigroups of the third order (in terms of Cayley tables, up to isomorphism and antiisomorphism) was first described by T. Tamura in 1953, and later, but with the help of a computer program, by G. E. Forsyth (1955). The minimal systems of generators and the corresponding defining relations for all such semigroups were constructed in the works of V. M. Bondarenko and Y. V. Zatsikha. They also described representational type of third-order semigroups over an arbitrary field and in the case of semigroups of finite representational type, the canonical forms of matrix representations were indicated.

In a number of previous works, the authors studied the categorical properties of semigroups of small order and, in particular, studied matrix Auslander algebras for third-order semigroups. This article continues such research.

Keywords: field, semigroup, antiisomorphism, defining relations, matrix representation, representation type, canonical form, Auslander algebra.

References

1. Bondarenko, V., & Zaciha, Ja. (2018). Canonical forms of matrix representations of small-order semigroups. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
2. Bondarenko, V., & Zubaruk, O. (2015). Σ -function of the number of parameters for the matrix representations system. *Proc. Inst. math. NAS of Ukraine*, 12(3), 56–64 [in Russian].
3. Zubaruk, O. V. (2021). On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 38(1), 48–54 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M. (1988). *Svyazki polutsepnykh mnozhestv i ikh predstavleniya* [Bundles of semichained sets and their representations]. (Prepr. / AN USSR. In-t matematiki; 88.60). Kiev [in Russian].
5. Bondarenko, V. M., & Drozd, Ju. A. (1977). *Predstavlencheskiy tip konechnykh grupp* [The representation type of finite groups]. Modules and representations. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 71, 24–41 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). On matrix representations of monoids of the fourth order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and informatics*, 33(2), 19–26 [in Ukrainian].
7. Bondarenko, V. M., Nazarova, L. A., & Zavadskii, A. G. (1979). O predstavleniyakh ruchnykh chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of tame partially ordered sets]. *Representations and quadratic forms. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat.*, Kiev, 75–106 [in Russian].
8. Drozd, Ju. A. (1977). O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh [Tame and wild matrix problems]. *Matrix problems, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat.*, Kiev, 104–114 [in Russian].
9. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Ruchnyye chastichno uporyadochennyye mnozhestva s involyutsiyey [Tame partially ordered sets with involution]. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 183, 149–159 [in Russian].
10. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Predstavleniya chastichno uporyadochennykh mnozhestv [Representations of partially ordered sets]. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
11. Bondarenko, V. M. (2003). Linear operators on S -graded vector spaces. *Linear algebra and its applications*, 365, 45–90.
12. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear algebra and its applications*, 430(1), 86–105.
13. Bondarenko, V. M., & Kostyshyn, E. M. (2013). On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$. *Algebra Discrete Math.*, 16(1), 16–19.
14. Bondarenko, V. M., & Tertychna, O. M. (2008). On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication. *Algebra Discrete Math.*, 4, 15–22.
15. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.*, 21(1), 18–23.
16. Gantmakher, F. (1966). *Teoriya matrits* [Matrix theory]. *Moskow: Nauka* [in Russian].

Одержано 15.09.2022

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).29-40](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).29-40)

О. М. Десницький¹, Ю. Ю. Млавець², І. В. Орловський³,
О. А. Тимошенко⁴

¹ Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
магістр фізико-математичного факультету

sasha178178@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2455-9795>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук

yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

³ Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

кандидат фізико-математичних наук

i.v.orlovsky@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0922-1611>

⁴ Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

кандидат фізико-математичних наук

otymoshenkokpi@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ЗБУРЕНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІНЕРІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ

У роботі доведено граничну теорему про асимптотичну поведінку розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівняння. Рівняння цього типу є узагальненням багатьох моделей, що широко використовуються у задачах фінансової математики. Доведення базується на застосуванні техніки розробленої в роботах Й. І. Гіхмана та А. В. Скорохода для автономних стохастичних диференціальних рівнянь. Знайдено умови, за яких асимптотична поведінка розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння визначається не випадковою функцією. Наведено приклади симуляцій за допомогою метода Ейлера-Маруями.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, лінійне стохастичне диференціальне рівняння, асимптотичні властивості розв'язків, моделювання стохастичних диференціальних рівнянь, метод Ейлера-Маруями.

1. Вступ. Стохастичні диференціальні рівняння ефективно моделюють випадкові процеси. Вони є основним інструментом для дослідження у багатьох галузях науки таких, як: страхова та фінансова математика, економіка, теорія управління тощо. На теперішній час наближені аналітичні і асимптотичні методи дослідження математичних моделей стали невід'ємною частиною теорії математичного моделювання, що дозволяє вивчати розв'язки достатньо складних збурених задач, якщо відомі розв'язки детермінованих задач. Зокрема, збурені динамічні системи часто мають економічну інтерпретацію, що дійсно робить дослідження цікавим для фахівців економічної галузі.

Математики приділяють особливу увагу питанням пов'язаним з асимптотичними властивостями розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. Такі

задачі вивчали Й. І. Гіхман, А. В. Скороход [1], Р. З. Хасьмінський [2], Г. Маккін [3], Н. Ікеда та С. Ватанабе [4] та багато інших. За деяких умов розв'язки збурених систем можуть зберігати асимптотичні властивості траєкторій відповідних граничних автономних систем. Але загалом це не так: поведінка збуреної та незбуреної траєкторій можуть суттєво відрізнятись. Так, Й. І. Гіхман, А. В. Скороход [1] вивчали асимптотичну поведінку розв'язку автономного рівняння збуреного за допомогою вінерівського процесу:

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t), \quad t \geq 0,$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес, $a(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ – неперервні додатні функції. Й. І. Гіхман, А. В. Скороход досліджували асимптотику розв'язку стохастичного диференціального рівняння за допомогою звичайного диференціального рівняння з відокремлювальними змінними. Тобто, було знайдено умови, за яких випадковий шум майже не впливає на швидкість зростання розв'язку $X(\cdot)$ збуреної системи. Умови асимптотичної еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння та звичайного диференціального рівняння представлено в роботі Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [5].

Пізніше в роботах [6], [7], [8] було знайдено точний порядок зростання для неавтономного рівняння з коефіцієнтами зсуву та дифузії спеціального вигляду:

$$dX(t) = \alpha(t)a(X(t))dt + \beta(t)\sigma(X(t))dw(t), \quad t \geq 0,$$

де $w(\cdot)$ – стандартний вінерівський процес, $a(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ – неперервні додатні функції, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ – неперервні функції.

Метою цієї роботи є дослідження асимптотичної поведінки траєкторій розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, які виникають в задачах фінансової математики.

2. Основний результат. Розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + \gamma(t))dt + \beta(t)X(t)dw(t), \quad (1)$$

де $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції.

Зауважимо, що якщо покласти $\gamma(t) = 0$, то отримаємо так зване однорідне рівняння

$$dX_0(t) = \alpha(t)X_0(t)dt + \beta(t)X_0(t)dw(t). \quad (2)$$

Лінійні стохастичні диференціальні рівняння зустрічаються у багатьох прикладних задачах, зокрема, у таблиці 1 наведено рівняння для різноманітних моделей відсоткових ставок, які є частинними випадками рівняння (1). Параметри $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ та β – це константи, $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції.

Типи моделей зміни відсоткових ставок

Моделі	СДР
<i>Vašiček</i>	$dX(t) = \alpha(\beta - X(t))dt + \sigma dw(t)$
<i>Brenan-Schmude</i>	$dX(t) = \alpha(\beta - X(t)) + \sigma X(t)dw(t)$
<i>Ornstein-Uhlenbeck</i>	$dX(t) = \alpha(t)(X(t) - \gamma(t))dt + dw(t)$
<i>Hull-White</i>	$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + \gamma(t))dt + \varphi(t)dw(t)$
<i>Rendleman-Bartter</i>	$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + \beta(t)X(t)dw(t)$

Параметри у кожному з рівнянь мають певний фінансовий зміст. Так, наприклад, у моделі О. Васічека (*Vašiček*) параметр β – середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, σ – параметр волатильності, а α – параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення.

Для знаходження розв'язку рівняння (1), слід спочатку знайти деякий частинний розв'язок відповідного однорідного рівняння (2) (див., наприклад, [1]).

Нехай $X_0(\cdot)$ є розв'язком однорідного рівняння (2), для якого $X_0(0) = 1$. Тоді, в силу неперервності, $X_0(t) > 0$ на деякому проміжку. Для розв'язання (2) розглянемо допоміжний процес $Z(t) = \ln(X_0(t))$ (тоді $Z(0) = 0$), до якого застосуємо формулу Іто:

$$dZ(t) = \frac{1}{X_0(t)}\alpha(t)X_0(t)dt - \frac{1}{2} \frac{1}{X_0^2(t)}\beta^2(t)X_0^2(t)dt + \frac{1}{X_0(t)}\beta(t)X_0(t)dw(t),$$

або

$$dZ(t) = \left(\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t) \right) dt + \beta(t)dw(t).$$

Звідки

$$Z(t) = \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s) \right) ds + \int_0^t \beta(s)dw(s).$$

Тоді

$$X_0(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left(\alpha(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s) \right) ds + \int_0^t \beta(s)dw(s) \right\}. \quad (3)$$

Перейдемо до рівняння (1). Його розв'язок $X(\cdot)$ будемо шукати у вигляді

$$X(t) = X_0(t)Y(t),$$

де $Y(\cdot)$ – деякий процес, що задовольняє рівняння

$$dY(t) = a(t)dt + b(t)dW(t), \quad Y(0) = X(0),$$

в якому $a(t)$ і $b(t)$ – невідомі функції, а $X_0(\cdot)$ задано у (3).

Застосовуючи формулу Іто до $X(\cdot)$, отримаємо

$$\begin{aligned} dX(t) &= Y(t)dX_0(t) + X_0(t)dY(t) + dX_0(t)dY(t) = \\ &= \alpha(t)X(t)dt + \beta(t)X(t)dw(t) + \\ &\quad + X_0(t) ((a(t) + \beta(t)b(t))dt + b(t)dW(t)). \end{aligned}$$

Підставляючи отримане у (1), будемо мати:

$$a(t) = (X_0(t))^{-1} \gamma(t) \text{ та } b(t) = 0.$$

Отже,

$$Y(t) = X(0) + \int_0^t (X_0(s))^{-1} \gamma(s) ds.$$

Використовуючи останнє співвідношення та (3), одержимо

$$\begin{aligned} X(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left[\alpha(s) - \frac{1}{2} \beta^2(s) \right] ds + \int_0^t \beta(s) dw(s) \right\} \cdot \\ \cdot \left[X(0) + \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^s \left(\alpha(u) - \frac{1}{2} \beta^2(u) \right) du - \int_0^s \beta(u) dw(u) \right\} \cdot \gamma(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Як бачимо, хоч сам розв'язок має представлення в явному вигляді, але це представлення достатньо громіздке для виявлення його асимптотичних властивостей.

Розглянемо рівняння (1), та припустимо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty, \quad X(0) > 0, \quad \text{майже напевно (м.н.).}$$

Умови, при яких розв'язок стохастичного диференціального рівняння необмежено зростає із збільшенням часу можна знайти в [1] або [10].

Помітимо також, що за цих умов, враховуючи вигляд розв'язку (4),

$$X(t) > 0, \quad t \geq 0, \quad \text{м.н.}$$

Розглянемо також звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = \alpha(t)\mu(t)dt, \quad (5)$$

де $\alpha(\cdot)$ – функція, яка співпадає з функцією із (1), $\mu(\cdot)$ – розв'язок рівняння (5) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty. \quad (6)$$

Позначимо $A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$, тоді

$$\ln \mu(t) = A(t), \quad (7)$$

та в силу умови (6) одержимо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty. \quad (8)$$

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. Нехай $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції, такі, що існує неперервний розв'язок $X(\cdot)$ рівняння (1) з початковою умовою $X(0) > 0$, причому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Припустимо, що виконується умова (8) та наступні три умови:

(i) існує таке число $M > 1$, що для $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} \leq M;$$

(ii) $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ задовольняють наступним співвідношенням

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta^2(s) ds = 0, \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A^2(2^n)} \int_0^{2^{n+1}} \beta^2(s) ds < \infty; \quad (10)$$

(iii) для $\alpha(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$

$$\sup_{t \geq 0} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s) ds = K_\gamma < \infty;$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \quad (11)$$

Доведення. Доведемо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \quad (12)$$

Розглянемо процес $Z(t) = \ln X(t)$ та застосуємо до нього формулу Іто

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} \langle dX(t), dX(t) \rangle.$$

Оскільки згідно правила множення диференціалів (див. [4])

$$\langle dX(t), dX(t) \rangle = (\beta(t)X(t))^2 dt,$$

то

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)} (\alpha(t)X(t) + \gamma(t)) dt + \frac{1}{X(t)} \beta(t)X(t) dw(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} (\beta(t)X(t))^2 dt,$$

тобто

$$dZ(t) = \left(\alpha(t) + \gamma(t)e^{-Z(t)} - \frac{1}{2} \beta^2(t) \right) dt + \beta(t) dw(t),$$

або в інтегральній формі

$$Z(t) = Z(0) + A(t) + \int_0^t \gamma(s)e^{-Z(s)} ds - \frac{1}{2} \int_0^t \beta^2(s) ds + \int_0^t \beta(s) dw(s).$$

Таким чином, враховуючи останню рівність та (7), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} &= \frac{Z(t)}{A(t)} = \frac{Z(0)}{A(t)} + 1 + \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s)e^{-Z(s)} ds - \frac{1}{2A(t)} \int_0^t \beta^2(s) ds + \\ &+ \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta(s) dw(s) = \frac{Z(0)}{A(t)} + 1 + I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned}$$

З (8) випливає, що

$$\frac{Z(0)}{A(t)} \longrightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Доведемо, що

$$I_1(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds \longrightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ м.н.} \quad (14)$$

Розглянемо довільне $\omega \in \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty \wedge X(0) > 0 \right\}$ та зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$. Тоді існує $t_1 = t_1(\varepsilon, \omega) > 0$ таке, що для всіх $t > t_1$

$$X(t) > \frac{2}{\varepsilon} K_\gamma,$$

де K_γ задано у (iii). Тоді для будь-якого $t \geq t_1$, враховуючи умову (iii), будемо мати

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{1}{A(t)} \int_{t_1}^t \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds \leq \\ &\leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2K_\gamma} \cdot \frac{1}{A(t)} \int_{t_1}^t \gamma(s) ds \leq \\ &\leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2K_\gamma} \cdot \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s) ds \leq \frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Більш того, враховуючи (8) та те, що $\inf_{t \geq 0} X(t, \omega) > 0$, буде існувати $t_2 = t_2(\varepsilon, \omega) > 0$ таке, що для всіх $t > t_2$

$$\frac{1}{A(t)} \int_0^{t_1} \frac{\gamma(s)}{X(s)} ds < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки остаточно отримуємо, що для будь-якого $t > \max\{t_1, t_2\}$

$$I_1(t) < \varepsilon.$$

В силу довільності вибору $\varepsilon > 0$, отримуємо (14).

З умови (9) випливає, що

$$I_2(t) = -\frac{1}{2A(t)} \int_0^t \beta^2(s) ds \longrightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Перейдемо до доведення

$$I_3(t) = \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta(s) dw(s) \longrightarrow 0, \text{ при } t \rightarrow \infty, \text{ м.н.} \quad (16)$$

Розглянемо послідовність $t_n = 2^n$, $n \geq 0$, і покажемо спочатку, що

$$I_3(t_n) = I_3(2^n) \longrightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ м.н.} \quad (17)$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Використовуючи нерівність Дуба (див. [1]),

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{k \geq n} I_3(2^k) > \varepsilon \right\} &\leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq 2^n} I_3(t) > \varepsilon \right\} = \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq 2^n} \frac{1}{A(t)} \left| \int_0^t \beta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in [2^k, 2^{k+1}]} \frac{1}{A(t)} \left| \int_0^t \beta(s) dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{A^2(2^k)} \int_0^{2^{k+1}} \beta^2(s) ds \longrightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

завдяки умові (10), і (17) доведено. Помітимо також, що з останнього співвідношення, враховуючи те, що послідовність $\sup_{t \geq 2^n} I_3(t)$, $n \in \mathbb{N}$, є монотонно спадною, отримуємо також

$$\sup_{t \geq 2^n} I_3(t) \longrightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ м.н.} \quad (18)$$

Нехай тепер $t \geq 2$ деяке довільне число, а $n \in \mathbb{N}$ таке, що $2^n \leq t < 2^{n+1}$. Тоді

$$|I_3(t)| \leq |I_3(t) - I_3(2^n)| + I_3(2^n) \leq \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} |I_3(t) - I_3(2^n)| + I_3(2^n),$$

і, враховуючи (17), для доведення співвідношення (16) достатньо показати, що

$$\sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} |I_3(t) - I_3(2^n)| \longrightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ м.н.}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} |I_3(t) - I_3(2^n)| &= \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \left| \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta(s) dw(s) - \frac{1}{A(2^n)} \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) \right| = \\
&= \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \left| \left(\frac{1}{A(t)} - \frac{1}{A(2^n)} \right) \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) + \frac{1}{A(t)} \int_{2^n}^t \beta(s) dw(s) \right| \leq \\
&\leq \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \frac{A(t) - A(2^n)}{A(t)A(2^n)} \cdot \left| \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) \right| + \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \frac{1}{A(t)} \left| \int_{2^n}^t \beta(s) dw(s) \right| = \\
&= I_{4,n} + I_{5,n}.
\end{aligned}$$

З (17) та умови (i) випливає

$$\begin{aligned}
I_{4,n} &= \sup_{t \in [2^n, 2^{n+1}]} \frac{A(t) - A(2^n)}{A(t)} \cdot I_3(2^n) \leq \left(\frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} - 1 \right) \cdot I_3(2^n) \leq \\
&\leq (M - 1) I_3(2^n) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ м.н.}
\end{aligned}$$

Розглянемо другий доданок

$$\begin{aligned}
I_{5,n} &\leq \sup_{t \geq 2^n} \frac{1}{A(t)} \left| \int_{2^n}^t \beta(s) dw(s) \right| = \\
&= \sup_{t \geq 2^n} \frac{1}{A(t)} \left| \int_{2^n}^t \beta(s) dw(s) + \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) - \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) \right| \leq \\
&\leq \sup_{t \geq 2^n} \frac{1}{A(t)} \left| \int_0^t \beta(s) dw(s) \right| + \frac{1}{A(2^n)} \int_0^{2^n} \beta(s) dw(s) = \\
&= \sup_{t \geq 2^n} I_3(t) + I_3(2^n) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ м.н.},
\end{aligned}$$

завдяки (17) та (18). Таким чином, (16) доведено.

З (13)–(16) випливає (12).

Теорему доведено.

3. Моделювання розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Доповненням до аналітичних результатів слугуватимуть результати моделювання, отримані за допомогою чисельних методів. Моделювання та візуалізація дозволяють побачити закономірності, які важко розгледіти в аналітичному записі рівняння. Таким чином, можна помітити не очевидну на перший погляд асимптотичну поведінку чи паттерн в поведінці траєкторій. Для моделювання рівняння будемо використовувати програмну реалізацію методу Ейлера-Маруяма (див, наприклад, [11], [12]). До того ж в роботі Т. Мітсуї [13] було показано, що різниця між розв'язком стохастичного диференціального рівняння та його апроксимацією Ейлера-Маруяма прямує до нуля м.н.

Покладемо $t_n^h = nh$ та $\Delta_n^h w = w(t_n^h) - w(t_{n-1}^h)$. Числове наближення X , породжене в точці $t_n^h = nh$ і лінійно інтерпольоване між ними, будемо позначати

$\{X^h(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$, тобто $X_n^h = X^h(t_n^h)$ – значення в n -ій точці сітки розбиття. Схема моделювання за допомогою метода Ейлера-Маруями є наступною:

$$X^h(0) = x_0;$$

$$X_n^h = X_{n-1}^h + \alpha(t_{n-1}^h)X_{n-1}^h + \gamma(t_{n-1}^h)h + b(t_{n-1}^h)X_{n-1}^h \Delta_n^h w,$$

де $\Delta_n^h w$ – гауссівська випадкова величини $\mathcal{N}(0; h)$ при фіксованому h та $X_n^h = X^h(t_n^h)$. Наприклад, у випадку відрізка $[0; 1]$ вибираємо $h = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Для моделювання розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння (1) з наступними коефіцієнтами

$$\alpha(t) \sim \tilde{\alpha}t^m, \quad \gamma(t) \sim \tilde{\gamma}t^p, \quad \beta(t) \sim \tilde{\beta}t^k, \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (19)$$

де $m, p, k \in (0; +\infty)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}$ – деякі додатні сталі. Знайдемо при яких значеннях m, p, k умови Теорему 1 будуть виконуватися. Для (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(2^{t+1})}{A(2^t)} = 2^m,$$

а тому обмежена. Для (ii)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \beta^2(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\beta^2(t)}{\alpha(t)} = \frac{\tilde{\beta}^2}{\tilde{\alpha}} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{2k-m} = 0,$$

при $m > 2k$. Для загального члена ряду з нерівності (10) маємо

$$\frac{1}{A^2(2^n)} \int_0^{2^{n+1}} \beta^2(s) ds \sim \frac{2^{2k+1}(m+1)^2}{2k+1} \cdot 2^{2n(k-m-\frac{1}{2})}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а тому ряд збігається, якщо $m > k - \frac{1}{2}$. І останнє

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \gamma(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = \begin{cases} \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\alpha}}, & \text{при } m = p; \\ 0, & \text{при } m > p. \end{cases}$$

а тому при $m \geq p$ буде виконуватися (iii).

Підсумовуючи отримане, якщо $m \geq p, m > 2k$ і $m, p, k \in (0; +\infty)$, то до лінійного стохастичного диференціального рівняння (1) з коефіцієнтами, що задовольняють (19), можна застосувати Теорему 1.

Застосуємо схему Ейлера-Маруями для апроксимації розв'язку наступного стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} X(t) + t^{\frac{1}{2}} \right) dt + t^{\frac{1}{6}} X(t) dw(t).$$

Зобразимо траєкторії його явного розв'язку з початковою умовою $X(0) = 5$ та схемою Ейлера-Маруями для $n = 50$ та відтворимо розв'язок детермінованої задачі з початковою умовою $\mu(0) = 5$:

$$d\mu(t) = \sqrt{t}\mu(t)dt.$$

Для таких рівнянь виконують усі умови Теорема 1. Як видно з Рис. 1 траєкторії прямують до нескінченності та мають схожу динаміку. Відношення логарифмів розв'язків представлено на Рис. 2. Моделювання відношення логарифмів розв'язку рівняння збуреного вінерівським процесом та розв'язку детермінованої задачі показує, що траєкторії є еквівалентними, а отже відношення самих розв'язків є також еквівалентним, що підтверджує твердження Теорема 1.

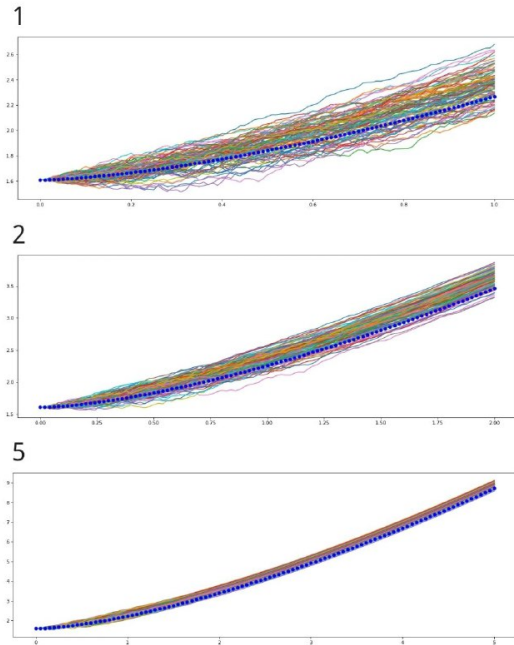


Рис. 1. Поведінка розв'язків стохастичного диференціального рівняння та розв'язку звичайного диференціального рівняння (точкова синя лінія), при $t \rightarrow \infty$.

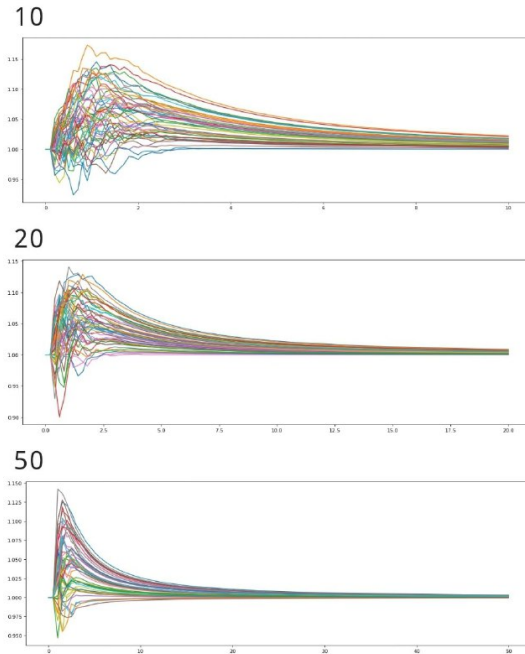


Рис. 2. Логарифмічна еквівалентність розв'язків стохастичного диференціального рівняння та розв'язку звичайного диференціального рівняння.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дослідження асимптотичних властивостей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь представляє особливий інтерес з практичної точки зору. У статті наведено умови, при яких властивості розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння загального вигляду визначаються властивостями розв'язку звичайного диференціального рівняння, що належить до класу диференціальних рівнянь з відокремлювальними змінними. Досліджуване рівняння є узагальненням більшості моделей росту відсоткової ставки, що активно використовуються у світі фінансів. Було знайдено дві не випадкові функції, під дією яких розв'язок стохастичного рівняння та розв'язок відповідної детермінованої задачі мають однаковий порядок на нескінченності. Цей результат дає змогу досить просто отримувати граничні теореми для різноманітних стохастичних диференціальних рівнянь, що виникають в задачах фінансової математики.

Надалі було б цікаво розповсюдити основний результат роботи на випадок

моделей породжених дробово-броунівським рухом.

Список використаної літератури

1. Гіхман Й. І., Скороход А. В. Стохастичні диференціальні рівняння. Київ : Наукова думка. 1968. 356 с.
2. Хасьмінський Р. З. Стійкість систем диференціальних рівнянь при випадкових збуреннях їх параметрів. Наука. 1969. 367 с.
3. Маккін Г. Стохастичні інтеграли. Москва : Мир, 1972. 181 с.
4. Ікеда Н., Ватанабе С. Стохастичні диференціальні рівняння і дифузійні процеси. Москва : Наука, 1986. 445 с.
5. Келлер Г., Керстінг Г., Рослер У. Про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь. *Wahrsch. Geb.* 1984. Вип. 68. С. 163–184. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00531776>
6. Buldygin V. V. and Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Theor Stoch. Process*, 2010. 16. P. 12–22.
7. Tymoshenko O. A. Generalization of asymptotic behavior of non-autonomous stochastic differential equations. *Naukovi Visti NTUU KPI*, 2016. 4. P. 100–106. DOI: <https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.4.71649>
8. Klesov O. I., Tymoshenko O. A. Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals, Problems and Challenges. Switzerland: Springer*. 2019. P. 97–114. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-46>
9. Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G., and Tymoshenko O. A. On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Theory Stoch. Process*, 2008. 14. P. 11–29.
10. Klesov O. I., Tymoshenko O. A. Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, 2013. 41. P. 25–35.
11. Asmussen S., Glynn P. W. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York: Springer, 2007. 476 p.
12. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992. 326 p.
13. Mitsui T. Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Res. Inst. Math.Sci. Kyoto Univ.*, 1995. P. 124–138.

Desnytskiy O. M., Mlavets Yu. Yu., Orlovskiy I. V., Tymoshenko O. A. Asymptotic Behavior of Solutions of General Linear Differential Equations Peretrubated by Wiener Process.

The limit theorem on the asymptotic behavior of the solution of a linear stochastic differential equation of the general form is proved. The method is based on the application of the technique developed in the work by Y. I. Gihman and A. V. Skorokhoda for autonomous stochastic differential equations. The conditions under which the solution of a linear stochastic differential equation is approximated by a non-random function have been found. Examples of simulations using the Euler-Murayama method are given.

Keywords: stochastic differential equation, linear stochastic differential equation, asymptotic properties of solutions, modeling of stochastic differential equations, the Euler-Maruyama method.

References

1. Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1972). *Stochastic differential equations*. Berlin: Springer-Verlag.
2. Khasminskiy, R. Z. (1969). *Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters*. Nauka [in Russian].
3. Makkin, G. (1972). *Stochastic integrals*. Moscow: Mir. [in Russian].
4. Ikeda, N., & Watanabe, S. (1992). *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*. North Holland.
5. Keller, G., Kersting, G., & Rösler, U. (1984). On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 68, 163–189. <https://doi.org/10.1007/BF00531776>
6. Buldygin, V., & Tymoshenko, O. (2010). On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Theory of Stochastic Processes*, 16(2), 12–22. <https://doi.org/10.1093/bjps/axp018>
7. Tymoshenko, O. A. (2016). Generalization of asymptotic behavior of non-autonomous stochastic differential equations. *Naukovi Visti NTUU KPI*, 4, 100–106. <https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.4.71649>
8. Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2019). Almost Sure Asymptotic Properties of Solutions of a Class of Non-homogeneous Stochastic Differential Equations. *Modern Mathematics and Mechanics. Fundamentals Problems and Challenges. Switzerland: Springer*, 97–114. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-46>
9. Buldygin, V. V., Klesov, O. I., Steinebach, J. G., & Tymoshenko, O. A. (2008). On the φ -asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations. *Theory Stoch. Process*, 14, 11–29.
10. Klesov, O. I., & Tymoshenko, O. A. (2013). Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, 41, 25–35.
11. Asmussen, S., & Glynn, P. W. (2007). *Stochastic Modelling and Applied Probability*. New York: Springer.
12. Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
13. Mitsui, T. (1995). Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Kokyuroku (Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ)*, 850, 124–138.

Одержано 18.08.2022

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).41-47](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).41-47)**M. K. Iliencko¹, A. Yu. Polishchuk²**

¹ National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
 associate prof. of the department of mathematical analysis and probability theory,
 PhD, associate prof.
 mari-run@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6982-6124>

² Institute of Applied Physics, National Academy of Science of Ukraine,
 junior researcher

nastya.varennikova312@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3512-1561>

ON THE CONVERGENCE OF BAUM-KATZ SERIES FOR SUMS OF LINEAR 2-ND ORDER AUTOREGRESSIVE SEQUENCES

We consider complete convergence and closely related Hsu-Robbins-Erdős-Spitzer-Baum-Katz series for sums whose terms are elements of a linear 2-nd order autoregressive sequences of random variables and prove sufficient conditions for the convergence of this series.

Keywords: linear 2-nd order autoregressive models, weighted sums, complete convergence, Hsu-Robbins-Erdős series, Spitzer series, Baum-Katz series.

1. Introduction. On a common probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ consider a linear 2-nd order autoregressive sequence of random variables (r.v.'s) $(\xi_k, k \geq 1)$, which obeys the system of stochastic recurrence equations

$$\xi_{-1} = 0, \quad \xi_0 = 0, \quad \xi_k = a\xi_{k-1} + b\xi_{k-2} + \theta_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

where a and b are some real constants, (θ_k) is a sequence of independent copies of a r.v. θ . Note that linear regression models of different types have been studied for a long time. A multitude of publications contain various problems for regression sequences of r.v.'s and their extensions. See, for instance [1, 2], and numerous references therein.

For elements of the sequence (1) set

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1,$$

and for any $\varepsilon > 0$ consider the following series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P} \left\{ \frac{|S_n|}{n^{1/p}} > \varepsilon \right\}, \quad (2)$$

where $0 < p < 2$ and $r \geq p$. In this paper we are interested in conditions for the convergence of this series. Hereinafter we will refer to the series (2) as to Baum-Katz series, although some other no less prominent authors were involved in introducing it.

Historically, for the sequence $(X_n, n \geq 1)$ of independent copies of a r.v. X , and $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$, the reduced version (the case $r = 2p = 2$) of the

series (2) initially arose in the paper by Hsu and Robbins along with the notion of complete convergence, see [3]. In their paper, authors proved that if $\mathbb{E}X^2 < \infty$, then $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|S_n/n - \mathbb{E}X\right| > \varepsilon\right\} < \infty$, while the converse was provided by Erdős, see [4]. Note that in view of the Borel-Cantelli Lemma complete convergence implies almost sure convergence, and so is tightly connected with the Strong Law of Large Numbers. Further, Spitzer, see [5], showed that $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbb{P}\left\{\left|S_n/n - \mathbb{E}X\right| > \varepsilon\right\} < \infty$ if and only if $\mathbb{E}|X| < \infty$. Note that series (2) covers the Spitzer's case with $r = p = 1$. Finally, for the sequence of independent copies of a r.v. X , Baum and Katz, see [6], introduced the series (2) and proved that it is convergent if and only if $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, with $\mathbb{E}X = 0$, when $r \geq 1$. Since then these classical results have been generalized in several directions, including Banach space setting (see, e.g., [7]). We refer to [8] where more detailed history on the topic is provided. Among all extensions we distinguish results concerning complete convergence and convergence of Baum-Katz series for weighted sums of independent r.v.'s, also known as rowwise independent random arrays, (see, e.g., [1, 8–10, 12, 13] and references therein).

As to dependent patterns, in the paper [14] necessary and sufficient conditions for the convergence of the series (2) were obtained for the case of first-order autoregressive sequence of r.v.'s, i.e. with $b = 0$ in (1).

Specifically, in this paper we concentrate on sufficient conditions of the series (2) for sums of elements of model (1), and under some simple assumptions imposed on a and b we expect to obtain similar to independent case Baum-Katz result. In our investigation we intend to reduce the case to the idea provided in [14], which in its turn was partially borrowed from [10].

2. Preliminaries. Consider the nonrandom recurrence sequence $(u_n, n \geq 1)$:

$$u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \quad n \geq 1, \quad (3)$$

Evaluating (1) one has

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \theta_1 = u_0\theta_1, \\ \xi_2 &= a\theta_1 + \theta_2 = u_1\theta_1 + u_0\theta_2, \\ \xi_3 &= (a^2 + b)\theta_1 + a\theta_2 + \theta_3 = u_2\theta_1 + u_1\theta_2 + u_0\theta_3, \\ &\dots, \end{aligned}$$

i.e.

$$\xi_k = \sum_{l=1}^k u_{k-l}\theta_l, \quad k \geq 1.$$

Now, for $n \geq 1$ and $1 \leq k \leq n$ set

$$u(n-k) = \sum_{m=0}^{n-k} u_m.$$

Thus,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k u_{k-l}\theta_l \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=0}^{n-k} u_m \right) \theta_k = \sum_{k=1}^n u(n-k)\theta_k, \quad n \geq 1.$$

3. Main result. Let us immediately proceed to the main result of this paper.

Theorem 1. Let in (1)

$$-1 < b < 1 - |a|, \quad (4)$$

and $0 < p < 2$, $r \geq p$. If $\mathbb{E}|\theta|^r < \infty$, where $\mathbb{E}\theta = 0$ whenever $r \geq 1$, then for any $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P}\left\{\frac{|S_n|}{n^{1/p}} > \varepsilon\right\} < \infty.$$

4. Proof. In [14] the analogue of Theorem 1 for linear 1-st order autoregressive sequence of r.v.'s was proved in all details. We may adopt the proof of sufficiency to our case if we show that the values $u(n-k)$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$, are bounded in a similar way (compared with $a(n, k)$'s in [14]).

Introduce two real-valued matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note, that C is a Frobenius matrix. Let λ_1 and λ_2 be its eigenvalues, i.e. roots of the characteristic equation $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$. Denote by ν_1 and ν_2 multiplicities of λ_1 and λ_2 respectively. Set

$$\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} \quad \text{and} \quad \mu = \max_{1 \leq k \leq 2} \{\nu_k : |\lambda_k| = \rho\}.$$

Obviously, in our case either $\mu = 1$ or $\mu = 2$. Moreover, assumption (4) implies that both roots λ_1 and λ_2 lie within the unit circle, that is $\rho < 1$.

Observe that

$$CM = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2M = \begin{pmatrix} a^2 + b & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ u_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Further,

$$C^3M = \begin{pmatrix} a^3 + 2ab & 0 \\ a^2 + b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3 & 0 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix},$$

and so on. Using the method of mathematical induction it is easy to show that for any $s \geq 1$,

$$C^s M = \begin{pmatrix} u_s & 0 \\ u_{s-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Let for a square matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ with real entries $\|\cdot\|$ denote the matrix norm of the following form: $\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^2 a_{i,j}^2\right)^{1/2}$. According to result by Koval', see [15] (see also Lemma 7.7.3 [1]), if C is a Frobenius matrix, there exist some constants $c_2 > c_1 > 0$, such that for any $s \geq 1$,

$$c_1 \cdot \rho^s \cdot s^{\mu-1} \leq \|C^s M\| \leq c_2 \cdot \rho^s \cdot s^{\mu-1},$$

where c_1 and c_2 do not depend on s .

Now since

$$(C^0 + C^1 + C^2 + \dots + C^{n-k})M = \begin{pmatrix} u(n-k) & 0 \\ u(n-k-1) & 0 \end{pmatrix},$$

then according to Koval's result,

$$\begin{aligned} |u(n-k)| &\leq \sqrt{(u(n-k))^2 + (u(n-k-1))^2} = \left\| \sum_{l=0}^{n-k} C^l M \right\| \leq \sum_{l=0}^{n-k} \|C^l M\| \leq \\ &\leq c_2 \sum_{l=0}^{n-k} \rho^l \cdot l^{\mu-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

where c_2 is some positive constant.

Now distinguish between two cases:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (if $b \neq -a^2/4$). In this case $\mu = 1$ and according to (5),

$$|u(n-k)| \leq c_2 \sum_{l=0}^{n-k} \rho^l = c_2 \frac{1 - \rho^{n-k+1}}{1 - \rho}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1.$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2$ (if $b = -a^2/4$). In this case $\mu = 2$ and according to (5),

$$|u(n-k)| \leq c_2 \sum_{l=1}^{n-k} l \rho^l \leq c_2 \sum_{l=1}^{\infty} l \rho^l = c_2 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1.$$

Combining both cases,

$$|u(n-k)| \leq L = \text{const} = \max \left\{ \frac{c_2}{1-\rho}, \frac{c_2 \rho}{(1-\rho)^2} \right\}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1.$$

Now, briefly adopt the proof of the sufficiency of Theorem 1 in [14] to our case. As in [14] we first restrict our proof to the case of symmetrically distributed r.v. θ . Let us fix any $\varepsilon > 0$ and apply an iteration of the Hoffmann-Jorgensen inequality (see [10] or [14]) with $s = t = n^{1/p}\varepsilon$. Thus, for $j \geq 1$ there exist some constants C_j and D_j such that

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{|S_n| > n^{1/p}\varepsilon \cdot 3^j\right\} \leq \\ &\leq C_j \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|u(n-k)\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon\right\} + D_j \left(\mathbb{P}\left\{|S_n| > n^{1/p}\varepsilon\right\}\right)^{2^j}. \end{aligned} \quad (6)$$

The first terms in (6) can be estimated as follows

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|u(n-k)\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon\right\} &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|\theta_k| > \frac{n^{1/p}\varepsilon}{|u(n-k)|}\right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\left\{|\theta_k| > n^{1/p}\varepsilon L^{-1}\right\} = n \mathbb{P}\left\{|\theta| > n^{1/p}\varepsilon_2\right\}, \end{aligned}$$

where $\varepsilon_2 = \varepsilon L^{-1}$. Further, we refer to the corresponding estimations in [14].

Now consider the second term in (6). According to Markov inequality for $r > p$, one has

$$\mathbb{P}\left\{|S_n| > n^{1/p}\varepsilon\right\} \leq \frac{\mathbb{E}|S_n|^r}{(n^{1/p}\varepsilon)^r}.$$

Next deal with $\mathbb{E}|S_n|^r$ distinguishing between the following cases.

1) Let $0 < r \leq 1$. Applying the c_r -inequality (see, for example, [16]) with $c_r = 1$ to $\mathbb{E}|S_n|^r$, one obtains

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left| u(n-k)\theta_k \right|^r = \sum_{k=1}^n |u(n-k)|^r \mathbb{E}|\theta_k|^r \leq \mathbb{E}|\theta|^r L^r n.$$

2) Let $r > 1$. In this case to $\mathbb{E}|S_n|^r$ we consequently apply the Marcinkiewicz-Zygmund inequality (see, for example, [16]) and the following well-known inequality: for positive a_i , $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ and $r > 0$ it is true that

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{r/2} \leq n^{0 \vee (r/2-1)} \sum_{i=1}^n a_i^r.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S_n|^r &\leq b_r \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \left(u(n-k)\theta_k \right)^2 \right)^{r/2} \leq b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E} \sum_{k=1}^n |u(n-k)\theta_k|^r = \\ &= b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E}|\theta|^r \sum_{k=1}^n |u(n-k)|^r \leq b_r n^{0 \vee (r/2-1)} \mathbb{E}|\theta|^r L^r n = b_r n^{1 \vee (r/2)} \mathbb{E}|\theta|^r L^r. \end{aligned}$$

Here b_r is some positive constant from the Marcinkiewicz-Zygmund inequality. Combining the above two cases, we arrive at the following bounds

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq C(r) \mathbb{E}|\theta|^r n^{1 \vee (r/2)},$$

with $C(r) = L^r$ or $b_r L^r$ depending on whether $0 < r \leq 1$ or $r > 1$.

Now to finish the proof one needs to literary follow the steps of it in [14].

Example 1. *If θ is a normally distributed r.v. with $\mathbb{E}\theta = 0$, the model (1) represents the so-called Gaussian 2-Markov sequence of r.v.'s. with constant coefficients. In this case the series (2) converges provided that $0 < p < 2$, $r \geq p$ and $-1 < b < 1 - |a|$.*

5. Conclusions. In the paper for sequences of sums whose terms are elements of 2-nd order linear autoregressive sequences, sufficient conditions for the convergence of Baum-Katz series are considered. Under some anticipated assumptions imposed on the coefficients of autoregressive sequence, obtained sufficient conditions are expressed as moment assumption of the generating r.v. The latter, in its turn, agrees with the classical Baum-Katz independent case.

We intently focused our attention on 2-nd order autoregressive sequences, evading general m -th order case, since for $m = 2$ assumptions imposed on the coefficients of the sequence are described in the most simple form. But, in prospect, by means of the same technique set problem may be generalized to m -th order autoregressive sequences for any $m \geq 2$. Moreover, we expect to prove also necessary conditions for convergence of Baum-Katz series for such sequences.

References

1. Buldygin, V. V., & Solntsev, S. A. (1997). *Asymptotic behavior of linearly transformed sums of random variables*. Kluwer Academic Publishers.

2. Buraczewski, D., Damek, E., & Mikosch, T. (2016). *Stochastic Models with Power Law Tails. The Equation $X = AX + B$* . Springer.
3. Hsu, P. L., & Robbins, H. (1947). Complete convergence and the law of large numbers. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 33(2), 25–31.
4. Erdős, P. (1949). On a theorem of Hsu and Robbins. *Ann. Math. Statist.*, 20, 286–291.
5. Spitzer, F. (1956). A combinatorial lemma and its application to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82(2), 323–339.
6. Baum, L. E., & Katz, M. (1965). Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Am. Math. Soc.*, 120, 108–123.
7. Huan, N. V. (2019). On the complete convergence of sequences of random elements in Banach spaces. *Acta Math. Hungar.*, 159, 511–519.
8. Li, D., Rao, M. B., Jiang, T., & Wang, X. (1995). Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of random variables. *J. Theor. Probab.*, 8(1), 49–76.
9. Hu, T.-C., Moritz, F., & Taylor, R. L. (1989). Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables. *Acta Math. Hung.*, 54(1-2), 153–162.
10. Gut, A. (1992). Complete convergence for arrays. *Period. Math. Hung.*, 25(1), 51–75.
11. Hu, T.-C., Szynal, D., & Volodin, A. I. (1998). A note on complete convergence for arrays. *Stat. Probab. Lett.*, 38(1), 27–31.
12. Cai, G.-H. (2006). Strong laws for weighted sums of i.i.d. random variables. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 12, 29–36.
13. Chen, P., Ma, X., & Sung, S. H. (2014). On complete convergence and strong law for weighted sums of i.i.d. random variables. *Abstr. Appl. Anal.*
14. Iliencko, M. (2021). On the convergence of the Baum–Katz series for elements of a linear autoregression. *Acta Math. Hungar.*, 164, 413–427.
15. Koval', V. A. (1991). Asymptotic behaviour of solutions of stochastic recurrence equations \mathbb{R}^d . *Ukrain. Mat. Zh.*, 43(6), 829–833 [in Russian]. English translation in *Ukrain. Math. J.*, 43(6), 776–783.
16. Lin, Z., & Bai, Z. (2010). *Probability inequalities*. Science Press Beijing and Springer Verlag.

Ільєнко М. К., Поліщук А. Ю. Про збіжність рядів Баума-Каца для сум елементів лінійної авторегресійної послідовності випадкових величин 2-го порядку.

У статті розглядається повна збіжність та тісно пов'язані з нею ряди Сюя-Роббінса-Ердиша-Баума-Каца для сум елементів лінійної авторегресійної послідовності випадкових величин 2-го порядку та встановлюються достатні умови збіжності вказаних рядів.

Ключові слова: лінійні авторегресійні моделі 2-го порядку, зважені суми, повна збіжність, ряди Сюя-Роббінса-Ердиша, ряди Спітцера, ряди Баума-Каца.

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Solntsev S. A. Asymptotic behavior of linearly transformed sums of random variables. Kluwer Academic Publishers, 1997. 504 p.
2. Buraczewski D., Damek E., Mikosch T. Stochastic Models with Power Law Tails. The Equation $X = AX + B$. Springer, 2016. 335 p.
3. Hsu P. L., Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 1947. Vol. 33. No. 2. P. 25–31.
4. Erdős P. On a theorem of Hsu and Robbins. *Ann. Math. Statist.* 1949. Vol. 20. P. 286–291.
5. Spitzer F. A combinatorial lemma and its application to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1956. Vol. 82. No. 2. P. 323–339.
6. Baum L. E., Katz M. Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Am. Math. Soc.* 1965. Vol. 120. P. 108–123.
7. Huan N. V. On the complete convergence of sequences of random elements in Banach spaces. *Acta Math. Hungar.* 2019. Vol. 159. P. 511–519.
8. Li D., Rao M. B., Jiang T., Wang X. Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of random variables. *J. Theor. Probab.* 1995. Vol. 8. No. 1. P. 49–76.

9. Hu T.-C., Moritz F., Taylor R. L. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables. *Acta Math. Hung.* 1989. Vol. 54. No. 1-2. P. 153–162.
10. Gut A. Complete convergence for arrays. *Period. Math. Hung.* 1992. Vol. 25. No. 1. P. 51–75.
11. Hu T.-C., Szynal D., Volodin A. I. A note on complete convergence for arrays. *Stat. Probab. Lett.* 1998. Vol. 38. No. 1. P. 27–31.
12. Cai G.-H. Strong laws for weighted sums of i.i.d. random variables. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.* 2006. Vol. 12. P. 29–36.
13. Chen P., Ma X., Sung S. H. On complete convergence and strong law for weighted sums of i.i.d. random variables. *Abstr. Appl. Anal.*, 2014. 7 p.
14. Iliencko M. On the convergence of the Baum–Katz series for elements of a linear autoregression. *Acta Math. Hungar.* 2021. Vol. 164. P. 413–427.
15. Koval' V. A. Asymptotic behaviour of solutions of stochastic recurrence equations \mathbb{R}^d . *Ukrain. Mat. Zh.* 1991. Vol. 43. No. 6. P. 829–833 [in Russian].
16. Lin Z., Bai Z. Probability inequalities. Science Press Beijing and Springer Verlag, 2010. 181 p.

Одержано 30.08.2022

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).48-60](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).48-60)**O. V. Kapustyan¹, T. V. Yusy piv²**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Professor of the Department of Integral and Differential Equations,
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor
kapustyan@knu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9373-6812>

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
PhD Student of the Department of Integral and Differential Equations
yusy pivt7@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2798-9472>

STABILITY OF LIMIT REGIMES IN GENERAL REACTION-DIFFUSION TYPE SYSTEMS

In this paper, we consider the stability of limit regimes for a general class of nonlinear distributed mathematical models named Reaction-Diffusion models. RD systems naturally arise in many applications. For instance, in the biological mathematical modeling and in the signal transmission theory the FitzHugh–Nagumo model, whose distributed variant is a particular case of general RD system, is widely used. We investigate the problem of stability of attracting sets for an infinite-dimensional RD system with respect to bounded external signals (disturbances). The interaction functions as well as nonlinear perturbations do not assume to be Lipschitz continuous. Therefore, we cannot expect the uniqueness of solution for the corresponding initial-value problem and we have to use a multi-valued semigroup approach. An undisturbed system is considered to have a global attractor, i.e., the minimal compact uniformly attracting set. The main purpose is to estimate the deviation of the trajectory of the disturbed system from the global attractor of the undisturbed one as a function of the magnitude of external signals. Such an estimate can be obtained in the framework of the theory of input-to-state stability (ISS). The paper proposes a new approach to obtaining estimates of robust stability of the attractor in the case of a multivalued evolutionary operator. In particular, it is proved that the multivalued semigroup generated by weak solutions of a nonlinear reaction-diffusion system has the property of local ISS with respect to the attractor of the undisturbed system.

Keywords: reaction-diffusion system, system without uniqueness, input-to-state stability, robust stability, global attractor.

1. Introduction. Conditions of practical stabilization of differential inclusions and properties of optimal sets of practical stability of differential inclusions with a spatial component were studied in [1], [2]. Important results of practical stability, conditions of practical stability were obtained in works [3], [4].

In the present paper we investigate stability of limit regimes in general reaction-diffusion type systems. In dissipative evolutionary systems it is a common view to characterize such regimes in terms of the global attractor theory [5]–[8]. For ill-posed problems when there are no results about uniqueness or regularity of solutions, and for the control problems with singular perturbations the corresponding theory was developed in [9]–[15]. If the considered autonomous system with global attractor undergoes external signals (disturbances) then the natural problem is to estimate the deviation of the trajectory of the disturbed system from the global attractor of the undisturbed one as a function of the magnitude of external signals. Such an estimate

can be obtained in the framework of the theory of input-to-state stability (ISS) [16]–[19]. Recently this theory has been developed to infinite-dimensional systems with non-trivial attractors in [13]–[21]. In particular, the local input-to-state stability and asymptotic gain properties were obtained for well-posed semilinear parabolic and hyperbolic equations. The ISS property for the attractor of a PDE-ODE type system (which consisting of a parabolic system of the reaction-diffusion type and a system of ordinary differential equations) undergoing additive bounded perturbations was explored in paper [22].

In the present paper we generalize these results for more general classes of PDEs like reaction-diffusion systems with non-smooth interaction functions which do not guarantee the uniqueness of solutions of the corresponding initial value problem in the natural infinite-dimensional phase spaces.

2. Setting of the problem. In bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ we consider the following general reaction-diffusion system

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + h(x) + g(u)d(t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $u = u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^N(t, x))$ is an unknown vector-function, $h = (h^1, \dots, h^N)$, $f = (f^1, \dots, f^N)$ are given vector-functions, $g = ((g^{ij}))_{i,j=1}^N$ is a given matrix-valued function, a is a real $N \times N$ matrix such that $\frac{1}{2}(a + a^*) \geq \mu I$, $\mu > 0$, $d = (d^1, \dots, d^N)$ is an external signal (disturbances).

Under rather general assumption (see the last section) we can claim that this problem is globally resolvable in weak sense in the phase space $H = (L^2(\Omega))^N$, i.e., for any disturbances $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ and for any $u_0 \in H$ there exists (maybe not unique) solution of the problem (1) $u \in C([0, +\infty); H)$ with $u(0) = u_0$.

Let us consider undisturbed system ($d \equiv 0$)

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + h(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

It is known [7], that the corresponding multi-valued semiflow (m -semiflow for short)

$$S(t, u_0) = \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ is a weak solution (2), } u(0) = u_0\} \quad (3)$$

has a global attractor Θ in H , i.e., there exists a compact set $\Theta \subset H$ such that

(i) $\Theta = S(t, \Theta)$, $t \geq 0$,

(ii) for any bounded set $B \subset H$

$$\text{dist}(S(t, B), \Theta) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty,$$

where for $A, B \subset H$ we denote

$$S(t, B) = \bigcup_{b \in B} S(t, b),$$

$$\text{dist}(A, \Theta) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in \Theta} \|x - y\|_H,$$

$$\|A\|_{\Theta} = \text{dist}(A, \Theta).$$

Property (ii) means that all trajectories of the system ultimately belong to a given neighborhood of the global attractor is stable in Liapunov sense, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 S(t, O_{\delta}(\Theta)) \subset O_{\varepsilon}(\Theta), \quad (4)$$

where here and after

$$O_{\delta}(A) = \{x \in H \mid \text{dist}(x, A) < \delta\}, \text{ for } A \subset H.$$

Thus, the limit behavior of undisturbed system is completely determined by the global attractor Θ . The main question is how external disturbances d affect such dynamics? Let the initial point $u_0 := u(0) \in H$ and disturbances d are given. Let us denote by $S_d(t, 0, u_0)$ the set of all solutions of (1) with $u(0) = u_0$. It is not true in general that those solutions will converge to Θ as $t \rightarrow \infty$. But it turns out that under additional assumptions it possible to show that we can estimate the deviation of the trajectory of the disturbed system from the global attractor of the undisturbed one as a function of the magnitude of external signals. For that purpose, we need the following classes of comparison functions [21]:

$$\mathcal{K} := \{\gamma : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty) \mid \gamma \text{ is continuous, strictly increasing, } \gamma(0) = 0\},$$

$$\mathcal{K}_{\infty} := \{\gamma \in \mathcal{K} \mid \gamma \text{ is unbounded}\},$$

$$\mathcal{L} := \{\gamma : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty) \mid \gamma \text{ is continuous, strictly decreasing, } \gamma(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\},$$

$$\mathcal{KL} := \{\beta : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty) \mid \beta \text{ is continuous, } \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \forall t \geq 0, \beta(s, \cdot) \in \mathcal{L}, \forall s > 0\}.$$

First, under rather general assumptions, we will show that for the m -semiflow S , generated by undisturbed system (2), with global attractor $\Theta \exists \beta \in \mathcal{KL} \forall u_0 \in H, \forall t \geq 0$

$$\|S(t, u_0)\|_{\Theta} \leq \beta(\|u_0\|_{\Theta}, t).$$

This property helps us to prove the main result about robust stability of our disturbed system (1): $\exists r > 0, \exists \beta \in \mathcal{KL}, \exists \gamma \in \mathcal{K}$ such that

$$\|u_0\|_{\Theta} \leq r, \|d\|_{\infty} \leq r \Rightarrow \forall t \geq 0$$

$$\|S_d(t, 0, u_0)\|_{\Theta} \leq \beta(\|u_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (5)$$

where $\|d\|_{\infty} = \text{ess sup}_{t \geq 0} |d(t)|$.

3. Stability of attractors for multi-valued semiflows in abstract spaces.

We consider an abstract evolutionary (autonomous) system, which is characterized by a normed phase space $(X, \|\cdot\|)$ and a family of maps (solutions) $K \subset \mathbb{C}([0, +\infty); X)$ such that the following conditions hold:

(K1) $\forall x \in X \exists \varphi \in K$ such that $\varphi(0) = x$;

(K2) $\varphi_{\tau}(\cdot) := \varphi(\cdot + \tau) \in K, \forall \tau \geq 0, \forall \varphi \in K$.

Then the multi-valued map $S : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$

$$S(t, x) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K, \varphi(0) = x\},$$

is semiflow. Moreover,

$$\varphi(t+s) \in S(t, \varphi(s)), \quad \forall \varphi \in K, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Assume, that S is strict, i.e., $S(t+s, x) = S(t, S(s, x))$. The last equality allows us to state existence of invariant global attractor.

Lemma 1. *Assume that (K1), (K2) hold, S is strict, and*

(G1) *exists bounded $B_0 \subset X$ such that for all bounded $B \subset X \exists T = T(B) \forall t \geq T$ $S(t, B) \subset B_0$ (dissipativity),*

(G2) *$\forall t_n \nearrow \infty$, for all bounded $B \subset X$, $\forall \xi_n \in S(t_n, B)$ the sequence $\{\xi_n\}$ is precompact (asymptotic compactness),*

(G3) *$\forall t > 0$, $\forall x_n \rightarrow x_0$, $\forall \xi_n \in S(t, x_n)$, $\xi_n \rightarrow \xi_0$ we have: $\xi_0 \in S(t, x_0)$ (closed graph).*

Then m -semiflow S possesses global attractor Θ .

Moreover, if

(G4) *$\forall t_n \rightarrow t_0 \geq 0$, $\forall x_n \rightarrow x_0$, $\forall \xi_n \in S(t_n, x_n)$ up to sequence $\xi_n \rightarrow \xi_0 \in S(t_0, x_0)$*

then Θ is stable in the sense of (4).

Lemma 2. *Assume that $S : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ is a strict m -semiflow, which has a stable global attractor Θ . Also, assume that*

$$\text{for all bounded } B \subset X \text{ the set } \bigcup_{t \geq 0} S(t, B) \text{ is bounded.} \quad (6)$$

Then $\exists \beta \in \mathcal{KL} \quad \forall x \in X, \quad \forall t \geq 0$

$$\|S(t, x)\|_{\Theta} \leq \beta(\|x\|_{\Theta}, t). \quad (7)$$

Now assume that our evolutionary system undergoes disturbances $d \in U$, where the set U satisfies

(U) $U \subset L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $0 \in U$, U is translation-invariant, i.e.,

$$d_h(\cdot) = d(\cdot + h) \in U, \quad \forall h \geq 0, \quad \forall d(\cdot) \in U.$$

Denote by $K_d^\tau \subset \mathbb{C}([\tau, +\infty); X)$ the family of maps satisfying the following properties:

(S1) $\forall x \in X, \quad \forall \tau \geq 0, \quad \forall d \in U \quad \exists \varphi \in K_d^\tau : \varphi(\tau) = x$,

(S2) $\varphi|_{[s, +\infty)} \in K_d^s, \quad \forall \varphi \in K_d^\tau, \quad \forall s \geq \tau$,

(S3) $\varphi(\cdot + h) \in K_{d(\cdot+h)}^\tau, \quad \forall \varphi \in K_d^{\tau+h}, \quad \forall h \geq 0$.

Let us put

$$S_d(t, \tau, x) := \{\varphi(t) \mid \varphi \in K_d^\tau, \varphi(\tau) = x\}.$$

Then $\{S_d\}_{d \in U}$ generates the family of m -semiprocesses, i.e., $\forall d \in U, \quad \forall t \geq s \geq \tau \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall h \geq 0$.

$$S_d(t, \tau, x) = x,$$

$$S_d(t, \tau, x) \subset S_d(t, s, S_d(s, \tau, x)),$$

$$S_d(t+h, \tau+h, x) \subset S_{d(\cdot+h)}(t, \tau, x).$$

It is easy to verify that $\{S_d\}_{d \in U}$ satisfies cocycle property:

$$S_d(t+h, 0, x) \subset S_d(t+h, h, S_d(h, 0, x)) \subset S_{d(+h)}(t, 0, S_d(h, 0, x)),$$

and $\forall \varphi \in K_d^\tau$ $\varphi(t) \in S_d(t, s, \varphi(s))$.

In particular, $\forall \varphi \in K_d^0$, $\forall t, h \geq 0$

$$\varphi(t+h) \in S_d(t+h, h, \varphi(h)) \subset S_{d(+h)}(t, 0, \varphi(h)). \quad (8)$$

(S4) Moreover, if $\forall s \geq \tau$, $\forall \psi \in K_d^\tau$, $\forall \varphi \in K_d^s$ with $\psi(s) = \varphi(s)$ the function

$$\Theta(p) = \begin{cases} \psi(p), & p \in [\tau, s], \\ \varphi(p), & p \geq s, \end{cases}$$

belongs to K_d^τ , then inclusion $S_d(t, \tau, x) \subset S_d(t, s, S_d(s, \tau, x))$ takes place.

(S5) If $\forall h \geq 0$, $\forall \varphi \in K_{d(+h)}^\tau$ we have that $\varphi(\cdot - h) \in K_d^{\tau+h}$, then inclusion $S_d(t+h, \tau+h, x) \subset S_{d(+h)}(t, \tau, x)$ takes place.

Lemma 3. *Under conditions (U), (S1)–(S5) for the semiprocess family $\{S_d\}_{d \in U}$ we have that $\{S_d\}_{d \in U}$ is strict, i.e.*

$$\begin{aligned} S_d(t, \tau, x) &= S_d(t, s, S_d(s, \tau, x)), \\ S_d(t+h, \tau+h, x) &= S_{d(+h)}(t, \tau, x), \\ S_d(t+h, 0, x) &= S_{d(+h)}(t, 0, S_d(h, 0, x)). \end{aligned}$$

In particular, in the undisturbed case ($d \equiv 0$)

$$S_0(t+h, 0, x) = S_0(t, 0, S_0(h, 0, x)),$$

so S_0 is a strict m -semiflow.

The next theorem is the main abstract result of the paper.

Theorem 1. *Assume that m -semiflow S_0 is generated by family of maps K satisfying (K1), (K2), S_0 is strict, has compact values, and possesses stable global attractor Θ .*

Additionally, exists locally bounded function $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that

$$\forall r > 0, \forall t \geq 0,$$

$$\|x_1\| \leq r, \|x_2\| \leq r \Rightarrow \text{dist}(S_0(t, 0, x_1), S_0(t, 0, x_2)) \leq e^{c(r)t} \|x_1 - x_2\|. \quad (9)$$

Assume that $\{S_d\}_{d \in U}$ is the family of m -semiprocesses satisfying (U), (S1)–(S5), where $d \in U$ is disturbances of the initial system S_0 .

Assume that $\exists \sigma \in \mathcal{K}$, exists continuous function $D : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that $\forall r > 0$ $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(r, t)}{t} < \infty$, and $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|d\|_\infty \leq r, \|x\| \leq r &\Rightarrow \\ \text{dist}(S_d(t, 0, x), S_0(t, 0, x)) &\leq D(r, t) \sigma(\|d\|_\infty). \end{aligned} \quad (10)$$

Assume, that

$$\forall r > 0 \text{ the set } \bigcup_{t \geq 0} \bigcup_{\|d\|_\infty \leq r} \bigcup_{\|x\| \leq r} S_d(t, 0, x) \text{ is bounded.} \quad (11)$$

Then $\{S_d\}_{d \in U}$ is local ISS w.r.t. Θ , i.e., inequality (5) holds.

Proof. First let us prove that $\forall r > 0 \exists \underline{\psi}, \bar{\psi}, \alpha \in \mathcal{K}$, exists Lipschitz continuous function V with Lipschitz constant equals 1, such that

$$\underline{\psi}(\|x\|_{\Theta}) \leq V(x) \leq \bar{\psi}(\|x\|_{\Theta}), \quad \forall \|x\|_{\Theta} \leq r, \quad (12)$$

$$\dot{V}_0(x) := \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \text{dist}(V(S_0(t, 0, x)), V(x)) \leq -\alpha(\|x\|_{\Theta}) \quad \forall \|x\|_{\Theta} \leq r, \quad (13)$$

where here and after for $A \subset X$, $V(A) = \bigcup_{a \in A} V(a)$.

For this purpose, we choose function β from (7), fix $r_0 > 0$ and $\forall \varepsilon > 0$ let $T = T(r_0, \varepsilon)$ be such that

$$\beta(r_0, t) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq T. \quad (14)$$

We put

$$V^\varepsilon(x) := e^{-(c_0+c)T} \sup_{t \geq 0} (e^{ct} \eta_\varepsilon(\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta})), \quad \|x\|_{\Theta} < r_0,$$

where $c_0 = c(r_0)$ is taken from (9), $c > 0$ will be fixed throughout the proof, $\eta_\varepsilon(r) := \max\{0, r - \varepsilon\}$. Due to (14)

$$V^\varepsilon(x) = e^{-(c_0+c)T} \sup_{t \in [0, T]} (e^{ct} \eta_\varepsilon(\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta})).$$

Using elementary properties of η_ε :

$$\eta_\varepsilon(r) \leq r, \quad |\eta_\varepsilon(r_1) - \eta_\varepsilon(r_2)| \leq |r_1 - r_2|,$$

we get the following properties of V^ε :

$$V^\varepsilon(x) \leq e^{-c_0 T} \sup_{t \in [0, T]} \eta_\varepsilon(\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta}) \leq \beta(\|x\|_{\Theta}, 0), \quad \forall \|x\|_{\Theta} \leq r_0,$$

and

$$\begin{aligned} |V^\varepsilon(x) - V^\varepsilon(y)| &\leq e^{-(c_0+c)T} \times \\ &\quad \times \sup_{t \in [0, T]} |e^{ct} \eta_\varepsilon(\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta}) - e^{ct} \eta_\varepsilon(\|S_0(t, 0, y)\|_{\Theta})| \leq \\ &\leq e^{-c_0 T} \sup_{t \in [0, T]} |\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta} - \|S_0(t, 0, y)\|_{\Theta}| \leq \\ &\leq e^{-c_0 T} \sup_{t \in [0, T]} \text{dist}(S_0(t, 0, x), S_0(t, 0, y)) \leq \\ &\leq e^{-c_0 T} e^{c_0 T} \|x - y\| = \\ &= \|x - y\|, \quad \forall \|x\|_{\Theta} \leq r_0, \quad \forall \|y\|_{\Theta} \leq r_0. \end{aligned}$$

Here, we utilized the inequality

$$\text{dist}(A, B) \leq \text{dist}(A, C) + \text{dist}(C, B),$$

with $A = S_0(t, 0, x)$, $B = \Theta$, $C = S_0(t, 0, y)$.

Due to compactness of Θ we have that $\forall \|x\|_{\Theta} < r_0$

$$\|x\|_{\Theta} = \inf_{\xi \in \Theta} \|x - \xi\| = \|x - \xi_0\|, \quad \xi_0 \in \Theta.$$

Then due to (9)

$$\text{dist}(S_0(t, 0, x), S_0(t, 0, \xi_0)) \leq e^{c_0 t} \|x - \xi_0\|.$$

Invariance of Θ implies the inclusion

$$S_0(t, 0, \xi_0) \subset \Theta.$$

Therefore,

$$\text{dist}(S_0(t, 0, x), S_0(t, 0, \xi_0)) \geq \|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta}.$$

So, from the strict inequality $\|x\|_{\Theta} < r_0$ we derive that for sufficiently small $\tau > 0$

$$\|S_0(\tau, 0, x)\| < r_0.$$

Then $\forall \varphi \in K : \varphi(0) = x$, we get from the strictness of S_0

$$\begin{aligned} V^{\varepsilon}(\varphi(\tau)) &= e^{-(c_0+c)T} \sup_{t \geq 0} (e^{ct} \eta_{\varepsilon}(\|S_0(t, 0, \varphi(\tau))\|_{\Theta})) \leq \\ &\leq e^{-(c_0+c)T} \sup_{t \geq 0} (e^{ct} \eta_{\varepsilon}(\|S_0(t + \tau, 0, x)\|_{\Theta})) \leq \\ &\leq e^{-c\tau} V^{\varepsilon}(x) \text{ for sufficiently small } \tau > 0. \end{aligned}$$

Due to compactness of $S_0(t, 0, x)$ we deduce: for every small $\tau > 0 \exists \varphi \in K$, $\varphi(0) = x$ such that

$$\text{dist}(V^{\varepsilon}(S_0(\tau, 0, x)), V^{\varepsilon}(x)) = V^{\varepsilon}(\varphi(\tau)) - V^{\varepsilon}(x) \leq (e^{-c\tau} - 1)V^{\varepsilon}(x).$$

Therefore,

$$\dot{V}_0^{\varepsilon}(x) := \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \text{dist}(V^{\varepsilon}(S_0(t, 0, x)), V^{\varepsilon}(x)) \leq -cV^{\varepsilon}(x), \quad \|x\|_{\Theta} < r_0.$$

Now, for every $\|x\|_{\Theta} \leq r_0$, we put

$$V(x) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} V^{\frac{1}{k}}(x).$$

Then from the previous arguments, we get

$$\begin{aligned} V(x) &\leq \beta(\|x\|_{\Theta}, 0), \quad \|x\|_{\Theta} \leq r_0, \\ |V(x) - V(y)| &\leq \|x - y\|, \quad \|x\|_{\Theta} \leq r_0, \quad \|y\|_{\Theta} \leq r_0, \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in K$, $\varphi(0) = x$ for sufficiently small $\tau > 0$

$$V(\varphi(\tau)) \leq e^{-c\tau} V(x),$$

and therefore,

$$\text{dist}(V(S_0(\tau, 0, x)), V(x)) \leq (e^{-c\tau} - 1)V(x).$$

So,

$$\dot{V}_0(x) \leq -cV(x), \quad \|x\|_{\Theta} < r_0.$$

Moreover, inequality

$$\sup_{t \geq 0} \left(e^{ct} \eta_{\frac{1}{k}}(\|S_0(t, 0, x)\|_{\Theta}) \right) \geq \eta_{\frac{1}{k}}(\|x\|_{\Theta}),$$

implies

$$V(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e^{-(c_0+c)T(\frac{1}{k})} \eta_{\frac{1}{k}}(\|x\|_{\Theta}), \quad \|x\|_{\Theta} \leq r_0.$$

Finally, denoting

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(r) &= \beta(r, 0) + r, \\ \underline{\psi}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e^{-(c_0+c)T(\frac{1}{k})} \eta_{\frac{1}{k}}(r), \\ \alpha(r) &= c\underline{\psi}(r), \end{aligned}$$

we obtain (12),(13).

Then for $\forall \|x\|_{\Theta} < 1$, $\forall u \in U : \|u\|_{\infty} \leq 1$, $\forall \varphi \in K_u^0 : \varphi(0) = x$, let us consider for $t > 0$ the upper right-hand Dini derivative [23]

$$\bar{D}^+ V(\varphi(t)) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tau} (V(\varphi(t+\tau)) - V(\varphi(t))).$$

According to property (8)

$$\varphi(t+\tau) \in S_u(t+\tau, 0, x) \subset S_{u(\cdot+t)}(\tau, 0, \varphi(t)).$$

From (11), for some $r_0 > 0$, $\|\varphi(t)\| < r_0 \quad \forall t \geq 0$. We fix such r_0 in all previous arguments. So, in view of (10), we can write

$$\begin{aligned} V(\varphi(t+\tau)) - V(\varphi(t)) &\leq \text{dist}(V(S_{u(\cdot+t)}(\tau, 0, \varphi(t))), V(\varphi(t))) \leq \\ &\leq \text{dist}(V(S_{u(\cdot+t)}(\tau, 0, \varphi(t))), V(S_0(\tau, 0, V(S_{u(\cdot+t)}(\tau, 0, \varphi(t))))) + \\ &\quad + \text{dist}(V(S_0(\tau, 0, V(S_{u(\cdot+t)}(\tau, 0, \varphi(t))))) , V(\varphi(t))) \leq \\ &\leq d(r_0, \tau) \sigma(\|u\|_{\infty}) + (e^{-c\tau} - 1) V(\varphi(t)). \end{aligned}$$

It means that

$$\bar{D}^+ V(\varphi(t)) \leq -cV(\varphi(t)) + \bar{d}\sigma(\|u\|_{\infty}), \quad \forall t > 0, \quad (15)$$

where $\bar{d} = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{d(r_0, \tau)}{\tau}$.

Due to the properties of upper limit, we get from (15):

$$\begin{aligned} \bar{D}^+ (V(\varphi(t))e^{ct}) &\leq -\bar{D}^+ \left(-\frac{\bar{d}\sigma(\|u\|_{\infty})}{c} e^{ct} \right), \\ \bar{D}^+ \left(V(\varphi(t))e^{ct} - \frac{\bar{d}\sigma(\|u\|_{\infty})}{c} e^{ct} \right) &\leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Then inequality (16) implies that (see [23])

$$V(\varphi(t))e^{ct} - \frac{\bar{d}\sigma(\|u\|_{\infty})}{c} e^{ct} \leq V(x) - \frac{\bar{d}\sigma(\|u\|_{\infty})}{c}, \quad \forall t \geq 0.$$

So,

$$V(\varphi(t)) \leq V(x)e^{-ct} + \frac{\bar{d}}{c}\sigma(\|u\|_\infty), \quad \forall t \geq 0.$$

Finally,

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(\|\varphi(t)\|_\Theta) &\leq \bar{\psi}(\|x\|_\Theta)e^{-ct} + \frac{\bar{d}}{c}\sigma(\|u\|_\infty), \\ \|\varphi(t)\|_\Theta &\leq \underline{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(\|x\|_\Theta)e^{-ct} + \frac{\bar{d}}{c}\sigma(\|u\|_\infty)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1}(2\bar{\psi}(\|x\|_\Theta)e^{-ct}) + \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1}\left(\frac{2\bar{d}}{c}\sigma(\|u\|_\infty)\right). \end{aligned} \quad (17)$$

If we denote

$$\begin{aligned} \beta(r, s) &:= \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1}(2\bar{\psi}(\|x\|_\Theta)e^{-cs}), \\ \gamma(r) &:= \frac{1}{2}\underline{\psi}^{-1}\left(\frac{2\bar{d}}{c}\sigma(r)\right), \end{aligned}$$

then inequality (17) implies the required local ISS property.

Theorem is proved.

4. Application to reaction-diffusion systems. We consider the problem

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u - f(u) + h(x) + g(u)d(t), & x \in \Omega, t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Suppose that all components of functions f, g belong to the class $C(\mathbb{R})$, $h \in (L^2(\Omega))^N$, $\exists C_1, C_2, C_3 > 0$, $\gamma_i > 0, p_i \geq 2$, $i = \overline{1, N}$ such that $\forall v \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N |f^i(v)|^{\frac{p_i}{p_i-1}} \leq C_1(1 + \sum_{i=1}^N |v^i|^{p_i}), \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^N f^i(v)v^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma_i |v^i|^{p_i} - C_2, \quad (20)$$

$$\|g(v)\|^2 := \sum_{i,j=1}^N |g^{ij}(v)|^2 \leq C_3. \quad (21)$$

We will use the following standard functional spaces:

$$H = (L^2(\Omega))^N \text{ and } V = (H_0^1(\Omega))^N.$$

Let us denote

$$p = (p_1, \dots, p_N), \quad L^p(\Omega) = L^{p_1}(\Omega) \times \dots \times L^{p_N}(\Omega).$$

It is known [24] that under assumptions (19)–(21) for any disturbances $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ (even for $d \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H)$) the problem (18) is globally resolvable in weak sense in the phase space H , i.e., for every $u_0 \in H$ there exists (maybe not

unique) a function $u = u(t, x) \in L^2_{loc}(0, +\infty; V) \cap L^p_{loc}(0, +\infty; L^p(\Omega))$ such that for any $T > 0$, $v \in V \cap L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x)v(x)dx + \int_{\Omega} \left(a \nabla u(t, x) \nabla v(x) + \right. \\ & \left. + f(u(t, x))v(x) - g(x)v(x) - d(t, x)v(x) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

in the sense of scalar distributions on $(0, T)$, and $u(0, x) = u_0(x)$. Due to inclusion $u \in C([0, +\infty); H)$ the last equality makes sense. Moreover, every weak solutions of (18) belongs to the class of absolutely continuous functions from $[\tau, T]$ to H for every $T > \tau$, and for positive constants v, c_1, c_2 for a.a. $t > \tau$

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + v \|u(t)\|^2 \leq c_1 + c_2 \|d\|_{\infty}^2.$$

So,

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(\tau)\|^2 e^{-v(t-\tau)} + \frac{1}{v} (c_1 + c_2 \|d\|_{\infty}^2), \quad \forall t \geq \tau. \quad (22)$$

Moreover, if $u_0^n \rightarrow u_0$ weakly in H , $d_n \rightarrow d$ weakly in $L^2(0, T) \forall T > 0$ then up to subsequence

$$\forall t > 0 \quad u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ in } H, \quad (23)$$

where u is a solution of (1) with initial data u_0 and disturbances d .

These statements allow us to claim that for $d \equiv 0$ all weak solutions K of undisturbed problem (2) generate strict m -semiflow S according to the formula (8), and properties (22), (23) imply (G1) – (G4). So, due to Lemma 1, m -semiflow S has stable global attractor $\Theta \subset H$.

Moreover, from estimate (22) we get that property (6) takes place. So, Lemma 2 implies the robust stability estimate (6) for our problem (2).

Theorem 2. *Suppose that (19) – (21) takes place and, additionally, components of f belong to the class $C^1(\mathbb{R}^n)$, and the corresponding Jacobian matrix Df satisfies the following inequality:*

$$\exists C_4 > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \quad Df(v) \geq -C_4. \quad (24)$$

Then the formula

$$S_d(t, \tau, u_{\tau}) := \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ is a solution of (2) on } [\tau, +\infty), u(\tau) = u_{\tau}\}, \quad (25)$$

generates the family of semiprocesses $\{S_d\}_{d \in U}$ with $U = L^{\infty}(0, +\infty)$, which is locally ISS w.r.t. Θ , i.e., property (5) takes place.

Proof. It can be proved that the family of mappings $\{S_d\}_{d \in U}$ defined by (25), satisfies (S1) – (S5). So, Lemma 3 implies that $\{S_d\}_{d \in U}$ is the strict family of semiprocesses. Moreover, inequality (24) allows us to prove that S_0 and S_d satisfy properties (9), (10). Estimate (22) gives property (11). Thus, we can apply Theorem 1 and obtain required result.

5. Conclusions. In this work, we considered the stability of the limit modes of an infinite-dimensional system of the reaction-diffusion type in relation to external disturbing signals. The main result is the estimation of the deviation of the trajectories of the disturbed system from the uniform attractor set (global attractor) of the undisturbed system in terms of the amplitude of the external signal. At the same time, the obtained results can be applied to wide classes of reaction-diffusion systems under rather general assumptions on coefficients, including systems with non-smooth interaction functions, multi-dimensional Lotka-Volterra systems with diffusion, FitzHugh–Nagumo systems and others for which the uniqueness of the solution of the Cauchy problem is not guaranteed. Therefore, we can conclude that this robust stability with respect to disturbances is the interior property of evolutionary processes which are modeled by reaction-diffusion systems.

References

1. Pichkur, V. V. (2019). Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions, in Modern Mathematics and Mechanics. *Fundamentals, Problems and Challenges.* (eds. Sadovnichiy, Victor A., Zgurovsky, Michael). Springer, 397–410. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_20
2. Pichkur, V. V., Linder, Y. M., & Tairova, M. S. (2021). On the Practical Stability of Discrete Inclusions with Spatial Components. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 254(2), 280–286. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05304-7>
3. Pichkur, V. V., & Linder, Ya. M. (2021). Practical Stability of Discrete Systems: Maximum Sets of Initial Conditions Concept. Understanding Complex Systems. *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics.* (eds. Sadovnichiy, Victor A., Zgurovsky, Michael). Springer, 381–394. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50302-4_17
4. Garashchenko, F. G., & Pichkur, V. V. (2016). On Properties of Maximal Set of External Practical Stability of Discrete Systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(3), 46–53. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.50>
5. Temam, R. (1997). Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *AMS*.
6. Chepyzhov, V. V., & Vishik, M. I. (2002). Attractors for equations of mathematical physics. *AMS, Providence, RI*.
7. Robinson, J. C. (2001). Infinite-dimensional dynamical systems. *Cambridge University Press*.
8. Melnik, V. S., & Valero, J. (1998). On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis*, 6, 83–111.
9. Kasyanov, P. O., Mel'nik, V. S., & Toscano, S. (2010). Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued ω_{λ_0} -pseudomonotone maps. *Journal of Differential Equations*, 249(5), 1258–1287.
10. Perestyuk, M. O., & Kapustyan, O. V. (2012). Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 56, 89–113.
11. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O. V., & Romaniuk, I. V. (2017). Global attractors of impulsive parabolic inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 22(4), 1875–1886.
12. Dashkovskiy, S., Feketa, P., Kapustyan, O., & Romaniuk, I. (2018). Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 458(1), 193–218.
13. Kichmarenko, O., & Stanzhytskyi, O. (2018). Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 18(2), 196–211.
14. Nakonechnyi, O. G., Kapustian, O. A., & Chikrii, O. A. (2019). Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations. *Cybernetics and Systems Analysis*, 55(4), 785–795.
15. Sontag, E. D. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(3), 435–443.

16. Sontag, E. D., & Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(4), 351–359.
17. Dashkovskiy, S., & Mironchenko, A. (2013). Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 25(1), 1–35.
18. Mironchenko, A. (2016). Local input-to-state stability: Characterizations and counterexamples. *Systems & Control Letters*, 87, 23–28.
19. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O., & Schmid, J. (2020). A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction–diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 32(3), 309–326.
20. Schmid, J., Kapustyan, O., & Dashkovskiy, S. (2021). Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*.
21. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems. Third edition. *Prentice Hall, New Jersey*.
22. Kapustyan, O. V., & Yusypiv, T. V. (2021). Stability to disturbances for the attractor of the dissipative PDE-ODE system. *Nonlinear oscillations*, 24(3). 336–341 [in Ukrainian].
23. Royden, H. I., & Fitzpatrick, P. M. (2010). Real Analysis (Fourth Edition). *China Machine Press*.
24. Laptiev, O., Shuklin, G., Savchenko, V., Barabash, O., Musienko, A., & Haidur, H. (2019). The Method of Hidden Transmitters Detection based on the Differential Transformation Model. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering. November – December 2019*, 8(6), 2840–2846. <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/26862019>

Капустян О. В., Юсипів Т. В. Стійкість граничних режимів для загального випадку систем типу реакція-дифузія.

У цій статті ми розглядаємо стійкість граничних режимів для загального класу нелінійних розподілених математичних моделей, які називаються моделями реакції-дифузії. Системи реакції-дифузії природно виникають у багатьох застосуваннях. Наприклад, при математичному моделюванні в біології та у теорії передачі сигналів широко використовується модель ФітцХью–Нагумо (FitzHugh–Nagumo model), розподілений варіант якої є окремим випадком загальної системи реакції-дифузії. Досліджено проблему стійкості притягуючих множин для нескінченновимірної системи реакції-дифузії відносно обмежених зовнішніх сигналів (збурень). Функції взаємодії, а також нелінійні збурення не вважаються неперервними за Ліпшицем. Отже, ми не можемо очікувати єдиності розв'язку для відповідної початкової задачі, і ми повинні використовувати багатозначний напівгруповий підхід. Вважається, що незбурена система має глобальний атрактор, тобто мінімальну компактну рівномірно притягаючу множину. Основною метою дослідження є оцінка відхилення траєкторії збуреної системи від глобального атрактора незбуреної як функції величини зовнішніх сигналів. Таку оцінку можна отримати в рамках теорії стійкості від входу до стану (ISS). У статті запропоновано новий підхід до отримання оцінок робастної стійкості атрактора у випадку багатозначного еволюційного оператора. Зокрема, доведено, що багатозначна напівгрупа, породжена слабкими розв'язками нелінійної системи типу реакції-дифузії, має властивість локальної ISS відносно атрактора незбуреної системи.

Ключові слова: система реакція-дифузія, система без єдиності розв'язку, стійкість від входу до стану, робастна стійкість, глобальний атрактор.

Список використаної літератури

1. Pichkur V. V. Maximum sets of initial conditions in practical stability and stabilization of differential inclusions, in Modern Mathematics and Mechanics. *Fundamentals, Problems and Challenges*. (eds. Sadovnichiy, Victor A., Zgurovsky, Michael). Springer. 2019. P. 397–410. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_20
2. Pichkur V. V., Linder Y. M., Tairova M. S. On the Practical Stability of Discrete Inclusions with Spatial Components. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2021. Vol. 254. No. 2. P. 280–286. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05304-7>
3. Pichkur V. V., Linder Ya. M. Practical Stability of Discrete Systems: Maximum Sets of Initial Conditions Concept. Understanding Complex Systems. *Contemporary Approaches*

- and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics*. (eds. Sadovnichiy, Victor A., Zgurovsky, Michael). Springer. 2021. P. 381–394. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-50302-4_17
4. Garashchenko F. G., Pichkur V. V. On Properties of Maximal Set of External Practical Stability of Discrete Systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. No. 3. P. 46–53. DOI: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v48.i3.50>
 5. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *AMS*, 1997. 68.
 6. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors for equations of mathematical physics. *AMS, Providence, RI*. 2002. 49.
 7. Robinson J. C. Infinite-dimensional dynamical systems. *Cambridge University Press*. 2001.
 8. Melnik V. S., Valero J. On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis*. 1998. 6. P. 83–111.
 9. Kasyano P. O., Mel'nik V. S., Toscano S. Solutions of Cauchy and periodic problems for evolution inclusions with multi-valued ω_{λ_0} -pseudomonotone maps. *Journal of Differential Equations*. 2010. Vol. 249 No. 5. P. 1258–1287.
 10. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*. 2012. 56. P. 89–113.
 11. Dashkovskiy S., Kapustyan O. V., Romaniuk I. V. Global attractors of impulsive parabolic inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2017. Vol. 22. No. 4. P. 1875–1886.
 12. Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I. Invariance and stability of global attractors for multi-valued impulsive dynamical systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2018. Vol. 458. No. 1. P. 193–218.
 13. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2018. Vol. 18. No. 2. P. 196–211.
 14. Nakonechnyi O. G., Kapustian O. A., Chikrii O. A. Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55. No. 4. P. 785–795.
 15. Sontag E. D. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1989. Vol. 34. No. 3. P. 435–443.
 16. Sontag E. D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*. 1995. Vol. 24. No. 4. P. 351–359.
 17. Dashkovskiy S., Mironchenko A. Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 2013. Vol. 25. No. 1. P. 1–35.
 18. Mironchenko A. Local input-to-state stability: Characterizations and counterexamples. *Systems & Control Letters*. 2016. 87. P. 23–28.
 19. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O., Schmid, J. A local input-to-state stability result w.r.t. attractors of nonlinear reaction–diffusion equations. *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 2020. Vol. 32. No. 3. P. 309–326.
 20. Schmid J., Kapustyan O., Dashkovskiy S. Asymptotic gain results for attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 2021.
 21. Khalil H. K. Nonlinear systems. Third edition. *Prentice Hall, New Jersey*, 2002.
 22. Капустян О. В., Юсипів Т. В. Стійкість до збурень для атрактора дисипативної системи типу PDE-ODE. *Нелінійні коливання*. 2021. Т. 24. № 3. С. 336–341.
 23. Royden H. I., Fitzpatrick P. M. Real Analysis (Fourth Edition). *China Machine Press*, 2010.
 24. Laptiev O., Shuklin G., Savchenko V., Barabash O., Musienko A., Haidur H. The Method of Hidden Transmitters Detection based on the Differential Transformation Model. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*. November – December 2019. 2019. Vol. 8. No. 6. P. 2840–2846. DOI: <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/26862019>

Одержано 14.10.2022

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).61-68](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).61-68)**T. B. Lysetskyi**

Ivan Franko National University of Lviv,

Ph.D. student (Phys.- Math.)

Taras.Lysetskyi@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5993-1887>**ON A NUMBER OF EMIGRANTS IN DECOMPOSABLE
AGE-DEPENDENT BRANCHING PROCESSES**

Decomposable branching process can be viewed as stochastic model for the population with N types of individuals, splitted into several groups G_1, G_2, \dots, G_n , $n \leq N$, where each group occupies its own island. Individual of group G_i may immediately after birth emigrate to island, occupied by group with higher index or stay on the same island. In given paper we consider case with two groups G_1 and G_2 . Each individual has random life duration and distribution of its progeny depends on its age.

We establish asymptotic behaviour of processes that count number of emigrated individuals, depending on criticality of branching subprocess, generated by group G_1 .

Keywords: branching process, stochastic additive functional, critical branching process, Perron root, moments.

1. Introduction. We will provide short description of decomposable multitype age-dependent branching process with variable transition probabilities. Review of multitype age-dependent processes with variable transition probabilities can be found in [1], chapter 8, while decomposable branching processes were studied, for example, in [2], [3] and [4]. Description of probability space could be given analogically to [5], chapter 6.

Consider a population consisting of n types T_1, T_2, \dots, T_n . Each T_i – th type particle has random life duration τ_i with distribution function

$$P(\tau_i \leq t) = G^i(t), G^i(0+) = 0$$

We will assume that $G^i(t)$ are absolutely continuous.

Types of particles can be divided into two groups: C_1 which includes particles of types T_1, T_2, \dots, T_r and C_2 which includes particles (individuals) of types $T_{r+1}, T_{r+2}, \dots, T_n$, $1 \leq r < n$. Particles from C_2 at the end of their lives transform into any number of particles from their own group, while particles from C_1 transform into any number of particles of any type. Direct C_2 types descendants of particles from C_1 group types we will call 'emigrants'. Establishing asymptotic behaviour of processes, which describe number of emigrants is the goal of this paper.

Conditional probability (if transformation took place when the age attained by the original particle was u) $p_\alpha^i(u)$ of transformation into a set consisting of α_i T_i – th type particles, $i = \overline{1, n}$, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ is n - dimensional vector where the components are non-negative integers. Evolution of particle is defined by joint distribution of random variable τ_i and random vector $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$, which characterise progeny of this particle.

$$P(\tau_i \in B, v_i = \alpha) = \int_B p_\alpha^i(u) dG^i(u).$$

Vector $\mu_i(t) = (\mu_i^1(t), \dots, \mu_i^n(t))$ denotes number of particles of types T_1, T_2, \dots, T_n at the moment t , under the condition that at initial moment there existed one $T_i - th$ type particle. And let's also assume, that vectors $\mu^i(t)$ are right continuous.

Let's denote by $P^i(*)$ and $E^i(*)$ denote conditional probability and conditional expectation respectively, under condition that at initial moment of time there existed one particle of type T_i .

Let's also introduce generating functions

$$h^i(t, s) = \sum_{\alpha} P_{\alpha}^i(t) s^{\alpha}$$

and

$$F^i(t, s) = \sum_{\alpha} P^i(\mu_i(t) = \alpha) s^{\alpha}, i = \overline{1, n},$$

$$s = (s_1, \dots, s_n), s^{\alpha} = s_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot s_n^{\alpha_n},$$

$$F(t, s) = (F^1(t, s), \dots, F^n(t, s)), h(t, s) = (h^1(t, s), \dots, h^n(t, s)).$$

Generating functions $F^i(t, s)$ satisfy with $s \leq 1$ (componentwise) and $t \geq 0$ next system of integral equations [1]

$$F^i(t, s) = s_i(1 - G^i(t)) + \int_0^t h^i(u, F(t - u, s)) dG^i(u), i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

2. Preliminaries. Define

$$a_j^i(u) = \frac{\partial h^i(u, s)}{\partial s_j} \Big|_{s=1}, A_j^i = \int_0^{\infty} a_j^i(u) dG^i(u),$$

$$b_{jk}^i(u) = \frac{\partial h^i(u, s)}{\partial s_j \partial s_k} \Big|_{s=1}, B_{jk}^i = \int_0^{\infty} b_{jk}^i(u) dG^i(u).$$

We will call described above branching process (b.p.) ξ . We assume that matrix $A = \|A_j^i\|_{i,j=\overline{1,n}}$ of moments has a form $\begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$, where matrices $A_1 = \|A_j^i\|_{i,j=\overline{1,r}}$ and $A_2 = \|A_j^i\|_{i,j=\overline{r+1,n}}$ are irreducible, $A_{12} = \|A_j^i\|_{i=\overline{1,r}, j=\overline{r+1,n}}$, $\mathbf{0} = (n-r) \times r$ zero matrix.

Since our goal is to describe number of emigrants, we will mainly focus on matrix A_1 .

Let

$$A_{\rho k}^l = \int_0^{\infty} u e^{-\rho u} a_k^l(u) dG^l(u), B_{\rho j k}^l = \int_0^{\infty} e^{-2\rho u} b_{jk}^l(u) dG^l(u),$$

$$M^k = \int_0^{\infty} u dG^k(u), M_a^{lk} = \int_0^{\infty} u a_k^l(u) dG^l(u),$$

$$B = \sum_{l,k,m=1}^r B_{mk}^l v^l u^k u^m, M_a = \sum_{l,k=1}^r M_a^{lk} v^l u^k, M_j = \sum_{l=1}^r v^l \int_0^{\infty} a_j^l(u) dG^l(u),$$

where ρ denotes such number, that perron root of matrix $\| \int_0^{\infty} e^{-\rho u} a_k^l(u) dG^l(u) \|_{i,j=\overline{1,r}}$ equals to one, $u_{\rho} = (u_{\rho}^1, u_{\rho}^2, \dots, u_{\rho}^r)$ and $v_{\rho} = (v_{\rho}^1, v_{\rho}^2, \dots, v_{\rho}^r)$ denote right and left

eigenvectors of this matrix, $(v_\rho, u_\rho) = (v_\rho, \mathbf{1}) = \sum_{k=1}^r v_\rho^k = 1$ (in critical case $\rho = 0$ and we denote $u_\rho = u, v_\rho = v$).

To simplify further investigation we will introduce process ξ^t , which consists only of particles from group C_1 . By $\nu_i(t) = (\nu_i^{r+1}(t), \dots, \nu_i^n(t))$ we will denote number of particles of types from group C_2 (emigrants), produced by C_1 type particles by t . Processes $\nu_i(t), i = \overline{1, r}$ can be seen as 'product' of C_1 type particles or multidimensional additive functional from branching process ξ^t (see [7]).

Consider vector $\tilde{\mu}_i(t) = (\mu_i^1(t), \dots, \mu_i^r(t), \nu_i^{r+1}(t), \dots, \nu_i^n(t)), i = \overline{1, n}$.

By $\tilde{F}^i(t, s)$ we will denote generating functions of this vectors. It is easy to see that $F^j(t, s) = s_j$ for $j = \overline{r+1, n}$ and formula (1) is valid for $\tilde{F}^i(t, s), i = \overline{1, r}$ with $\tilde{F}(t, s) = (\tilde{F}^1(t, s), \dots, \tilde{F}^n(t, s))$.

According to [1], we have next formulas for moments

$$A_j^i(t) = \frac{\partial F^i(t, s)}{\partial s_j} = \frac{\partial \tilde{F}^i(t, s)}{\partial s_j},$$

$$B_{jk}^i(t) = \frac{\partial^2 F^i(t, s)}{\partial s_j \partial s_k} = \frac{\partial^2 \tilde{F}^i(t, s)}{\partial s_j \partial s_k},$$

$$A_j^i(t) = \delta_j^i(1 - G^i(t)) + \sum_{k=1}^r \int_0^t A_j^k(t-u) a_k^i(u) dG^i(u),$$

$$B_{jk}^i(t) = \sum_{l=1}^r \int_0^t B_{jk}^l(t-u) a_l^i(u) dG^i(u) + \sum_{m,l=1}^r \int_0^t A_j^l(t-u) A_k^m(t-u) b_{lm}^i(u) dG^i(u),$$

for $i, j, k = \overline{1, r}$.

For $A_l^i(t), B_{jl}^i(t)$ and $B_{il}^i(t)$, where $i, j = \overline{1, r}, l = \overline{r+1, n}$ we will have

$$A_l^i(t) = \int_0^t a_l^i(u) dG^i(u) + \sum_{k=1}^r \int_0^t A_l^k(t-u) a_k^i(u) dG^i(u), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} B_{jl}^i(t) &= \sum_{m=1}^r \int_0^t B_{jl}^m(t-u) a_m^i(u) dG^i(u) + \\ &+ \sum_{m,d=1}^r \int_0^t A_j^m(t-u) A_l^d(t-u) b_{mq}^i(u) dG^i(u), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} B_{il}^i(t) &= \sum_{m=1}^r \int_0^t B_{il}^m(t-u) a_m^i(u) dG^i(u) + \\ &+ \sum_{m,q=1}^r \int_0^t A_i^m(t-u) A_l^q(t-u) b_{mq}^i(u) dG^i(u). \end{aligned} \quad (4)$$

Next theorem is crucial for establishing asymptotic behaviour of moments. Proof of this theorem can be found in [6].

Theorem 1. Let $M(dy) = \|m_{ij}(dy)\|_{i,j=\overline{1,r}}$ be $r \times r$ square matrix, components of which are finite non-negative measures on $[0, +\infty)$ and let vector function $g(x) = (g_1(x), \dots, g_r(x))$ be such that for some $\gamma \geq 0$ holds $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{g(x)}{\max\{1, x^\gamma\}} < \infty$ and $\frac{g(x)}{x^\gamma} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c = (c_1, \dots, c_r)$. If Perron root of $M[0, +\infty)$ equals to 1 and $\int_0^\infty u m_{ij}(du) < \infty$, then

$$\frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x g(x-y) dH(y) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{(1+\gamma)a} \|u^i v^j\|_{i,j=\overline{1,r}},$$

where $H(y)$ is renewal matrix, which corresponds to matrix $M(dy)$, u and v are right and left eigenvectors of $M[0, +\infty)$, $a = \left(v, \int_0^\infty y M(dy) u \right)$.

Applying **Theorem 1** to (2)–(4), one can show that, in critical case, if M^j , M_a^{jk} , B_{lk}^j are finite, then

$$A_l^i(t) \sim \frac{u^i M_l t}{M_a}, B_{jl}^i(t) \sim B \frac{u^i v^j M^j M_l t^2}{2(M_a)^2}, B_u^i(t) \sim B \frac{u^i (M_l)^2 t^3}{3(M_a)^3}. \quad (5)$$

We will also need next lemma to prove **Theorem 2**.

Lemma 1. If for random variables $X(t)$ and $Y(t)$ following conditions are satisfied:

- a) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X$ in distribution;
- b) $\lim_{t \rightarrow \infty} (X(t) - Y(t))^2$,

then $Y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} X$ in distribution.

Proof. Indeed, from condition b) we get that $Y(t) = X(t) + \theta(t)$, where $\theta(t)$ tends to zero in square mean, therefore in distribution, so

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\exp\{i\beta Y(t)\}) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\exp\{i\beta(X(t) + \theta(t))\}) = E(\exp\{i\beta X\}).$$

3. Main results. Analogy of theorem 2 (and corollary 1) [7] takes place, which also can be proven using slight modification of results obtained in [2]:

Claim 1. If process ξ is supercritical, $A_{\rho k}^l(u)$ and $B_{\rho j k}^l$ are finite, $i, j, k = \overline{1, n}$, than random variables (r.v.) $\frac{e^{-\rho t} \mu_1^i(t)}{K_1}, \dots, \frac{e^{-\rho t} \mu_r^i(t)}{K_r}, \frac{e^{-\rho t} \nu_{r+1}^i(t)}{K_{r+1}}, \dots, \frac{e^{-\rho t} \nu_n^i(t)}{K_n}$ converge as $t \rightarrow \infty$ in square mean to the same limit μ^i , where

$$K_j = \frac{v_\rho^j \int_0^\infty e^{-\rho t} (1 - G^i(t)) dt}{\rho \sum_{k,m=1}^r v_\rho^k u_\rho^m \int_0^\infty t e^{-\rho t} a_m^i(t) dG^k(t)}$$

$$K_l = \frac{\sum_{k=1}^r v_\rho^k \int_0^\infty e^{-\rho t} \int_0^t a_l^i(u) dG^i(u) dt}{\sum_{k,m=1}^r v_\rho^k u_\rho^m \int_0^\infty t e^{-\rho t} a_m^i(t) dG^k(t)}, \quad j = \overline{1, r}, \quad l = \overline{r+1, n}$$

Furthermore, Laplace transform $\phi^l(s)$ of limit r.v. $\tilde{\mu}^l$ satisfies equation

$$\phi^l(s) = \int_0^\infty h^l(u, \phi(se^{-\rho u})) dG^l(u),$$

with initial condition $\phi(0) = 1, \phi'(0) = -1$, where $\phi(s) = (\phi^1(s), \dots, \phi^n(s))$.

Corollary 1. *If conditions of theorem 1 are satisfied, than distributions*

$$P^i \left(\frac{\sum_{k=r+1}^n \nu_l^i(t)}{\sum_{k=1}^r \mu_k^i(t)} \leq x \mid \sum_{k=1}^r \mu_k^i(t) > 0 \right), i = \overline{1, r}$$

converge to the degenerate distribution, localized at the point

$$\frac{\sum_{l=r+1}^n \sum_{k=1}^r v_\rho^k \int_0^\infty e^{-\rho t} \int_0^t a_l^i(u) dG^i(u) dt}{\rho \sum_{l=1}^r v_\rho^l \int_0^\infty e^{-\rho t} (1 - G^i(t)) dt}.$$

In order to prove next theorem we will compare processes $\nu_l^i(t)$ with processes $N^i(t)$ — total number of particles born by the moment of time t , if at the moment $t = 0$ there existed one particle of type T_i .

Let $N_j^i(t)$ denote number of particles of type T_j , born by t , then $N^i(t) = \sum_{j=1}^r N_j^i(t)$.

It is known [8], that

$$E \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^r \beta^j N_j^i(t) / v^j t^2 \right\} \mid \sum_{j=1}^r \mu_j^i(t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(2B \sum_{j=1}^r \beta^j \right)^{1/2} / M_a \left(sh \left(\left(2B \sum_{j=1}^r \beta^j \right)^{1/2} / M_a \right) \right).$$

Then by letting $\beta^j = v^j \beta$, and since $\sum_{j=1}^r v^j = 1$, we get

$$E \left(\exp \left\{ i \beta N^i(t) / t^2 \right\} \mid \sum_{j=1}^r \mu_j^i(t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (2B\beta)^{1/2} / M_a \left(sh \left((2B\beta)^{1/2} / M_a \right) \right). \tag{6}$$

Also from [9], pp. 464–465, we can establish asymptotic behaviour of moments $E^i(N_i(t))$ and $E^i(N_i^2(t))$:

$$E^i(N_i(t)) \sim \frac{u^i t}{M_a}, E^i(N_i^2(t)) \sim B \frac{u^i t^3}{3(M_a)^3}.$$

Theorem 2. *If the following conditions are satisfied:*

i) *integrals M^j, M_a^{jk}, B_{jk}^i are finite;*

- ii) $\int_0^\infty \int_t^\infty a_l^m(u) dG^m(u) dt = k_l^m < +\infty$;
 iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \int_t^\infty a_m^k(u) dG^m(u) < +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 (1 - G^l(t)) < +\infty$,
 $m, k, j = \overline{1, r}, l = r + 1, n$, then

$$E^i \left(\exp \left\{ i\beta \mu_i^i(t)/t^2 \right\} \mid \sum_{j=1}^r \mu_j^i(t) > 0 \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \\ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} (2BM_0\beta)^{1/2} / M_a \left(\operatorname{sh} \left((2BM_0\beta)^{1/2} / M_a \right) \right).$$

Proof. As has been mentioned in (5), moments $A_l^j(t) \sim \frac{u^i M_l t}{M_a}$, $B_l^i(t) \sim \frac{u^i (M_l)^2 t^3}{3(M_a)^3}$, $l = \overline{1, r}$.

Now we will obtain asymptotic behavior of moments $E^i(N^i(t)\nu_i^i(t))$.

Let

$$F^i(t, z, s) = E^i \left(e^{zN^i(t)} s^{\bar{\mu}^i(t)} \right), z \leq 0, i = \overline{1, r},$$

$$F(t, z, s) = (F^1(t, z, s), \dots, F^r(t, z, s)).$$

Let also

$$D^i(t) = \frac{\partial F^i(t, z, s)}{\partial z} \Big|_{s=1, z=0}, D_l^i(t) = \frac{\partial^2 F^i(t, z, s)}{\partial z \partial s_l} \Big|_{s=1, z=0}, l = \overline{r+1, n}.$$

Similarly to [5], we can derive formula

$$F^i(t, z, s) = e^z \left(s_i (1 - G^i(t)) + \int_0^t h^i(u, F(t-u, z, s)) dG^i(u) \right). \quad (7)$$

Differentiating both sides of (7) first with respect to z at point 0, than with respect to s_0 at the point $s = \underbrace{(1, \dots, 1)}_n$ we get

$$D_l^i(t) = \int_0^t a_l^i(u) dG^i(u) + \sum_{k=1}^r \int_0^t A_l^k(t-u) a_k^i(u) dG^i(u) + \\ + \sum_{j,k=1}^r \int_0^t A_l^k(t-u) D^i(t-u) b_{jk}^i(u) dG^i(u) + \sum_{k=1}^r \int_0^t D_l^i(t-u) a_k^i(u) dG^i(u).$$

Using the results we obtained above, we see that

$$\int_0^t a_l^i(u) dG^i(u) + \sum_{k=1}^r \int_0^t A_l^k(t-u) a_k^i(u) dG^i(u) = o(t^2), \\ \sum_{j,k=1}^r \int_0^t A_l^k(t-u) D^i(t-u) b_{jk}^i(u) dG^i(u) \sim \sum_{j,k=1}^r B_{jk}^i u^j u^k \frac{M_l t^2}{(M_a)^2}.$$

So again, using **Theorem 1**, we obtain that $D_l^i(t) \sim B \frac{u^i M_l t^3}{3(M_a)^3}$.

Conditions ii) and iii) allows us to claim ([10]), that $P^i \left(\sum_{k=1}^r \mu_k^i(t) > 0 \right) \sim \frac{2M_a}{Bt}$ and so

$$E \left(\left(\frac{(M_a)^2 N^i(t)}{t^2} - \frac{(M_a)^2 \nu_l^i(t)}{M_l t^2} \right)^2 \mid \sum_{k=1}^r \mu_k^i(t) > 0 \right) \sim \frac{BM_a u^i / 3t - 2BM_a u^i / 3t + BM_a u^i / 3t}{2M_a / Bt} = 0.$$

From here, (6) and from **Lemma 1** we get the result.

Corollary 2. *If conditions of theorem 1 are satisfied, than distributions*

$$P^i \left(\frac{\nu_l^i(t)}{N^i(t)} \leq x \mid \sum_{k=1}^r \mu_k^i(t) > 0 \right),$$

converge to the degenerate distribution, localized at the point $\frac{1}{M_l}$, where, $i = \overline{1, r}$, $l = \overline{r+1, n}$.

Analogy of theorem 1, [7] also takes place.

Claim 2. *Process ξ is critical or subcritical if and only if random variables $\mu_l^j(t)$ converge with probability 1 as $t \rightarrow +\infty$ to finitely valued r . v. ν_l^j , $j = \overline{1, r}$, $l = \overline{r+1, n}$.*

Furthermore, vector characteristic function of limit r.v. $\nu_l = (\nu_l^1, \dots, \nu_l^r)$ —

$$E(e^{i\beta\nu_l}) = \left(E(e^{i\beta\nu_l^1}), \dots, E(e^{i\beta\nu_l^r}) \right),$$

satisfies integral equation:

$$E(e^{i\beta\nu_l}) = \left(\int_0^{+\infty} h^1(u, \tilde{E}(e^{i\beta\nu})) dG^1(u), \dots, \int_0^{+\infty} h^r(u, \tilde{E}(e^{i\beta\nu})) dG^n(u) \right),$$

where

$$\tilde{E}(e^{i\beta\nu_l}) = \left(E(e^{i\beta\nu_l^1}), \dots, E(e^{i\beta\nu_l^r}), s_{r+1}, \dots, s_n \right).$$

Proof. Proof is analogical to theorem 1 in [7]. It is only worth to note that if process is supercritical, then there exist $i = \overline{1, r}$, such that

$$0 < \lim_{t \rightarrow +\infty} P^i \left(\sum_{k=1}^r \mu_k^i(t) > 0 \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} Q^i(t) = q^i < 1,$$

and process $N^i(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ (see chapter 6, [5]) with probability q^i , so the strong law of large numbers holds for $\frac{\nu_l^i}{N^i}$.

References

1. Sevastyanov, B. A. (1971). *Branching processes*. Moscow: Izdatelstvo Nauka. [in Russian].
2. Crump, K. S. (1970). On systems of renewal equations: The reducible case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 31(3), 517–528.
3. Foster, J., & Ney, P. (1978). Limit laws for decomposable critical branching processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 46, 13–43.

4. Ogura, H. (1975). Asymptotic behavior of multitype Galton-Watson processes. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 15(2), 251–302.
5. Harris, T. E. (1964). *The theory of branching processes*. RAND Corporation, Santa Monica, California.
6. Shurenkov, V. M. (1979). Transitional phenomena of renewal theory in asymptotic problems of the theory of random processes. I. *Sbornik: Mathematics*, 112(1), 396–401. [in Russian].
7. Shurenkov, V. M. (1979). On additive functionals of branching processes. *Theory of Probability and its Applications*, 24(2), 396–401. [in Russian].
8. Lysetskyi, T. B., & Yeleiko, Ya. I. (2021). Limit theorems for total number of particles in critical age-dependent branching processes. *Prekarpatian bulletin of the Shevchenko Scientific Society Number*, 16(60), 33–46. [in Ukrainian].
9. Weiner, H. J. (1974). Total progeny in a multitype critical age dependent branching process with immigration. *Journal of Applied Probability*, 11(3), 458–470.
10. Vatutin, V. A. (1977). Asymptotic behaviour of the non-extinction probability of a critical branching process. *Theory of Probability and its Applications*, 22(1), 140–146. [in Russian].

Лисецький Т. Б. Про кількість емігрантів в розкладному гіллястому процесі з перетвореннями, залежними від віку.

Розкладний гіллястий процес можна розглядати як стохастичну модель популяції з N типами індивідумів, розділених на декілька підгруп G_1, G_2, \dots, G_n , $n \leq N$, де кожна група населяє окремий острів. Індивідум з групи G_i може одразу після народження емігрувати на острів, населений групою з вищим індексом, або залишитись на своєму острові. В даній статті розглядається випадок з двома групами G_1 та G_2 . Кожна особа має випадкову тривалість життя, а розподіл її потомства залежить від її віку.

Ми досліджуємо асимптотичну поведінку процесів, які рахують кількість частинок, що емігрували, в залежності від критичності гіллястого підпроцесу, породженого групою G_1 .

Ключові слова: гіллястий процес, стохастичний адитивний функціонал, критичний гіллястий процес, перонів корінь, моменти.

Список використаної літератури

1. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. Москва : Наука, 1971. 65 с.
2. Crump K. S. On systems of renewal equations: The reducible case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1970. Vol. 31. No. 3. P. 517–528.
3. Foster J., Ney P. Limit laws for decomposable critical branching processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*. 1978. 46. P. 13–43.
4. Ogura H. Asymptotic behavior of multitype Galton-Watson processes. *Journal of Mathematics of Kyoto University*. 1975. Vol. 15. No. 2. P. 251–302.
5. Harris T. E. *The theory of branching processes*. RAND Corporation, Santa Monica, California. 1964. 244 p.
6. Шуренков В. М. Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. I. *Матем. сб.* 1979. Т. 112. № 1. С. 396–401.
7. Шуренков В. М. Об аддитивных функционалах от ветвящихся процессов. *Теория вероятн. и ее применения*. 1979. Т. 24. № 2. С. 396–401.
8. Лисецький Т. Б., Єлейко Я. І. Граничні теореми для загальної кількості частинок в критичних гіллястих процесах, з перетвореннями залежними від віку частинок. *Прикарп. вісник Наук. товари. ім. Шевченка*. 2021. Т. 16. № 60. С. 33–46.
9. Weiner H. J. Total progeny in a multitype critical age dependent branching process with immigration. *Journal of Applied Probability*. 1974. Vol. 11. No. 3. P. 458–470.
10. Ватутин В. А. Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса. *Теория вероятностей та її застосування*. Т. 22. № 1. С. 140–146.

Одержано 26.08.2022

УДК 519.21; 519.71

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).69-77](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).69-77)**Т. О. Лукашів¹, І. В. Малик², М. Ю. Горбатенко³**

¹ Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
t.lukashiv@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1651-6402>

² Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
доктор фізико-математичних наук, доцент
i.malyk@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1291-9167>

³ Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
доцент кафедри математичного моделювання,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
m.gorbatenko@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1702-8785>

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ ДОПУСТИМОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ І ПУАССОНОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Встановлено достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями.

Ключові слова: система випадкової структури, допустиме керування, марковські перемикання, пуассонові збурення, функціонал якості

1. Вступ. У роботі [1] встановлено, що для визначення розв'язку лінійно-квадратичної задачі оптимального керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями, потрібно знайти додатно визначений розв'язок матричних рівнянь Ріккати. Необхідні і достатні умови розв'язності цих рівнянь сформулювати в загальному випадку навряд чи вдасться можливим. Тому ставиться задача про побудову такого керування, яке б забезпечувало скінченність функціонала якості (і стабілізацію системи, якщо ми говоримо додатково про задачу стабілізації).

У випадку лінійних стохастичних систем випадкової структури без наявності марковських перемикань вказана задача розв'язана І. Я. Кацом [2].

У праці [3], користуючись методикою І. Я. Каца [2] дослідження систем випадкової структури і методикою Є. Ф. Царькова [4] врахування зовнішніх марковських перемикань, встановлено достатні умови існування допустимого керування для лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями.

У даній роботі узагальнено результати [3] на випадок лінійних автономних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і пуассоновими збуреннями.

2. Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, F, \mathbf{P})$ [5] розглянемо автономну систему, яка задана стохастичним диференціальним рівнянням (СДР)

$$dx = [A(\xi(t))x + B(\xi(t))u]dt + \sigma(\xi(t))xdw(t) + C(\xi(t))xdN(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \setminus K, \quad (1)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t) \Big|_{t=t_k} = g(t_k-, \xi(t_k-), \eta_k, x(t_k-)), \quad t_k \in K = \{t_n \uparrow\}, \quad (2)$$

для $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ і початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbf{H}. \quad (3)$$

Тут $\xi(t), t \geq 0$, — марковський процес із значеннями в метричному просторі \mathbf{Y} , умовна ймовірність якого допускає розклад

$$\mathbb{P}\{\xi(t + \Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta] | \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbb{P}\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau < t + \Delta t | \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t), \quad (4)$$

де $\mathbb{P}\{\cdot | \cdot\}$ — умовна ймовірність, $p(t, \alpha, \beta)$ і $p(t, \alpha)$ є заданими функціями з властивостями, описаними нижче; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — ланцюг Маркова зі значеннями в просторі \mathbf{H} і матрицею перехідних ймовірностей \mathbb{P}_H ; $x : [0, +\infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$; $w(t)$ є одновимірним стандартним вінеровим процесом; $N(t), t \geq 0$, — процес Пуассона з інтенсивністю λ ; A, B, σ, C — відомі матричні функції, задані на множині \mathbf{Y} ; процеси w, N, ξ та η незалежні [5], [6].

Процес $x(t), t \geq 0$ є *càdlàg* процесом; керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$ є r -вимірною функцією з класу допустимих керувань U [7].

Припустимо, що умови стрибка фазового вектора $x \in \mathbb{R}^m$ в момент $t = t^*$ зміни структури системи за рахунок переходу зі стану $\xi(t^*-) = \alpha$ в $\xi(t^*) = \beta \neq \alpha$ є лінійними і задаються у формі

$$x(t^*) = K(\alpha, \beta)x(t^*-) + \sum_{s=1}^J \xi_s Q_s(\alpha, \beta)x(t^*-,) \quad (5)$$

де $K(\alpha, \beta)$ та $Q_s(\alpha, \beta)$ — задані $m \times m$ -матриці, $\xi_s, s = \overline{1, J}$, — незалежні випадкові величини, для яких $\mathbf{E}\xi_s = 0, D\xi_s < \infty$.

Якість перехідного процесу будемо оцінювати квадратичним функціоналом якості

$$I_u(y, h, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{\infty} \mathbf{E}\{x^T M(t)x + u^T D(t)u | \xi(0) = y, \eta_0 = h, x(0) = x_0\} dt, \quad (6)$$

де $M(t) \geq 0, D(t) > 0$ — симетричні матриці відповідних розмірностей.

Означення 1. Керування u для системи (1)–(3) з умовою стрибка (5) називається допустимим, якщо воно забезпечує експоненціальну стійкість в середньому квадратичному розв'язку системи і збіжність ряду з інтегралів (6) при будь-яких початкових даних (3).

3. Основний результат. Обговоримо достатні умови існування допустимого керування лінійної системи, коли ξ є однорідним суто розривним марковським процесом, умовна ймовірність переходу якого допускає розклад (4) (перехідна щільність $p(t, \alpha, \beta) \equiv p(\alpha, \beta)$ не залежить від часу).

Відомо [1], що якщо коефіцієнти $A(y)$, $B(y)$, $\sigma(y)$, і $C(y)$ рівняння (1) неперервні в області $\mathbf{Y} = [\zeta_1, \zeta_2]$, $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}^1$, то оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(\alpha, h, x) = x^T G_k(t, \alpha)x$ визначається з рівняння

$$\begin{aligned} & G_k(t, \alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)G_k(t, \alpha) - B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t, \alpha) + \\ & + \sigma^T(\alpha)G_k(t, \alpha)\sigma(\alpha) + \lambda C^T(\alpha)G_k(t, \alpha)C(\alpha) + \\ & + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[K^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)K(\alpha, \beta) + \sum_{s=0}^l Q_s^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)Q_s(\alpha, \beta) - G_k(t, \alpha) \right] \times \\ & \times p_k(\alpha, \beta)d\beta + M_k(t) = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

причому оптимальне керування має вигляд $u_k^0(t, \alpha, x) = -D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k x$.

Припустимо, що структура системи (1)–(3) залишається незмінною $\xi(t) = \gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$, стрибки фазового вектора відсутні і марковських перемикачів (2) не відбувається. Рівняння (1) перетворюється у диференціальне рівняння

$$dx = [A(\gamma)x + B(\gamma)u]dt + \sigma(\gamma)x dw(t) + C(\gamma)x dN(t), \quad \gamma = \text{const}, \quad (8)$$

яка одержується з (1) «заморожуванням» структури.

Нехай для системи (8), (3) існує допустиме лінійне керування. Тоді з (7) одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} & G_k A(\gamma) + A^T(\gamma)G_k - B(\gamma)D_k^{-1}(t, \gamma)B^T(\gamma)G_k + \\ & + \sigma^T(\gamma)G_k\sigma(\gamma) + \lambda C^T(\gamma)G_k C(\gamma) + M_k(t, \gamma) = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

яке має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k > 0$ при будь-яких $M_k(t, \gamma) \geq 0$, $D_k(t, \gamma) > 0$.

Рівняння (9) відрізняється від рівняння (7) відсутністю інтегрального доданка в силу незмінності структури системи.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай для системи (1)–(3) з умовою стрибка (5) виконуються наступні припущення:*

- 1) *при будь-якому фіксованому $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$ для системи (8), (3) існує лінійне допустиме керування;*
- 2) *матриці $A(\gamma)$, $B(\gamma)$, $\sigma(\gamma)$, $C(\gamma)$, $\frac{dA(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{dB(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{d\sigma(\gamma)}{d\gamma}$, $\frac{dC(\gamma)}{d\gamma}$ обмежені за нормою на множині $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$:*

$$\|A(\gamma)\| \leq R, \quad \|B(\gamma)\| \leq R, \quad \dots, \quad \left\| \frac{dC(\gamma)}{d\gamma} \right\| \leq R, \quad (10)$$

$$de \|A\| = (SpAA^T)^{\frac{1}{2}};$$

3) матриці $K(\alpha, \beta)$ та $Q_s(\alpha, \beta)$, які визначають умову стрибка (5), задовольняють нерівності

$$K(\alpha, \beta) = E + (\beta - \alpha)\tilde{K}, \quad Q_s(\alpha, \beta) = \sqrt{\beta - \alpha}\tilde{Q}_s, \quad (11)$$

де \tilde{K}, \tilde{Q}_s – відомі матриці, які не залежать від α і β .

4) для щільності ймовірності переходу $p(\alpha, \beta)$ в (4) виконується нерівність

$$p(\alpha, \beta)|\beta - \alpha| < L, \quad \alpha, \beta \in [\zeta_1, \zeta_2], \quad \alpha \neq \beta. \quad (12)$$

Тоді можна вказати таку сталу $Q > 0$, що при виконанні нерівності $JL < Q$ для системи (1)-(3) з умовою стрибка (5) існує допустиме керування $u(y, h, x)$.

Доведення. Розглянемо СДР (8), одержане "заморожуванням" структури. З першої умови теореми випливає, що рівняння (9) має єдиний додатно визначений розв'язок $G_k(t, \gamma) > 0$, і, відповідно, для кожного фіксованого $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$ існують оптимальне керування $u_k(\gamma, h, x) = -D_k^{-1}(\gamma)B^T(\gamma)G_k(t, \gamma)x$ і оптимальна функція Ляпунова $v_k^0(\gamma, h, x) = x^T G_k(t, \gamma)x$, які забезпечують експоненційну стійкість в середньому квадратичному системи (8), (3) і мінімізують функціонал (6), причому $\min I_{v_k^0}(\gamma, h, x) = v_k^0(\gamma, h, x)$ [1], [7].

Щоб визначити залежність побудованої функції $v_k(\gamma, h, x)$ від γ , продиференціюємо (9) (поки що формально) за γ . Позначаючи $\frac{dG_k(t, \gamma)}{d\gamma} := H_k(t, \gamma)$, $\tilde{A}_k(t, \gamma) := A_k(\gamma) - B(\gamma)D_k^{-1}(\gamma)B^T(\gamma)G_k(t, \gamma)$, одержимо

$$\begin{aligned} & H_k(t, \gamma)\tilde{A}_k(t, \gamma) + \tilde{A}_k^T(t, \gamma)H_k(t, \gamma) + \\ & + \sigma^T(\gamma)H_k(t, \gamma)\sigma_k(\gamma) + \lambda C^T(\gamma)H_k(t, \gamma)C(\gamma) = -R_k(\gamma). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут $m \times m$ -матриця $R(\gamma)$ означає сукупність всіх членів, які не містять $H_k(t, \gamma)$, явний вигляд якої немає змісту, оскільки він в доведенні не використовується.

Покажемо, що рівняння (13) має єдиний розв'язок $H_k(t, \gamma)$ для довільної матриці $R_k(\gamma)$. Дійсно, система

$$dx = \tilde{A}_k(t, \gamma)xdt + \sigma(\gamma)xdw(t) + C(\gamma)xdN(t) \quad (14)$$

експоненціально стійка в середньому квадратичному, оскільки вона одержана стабілізацією системи (8) за допомогою оптимального керування $u_k^0(\gamma, h, x)$. Тому на розв'язку x цієї системи інтеграл

$$\int_0^\infty \mathbf{E}\{x^T R_k x / \xi(0) = \gamma, \eta_0 = h, x(0) = x_0\} dt = v_k^0(\gamma, h, x_0)$$

збіжний і є квадратичною формою, причому

$$(lv_k^0)(y, h, x_0) = -x_0^T R_k x_0,$$

де $(lv_k^0)(y, h, x_0)$ слабкий інфінітезимальний оператор в силу системи (8) [1]. Позначаючи матрицю цієї форми через $H(\gamma)$, можна переконатися, що вона задовольняє рівняння (13). Якщо існує інший розв'язок $\tilde{H}(\gamma) \neq H(\gamma)$, то для

квадратичної форми $v(\gamma, h, x) = x^T \bar{H}(\gamma)x$, де $\bar{H}(\gamma) = H(\gamma) - \tilde{H}(\gamma)$, одержимо, що $(lv)(\gamma, h, x) = 0$. Звідси випливає тотожність $\mathbf{E}\{v(\gamma, h, x)/\gamma, h, x_0\} \equiv \mathbf{E}\{v_k^0(\gamma, h, x)/\gamma, h, x_0\} = x_0^T \bar{H}(\gamma)x_0$. В силу довільності $x_0 \in \mathbb{R}^m$, приходимо до висновку, що $\bar{H}(\gamma) = 0$.

Отже, рівняння (13), як і рівняння (9) має єдиний розв'язок при кожному $\gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$. Умови 1) і 2) теореми виконуються на замкнутому інтервалі, а матриці $G_k(t, \gamma)$, $H(\gamma) = \frac{dG_k(t, \gamma)}{d\gamma}$ неперервно залежать від γ , тому можна підібрати змінну $\vartheta > 0$ так, щоб виконувалися оцінки

$$\|G_k(t, \gamma)\| \leq J\vartheta, \quad \|H(\gamma)\| \leq J\vartheta. \quad (15)$$

Тепер для розмороженої системи (1)–(3) з умовою стрибка (5) візьмемо керування $u_k^0(t, y, h, x) = -D_k^{-1}(t, y)B^T(y)G_k(t, y)x$, $y \in [\zeta_1, \zeta_2]$ і знайдемо умови, при яких воно є допустимим для цієї системи. Для цього скористаємося функцією Ляпунова $v_k^0(y, h, x) = x^T G_k(t, y)x$. За означенням слабкого інфінітезимального оператора в силу систем (1)–(3) і (8), (2), (3), одержимо [1]:

$$\begin{aligned} (lv_k^0)(y, h, x)|_{(1)} &= (lv_k^0)(y, h, x)|_{(8)} + \\ &+ \mathbf{E}\{v_k^0(\xi(t), h, x(t)) - v_k^0(\alpha, h, x)/\xi(t-) = \alpha, \xi(t) = \beta \neq \alpha, h, x(t-) = x(t) = x\} = \\ &= x^T (G_k(t, \alpha)A(\alpha) + A^T(\alpha)G_k(t, \alpha) - B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t, \alpha) + \\ &+ \sigma^T(\alpha)G_k(t, \alpha)\sigma(\alpha) + \lambda C^T(\alpha)G_k(t, \alpha)C(\alpha) + \\ &+ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[K^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)K(\alpha, \beta) + \sum_{s=0}^l Q_s^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)Q_s(\alpha, \beta) - G_k(t, \alpha) \right] \times \\ &\times p_k(\alpha, \beta)d\beta + M_k(t))x = 0, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Оцінимо квадратичну форму в (16). Маємо

$$M_k(t) + B(\alpha)D_k^{-1}(t)B^T(\alpha)G_k(t, \alpha) \geq c(t)E,$$

де $c(t)$ дорівнює мінімальному елементу матриці $M_k(t)$ при $\alpha \in [\zeta_1, \zeta_2]$, $t \geq t_k$, E — одинична $m \times m$ -матриця.

Оцінку інтегрального доданка проведемо з урахуванням (10), (11), (12), (15):

$$\begin{aligned} &\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[K^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)K(\alpha, \beta) + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=0}^l Q_s^T(\alpha, \beta)G_k(t, \beta)Q_s(\alpha, \beta) - G_k(t, \alpha) \right] p_k(\alpha, \beta)d\beta \leq \\ &\leq JL\vartheta \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[K^T(\alpha, \beta)K(\alpha, \beta) + \sum_{s=0}^l Q_s^T(\alpha, \beta)Q_s(\alpha, \beta) - 1 \right] p_k(\alpha, \beta)d\beta \leq \\ &\leq JL\vartheta\rho(\zeta_2 - \zeta_1)E, \quad \rho = \text{const}. \end{aligned}$$

Таким чином, матимемо

$$(lv_k)(y, h, x) = -x^T[-c + JL\vartheta\rho(\zeta_2 - \zeta_1)]x.$$

Вважаючи, що $Q = c[2\vartheta\rho(\zeta_2 - \zeta_1)]^{-1}$, матимемо $-c + LJ\vartheta\rho(\zeta_2 - \zeta_1) \leq -\frac{c}{2}$, якщо $JL < Q$. Отже, незбурений рух системи (1)–(3) з умовою стрибка (5), (11) експоненціально стійкий в середньому квадратичному, оскільки [8]

$$(lv_k)(y, h, x) \leq -\frac{c}{2}x^2.$$

Теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Нерівність $JL < Q$ означає повільну в середньому зміну коефіцієнтів системи (1)–(3), оскільки, наприклад, для матриці $A(\xi(t))$ вірною є оцінка

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{E} \{A(\xi(t + \Delta t)) - A(\xi(t)) | \xi(t) = \alpha\} &= \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{E} \left\{ \frac{dA(\gamma)}{d\gamma} \cdot |\xi(t + \Delta t) - \alpha| \right\} = \\ &= \left\| \frac{dA(\gamma)}{d\gamma} \right\| \cdot \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} |\beta - \alpha| p_k(\alpha, \beta) d\beta \leq JL < Q. \end{aligned}$$

В умовах теореми 1 міститься вимога про існування керування, яке стабілізує систему (8), (2), (3) при кожному фіксованому значенні $\xi(t) = \gamma \in [\zeta_1, \zeta_2]$. Але природно, що систему можна стабілізувати навіть у тому випадку, коли на деякій множині фіксованих значень $\xi(t) = \gamma \in \bar{Z}$ система (8), (2), (3) не може бути стабілізована. Цього можна очікувати. Якщо ймовірність довгого перебування системи в таких структурних станах як і величина стрибків фазового вектора x досить мала. Для аналізу систем із наявністю перемикаючих процесів використовується ергодична теорія процесу перемикань $\xi(t), t \geq 0$

Знайдемо кількісні оцінки для параметрів процесу ξ , при яких в системі зможе реалізуватися вказана ситуація. При цьому для спрощення викладок будемо вважати, що фазові траєкторії при зміні структури системи залишаються неперервними, тобто будемо вважати, що в (5) $K(\alpha, \beta) = E$, $Q(\alpha, \beta) = 0$. Нехай стабілізуюче лінійне керування для системи (8), (2), (3) існує лише для кожного γ із замкнутої множини $Z \subset \mathbf{Y} = [\zeta_1, \zeta_2]$. Позначимо через \bar{Z} доповнення до Z , тобто $\bar{Z} = \mathbf{Y} \setminus Z$ і введемо в розгляд величини

$$\begin{aligned} q(\alpha, Z) &= \int_Z |\alpha - \beta| p_k(\alpha, \beta) d\beta, \quad \alpha \in Z, \\ p_{k_1}(\alpha, \bar{Z}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \mathbf{P} \{ \xi(t + \Delta t) \in \bar{Z} | \xi(t) = \alpha \in Z \}, \\ p_{k_2}(\alpha, Z) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \mathbf{P} \{ \xi(t + \Delta t) \in Z | \xi(t) = \alpha \in \bar{Z} \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут $q(\alpha, Z)$ — середня швидкість зміни процесу ξ на множині Z , величина $p_{k_1}(\alpha, \bar{Z})\Delta t$ характеризує ймовірність переходу системи (1)–(3) за час Δt із стабілізованого стану $\alpha \in Z$ в множину \bar{Z} нестабілізованих станів, а $p_{k_2}(\alpha, Z)\Delta t$ — ймовірність зворотного переходу.

Теорема 2. Нехай для системи (1)–(3) виконуються умови:

- 1) при будь-якому фіксованому $\gamma \in Z$ для системи (8), (2), (3) існує допустиме лінійне керування;
- 2) фазові траєкторії x системи (1)–(3) неперервні при $t \geq 0$;
- 3) параметри системи (8), (2), (3) задовольняють оцінки (10).

Тоді можна вказати константи $\mu > 0$, $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що при виконанні нерівностей

$$\begin{aligned} q(\alpha, Z) &< \mu, & \alpha \in Z, \\ p_{k_1}(\alpha, \bar{Z}) &< \delta_1, & \alpha \in Z, \\ p_{k_2}(\alpha, Z) &> \delta_2, & \alpha \in \bar{Z}, \end{aligned} \quad (18)$$

для системи (1)–(3) існує допустиме керування.

Доведення. Для довільного $\gamma \in Z$ побудуємо функцію Ляпунова у вигляді $v_k(\gamma, h, x) = x^T G_k(t, \gamma)x$ та керування $u_k^0(t, \gamma, h, x) = -D_k^{-1}(t, \gamma)B^T(\gamma)G_k(t, \gamma)x$, яке стабілізує систему (8), (2), (3) і мінімізує функціонал (6). Матриця $G_k(t, \gamma) > 0$ задовольняє рівняння (9).

Візьмемо жепяке число $\kappa > 0$ і побудуємо додано визначену за змінною x функцію

$$v_k(y, h, x) = \begin{cases} x^T G_k(t, y)x, & y \in Z, \\ (\kappa + c_2)x^2, & y \in \bar{Z}, \end{cases} \quad (19)$$

де позначено $c_1 = \min \|G_k(t, y)\|$, $c_2 = \max \|G_k(t, y)\|$ при $y \in Z$.

Керування $u_k(y, h, x)$ для системи (1)–(3) визначимо рівністю

$$u_k(t, y, h, x) = \begin{cases} u_k^0(t, y, h, x), & y \in Z, \\ 0, & y \in \bar{Z}. \end{cases} \quad (20)$$

Умова $u_k(t, y, h, x) = 0$ при $y \in \bar{Z}$ означає, що в нестабілізованих станах керування системою припиняється (нуль покладається для спрощення доведення). Наприклад, в одновимірному випадку нестабілізованість (некерівність) означає, що $B(y) = 0$ при $y \in \bar{Z}$ і тоді вибір будь-якого іншого керування не змінює поведінку системи.

Покажемо, що керування $u_k(t, y, h, x)$ є допустимим при відповідному виборі сталих μ , δ_1 , δ_2 в умовах (18).

Оцінимо величину $(lv_k)(y, h, x)$ в силу системи (1)–(3) під дією керування (20). Враховуючи (9), (10), а також умову (15), яка виконується тепер тільки при $\gamma \in Z$, одержимо в точці $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $y = \alpha \in Z$ наступну оцінку

$$\begin{aligned} (lv_k)(y, h, x) &= x^T \left[-M_k(t, \alpha) - B(\alpha)D_k^{-1}(t, \alpha)B^T(\alpha)G_k(t, \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \int_Z (G_k(t, \beta) - G_k(t, \alpha))p_k(\alpha, \beta)d\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\bar{Z}} ((\kappa + c_2)E - G_k(t, \alpha))p_k(\alpha, \beta)d\beta \right] x \leq \end{aligned}$$

$$\leq x^T[-c + J\vartheta q(\alpha, Z) + (c_2 - c_1 + \kappa)p_{k_1}(\alpha, \bar{Z})]x. \quad (21)$$

Аналогічно, при $y = \alpha \in \bar{Z}$, одержимо оцінку

$$\begin{aligned} (lv_k)(y, h, x) &= x^T \left[2(\kappa + c_2)A_k(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma^T(\alpha)\sigma(\alpha) + \lambda C^T(\alpha)C(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \int_Z (G_k(t, \beta) - (\kappa + c_2)E)p_k(\alpha, \beta)d\beta \right] x \leq \\ &\leq x^T[2J(\kappa + c_2) + J^2 - \kappa p_{k_2}(\alpha, Z)]x. \end{aligned} \quad (22)$$

З (21) і (22) випливає, що від'ємна визначеність $(lv_k)(y, h, x)$ може бути забезпечена досить малим значенням величин $q(\alpha, Z)$ і $p_{k_1}(\alpha, \bar{Z})$, а також досить великим значенням $p_{k_2}(\alpha, Z)$.

Зокрема, у (18) можна вказати такі малі значення $\mu > 0$ і $\delta_1 > 0$, щоб $J\vartheta\mu + (c_2 - c_1 + \kappa)\delta_1 < \frac{c}{2}$, а $\delta_2 = (2J(\kappa + c_2) + J^2 + \frac{c}{2})\kappa^{-1}$. Тоді для довільних $x(t) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbf{Y}$ вірною є оцінка

$$(lv_k)(y, h, x) \leq -\frac{c}{2}x^2.$$

що і доводить теорему 2.

Зауваження 2. В доведенні теореми 2 фігурує вільний параметр κ , яким можна маніпулювати так, щоб оптимізувати в деякому розумінні перехідні ймовірності $p_{k_1}(\alpha, \bar{Z})$ і $p_{k_2}(\alpha, Z)$.

Зауваження 3. Теорема 2 доведена в припущенні про неперервність фазової траєкторії x . При деякому ускладненні викладок можна довести, що аналогічний результат має місце і при наявності стрибків фазового вектора, які визначаються умовами (5), якщо тільки ці стрибки досить малі [2].

Зауваження 4. Слід відмітити, що керування (20), яке стабілізує систему (1)–(3) буде лінійним за змінною x при кожному фіксованому $\xi(t) \in [\zeta_1, \zeta_2]$.

4. Висновки. У роботі розглянуто стабілізацію лінійних стохастичних диференціальних систем випадкової структури з марковськими переключеннями. Для лінійних систем розглянуто достатні умови стабілізації на основі квадратичного функцілу якості.

Для розглянутих систем, умови експоненціальності стійкості та умови керовності розглянуто на основі щільності $p(\alpha, \beta)$ процесу переключень $\xi(t)$. Такий підхід дозволяє дещо спростити умови, накладені на щільність процесу переключень, наприклад умову строгої ергодичності.

Список використаної літератури

1. Antonyuk S. V., Byrka M. F., Gorbatenko M. Y., Lukashiv T. O., Malyk I. V. Optimal Control of Stochastic Dynamic Systems of a Random Structure with Poisson Switches and Markov Switching *Journal of Mathematics. Article ID 9457152*. 2020. Vol. 2020. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/9457152>
2. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: УГАПС, 1998. 222 с.

3. Лукашів Т. Достатні умови стабільності лінійних стохастичних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями. *Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць.: Математика*. 2009. Вип. 485. С. 35–40.
4. Свердан М. Л., Царьков Е. Ф. Устойчивость импульсных систем. Рига: РТУ, 1994. 300 с.
5. Dynkin E. B. Markov Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1965. 366 p.
6. Oksendal B. Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 2013. 379 p.
7. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление систем с последствием. Москва: Наука, 1992. 336 с.
8. Королюк В. С., Царков Е. Ф., Ясинський В. К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. У 3 т. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: Вид-во «Золоті литаври». 2009. 798 с.

Lukashiv T. O., Malyk I. V., Gorbatenko M. Yu. Sufficient conditions of the existence of admissible control for linear stochastic systems of random structure with Markov switches and Poisson perturbations.

Sufficient conditions for the existence of admissible control for linear stochastic systems of a random structure with Markov switches and Poisson disturbances have been established.

Keywords: random structure system, admissible control, Markov switches, Poisson perturbations, quality functional.

References

1. Antonyuk, S. V., Byrka, M. F., Gorbatenko, M. Y., Lukashiv, T. O., & Malyk, I. V. (2020). Optimal Control of Stochastic Dynamic Systems of a Random Structure with Poisson Switches and Markov Switching *Journal of Mathematics*. Article ID 9457152, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2020/9457152>
2. Kats, I. Ya. (1998). Lyapunov Function Method in Problems of Stability and Stabilization of Random-Structure Systems. *Yekaterinburg: Izd. Uralsk. Gosakademii Putei Soobshcheniya* [in Russian].
3. Lukashiv, T. (2009). Sufficient conditions for the stability of linear stochastic systems of random structure with external Markov switches. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics*, 485, 35–40 [in Ukrainian].
4. Sverdan, M. L., & Tsar'kov, E. F. (1994). Stability of Stochastic Impulse Systems. *Riga: RTU* [in Russian].
5. Dynkin, E. B. (1965). Markov Processes. *Berlin: Springer-Verlag*.
6. Oksendal, B. (2013). Stochastic Differential Equations. *Berlin: Springer-Verlag*.
7. Andreeva, E. A., Kolmanovskii V. B., & Shaikhet L. E. (1992). Control of hereditary systems. *Moskow: Nauka* [in Russian].
8. Korolyuk, V. S., Tsar'kov, E. F., & Yasinsky, V. K. (2009). Ymovinist', statystyka, vypadkovi protsesy. Teoriia i compyuterna praktyka. U 3 t. Vypadkovi protsesy. Teoriia i compyuterna praktyka [Probability, statistics and stochastic process: Theory and computer practice. In 3 vol. Vol 3: Stochastic process: Theory and computer practice]. (Vol. 3). *Chernivtsi: «Zoloti lytavry»* [in Ukrainian].

Одержано 12.10.2022

УДК 517.92

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).78-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).78-90)**В. В. Собчук¹, І. О. Зеленська²**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор технічних наук, доцент
v.v.sobchuk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4002-8206>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант,
KorChuk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7784-1030>

ПОБУДОВА АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ СЗДР 4-ГО ПОРЯДКУ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЮ ТОЧКОЮ ЗВОРОТУ МЕТОДОМ ІСТОТНО ОСОБЛИВИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено конструктивні умови існування асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальною точкою звороту та запропоновано алгоритм побудови відповідного розв'язку. Методом істотно особливих функцій побудовано асимптотика розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальною точкою звороту. Досліджено випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні елементи та елементи тотожно рівні нулеві.

Ключові слова: сингулярно збурені диференціальні рівняння, малий параметр, диференціальна точка звороту, функція Ейрі.

1. Вступ. Стрімкий розвиток природознавства вимагає постійного вдосконалення підходів до моделювання реальних фізичних процесів та явищ. Багато задач астрономії, квантової механіки описуються системами диференціальних рівнянь спеціального класу, які можна віднести до групи так званих сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Найвідомішими задачами такого роду є дослідження еволюції квантової системи в часі, що описується основним рівнянням руху нерелятивістської квантової механіки — рівнянням Шредінгера, задач механіки суцільного середовища, задач гідродинамічної стійкості, задач з класичним осцилятором тощо.

Математичні моделі цих процесів містять малий параметр біля старших похідних і саме наявність цього малого множника привело до створення великої теорії [1]. Підхід, за якого формально покласти малий параметр рівним нулю є неприйнятним, оскільки таке спрощення математичної моделі призведе до дослідження математичної конструкції, яка абсолютно не характеризує тонкі властивості початкової системи. Відтак виникає необхідність розвитку методів побудови розв'язків таких систем, які досить повно враховують особливості поведінки реальної еволюційної системи математичний опис якої містить малий параметр. Слід зауважити, що для таких систем часто характерними є хвильові явища, де одночасно в певній точці відбувається дія налітаючої та відбитої хвилі — такі точки називають точками звороту. Власне, дослідження поведінки розв'язків диференціальних рівнянь в околі точок звороту викликають

окремий інтерес. Дослідженню такого виду задач присвячений широкий спектр наукових праць [1–7].

Відомо, що починаючи з диференціальних рівнянь другого порядку із змінними коефіцієнтами, їх інтегрування в квадратурах, майже неможливе. Тому в більшості існуючих асимптотичних методах було застосовано наступну ідею: розв'язок сингулярно збуреного рівняння, яке досліджується виразити через розв'язок простіших диференціальних рівнянь, які називаються модельними диференціальними рівняннями. При дослідженні рівнянь з простою точкою звороту одним з найбільш вдалих модельних рівнянь є рівняння виду

$$U''(t) \pm tU(t) = 0,$$

які називають рівняннями Ейрі, а їх розв'язки — функціями Ейрі.

Функції Ейрі застосовуються в багатьох розділах як класичної, так і квантової фізики. Це пов'язано з тим, що для рівнянь з точками звороту асимптотичні розв'язки є експоненціальними з одного боку та коливальними з іншого. Функції Ейрі є рівномірними наближеннями, область дії яких включає точку звороту та її околі. У класичній фізиці вони займають важливе місце в оптиці, електромагнетизмі, передачі випромінювання, механіці рідини та нелінійному поширенні хвиль. У гідродинаміці функції Ейрі широко застосовуються при дослідженні стійкості двовимірної в'язкої рідини для якої течія регулюється рівнянням Орра–Зоммерфельда (диференціальне рівняння четвертого порядку). Побудова асимптотичних наближень, які є рівномірно дійсними розв'язками цього рівняння в околі точок звороту, призводить (після вибору розв'язних рівнянь з подібними асимптотичними властивостями) до функцій Ейрі. Також їх застосування має місце при вивченні стійкості потоку Куетта нев'язкої рідини. Зауважимо, що значний інтерес викликають задачі про гідродинамічну стійкість паралельних течій у теорії продовжно-поперечного згину пружної балки та інших схожих прикладних задач. Так, лінійна задача про стійкість паралельної течії приводить до дослідження рівняння

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^4\psi(x) - i\alpha R \left[(\omega(x) - c) \left(\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi(x) \right) - \frac{d^2\omega}{dx^2} \right] = 0, \quad (1)$$

яке називають рівнянням Орра–Зоммерфельда [див. [1]].

Означення 1. Точка x_0 в якій множник $\omega(x) - c$ обертається в нуль називається точкою звороту для рівняння (1).

Теорія та практика вимагають вивчення розв'язку рівняння (1) в околі точки звороту, включаючи і саму точку звороту. Виходячи з фізичних міркувань множник αR , де R — число Рейнольдса, є досить великим. Тому ввівши в розгляд малий параметр це рівняння можна звести до сингулярно збуреного диференціального рівняння з точкою звороту біля другої похідної, тобто до рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x, \varepsilon) + a(x)y^{(2)}(x, \varepsilon) + b(x)y'(x, \varepsilon) + c(x)y(x, \varepsilon) = h(x). \quad (2)$$

Розглянемо узагальнену методику побудови рівномірної асимптотики для сингулярно збурених рівнянь певного класу.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР):

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = H(x), \quad (3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $x \in [-l, 0]$, $Y(x, \varepsilon) = \text{colomn}(y_1(x, \varepsilon), y_2(x, \varepsilon), y_3(x, \varepsilon), y_4(x, \varepsilon))$ — шукана вектор-функція, $H(x) = \text{colomn}(0, 0, 0, h(x))$ — задана вектор-функція,

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix},$$

відома матриця, елементи якої $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — нескінченно диференційовні функції на відрізку $[0; l]$.

Систему рівнянь (3), яка відповідає скалярному рівнянню (2), будемо досліджувати за умови, що

$$\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0, \quad c(x) > 0. \quad (4)$$

У векторному рівнянні (3) покладемо $\varepsilon = 0$, тоді одержимо вироджену систему

$$-A(x, 0)Y(x, 0) = H(x), \quad (5)$$

де матриця $A(x, 0)$ прийме вигляд

$$A(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Вироджене рівняння у скалярному вигляді запишеться так

$$-x\tilde{a}(x)\omega''(x) + b(x)\omega'(x) + c(x)\omega(x) = h(x). \quad (6)$$

Зауважимо, що умови (4) забезпечать існування достатньо гладкого розв'язку (5). Відтак характеристичне рівняння для задачі (3) запишемо у вигляді

$$|A(x, 0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda^2 + a(x)) = 0.$$

Тоді коренями характеристичного рівняння є

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{x\tilde{a}(x)}.$$

Означення 2. Точка x_0 , в якій множник $x\tilde{a}(x)$ в диференціальному рівнянні (6) обертається в нуль називається диференціальною точкою звороту для рівняння (6).

Також слід зазначити, що в даній задачі точка звороту знаходиться біля старшої (другої) похідної. Тому, використовуючи цю особливість будемо її відзняти від тієї, що вивчались в роботах [8]

$$-x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x),$$

для рівнянь третього порядку.

Означення 3. Точка x_0 , в якій множник $x\tilde{a}(x)$ в диференціальному рівнянні 2-го порядку (6) обертається в нуль називається диференціальною точкою звороту II роду.

Слід зазначити, що коли маємо справу з виродженими диференціальними рівняннями 1-го порядку, для яких множник перед першою похідною перетворюється в нуль, то точки звороту для таких рівнянь називають точками звороту 1-го роду. Наприклад, це характерно для задач коли замість рівняння (2) вивчаємо рівняння третього порядку.

3. Регуляризація системи сингулярно збурених рівнянь. Особлива точка $\varepsilon = 0$ в заданій системі породжує певні особливості, які будемо називати істотно особливі функції (ІОФ). З метою виділення всіх ІОФ введемо регуляризуючу змінну $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$, де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Згідно з методом регуляризації істотно особливих функцій [1], задачу будемо вивчати за умови

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^{1-p}\varphi(x)} \equiv y(x, \varepsilon).$$

Підставимо розширену функцію і її похідну у векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon \tilde{y}(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p} \varphi' \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon) \tilde{y}(x, t, \varepsilon) = h(x). \quad (7)$$

4. Простір безрезонансних розв'язків. Опишемо простір функцій, в якому можна буде побудувати рівномірний асимптотичний розв'язок розширеної задачі (3). Розглянемо підпростори функцій

$$R_{1r} = \alpha_{1r}(x)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1r}(x)U'_k(t),$$

$$R_{2r} = \alpha_{2r}(x)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2r}(x)U'_k(t),$$

$$R_{3r} = f_r(x)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_r(x)\psi'(t),$$

$$R_{4r} = \omega_r(x),$$

де $\alpha_{kr}(x), \beta_{kr}(x), f_r(x), g_r(x), \omega_r(x) \in C^\infty[0, l]$, $k = 1, 2$. З цих підпросторів одержимо новий простір як пряму суму

$$R_r = \bigoplus_{k=1}^4 R_{kr}.$$

Зазначимо, що $(\alpha_j(x, \varepsilon)U_k(t))$ і $(\varepsilon^\gamma \beta_j(x, \varepsilon)U'_k(t))$ є розв'язками однорідного векторного рівняння (7). При цьому, аналітичні функції $\alpha(x, \varepsilon)$ і $\beta(x, \varepsilon)$ залежать від малого параметра $\varepsilon > 0$ і нескінченно диференційовні по змінній

$x \in [0; l]$. Функції $U_k(t)$ — це функції Ейрі-Дородніцина [1]. Функція $\psi(t)$, її похідна та функція $\omega(x, \varepsilon)$ використовуються для побудови асимптотики частинного розв'язку (3).

ЮФ $\psi(t)$ є розв'язком неоднорідного рівняння

$$U''(t) + tU(t) = 1,$$

тобто

$$\psi(t) = \int_t^{+\infty} [U_2(t) \cdot U_1(\tau) - U_1(t) \cdot U_2(\tau)] d\tau.$$

5. Розширення системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Зазначимо, що в [1] описано метод регуляризації істотно особливих функцій для побудови асимптотичного розв'язку рівняння Ліувілля з різними точками звороту. Даний підхід можна модифікувати для побудови асимптотичних розв'язків для рівнянь четвертого порядку типу (2). Відтак, така модифікація методу істотно особливих функцій для визначення регуляризуючої функції дозволяє визначити показник p і функцію $\varphi(x)$. Для цього подіємо розширеним оператором \tilde{L}_ε на елементи простору R_{1r} та R_{2r} і підставимо результат в однорідне розширене рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\varepsilon (\alpha_k(x, \varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^\gamma \beta_k(x, \varepsilon)U'_k(t)) &= \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) U'_k(t) - \\ &- \varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) \varphi(x) U_k(t) - A(x, \varepsilon) \alpha_k(x, \varepsilon) U_k(t) - \\ &- \varepsilon^\gamma A(x, \varepsilon) \beta_k(x, \varepsilon) U'_k(t) + \varepsilon \alpha'_k(x) U_k(t) + \varepsilon^{1+\gamma} \beta'_k(x) U'_k(t) = 0. \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при ЮФ $U_k(t)$ в отриманій системі ($k = 1, 2$):

$$U'_k(t) : \varepsilon^{1-p} \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - \varepsilon^\gamma [A_0(x) + \varepsilon A_1] \beta_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1+\gamma} \beta'_k(x, \varepsilon), \quad (8)$$

$$U_k(t) : \varepsilon^{1+\gamma-2p} \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) - [A_0(x) + \varepsilon A_1] \alpha_k(x, \varepsilon) = -\varepsilon \alpha'_k(x, \varepsilon). \quad (9)$$

Будемо вимагати, щоб отримані алгебраїчні системи (8) і (9) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon > 0$. Для цього, на невизначені до цього p і γ накладемо умови:

$$1 - p = \gamma, \quad 1 + \gamma - 2p = 0.$$

З цих рівнянь однозначно визначимо:

$$p = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}.$$

В результаті отримуємо систему:

$$U'_k(t) : \alpha_k(x, \varepsilon) \varphi'(x) - A_0(x) \beta_k(x, \varepsilon) = -\mu^3 \beta'_k(x, \varepsilon) + \mu^3 A_1 \beta_k(x, \varepsilon), \quad (10)$$

$$U_k(t) : \beta_k(x, \varepsilon) \varphi(x) \varphi'(x) + A_0(x) \alpha_k(x, \varepsilon) = \mu^3 \alpha'_k(x, \varepsilon) - \mu^3 A_1 \alpha_k(x, \varepsilon), \quad (11)$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

Векторні рівняння (10) і (11) запишемо у вигляді такої системи алгебраїчних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{k1}(x, \varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k2}(x, \varepsilon) - \beta'_{k1}(x, \varepsilon)], \\ \alpha_{k2}(x, \varepsilon)\varphi'(x) = \mu^3[\beta_{k3}(x, \varepsilon) - \beta'_{k2}(x, \varepsilon)], \\ \alpha_{k3}(x, \varepsilon)\varphi'(x) - \beta_{k4}(x, \varepsilon) = -\mu^3\beta'_{k3}(x, \varepsilon), \\ \alpha_{k4}(x, \varepsilon)\varphi'(x) + c(x)\beta_{k1}(x, \varepsilon) + b(x)\beta_{k2}(x, \varepsilon) + \\ \hspace{15em} + a(x)\beta_{k3}(x, \varepsilon) = -\mu^3\beta'_{k4}(x, \varepsilon), \\ \beta_{k1}(x, \varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha'_{k1}(x, \varepsilon) - \alpha_{k2}(x, \varepsilon)], \\ \beta_{k2}(x, \varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = \mu^3[\alpha'_{k2}(x, \varepsilon) - \alpha_{k3}(x, \varepsilon)], \\ \beta_{k3}(x, \varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + \alpha_{k4}(x, \varepsilon) = \mu^3\alpha'_{k3}(x, \varepsilon), \\ \beta_{k4}(x, \varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - c(x)\alpha_{k1}(x, \varepsilon) - b(x)\alpha_{k2}(x, \varepsilon) - \\ \hspace{15em} - a(x)\alpha_{k3}(x, \varepsilon) = \mu^3\alpha'_{k4}(x, \varepsilon). \end{array} \right. \quad (12)$$

Відтак, ми отримали регулярно збурену відносно малого параметра $\varepsilon > 0$ систему алгебраїчних рівнянь (12), що власне ілюструє проведену нами регуляризацію системи (3).

6. Побудова формальних розв'язків однорідної системи. Для побудови розв'язку однорідної (3) з однозначно визначеними показниками $p = \frac{2}{3}$ і $\gamma = \frac{1}{3}$ знайдемо всі невідомі системи (12) у вигляді таких рядів вектор-функцій:

$$\alpha_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \alpha_{kr}(x), \quad \beta_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \beta_{kr}(x). \quad (13)$$

Виконаємо підстановку цих рядів у (12), тоді для визначення вектор-функцій

$$\alpha_{kr} = \text{column}(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x)),$$

$$\beta_{kr}(x) = \text{column}(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)),$$

одержимо такі рекурентні системи:

$$\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0, \quad r = \overline{0; 2}, \quad \Phi(x)Z_{kr}(x) = FZ_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 3, \quad (14)$$

де

$$Z_{kr}(x) = \text{column}(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x), \beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)),$$

а $\Phi(x) =$

$$= \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(x) & c(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& FZ_{k(r-3)} = \\
& = \text{column} \left(\begin{array}{cc} (\beta_{k2(r-3)}(x) - \beta'_{k1(r-3)}(x)), & (\beta_{k3(r-3)}(x) - \beta'_{k2(r-3)}(x)), \\ (\alpha_{k2(r-3)}(x) - \alpha'_{k1(r-3)}(x)), & (\alpha_{k3(r-3)}(x) - \alpha'_{k2(r-3)}(x)), \\ & -\beta'_{k3(r-3)}(x), \quad -\beta'_{k4(r-3)}(x) \\ & -\alpha'_{k3(r-3)}(x), \quad -\alpha'_{k4(r-3)}(x) \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Обчислимо визначник цієї системи:

$$\det \Phi(x) = \varphi'^2 [\varphi(x)\varphi'_2(x)]^2 \cdot [\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)]^2 = 0.$$

До цього часу регуляризуюча функція $\varphi(x)$ не визначена. Тому, визначимо її як розв'язок задачі:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}, \quad \varphi(0) = 0, \quad (15)$$

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{x\tilde{a}(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи $\Phi(x)Z_{kr} = 0$, коли $r = \overline{0, 2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = \text{column} \left(0, 0, \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{k4r}(x), -\varphi\varphi'(x)\beta_{k3r}(x), 0, 0, \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x) \right), \quad (16)$$

де $\beta_{ik0}(x)$, $k = 1; 2$, $i = \overline{1; 4}$ — довільні, достатньо гладкі функції коли $x \in [0; l]$.

На наступному кроці розв'яжемо неоднорідні системи (14). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r = 3$. З урахуванням отриманого розв'язку (16), будемо мати

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k13}(x) = \beta_{k20}(x) - \beta'_{k10}(x) \equiv \beta_{k20}(x) \equiv 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{k23}(x) = \beta_{k30}(x) - \beta'_{k20}(x) \equiv \beta_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) - \beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x) + c(x)\beta_{k13}(x) + b(x)\beta_{k23}(x) + a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x), \end{cases} \quad (17)$$

і

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k13}(x) = \alpha'_{k10}(x) - \alpha_{k20}(x) \equiv -\alpha_{k20}(x) \equiv 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k23}(x) = \alpha'_{k20}(x) - \alpha_{k30}(x) \equiv -\alpha_{k30}(x) \equiv -[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) + \alpha_{k43}(x) = \alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x) - c(x)\alpha_{k13}(x) - b(x)\alpha_{k23}(x) - a(x)\alpha_{k33}(x) = \alpha'_{k40}, \end{cases} \quad (18)$$

де $\alpha'_{k40} \equiv (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30})'$.

З першого і другого рівнянь систем (17) та (18) визначимо функції $\alpha_{k13} \equiv 0$, $\beta_{k13} \equiv 0$ і $\alpha_{k23}(x) = [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x)$ і $\beta_{k23}(x) = -[\varphi'(x)]^{-2}[\varphi(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)$. Тоді системи (17) і (18) перейдуть в системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{k33}(x) - \beta_{k43}(x) = -\beta'_{k30}(x), \\ -a(x)\alpha_{k33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k43}(x) = \\ = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x)) + b(x)[\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}, \end{cases} \quad (19)$$

i

$$\begin{cases} \alpha_{k43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33}(x) = \alpha'_{k30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k40}(x)), \\ \varphi'(x)\alpha_{k43}(x) + a(x)\beta_{k33}(x) = -\beta'_{k40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}\beta_{k40}(x). \end{cases} \quad (20)$$

Обчислимо ранги матриць цих систем

$$\left(\begin{array}{cc|c} \varphi'(x) & -1 & -\beta'_{k30}(x) \\ -a(x) & \varphi(x)\varphi'(x) & (-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k30}(x))' - \frac{b(x)}{\varphi'(x)}\beta_{k30} \end{array} \right), \quad (21)$$

i

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \varphi(x)\varphi'(x) & [\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)}]' \\ \varphi'(x) & a(x) & -\beta'_{k40}(x) - \frac{b(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}\beta_{k40}(x) \end{array} \right). \quad (22)$$

Дослідимо праві частини (21) і (22). За умови, що

$$-2a(x)\beta'_{k30}(x) + [b(x) - (a(x))']\beta_{k30}(x) = 0,$$

для системи (19) та

$$([\varphi'(x)]^{-1} - 1)\beta'_{k40}(x) + \left[\frac{b(x)}{a(x)} - 1 \right] \beta_{k40}(x) = 0, \quad (23)$$

для системи (21) існує нескінченна множина розв'язків.

Для виконання вище вказаних умов використаємо довільність функцій $\beta_{ks0}(x) = \beta_{k30}^0 \cdot \beta_{k30}(x)$, $k = 1; 2$, $s = 2; 3$, де $\beta_{ks0}^0(x)$ — довільні сталі, $\tilde{\beta}_{ks0}(x)$ — частинні достатньо гладкі $x \in [0; l]$, розв'язки однорідних систем (19) і (20). При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$ існують розв'язки неоднорідних систем (19) і (20) виду

$$\begin{aligned} Z_{k3}(x) &= \\ &= \text{column} \left(\begin{array}{c} 0; [\varphi'(x)]^{-1}\beta_{k30}(x); \frac{\beta_{k43}(x) - \beta'_{k30}(x)}{\varphi'(x)}; (\frac{\beta_{k40}(x)}{\varphi'(x)})' - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{k33} \\ 0; -\beta_{k40}(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]; \beta_{k33}(x); \beta_{k43}(x) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Таким чином, продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (19) і (20), можна показати, що існують лінійно незалежні розв'язки однорідної системи (3) вигляду

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [\alpha_{kr}(x)U_k(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x, \varepsilon)U'_k(t)], \quad k = 1; 2, \quad (25)$$

де α_{kr} і $\beta_{kr}(x)$ — відомі вектор-функції вигляду

$$\alpha_{kr} = \text{column}(\alpha_{k1r}(x), \alpha_{k2r}(x), \alpha_{k3r}(x), \alpha_{k4r}(x)),$$

$$\beta_{kr}(x) = \text{column}(\beta_{k1r}(x), \beta_{k2r}(x), \beta_{k3r}(x), \beta_{k4r}(x)).$$

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ для $k = 1; 2$ запишемо так

$$D_k(x, \varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{kr}(x)U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_k(x, \varepsilon)U'_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x)) \right]. \quad (26)$$

7. Побудова формальних частинних розв'язків неоднорідної розширеної системи. Дослідимо дію розширеного оператора (7) на елемент простору $f(x, \varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g(x, \varepsilon)\psi'(t) + \omega(x, \varepsilon)$. В результаті отримаємо наступні векторні рівняння:

$$\psi'(t) : \varphi'(x)f(x, \varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]g(x, \varepsilon) = -\mu^3 g'(x, \varepsilon), \quad (27)$$

$$\psi(t) : \varphi(x)\varphi'(x)g(x, \varepsilon) + [A_0(x) + \mu^3 A_1]f(x, \varepsilon) = -\mu^3 f'(x, \varepsilon), \quad (28)$$

$$\mu^3 \omega'(x, \varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\omega(x, \varepsilon) + \mu^2 \varphi'(x)g(x, \varepsilon) = h(x). \quad (29)$$

Рівняння (27) і (28) структурно аналогічні з (17) і (18). Але скористатися прямими результатами попереднього параграфа ми не можемо, оскільки не отримаємо бажаних результатів для системи (29).

Для побудови гладкого розв'язку системи (29) асимптотику розв'язку (27) і (28) побудуємо у вигляді рядів:

$$f(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r f_r(x), \quad g(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r g_r(x), \quad \omega(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_r(x). \quad (30)$$

Для визначення вектор-функцій $f_r = \text{colomn}(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x))$ і $g_r(x) = \text{colomn}(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x))$ отримаємо рекурентні системи рівнянь

$$\Phi(x)Z_0^{\text{част.}}(x) = 0, \quad r = 0; 1; 2, \quad \Phi(x)Z_r^{\text{част.}}(x) = -Z_{r-3}^{\text{част.}}(x), \quad r \geq 1. \quad (31)$$

$$Z_r^{\text{част.}}(x) = \text{colomn}(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x)).$$

Дослідження проведемо схематично, з урахуванням результатів попереднього параграфа. Оскільки $\det \Phi(x) \equiv 0$, існує нетривіальний розв'язок систем (31)

$$Z_{kr}(x) = \text{colomn} \left(0, 0, \frac{1}{\varphi'(x)} g_{3r}(x), -\varphi\varphi'(x)g_{4r}(x), 0, 0, g_{3r}(x), g_{4r}(x) \right), \quad (32)$$

де $g_{0i}(x), i = \overline{1; 4}$ — достатньо гладкі функції, $x \in [0; l]$.

Повторюючи міркування наведені в пункті 6, отримаємо дві рекурентні системи

$$\begin{cases} \varphi'(x)f_{33}(x) - g_{43}(x) = -g'_{30}(x), \\ -a(x)f_{33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{43}(x) = \\ \quad = \frac{d}{dx}(-\varphi(x)\varphi'(x)g_{30}(x)) + b(x)[\varphi'(x)]^{-1}g_{30}(x), \end{cases} \quad (33)$$

і

$$\begin{cases} f_{43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)g_{33}(x) = f'_{30}(x) \equiv \frac{d}{dx}([\varphi'(x)]^{-1}g_{40}(x)), \\ \varphi'(x)f_{43}(x) + a(x)g_{k33}(x) = -g'_{40}(x) + b(x)[\varphi(x)\varphi'^2(x)]^{-1}g_{40}(x). \end{cases} \quad (34)$$

З огляду на (19) і (20) будемо вимагати виконання умов теореми Кронекера-Капеллі для обчислення рангів матриць для систем (33) і (34). Тобто продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (33) і (34), можемо показати, що ці системи асимптотично коректні в такому сенсі: якщо

вимагати існування розв'язків систем (33) і (34) коли $r = \overline{0; q}$, то кожна з цих систем при $r = \overline{0; q-1}$, визначається з точністю до констант $g_{3r}^0(x)$ і $g_{4r}^0(x)$, які утворюють вектор $g_r^0(x) = \text{column}(0, 0, g_{3r}^0(x), g_{4r}^0(x))$.

Після цього залишається дослідити асимптотику розв'язку системи (29), яку побудуємо у вигляді ряду

$$\omega(x, \varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \tag{35}$$

де

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x) \equiv \text{column} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{1r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{2r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{3r}(x), \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{4r}(x) \right).$$

Підставимо (35) в рівняння (29) отримаємо рекурентні системи рівнянь:

$$\begin{aligned} -A_0(x)\omega_0(x) &= h(x), & -A_0(x)\omega_1(x) &= 0, & r &= 1, \\ -A_0(x)\omega_2(x) &= -\varphi'(x)g_0(x), & & & r &= 2, \\ -A_1\omega_0(x) - A_0(x)\omega_r(x) &= -\varphi'(x)g_{r-2}(x) - \omega'_{r-3}(x). \end{aligned} \tag{36}$$

Дослідимо (36) коли $r = 0$. Для цього спочатку обчислимо праву частину:

$$\begin{cases} \omega_{40}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{10}(x) + b(x)\omega_{20}(x) + a(x)\omega_{30}(x) = h(x). \end{cases} \tag{37}$$

Якщо $\omega_{20}(x)$ і $\omega_{30}(x)$ вибрати як довільні множники, то існують достатньо гладкі розв'язки системи (37):

$$\omega_0 = \left(\frac{h(x) - b(x)\omega_{20}(x) - a(x)\omega_{30}(x)}{c(x)}; \omega_{20}(x); \omega_{20}(x); 0 \right).$$

Коли $r = 1$ отримаємо систему

$$\begin{cases} \omega_{41}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases} \tag{38}$$

розв'язок якої записується у вигляді

$$\omega_1 = \left(\frac{-b(x)\omega_{21}(x) - a(x)\omega_{31}(x)}{c(x)}; \omega_{21}(x); \omega_{21}(x); 0 \right).$$

Коли $r = 2$ отримаємо

$$\begin{cases} \varphi'(x)g_{10}(x) = 0, \\ \varphi'(x)g_{20}(x) = 0, \\ \omega_{41}(x) + \varphi'(x)g_{30}(x) = 0, \\ c(x)\omega_{11}(x) + b(x)\omega_{21}(x) + a(x)\omega_{31}(x) = 0, \end{cases} \tag{39}$$

розв'язок якої записується у вигляді

$$\omega_2 = \left(\frac{-b(x)\omega_{22}(x) - a(x)\omega_{32}(x)}{c(x)}; \omega_{22}(x); \omega_{22}(x); -\varphi'(x)g_{30}(x) \right).$$

Тоді при $r \geq 3$ зможемо однозначно визначити функції $\omega_{20}(x)$ та $\omega_{30}(x)$, а це означає, що кожна з функцій ω_0 визначена з точністю до довільних сталих множників ω_{20}^0 і ω_{30}^0 .

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x, t, \varepsilon) = & \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{kr}(x) U_k(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{kr}(x) \frac{dU_k(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] \right] + \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_r(x) \psi(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_r(x) \frac{d\psi(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \end{aligned} \quad (40)$$

є формальним розв'язком системи (3).

Таким способом доведена теорема

Теорема 1. *Нехай система сингулярно збурених диференціальних рівнянь (3) задовольняє умови:*

- 1) $\tilde{a}(x) > 0$, $b(x) < 0$, $c(x) > 0$;
- 2) $H(x) \in C^\infty[0; l]$.

Тоді на відрізку $[0; l]$ методом істотно особливих функцій можна побудувати асимптотику розв'язку системи (3) з диференціальною точкою звороту у вигляді асимптотичного ряду

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^2 D_k(x, t, \varepsilon) + f(x, \varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g(x, \varepsilon)\psi'(t) + \omega(x, \varepsilon),$$

коефіцієнти якого є достатньо гладкими функціями на відрізку $[0; l]$.

8. Алгоритм побудови асимптотики розв'язку системи. Побудова асимптотики розв'язку для сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку з диференціальними точками звороту у відповідності з логікою доведеної теореми 1 може бути записана у вигляді чіткого алгоритму. Цей алгоритм представляє собою чітку поетапну послідовність розв'язання серії задач. Для цього, розвиваючи та поширюючи ідеї методу істотно особливих функцій на дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь четвертого порядку у векторній формі з диференціальною точкою звороту, потрібно послідовно виконати низку кроків.

І крок. *Розширення сингулярно збуреної задачі.* В сингулярно збуреній системі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x, \varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція” $\tilde{Y}(x, t, \varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}(x, t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)} \equiv Y(x, \varepsilon),$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однією змінною, до задачі з двома змінними t і x .

II крок. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій, цей простір називають *простором безрезонансних розв'язків* і для кожної конкретної задачі цей простір має свою специфіку.

$$\sum_{k=1}^2 D_k(x, t, \varepsilon), f_k(x, \varepsilon)\psi(t), \varepsilon^\gamma g_k(x, \varepsilon)\psi'(t), \omega_k(x, \varepsilon)$$

III крок. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.* Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у яке малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно.

IV крок. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно-збуреною відносно малого параметра в ПБР, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x, t, \mu) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y(x), \tag{41}$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$ — малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора \tilde{L}_ε . Підставивши ряд (41) в систему (7), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь з точковими початковими чи крайовими умовами.

V крок. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Отримані в попередньому пункті рекурентні рівняння для визначення коефіцієнтів ряду (41) є рівняннями в частинних похідних з точковими крайовими умовами. Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k . На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ —матриця системи (7), $Z_{kr}(x)$ —вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x, \varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної дослуджуваної задачі.

VI етап. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* В цьому розділі будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ — матриця системи (7), $Z_{kr}(x)$ — вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x, \varepsilon)$.

9. Висновки та перспективи подальших досліджень. Таким способом в роботі отримано конструктивні умови існування асимптотики розв'язків сингулярно збуреного диференціального рівняння четвертого порядку. Використовуючи метод істотно особливих функцій та модифікувавши його для систем

четвертого порядку з диференціальною точкою звороту II роду, побудовано асимптотику розв'язку для системи (3) у вигляді асимптотичного ряду (40). Показано, що побудова асимптотичного ряду системи (3) методом істотно особливих функцій може бути записана у вигляді алгоритму. Аналогічний підхід в майбутньому планується для досліджень та побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених рівнянь у векторній формі інших класів.

Sobchuk V. V., Zelenska I. O. Construction of the asymptotics of the solution of the 4th-order SZDR system with a differential turning point by the method of essentially singular functions.

Constructive conditions for the existence of the asymptotics of the solution of the system of singularly perturbed differential equations of the fourth order with a differential turning point are established and an algorithm for constructing the corresponding solution is proposed. The asymptotics of the solution of the system of singularly perturbed differential equations of the fourth order with a differential turning point is constructed by the method of significantly singular functions. We studied the case when the spectrum of the limit operator contains multiple elements and elements that are identically equal to zero.

Keywords: singularly perturbed differential equations, small parameter, differential turning point, Airy function.

References

1. Bobochko, V. M., & Perestiuk, M. O. (2002). *Asymptotychne intehruvannia rivniannia Liuvillia z tochkamy zvorotu*. [Asymptotic integration of the Liouville equation with inflection points]. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
2. Langer, R. (1955). The solutions of the differential equation: $y''' + \lambda^2 zy' + 3\mu\lambda^2 y = 0$. *Duke. Math. J.*, 23, 525–542. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-55-02259-6>
3. Lin, C. C. (1958). *On the Instability of Laminar Flow and its Transition to Turbulence*. In: *Görtler, H. (eds) Grenzschichtforschung, Boundary Layer Reserch*. Berlin: Springer-Verlag OHG.
4. Nakano, M., & Nishimoto, T. (1971). On an asymptotic expansion of solutions of ORR-sommerfeld type equation. *Lecture Notes in Mathematics*, 243, 315–319. Retrieved from: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/BFb0058749>
5. Nishimoto, T. (1968). A Turning Point Problem of an n^{th} Order Differential Equation of Hydrodynamic Type. *Kodai. Math. Sem. Rep.*, 20, 315–319. <https://doi.org/10.2996/kmj/1138845646>
6. Nijimbere, V. (2019). Asymptotic approximation of the eigenvalues and the eigenfunctions for the Orr-Sommerfeld on infinite intervals. *Advances in Pure Mathematics*, 9(12), 967–989. <https://doi.org/10.4236/apm.2019.912049>
7. Wasow, W. (1953). Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containig a transition point. *Ann. Math*, 58, 222–252. <https://doi.org/10.2307/1969787>
8. Zelenska, I. (2015). The system of singular perturbed differential equations with turning point of the first order. *Izvestiya vuzov. Matematika*, 3, 63–74. Retrieved from: <http://www.mathnet.ru/links/543182a9337fbc69be51a352427e50d6/ivm8983.pdf>

Одержано 15.10.2022

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)**С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², В. Ф. Лазар³, Н. П. Щекань⁴**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Хмельницький національний університет,
доцент кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань,
кандидат фізико-математичних наук
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

⁴ Київський національний економічний університет ім. Вадими Гетьмана,
старший викладач кафедри вищої математики,
nadshhek@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1784-6139>

АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ПІВПРОСТОРІВ ТА ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Стаття присвячена розв'язку контактної задачі для попередньо напруженого циліндричного штамп та двох пружних півпросторів з початковими напруженнями в аналітичному вигляді без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку нерівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному виді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. Припускається, що початкові стани пружного циліндричного штамп та пружних основ (півпросторів) однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами (природного стану). Крім того, вплив циліндричного штамп викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний циліндричний штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. Наведені загальні розв'язки основних диференціальних рівнянь лінеаризованої теорії пружності у випадку осесиметричної деформації для скінченної циліндричної області. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь. Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штамп. У статті також встановлено зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження. Отже, за допомогою отриманих розв'язків можна вивчити

вплив початкових (залишкових) напружень у двох пружних півпросторах та пружному циліндричному штампі на розподіл контактних напружень в області контакту.

Ключові слова: початкові напруження, напружено-деформований стан, лінеаризована теорія пружності, півпростір, циліндричний штамп.

1. Вступ. Дослідження процесів контактної взаємодії пружних тіл із врахуванням початкових напружень є частиною великої за обсягом та актуальної області механіки суцільних середовищ, що безперервно розвивається. Велика увага приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язана із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Оскільки контактні задачі формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань, а їх дослідження зводяться до одних із найважчих рівнянь математичної фізики, то їх розв'язання пов'язане із великими математичними труднощами.

Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

На даний час з проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких та пружних штампів, які взаємодіють із пружними тілами без початкових напружень отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань, однією із яких є праця [1]. Роботи з контактної взаємодії тіл присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень представлені у працях [2–4]. Дослідження контактної взаємодії попередньо напружених штампів з пружними тілами з початковими напруженнями висвітлені у працях [5, 6]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [7–12].

Метою роботи є представлення аналітичного розв'язку статичної контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на циліндричний пружний штамп з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності. У статті розглянуто випадок нерівних коренів визначального рівняння [2, 3] в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу.

2. Постановка задачі. Нехай скінченний пружний циліндричний штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R — радіус циліндричного штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними

від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1 величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. А у випадку ортотропних тіл, будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані y_i ($i = \overline{1, 3}$).

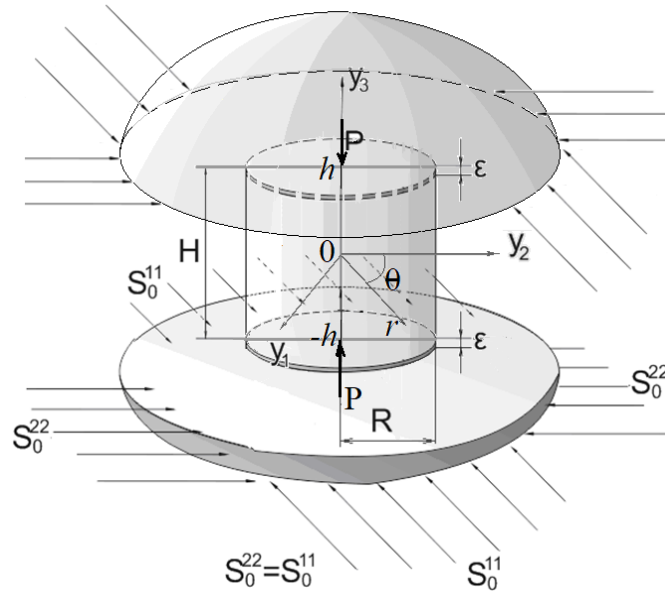


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний циліндричний штамп з початковими напруженнями.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного циліндричного штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однорідні та рівні. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [1].

3. Основні співвідношення та граничні умови. Скажімо, що початкові стани півпросторів та штампа — однорідні, й для них виконуються співвідношення [2, 3]:

$$y_m = x_m + U_m^0 \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i \quad (i, m = \overline{1, 3}),$$

де δ_{mi} — символ Кронекера.

Тоді основне рівняння у переміщеннях [3] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha}U_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta}\partial^2/\partial y_i\partial y_\beta, \quad (i, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

а для нестисливих тіл має виконуватися умова нестисливості:

$$L'_{m\alpha}U_\alpha + q'_{\alpha m}\partial p'/\partial y_\alpha = 0, \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta}\partial^2/\partial y_i\partial y_\beta, \quad (2)$$

$$q'_{ij} \partial U_j / \partial y_i = 0, \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij}, \quad (i, j, m, \alpha, \beta = \overline{1, 3}).$$

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при $y_i = \text{const}$ ($i = 1, 2, 3$) матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл,} & \omega'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}, \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \frac{\partial U_\alpha}{\partial C_\beta} + q'_{ij} p - \text{для нестисливих тіл,} & \kappa'_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де $\omega'_{i\alpha\beta} = \omega'_{i\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$, $\kappa'_{i\alpha\beta} = \kappa'_{i\alpha\beta}(S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0)$ — складові тензора модулів пружності четвертого порядку.

При однорідних початкових напруженнях має місце умова:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (3)$$

Враховуючи (3), розв'язок рівнянь (1), (1) представимо через функцію $\tilde{\chi}$, яка у циліндричних координатах (r, θ, y_3) задовольняє рівняння

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \tilde{\chi}_1 = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_3'^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \tilde{\chi}_2 = 0, \quad (4)$$

де $\Delta_1 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r$.

Як було зазначено вище, у даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ($\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$) характеристичного (визначального) рівняння, що відповідає рівнянням (4).

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = 1, 2$), $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного штампа в області контакту $z_i = \pm h / v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q_{33}^{(3)} = Q_{33}^{(i)}, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad (5)$$

$$Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad (0 \leq r \leq R), \quad (i = 1, 2),$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h / v_i$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (r > R), \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

- 3) на боковій поверхні пружного штампа $r = R$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leq h / v_i), \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_0^R r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(i)}| = |Q_{3r}^{(i)}|_{z_i = \pm h / v_i}, \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Умова (8) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампa із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Напружено-деформований стан в області контакту ($y_3 = \pm h$, $z_i = \pm h/v_i$), ($i = 1, 2$) у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [3]:

$$Q'_{33}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = \frac{C_{44}(1 + m_1)l_1(s - s_3)}{R} \int_0^\infty F(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$Q'_{3r}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = 0, \quad U'_{3'}{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = -\frac{m_1(s_2 - s_3)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho)d\eta, \quad (9)$$

$$U'_r{}^{(i)}\left(\rho; \pm \frac{h}{v_i R}\right) = (s_3 - 1) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\mu\rho)d\eta.$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}; \\ \frac{\omega'_{1313}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$$\xi = \frac{z_i v_i}{R}, \quad \eta = \xi R, \quad (i = 1, 2), \quad s = s_0 l_2 l_1^{-1}, \quad s_0 = (1 + m_2)(1 + m_1)^{-1},$$

$$s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}, \quad s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}, \quad s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1},$$

$F(\eta)$ – шукана функція, $J_v(x)$ – функції Бесселя дійсного аргументу.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричному пружному штампі з початковими напруженнями у випадку нерівних коренів ($\xi_2^2 \neq \xi_3^2$) характеристичного рівняння (4) приймемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = 3C_0 r^2 (z_1 - z_2) - 2C_0 (z_1^3 + z_2^3) + \sum_{k=1}^\infty \{ [A_k I_0(\gamma_k v_1 r) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + B_k I_0(\gamma_k v_2 r) S_1(\gamma_k v_2 z_2)] + J_0(\alpha_k r) [S_2(\alpha_k z_1) + S_3(\alpha_k z_2)] \}, \quad (10)$$

де $I_v(x)$ – функція Бесселя уявного аргументу.

$$S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1), \quad S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1),$$

$$S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1),$$

$C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$ – деякі сталі коефіцієнти, α_k, γ_k – власні значення задачі (5)–(8).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та нерівних коренів рівняння (4), із врахуванням граничних умов (5)–(8), представимо у вигляді

$$\begin{aligned}
U'_{33} &= \frac{\varepsilon\omega_2}{R} \left\langle -\frac{R}{\omega_2 h \theta_6} \left[\frac{m_1 z_1}{n_1} + \frac{m_2 z_2}{n_2} \right] \chi_0 + \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{n_1} \left\{ \gamma_k^2 \left[\frac{s_0 m_1 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - m_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
&+ \frac{\mu_k^2}{R^2} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \right. \\
&+ \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) \left. \right) + \frac{m_2}{n_2} \left(\frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\
&\left. \left. - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \frac{n_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \right) \right] \left. \right\} \chi_k \rangle, \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{33} &= \varepsilon C_{44} (1 + m_1) l_1 \left\langle -\frac{\chi_0}{h \theta_6} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] + \right. \\
&+ \frac{\omega_2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 \left[\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_0(\gamma_k v_1 R \rho) \cos(\gamma_k v_1 z_1) - \frac{s n_2}{n_1} I_0(\gamma_k v_2 R \rho) \cos(\gamma_k v_2 z_2) \right] + \right. \\
&+ \frac{\mu_k^3}{R^3 n_1} J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
&+ \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right)}{v_1} + \frac{s \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \\
&\left. \left. - \frac{s v_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \left. \right\} \chi_k \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q'_{3r} &= C_{44} (1 + m_1) \frac{\varepsilon\omega_2}{R v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left\{ \gamma_k^3 s_0 \left[\frac{I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)} I_1(\gamma_k v_1 R \rho) \sin(\gamma_k v_1 z_1) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{v_2}{v_1} I_1(\gamma_k v_2 R \rho) \sin(\gamma_k v_2 z_2) \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu_k^3}{R^3} J_1(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{v_1} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_1}{R} \right) + \frac{s_0 v_1 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right]}{v_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]} \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right)}{v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_2 R} \right)} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k z_2}{R} \right) \right] \left. \right\} \chi_k,
 \end{aligned}$$

де

$$\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1(s_3 - s_2)}, \quad \tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'^{-1}_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'^{-1}_{1122}; \end{cases}$$

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \end{cases} \quad (i = \overline{1, 2}).$$

$$\begin{aligned}
 F_k^* = & (1 + \alpha_k^3) \gamma_k^3 \left[\frac{n_1 \tilde{A}_k^* G_k(1; R)}{1 - \gamma_k^2 v_1^2} \left(\gamma_k v_1 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{n_2 G_k(2; R)}{1 - \gamma_k^2 v_2^2} \left(\gamma_k v_2 \sin(\gamma_k h) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) - \cos(\gamma_k h) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] / \\
 & / \left(\alpha_k^3 J_0(\alpha_k R) \left[\frac{\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0}{v_1} E_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cos \left(\frac{h}{v_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \sin \left(\frac{h}{v_1} \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\tilde{c}_2 - \tilde{c}_0}{v_2} N_k^* \left(\alpha_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \cos \left(\frac{h}{v_2} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \sin \left(\frac{h}{v_2} \right) \right) \right] \right),
 \end{aligned}$$

$$N_k^* = \frac{v_2 \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{n_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$E_k^* = \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2) \left[\operatorname{cth} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0) v_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \left[\frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_2)}{v_1 (\tilde{c}_1 - \tilde{c}_0)} + \frac{s_0}{v_2} \right]},$$

$$G_k(i; R) = (\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) I_0(\gamma_k v_i r) + \frac{1 - \tilde{c}_0}{\gamma_k v_i r} I_1(\gamma_k v_i r),$$

$$\theta_6 = m_1 v_1^{-3} + m_2 v_2^{-3}, \quad \tilde{A}_k^* = -\frac{s_0 I_1(\gamma_k v_2 R)}{I_1(\gamma_k v_1 R)}.$$

де χ_k – шукані сталі.

4. Метод розв'язку. Використовуючи розв'язок для циліндричного штамп-па (11) та задовольняючи третій умові (5), другій умові (7), знаходимо власні значення задачі Штурма-Ліувілля для $n_1 \neq n_2$:

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{h}, \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad (J_1(\alpha_k R) = 0). \quad (12)$$

З перших граничних умов (5)–(6) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (10) з подвійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta &= q(\rho), \quad 0 < \rho < 1 \\ \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta &= 0, \quad \rho > 1. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(q(\rho) = \varepsilon \left\langle (1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0(\mu_k \rho) F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Відповідно до [3] розв'язок системи (13), знайдемо у вигляді:

$$F(\eta) = \frac{2\eta}{\pi} \left[\cos \eta \int_0^1 \frac{y f(y)}{\sqrt{1-y^2}} dy + \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du \int_0^1 \eta y \sin(\eta y) f(yu) dy \right].$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} &= \frac{2\varepsilon}{\pi} \left((1 - \chi_0) \frac{\omega_2}{n_1} \psi(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{R} F_k^* \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{v_1 R} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] \chi_k \psi(\eta, \mu_k) \right), \quad (14) \\ \left(\psi(\eta, \mu_k) &= \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}, \quad \psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta} \right). \end{aligned}$$

Для визначення сталих коефіцієнтів $C_k, D_k, E_k, F_k, N_k, M_k, A_k, B_k$ та функції $F(\eta)$ було введено нові змінні:

$$\int_0^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon R(v_2 + v_1 s)}{2v_1 v_2 h(s - s_3) \theta_6} \chi_0, \quad \chi_k = -\frac{R n_1}{\varepsilon \mu_n \omega_2} \tilde{B}_k. \quad (15)$$

З другої умови (5) отримаємо:

$$\int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = \frac{R}{s - s_3} \left\langle \frac{\varepsilon}{h \theta_6} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) [\tilde{A}_k^* n_1 I_0(\gamma_k v_1 R \rho) + s n_2 I_0(\gamma_k v_2 R \rho)] - \right. \\
 & - \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{R^4 n_1} J_0(\mu_k \rho) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] F_k^* \right\} \chi_k \Bigg\rangle, \\
 & \left(M_k^* = -n_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \cdot \left(n_1 s_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_2} \right) \right)^{-1} \right).
 \end{aligned}$$

Проінтегруємо рівність (14) по $\rho J_0(\mu_n \rho) d\rho$:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \frac{R}{s - s_3} \left\langle \frac{\varepsilon J_1(\mu_n)}{h \theta_6 \mu_n} \left[\frac{1}{v_1} + \frac{s}{v_2} \right] \chi_0 + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \gamma_k^3 \cos(\gamma_k h) J_0(\mu_k) \left[\frac{\tilde{A}_k^* \gamma_k v_1^3 R I_1(\gamma_k v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_1 R^2} + \frac{s \gamma_k v_2^3 R I_1(\gamma_k v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_k^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\
 & + \frac{\mu_k^4 \varepsilon \omega_2}{2 R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) + M_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_2} \right) \right) \right] F_k^* \right\} \chi_k \Bigg\rangle,
 \end{aligned}$$

та врахувавши інтеграли:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \psi(\eta, \mu_k) J_1(\eta) d\eta = \int_0^1 \rho J_0(\mu_k \rho) \int_0^{\infty} \eta J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \psi(0, \mu_k), \\
 & \int_0^{\infty} \psi(\eta, 0) J_1(\eta) d\eta = 1, \quad \int_0^{\infty} \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta \rho) d\rho d\eta = \psi(\mu_n, \mu_k).
 \end{aligned}$$

Отримаємо нескінченну систему для відшукування невідомих χ_0, χ_k , що входять до (2), (9), (13) та (14):

$$\tilde{\alpha}_k \chi_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} \chi_n = \tilde{\beta}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\tilde{\alpha}_0 = \varepsilon \left(\frac{R(v_2 + s)}{2 h v_1 v_2 \theta_6 (s - s_3)} - \frac{2 \omega_2}{\pi n_1} \right); \quad \tilde{\alpha}_{00} = 0; \right. \\
 & \tilde{\alpha}_{k0} = \frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \quad \tilde{\beta}_0 = -\frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1}; \quad \tilde{\beta}_k = -\frac{2 \varepsilon \omega_2}{\pi n_1} \psi(0, \mu_k); \\
 & \tilde{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^* \frac{\mu_k}{R} \left[\frac{m_1}{n_1} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) + E_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{R v_1} \right) \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_2}{n_2} \left(N_k^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) + M_k^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k h}{Rv_2} \right) \right) \psi(0, \mu_k); \\
\tilde{\alpha}_{0n} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \gamma_n^4 \cos(\gamma_n h) R J_0(\mu_n) \left[\frac{\tilde{A}_n^* v_1^3 I_1(\gamma_n v_1 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_1 R^2} + \frac{sv_2^3 I_1(\gamma_n v_2 R)}{\mu_n^2 + \gamma_n^2 n_2 R^2} \right] + \right. \\
& + \frac{\mu_n^4 \varepsilon \omega_2}{2R^4 n_1} J_0^2(\mu_k) \left[\frac{1}{v_1} \left(E_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{s}{v_2} \left(N_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] F_n^* \right\}; \\
\tilde{\alpha}_{kn} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F_n^* \frac{\mu_n}{R} \psi(\mu_k, \mu_n) \left[\frac{m_1}{n_1} \left(E_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_1} \right) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m_2}{n_2} \left(N_n^* \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) + M_n^* \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_n h}{Rv_2} \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоту пружного штампa H .

Використавши умову рівноваги (8), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді

$$P = \frac{\pi \varepsilon R^2 C_{44} (1 + m_1) l_1 (v_2 + sv_1)}{v_2 v_1 h \theta_6}.$$

Розв'язавши нескінченну систему (16), можна визначити невідомі сталі χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), що дозволить обчислити компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному штампі за формулами (9) та (11).

5. Висновок. Отже, в рамках лінеаризованої теорії пружності у статті представлено аналітичні розв'язки контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на циліндричний пружний штамп з початковими (зашишковими) напруженнями без врахування сил тертя. Ці розв'язки представлені у вигляді рядів через нескінченну систему констант χ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (16) методом редукції.

Список використаної літератури

1. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости Львов: Вища школа. 1981. 136 с.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия, Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing. 2015. 468 с.
3. Гузь А. Н., Рудницкий В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Хмельницький, вид. ПП Мельник. 2006. 710 с.
4. Yaretskaya N. A. Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2018. Vol. 54. No. 5. P. 539–543. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
5. Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. *Riga, Latvia : "Baltija Publishing"*. 2022. P. 261–295. DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>

6. Babich S. Yu., Yaretska N. O. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 3. P. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 1. P. 43–52.
8. Bagno O. M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. No. 6. P. 644–654. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>
9. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*. 2019. Vol. 55. No. 6. P. 585–595.
10. Guz A. N., Bagno A. M. Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56. No. 1. P. 1–12.
11. Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58. No. 1. P. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
12. Rudnitsky V. B., Dikhtyaruk N. N. Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*. 2017. Vol. 53. No. 2. P. 149–155.

Babich S. Yu., Yaretska N. O., Lazar V. F., Shchekan N. P. Analytical solutions of the static problem on the pressure of pre-tensioned half-spaces and an elastic cylinder with initial stresses.

The article is devoted to the solution of the contact problem for a prestressed cylindrical die and two elastic half-spaces with initial stresses in an analytical form without taking into account frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of unequal roots of the defining equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. It is assumed that the initial states of the elastic cylindrical die and the elastic bases (half-spaces) are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates (of the natural state). In addition, the influence of the cylindrical stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic cylindrical die and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. General solutions of the basic differential equations of the linearized theory of elasticity in the case of axisymmetric deformation for a finite cylindrical region are given. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite system of algebraic equations. Note that the coefficients of the system depend on the values that determine the structure of the elastic potential and the height of the elastic stamp. The article also establishes the relationship between settlement and the equivalent load. Therefore, with the help of the obtained solutions, it is possible to study the influence of initial (residual) stresses in two elastic half-spaces and an elastic cylindrical stamp on the distribution of contact stresses in the contact area.

Keywords: initial stresses, stress-strain state, linearized theory of elasticity, half-space, cylindrical die.

References

1. Grilickij, D. V., & Kizyma, Ja. M. (1981). *Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi teorii uprugosti i termouprugosti*. L'vov: Vishha shk.

2. Guz', A. N., Babich, S. Ju., & Gluhov, Ju. P. (2015). *Smeshannyye zadachi dlja uprugogo osnovaniya s nachal'nymi naprjazhenijami*. Germanija. Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing.
3. Guz', A. N., & Rudnickij, V. B. (2006). *Osnovy teorii kontaktnogo vzaimodejstvija uprugih tel s nachal'nymi (ostatochnymi) naprjazhenijami*. Hmel'nic'kij, vid. PP Mel'nik.
4. Yaretskaya, N. A. (2018). Contact Problem for the Rigid Ring Stamp and the Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 54(5), 539–543. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0906-y>
5. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. *Riga, Latvia : "Baltija Publishing"*, 261–295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
6. Babich, S. Yu., & Yaretska, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 57(3), 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
7. Babich, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52.
8. Bagno, O. M. (2021). Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *International Applied Mechanics*, 57(6), 644–654. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01114-9>
9. Guz, A. N., & Bagno, A. M. (2019). Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid. *International Applied Mechanics*, 55(6), 585–595.
10. Guz, A. N., & Bagno, A. M. (2020). Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides. *International Applied Mechanics*, 56(1), 1–12.
11. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
12. Rudnitsky, V. B. & Dikhtyaruk, N. N. (2017). Interaction Between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem. *International Applied Mechanics*, 53(2), 149–155.

Одержано 12.10.2022

УДК 004.01

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).103-117](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).103-117)Л. П. Бедратюк¹, Г. І. Бедратюк²

¹ Хмельницький національний університет,
професор кафедри інженерії програмного забезпечення,
доктор фізико-математичних наук, професор
LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6076-5772>

² Хмельницький національний університет,
старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення,
bedratyuk@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0224-5549>

МОМЕНТИ ЕРМІТА ЗОБРАЖЕНЬ ТА ЇХНІ ІНВАРІАНТИ

Нехай H – підгрупа афінної групи площини $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$, яка розглядається разом з своєю природною дією на інтегровні функції від двох змінних визначені в деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Для фіксованої сім'ї многочленів $\{P_{m,n}(x, y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ розглянемо функціонал

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n}(f) = \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y) f(x, y) dx dy,$$

який називається P -моментом функції $f(x, y)$ порядку $m + n$. Дія групи H продовжується на P -моменти за формулою

$$h\pi_{m,n}(f) = \pi_{m,n}(h^{-1}f) \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y) f(h^{-1}(x, y)) dx dy, h \in H.$$

Інваріанти цієї дії називаються P -моментними інваріантами. Якщо функцію $f(x, y)$ ототожити з напівтоновим зображенням, а за групу H взяти групи обертань, групу розтягів або групу паралельних перенесень площини, то відповідні моменти зображень та їхні моментні інваріанти широко використовуються в теорії розпізнавання образів. Задача задовільного опису моментних інваріантів задовільно розв'язана лише у найпростішому випадку $P_{m,n}(x, y) = x^m y^n$. В даній статті, для пари бі-ортогональних сімей многочленів Ерміта, задачу знаходження моментних інваріантів зведено до задачі розв'язання деякого диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, яке виникає при переході від дії групи Лі до дії її алгебри Лі. Для кожної із згаданих груп знайдено явний вигляд дії її алгебри Лі на моменти Ерміта і вказані явно моментні інваріанти невеликих порядків.

Ключові слова: розпізнавання образів, інженерія ознак, групи перетворень площини, многочлени Ерміта, моменти зображень, моментні інваріанти.

1. Вступ. Важливою областю застосування теорії зображень груп є аналіз 2D-зображень. Для розпізнавання і класифікації зображень, виділення об'єктів на них методами машинного навчання необхідним є конструювання таких *ознак* зображень, які залишаються інваріантними при тих геометричних перетвореннях площини, які не спотворюють сцену зображення. Для 2D-зображень такими перетвореннями є поворот, паралельне перенесення, масштабування зображення та композиції цих перетворень. Відповідні інваріантні ознаки вперше були введені в статті [1] і називаються *моментними інваріантами*. Якщо ототожити напівтонове зображення з деякою обмеженою функцією від двох змінних

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, то P -моментом зображення, порядку $p + q$ називається величина

$$\pi_{pq} = \iint_{\Omega} P_{m,n}(x,y) f(x,y) dx dy,$$

де сім'я многочленів $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ є базисом нескінченновимірною векторного простору над полем \mathbb{R} многочленів від двох змінних.

З початку 60-х років моментні інваріанти активно використовуються в аналізі зображень, див. [2]– [5]. В залежності від вибору базису $\{P_{m,n}(x,y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ розглядаються різні системи моментів. Для найпростішого випадку $P_{m,n}(x,y) = x^m y^n$ відповідні моменти називаються *геометричними моментами*. Афінна група площини $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$, тобто група всіх оборотніх перетворень площини, та її підгрупи природно діють на геометричні моменти і в результаті виникають відповідні *алгебри моментних інваріантів*. Алгебра моментних інваріантів добре вивчена, зокрема відомий явний опис її породжуючих елементів [6], [7]. Проте практичне використання геометричних моментів викликає труднощі через їхню обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки величини $x^m y^n$ швидко ростуть при збільшенні розміру зображень. Для уникнення цієї проблеми замість геометричних моментів розглядають так звані *сепарабельні ортогональні моменти*, які породжуються базисом $\pi_{m,n}(x,y) = F_m(x)F_n(y)$ де $\{F_n(x)\}$ – деяка сім'я ортогональних многочленів. Такі ортогональні моменти зображень вже є обчислювально стабільними і допускають ефективну реалізацію, оскільки задовольняють рекурентними співвідношенням, див. [4], [5]. Недавно в [8] вперше було запропоновано несепабельні ортогональні моменти, які використовували дві сім'ї многочленів Апелля, які бі-ортогональні на одиничному крузі. Числові експерименти показали, що розпізнавальна здатність моментів Апелля перевищує розпізнавальну здатність звичайних ортогональних моментів. Тому великий інтерес викликають інші несепабельні бі-ортогональні сім'ї многочленів від двох змінних.

Ерміт, в [9] знайшов дві параметричні сім'ї бі-ортогональних многочленів $U_{m,n}(x,y)$, $V_{m,n}(x,y)$, які визначаються такими експоненціальними породжуючими функціями:

$$e^{\frac{1}{2}((2ax+2by)u+(2bx+2cy)v-au^2-2buv-cv^2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x,y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

$$e^{xu+yv-\frac{1}{2\Delta}(av^2-2buv+cu^2)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x,y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

де a, b, c – дійсні числа, а $\Delta = ac - b^2$. Многочлени $U_{m,n}(x,y)$, і $V_{m,n}(x,y)$ бі-ортогональні на всій площині:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{m,n}(x,y) V_{m',n'}(x,y) w(x,y) dx dy = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} m! n! \delta_{m,m'} \delta_{n,n'},$$

з ваговою функцією

$$w(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)}.$$

Але для всіх негеометричних моментів виникає проблема обчислення моментних інваріантів, які тепер потрібно обчислювати в новому базисі. Зміна базису

наштовхується на великі технічні труднощі і задовільно розв'язана лише для деяких моментів, причому тільки для простих перетворень площини [11], [12], які не включають повороти. Моменти є функціоналами на зображенням з такою дією групи $G \subseteq \text{Aff}(2, \mathbb{R})$:

$$g\pi_{p,q}(f) = \pi_{p,q}(g^{-1}f) = \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y)g^{-1}(f(x, y))dxdy, g \in G.$$

Моментні інваріанти є інваріантами дії деякої групи Лі перетворень площини, тому вони будуть і інваріантами відповідної алгебри Лі, яка діє на моменти диференціальними операторами. Знаючи явний вигляд цих операторів можна знайти моментні інваріанти розв'язавши рівняння в частинних похідних, яке визначає такий оператор.

В даній статті явно визначена дія груп розтягів, паралельного перенесення та групи поворотів площини на U - та V -моменти, знайдені у вигляді відповідні оператори диференціювання та обчислено інваріанти малих порядків.

2. Диференціальні оператори для U -моментів. На початку знайдемо вираз для знаходження явного виразу диференціального оператора який відповідає дії однопараметричної групи Лі.

Теорема 1. *Нехай однопараметрична підгрупа афінної групи перетворень породжується елементами g_a , де a – числовий параметр, причому g_0 є єдиним елементом групи. Тоді оператор D відповідної одновимірної алгебри Лі так діє на моменти*

$$D(\pi_{m,n}) = \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{\Omega} \frac{d}{da} (P_{m,n}(g_a(x, y))J(g_a)) f(x, y)dxdy,$$

де $J(g_a)$ – яacobіан перетворення g_a .

Доведення. Оператор D є дотичним вектором до кривої g_a в нулі. Тому

$$D(\pi_{m,n}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{da} \pi_{m,n}(g_a^{-1}(f)) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{da} \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y)f(g_a^{-1}(x, y))dxdy.$$

Виконавши заміну змінних в подвійному інтегралі отримаємо необхідну формулу. □

Зауважимо, що, в силу лінійності інтеграла, вираз для дії на моменти $\pi_{m,n}$, матиме такий самий вигляд як і вираз для дії на $P_{m,n}(x, y)$.

Отже, для отримання дії $D(\pi_{m,n})$ в термінах моментів, нам потрібно знайти границю похідної

$$\frac{d}{da} (P_{m,n}(g_a(x, y))J(g_a)),$$

а потім виразити її в термінах многочленів $P_{m,n}(x, y)$.

Многочлени Ерміта $U_{m,n}(x, y)$ визначаються експоненціальною породжуючою функцією

$$G_U = G_U(x, y, u, v) = e^{\frac{1}{2}((2ax+2by)u+(2bx+2cy)v-au^2-2buv-cv^2)}.$$

Відповідні U -моменти мають вигляд

$$u_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_{m,n}(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Спочатку знайдемо рекурентні співвідношення яким задовольняють ці многочлени.

Теорема 2. *Многочлени $U_{m,n}(x, y)$ задовольняють рекурентним співвідношенням*

$$\begin{aligned} U_{m+1,n}(x, y) &= (ax + by) U_{m,n}(x, y) - ma U_{m-1,n}(x, y) - nb U_{m,n-1}(x, y), \\ U_{m,n+1}(x, y) &= (bx + cy) U_{m,n}(x, y) - mb U_{m-1,n}(x, y) - nc U_{m,n-1}(x, y). \end{aligned}$$

з початковою умовою $U_{0,0}(x, y) = 1$.

Доведення. Диференціюємо породжуючу функцію G_U по u і отримаємо

$$\frac{\partial G_U}{\partial u} = (ax + by - au - bu) G_U = (ax + by) G_U - au G_u - bu G_U.$$

З одного боку маємо

$$\frac{\partial G_U}{\partial u} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x, y) \frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \frac{v^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m+1,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

З іншого боку отримуємо

$$\begin{aligned} (ax + by) G_U - au G_U - bu G_U &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (ax + by) U_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} - \\ &- \sum_{m,n=0}^{\infty} a U_{m,n}(x, y) \frac{u^{m+1}}{m!} \frac{v^n}{n!} - \sum_{m,n=0}^{\infty} b U_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^{n+1}}{n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} ((ax + by) U_{m,n}(x, y) - ma U_{m-1,n}(x, y) - nb U_{m,n-1}(x, y)) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти двох рядів отримаємо

$$U_{m+1,n}(x, y) = (ax + by) U_{m,n}(x, y) - ma U_{m-1,n}(x, y) - nb U_{m,n-1}(x, y),$$

що і потрібно було довести.

Друге рекурентне співвідношення отримується аналогічними міркуваннями із співвідношення

$$\frac{\partial G_U}{\partial v} = (bx + cy - bu - cv) G_U.$$

□

Для знаходження явного вигляду оператора, яким діє алгебра Лі відповідної групи перетворень G , ми скористаємося тим, що

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{da} G_U = \sum_{m,n=0}^{\infty} D(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

Тоді, розклавши в ряд ліву частину ми отримаємо явні вирази для дії D на многочлени $U_{m,n}(x, y)$. Після цього потрібно підставити ці вирази у формулу для U -моменту і отримати індуковану дію оператора D на U -моменти.

Проілюструємо цю техніку розглянувши дію на U -моменти груп обертань, паралельних перенесень та групи розтягів площини.

2.1. Група обертань. Дійсна група обертань площини $SO(2)$ так діє на змінні

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Вона є однопараметричною, параметр θ належить інтервалу $[0, 2\pi]$. Наступна теорема описує явний вигляд оператора D_r , яким відповідна алгебра Лі \mathfrak{so}_2 діє на U -моменти.

Теорема 3. Оператор D_r діє на U -моменти таким чином:

$$D(u_{m,n}) = \frac{1}{\Delta} (b(m-n)(a+c)u_{m,n} - m(a^2+b^2)u_{m-1,n+1} + n(b^2+c^2)u_{m+1,n-1}) - mn(a-c)u_{m-1,n-1} - bn(n-1)u_{m,n-2} + bm(m-1)u_{m-2,n}.$$

Доведення. Спочатку знаходимо дію \mathfrak{so}_2 на многочлени Ерміта $U_{m,n}(x, y)$. Ми знаємо, [7], що оператор D_r подається у вигляді $D_r = D_+ - D_-$ де D_+, D_- оператори які відповідають дії груп нижньотрикутних і верхньотрикутних матриць другого порядку з визначником рівним 1. Тому спочатку знайдемо дію операторів D_+, D_- .

Подіємо елементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію, отримаємо

$$G_U(x, xt + y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x, y + xt) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $t = 0$:

$$(bu + cv) x G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_+(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} (bu + cv) x G(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (bu + cv) x U_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (m+1)bx U_{m,n}(x, y) \frac{u^{m+1} v^n}{(m+1)! n!} + \sum_{m,n=0}^{\infty} (n+1)cx U_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^{n+1}}{m! (n+1)!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (mbx U_{m-1,n}(x, y) + ncx U_{m,n-1}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Отже оператор D_+ так діє на $U_{m,n}(x, y)$:

$$D_+(U_{m,n}(x, y)) = mbx U_{m-1,n}(x, y) + ncx U_{m,n-1}(x, y).$$

Аналогічно, диференціюючи по t

$$G_U(x + yt, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x + yt, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

знаходимо

$$(au + bv) yG(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_-(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

звідки

$$D_-(U_{m,n}(x, y)) = mayU_{m-1,n}(x, y) + nbyU_{m,n-1}(x, y).$$

Тому

$$\begin{aligned} D_-(U_{m,n}(x, y)) &= D_+(U_{m,n}(x, y)) - D_-(U_{m,n}(x, y)) = \\ &= m(bx - ay)U_{m-1,n} + n(cx - by)U_{m,n-1}. \end{aligned}$$

Врахувавши рекурентні співвідношення і замінивши $U_{m,n}(x, y)$ на $u_{m,n}$ для отримаємо

$$\begin{aligned} D(u_{m,n}) &= \frac{1}{\Delta} (b(m-n)(a+c)u_{m,n} - m(a^2+b^2)u_{m-1,n+1} + n(b^2+c^2)u_{m+1,n-1}) - \\ &\quad - mn(a-c)u_{m-1,n-1} - bn(n-1)u_{m,n-2} + bm(m-1)u_{m-2,n}. \end{aligned}$$

□

Для невеликих m, n маємо

$$\begin{aligned} D_r(u_{0,0}) &= 0, \\ D_r(u_{1,0}) &= \frac{1}{\Delta} (b(a+c)u_{1,0} - (a^2+b^2)u_{0,1}), \\ D(u_{0,1}) &= \frac{1}{\Delta} ((b^2+c^2)u_{1,0} - (a+c)bu_{0,1}), \\ D_r(u_{2,0}) &= \frac{2b(a+c)u_{2,0} - 2(a^2+b^2)u_{1,1}}{\Delta} + 2bu_{0,0}, \\ D_r(u_{1,1}) &= \frac{(b^2+c^2)u_{2,0} - (a^2+b^2)u_{0,2}}{\Delta} + (c-a)u_{0,0}. \end{aligned}$$

Диференціальне рівняння для знаходження U -моментних інваріантів порядку не більше 2 відносно групи обертань має вигляд

$$D_r(u_{1,0}) \frac{\partial F}{\partial u_{1,0}} + D_r(u_{0,1}) \frac{\partial F}{\partial u_{0,1}} + D_r(u_{2,0}) \frac{\partial F}{\partial u_{2,0}} + D_r(u_{1,1}) \frac{\partial F}{\partial u_{1,1}} + D_r(u_{0,2}) \frac{\partial F}{\partial u_{0,2}} = 0,$$

де F – функція від змінних $u_{0,0}, u_{1,0}, u_{0,1}, u_{2,0}, u_{1,1}, u_{0,2}$.

Прямими обчисленнями можна показати, що наступні вирази задовольняють це рівняння і є U -моментними інваріантами відносно групи обертань пло-

щини:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= u_{0,1}^2 - 2 \frac{u_{1,0} b (a+c) u_{0,1}}{a^2 + b^2} + \frac{(b^2 + c^2) u_{1,0}^2}{a^2 + b^2}, \\
 I_2 &= \frac{u_{0,2} (a^2 + b^2)}{b^2 + c^2} - 2 \frac{(a+c) b u_{1,1}}{b^2 + c^2} + u_{2,0}, \\
 I_3 &= u_{2,0}^2 + 4 \frac{(a^2 + b^2) u_{1,1}^2}{b^2 + c^2} + \frac{\Delta^2 (a^2 - 2ac + 4b^2 + c^2) u_{0,0}^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2 u_{0,2}^2}{(b^2 + c^2)^2} + \\
 &+ 2 \frac{(ab - ac + b^2 + bc) (ab + ac - b^2 + bc) u_{2,0} u_{0,2}}{(b^2 + c^2)^2} - 4 \frac{u_{2,0} b (a+c) u_{1,1}}{b^2 + c^2} \\
 &- 4 \frac{(a+c) b (a^2 + b^2) u_{1,1} u_{0,2}}{(b^2 + c^2)^2} - 4 \frac{\Delta b (a^2 + 2b^2 + c^2) u_{0,0} u_{1,1}}{(b^2 + c^2)^2} + \\
 &+ 2 \frac{\Delta (a^3 - a^2 c + 3b^2 a + b^2 c) u_{0,2} u_{0,0}}{(b^2 + c^2)^2} + 2 \frac{\Delta (b^2 a - c^2 a + 3b^2 c + c^3) u_{2,0} u_{0,0}}{(b^2 + c^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно знаходяться моментні інваріанти вищих порядків.

2.2. Група рівномірних розтягів. Група рівномірних розтягів (гомотеїї) є однопараметричною групою, яка так діє на координати

$$\begin{cases} x' = tx, \\ y' = ty. \end{cases}$$

Дія одиничного елемента отримується при значенні параметру $t = 1$. Якобіан такого перетворення рівний t^2 .

Теорема 4. Алгебра Лі групи рівномірних розтягів діє на U -моменти $u_{m,n}$ оператором D_s таким чином:

$$D_s(u_{m,n}) = (m + n + 2)u_{m,n} + m(m - 1)a u_{m-2,n} + n(n - 1)c u_{m,n-2} + 2mnb u_{m-1,n-1}.$$

Доведення. Діємо елементом $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію:

$$t^2 G_U(tx, ty, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{m,n}(tx, ty) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $t = 1$

$$((au + bv)x + y(bu + cv) + 2)G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_s(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Маємо у лівій частині

$$\begin{aligned}
((au + bv)x + y(bu + cv) + 2)G(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} ((au + bv)x + y(bu + cv) + 2) \times \\
\times U_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(axU_{m,n} \frac{u^{m+1} v^n}{m! n!} + bxU_{m,n} \frac{u^m v^{n+1}}{m! n!} + byU_{m,n} \frac{u^{m+1} v^n}{m! n!} + \right. \\
+ cyU_{m,n} \frac{u^m v^{n+1}}{m! n!} + 2U_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (maxU_{m-1,n} + nbxU_{m,n-1} + \\
+ mbyU_{m-1,n} + ncyU_{m,n-1} + 2U_{m,n}) \frac{u^m v^n}{m! n!} &= \\
= \sum_{m,n=0}^{\infty} (m(ax + by)U_{m-1,n} + n(bx + cy)U_{m,n-1} + 2U_{m,n}) \frac{u^m v^n}{m! n!}.
\end{aligned}$$

З рекурентних співвідношень отримуємо

$$\begin{aligned}
m(ax + by)U_{m-1,n} &= mU_{m,n} + m(m-1)aU_{m-2,n} + mnbU_{m-1,n-1}, \\
n(bx + cy)U_{m,n-1} &= nU_{m,n} + nmbU_{m-1,n-1} + n(n-1)cU_{m,n-2}.
\end{aligned}$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned}
D_s(U_{m,n}) &= m(ax + by)U_{m-1,n} + n(bx + cy)U_{m,n-1} = \\
&= (m + n + 2)U_{m,n} + m(m-1)aU_{m-2,n} + n(n-1)cU_{m,n-2} + 2mnbU_{m-1,n-1}.
\end{aligned}$$

□

Розв'язавши відповідне диференціальне рівняння знаходимо моментні інваріанти відносно групи розтягів порядку не більше 2:

$$\frac{u_{0,1}}{u_{0,0}^{3/2}}, \frac{cu_{0,0} + u_{0,2}}{u_{0,0}^2}, \frac{u_{1,0}}{u_{0,0}^{3/2}}, \frac{u_{0,0}b + u_{1,1}}{u_{0,0}^2}, \frac{au_{0,0} + u_{2,0}}{u_{0,0}^2}.$$

2.3. Група паралельних перенесень. Група паралельних перенесень є двопараметричною комутативною групою з такою дією на координати:

$$\begin{cases} x' = x + A, \\ y' = y + B. \end{cases}$$

Якобіан такого перетворення дорівнює одиниці. Одиничний елемент групи отримується при нульових значеннях параметрів A і B .

Теорема 5. Алгебра \mathcal{L} і двопараметричної групи паралельних перенесень діє на моменти $u_{m,n}$ двома операторами D_x, D_y таким чином

$$\begin{aligned}
D_x(u_{m,n}) &= au_{m-1,n} + nbu_{m,n-1}, \\
D_y(u_{m,n}) &= bmu_{m-1,n} + pcu_{m,n-1}.
\end{aligned}$$

Доведення. Дією перетворенням $\begin{cases} x' = x + A, \\ y' = y, \end{cases}$ на породжуючу функцію

$$G_U(x + A, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}(x + A, y + B) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $A = 0$

$$(au + bv)G_U(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_x(U_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} (au + bv)G_U(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (au + bv)U_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (amU_{m-1,n}(x, y) + nbvU_{m,n-1}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Звідси

$$D_x(U_{m,n}(x, y)) = amU_{m-1,n}(x, y) + nbU_{m,n-1}(x, y).$$

Аналогічно, діючи перетворенням $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + B. \end{cases}$ отримаємо, що відповідний оператор D_y діє таким чином:

$$D_y(U_{m,n}(x, y)) = bmU_{m-1,n}(x, y) + ncU_{m,n-1}(x, y)$$

Звідси зразу отримуємо дію цих операторів на U -моменти. □

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} D_x(F) = 0, \\ D_y(F) = 0, \end{cases}$$

де F – функція від змінних $u_{0,0}, u_{1,0}, u_{0,1}, u_{2,0}, u_{1,1}, u_{0,2}$ знаходимо 4 моментні інваріанти відносно групи паралельних перенесень

$$U_{0,0}, \frac{U_{0,0}U_{0,2} - U_{0,1}^2}{U_{0,0}}, \frac{U_{0,0}U_{1,1} - U_{0,1}U_{1,0}}{U_{0,0}}, \frac{U_{0,0}U_{2,0} - U_{1,0}^2}{U_{0,0}}$$

3. Диференціальні оператори для V -моментів.

Многочлени Ерміта $V_{m,n}(x, y)$ визначаються експоненціальною породжуючою функцією

$$G_V = G_V(x, y, u, v) = e^{xu+yv-\frac{1}{2\Delta}(av^2-2buv+cu^2)}.$$

Відповідні V -моменти мають вигляд

$$v_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_{m,n}(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Спочатку знайдемо рекурентні співвідношення, яким задовольняють многочлени $V_{m,n}(x, y)$.

Теорема 6. Многочлени $V_{m,n}(x, y)$ задовольняють рекурентним співвідношенням

$$\begin{aligned} V_{m+1,n}(x, y) &= xV_{m,n}(x, y) - m\frac{c}{\Delta} V_{m-1,n}(x, y) + n\frac{b}{\Delta} V_{m,n-1}(x, y), \\ V_{m,n+1}(x, y) &= yV_{m,n}(x, y) + m\frac{b}{\Delta} V_{m-1,n}(x, y) - n\frac{a}{\Delta} V_{m,n-1}(x, y). \end{aligned}$$

з початковою умовою $V_{0,0}(x, y) = 1$.

Доведення. Диференціюємо породжуючу функцію G_V по u і отримаємо

$$\frac{\partial G_V}{\partial u} = \left(x + \frac{bv}{\Delta} - \frac{cu}{\Delta}\right)G_V = xG_V - \frac{c}{\Delta}uG_V + \frac{b}{\Delta}vG_V.$$

З одного боку маємо

$$\frac{\partial G_V}{\partial u} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x, y) \frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \frac{v^n}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m+1,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}.$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} xG_V - \frac{c}{\Delta}uG_V + \frac{b}{\Delta}vG_V &= \sum_{m,n=0}^{\infty} xV_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} - \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{c}{\Delta}V_{m,n}(x, y) \frac{u^{m+1}}{m!} \frac{v^n}{n!} + \\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{b}{\Delta}V_{m,n}(x, y) \frac{u^m}{m!} \frac{v^{n+1}}{n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(xV_{m,n}(x, y) - m\frac{c}{\Delta}U_{m-1,n}(x, y) + \right. \\ &\left. + n\frac{b}{\Delta}V_{m,n-1}(x, y)\right) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!}. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти рядів при однакових степенях отримаємо, що

$$V_{m+1,n}(x, y) = xV_{m,n}(x, y) - m\frac{c}{\Delta}U_{m-1,n}(x, y) + n\frac{b}{\Delta}V_{m,n-1}(x, y).$$

Друге рекурентне співвідношення отримується аналогічно із співвідношення

$$\frac{\partial G_V}{\partial v} = \left(y + \frac{bu}{\Delta} - \frac{av}{\Delta}\right)G_V.$$

□

3.1. Група обертань. Дію оператора D_r знаходимо, аналогічно як і у випадку U -моментів.

Теорема 7. Алгебра $Li\ \mathfrak{so}_2$ діє на моменти $v_{m,n}$ оператором D_r за формулою

$$\begin{aligned} D_r(v_{m,n}) &= nv_{m+1,n-1} - mv_{m-1,n+1} - \frac{n(n-1)bv_{m,n-2}}{\Delta} + \frac{(m-1)bm v_{m-2,n}}{\Delta} - \\ &- \frac{(a-c)n m v_{m-1,n-1}}{\Delta}. \end{aligned}$$

Доведення. Як і вище, діючи елементом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію, отримуємо

$$G_V(x, xt + y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(x, y + xt) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $t = 0$:

$$vxG_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_+(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} xvG_V(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} xvV_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} (n+1)xV_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^{n+1}}{m! (n+1)!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} nxV_{m,n-1}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Отже

$$D_+(V_{m,n}(x, y)) = nxV_{m,n-1}(x, y).$$

Аналогічно, диференціюючи функцію $G_V(x + yt, y, u, v)$ в $t = 0$ знаходимо

$$uyGV(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} DV_-(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

звідки

$$DV_-(V_{m,n}(x, y)) = myV_{m-1,n}(x, y).$$

Тому, оператор групи повороту D_r має таку дію

$$\begin{aligned} DV(V_{m,n}(x, y)) &= DV_+(u_{m,n}(x, y)) - DV_-(V_{m,n}(x, y)) = \\ &= nxV_{m,n-1}(x, y) - myV_{m-1,n}(x, y). \end{aligned}$$

Врахувавши рекурентні співвідношення, отримуємо

$$\begin{aligned} xV_{m,n-1}(x, y) &= V_{m+1,n-1}(x, y) + \frac{mcV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta} - \frac{(n-1)bV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta}, \\ yV_{m-1,n}(x, y) &= V_{m-1,n+1}(x, y) - \frac{(m-1)bV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} + \frac{naV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Отже, оператор D_r так діє на $V_{m,n}(x, y)$:

$$\begin{aligned} D_r(V_{m,n}(x, y)) &= nV_{m+1,n-1} - mV_{m-1,n+1}(x, y) - \frac{n(n-1)bV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta} + \\ &+ \frac{(m-1)bmV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - \frac{(a-c)nmV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Звідси зразу отримуємо дію на V -моменти. □

Для невеликих m, n маємо

$$\begin{aligned} D_r(v_{0,1}) &= v_{1,0}, \quad D_r(v_{1,0}) = -v_{0,1}, \\ D_r(v_{0,2}) &= \frac{2acv_{1,1} - 2v_{1,1}b^2 - 2v_{0,0}b}{\Delta}, \\ D_r(v_{1,1}) &= \frac{(v_{0,2} - v_{2,0})b^2 + ((-v_{0,2} + v_{2,0})c - v_{0,0})a + v_{0,0}c}{\Delta}, \\ D_r(v_{2,0}) &= \frac{2v_{1,1}b^2 + 2v_{0,0}b - 2acv_{1,1}}{\Delta}. \end{aligned}$$

3.2. Група рівномірних розтягів. Як і у випадку многочленів U -моментів знаходимо дію оператора D_s на V -моменти.

Теорема 8. Алгебра Лі групи рівномірних розтягів діє на моменти $v_{m,n}$ оператором D_s за формулою

$$D_s(v_{m,n}) = (m+n+2)v_{m,n} + \frac{an(n-1)v_{m,n-2}}{\Delta} + \frac{cm(m-1)v_{m-2,n}}{\Delta} - 2\frac{mnbv_{m-1,n-1}}{\Delta}.$$

Доведення. Діємо елементом $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ на породжуючу функцію і отримуємо

$$t^2 G_V(tx, ty, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n}(tx, ty) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $t = 1$

$$(ux + vy + 2)G_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_s(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} (ux + vy + 2)G_V(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (ux + vy + 2)V_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} xV_{m,n}(x, y) \frac{v^{m+1} v^n}{m! n!} + \sum_{m,n=0}^{\infty} yV_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^{n+1}}{m! n!} + 2 \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{m,n} \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (mxV_{m-1,n}(x, y) + nyV_{m,n-1}(x, y) + 2) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Враховуючи рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} xV_{m-1,n}(x, y) &= V_{m,n}(x, y) + \frac{(m-1)cV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - \frac{nbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}, \\ yV_{m,n-1}(x, y) &= V_{m,n}(x, y) - \frac{mbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta} + \frac{(n-1)aV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta}, \end{aligned}$$

знаходимо

$$\begin{aligned} D_s(V_{m,n}(x, y)) &= (m+n+2)V_{m,n}(x, y) + \frac{n(n-1)aV_{m,n-2}(x, y)}{\Delta} + \\ &+ \frac{m(m-1)cV_{m-2,n}(x, y)}{\Delta} - 2\frac{mnbV_{m-1,n-1}(x, y)}{\Delta}. \end{aligned}$$

Звідси зразу отримуємо дію на V -моменти.

□

Моментні V -інваріанти відносно групи рівномірних розтягів порядку не більше 2 мають такий вигляд

$$\frac{v_{0,1}}{v_{0,0}^{3/2}}, \frac{v_{0,2}\Delta + v_{0,0}a}{\Delta v_{0,0}^2}, \frac{v_{1,0}}{v_{0,0}^{3/2}}, \frac{v_{1,1}\Delta - v_{0,0}b}{\Delta v_{0,0}^2}, \frac{v_{1,2}\Delta + v_{1,0}a - 2v_{0,1}b}{\Delta v_{0,0}^{5/2}}, \frac{v_{2,0}\Delta + v_{0,0}c}{\Delta v_{0,0}^2}.$$

3.3. Група паралельних перенесень. Як і у випадку многочленів U -моментів знаходимо дію оператора D_s на V -моменти.

Теорема 9. Алгебра \mathcal{L} і двопараметричної групи паралельних перенесень діє на моменти $v_{m,n}$ двома операторами D_x, D_y таким чином

$$\begin{aligned} D_x(v_{m,n}) &= mv_{m-1,n}, \\ D_y(v_{m,n}) &= nu_{m,n-1}. \end{aligned}$$

Доведення. Діємо перетворенням $\begin{cases} x' = x + A, \\ y' = y, \end{cases}$ на породжуючу функцію:

$$G_V(x + A, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} u_{m,n}(x + A, y + B) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Диференціюємо в $A = 0$:

$$uG_V(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} D_x(V_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} uG(x, y, u, v) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} uV_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} mV_{m-1,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Звідси

$$D_x(V_{m,n}(x, y)) = mV_{m-1,n}(x, y),$$

і

$$D_x(v_{m,n}) = mv_{m-1,n}.$$

Аналогічно, діючи перетворенням $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + B, \end{cases}$ отримаємо, що відповідний оператор D_y діє таким чином:

$$D_y(U_{m,n}(x, y)) = nu_{m,n-1}.$$

Звідси зразу отримуємо дію цих операторів на V -моменти.

□

Розв'язавши систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{cases} D_x(F) = 0, \\ D_y(F) = 0, \end{cases}$$

де F – функція від змінних $v_{0,0}, v_{1,0}, v_{0,1}, v_{2,0}, v_{1,1}, v_{0,2}$ знаходимо 4 моментні інваріанти відносно групи паралельних перенесень порядку не більше 2 :

$$v_{0,0}, \frac{v_{0,0}v_{0,2} - v_{0,1}^2}{v_{0,0}}, \frac{v_{0,0}v_{1,1} - v_{0,1}v_{1,0}}{v_{0,0}}, \frac{v_{0,0}v_{2,0} - v_{1,0}^2}{v_{0,0}}.$$

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті, для пари бі-ортогональних сімей многочленів Ерміта, задачу знаходження моментних інваріантів зведено до задачі розв'язання деякого диференціального рівняння в частинних похідних першого порядку, яке виникає при переході від дії групи Лі до дії її алгебри Лі. Для кожної із згаданих груп знайдено явний вигляд дії її алгебри Лі на моменти Ерміта і вказані явно моментні інваріанти невеликих порядків. Запропонований підхід дозволяє обчислити моментні інваріанти вищих порядків.

Ідеї, які реалізовано в статті, в подальших дослідженнях можна поширити для обчислення спільних моментних інваріантів кількох груп перетворень площини, а також для знаходження моментних інваріантів $3D$ зображень.

Результати обчислень можуть бути корисними фахівцям з розпізнавання образів, оскільки моментні інваріанти є глобальними ознаками зображень.

Список використаної літератури

1. Hu M. K. Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory*. 1962. Vol. 8. No. 2. P. 179–187.
2. Pawlak M. Image Analysis by Moments: Reconstruction and Computational Aspects. Wrocław University of Technology Press., 2006. 212 p.
3. Papakostas G. A. Over 50 Years of Moments and Moment Invariants. *In Moments and Moment Invariants – Theory and Applications. Science Gate*. 2014. P. 3–32.
4. Flusser J., Suk T., Zitová, B. 2D and 3D Image Analysis by Moments. John Wiley and Sons, 2017. 548 p.
5. Mahbubur R., Howlader T., Hatzinakos D. Orthogonal Image Moments for Human-Centric Visual Pattern Recognition. Springer Singapore, 2019. 157 p.
6. Flusser J. On the independence of rotation moment invariants. *Pattern Recognition*. 2000. Vol. 33. No. 9. P. 1405–1410.
7. Bedratyuk L. 2D Geometric Moment Invariants from the Point of View of the Classical Invariant Theory. *J Math Imaging Vis*. 2020. 62. P. 1062–1075.
8. Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*. 2022. Vol. 127, 108607.
9. Hermite M. Sur un nouveau développement en série des fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris*. 1865. Vol. 58. P. 266–273.
10. Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*. 2011. Vol. 32, No. 2. P. 1283–1298.
11. Chong C. W., Raveendran P., Mukundan R. Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*. 2004. Vol. 37. No. 1. P. 119–129.
12. Mukundan R., Ong S. H., Lee P. A. Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001. Vol. 10, No. 9. P. 1357–1364.

Bedratyuk L. P., Bedratyuk A. I. Image Hermite moments and their invariants.

Let H be a subgroup of the plane affine group $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$, which is considered with its natural action on the integrated functions of two variables defined in some domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. For a fixed family of polynomials $\{P_{m,n}(x, y)\}_{n,n=0}^{\infty}$ consider the functional

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,n}(f) = \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y) f(x, y) dx dy,$$

which is called the P -moment of the function $f(x, y)$ of order $m + n$. The action of the group H defined on the P -moments according to the formula

$$h\pi_{m,n}(f) = \pi_{m,n}(h^{-1}f) \iint_{\Omega} P_{m,n}(x, y) f(h^{-1}(x, y)) dx dy, h \in H.$$

The invariants of this action are called the P -moment invariants. If the function $f(x, y)$ is identified with a halftone image, and for the group H we take the group of rotations, the scaling group or the plane translation group, then the corresponding moments and their moment invariants are widely used in the pattern recognition. The problem of a complete description of moment invariants is solved only in the simplest case $P_{m,n}(x, y) = x^m y^n$. In this article, for a pair of bi-orthogonal families of Hermite polynomials, the problem of finding their moment invariants is reduced to the problem of solving some first order partial differential equation, which occurs during the transition from the action of the Lie group to the action of its Lie algebra. For each of the mentioned groups, an explicit form of the action of its Lie algebra on the Hermite moments are found and the moment invariants of small orders are found in an explicit way.

Keywords: pattern recognition, feature engineering, plane transformation groups, Hermite polynomials, image moments, image moment invariants.

References

1. Hu, M. K. (1962). Visual pattern recognition by moment invariants. *IRE Trans. Inform. Theory*, 8(2), 179–187.
2. Pawlak, M. (2006). *Image Analysis by Moments: Reconstruction and Computational Aspects*. Wroclaw University of Technology Press.
3. Papakostas, G. A. (2014). Over 50 Years of Moments and Moment Invariants. *In Moments and Moment Invariants – Theory and Applications. Science Gate*, 3–32.
4. Flusser, J., Suk, T., & Zitová, B. (2017). *2D and 3D Image Analysis by Moments*. John Wiley and Sons.
5. Mahbubur, R., Howlader, T., & Hatzinakos, D. (2019). *Orthogonal Image Moments for Human-Centric Visual Pattern Recognition*. Springer Singapore.
6. Flusser, J. (2000). On the independence of rotation moment invariants. *Pattern Recognition*, 33(9), 1405–1410.
7. Bedratyuk, L. (2020). 2D Geometric Moment Invariants from the Point of View of the Classical Invariant Theory. *J Math Imaging Vis.*, 62, 1062–1075.
8. Bedratyuk, L., Flusser, J., Suk, T., Kostkova, J. & Kautsky, J. (2022). Non-separable rotation moment invariants. *Pattern Recognition*, 127, 108607.
9. Hermite, M. (1865). Sur un nouveau développement en série des fonctions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 58, 266–273.
10. Yang, B., Li, G., Zhang, H., & Dai, M. (2011). Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments. *Pattern Recognition Letters*, 32(2), 1283–1298.
11. Chong, C. W., Raveendran, P., & Mukundan, R. (2004). Translation and scale invariants of Legendre moments. *Pattern Recognition*, 37(1), 119–129.
12. Mukundan, R., Ong, S. H., Lee, P. A. (2011). Image analysis by Tchebichef moments. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(9), 1357–1364.

Одержано 30.07.2022

УДК 004.93

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).118-127](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).118-127)**Л. П. Добуляк¹, Д. О. Фербей², С. Б. Костенко³**

¹ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
кандидат економічних наук, доцент
lesia.dobuliak@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8665-8783>

² Львівський національний університет ім. Івана Франка,
магістр,
dariaferbey@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2329-9693>

³ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
svitlana.kostenko@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0823-9801>

ВИКОРИСТАННЯ ГЛИБИННОГО НАВЧАННЯ У ЗАДАЧАХ КЛАСИФІКАЦІЇ ЗВУКІВ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

У даній статті розглянуто різні аспекти, пов'язані з розпізнаванням звуків навколишнього середовища, що є прикладною задачею в багатьох сферах діяльності людини. На відміну від музики та мови, звук навколишнього середовища насичений шумом і не має ритму та мелодії музики або семантичної послідовності мови. Це ускладнює пошук спільних рис серед звукових сигналів навколишнього середовища. У даному дослідженні розв'язання задачі розпізнавання звуків базуються на використанні методів класифікації зображень. Для цього виконується перетворення кожного аудіо-запису вибірки у спеціальні зображення — спектрограму Мела, що є його компактним інформативним візуальним представленням. Щоб підвищити точність розпізнавання звуків, досліджуються різні методи збільшення навчального набору даних. В основі цих методів лежить створення нових екземплярів аудіозаписів шляхом деформації існуючих. За допомогою такого підходу ми можемо збільшити в рази кількість елементів набору даних, таким чином вирішити проблему його обмеженості. Для класифікації звуків навколишнього середовища з набору аудіоданих UrbanSound8K було використано глибинну згорткову нейронну мережу. Щоб оцінити якість (точність та втрати) представленої моделі було застосовано 10-кратну перехресну перевірку.

Ключові слова: класифікація, звуки навколишнього середовища, збільшення даних, спектрограма, згорткова нейронна мережа.

1. Вступ. Сучасні методи розпізнавання образів охоплюють методи класифікації та ідентифікації предметів, явищ, процесів, сигналів, ситуацій та подібних об'єктів, які характеризуються наборами деяких властивостей і ознак. Одним з важливих напрямків у цій області є розпізнавання звуків навколишнього середовища, незалежно від їх природи.

Однак через складність звуків навколишнього середовища, їх взаємного накладання та низки інших причини, дослідження щодо розпізнавання таких звуків значно відстали від вивчення мовлення та музики. Розпізнавання звуку безпосередньо впливає на виявлення різних явищ та процесів навколо нас і може широко використовуватися в багатьох галузях, таких як керування пристроями

без участі людини (автопілотування транспортних засобів, управління розумними будинками тощо), розпізнавання сигналів тривоги, ідентифікація збоїв у роботі механізмів та ін. А тому побудова надійних моделей, які здатні ідентифікувати в шумі певні звукові сигнали, представляє великий дослідницький інтерес.

2. Постановка завдання. Основна ідея роботи полягає в тому, щоб побудувати модель глибокого навчання, яка може класифікувати деякі визначені звуки навколишнього середовища.

Для досягнення зазначеної мети необхідно вивчити властивості звуку, особливості його подання у вигляді спектрограми — спеціального виду зображення, виконати навчання згорткової нейронної мережі на вибірці уривків звуків навколишнього середовища та оцінити якість проведеної класифікації. Щоб навчання мережі відбувалося на достатній за обсягом та репрезентативній тренувальній вибірці, дослідити методи збільшення набору використовуваних даних.

3. Огляд літератури. Поняття звуку, його особливості як фізичного явища, характеристики та можливість оцифрування подано в роботі Радзишевського А. Ю. [1]. Машинному навчанню та різним підходам до розпізнавання образів присвячені видання Кутковецького В. Я. [2] та Рашкевича Ю. М. [3]. Що таке глибоке навчання, глибокі нейронні мережі як засоби класифікації об'єктів та особливості застосування згорткових нейронних мереж для розпізнавання зображень детально викладено в працях Субботіна С. О. [4] та Новотарського М. А. [5].

Можливість переходу класифікації аудіо до класифікації звуків, особливості початкової підготовки аудіоданих, доцільність використання мел-спектрограми, а також структуру згорткової нейронної мережі у випадку класифікації звуків описано в [6]. Побудові згорткової нейронної мережі, яка здатна розпізнавати шум на будівельному майданчику присвячена робота [7]. Тут використовувалися аудіозаписи роботи різних екскаваторів. Мета такого дослідження — це виявлення небезпеки на робочому місці та моніторинг діяльності учасників будівництва. Характеристику колекціям аудіозаписів, придатним для використання у машинному навчанні, дано у [8].

З документацією по пакету Keras мови програмування Python, який містить інструментарій для обробки зображень та тексту, можна ознайомитися на офіційному сайті [9], а особливості його застосування щодо перетворення аудіоданих у спектрограму та виконання іншої підготовчої роботи з вхідними даними подані в [10].

4. Матеріали та методи. Наше сьогоденне навколишнє середовище переповнене різноманіттям звуків. Все, крім голосу та музики, у цьому різноманітті, можна віднести до особливого виду аудіо, серед якого є і звуки природного світу, наприклад, дзижчання комара, так і звуки роботи технічних пристроїв та механізмів, на кшталт гудіння холодильника.

Оскільки завданням цього дослідження є класифікація звуків, то необхідно розібратися з цим фізичним явищем та з'ясувати способи його опису та оцифрування з метою застосування глибокого навчання.

Ми знаємо, що звук — це коливальний рух частинок середовища, що поширюється у вигляді хвиль у різних середовищах та сприймається слухом. Часто звуковий сигнал повторюється через рівні проміжки часу, тому хвиля, що його

описує, має повторювальну (регулярну, періодичну) форму. Висота хвилі вказує на інтенсивність звуку та називається амплітудою, час, необхідний для того, щоб сигнал завершив одну повну хвилю, є періодом (рис. 1). Оберненою до періоду величиною є частота — це кількість періодів за одиницю часу.

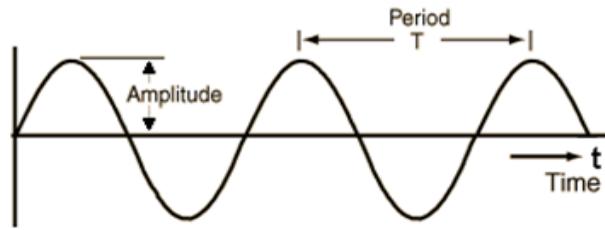


Рис. 1. Простий повторюваний сигнал з його амплітудою та часом.

Більшість звуків, які ми зустрічаємо, можуть не відповідати таким простим і регулярним періодичним моделям. Сигнали різних частот додаються разом, утворюючи сигнали з більш складними повторюваними шаблонами. Усі звуки, які ми чуємо, включаючи наш власний людський голос, складаються з таких сигналів. Прикладом такого складного сигналу є звук музичного інструменту, що зображено на рисунку 2.



Рис. 2. Форма хвилі складного повторюваного сигналу звуку музичного інструменту.

Щоб оцифрувати звукову хвилю, потрібно перетворити сигнал у серію чисел, шляхом вимірювання амплітуди звуку через фіксовані проміжки часу. Цей процес представлено на рисунку 3.

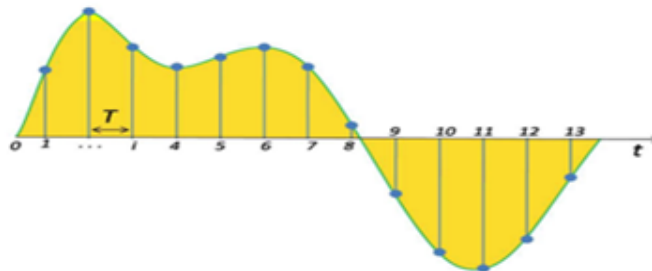


Рис. 3. Вимірювання амплітуди звуку через регулярні проміжки часу.

Результати кожного такого вимірювання називається вибіркою, а частота дискретизації — це кількість вибірок за секунду. Наприклад, загальна частота

дискретизації становить близько 44 100 вибірок в секунду. Це означає, що 10-секундний музичний кліп матиме 441 000 значень.

Для візуального зображення спектру частот сигналу в часі використовуються спектрограма [11]. Як правило, спектрограма — це двовимірна діаграма, де по горизонтальній осі представлено час, по вертикальній осі — частота коливань, а амплітуда на певній частоті в конкретний момент часу представлена інтенсивністю, тобто кольором відповідної точки. Спектрограма використовує різні кольори для позначення величини амплітуди або сили кожної частоти: чим яскравіше колір, тим вище енергія сигналу.

Спектрограми формуються із звукових сигналів за допомогою перетворень Фур'є [12]. Перетворення Фур'є розкладає сигнал на його складові частоти і визначає амплітуду кожної частоти, присутньої в сигналі. Таким чином, спектрограма розбиває тривалість звукового сигналу на менші часові сегменти, а потім застосовує перетворення Фур'є до кожного сегмента, щоб визначити частоти і на завершення об'єднує перетворення Фур'є для всіх цих сегментів в єдиний графік.

Кожен вертикальний «зріз» спектрограми, по суті, є спектром сигналу в цей момент часу і показує, як потужність сигналу розподіляється по кожній частоті, знайденій у сигналі в цей момент.

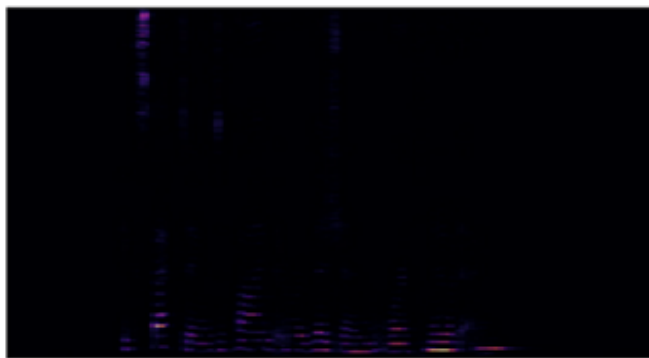


Рис. 4. Звичайна спектрограма.

Як ми бачимо, спектрограма не дає нам багато інформації (рис. 4). Це відбувається через те, що люди сприймають звук у вузькому діапазоні частот і амплітуд. Для збільшення наглядності спектрограми була розроблена шкала Мела, у відповідності до якої кількісна оцінка звуку базується на статистичній обробці даних про суб'єктивне сприйняття висоти звукових тонів великої кількості слухачів [13]. Тобто, в її основі є психо-фізичне сприйняття звуку людиною, і вона є логарифмічною залежністю от частоти.

На основі шкали Мела будується спектрограма Мела (рис. 5), яка є аналогом звичайної спектрограми, проте використовує на вертикальній осі замість частот спеціальні величини мели, перехід до яких здійснюється за допомогою застосування до спектрограми мел-фільтрів [14].

Очевидно, що мел-спектрограма є більш інформативною ніж звичайна спектрограма. Таким чином можна зробити висновок, що спектрограма Мела є компактним інформативним представленням аудіосигналу, схожим на відбиток пальця людини.

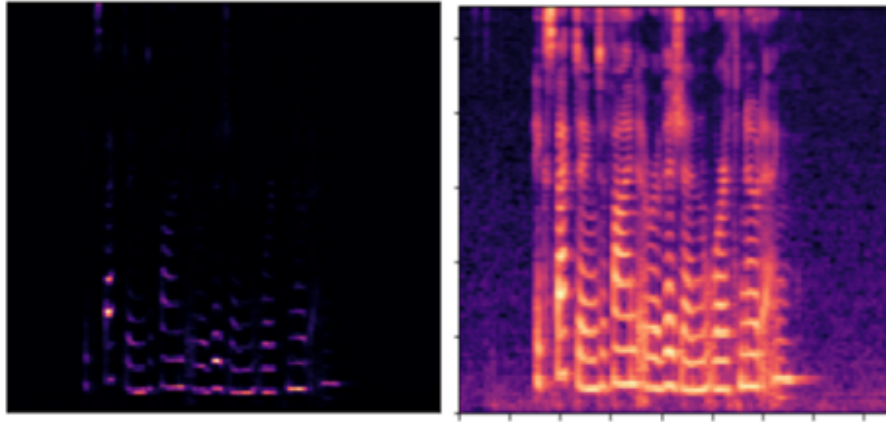


Рис. 5. Звичайна спектрограма та побудована на її основі спектрограма Мела.

Глибинне навчання, як галузь машинного навчання, передбачає моделювання високорівневих абстракції із декількома обробними шарами, де здійснюються різні перетворення. Існують різні архітектури глибинного навчання, серед яких вагоме місце займають згорткові нейронні мережі.

Згорткові нейронні мережі — це клас глибинних штучних нейронних мереж прямого поширення, які можуть розпізнавати й класифікувати зображення, а тому широко використовуються для аналізу візуальних даних [15]. Термін «згортка» в позначає математичну функцію згортки, яка є особливим видом лінійної операції, в якій дві функції перемножуються, щоб отримати третю функцію, яка виражає, як форма однієї функції змінюється іншою. Простіше кажучи, два зображення, які можна представити у вигляді матриць, перемножуються, щоб отримати вихід, який використовується для вилучення ознак із зображення.

Якість побудови будь-якої моделі машинного навчання залежить від репрезентативності навчальної вибірки. Основними проблемами й перешкодами для дослідження міських звуків є відсутність у відкритому доступі колекцій з достатньою кількістю маркованих аудіоданих для тренування нейронної мережі. Для урізноманітнення наявних екземплярів звуків та наповнення таких колекцій використовуються різні методики штучного створення даних на основі існуючих [16]. Ці методики можна застосувати як до необробленого аудіозапису перед створенням спектрограми, так і до його спектрограми.

В даному дослідженні використовуються такі дві методики:

- додавання фоновому гауссового (білого) шуму [17] до спектрограми,
- зміщення часу: зсуває спектрограму у часі вправо, при цьому та частина спектрограми, яка попадає поза фіксований розмір часової рамки, відсікається.

При генеруванні нового зразка звуку можливі застосування різних комбінацій описаних методів до одної і тієї ж вхідної спектрограми. Результат застосування різних комбінацій методів для створення нових екземплярів, що застосовані до спектрограми звуку гавкання собаки, показаний на рисунку 6.

5. Основний результат. Проведене дослідження базувалось на вибірці уривків звуків UrbanSound8K [18]. Це набір даних містить 8732 аудіофай-

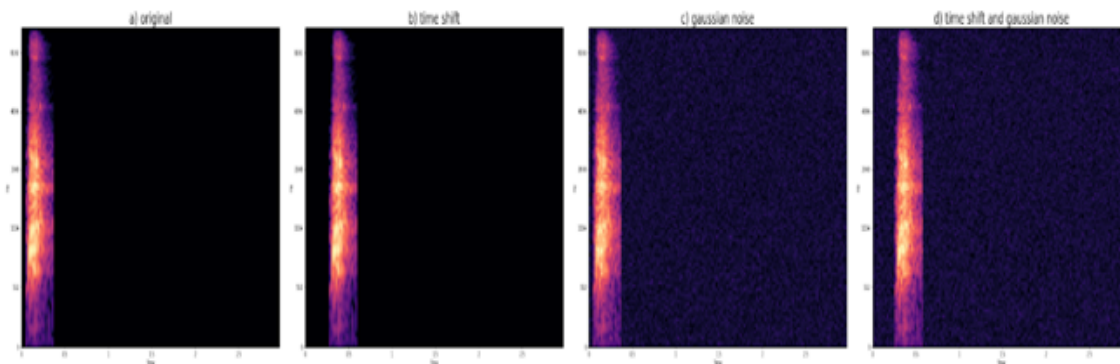


Рис. 6. Результати застосування до спектрограми звуку гавкання собаки методів створення нових екземплярів.

лів, які відносяться до одного з 10 різних класів (air_conditioner, car_horn, children_playing, dog_bark, drilling, engine_idling, gun_shot, jackhammer, siren, street_music).

Збільшення даних було виконано в режимі онлайн шляхом застосування методів додавання гауссового шуму та зміщення часу до вхідних спектрограм перед тренуванням моделі. Обидва методи застосовують випадково згенеровані значення параметрів деформації зображень (спектрограм).

Представлений набір даних було збільшено та перетворено у відповідні спектрограми Мела. Приклади спектрограм Мела звуку кондиціонеру, сигналу автомобіля та звуки гри дітей із зазначеного набору подано на рисунку 7.

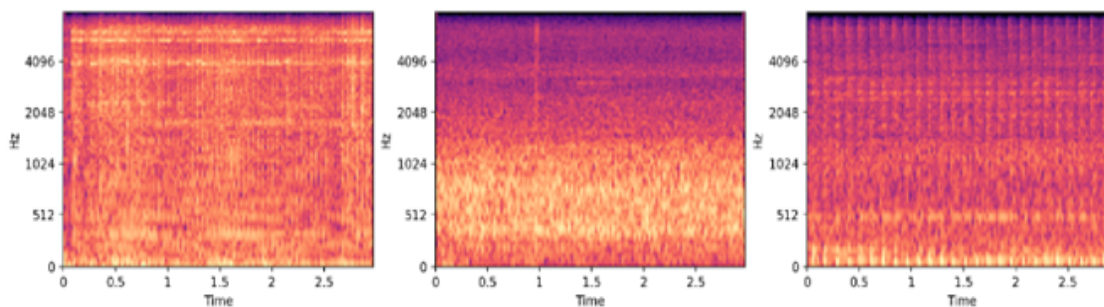


Рис. 7. Приклади спектрограм Мела.

Для обробки цих зображень було використано модель згорткової нейронної мережі, яка містить: Conv2D (згортковий шар), MaxPooling2D (максимальне об'єднання), Activation (функція активації) та Dense Layer (щільний шар) [19].

Згортковий шар безпосередньо має справу з вхідними даними. Вхід кожного шару Conv2D і MaxPooling2D є 3D тензори (висота, ширина, RGB-канал кольору). Застосування згорткового шару призводить до зменшення розмірів зображення.

Структура використаної згорткової нейронної мережі, особливості параметрів виводу результатів роботи кожного шару мережі та їх кількість зображені

```

Model: "sequential"

```

Layer (type)	Output Shape	Param #
conv2d (Conv2D)	(None, 124, 124, 24)	624
max_pooling2d (MaxPooling2D)	(None, 41, 41, 24)	0
activation (Activation)	(None, 41, 41, 24)	0
conv2d_1 (Conv2D)	(None, 38, 38, 36)	13860
max_pooling2d_1 (MaxPooling2D)	(None, 19, 19, 36)	0
activation_1 (Activation)	(None, 19, 19, 36)	0
conv2d_2 (Conv2D)	(None, 17, 17, 48)	15600
activation_2 (Activation)	(None, 17, 17, 48)	0
global_average_pooling2d (GlobalAveragePooling2D)	(None, 48)	0
dense (Dense)	(None, 60)	2940
dropout (Dropout)	(None, 60)	0
dense_1 (Dense)	(None, 10)	610

```

Total params: 33,634
Trainable params: 33,634
Non-trainable params: 0

```

Рис. 8. Архітектура згорткової нейронної мережі.

на рисунку 8.

Щоб оцінити точність моделі, використали 10-кратну перехресну перевірку. Для оцінки використали такі показники як точність та втрата. Для функції втрат вибирається категоріальна втрата перехресної ентропії, а точність — це відсоток правильно класифікованих екземплярів. Для кожного класу втрата визначається як мінімальне значення втрат серед всіх епох у процесі перевірки. Аналогічно, точність для кожного класу розраховується шляхом отримання найкращого значення точності класифікації у кожну епоху.

Розглянемо приклад роботи моделі — класифікацію звуків з першої групи набору даних (звуків кондиціонера). Порівняємо точність та втрати на тестових та на тренувальних даних. На рисунку 9 зображено залежність точності та втрати від кількості епох тренування моделі. Синя крива — це результати для тренувальної вибірки, а червона для тестувальної.

Точність, розрахована програмою, становить 81%, а величина втрат стано-

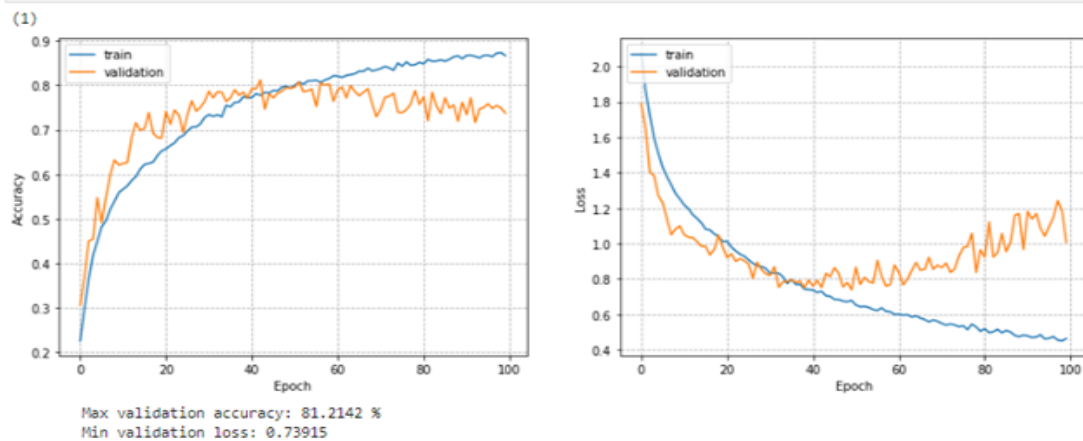


Рис. 9. Оцінка якості роботи згорткової нейронної мережі щодо класифікації звуків кондиціонера.

вить 0,74, що засвідчують графіки на рисунку 9.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. Під час дослідження було встановлено, що згорткові нейронні мережі, розроблені спеціально для розпізнавання зображень, можна успішно навчити класифікувати звуки навколишнього середовища використовуючи спектральне представлення відповідних аудіозаписів. Розроблено модель глибокого навчання, яка може класифікувати звуки навколишнього середовища кількох різних класів. Експерименти з набором даних UrbanSound8K, що містить звуки десяти класів, показують, що середня точність й середня втрата при класифікації об'єктів кожного з класів, досягають значень 75% і 92,4% відповідно.

Розроблена модель має як переваги, так й недоліки. Перевагою є низька складність структури нейронної мережі в порівнянні з іншими методами класифікації звуків. Недоліком залишається відносно невелика точність. Тому, у подальшому можна продовжити вивчати різні підходи для класифікації звуків з метою покращення точності.

Дана робота виокремила перспективи подальших досліджень. Зокрема потребує додаткової уваги пошук ефективних методів збільшення даних, які доцільно застосовувати для різних видів звуків, з метою їх використання для побудови моделей класифікації. Крім того, існує потреба дослідити вплив на якість класифікації звуків застосування нейронних мереж різної топології, взявши до уваги особливості їх реалізації та впровадження.

Список використаної літератури

1. Радзишевский А. Ю. Основы аналогового и цифрового звука. Москва : Вильямс, 2006. 281 с.
2. Кутковецкий В. Я. Розпізнавання образів : навчальний посібник. Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2017. 420 с.
3. Рашкевич Ю. М., Ткаченко Р. О., Цмоць І. Г., Пелешко Д. Д. Нейро-подібні методи, алгоритми та структури обробки зображень у реальному часі: монографія. Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2014. 256 с.
4. Субботін С. О. Нейронні мережі. Теорія та практика : навч. посіб. Житомир : Вид. О. О. Євенок, 2020. 184 с.

5. Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б. Штучні нейронні мережі : обчислення. Праці Інституту математики НАН України. Т. 50. Київ : Ін-т математики НАН України, 2004. 408 с.
6. Palanisamy K., Singhania D., Yao A. Rethinking CNN Models for Audio Classification. URL: <https://arxiv.org/pdf/2007.11154.pdf> (дата звернення: 06.09.2022).
7. Maccagno A., Mastropietro A., Mazziotta U., Scarpiniti M., Lee Y.-Ch., Uncini A. A CNN Approach for Audio Classification in Construction Sites. URL: https://iris.uniroma1.it/bitstream/11573/1444275/2/Maccagno_postprint_CNN-Approach_2021.pdf (дата звернення: 06.09.2022).
8. Varazida N. 40 Open-Source Audio Datasets for ML. URL: <https://towardsdatascience.com/40-open-source-audio-datasets-for-ml-59dc39d48f06> (дата звернення: 10.09.2022).
9. Keras API reference. URL: <https://keras.io/api/> (дата звернення: 10.09.2022).
10. Lillelund C. Classify MNIST Audio using Spectrograms-Keras CNN. URL: <https://www.kaggle.com/code/christianlillelund/classify-mnist-audio-using-spectrograms-keras-cnn/data> (дата звернення: 06.09.2022).
11. Voddatpati V., Petef A., Rasmusson J., Lundberg L. Classifying environmental sounds using image recognition networks. *Procedia computer science*. 2020. 112. P. 2048–2056.
12. Перелигін Б. В., Ткач Т. Б., Гор'єв С. А. Спектрально-часовий аналіз даних моніторингу. Одеса : ТЕС, 2018. 15 с.
13. Cotton C. V., Ellis D. Spectral vs. spectro-temporal features for acoustic event detection. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA)*. IEEE. 2011. P. 69–72.
14. Swedia E. R., Mutiara A. B., Subali M., and Ernastuti. "Deep Learning Long-Short Term Memory (LSTM) for Indonesian Speech Digit Recognition using LPC and MFCC Feature", in 2018 Third International Conference on Informatics and Computing (ICIC), Palembang, Indonesia. 2018. P. 1–5.
15. Bahmei B., Birmingham E., Arzanpour S. Cnn-rnn and data augmentation using deep convolutional generative adversarial network for environmental sound classification. *IEEE Signal Processing Letters*, 2022. 29. P. 682–686.
16. Gaussiannoise. URL: <https://hasty.ai/docs/mp-wiki/augmentations/gaussian-noise> (дата звернення: 10.09.2022).
17. Salamon J., Jacoby C., Bello J. P. "UrbanSound8k Dataset". Urban Sound Datasets. URL: <https://urbansounddataset.weebly.com/urbansound8k.html> (дата звернення: 06.09.2022).
18. Salamon J., Bello J. P. "Deep Convolutional Neural Networks and Data Augmentation for Environmental Sound Classification submitted. 2016. URL: <https://arxiv.org/pdf/1608.04363.pdf> (дата звернення: 06.09.2022).

Dobuliak L. P., Ferbei D. O., Kostenko S. B. Using deep learning for environmental sound's classification.

Environmental sound recognition is an applied problem in many spheres of human activity. Unlike music and speech, ambient sound is saturated with noise and lacks the rhythm and melody of music or the semantic consistency of speech. This makes it difficult to find common features among environmental sound signals. In order to improve the accuracy of sound recognition, this paper proposes different methods for increasing the training data set. The basis of these methods is the creation of new instances of audio recordings by deformation of existing ones. Using this approach, we can increase the number of data set elements several times and solve the problem of its limitation. In order to convert the data sample into an image, the Mel spectrogram is used, which is a compact informative representation of the audio signal, which is convenient to use in further work. A deep convolutional neural network was used to classify environmental sound from the UrbanSound8K audio dataset. A 10-fold cross-validation was applied to assess the quality (accuracy and loss) of the presented model.

Keywords: classification, environmental sounds, data augmentation, spectrogram, convolutional neural network.

References

1. Radzyshevsky, A. Yu. (2006). *Fundamentals of analog and digital audio*. Moskow: Williams [in Russian].
2. Kutkovetskyj, V. Ya. (2017). *Recognition of images*. Mykolaiv: [in Ukrainian].
3. Rashkevych, Yu. M., Tkachenko, R. O., Cmoc, I. G., & Peleshko, D. D. (2014). *Neural-like methods, algorithms and frameworks for real-time image processing*. Lviv [in Ukrainian].
4. Subbotin, S. O. (2020). *Neural networks. Theory and practice*. Jytomyr [in Ukrainian].
5. Novotarskyj, M. A., & Nesterenko, B. B. (2004). Artificial neural networks: calculations. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine*. (Vol. 50). Kyiv [in Ukrainian].
6. Palanisamy, K., Singhania, D., & Yao, A. Rethinking CNN Models for Audio Classification. Retrieved from: <https://arxiv.org/pdf/2007.11154.pdf>
7. Maccagno, A., Mastropietro, A., Mazziotta, U., Scarpiniti, M., Lee, Y.-Ch., & Uncini, A. A CNN Approach for Audio Classification in Construction Sites. Retrieved from: https://iris.uniroma1.it/bitstream/11573/1444275/2/Maccagno_postprint_CNN-Approach_2021.pdf
8. Barazida, N. 40 Open-Source Audio Datasets for ML. Retrieved from: <https://towardsdatascience.com/40-open-source-audio-datasets-for-ml-59dc39d48f06>
9. Keras API reference. Retrieved from: <https://keras.io/api/>
10. Lillelund, C. Classify MNIST Audio using Spectrograms/Keras CNN. Retrieved from: <https://www.kaggle.com/code/christianlillelund/classify-mnist-audio-using-spectrograms-keras-cnn/data>
11. Boddapati, V., Petef, A., Rasmusson, J., & Lundberg, L. (2020). Classifying environmental sounds using image recognition networks. *Procedia computer science*, 112, 2048–2056.
12. Perelygin, B. V., Tkach, T. B., & Gorjev, S. A. (2018). *Spectral-temporal analysis of monitoring data*. Odesa [in Ukrainian].
13. Cotton, C. V. & Ellis, D. (2011). Spectral vs. spectro-temporal features for acoustic event detection. *IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics (WASPAA)*. *IEEE*, 69–72.
14. Swedia, E. R., Mutiara, A. B., Subali, M., & Ernastuti. (2018). Deep Learning Long-Short Term Memory (LSTM) for Indonesian Speech Digit Recognition using LPC and MFCC Feature. *Third International Conference on Informatics and Computing (ICIC)*. Palembang. Indonesia, 1–5.
15. Bahmei, B., Birmingham, E., & Arzanpour, S. (2022). Cnn-rnn and data augmentation using deep convolutional generative adversarial network for environmental sound classification. *IEEE Signal Processing Letters*, 29, 682–686.
16. Gaussiannoise. Retrieved from: <https://hasty.ai/docs/mp-wiki/augmentations/gaussian-noise>
17. Salamon, J., Jacoby, C., & Bello, J. P. "UrbanSound8k Dataset". Urban Sound Datasets. Retrieved from: <https://urbansounddataset.weebly.com/urbansound8k.html>
18. Salamon, J., & Bello, J. P. (2017). "Deep Convolutional Neural Networks and Data Augmentation for Environmental Sound Classification", submitted. Retrieved from: <https://arxiv.org/pdf/1608.04363.pdf>

Одержано 13.10.2022

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).128-140](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).128-140)**В. В. Поліщук¹, М. Ю. Петранова², В. І. Повханич³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри програмного забезпечення систем,
доктор технічних наук

volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² Донецький національний університет імені Василя Стуса,
молодший науковий співробітник НДЧ,
кандидат фізико-математичних наук

m.petranova@donnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6359-1993>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант,

povkhanich.volodymyr@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0397-8015>

КОМПЛЕКСНА ГІБРИДНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДОЦІЛЬНОСТІ ФІНАНСУВАННЯ ПРОЄКТІВ

Гібридна математична комплексна модель спроможна адекватно визначити рівень доцільності фінансування проєкту, враховуючі цільові потреби інвесторів та висновки експертів, щодо можливості досягнення цілей для підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проєкту. Комплексна модель є складною системою функціонування, яка враховує різні фактори впливу, такі як: важливості ідеї проєкту щодо підвищення стійкості регіонів; ризик-орієнтовані фактори впливу, що потенційно призведуть на успішність реалізації проєкту; фактори людського впливу та команди реалізаторів проєкту. Також враховує цілі інвестора щодо потреби та доцільності фінансування проєктів. Модель базується на основі сучасної теорії інтелектуального аналізу знань, теорії нечітких множин, нейро-нечітких мереж та системному підході. На виході моделі маємо вихідну кількісну оцінку та лінгвістичне значення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проєкту з оцінкою достовірності.

Крім цього, вперше запропоновано модель агрегування вихідних даних для виведення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проєкту, що обумовлює: вихідну оцінку, лінгвістичне значення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проєкту та його оцінку достовірності. Модель легко адаптується для різних по величині грантових проєктів та конкурсів.

Сформульована гіпотеза у науковому дослідженні підтверджується достовірністю отриманих результатів. Проведене дослідження буде корисним інструментом для проєктних аналітиків в рамках запобігання неефективного фінансування проєктів та підтримання стійкості розвитку регіонів.

Ключові слова: гібридна модель, нейро-мережа, нечіткі множини, доцільність фінансування проєктів, стійкість регіонів, прийняття рішень.

1. Вступ. Представлене дослідження спрямоване на підтримку прийняття рішень щодо доцільності фінансування проєктів структурними фондами для стійкого розвитку регіонів. Політика структурних фондів передбачає зменшення розриву в розвитку між різними регіонами та країнами Європейського Союзу (ЄС), а також досягнення економічної та соціальної згуртованості. За рахунок структурних фондів ЄС є можливість для села, міста, регіону чи держави отримати кошти на модернізацію, розвиток та всіх процесів, що з цим пов'язано.

Поряд з тим, фінансування таких проектів для їх реалізації — це ризикова діяльність. Для мінімізації ризиків необхідно мати адекватні системи підтримки прийняття рішень оцінювання проектних заявок та всього процесу, що з цим пов'язаний.

Робота авторів щодо дослідження проблеми, використовуючи багатосторонній міждисциплінарний підхід, полягає в спробі створити комплексну гібридну математичну модель на основі нечіткої математики та нейро-мереж для підтримки процесів прийняття рішень оціночними комісіями на рівні держави та місцевого самоврядування, а також рішень для реалізації політики сталого розвитку, покращення управління містами та регіонами в контексті майбутньої реалізації Європейської зеленої угоди та концепції Європейської промисловості 5.0 у державах-членах. Вирішення проблеми також сприяє підтримці зусиль, спрямованих на те, щоб Україна стала повноправним членом Європейського Союзу в досягненні довгострокових стратегічних цілей і зобов'язань ЄС [1].

Завданням дослідження є кількісна та якісна оцінка змісту запропонованого рішення щодо доцільності фінансування проектів у контексті стійкості регіонів у рамках актуальних суспільних викликів.

Ключовим результатом статті є комплексний підхід оцінювання проектів щодо підвищення стійкості регіонів, для практичного використання оціночними комісіями та особами, які приймають рішення на державних та місцевих рівнях, а також у приватному секторі. Набуті знання та підходи можна передати на оцінку проектів за межами Європейського Союзу, а комплексна гібридна методологія вирішення проблеми дозволить повторити процедуру іншим науковцям та експертам/оцінювачам проектів, спрямованих на посилення стійкості регіонів.

З вище наведеного можемо сформулювати наукову гіпотезу даного дослідження наступним чином. Якщо проект підвищення стійкості регіонів, успішно реалізований, тоді можна стверджувати про високу оцінку доцільності фінансування проекту, отриману на основі побудованої комплексної гібридної математичної моделі, що враховує цільові потреби інвесторів та висновки експертів, щодо можливості досягнення цілей.

У відповідь на всі ці факти було вирішено зробити актуальне дослідження розроблення комплексної гібридної математичної моделі доцільності фінансування проектів щодо підвищення стійкості регіонів. Гібридна комплексна модель визначає рівень доцільності фінансування проекту, враховуючі цільові потреби інвесторів та висновки експертів, щодо можливості досягнення цілей для підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проекту. Гібридна комплексна модель зосереджується на неупередженому оцінюванні претендентів на гранди та підвищує безпеку їх фінансування.

Комплексна модель є складною системою функціонування, яка враховує різні фактори впливу, такі як: важливості ідеї проекту щодо підвищення стійкості регіонів; ризик-орієнтовані фактори впливу, що потенційно призведуть на успішність реалізації проекту; фактори людського впливу та команди реалізаторів проекту, їх досвід та знання у проблематиці стійкості регіонів. Також враховує цілі інвестора щодо потреби та доцільності фінансування проектів, а також експертного висновку щодо можливості досягнення мети підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проекту, за підтримки інвесто-

рів. Крім цього, для адекватної підтримки прийняття рішень та опрацювання відомостей отриманих від експертів, модель базується на основі сучасної теорії інтелектуального аналізу знань, теорії нечітких множин, нейро-нечітких мереж та системному підході.

2. Огляд літератури. Реалізація стратегічних планів підтримуватиметься різними грантовими схемами, за які дослідницькі та проектні групи змагатимуться на регіональному та місцевому рівнях. Багато держав-членів Організація економічного співробітництва і розвитку та ЄС прийняли інтегровані інвестиційні стратегії та інтегровані інвестиційні пакети, як інструмент реалізації, а також запровадили механізми для координації між секторальних державних інвестицій. Понад дві третини з них розробили інтегровану національну інвестиційну стратегію, наприклад: Стратегія розвитку Словаччини до 2030 року; Національний інвестиційний план Словацької Республіки. Однак міжгалузєва координація інвестиційного планування є серйозною проблемою на субнаціональному рівні. Відсутність міжгалузєвої координації є однією з шести основних проблем, визначених органами влади держав-членів ЄС, причому майже 80% вважають це основною проблемою [2]. На основі аналізу, представленого у Восьмому звіті ЄС про згуртованість, викладено основні зміни в територіальних нерівностях за останнє десятиліття та те, як політика вплинула на ці нерівності [3].

Емпіричні результати досліджень можуть сприяти підтримці екологічної та економічної політики в країнах ЄС для досягнення їх сталого розвитку та цілей Європейської зеленої угоди, а також стійкості малих і середніх підприємств [4–6]. У роботі [7] розглядається економічний і фінансовий аналіз доцільності водневої енергетики проектів у Китаї, щоб знайти для них відповідні рішення екологічного фінансування. У дослідженні [8] оцінюється причинно-наслідковий зв'язок між «зеленими» фінансами (GF) і сталим розвитком (SD) у глобальному масштабі за допомогою тесту причинно-наслідкових зв'язків Грейнджера. Комплексне дослідження [9] пропонує методологію багатофакторного моделювання інвестиційних потоків у регіональну «зелену» енергетику з урахуванням пріоритетів національних, регіональних та місцевих органів влади, в рамках концепції сталого розвитку. У роботі [10] досліджено вибір найкращих проектів у сфері відновлюваної енергетики з використанням гібридної системи прийняття рішень з екологічних, економічних, технічних і соціальних аспектів на субнаціональному рівні. Тим не менше, всі такі дослідження описують процедури аналізу та фактори, на які потрібно звертати увагу, не підкріплюючи це сучасним математичним інструментом.

Гібридні моделі поєднують кількісні та якісні методи. Вони використовуються в ситуаціях з високою невизначеністю або за відсутності повних кількісних даних про оцінюване явище/подію. Наприклад, у роботі [11] використано гібридний підхід до математичного моделювання управління інфекційними відходами. Наприклад найпоширеніші інструменти, що використовуються для гібридного моделювання ризиків: метод аналізу ієрархій [12], нечітка логіка [13] та кластерний аналіз [14]. Відомо багато алгоритмів нечіткого виведення, наприклад, Мамдані, Сугено, Цукамото, Ларсен та інші. Всі вони передбачають формування бази правил систем нечіткого виведення. Однак, не для всіх прикладних задач оцінювання ризику існує така можливість. Аналіз наукових

джерел, свідчить про необхідність систематизації засобів і розробки алгоритмів нейро-нечітких моделей для задач оцінювання компетентності різних спеціалістів. Тому необхідно розробляти математичний та гнучкий інструментарій для оцінювання ризиків чіткої предметної області.

Комплексна модель — це комплексна система функціонування, яка враховує різні чинники впливу, такі як важливість ідеї проекту для покращення стійкості регіонів; ризик-орієнтовані фактори впливу, які потенційно призводять до успіху проекту; факторів впливу людини та команди виконавців проекту, їх досвіду та знань у сфері сталого розвитку регіонів. Крім того, для адекватної підтримки прийняття рішень та обробки інформації, отриманої від експертів, модель базується на сучасній теорії інтелектуального аналізу знань [1], теорії нечітких множин, нейро-нечітких мереж і системному підході.

Наведене вище, аргументує та підтверджує актуальність дослідження: розробки комплексної гібридної математичної моделі доцільності фінансування проектів.

3. Матеріали та методи. Сьогодні спостерігаємо велику кількість інноваційних та стартап проектів, що дозволяють швидко розв'язувати різні проблеми в контексті сталого розвитку. Наприклад, впровадження таких проектів дозволяє ефективно та швидко зменшити негативний вплив сфери людської діяльності на навколишнє середовище, або підвищити здоров'я громадян. Нікому не є секрет, що стартап (інноваційні) проекти або грантові проекти дають швидкі та кращі рішення, ніж державні проекти, що зав'язані на складних бюрократичних діях та процедурах. Крім цього, в умовах надзвичайної ситуації виникають багато проблем, вирішення яких важливо-необхідне за критично короткий період часу. Доказом цього є робота муніципалітету/регіону/держави в умовах пандемії COVID-19.

Постає необхідність фінансування таких проектів для їх реалізації та впровадження на ринок. Фінансування інноваційних проектів — це ризикова діяльність. Для мінімізації ризиків необхідно мати адекватні системи підтримки прийняття рішень оцінювання самих проектів, команди, що реалізують проект та ризиків.

Запропонуємо комплексну гібридну математичну модель доцільності фінансування проектів щодо підвищення стійкості регіону. Модель буде враховувати цільові потреби інвесторів та висновки експертів, щодо можливості досягнення цілей таких, як підвищення стійкості регіону при реалізації проекту. Тому модель називається гібридною, оскільки з одного боку використовує дані про проект із проектною заявкою, що є структуровані, слабо структуровані чи не структуровані, а з іншого боку поєднує практичний досвід та знання експертів. Отриманий рівень, що є комплексним показником, підвищує ступень та гарантує безпеку фінансування таких проектів.

Оскільки наша задача є з області експертного оцінювання, тоді введемо наступні суб'єкти управління: експерти — особи, що аналізують та оцінюють проектну заявку; інвестори — це суб'єкти, що готові профінансувати оцінювані проекти; проектні аналітики — це особа, яка налаштовує весь процес оцінювання, враховуючи потреби інвесторів.

Нехай системну теоретико-множинну модель задачі оцінювання проектів

для запропонованої задачі, представимо наступним чином:

$$\{P, M_P, M_R, M_T, G_P, G_R, G_T, L, M_A | Y(f)\}. \quad (1)$$

Тут маємо: $P = (p_1; p_2; \dots; p_n)$ – множина проектів, що подаються на розгляд деяким експертам для фінансування інвесторами; M_P – нечітка модель оцінювання проекту, в контексті підвищення стійкості регіону реалізації проекту; M_R – нечітка модель оцінювання ризиків реалізації проекту; M_T – нечітка модель оцінювання компетенцій команди реалізаторів проекту; G_P – ціль важливості регіону, де буде реалізований проект; G_R – ціль прийнятних ризиків; G_T – ціль компетентності суб'єктів реалізації проекту; L – експертні висновки щодо можливості досягнення мети підвищення стійкості регіону, шляхом реалізацією даного проекту за підтримки інвесторів та врахування їх цілей; M_A – модель агрегування вихідних даних для виведення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту.

В результаті отримуємо вихідну оцінку $f = \mu_Y(f(\varphi_e))$ та рівень Y , що містить зміст доцільності фінансування проекту, враховуючі цільові потреби інвесторів G та висновки експертів L .

Етапи проектування комплексної гібридної математичної моделі представимо у розрізі наведених нечітких математичних моделей, для отримання оцінок проектів по різних інформаційних моделях, та моделі агрегування вихідних оцінок для визначення рівня фінансування проектів.

M_P – нечітка модель оцінювання проекту, в контексті підвищення стійкості регіону реалізації проекту.

Тут пропонуємо використати одну із розроблених вже авторами моделі, що на виході отримаємо нормоване значення $m_p \in [0; 1]$, окремо для множини проектів $P = (p_1; p_2; \dots; p_n)$, а саме: нечітка модель для кількісної оцінки екологічних стартап проектів у повітряному транспорті [15], модель оцінки стартапів в умовах інформаційної невизначеності [16].

В основу запропонованих нечітких моделей оцінювання досліджуваних проектів потрібно будувати інформаційні моделі вхідних даних, що спрямовані для оцінювання проектів підвищення стійкості регіонів. В якості таких інформаційних моделей та множин критеріїв можемо використати з [1].

M_R – нечітка модель оцінювання ризиків реалізації проекту.

Автором розроблено ряд нечітких моделей оцінювання ризиків реалізації проекту, як для інвестиційних так, і для інноваційних проектів, чи спрямованих на реалізацію грантових проектів [17–18]. На виході наведених підходів отримаємо нормоване значення $m_r \in [0; 1]$. Щодо питання оцінювання ризикорієнтованих факторів впливу на реалізацію проекту дуже складне. В залежності від проекту, регіону та етапів реалізації проекту потрібно набудувати різні показники ризиків. Є багато різних класифікаційних підходів щодо оцінювання ризиків, як для класичних, так і інноваційних та стартап проектів. Авторами не одноразово це питання піднімалося [19]. Більш обґрунтовано питання висвітлено у праці. Критерії, за допомогою яких експерт може оцінити ризики, що можуть бути при реалізації проектів для підвищення стійкості регіонів наведені у роботі [1].

M_T – нечітка модель оцінювання компетенцій команди реалізаторів проекту.

У якості нечіткої моделі оцінювання компетенцій команди реалізаторів проекту пропонуємо скористатися розробленою автором інформаційною моделлю оцінювання та виведення рейтингу команд розробників стартап проектів [15]. Дана модель базується на нейро-нечіткій мережі, коли існують експертні нечіткі дані по командах розробників. Модель не потребує багато обчислень, розкриває суб'єктивність експертних думок та виводить рейтинг команд розробників.

На виході отримаємо нормоване значення $m_t \in [0; 1]$.

Таким чином, на основі запропонованих підходів отримуються нормовані оцінки проектів $m_p(x_e)$, $m_r(x_e)$, $m_t(x_e)$, $e = \overline{1, n}$, відповідно до моделей оцінювання M_P , M_R , M_T . Не зменшуючи загальності, можна скористатися й іншими відомими моделями, методами та підходами, що дозволяють оцінити якість проекту, ризику реалізації його та команди розробників, причому для подальших обчислень запропонованою комплексною гібридною математичною моделлю вихідні оцінки повинні бути нормованими.

Особливістю комплексної гібридної математичної моделі є те, що інвестор має свої деякі цілі щодо потреби та можливості фінансування проектів. Такі цілі корелюються відповідно до моделей M_P , M_R , M_T . На основі досвіду авторів у предметній області, пропонуються наступні цілі:

G_P – ціль важливості регіону, де буде реалізований проект.

Тут пропонуємо використати деяку категоризацію регіонів, наприклад: регіони міжнародного значення (1 категорія); регіони загальнодержавного значення (2 категорія); регіони над регіонального значення (3 категорія); регіони з переважним значенням тільки на регіональному рівні (4 категорія).

G_R – ціль прийнятних ризиків представляє собою рівень ризику, що може собі інвестор дозволити інвестуючи у проект.

G_T – ціль компетентності суб'єктів реалізації проекту.

По кожному проекту отримаємо координати за цілями G_P , G_R , G_T , що представимо у вигляді: $(m_p(p_1), m_r(p_1), m_t(p_1))$, $(m_p(p_2), m_r(p_2), m_t(p_2))$, \dots , $(m_p(p_n), m_r(p_n), m_t(p_n))$.

Далі введемо в розгляд тривимірний вектор цілей інвесторів $T^* = (A_1, A_2, A_3)$, який враховує побажання інвесторів щодо значення альтернативних проектів згідно цілей G_P , G_R , G_T . Змоделюємо вектор цілей інвесторів наступним чином [1].

Нехай, аналізується об'єкт із 3 входами та одним виходом $U = (A_1, A_2, A_3)$, де U – вектор вихідної оцінки (u_1, u_2, u_3) , а його компоненти можуть мати із значень з інтервалу $[0; 1]$, а $A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1t})$, $A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2t})$, $A_3 = (a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3t})$ – вхідні лінгвістичні змінні.

Знання вектору цілей інвесторів $T = (t_1, t_2, t_3)$ отримується з бази нечітких знань, що складається з систем логічних висловлювань – “Якщо – Тоді, Інакше”, які пов'язують значення вхідних змінних A_1, A_2, A_3 з одним із можливих значень U :

Якщо $A_1 = a_{1t}$ та $A_2 = a_{2t}$ та $A_3 = a_{3t}$ Тоді $U = (u_1, u_2, u_3)$ Інакше . . .

Таким чином, інвестори задають лінгвістичне побажання вектору цілей, яке переводимо у вектор вихідної кількісної та нормованої оцінки (u_1, u_2, u_3) , яку позначимо відповідно $(u_1, u_2, u_3) = (t_1, t_2, t_3)$.

Нечітку базу знань для доцільності фінансування проектів пропонуємо наступним чином [1]:

ЯКЩО маємо цілі:

G_P – ціль важливості регіону, де буде реалізований проект:

a_{11} є 4 категорія регіону тоді $u_1 = 0,4$;

a_{12} є 3 категорія регіону тоді $u_1 = 0,6$;

a_{13} є 2 категорія регіону тоді $u_1 = 0,8$;

a_{14} є 1 категорія регіону тоді $u_1 = 1$.

ТА G_R – ціль прийнятних ризиків:

a_{21} високий ризик тоді $u_2 = 0,2$;

a_{22} середній ризик тоді $u_2 = 0,4$;

a_{23} низький ризик тоді $u_2 = 0,6$;

a_{24} дуже низький ризик тоді $u_2 = 0,8$;

a_{25} мінімальний ризик тоді $u_2 = 1$.

ТА G_T – ціль компетентності суб'єктів реалізації проекту:

a_{31} не цікавлять компетентності тоді $u_3 = 0,2$;

a_{32} можуть навіть бути низькі компетентності тоді $u_3 = 0,5$;

a_{33} цікавлять середні компетентності тоді $u_3 = 0,7$;

a_{34} потреба у найкращих компетенціях тоді $u_3 = 1$;

ТОДІ логічне висловлювання можемо сформулювати наступним чином:

Якщо інвестору потрібно важливість регіону, де буде реалізований проект A_1 , прийнятний ризик A_2 та компетентності суб'єктів реалізації проекту A_3 , тоді $U = (u_1, u_2, u_3)$.

Проектний аналітик може змінити кількісні рівні, або правила у цілях. Тому, база знань є відкрита, а кількість цілей при потребі можна збільшити.

По всіх проектах знаходимо величин $Z_e = (z_{pe}, z_{re}, z_{te})$, $e = \overline{1, n}$, що характеризують відносні оцінки близькості оцінюваних проектів до вектору цілей інвесторів за кожною окремою ціллю G_P , G_R , G_T , знімаючи питання різних шкал оцінювання [1]:

$$z_{pe} = 1 - \frac{|u_1 - m_p(p_e)|}{\max \left\{ u_1 - \min_e m_p(p_e); \max_e m_p(p_e) - u_1 \right\}}, \quad (2)$$

$$z_{re} = 1 - \frac{|u_2 - m_r(p_e)|}{\max \left\{ u_2 - \min_e m_r(p_e); \max_e m_r(p_e) - u_2 \right\}}, \quad (3)$$

$$z_{te} = 1 - \frac{|u_3 - m_t(p_e)|}{\max \left\{ u_3 - \min_e m_t(p_e); \max_e m_t(p_e) - u_3 \right\}}, \quad (4)$$

Якщо для оцінювання подано один проект, тоді інвестору не має потреби висловлювати щодо власних цілей і даний етап пропускаємо. Для знаходження вектору величин Z_e по проектах повинно бути мінімум два проекти.

Далі для агрегування величин Z_e пропонуємо використовувати моделювання невизначеностей виду «середнє значення» в трьох вимірному просторі, за допомогою конусоподібної функції належності у просторі оцінок $[0; 1]$. Причому, значення центру основи конуса буде одиничний вектор $(x_1^0; x_2^0; x_3^0) = (1; 1; 1)$, а експериментально отримано масштабування за координатами вектору Z_e буде $(3; 3; 3)$. Тоді, тривимірна конусоподібна функція належності буде задаватися

формулою [1]:

$$\varphi_e = \begin{cases} 1 - \vartheta_e, & \text{якщо } \vartheta_e < 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

де

$$\vartheta_e = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(z_{pe} - 1)^2 + (z_{re} - 1)^2 + (z_{te} - 1)^2}, \quad e = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Таким чином, отримаємо вихідні оцінки φ_e з інтервалу $[0; 1]$ по n проектах. Вектор цілей інвесторів забезпечує побудову ранжувального ряду альтернатив, заданих векторами оцінок, та підвищує безпеку вибору альтернативних варіантів згідно цільових потреб. Вихідна оцінка базується на оцінці важливості ідеї проекту, потенційні ризики реалізації проекту, компетенції команд розробників, та враховує цілі інвесторів щодо важливості регіону, де буде реалізований проект, прийнятність ризиків, компетентності суб'єктів реалізації проекту.

Далі, нехай експерти, що оцінюють проекти висловлюють висновки щодо можливості досягнення мети підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проекту за підтримки інвесторів та врахування їх цілей. Для такого висновку введемо лінгвістичну змінну $L = \{L_1; L_2; \dots; L_5\}$, де: L_1 – висока можливість реалізації проекту враховуючи цілі інвесторів; L_2 – можливість реалізації проекту враховуючи цілі інвесторів вище середнього; L_3 – середня можливість реалізації проекту враховуючи цілі інвесторів; L_4 – низька можливість реалізації проекту враховуючи цілі інвесторів; L_5 – дуже низька можливість реалізації проекту враховуючи цілі інвесторів.

Далі запропонуємо M_A – модель агрегування вихідних даних для виведення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту.

Для інтерпретації залежності вихідні оцінки φ_e та експертного висновку L щодо можливості досягнення мети підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проекту за підтримки цілей інвесторів, пропонуємо наступну функцію належності [1]:

$$f(\varphi_e) = \begin{cases} 0, & \varphi_e < 0; \\ (\varphi_e)^k, & 0 \leq \varphi_e < 1; \\ 1, & \varphi_e \geq 1. \end{cases} \quad e = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Де k – поріг можливості досягнення мети проекту за підтримки цілей інвесторів. Значення даного порогу змінюється в залежності експертного висновку L . Даний поріг можна отримати шляхом навчання на тестових даних проектів, маючи історію проектів та досліджуючи помилки першого та другого роду [19]. Помилки першого роду виникають у випадках, коли проект має хороші показники, отримує фінансування, а проект не реалізовується. Помилка другого роду виникає тоді, коли проект не отримує фінансування, але він реалізовується іншими коштами. Наприклад, експериментально поставимо: $k = \frac{2}{9}$ коли маємо експертний висновок L_1 ; $k = \frac{7}{9}$ коли маємо експертний висновок L_2 ; $k = \frac{4}{9}$ – експертний висновок L_3 ; $k = \frac{5}{9}$ – експертний висновок L_4 ; $k = \frac{3}{2}$ – експертний висновок L_5 .

Таким чином, ми отримали агреговані нормовані оцінки $f(\varphi_e)$, $e = \overline{1, n}$ з інтервалу $[0; 1]$, щодо моделей оцінювання проектів, цілей інвесторів та висновків експертів, що оцінюють проекти.

Рівні Y доцільності фінансування проекту враховуючі цільові потреби інвесторів та висновки експертів, представимо наступним чином:

- y_1 – дуже низький рівень доцільності фінансування проекту;
- y_2 – низький рівень доцільності фінансування проекту;
- y_3 – середній рівень доцільності фінансування проекту;
- y_4 – високий рівень доцільності фінансування проекту;
- y_5 – дуже високий рівень доцільності фінансування проекту.

Рівні прийняття рішень Y правильно розглядати за допомогою трикутних функцій належності. Це обумовлюється тим, що вони будуть мати перетини вихідних значень, а це дозволить розширити можливості прийняття рішень:

$$\mu_{y_1}(f(\varphi_e)) = \begin{cases} 1, & f(\varphi_e) \leq \delta - \frac{\delta}{2}; \\ \frac{3\delta - 4 \cdot f(\varphi_e)}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{2} < f(\varphi_e) \leq \delta - \frac{\delta}{4}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu_{y_2}(f(\varphi_e)) = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(\varphi_e) - 2\delta}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{2} < f(\varphi_e) \leq \delta - \frac{\delta}{4}; \\ \frac{4\delta - 4 \cdot f(\varphi_e)}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{4} < f(\varphi_e) \leq \delta. \end{cases} \quad (8)$$

$$\mu_{y_3}(f(\varphi_e)) = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(\varphi_e) - 3\delta}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{4} < f(\varphi_e) \leq \delta; \\ \frac{5\delta - 4 \cdot f(\varphi_e)}{\delta}, & \delta < f(\varphi_e) \leq \delta + \frac{\delta}{4}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\mu_{y_4}(f(\varphi_e)) = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(\varphi_e) - 4\delta}{\delta}, & \delta < f(\varphi_e) \leq \delta + \frac{\delta}{4}; \\ \frac{6\delta - 4 \cdot f(\varphi_e)}{\delta}, & \delta + \frac{\delta}{4} < f(\varphi_e) \leq \delta + \frac{\delta}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu_{y_5}(f(\varphi_e)) = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(\varphi_e) - 5\delta}{\delta}, & \delta + \frac{\delta}{4} < f(\varphi_e) \leq \delta + \frac{\delta}{2}; \\ 1, & f(\varphi_e) \geq \delta + \frac{\delta}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

В залежності від того, в який інтервал попадає значення $f(\varphi_e)$, вибираємо ту чи іншу функцію належності μ_y відносно ступеня δ . Ступінь δ належить з інтервалу $[0; 1]$ та налаштовується проектним аналітиком, причому при потребі його можна змінювати. Таке налаштування має переваги в тому, що модель легко адаптується для різних по величині грантових проектів та конкурсів, від студентських до багатомільйонних Н2020. Оскільки побудовані функції належності (7)–(11) мають перетини, то для оцінюваних проектів p_e , $e = \overline{1, n}$ отримаємо або один, або два рівні прийняття рішень Y і відповідно таку ж кількість для них достовірностей.

В результаті обчислення, отримаємо лінгвістичне значення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту Y та його оцінку достовірності. Тобто, достовірність того, що оцінка проекту належить до одного, або іншого рівня. Інвестори на основі вихідних даних приймають рішення щодо доцільності фінансування проектів для підвищення стійкості та здоров'я регіонів і міст, враховуючі цільові потреби інвесторів G та висновки експертів L . Якщо отримаємо ситуацію, що інвесторів не задовольняє жодне з рішень, тоді повертаємося до повторного оцінювання із залученням додаткових даних.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведено дослідження актуальної задачі розроблення комплексної гібридної математичної моделі доцільності фінансування проектів щодо підвищення стійкості регіонів. Гібридна комплексна модель спроможна адекватно визначити рівень доцільності фінансування проекту, враховуючі цільові потреби інвесторів та висновки

експертів, щодо можливості досягнення цілей для підвищення стійкості регіонів, шляхом реалізацією даного проекту. Для опрацювання експертної інформації та нечітких вхідних даних, використовується інтелектуальний аналіз знань на основі функцій належності оцінок за критеріями, однієї та багатьох змінних, з урахуванням будь-якого типу вхідних даних. Інтелектуальний аналіз знань дозволяє розкривати суб'єктивізм експертів та отримати кількісну оцінку неформалізованої прикладної задачі. Цінність моделі є те, що дозволяє отримувати комплексну кількісну оцінку проекту по вхідним описовим (текстовим) даним, які отримуються із проектної заявки. Для експерта процедура оцінювання залишається класичною та відомою, він досліджує проектну заявку, після цього по ряду питань висловлює свої судження щодо важливості ідеї та якості проекту. Після цього, дані опрацюються відповідними нечіткими та гібридними моделями, що розкривають суб'єктивізм експертів, а налаштування параметрів моделей та цільових потреб інвесторів унеможливають суб'єктивний вплив учасників процесу оцінювання на остаточний результат. На виході моделі маємо вихідну кількісну оцінку та лінгвістичне значення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту з оцінкою достовірності. Раціональність отриманої оцінки рівня доцільності фінансування проектів доводить переваги розробленої моделі.

При цьому, вперше запропоновано модель агрегування вихідних даних для виведення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту, що обумовлює: вихідну оцінку, лінгвістичне значення рівня прийняття рішень доцільності фінансування проекту та його оцінку достовірності. Модель легко адаптується для різних по величині грантових проектів та конкурсів.

Сформульована гіпотеза наукового дослідження підтверджується достовірністю отриманих результатів, що у свою чергу забезпечуються обґрунтованим використанням апарату нечітких множин, інтелектуального аналізу знань, нейро-мереж та системного підходу.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо у апробації дослідження на реальних даних проектів та конструюванні програмного забезпечення доцільності фінансування проектів щодо підвищення стійкості регіонів.

Список використаної літератури

1. Kelemen M., Gavurova B., Polishchuk V. A. Complex Hybrid Model for Evaluating Projects to Improve the Sustainability and Health of Regions and Cities. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2022. 19. 8217. P. 1–26. DOI: <https://doi.org/10.3390/ijerph19138217>
2. Example of an Integrated Project Package. 2020. URL: <http://mastripruty.sk/wp-content/uploads/2020/09/IntegProjektBalicky.pdf> (date of access: 19.09.2022).
3. Cohesion in Europe towards 2050: 8th Cohesion Report. 2022. URL: https://ec.europa.eu/regional_policy/en/information/publications/communications/2022/cohesion-in-europe-towards-2050-8th-cohesion-report (date of access: 19.09.2022).
4. Simionescu M., Strielkowski W., Gavurova B. Could quality of governance influence pollution? Evidence from the revised Environmental Kuznets Curve in Central and Eastern European countries. *Energy Reports*. 2022. 8. P. 809–819. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2021.12.031>.
5. Fidlerová H., Starecek A., Vranaková N., Bulut C., Keaney M. Sustainable Entrepreneurship for Business Opportunity Recognition: Analysis of an Awareness Questionnaire among Organisations. *Energies*. 2022. 15. 849. P. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15030849>
6. Virglerova Z., Ivanova E., Dvorsky J., Belas J., Krulický T. Selected factors of internationalisation and their impact on the SME perception of the market risk. *Oeconomia Copernicana*.

2021. 12(4). P. 1011–1032. DOI: <https://doi.org/10.24136/oc.2021.033>
7. Taghizadeh-Hesary F., Li Y., Rasoulinezhad E., Mortha A., Long Y., Lan Y., Zhang Z., Li N., Zhao X., Wang Y. Green finance and the economic feasibility of hydrogen projects. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2022. 47(58). P. 24511–24522.
 8. Wang K.-H., Zhao Y.-X., Jiang C.-F., Li Z.-Z. Does green finance inspire sustainable development? Evidence from a global perspective. *Economic Analysis and Policy*. 2022. 75. P. 412–426.
 9. Sotnyk I., Kurbatova T., Romaniuk Y., Prokopenko O., Gonchar V., Sayenko Y., Prause G., Sapiński A. Determining the Optimal Directions of Investment in Regional Renewable Energy Development. *Energies*. 2022. 15(10). 3646. P. 1–26. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15103646>
 10. Ramezanzade M., Karimi H., Almutairi K., Xuan H.A., Saebi J., Mostafaeipour A., Techato K. Implementing MCDM Techniques for Ranking Renewable Energy Projects under Fuzzy Environment: A Case Study. *Sustainability*. 2021. 13(22). 12858. P. 1–38. DOI: <https://doi.org/10.3390/su132212858>
 11. Valizadeh J., Aghdamigargari M., Jamali A., Aickelin U., Mohammadi S., Akbarzadeh Khorshidi H., Hafezalkotob A. A hybrid mathematical modelling approach for energy generation from hazardous waste during the COVID-19 pandemic. *Journal of Cleaner Production*. 2021. 315. 128157. P. 1–16.
 12. Xiang W., Li X., Ni H., Liu B. Micromechanical analysis of fiber-reinforced ceramic matrix composites by a hierarchical quadrature element method. *Composite Structures*. 2022. 300. 116143. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116143>
 13. Шаркаді М. М., Маляр М. М., Мазютинець Г. В. Нечітке моделювання показників фінансової безпеки підприємства. Вісник Ужгородського університету, серія «Математика і інформатика». 2020. 2(37). С. 176–183. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).176-183](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).176-183)
 14. Kondruk N. E., Malyar M. M. Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. P. 436–441. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
 15. Kelemen M., Polishchuk V., Gavurová B., Szabo S., Rozenberg R., Gera M., Kozuba J., Andoga R., Divoková A., Bliš'an P. Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2019. 16. 3585. P. 1–21. DOI: <https://doi.org/10.3390/ijerph16193585>
 16. Polishchuk V., Malyar M., Sharkadi M., Liakh I. Model of start-ups assessment under conditions of information uncertainty. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies, Mathematics and cybernetics – applied aspects*. 2016. 3/4(81). P. 43–49. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.71222>
 17. Polishchuk V., Kelemen M., Gavurová B., Varotsos C., Andoga R., Gera M., Christodoulakis J., Soušek R., Kozuba J., Bliš'an P., Szabo Jr. S. A Fuzzy Model of Risk Assessment for Environmental Start-up Projects in the Air Transport Sector. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 2019. 16. 3573. P. 1–19. DOI: <https://doi.org/10.3390/ijerph16193573>
 18. Маляр М. М., Поліщук В. В., Шаркаді М. М. Модель інформаційної технології оцінювання ризику фінансування проєктів. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2017. 2017/2. С. 44–52. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2017-2-5>
 19. Polishchuk V. Evaluation of start-up projects in conditions of risk and uncertainty. Uzhhorod: Publishing house "FOP Sabov AM 2021. 120 p.

Polishchuk V. V., Petranova M. Yu., Povkhanich V. I. Complex hybrid mathematical model of feasibility of financing project.

Research has been carried out on the urgent task of developing a complex hybrid mathematical model of the feasibility of financing projects to increase the stability of regions.

The hybrid mathematical complex model is able to adequately determine the level of feasibility of project financing, taking into account the target needs of investors and the conclusions of experts, regarding the possibility of achieving goals for increasing the stability of regions, through the implementation of this project. The complex model is a complex system of functioning that takes into account various influencing factors, such

as: the importance of the project idea to increase the stability of regions; risk-oriented influencing factors that will potentially lead to the success of project implementation; human influence factors and project implementation teams. It also takes into account the investor's goals regarding the need and feasibility of project financing. The model is based on the modern theory of intellectual analysis of knowledge, the theory of fuzzy sets, neuro-fuzzy networks and the system approach. At the output of the model, we have the initial quantitative assessment and the linguistic value of the decision-making level of the feasibility of financing the project with an assessment of reliability.

In addition, for the first time, a model of the aggregation of initial data was proposed to derive the level of decision-making on the feasibility of project financing, which determines: the initial assessment, the linguistic value of the level of decision-making on the feasibility of project financing, and its credibility assessment. The model is easily adapted for grant projects and competitions of different sizes.

The formulated hypothesis in scientific research is confirmed by the reliability of the results obtained. The conducted research will be a useful tool for project analysts in the framework of preventing ineffective financing of projects and maintaining the sustainability of regional development.

Keywords: hybrid model, neural network, fuzzy sets, feasibility of financing projects, sustainability of regions, decision-making.

References

1. Kelemen, M., Gavurova, B., & Polishchuk, V. (2022). A Complex Hybrid Model for Evaluating Projects to Improve the Sustainability and Health of Regions and Cities. *Int. J. Environ. Res. Public Health*, 19, 8217, 1–26. <https://doi.org/8217.10.3390/ijerph19138217>
2. Example of an Integrated Project Package. (2020). Retrieved from: <http://mastripruty.sk/wp-content/uploads/2020/09/IntegProjektBalicky.pdf>
3. Cohesion in Europe towards 2050: 8th Cohesion Report. (2022). Retrieved from: https://ec.europa.eu/regional_policy/en/information/publications/communications/2022/cohesion-in-europe-towards-2050-8th-cohesion-report
4. Simionescu, M., Strielkowski, W., & Gavurova, B. (2022). Could quality of governance influence pollution? Evidence from the revised Environmental Kuznets Curve in Central and Eastern European countries. *Energy Reports*, 8, 809–819. <https://doi.org/10.1016/j.egy.2021.12.031>
5. Fidlerová, H., Starecek, A., Vranaková, N., Bulut, C., & Keaney, M. (2022). Sustainable Entrepreneurship for Business Opportunity Recognition: Analysis of an Awareness Questionnaire among Organisations. *Energies*, 15, 849, 1–15. <https://doi.org/10.3390/en15030849>
6. Virglerova, Z., Ivanova, E., Dvorsky, J., Belas, J., & Krulický, T. (2021). Selected factors of internationalisation and their impact on the SME perception of the market risk. *Oeconomia Copernicana*, 12(4), 1011–1032. <https://doi.org/10.24136/oc.2021.033>
7. Taghizadeh-Hesary, F., Li, Y., Rasoulinezhad, E., Mortha, A., Long, Y., Lan, Y., Zhang, Z., Li, N., Zhao, X., & Wang, Y. (2022). Green finance and the economic feasibility of hydrogen projects. *International Journal of Hydrogen Energy*, 47(58), 24511–24522.
8. Wang, K.-H., Zhao, Y.-X., Jiang, C.-F., & Li, Z.-Z. (2022). Does green finance inspire sustainable development? Evidence from a global perspective. *Economic Analysis and Policy*, 75, 412–426.
9. Sotnyk, I., Kurbatova, T., Romaniuk, Y., Prokopenko, O., Gonchar, V., Sayenko, Y., Prause, G., & Sapiński, A. (2022). Determining the Optimal Directions of Investment in Regional Renewable Energy Development. *Energies*, 15(10), 3646, 1–26. <https://doi.org/10.3390/en15103646>
10. Ramezanzade, M., Karimi, H., Almutairi, K., Xuan, H. A., Saebi, J., Mostafaeipour, A., & Techato, K. (2021). Implementing MCDM Techniques for Ranking Renewable Energy Projects under Fuzzy Environment: A Case Study. *Sustainability*, 13(22), 12858, 1–38. <https://doi.org/10.3390/su132212858>
11. Valizadeh, J., Aghdamigargari, M., Jamali, A., Aickelin, U., Mohammadi, S., Akbarzadeh Khorshidi, H., & Hafezalkotob, A. (2021). A hybrid mathematical modelling approach for energy generation from hazardous waste during the COVID-19 pandemic. *Journal of Cleaner Production*, 315, 128157, 1–16.

12. Xiang, W., Li, X., Ni, H., & Liu, B. (2022). Micromechanical analysis of fiber-reinforced ceramic matrix composites by a hierarchical quadrature element method. *Composite Structures*, 300, 116143. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116143>.
13. Sharkadi, M., Malyar, M., & Mazyutynets, G. (2020). Fuzzy modeling of financial security indicators of the enterprise. *Bulletin of Uzhgorod University, series "Mathematics and Informatics"*, 2(37), 176–183. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).176-183](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).176-183) [in Ukrainian].
14. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (2021). Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybern. Syst. Anal.*, 57, 436–441. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
15. Kelemen, M., Polishchuk, V., Gavurová, B., Szabo, S., Rozenberg, R., Gera, M., Kozuba, J., Andoga, R., Divoková, A., & Bliš'an, P. (2019). Fuzzy Model for Quantitative Assessment of Environmental Start-up Projects in Air Transport. *Int. J. Environ. Res. Public Health*, 16, 3585, 1–21. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193585>
16. Polishchuk, V., Malyar, M., Sharkadi, M., & Liakh, I. (2016). Model of start-ups assessment under conditions of information uncertainty. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies, Mathematics and cybernetics – applied aspects.*, 3/4(81), 43–49. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.71222>
17. Polishchuk, V., Kelemen, M., Gavurová, B., Varotsos, C., Andoga, R., Gera, M., Christodoulakis, J., Soušek, R., Kozuba, J., Bliš'an, P., & Szabo, Jr. S. (2019). A Fuzzy Model of Risk Assessment for Environmental Start-up Projects in the Air Transport Sector. *Int. J. Environ. Res. Public Health*, 16, 3573, 1–19. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193573>
18. Polishchuk, V. V., Malyar, M. M., & Sharkadi, M. M. (2017). Model informatsiynoyi tekhnolohiyi otsinyuvannya ryzyku finansuvannya proektiv. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2017/2, 44–52. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2017-2-5> [in Ukrainian].
19. Polishchuk, V. (2021). Evaluation of start-up projects in conditions of risk and uncertainty. *Uzhhorod: Publishing house "FOP Sabov AM"*.

Одержано 05.10.2022

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).141-150](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).141-150)**М. В. Роботишин¹, М. М. Маляр²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,
mykola.robotyshyn@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6567-6974>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук
mykola.malyar@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

АНАЛІЗ ДЕЯКИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РОЗПІЗНАВАННЯ ДЕФЕКТІВ НА ЗОБРАЖЕННЯХ

Задача розпізнавання дефектів користується широкою популярністю, особливо її застосування на індустріальних заводах, де об'єкти виготовляються десятками тисячами на день та можуть містити дефекти. Об'єкти з дефектами потрібно відділити від загальної маси об'єктів, для того щоб фінальний споживач отримав як найякісніший товар. Але перш ніж відділити дефектні об'єкти, їх потрібно знайти, отже розпізнати.

У даній роботі проаналізовано найпопулярніші методи для розв'язання задачі розпізнавання дефектів, коли вхідні дані є зображення. Розглянуто застосування як існуючих автоматизованих рішень, так і застосування методів на основі згорткових нейромереж, а саме нейронні мережі сегментації та детекції, які користуються широкою популярністю наразі. Проведено огляд даних методів та зроблено порівняльний аналіз різних класів методів на основі таких факторів як: вимоги до вхідних даних та вимоги до обчислювальних потужностей.

Ключові слова: задача розпізнавання дефектів, конволюційні нейромережі, моделі сегментації та детекції.

1. Вступ. Керування великим бізнесом неможливо уявити без автоматизації. Найчастіше автоматизацію необхідно впроваджувати в процеси, які повторюються з високою частотою та є сталими з точки зору схильностей до критичних змін. До таких процесів можна віднести — процес виготовлення об'єктів на індустріальному виробництві. Зазвичай даний процес складається з багатьох підпроцесів і один з них — це інспекція об'єкта на наявність дефектів та подальше сортування у разі виявлення одного чи декількох дефектів.

Процес інспекції об'єкта на наявність дефектів може бути зроблений ручним/мануальним або автоматизованим способами. Очевидно, що ручний спосіб є обмежений, оскільки вимагає велику кількість задіяних людей та їх домену експертизу для виявлення дефектів. В основі автоматизованих способів лежать інтелектуальні методи аналізу зображень, отриманих з камер. Враховуючи сучасний розвиток камер зробити знімок, на якому буде чітко видно дефекти є цілком реальною задачею. З часом кожне велике підприємство набуває стану коли кількість об'єктів, що вони виготовляють є непосильне для ручного способу інспекції. З іншої сторони впровадження автоматичного способу не є тривіальним та вимагає відповіді на багато запитань:

- Яку технологію (методи) вибрати для розпізнавання дефектів?
- Наскільки якісно технологія буде відділяти дефектні об'єкти?

- Як її інтегрувати у виробництво?
- Як її підтримувати надалі?

Цей перелік можна продовжувати далі, однак так чи інакше відповіді залежать від ключового питання, а саме: “які методи чи групу методів обрати для аналізу зображень на предмет виявлення одного чи декількох дефектів на об’єкті?”. Найбільшою популярністю наразі користуються методи аналізу зображень на основі штучного інтелекту в основі яких лежать нейронні мережі, що можуть навчатися певної логіки на тренувальному промаркованому наборі даних. За допомогою них можна побудувати технологію виявлення дефектів, яка в перспективі дозволить автоматизувати процес інспекції.

Про актуальність даної проблеми найкраще свідчить те, скільки коштів бізнес готовий вкладати в її дослідження. Отже, згідно [1] ринок автоматизованих систем виявлення дефектів на основі методів нейронних мереж зростає до 5 млрд дол. в 2025 році. Популярні сфери застосування наступні: виявлення дефектів на інтегральних схемах, материнських платах, зарядних електробатарей, виявлення тріщин на металевих пластинах, мобільних екранах, порізи на хутряних виробках, подряпини на дерев’яних матеріалах, дефекти в бамбукових/очеретяних трубках і т.д. ... Головні недоліки в мануальних системах виявлення дефектів наведено в дослідженні McKinsey & Company [2]. Основні з них це: помилка при ручній перевірці об’єкта людиною коливається в межах 20-30% (зазвичай спричинена такими факторами як втома та неухважність) та обмеження в максимально можливій кількості об’єктів, що можуть бути перевірені за одиницю часу. В той же час більше 60% респондентів сказали, що після застосування автоматизованих систем вони змогли покращити точність розпізнавання дефектів та проблеми з масштабуванням. Згідно цього ж дослідження більше 50% інвесторів оптимістично ставляться до вкладання коштів в дослідження можливості застосувати такі системи у себе на виробництві. Також тільки 15% респондентів вважають за краще купити off-the-shelf технології, що демонструє необхідність працювати над розробкою таких систем з нуля на відміну від використання вже існуючих рішень таких як Omron, Cogniac, ZEISS.

Важливо відмітити, що аналіз методів у даній роботі проводиться з припущенням, що дані методи будуть застосовані до такого типу дефектів як: візуальні дефекти на поверхні площини об’єкта. Тобто, дефекти можуть бути виявлені людським оком, без потреби в дотику до самого об’єкта.

У даній роботі проаналізовано найпопулярніші методи для задачі розпізнавання дефектів на основі зображень. Аналіз зосереджено на методах на основі глибокого навчання нейронних мереж. На думку авторів, за допомогою останніх можна побудувати технологію виявлення дефектів, яка в перспективі дозволить автоматизувати процес інспекції та покращити ключові, наведені вище, недоліки, що існують в мануальних системах.

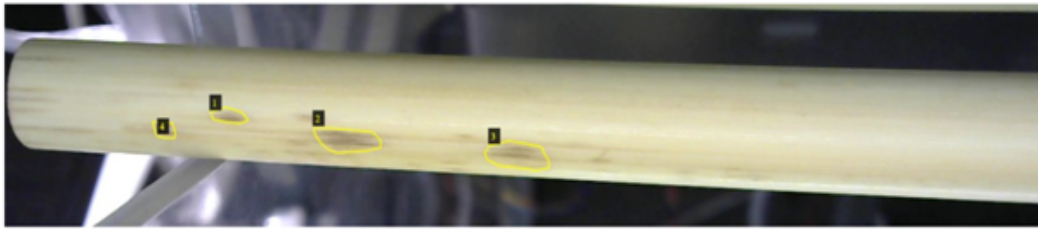
2. Класи можливих методів виявлення дефектів. Методи для розв’язання задачі розпізнавання дефектів базуються на інтелектуальному аналізі вхідних зображень. Більш загальна назва — це методи комп’ютерного зору (computer vision). Дана дисципліна пройшла довгий шлях, починаючи від традиційних методів комп’ютерного зору до методів сьогодення, що використовують процес глибокого навчання згорткових нейронних мереж. Існує багато різних методів та їх класів, але дана стаття сфокусована на аналізі методів

глибокого навчання, таких як: нейромережі сегментації та детекції об'єктів. А також їх порівняння з традиційними алгоритмами в контексті вимог до вхідних даних, щоб застосувати алгоритм та обчислювальних потужностей, необхідних для проведення процесу навчання та аналізу зображень.

Процес навчання нейромережі, архітектура якої складається з багатьох шарів, де кожний шар містить ряд операцій з згортковими фільтрами, за допомогою алгоритму *back-propagation* набув терміну *глибинне навчання* (*deep learning*). Застосування глибокого навчання для аналізу зображень — це одна з найпопулярніших та найперспективніших сфер застосування нейронних мереж. Детальний аналіз становлення та розвитку цієї сфери, а також огляд всіх існуючих методів разом з означеннями найбільш фундаментальних понять викладено в [3,4,5,6]. Для задачі розпізнавання дефектів найбільш підходящими методами є: сегментаційні та детекційні нейромережі (*segmentation and detection neural networks*). Одна з основних причин полягає в тому, що для задачі визначення дефектів необхідно не просто сказати, що “зображення об'єкту A містить дефект”, а потрібно також вказати де саме на зображенні є дефектна зона.

3. Вхідні та вихідні дані. Нейромережі (моделі) сегментації та детекції мають багато спільного. Для того щоб навчити їх потрібно тренувальний набір даних. Один об'єкт тренувального набору даних складається з вхідного зображення та промаркованого дефектного регіону. Для задачі сегментації дефектний регіон може бути представлений у вигляді матриці розмірність якої співпадає з вхідним зображенням. Кожний елемент матриці може набувати значень із діапазону $[0, k]$, де $k \in Z$ — кількість можливих класів дефектів. Якщо елемент матриці має значення 0 — регіон не дефектний, а якщо значення дорівнює в межах $[0, k]$, то регіон має дефект відповідного класу. Тобто, моделі сегментації вимагають наявності промаркованих даних на рівні кожного пікселя, що є одночасно і перевагою і недоліком. Перевага в тому, що дефекти промарковані на найбільш детальному рівні — пікселю, що дає найповнішу інформацію про дефектну зону зображення. Очевидний недолік — це кількість затраченого часу, який необхідно для маркування кожного зображення. З точки зору необхідних вхідних даних, нейромережі детекції відрізняються тим, що достатньо промаркувати регіон у вигляді прямокутника (*bounding box*), що з одної сторони є швидшим процесом, але з іншої втрачається певна інформація, оскільки в прямокутнику можуть міститися як дефектні так і не дефектні пікселі. Для задачі детекції приклад вхідних даних відрізняється від сегментації тим, що нам не потрібно вказувати всю матрицю, а потрібно надати тільки інформацію, де розташований об'єкт (дефектна зона) у форматі $[x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}, p]$, де перші 4 елементи — це координати прямокутника, який визначає дефектний регіон, p — індекс відповідного дефектного класу. Кількість зон довільна, тобто зображення як може взагалі не містити дефектної зони, так і містити декілька.

Приклад вхідних даних для нейромереж сегментації та детекції зображено на рис. 1. Всі пікселі, які всередині жовтого регіону є дефектними. На основі даного промаркованого зображення легко створити необхідну вхідну промарковану матрицю, про яку описано вище. Також варто відмітити, що теоретично сегментаційний підхід буде працювати навіть якщо дані будуть промарковані у форматі для моделей детекції. Але якість роботи моделі у такому випадку



а. Дефектні зони промарковані полігоном на максимально наближеному рівні до пікселю



б. Одна дефектна зона, яка промарковані одним прямокутником (bounding box)

Рис. 1. Приклад маркування дефектних зон для сегментації (а) та детекції (б).

може викликати запитання та потребує детального аналізу. Зазвичай, тренувальний набір даних повинний складатися з декількох сотень екземплярів, де один екземпляр — це вхідне зображення разом з матрицею дефектних регіонів.

Вихідні дані, тобто результати роботи сегментаційної моделі — це ймовірність пікселя набути значення одного чи іншого класу. Математично, якщо у нас є k класів, то результатом буде k матриць, де кожна матриця відповідає за один клас. Відповідно значення кожного пікселя можна представити у вигляді масиву ймовірностей $[p_0, p_1, p_2, \dots, p_k]$, які сумарно повинні дорівнювати 1. Тобто, якщо для кожного пікселя ми візьмемо максимальне значення ймовірностей класів і запишемо відповідний індекс класу у матрицю, то отримаємо таку саму матрицю, як і вхідна матриця дефектів. Тільки тепер кожний піксель — це клас дефекту, визначений алгоритмічно, а не за допомогою ручної розмітки людиною. Таку вихідну матрицю класів прийнято називати “маскою”. Для моделей детекції результати зображені у вигляді масиву $[x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max}, cl, p]$, де перші 4 елементи — це координати прямокутника (bounding box), який визначає дефектний регіон, cl — індекс відповідного класу з ймовірністю p .

Обидва підходи в результаті видають не просто клас об’єкта, а і його ймовірність, що дозволяє знайти оптимальний поріг (threshold) ймовірності. За допомогою нього, можна маніпулювати результатами та пристосувати їх краще до своєї доменної задачі. Наприклад, якщо ціна помилки дуже висока, то ми можемо встановити поріг ймовірності в 90% і казати, що дефектна зона є справді дефектною тільки тоді коли ймовірність $\geq threshold$ величини.

4. Огляд найпопулярніших нейромереж сегментації та детекції. Важливо відмітити, що незважаючи на схожість необхідних вхідних даних, самі нейромережі сегментації та детекції є різними з точки зору архітектури (кількість шарів та згорткових фільтрів, активуючі функції ...) та процесу навчання. В основі моделей детекції об’єкта відбувається процес обробки зображення на рівні координат об’єкта, тобто, на рівні bounding box. В той час як в сегмен-

таційних моделей даний процес є на більш деталізованому рівні — пікселю.

Довгий час найпопулярнішими нейронними мережами детекції були методи сімейства R-CNN (Region Based Convolutional Neural Network): R-CNN, Fast R-CNN, Faster R-CNN. Головна ідея полягала в тому, що генерувалися певні регіони (прямокутники) зображення, так-звані, “кандидати” за допомогою методу кластеризації *selective search*. Потім ці кандидати за допомогою типової CNN порівнювалися з промаркованими вхідними даними на схожість. Найбільш схожі об’єкти і були результатом роботи нейромережі. Тобто, процес складався з двох ключових кроків: генерація кандидатів та їх аналіз з метою вибрати найбільш схожі до об’єктів, які ми шукаємо на зображенні. Еволюція цих методів полягала спочатку в оптимізації кількості кандидатів для пришвидшення обчислень (в першій версії R-CNN було 2000 кандидатів), а далі в заміні методу *selective search* на окрему CNN для більш якісної генерації кандидатів, що й було досягнуто в версії Faster R-CNN. Очевидно є два головні недоліки даних методів: повільна швидкість детекції (оскільки потрібно проаналізувати кожний згенерований регіон) та власне сам факт, що, якщо на першому кроці не буде згенеровано точного кандидата, подальший процес порівняння втрачає сенс. Модифікованою версією даних методів є метод YOLO (You Only Look Once) — що дослівно означає “ти дивишся тільки один раз” з відсилкою до попередніх методів, які мали дві окремі нейромережі для генерації кандидатів та їх подальший аналіз. Даний метод робить все в одному кроці і генерує об’єкти і аналізує їх, що безперечно дає йому перевагу в швидкості. Так само як і попередні методи, даний метод еволюціонує з часом, на момент написання статті вже існує версія *yolov7*, тобто сьома модифікація алгоритму. Звичайно, найбільш повну інформацію про дані нейромережі можна отримати в загальновідомих оригінальних статтях. Також в [7] наведено додатковий аналіз даних методів та візуалізація їх архітектур, що дає краще розуміння, як вони працюють.

На відміну від попередніх методів, методи сегментації важко розділити на окремі загальні класи. Що можна стверджувати, це те, що існує два типи сегментації: *instance* та *semantic*. Різниця між ними наступна: якщо ми знайшли декілька дефектів класу A і не розрізняємо їх між собою (тобто, нам достатньо знати їх клас), то це є *semantic segmentation*. А якщо нам потрібно ще розрізняти їх між собою, типу дефект класу A (1), дефект класу A (2), ... — *instance segmentation*. На практиці, однозначно *semantic* є більш вживаною, тому що зазвичай нам не потрібно розрізняти між собою дефекти одного класу, нам достатньо сказати, що вони належать до цього класу. А чи різні вони між собою чи ні — це не обов’язково. Так чи інакше всі методи сегментації в *deep learning* пов’язані з згортковими нейронними мережами. Одним із найпопулярніших методів є U-Net. Дана модель вперше застосовувалася для задачі знаходження ракових пухлин на основі зображень легенів та мозку. Її U-подібна архітектура спочатку зменшує розмірність вхідного зображення (*down-sampling*) за допомогою конволюційних (згорткових) фільтрів та знаходить регіони зображення (*feature map*), що містять найважливішу інформацію. Далі відбувається процедура *up-sampling*, тобто повернення до оригінальних розмірів зображення. Особливість архітектури в тому, що є взаємодія між кожним шаром *down* та *up* семплінгу, що дозволяє повернути зображення до оригінального вигляду без втрати будь-якої інформації, ще й плюс до того зберегти інформацію, знайдену

при процедурі down-sampling, тобто у нашому випадку дефектну зону. Існує ряд інших методів, таких як: DeepLab, FPN, LinkNet та інші. Детальний огляд даних методів наведено в [8].

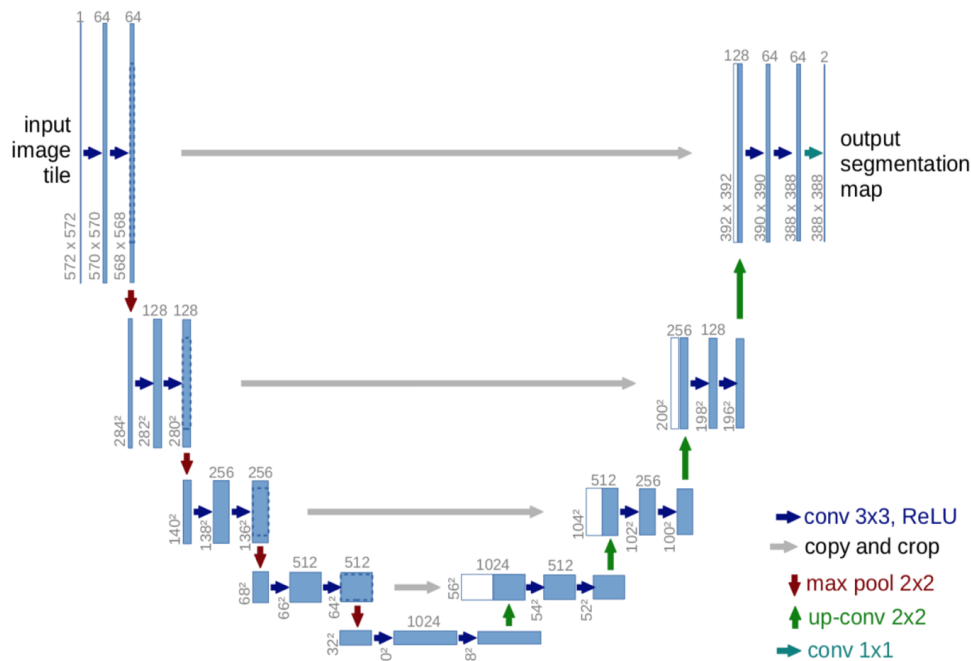


Рис. 2. U-подібна архітектура сегментаційної моделі U-Net.

Одним із популярних напрямків розвитку моделей сегментації та детекції є комбіновані моделі, які дозволяють представити фінальний результат одночасно як за допомогою сегментаційної маски так і за допомогою регіону (bounding box) об'єкта. А далі в залежності від рівня деталізації можна використовувати один чи інший вид представлення результатів. Найвідоміші комбіновані архітектури це: Mask R-CNN та yolov7. Також інший тренд розвитку даних методів полягає в застосуванні ідеї трансформерів (transformers) [9], що набули широкої популярності в методах обробки природньої мови та активно наразі застосовуються для задач обробки зображень.

Всі методи, що наведені в даному розділі є відносно новими. Найстаріший з них — це метод детекції R-CNN (2014 р.), а найновіший — yolov7 (2022 р.). Очевидно, що дана сфера еволюціонує дуже швидко, з'являються нові модифікації існуючих алгоритмів. На думку авторів, глобальний тренд розвитку даних підходів полягає в оптимізації швидкості роботи для ефективного їх застосування на мобільних пристроях та різних контролерах, що можуть бути вбудовані безпосередньо в камеру чи інші механізми. Також варто відзначити, що не можна сказати що одна нейронна мережа є суттєво краща чи гірша за іншу. В основному все більше залежить від якості та кількості необхідних промаркованих вхідних даних, ніж вибір самої архітектури.

5. Порівняльний аналіз різних методів з точки зору практичного застосування. Головною метою даного розділу є порівняльний аналіз мето-

дів глибинного навчання (deep learning), традиційних методів комп'ютерного зору та існуючих автоматизованих рішень для розв'язання задачі розпізнавання дефектів. З точки зору практичного застосування головними критеріями порівняння є вимоги до вхідних даних, необхідні обчислювальні потужності та орієнтовний рівень точності розпізнавання.

Під традиційними методами комп'ютерного зору будемо мати на увазі наступні методи: методи порогування (thresholding), методи виявлення контурів (edge detection), методи розростання областей, методи засновані на диференціальних рівняннях з частинними похідними та інші [10]. Дані методи відрізняються від нейронних мереж, про які описано в попередньому розділі, тим, що:

1. З точки зору вхідних даних для їх роботи не потрібно наявності промаркованих зображень.
2. З точки зору архітектури моделей, в їх роботі не використовується процес навчання на помилках (back-propagation).
3. З точки зору обчислювальних потужностей, для їх роботи не потрібно відеокарту чи великі потужності.

Під автоматизованими рішеннями будемо мати на увазі рішення, що інтегровані в камеру, не вимагають додаткового комп'ютера для проведення обчислень та дозволяють зробити певні налаштування під доменну задачу. Приклади таких систем для розв'язання задачі розпізнавання дефектів наступні: Omron, Cogniac, ZEISS, EPIC та інші.

В таблиці Табл. 1 наведено порівняльний аналіз різних методів розв'язання задачі розпізнавання дефектів з точки зору необхідних вхідних даних, в Табл. 2 з точки зору необхідних обчислювальних потужностей та архітектури, в Табл. 3 з точки зору затраченого часу та коштів на побудову технології виявлення дефектів.

Таблиця 1.

Порівняльний аналіз вхідних даних

Назва метода	Промарковані вхідні дані	К-сть зображень
Методи глибинного навчання	Так	100+
Традиційні методи	Ні	декілька
Автоматизовані рішення	Ні	декілька

На основі даного аналізу можна зробити порівняння алгоритмів з різної сторони. Метою не є сказати, що краще, а що гірше — тому що це дуже складно визначити і в основній мірі залежить від типу об'єкта з дефектами та складності самих дефектів. Методи глибинного навчання відрізняються від традиційних в тому, що для них потрібно промарковані вхідні дані та обчислювальні потужності. Звичайно, їх точність може бути суттєво вищою, особливо у випадках, коли дефекти є різноманітні та складні для виявлення. Але існують задачі, коли дефекти є очевидні, прості, однакові і для них достатньо застосувати традиційні методи. Альтернативним варіантом до традиційних методів, є автоматизовані

Таблиця 2.

Порівняльний аналіз обчислювальних потужностей та архітектури

Назва метода	Відеокарта для обчислень	Алгоритм навчання
Методи глибинного навчання	Так	Backpropagation
Традиційні методи	Ні	відсутній
Автоматизовані рішення	Ні/Так	ручна корекція

Таблиця 3.

Порівняльний аналіз часу та коштів для впровадження

Назва метода	Швидкість розробки	Кількість коштів
Методи глибинного навчання	Повільно	Середній рівень
Традиційні методи	Швидко	Низький рівень
Автоматизовані рішення	Не вимагає розробки	Високий рівень

рішення. Це і є по факту ті ж алгоритми, але вже з імплементацією та готовністю бути інтегрованим в виробництво. Такі системи є дуже різними, деякі з них навіть застосовують процес перенавчання системи (для покращення точності розпізнавання) за допомогою ручної корекції. Відповідно не потрібно витратити час на побудову технології з нуля, але скоріше за все це коштуватиме значно дорожче. І найголовніше, це дуже ризиковано, тому що незрозуміло як якісно дана система буде працювати на нових, небачених до цього, об'єктах.

Для розв'язання задачі розпізнавання дефектів першим кроком є зрозуміти складність визначення дефекту. Зазвичай, для початку проводиться ручний огляд, який дає відповідь на питання: "Чи можливо визначити дефект людським оком?". Якщо так, то далі потрібно правильно розмістити камеру та почати збирати зображення з дефектними об'єктами. Часто розпочинають розв'язок задачі використовуючи традиційні методи комп'ютерного зору. Це дозволяє встановити мінімальний поріг результату (baseline) з яким надалі будуть порівнюватися методи глибинного навчання. Коли дефектна область є складна та різноманітна однозначно методи глибинного навчання принесуть найкращий результат. В таблиці наведено необхідну кількість зображень в 100+ для тренування першої ітерації алгоритму використовуючи техніку transfer learning — коли ми беремо вже наперед натреновану нейронну мережу та модифікуємо її для нашого набору даних, тобто до нашої задачі. Детальний огляд як побудувати з нуля технологію визначення дефектів на основі методів глибинного навчання наведено в [11].

6. Висновок. У роботі проведено огляд методів глибинного навчання, а саме нейронних мереж сегментації та детекції. Розглянуто приклад вхідних даних та способи їх маркування. Проведено різносторонній порівняльний аналіз наступних класів методів: методи глибинного навчання сегментації та детекції,

традиційні методи комп'ютерного зору та автоматизовані рішення. Наведено аналіз ринку задачі виявлення дефектів за допомогою інтелектуальних методів аналізу зображення.

Список використаної літератури

1. Defect detection market report. URL: <https://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/defect-detection-market-124751233.html> (date of access: 25.09.2022).
2. Machine Vision Survey. URL: <https://landing.ai/wp-content/uploads/2020/11/MachineVisionSurvey.pdf> (date of access: 25.09.2022).
3. Voulodimos A., Doulamis N., Doulamis A., Protopapadakis E. Deep Learning for Computer Vision: A Brief Review. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/7068349>
4. Sinha R., Pandey R., Pattnaik R. Deep Learning For Computer Vision Tasks: A review. *International Conference on Intelligent Computing and Control*. 2018.
5. Dargan S., Kumar M., Аyyagari M. R., Kumar G. A survey of deep learning and its applications: a new paradigm to machine learning. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2020. Vol. 27. No. 4. P. 1071–1092.
6. Шаркаді М. М., Роботишин М. В., Мальяр М. М. Моделі і методи машинного навчання для завдань передбачення. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Т. 1. № 36. С. 112–122. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).112-122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).112-122)
7. Deep learning architectures. URL: <https://programmatically.com/deep-learning-architectures-for-object-detection-yolo-vs-ssd-vs-rcnn/> (date of access: 21.09.2022).
8. Semantic image segmentation. URL: <https://nanonets.com/blog/semantic-image-segmentation-2020/> (date of access: 31.09.2022).
9. Transformers in computer vision. URL: <https://www.edge-ai-vision.com/2022/05/transformers-in-computer-vision/> (date of access: 31.09.2022).
10. Skoryk A., Chyrka Y., Gorovyi I., Grechnyev O., Vyplavin P. Comparative Analysis of Classic Computer Vision Methods and Deep Convolutional Neural Networks for Floor Segmentation, *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. 2020. P. 217–221. DOI: <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204339>
11. Robotyshyn M., Sharkadi M., Malyar M. Surface defect detection based on deep learning approach. *International Scientific Symposium «Intelligent Solutions»*. 2021. P. 32–44 .

Robotyshyn M. V., Malyar M. M. Analysis of some methods for solving the problem of detecting defect in images.

The problem of defect detection is widely popular, especially its application in industrial plants, where objects are produced in tens of thousands per day and can create defects. Objects with defects must be separated from the total mass of objects in order for the final consumer to receive the largest product. But before separating defective objects, they need to be found, therefore recognized.

This paper analyzes the most popular methods for solving the problem of defect detection when the input data is an image. The use of both existing automated solutions and the use of methods based on convolutional neural networks, namely neural networks of segmentation and detection, which are currently widely popular, are considered. A review of these methods was conducted and a comparative analysis of different classes of methods was made based on such factors as: requirements for input data and requirements for computing power.

Keywords: Surface Defect Detection, Convolutional Neural Networks, Semantic Segmentation and Object Detection.

References

1. Defect detection market report. Retrieved from: <https://www.marketsandmarkets.com/Market-Reports/defect-detection-market-124751233.html>
2. Machine Vision Survey. Retrieved from: <https://landing.ai/wp-content/uploads/2020/11/MachineVisionSurvey.pdf>
3. Voulodimos, A., Doulamis, N., Doulamis, A., & Protopapadakis, E. (2018). Deep Learning for Computer Vision: A Brief Review. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 1–13. <https://doi.org/10.1155/2018/7068349>
4. Sinha, R., Pandey, R., & Pattnaik, R. (2018). Deep Learning For Computer Vision Tasks: A review. *International Conference on Intelligent Computing and Control*.
5. Dargan, S., Kumar, M., Ayyagari, M. R., & Kumar, G. (2020). A survey of deep learning and its applications: a new paradigm to machine learning. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27(4), 1071–1092.
6. Sharkadi, M., Robotyshyn, M., & Malyar, M. (2020). Machine Learning Models and Methods for forecasting problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series Of Mathematics and Informatics*, 1(36), 112–122. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).112-122](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).112-122) [in Ukrainian].
7. Deep learning architectures. Retrieved from: <https://programmatically.com/deep-learning-architectures-for-object-detection-yolo-vs-ssd-vs-rcnn/>
8. Semantic image segmentation. Retrieved from: <https://nanonets.com/blog/semantic-image-segmentation-2020/>
9. Transformers in computer vision. Retrieved from: <https://www.edge-ai-vision.com/2022/05/transformers-in-computer-vision/>
10. Skoryk, A., Chyrka, Y., Gorovyi, I., Grechnyev, O., & Vyplavin, P. (2020). Comparative Analysis of Classic Computer Vision Methods and Deep Convolutional Neural Networks for Floor Segmentation, *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*, 217–221. <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204339>.
11. Robotyshyn, M., Sharkadi, M., & Malyar, M. (2021). Surface defect detection based on deep learning approach. *International Scientific Symposium «Intelligent Solutions»*, 32–44.

Одержано 15.10.2022

С. В. Сальник

Інститут спеціального зв'язку та захисту інформації Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",

Провідний науковий співробітник науково-організаційного відділу науково-дослідного центру,

Кандидат технічних наук

sergey-v-s@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4463-5705>

МЕТОД МОНІТОРИНГУ СТАНУ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ПОТОКАМИ ДАНИХ В МОБІЛЬНИХ РАДІОМЕРЕЖАХ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

В статті розроблено метод моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах з використанням нейронних мереж способом удосконалення існуючого методу. Забезпечення ефективного управління мобільних радіомереж в умовах частої зміни обстановки можливе лише за наявності вузлової системи управління, здатної проводити моніторинг стану функціонування підсистеми управління потоками даних. Суть нового методу: полягає в удосконаленні існуючого методу шляхом моніторингу стану функціонування мобільних радіомереж з використанням нейронних мереж, розподільчої ідентифікації параметрів порушень стану функціонування з проведенням вибору щодо застосування заходів із захисту системи при статистичному описі мобільних радіомереж та врахуванням множини впливів на неї на основі нейронних мереж. На відміну від існуючого методу, який оцінює рівень функціонування на основі повної вибірки параметрів порушень, які не враховують характеристичні особливості функціонування мобільних радіомереж, шляхом послідовного аналізу процесу впливу порушень на інформаційну систему та без можливості пошуку нових типів порушень та підбору управлінських рішень направлених на підтримання рівня функціонування системи. Запропонований метод забезпечує оцінку рівня функціонування мобільних радіомереж на основі множини параметрів, які відображають саме функціонування елементів мобільних радіомереж з функцією паралельно-розподільчої ідентифікації нових типів порушень з використанням нейронних мереж. Даний метод дозволить: зменшити час прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах, збільшити точність прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах, при збереженні повноти навчальної вибірки запропонованого методу не нижчого, ніж у існуючого методу, за рахунок використання нейронних мереж, алгоритму розподільчої ідентифікації та ідентифікації нових типів порушень.

Ключові слова: мобільна радіомережа, моніторинг, стан функціонування, система управління потоками даних, управлінське рішення, нейронна мережа.

1. Вступ. Постановка проблеми. Динаміка розвитку та поширення мобільних радіомереж (МР), вимагає забезпечення постійного контролю процесу функціонування та коректного їх використання. Основними особливостями побудови та застосування МР є: динамічна зміна топології; децентралізоване управління; спільний доступ елементів мереж до середовища передачі інформації; масштабованість мережі; необхідність збору, обробки, зберігання великої кількості інформації щодо стану мережі в цілому або елементів мереж зокрема.

Зазначені особливості МР обумовлюють множину вразливостей, які можуть бути використані з метою порушення рівня стану функціонування МР або здійснення інших дій направлених на порушення властивостей комунікаційних систем, ресурсів та процесу функціонування МР [1,2].

З метою забезпечення належного функціонування МР та забезпечення якості обслуговування інформаційних ресурсів МР, передбачена система управління потоками даних (СУПД) у складі елементів МР, вузлів МР або системи управління МР. Подібна СУПД у своєму складі містить відповідні підсистеми: ідентифікації, навчання, прогнозування, підтримки прийняття рішень, моніторингу стану функціонування, оцінювання стану функціонування МР тощо. Реалізація забезпечення процесу моніторингу стану функціонування МР та коректність функціонування СУПД ґрунтується на основі застосування методів оцінки стану функціонування елементів системи від порушень [2,3,4]. Дані методи застосовуються з метою оцінки стану функціонування МР та встановлення рівня достатності реалізованих способів, методів та засобів забезпечення належного рівня функціонування в МР [5,6].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Робота подібних методів вивчалася та була описана в роботах [2,7,8]. В цілому вивчення, удосконалення та розробка подібних методів сприятиме покращенню характеристичних особливостей та функціональних можливостей елементів, засобів, компонентів, мереж зв'язку та покращенню характеристик та функціональних особливостей засобів що застосовуються в МР та комплексах зв'язку. До таких засобів зв'язку, які застосовуються при організації МР належать засоби: організації управління МР; моніторингу стану функціонування СУПД в МР; організації взаємодії елементів СУПД, вузлів МР, тощо.

До подібних засобів зв'язку відносяться: Harris RF-7800V-НН, Aselsan PRC-9661/VRC-9661, Elbit MCTR-7200 та ін. (таблиці 1).

Враховуючи характеристичні особливості даних засобів та особливості функціонування МР, можливо дійти висновку, що застосування цих засобів може дозволити підвищити стан функціонування МР, ефективність, оперативність та динамічність процесу управління СУПД, елементами МР, тощо. Однак лишається питання своєчасності прийняття управлінського рішення щодо функціонування МР з модернізацією процесу прийняття управлінського рішення, яке ґрунтується на експертних, аналітичних висновках, апаратним шляхом та з дорученням підходів які є більш адекватними в сучасних умовах розвитку комунікаційних технологій. Для отримання цього ефекту є потреба в розробці методу моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах з використанням нейронних мереж.

Основними недоліками існуючих методів моніторингу стану функціонування систем управління є: не врахування особливостей функціонування МР, громіздка та математично обтяжлива структура побудови, обмеженість застосування в умовах непередбачуваної мережевої активності, великий час та низька точність моніторингу, застосування експертної або аналітичної оцінки [4,9].

В наслідок чого виникає необхідність висунування множини вимог до методів моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних з метою їх застосування в МР, а саме: застосування в середовищі яким характеризується саме МР, збільшення рівня точності рівня моніторингу, збільшення

Таблиця 1.

Порівняльна характеристика засобів радіозв'язку

Характеристики	Harris RF-7800V-НН	Aselsan PRC-9661	Elbit MCTR-7200
MANET	так	так	так
MESH	так	так	так
IP-мережі	так	так	так
Вид модуляції	SDR: AM/FM- FSK/ASK-MELP Voice, ASKData, FSK/TCM	AM; FM; 16APSK, 8PSK, DQPSK, TDMA; DSSS	FM(F3E), AM (A3E), BFSK, DPSK, GMSK
Діапазон частот МГц	30-108	30-512	NBWF: 30-512 WBWF: 225-512
Шифрування	AES-256	AES-256	AES256
GPS	так	так	так
USB	так	ні	так
RS-232	так	так	так
Wi-Fi	ні	ні	ні
Bluetooth	ні	ні	ні
Ethernet	так	так	так
AUDIO	ні	так	ні
Відео H264	ні	так	так

рівня швидкості прийняття управлінського рішення, зменшення рівня часу моніторингу, невелика математична та ресурсна обтяжливість, функціонування за умов нестійкої кількості обчислювальних ресурсів, інтелектуалізація процесу прийняття рішень.

У зв'язку з тим що система моніторингу стану функціонування МР має встановлювати зміни стану функціонування МР, то сама система повинна відслідковувати весь потік даних, що циркулює між елементами СУПД, мережі та в МР в цілому. Для цього СУПД повинна здійснювати функціонування на всіх рівнях моделі OSI, забезпечуючи при цьому: контроль інформаційного потоку, контроль з'єднань, контроль структури та вмісту повідомлень з пакетами [2,4].

Існуючі системи моніторингу стану функціонування передбачають прийняття рішень щодо встановлення порушення функціонування на основі обробки множини різномірних параметрів даних. Порушення функціонування в свою чергу реалізується різнонаправленими діями. Інформація, під час проходження СУПД, аналізується за відповідними параметрами на предмет встановлення порушень функціонування. У результаті чого на виході СУПД в МР з'являється ознака рішення щодо наявності або відсутності порушення або наявності зміни стану рівня функціонування МР [1,3].

В якості навчальної множини існуючі системи моніторингу використовують конкретні різновиди порушень, які містяться у відповідній базі, серед яких мі-

ститься два типи ознак [1,10]. Тобто на основі вхідних параметрів трафіка відбувається перевірка на наявність порушень функціонування та маркування їх як „порушення” або „не порушення”. Вирішуючи задачу класифікації порушень система моніторингу ставить у відповідність параметри мережевого трафіка, який поділяються на відповідні категорії. Після чого, відкласифіковані параметри вхідних даних співвідносяться до множини управляючих рішень щодо варіантів реагування на кожен окремий тип порушення. В наслідок чого встановлюється рівень функціонування МР.

Виходячи із викладеного вище пропонується провести розробку методу моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах з використанням нейронних мереж шляхом удосконалення існуючого аналітичного методу моніторингу стану функціонування з урахуванням вищезазначених вимог, з метою застосування методу в СУПД мобільної радіомережі.

Об’єктом розгляду статті є процес забезпечення належного рівня функціонування елементів управління потоками даних, передачі інформації в МР з заданою якістю та в цілому функціонування МР.

Предметом дослідження є метод моніторингу стану функціонування системи управління потоками даних в мобільних радіомережах з використанням нейронних мереж.

Постановка задачі наукового дослідження. Розглядається ситуація рівноймовірного знаходження системи у стані протікання порушень стану функціонування МР. В один і той же час відбуваються як порушення функціонування МР так і пошук варіантів протидії на можливі порушення. Також будується база з варіантами протидії на множину можливих порушень. Так як кожен тип порушень характеризує множину цілей при їх проведенні у МР, дії яких направлені на елементи МР або на МР в цілому. Під час встановлення порушень буде застосовуватись механізм логічного виводу для опису бази вхідних параметрів з використанням нейронної мережі. На підставі співставлення вхідних параметрів, у системі правил буде формуватись рішення, щодо їх класифікації. Вихідним значенням є: значення встановленого стану функціонування та проаналізованого стану МР у вигляді, або $= 1$ – „неконтрольований” вплив, або $= 0$, „контрольований” вплив. Також на виході отримуються параметри встановленої поведінки та пропозицій для підсистеми реалізації рішень відносно варіантів реагування на встановлене порушення стану функціонування.

Процес контролю роботи мережі зазвичай поділяють на два етапи – моніторинг і аналіз. Моніторинг, являє собою процедуру збору первинних даних про роботу мережі: статистики функціонування елементів мережі, кількість циркулюючих в мережі даних і пакетів, стан портів концентраторів, комутаторів і маршрутизаторів, тощо. Завдання моніторингу може вирішуватись програмними і апаратними вимірниками, тестерами, мережевими аналізаторами, вбудованими засобами моніторингу комунікаційних пристроїв, а також агентами систем управління. Моніторинг продуктивності на основі статистичних даних дозволяє оцінювати час та точність прийняття рішень, величину трафіка, а також планувати побудову мережі.

Аналіз являє собою більш складний і інтелектуальний процес осмислення зібраної на етапі моніторингу інформації, зіставлення її з даними, отриманими

раніше, і вироблення припущень про можливі причини сповільненої або ненадійної роботи мережі. Завдання аналізу вимагає більш активної участі людини і використання таких складних засобів, як експертні системи, що акумулюють практичний досвід багатьох мережевих фахівців. В свою чергу даний етап передбачає комбінування методів інтелектуалізації та експертних висновків.

У зв'язку з тим що процес вироблення припущень про можливі причини сповільненої або ненадійної роботи мережі, на основі використання штучного інтелекту та експертів, виходять за межі розгляду даної роботи тому доцільним буде проведення моніторингу стану функціонування СУПД в МР (збору даних про роботу мережі, статистики функціонування елементів мережі) з використанням нейронних мереж.

Обмеження та допущення: Для ідентифікації поведінки розглянута штучна множина порушень, що є загрозами стану функціонування МР. Пошукова вибірка порушень запропонованого методу обмежена кількістю навчальної вибірки існуючого методу. Передбачена можливість проведення навчання новим типам поведінки в ході моделювання системи, за прикладом навчання нейронних мереж. Кожна нова поведінка фіксується як нове порушення. Процес порушення є квазістаціонарним на інтервалі часу. При побудові моделі доцільно врахувати характеристику існуючих МР. Вважатимемо, що у складі кожної МР функціонує система управління (СУ), що складається з множини підсистем, які виконують функції управління ресурсами відповідно до рівнів моделі OSI. Вказана СУ здатна проводити встановлення неточності та неповноти даних вхідного трафіка.

Необхідно: розробити метод моніторингу стану функціонування СУПД в МР шляхом удосконалення існуючого методу з урахуванням множини висунутих вище вимог до розробляемого методу.

Суть розробки методу полягає в удосконаленні існуючого методу [12] шляхом моніторингу стану функціонування МР з використанням нейронних мереж, розподільчої ідентифікації параметрів порушень стану функціонування з проведенням вибору щодо застосування заходів із захисту системи при статистичному описі МР та врахуванням множини впливів на неї на основі нейронних мереж.

2. Виклад основного матеріалу. *Новий метод оцінювання стану функціонування СУПД в МР з використанням нейронних мереж.*

Моніторинг порушень стану функціонування МР може відбуватись тільки у разі проведення ідентифікації параметрів порушень, які реалізуються множиною різнонаправлених та різних за своїм змістом порушень.

Тому проведемо ідентифікацію вхідних даних (параметрів даних) трафіка.

I. Під ідентифікацією будемо розуміти знаходження моделі в оптимальному стані. Побудова моделі відбувалася за результатами спостережень за вхідними та вихідними змінними об'єкта спостереження, а саме набором параметрів трафіка [8]. З урахуванням завдань виділяють наступні типи ідентифікації: структурна ідентифікація, яка дозволяє визначити форму моделі з деякого заданого класу функцій; параметрична ідентифікація, яка визначає параметри моделі [2,4,13].

Однак виходячи із поставленого завдання, щодо ідентифікації вхідних даних на основі параметрів порушень, буде застосована саме параметрична іден-

тифікація. При параметричній ідентифікації дані про об'єкт обробляються для отримання про нього апостеріорної інформації. При цьому оцінюються параметри обраної моделі. Для ідентифікації об'єкта довільного порядку використовується метод найменших квадратів, що потребує мінімізації середнього квадрата неузгодженості правої і лівої частин рівняння:

$$S = \int_0^T \left[\sum_{i=0}^n a_i \cdot y^{(i)}(t) - \sum_{j=0}^m b_j \cdot x^{(j)}(t) \right]^2 dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

де: $y^{(i)}$, $x^{(j)}$ – похідні i -го і j -го порядку від функцій вихідного і вхідного сигналів.

При побудові моделі моніторингу стану функціонування МР за експериментально отриманими даними поширеною є ситуація, для якої практично вся інформація, що використовується обробником для розв'язання поставленого завдання, обмежується вибіркою вихідних даних. Тому для рішення завдання параметричної ідентифікації використовують методи та підходи, орієнтовані виключно на інформацію про невідповідність між виходами об'єкта та моделі. Для рішення задачі параметричної ідентифікації застосуємо показники:

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - f(X_i, A))^2. \quad (2)$$

Оцінка дисперсії помилки розраховується за формулою:

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \frac{S^{(l)}}{n-l}, \quad (3)$$

де l – кількість параметрів регресійної моделі, $S^{(l)}$ – сума квадратів невідповідності цієї моделі.

II. Наступним кроком буде проведення моніторингу стану функціонування МР на основі ідентифікованих даних та пошуку відповідності цих даних множині варіантів впливу на порушення. У моделях які характеризуються динамічною структурою побудови, до яких і належить МР стан функціонування являє собою часовий зріз властивості функціонування інформації і описується значенням відповідного показника в певний момент часу.

Процес моніторингу стану функціонування x і процес застосування засобів забезпечення функціонування (ЗЗ) u реалізуються за крокам. На кожному n -ому кроці отримується деяка сукупність даних про стан функціонування системи x_n , яка залежить від реалізованих варіантів впливу на порушення функціонування λ , що характеризують стан МР і впливають на вибір використовуваних захисних механізмів. Використовуючи отримані і вже відомі відомості про стан функціонування МР x_n, x_{n-1}, \dots , приймається рішення u_n про застосування засобів забезпечення функціонування, яке може залежати і від раніше прийнятих рішень u_{n-1}, u_{n-2} . Якщо $n = 1, 2, \dots, N$ то повна сукупність даних про стан системи x , рішень про застосування ЗЗ u та реалізовані варіантів впливу на порушення функціонування λ можна описати векторами:

$$x = X_N = \{x_1, \dots, x_N\}, u = U_N = \{u_1, \dots, u_N\}, \lambda = \Lambda_N = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}. \quad (4)$$

Величина середнього ризику виникнення порушень визначається виразом:

$$R(\varphi) = R(\Phi_N) = M \{g(U_N, \Lambda_N, X_N)\}, \quad (5)$$

де $\Phi_N = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ – сукупність частоти появи ймовірностей, кожна з яких задає правило прийняття ЗЗ на n -ому кроці, а їх добуток – вирішальне правило в цілому.

Нехай оптимальному правилу прийняття рішення при реалізованих ЗЗ відповідає сукупність Φ_{N_0} . Тоді мінімальний середній ризик виникнення порушень:

$$\begin{aligned} R(\Phi_{N_0}) &= \min_{\Phi_N} M \{g(U_N, \Lambda_N, X_N)\} = \\ &= \min_{(\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})} \left[\min_{\Phi_N} M \{g(U_N, \Lambda_N, X_N) | X_N, U_N\} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Частота появи ймовірності виникнення порушень $p_{n+1}(X_{n+1} | X_n, U_n)$, визначається через частоту $p_n(x_n | \Lambda_n, X_{n-1}, U_{n-1})$ і $p_n(\lambda_n | \Lambda_n, \Lambda_{n-1}, U_{n-1})$ за звичайними правилами теорії ймовірностей.

На III кроці буде проведено побудови нейронної мережі (НМ).

НМ це мережа де кожен нейрон з'єднаний з іншими компонентами вхідного вектору. НМ здатна функціонувати в умовах перешкод, так як число класів порушень фіксовано, ваги модифікуються повільно, та настроювання ваг закінчується після навчання. НМ також дозволяє виявляти кластери в навчальних даних та відносити данні до тих або інших кластерів. Якщо після навчання мережа зустрічається з набором даних, несхожим з відомими зразками, то вона не може класифікувати такий набір і тим самим завдяки відповідності ваг виявляє його новизну.

Структурна схема НМ з моніторингу стану функціонування СУПД в МР зазначено на рис. 1.

Перший шар нейронних елементів, призначений для розподілу вхідних сигналів X_m на нейрони шару мережі, в якості яких виступають кількість параметрів мережевого з'єднання які характерні функціонуванню блокам СУПД, $m = 5$.

Другий шар мережі складається з $n = 5$ нейронів, та відіграє ключову роль в класифікації даних і здійснює кластеризацію вхідного простору образів за вищезазначеним підходом, в результаті чого утворюються кластери різних образів, кожному з яких відповідає свій нейронний елемент. Кількість нейронів шару дорівнює – n_K . Причому:

$$n_K = f + l, \quad (7)$$

де f – кількість нейронів шару, які відповідають категоріям порушень; l – кількість нейронів шару, які відповідають видам нормального з'єднання.

У зв'язку з тим, що в шарі НМ використовується поділ нейронів, які характеризують або нормальне з'єднання, або порушення, то коректна класифікація

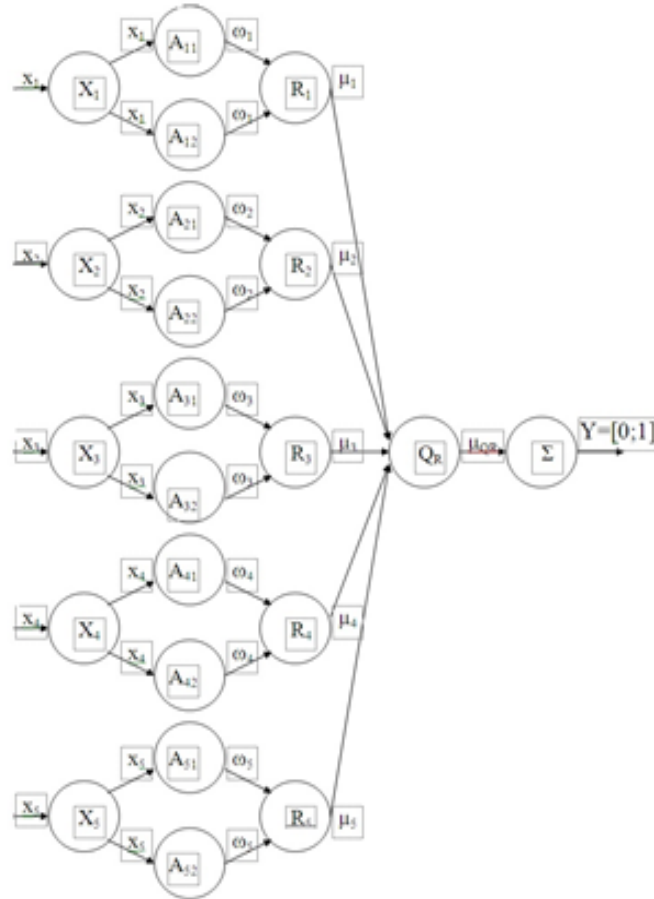


Рис. 1. Структурна схема НМ з моніторингу стану функціонування ПУПД

відбувається, якщо при подачі на вхід мережі параметрів порушень переможцем буде один з f нейронів шару, або, якщо при подачі на вхід мережі параметрів нормального з'єднання переможцем буде l нейрон шару. В інших випадках відбувається некоректна класифікація.

Навчання НМ буде складатись з двох етапів:

- на початковому обирається велике значення швидкості навчання та радіус навчання, що дозволяє розташувати вектори нейронів у відповідності з розподільним прийомом у виборці.
- на заключному проводиться більш точне налаштування ваг, коли значення параметрів швидкості навчання набагато менше початкових.

Навчання продовжуватиметься до тих пір, поки похибка мережі при P вхідних векторах не стане найменшою величиною (ω_j – вектор вагів „нейрона-переможця“).

$$E = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \|x_i - \omega_j\|^2. \quad (8)$$

Після надання рівних можливостей для перемоги нейронів, та підрахунку похибки нейронний елемент переможець з номером k визначатиметься:

$$d_k = \min_j d_j. \quad (9)$$

З метою перевірки коректності проведення класифікації при визначенні „нейронів-переможців”, відбувається визначення ваг нейронів у області класифікації за допомогою перевірки наступних умов:

– якщо, у разі подачі на вхід мережі нормального з’єднання переможцем є один з l нейронів або при подачі на вхід мережі аномального з’єднання переможцем є один з f нейронів мережі. То проводиться модифікація вагових коефіцієнтів „нейрона-переможця” у відповідності з виразом:

$$\omega_{mk}(t+1) = \omega_{mk}(t) + \gamma(x_m - \omega_{mk}(t)), \quad (10)$$

де γ – параметр норми навчання, t – номер ітерації навчання.

– якщо, у разі подачі на вхід мережі нормального з’єднання переможцем не є один з l нейронів або при подачі на вхід мережі аномального з’єднання переможцем не є один з f нейронів мережі. То проводиться модифікація вагових коефіцієнтів „нейрона-переможця” у відповідності з виразом:

$$\omega_{mk}(t+1) = \omega_{mk}(t) - \gamma(x_m - \omega_{mk}(t)). \quad (11)$$

Третій шар – являє собою процедуру збору ступенів належності вхідних параметрів відповідним нечітким правилам та визначення переможного значення рівня відповідності {висока, низька}. Кількість нейронів шару R_m відповідає кількості вхідних значень (блоків). Закінчення нечітких правил з визначенням переможних термів параметрів направляються на нейрон четвертого шару. Переможний лінгвістичний терм параметру визначається, як оптимальне значення переможних параметрів або максимальних переможних значень:

$$R_m = \text{opt} \{ \max \mu_{A_m}; x_m \}. \quad (12)$$

Четвертий шар складається з лінійного нейронного елемента \sum – суматора якій розташований у кожному аналізаторі блока. Суматори при отриманні $Y_n = 1$ або $Y_n = 0$ встановлюють „аномальне” або „нормальне” значення стану функціонування кожного окремого аналізатора [14,15]. У результаті проходження НМ, на його виході буде з’являтися відповідне значення щодо визначення рівня функціонування на кожному окремому блоці СУПД та його класифікації.

3. Висновки. Було розроблено метод моніторингу стану функціонування підсистеми управління потоками даних в мобільних радіомережах способом удосконалення існуючого методу. Суть нового методу: полягає в удосконаленні існуючого методу [12] шляхом моніторингу стану функціонування МР з використанням нейронних мереж, розподільчої ідентифікації параметрів порушень стану функціонування з проведенням вибору щодо застосування заходів із захисту системи при статистичному описі МР та врахуванням множини впливів на неї на основі нейронних мереж.

На відміну від існуючого методу, який оцінює рівень функціонування на основі повної вибірки параметрів порушень, шляхом послідовного аналізу процесу впливу порушень на інформаційну систему, без можливості пошуку нових типів порушень та підбору управлінських рішень направлених на підтримання рівня функціонування системи, що призводить до зменшення рівня точності та збільшення часу прийняття рішень, які не враховують характеристичні особливості функціонування МР. Запропонований метод забезпечує оцінку рівня фун-

кціонування МР на основі множини параметрів, які відображають саме функціонування елементів МР з функцією паралельно-розподільчої ідентифікації нових типів порушень з використанням НМ. Даний метод дозволить: зменшити час прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування СУПД в МР, збільшити точність прийняття рішення щодо моніторингу стану функціонування СУПД в МР, при збереженні повноти навчальної вибірки запропонованого методу не нижчого, ніж у існуючого методу, за рахунок використання нейронних мереж, алгоритму розподільчої ідентифікації та ідентифікації нових типів порушень.

Список використаної літератури

1. Сальник С. В., Крамський А. Є., Сторчак А. С. Модель ієрархічно-розподільного управління мобільної радіомережі спеціального призначення з функцією захисту. *Київ: Збірник наукових праць. Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2019. Т. 1. № 5. С. 29–37.
2. Сальник С. В., Голь В. Д., Дівіцький А. С. Аналіз методів управління потоками даних в мобільних радіомережах військового призначення. *Київ: Збірник наукових праць. Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2020. Т. 1. № 7. С. 41–51.
3. Сальник С. В., Сова О. Я., Симоненко О. А., Меркотан Д. Ю. Метод управління радіозв'язністю вузлів в тактичних радіомережах класу MANET. *Київ: Збірник наукових праць. Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2020. Т. 1. № 7. С. 5–24.
4. Сальник С. В. Аналіз методів прогнозування часу перевантаження маршрутів передачі даних в мобільних радіомережах військового призначення. *Київ: Збірник наукових праць. Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2018. Т. 2. № 4. С. 55–62.
5. Голдсмит А. Беспроводные коммуникации. Москва : Техносфера. 2011. 904 с.
6. Романюк В. А., Сова О. Я., Жук А. В., Минович Д. А. Проблема построения системы управления в сетях MANET. *Севастополь: Сборник тез докладов и выступлений участников XX Международной Крымской конференции, „СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии”, (КрыМиКо)*. 2010. С. 43–44.
7. Бовда Е. М. Метод управління перерозподілом навантаження в SDN мережах. *Збірник наукових праць ВІТІ*. 2017. № 2. С. 6–15.
8. Будкова Л. В., Корнієнко В. І. Комплексна оцінка характеристик та ідентифікація трафіку в інформаційних телекомунікаційних мережах. *Харків: ХУПС Системи обробки інформації*. 2013. Т. 2. № 109. С. 207–211.
9. Гарасимчук О. І., Костів Ю. М. Оцінка ефективності систем захисту інформації. Частина 1. *Вісник КНУ ім. Михайла Остроградського*. 2011. Т. 1. № 66. С. 16–20.
10. Ibrahim M. K. (2012). Decision support system for network routing optimization problem. *Journal of Kufa for Mathematics and Compute*. Vol. 1. No. 5. P. 52–59.
11. Жук П. В., Сова О. Я., Мінович А. І. Романюк В. А. Метод підтримання діючих маршрутів на основі прогнозованого часу їх існування в радіомережах типу MANET. *Збірник наукових праць ВІТІ НТУУ КПІ*. 2011. № 3. С. 34–43.
12. Сторчак А. С. Модель оцінки стану захищеності інформації на основі керованих багатокрокових процесів прийняття рішення. *Спеціальні телекомунікаційні системи та захист інформації ІСЗЗІ НТУУ КПІ*. 2013. Т. 2. № 24. С. 112–118.
13. Голяницький І. А. Математические модели и методы в радиосвязи. Москва : Эко-Трендз, 2005. 440 с.
14. Кõхонен Т. К. Itsejãrjestãvãt kartat. Binom. Osaamislaboratorio, 2008. 655 p.
15. Рутковский Л. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. Москва : Горячая линия-Телеком, 2010. 520 с.

Salnyk S. V. Method of monitoring the state of functioning of the data flow management system in mobile radio networks using neural networks.

The article develops a method for monitoring the functioning of the data flow control system in mobile radio networks using neural networks in a way to improve the existing method. To ensure effective management of mobile radio networks in conditions of frequent changes in the environment is possible only with a node control system capable of monitoring the functioning of the data flow management subsystem. The essence of the new method: is to improve the existing method by monitoring the functioning of mobile radio networks using neural networks, distributive identification of parameters of malfunctions with the choice of measures to protect the system in the statistical description of mobile radio networks and . Unlike the existing method, which assesses the level of functioning on the basis of a full sample of parameters of violations that do not take into account the characteristics of mobile radio networks, by consistent analysis of the impact of violations on the information system and without the possibility of finding new types of violations. system operation. The proposed method provides an assessment of the level of functioning of mobile radio networks on the basis of many parameters that reflect the functioning of elements of mobile radio networks with the function of parallel-distributive identification of new types of violations using neural networks. This method will: reduce the time of decision-making on monitoring the state of data flow management system in mobile radio networks, increase the accuracy of decision-making on monitoring the state of data flow management system in mobile radio networks, while maintaining the completeness of the proposed sample method is not lower than the existing method, through the use of neural networks, the algorithm of distributive identification and identification of new types of violations.

Keywords: mobile radio network, monitoring, state of functioning, data flow management system, management decision, neural network.

References

1. Salnyk, S. V., Kramskyi, A. Y., & Storchak, A. S. (2019). Model iierarkhichno-rozpodilnoho upravlinnia mobilnoi radiomerezhki spetsialnogo pryznachennia z funktsiieiu zakhystu. *Kyiv: Zbirnyk naukovykh prats. Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*, 1(5), 29–37.
2. Salnyk, S. V., Hol, V. D., & Divitskyi, A. S. (2019). Analiz metodiv upravlinnia potokamy danykh v mobilnykh radiomerezhakh viiskovoho pryznachennia. *Kyiv: Zbirnyk naukovykh prats. Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*, 1(7), 41–51.
3. Salnyk, S. V., Sova, O. Y., Symonenko, O. A., & Merkotan, D. I. (2020). Metod upravlinnia radiozviaznistiu vuzliv v taktychnykh radiomerezhakh klasu MANET. *Kyiv: Zbirnyk naukovykh prats. Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*, 1(7), 5–24.
4. Salnyk, S. V. (2018). Analiz metodiv prohozuvannia chasu perevantazhennia marshrutiv peredachi danykh v mobilnykh radiomerezhakh viiskovoho pryznachennia. *Kyiv: Zbirnyk naukovykh prats. Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*, 2(4), 55–62.
5. Holdsmyt, A. (2011). *Besprovodnie kommunykatsyy*. Moskva: Tekhnosfera.
6. Romaniuk, V. A., Sova, O. Y., Zhuk, A. V., & Mynochkyn, D. A. (2010). Problema postroeniya systemy upravleniya v setiakh MANET. *Sevastopol: Sbornyk tez dokladov y vystuplenyi uchastnykov KhKh Mezhdunarodnoi Krimskoi konferentsyy, „SVCh-tekhnyka y telekommunikatsyonnye tekhnolohyy”, (KriMyKo)*, 43–44.
7. Bovda, E. M. (2017). Metod upravlinnia pererozpodilom navantazhennia v SDN merezhakh. *Zbirnyk naukovykh prats VITI*, 2, 6–15.
8. Budkova, L. V., & Kornienko, V. I. (2013). Kompleksna otsinka kharakterystyk ta identyfikatsiia trafiku v informatsiinykh telekomunikatsiinykh merezhakh. *Kharkiv: KhUPS Systemy obrobky informatsii*, 2(109), 207–211.

9. Harasymchuk, O. I., & Kostiv, Y. M. (2011). Otsinka efektyvnosti system zakhystu informatsii. Chastyna 1. *Visnyk KNU im. Mykhaila Ostrohradskoho*, 1(66), 16–20.
10. Ibrahim, M. K. (2012). Decision support system for network routing optimization problem. *Journal of Kufa for Mathematics and Compute*, 1(5), 52–59.
11. Zhuk, P. V., Sova, O. Y., Minochkin, A. I. & Romaniuk, V. A. (2011). Metod pidtrymannia diiuchykh marshrutiv na osnovi prohnzovanoho chasu yikh isnuvannia v radiomerezhakh typu MANET. *Zbirnyk naukovykh prats VITI NTUU KPI*, 3, 34–43.
12. Storchak, A. S. (2013). Model otsinky stanu zakhyshchenosti informatsii na osnovi kerovanykh bahatokrokovykh protsesiv pryiniattia rishennia. *Spetsialni telekomunikatsiini systemy ta zakhyst informatsii ISZZI NTUU KPI*, 2(24), 12–118.
13. Holianytskyi, Y. A. (2005). *Matematycheskye modely y metody v radyosviazы*. Moskva: Eko-Trendz.
14. Kõkhonen, T. K. (2008). *Itsejärjestävät kartat*. Binom. Osaamislaboratorio.
15. Rutkovskiy, L. (2010). *Yskusstvennie neironnie sety. Teoryia y praktyka*. Moskva: Horiachaia lynyia-Telekom. 520.

Одержано 13.06.2022

УДК 004.89

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).163-170](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).163-170)**М. М. Шаркаді**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ДРУГОГО РОДУ

Сучасні інформаційні системи широко впроваджуються в сферу управління в соціально-економічних системах, як правило, використовують експертні знання, накопичені в різних сферах людської діяльності, що призводить до різного роду невизначеностей. При плануванні нових проектів аналітики стикаються з проблемою невизначеності, яка для кожної сфери проявляється по-різному. У загальному випадку, невизначеність — нестача впевненості, стан наявності обмежених знань, де неможливо точно описати майбутній результат або наявність великого числа можливих результатів. Побудова моделей прийняття рішень для задач із погано формалізованою інформацією можлива за допомогою використання теорії нечітких множин та побудови нечітких логічних систем. Засобом для вирішення вище описаних проблем можуть виступити нечіткі множини другого порядку, які і будуть більш детально описані в цій статті, оскільки введення нечіткості у функцію належності дозволяє наблизити нечітку модель до людського мислення та сприйняття.

Ключові слова: система управління, нечітка логіка, нечітка множина, функція належності, слід невизначеності.

1. Вступ. В умовах інтенсивної інформатизації суспільства, інформаційні технології широко впроваджуються в сферу управління в соціально-економічних системах.

Будь-якому рівню управління притаманні задачі прийняття рішень. Хоча ці завдання можна поділити за важливістю, складністю, пріоритетністю, але всі вони є вирішальними для успішного функціонування соціально-економічних об'єктів.

Сучасні інформаційні системи, як правило, використовують знання, накопичені дослідниками в різних сферах людської діяльності. Використання знань експертів у системах прийняття рішень, як правило, призводить до появи різних типів невизначеностей [1]. Одержувані знання дуже часто мають вигляд висловлювань людини, яка є фахівцем у певній галузі і яка в своїх міркуваннях робить спробу кількісно охарактеризувати якісні поняття та відношення.

Нечітка логіка дає можливість широкого використання експертних знань в системах управління, що дозволяє формалізувати якісні, семантично розпливчасті поняття та зв'язки. Невизначеність, яка присутня в задачах управління діяльністю будь-якого підприємства (фірми, банку), характеризується розмитістю думок і оцінок експертів, неповнотою і нечіткістю інформації про основні параметри та умови аналізованої задачі. Ця невизначеність створюється як з допомогою дій інших суб'єктів економіки, які переслідують власні інтереси, так і за рахунок неповноти наявної у підприємства інформації про економічну обстановку, що склалася. Таким чином, вона призводить до значного підвищення

складності завдань управління діяльністю підприємства та породжується безліччю факторів. Поєднання цих факторів на практиці створює широкий спектр різних видів невизначеності. Тому і виникає потреба використання методів, які дозволяють використовувати розмиті значення показників.

2. Виклад основного матеріалу. Побудова моделей прийняття рішень для задач, які є слабо формалізованими та оперують експертною інформацією, можлива завдяки використанню теорії нечітких множин та побудови нечітких логічних систем [2, 3].

Нечіткі системи мають низку переваг в порівнянні з іншими. Однією з них є можливість оперувати нечіткими вхідними даними (значеннями, які змінюються з часом, або значеннями, які не можуть бути задані однозначно). Також, з'являється можливість нечіткої формалізації критеріїв оцінювання та порівняння (оперуючи такими критеріями, як «більшість», «можливо», «переважно», ...). Оперування не тільки даними, але і ступенем їх достовірності. Нечіткі системи дають можливість швидкого моделювання складних динамічних систем та їх порівняння із заданим ступенем точності.

Для формалізації знань, які отримують від експерта чи групи експертів, за допомогою нечітких множин, необхідні процедури побудови відповідних функцій належності. Ці процедури є найважливішим етапом у задачах прийняття рішень, тому що якість рішень залежить від того, наскільки адекватно побудована функція належності відображає знання експерта або експертів. Використання апарату теорії нечітких множин для автоматичної формалізації знань ставить перед дослідником завдання вибору типу нечіткої множини для побудови функцій належності та нечіткої моделі, яка відповідатиме обраному типу нечіткої множини.

Питання побудови функцій належності є одним із основних у нечіткій логіці, якому присвятили свої праці багато вчених, починаючи з засновника цього напрямку науки Л. Заде. У теорії нечітких множин функція належності відіграє значну роль, оскільки вона є основною характеристикою нечіткого об'єкта, і всі дії з нечіткими об'єктами виконуються через операції з їх функціями належності. Визначення функції належності — це перша і дуже важлива стадія, що дозволяє потім оперувати з нечіткими множинами. Як правило, функція належності будується або на основі статистичної інформації, або за участю експерта (групи експертів). У першому випадку функція належності повинна мати частотну інтерпретацію, у другому випадку ступінь належності приблизно дорівнює інтенсивності прояву деякої властивості.

Залежно від ступеня нечіткості нечітких множин, який враховується при побудові нечіткої моделі, розрізняють нечіткі моделі типу 1, загальні моделі типу 2 та інтервальні типу 2 [3].

Нечіткі моделі типу 1, які базуються на нечітких множинах першого порядку, використовують функції належності з чіткими значеннями ступенів належності і дають на виході лише чітке (точкове) значення.

Для вирішення конкретних практичних проблем Лотфі Заде запропонував зручну інтерпретацію нечіткої множини типу 1:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, 0 \leq \mu_A(x) \leq 1\}$$

де X — універсальна множина, а $\mu_A(x)$ — функція належності елемента x мно-

жині A , яка є підмножиною універсальної множини.

На основі нечітких множин першого порядку розроблено різні моделі та алгоритми прийняття рішень в умовах невизначеності, зокрема модель оцінки ефективності інвестиційних проектів [4]. Аналіз таких методів і моделей показує, що досить часто вони не забезпечують отримання повністю достовірних рішень з огляду на недостатньо обґрунтований вибір параметрів моделювання, а пошук ефективних рішень супроводжується значними тимчасовими витратами через необхідність виконання багаторазових реалізацій використовуваних методів, моделей і алгоритмів з метою вибору оптимальних параметрів

Нечіткі загальні та інтервальні моделі типу-2 базуються на нечітких множинах другого порядку.

Поняття нечітких множин другого порядку (fuzzy sets type-2) було дано основоположником нечіткої логіки Л. Заде в 1975 р. Під нечіткими множинами другого порядку розумілися «нечіткі» множини, у яких ступінь належності — це нечітка множина першого порядку.

У роботі [5] Мендель і Джохан запропонували зручне для практичного застосування визначення нечіткої множини другого порядку:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_A(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}$$

де X — універсальна множина, а $\mu_A(x, u)$ — множина функцій належності, що характеризують ступінь належності елементів x (третій вимір, що характеризує вторинну функцію приналежності) множині A .

Якщо \tilde{A} неперервна, це можна представити так:

$$\tilde{A} = \left\{ \iint_{x \in X} \left[\iint_{u \in J_x \subseteq [0, 1]} f_x(u)/u \right] / x \right\}$$

де \iint позначає об'єднання x і u .

Якщо \tilde{A} дискретна, то для представлення використовується формула:

$$\tilde{A} = \left\{ \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\sum_{k=1}^{M_1} f_{x_i}(u_{ik})/u_{ik} \right] / x_i \right\}$$

де $\sum \sum$ позначає об'єднання x і u .

Розрізняють загальні та інтервальні нечіткі множини другого порядку. Особливості кожного виду будуть розглянуті нижче.

Наприкінці двадцятого століття в [6] було дано опис нечіткої множини другого порядку з використанням нижньої та верхньої функцій належності (membership function, MF). Кожна з цих функцій може бути представлена у вигляді нечіткої множини першого порядку. Інтервал між цими двома функціями є слід невизначеності (footprint of uncertainty, FOU) [5], який і є головною характеристикою нечіткої множини другого порядку (НМ-2). Слід невизначеності — це розмивання функції належності першого порядку, який повністю описується двома її обмежуючими функціями: нижньою функцією належності (НФН — LMF) та верхньою функцією належності (ВФН — UMF), кожна з яких є нечіткою множиною першого порядку (НМ-1) (рис. 1).

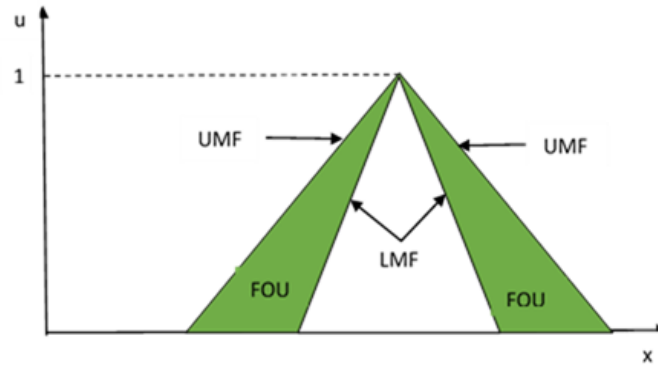


Рис. 1. Функція належності типу-2.

Введення нечіткості у функцію належності дозволяє наблизити нечітку модель до людського мислення та сприйняття. Люди по-різному сприймають реальність; те саме слово може мати різне значення для різних людей. Особливо це стосується висловлювань для оцінювання. Тому необхідно виключити однозначну відповідність значення ступеня функції належності за рахунок зняття обмежень при заданні ступеню невизначеності кожного значення інтервалу. При заданні експертом ступенів належності таким чином зменшується ризик накопичення помилок через невключення сумнівних точок, які розташовані біля границь функції.

Одним із основних завдань є визначення величини сліду невизначеності, оскільки це впливає на точність моделі та час виконання розрахунків комп'ютерною системою. Очевидно, що розмір сліду невизначеності залежить від типу застосованих функцій належності.

Функція належності загальної нечіткої множини другого порядку представлена в 3-вимірній моделі на рисунку 2, де третім виміром функції належності в кожній точці 2-мірної області є так званий слід невизначеності (FOU).

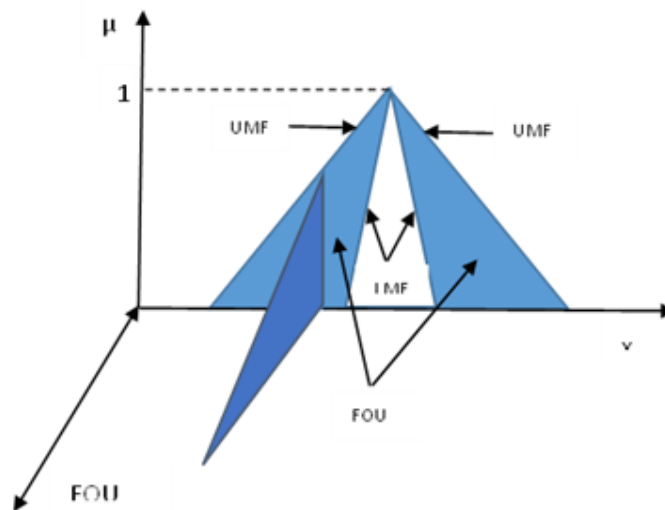


Рис. 2. Слід невизначеності нечіткої множини типу 2.

Слід невизначеності — це розмивання функції належності першого порядку,

який повністю описується двома її обмежувачими функціями (рис. 1): нижньою функцією належності (LMF) і верхньою функцією належності (UMF), кожна з яких є нечіткою множиною першого порядку.

Теоретично вибір типу функції належності необмежений. Можливе використання будь-якої функції. Однак найбільш часто використовуваними функціями належності для нечітких множин типу 2 є: гауссові, трикутні, трапецієвидні та дзвіноподібні.

Також розрізняють невизначеності різних типів при побудові функцій належності в нечітких системах, а саме інтраневизначеність та інтерневизначеність. Інтраневизначеність виникає внаслідок недостатньої кількості знань або нечіткої оцінки експерта. Інтерневизначеність виникає внаслідок різних оцінок декількох експертів. Інтраневизначеність можна описати за допомогою нечіткої множини другого порядку, а інтерневизначеність — об'єднанням декількох НМ-2. [7].

Нечіткі множини другого порядку характеризуються розмитістю меж функції належності (ФН) і способом розподілу ступенів належності значенням аргументів. Розмиття меж є першим кроком у переході від нечітких множин типу 1 до нечітких множин типу 2. На другому етапі потрібно вибрати тип функції належності, як ми робимо для нечітких множин типу 1.

Розрізняють два різновиди ФН-2. Якщо для будь-якого значення аргументу із універсуму на всьому інтервалі, від нижнього ступеня належності до верхнього, значення ФН-2 незмінне, тоді цей вид ФН-2 — уніфікований (однорідний). Нечітка множина з таким різновидом ФН-2 називається інтервальною нечіткою множиною другого порядку (ІНМТ-2).

Інтервальні нечіткі моделі типу 2 використовують функції належності, що будуються на основі нечітких множин з інтервальними значеннями ступенів належності (рис. 3), де:

x — первинна змінна;

$J_{x'}$ — первинна функція належності;

u — вторинна змінна;

$\mu_{\tilde{A}}(x')$ — вторинна функція належності.

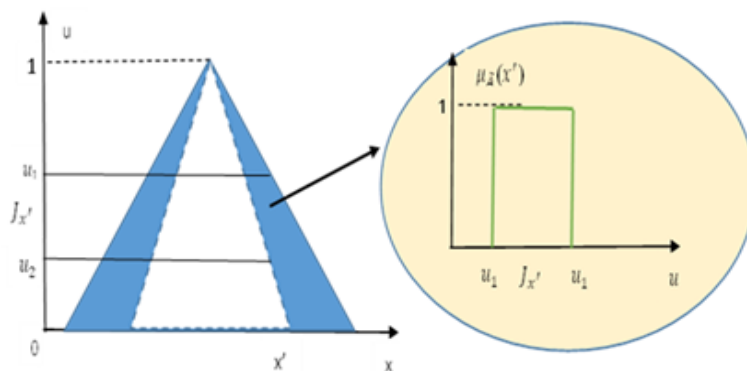


Рис. 3. Інтервальна нечітка множина другого порядку.

Ці моделі, на відміну від нечітких моделей типу 1, дають на виході точкові та інтервальні значення. Вони достатньо ефективно обробляють різні види невизначеностей та потребують істотно менше обчислювальних затрат, ніж загальні

нечіткі моделі типу 2. Наприклад, у працях [6–8] наведені приклади використання інтервальних функцій належності для розв'язання прикладних задач.

Якщо для будь-якого значення аргументу з універсуму на вказаному інтервалі значення ФН-2 змінюється, то нечітка множина з таким типом ФН-2 називається нечіткою множиною другого порядку загального вигляду.

Функцію належності другого порядку в загальному (неоднорідному) вигляді можна задати за допомогою:

- характеристики типу 1 (первинна змінна та функція належності);
- характеристики типу 2 (вторинна змінна та функція належності).

Характеристики типу 2 задають параметри вертикального перерізу функції належності другого порядку (рис. 4).

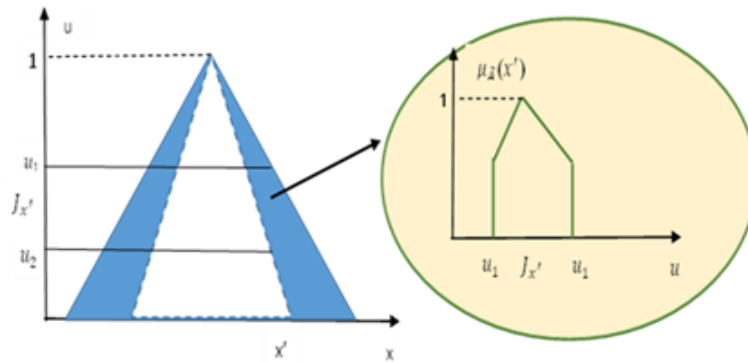


Рис. 4. Загальна нечітка множина другого порядку.

На рисунку 4 показано основні характеристики функції належності другого порядку в загальному (неоднорідному) вигляді:

x – первинна змінна;

$J_{x'}$ – первинна функція належності;

u – вторинна змінна;

$\mu_{\bar{A}}(x')$ – вторинна функція належності.

Неоднорідний тип функції належності другого порядку використовується не дуже часто через дорогі обчислення, хоча він має велику кількість ступенів свободи. Тому експертні системи здебільшого базуються на інтервальному типі нечітких множин другого порядку. Вони дозволяють використовувати всі засоби інтервальних обчислень і мають широкий спектр практичного застосування.

3. Висновки. Актуальними в сучасних умовах стають системи управління, які здатні ефективно моделювати та відображати процеси та об'єкти, що мають великий вплив на досягнення цілей управління.

На основі методів нечіткої логіки можна проектувати автоматизовані системи керування, які здатні ефективно функціонувати за наявності інформації про об'єкт керування, яка має якісний характер. Тому при розробці складних для формалізації систем управління доцільно застосовувати моделі та методи, засновані на принципах нечіткої логіки.

При математичному моделюванні невизначеності велике теоретичне і практичне значення має теорія нечітких множин. Під нечіткими системами в основному розуміють нечіткі системи управління. Залежність між вхідними та вихідними змінними системами може мати нелінійний характер, заздалегідь не

відомий. Нечіткі системи дозволяють дати правильну апроксимацію для широкого класу таких залежностей. Зрозуміло, що універсальними апроксиматорами є і нечіткі системи типу 2, оскільки це більш широкий клас систем, ніж нечіткі системи типу 1. Розвиток теорії нечітких систем типу 2 і застосування цієї теорії є перспективним науковим напрямом.

Список використаної літератури

1. Нариньяни А. С. Недоопределенность в системе представления и обработки знаний. *Техническая кибернетика*. 1986. № 5. С. 3–28.
2. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems 100 Supplements*. 1999. P. 9–34.
3. Mendel J. M., John R. I., Liu F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2006. Vol. 14. No. 6. P. 808–821.
4. Polishchuk V., Kelemen M., Wloch I., Polishchuk A., Sharkadi M. and Mlavets Yu. Conceptual Model of Presentation of Fuzzy Knowledge. II International Scientific Symposium “Intelligent Solutions”. 2021. Vol. 1. P. 1–12.
5. Mendel J. M., John R. I. B. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 2002. 10/2. P. 117–127.
6. Karnik N. N., Mendel J. M., Liang Q. Type-2 Fuzzy Logic Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 1999. Vol. 7. No. 6. P. 643–658.
7. Mendel J. Fuzzy sets for words: a new beginning. *The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ’03*. 2003. 1. P. 37–42. DOI: <https://doi.org/10.1109/FUZZ.2003.1209334>
8. Кондратенко Н. Р., Зелінська Н. Б., Куземко С. М. Нечіткі логічні системи з врахуванням пропусків в експериментальних даних. *Наукові вісті НТУУ “КПІ”*. 2004. № 5. С. 37–41.
9. Кондратенко Н. Р., Чеборака О. В. Дослідження можливостей узагальнювальної інтервальної типу-2 нечіткої моделі для прогнозування часових послідовностей. *Вісник Вінницького політехн. ін-ту*. 2008. № 6. С. 22–27.
10. Zeng J., Liu Z. Q. Type-2 fuzzy sets for pattern classifications: A review. *Proc. IEEE Symposium FOCI*. 2007. P. 193–200.

Sharkadi M. M. Fuzzy Sets of the Second Kind.

Modern information systems are widely introduced into the sphere of management in socio-economic systems, as a rule, use expert knowledge accumulated in various spheres of human activity, which leads to various kinds of uncertainties. When planning new projects, analysts are faced with the problem of uncertainty, which manifests itself differently for each area. In general, uncertainty is a lack of confidence, a state of limited knowledge, where it is impossible to accurately describe the future result or the presence of a large number of possible results. Building decision-making models for problems with poorly formalized information is possible through the use of fuzzy set theory and the construction of fuzzy logical systems. The means to solve the problems described above can be fuzzy sets of the second order, which will be described in more detail in this article, since the introduction of fuzziness into the membership function allows us to bring a fuzzy model closer to human thinking and perception.

Keywords: management system, fuzzy logic, fuzzy set, membership function, footprint of uncertainty.

References

1. Narinyani, A. (1986). Nedoopredelennost v sisteme predstavleniya i obrabotki znaniy. [Uncertainty in the system of representation and processing of knowledge], *Technical Cybernetics*, 5, 3–28 [in Russian].
2. Zadeh, L. (1999). Fuzzy sets as a basis for the theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems 100 Supplements*, 9–34.
3. Mendel, J., John, R., & Liu, F. (2006). Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 14(6), 808–821.

4. Polishchuk, V., Kelemen, M., Włoch, I., Polishchuk, A., Sharkadi, M., & Mlavets, Yu. (2021). Conceptual Model of Presentation of Fuzzy Knowledge. *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions"*, 1, 1–12.
5. Mendel, J., & John, R. (2002). Type-2 Fuzzy Sets Made Simple. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10/2, 117–127.
6. Karnik, N., Mendel, J., & Liang, Q. (1999). Type-2 Fuzzy Logic Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6), 643–658.
7. Mendel, J. (2003). Fuzzy sets for words: a new beginning. *The 12th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ'03*, 1, 37–42. <https://doi.org/10.1109/FUZZ.2003.1209334>
8. Kondratenko, N., Zelinskaya, N., & Kuzemko, S. (2004). Fuzzy logic systems taking into account gaps in experimental data. *Scientific Bulletin of NTUU "KPI"*, 5, 37–41 [in Ukrainian].
9. Kondratenko, N., & Cheboraka, O. (2008). Investigation of the possibilities of generalizing interval type-2 fuzzy model for forecasting time sequences. *Bulletin of Vinnytsia Polytechnic. in-tu.*, 6, 22–27 [in Ukrainian].
10. Zeng, J., & Liu, Z. (2007). Type-2 fuzzy sets for pattern classifications: A review. *Proc. IEEE Symposium FOCI*, 193–200.

Одержано 08.10.2022

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moscow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
 2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
 3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
 4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
 5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
 6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.
- 11) The manuscript should be carefully read.
- 12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 41 №2

2022

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, Н. Е. Кондрук, І. І. Король, В. В. Маринець,
К. В. Маринець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук, О. К. Рейтій,
А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак,
М. М. Шаркаді, С. В. Чупов, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua