

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 43 № 2

2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 43 № 2

Ужгород 2023

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2023. Т. 43, № 2. 167 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.екон.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №7 від 24 жовтня 2023 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №9 від 26 жовтня 2023 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2023

© Ужгородський національний університет,
2023

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 43 No 2

Uzhhorod 2023

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2023. Vol. 43, No 2. 167 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.). Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 7 of October 24, 2023) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 9 of October 24, 2023)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Балога С. І., Гапак О. М., Тютюнникова Г. С., Самусь Є. І., Тютюнников С. В.* Про зведення одного класу систем диференціальних рівнянь до L -діагонального вигляду 7
2. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Про матричні зображення наднапівгруп комутативної напівгрупи третього порядку без дільників нуля 15
3. *Городній М. Ф., Печериця О. А.* Обмежені розв'язки одного нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі 22
4. *Клесов О.І., Колеснік О. В.* Швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел для рекордів у F^α схемі 29
5. *Крижля Я. А.* Про деякі властивості вільних лівих n -тринільпотентних тріодів 34
6. *Маринець В. В., Когутич О. І., Питьовка О. Ю.* Один підхід дослідження математичної моделі поширення вологи у пористих середовищах 42
7. *Стаматієва В. В.* Узагальнення асимптотичного розкладу Рамануджана-Ватсона-Кнута 52
8. *Стьопочкіна М. В.* Коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин мінімаксно ізоморфних суперкритичній непримітивній множині 62
9. *Раєвська М. Ю.* Про напівдистрибутивні локальні майже-кільця 67
10. *Хаць Р. В.* Про інтегральне зображення одного класу цілих функцій експоненційного типу 72

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю.* Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження 82
2. *Зінченко П. П.* Рекурентний аналіз самоподібних часових рядів 96
3. *Ічанська Н. В., Лисенко М. В.* Дослідження динаміки видобутку вугілля в Україні з використанням методів нечіткого моделювання 107
4. *Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю.* Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач 119
5. *Ліп'яніна-Гончаренко Х. В.* Метод генерування рекламного зображення на основі відео потоку 130
6. *Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В.* Еквациональне описання функціонально повних алгебр 136
7. *Поліщук В. В., Білак Ю. Ю., Шафар А. А., Шпак О. І.* Гібридна математична модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону 144
8. *Сабов Д. П., Шаркаді М. М., Сабо Т. Ш.* Використання нечітких моделей у дослідженнях сейсмологічних процесів регіону 155

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Baloha S. I., Hapak O. M., Tyutyunnykova G. S., Samus Ye. I., Tyutyunnykov S. V.* About the reducing of one class of systems of differential equations to the L -diagonal form 7
2. *Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.* On matrix representations of oversemigroups of the commutative semigroup of the third order without zero divisors 15
3. *Horodniĭ M. F., Pecherytsia O. A.* Bounded solutions to a nonlinear differential equation in a Banach space 22
4. *O. I. Klesov, O. V. Kolesnik* Rate of convergence in the strong law of large numbers of records in an F^α scheme 29
5. *Krykليا Y. A.* On some properties of free left n -trinilpotent trioids 34
6. *Marynets V. V., Kohutykh O. I., Pytovka O. Y.* One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments 42
7. *Stamatiieva V. V.* Generalization of the asymptotic expansion of Ramanujan-Watson-Knuth 52
8. *Styopochkina M. V.* The coefficients of transitivity of the posets minimax isomorphic to the supercritical non-primitive poset 62
9. *Raievska M. Iu.* On semidistributive local nearrings 67
10. *Khats' R. V.* On the integral representation of one class of entire functions of exponential type 72

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu.* Reaction of layered incompressible half-space with initial stresses to moving load 82
2. *Zinchenko P. P.* Recurrent analysis of self-similar time series 96
3. *Ichanska N. V., Lysenko M. V.* Coal mining dynamics research in Ukraine using fuzzy modeling methods 107
4. *Ichanska N. V., Lozitsky D. Yu.* Using Mathematical Tools and ICT for Solving Applied Problems 119
5. *Lipianina-Honcharenko Kh. V.* A method of generating an advertising image based on a video stream 130
6. *Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V.* Equational description of functionally complete Boolean algebras 136
7. *Polishchuk V. V., Bilak Yu. Yu., Shafar A. A., Shpak O. I.* A hybrid mathematical model for evaluating the level of destination image in the context of sustainable development of the region 144
8. *Sabov D. P., Sharkadi M. M., Sabo T. S.* Fuzzy models' use in the study of seismological processes in the region 155

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).7-14](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).7-14)

С. І. Балоба¹, О. М. Гапак², Г. С. Тютюнникова³, Є. І. Самусь⁴,
С. В. Тютюнников⁵

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат фізико-математичних наук
switlana.baloha@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1221-9072>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та мереж,
кандидат педагогічних наук
oksana.hapak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3448-6670>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж,
ganna.tyutyunnikova@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0859-6382>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж,
yevgenija.samus@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-9601-289X>

⁵ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
викладач кафедри приладобудування,
sergiy.tyutyunnykov@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4781-5453>

ПРО ЗВЕДЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО L -ДІАГОНАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Дана стаття присвячена асимптотичному інтегруванню систем диференціальних рівнянь, що є лінійним розширенням динамічної системи на торі. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком.

Було досліджено задачу зведення одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m -вимірного тора T^m і n -вимірного евклідового простору E^n до L -діагонального вигляду. Сформульовано та доведено достатні умови зведення одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі, що має специфічні властивості в ω -граничній множині Ω , до L -діагонального вигляду.

Ключові слова: m -вимірний тор, n -вимірний Евклідів простір, ω -гранична множина, розширення динамічної системи на торі, L -діагональна система, асимптотика розв'язків.

1. Вступ. Теорія розширень систем динамічних рівнянь на торі [1] є важливим розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається та має важливе прикладне застосування до різноманітних задач науки та техніки. Дана теорія описує процеси, що носять коливний характер. Основи цієї теорії були розроблені А. М. Самойленком і узагальнено в працях [1] і [2].

Дана стаття присвячена дослідженню асимптотиці розв'язків одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у просторі $T^m \times R^n$. Розглянуто

питання зведення одного класу розширень динамічних систем на торі до L -діагонального вигляду.

Питання зведення систем лінійних диференціальних рівнянь до L -діагонального вигляду розглянуто в праці [3], найпростіші з випадків були сформульовані ще раніше у роботах Н. Левінсоном [4].

Дослідженню поведінки розв'язку L -діагональних систем присвячено ряд робіт таких математиків, як Шпет і Перон у випадку, коли діагональна матриця є сталою та Рапопорт [3] і Н. Левінсон [4], при змінній діагональній матриці. Дослідженню поведінки розв'язку L -діагональних систем, що є лінійним розширенням динамічних систем на торі, та зведення такої системи до L -діагонального вигляду присвячена робота [5].

2. Постановка задачі та формулювання основного результату. Розглянемо лінійне розширення динамічної системи на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = A(\varphi)x, \quad (1)$$

де $a(\varphi)$, $A(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через Ω_φ — ω -граничну множину цього розв'язку. Об'єднання ω -граничних множин для всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$ позначимо

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in \mathbb{T}^m} \Omega_\varphi.$$

Лема.[6] *Для будь-якого фіксованого околу $U(\Omega)$ множини Ω знайдеться момент часу T такий, що для всіх $t \geq T$ і всіх $\varphi \in \mathbb{T}^m$ $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$.*

Позначимо через $C'(\mathbb{T}^m)$ підпростір простору неперервних функцій $C(\mathbb{T}^m)$, який складається з таких функцій u , що $\dot{u}(\varphi_t(\varphi))$ має по t неперервні похідні такі, що $\frac{d}{dt}u(\varphi_t(\varphi)) = \dot{u}(\varphi)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$ і деякої функції $u(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m)$.

Систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y, \quad (2)$$

де $a(\varphi) \in C(\mathbb{T}^m)$ — вектор-функція, $Q(\varphi)$ — деяка матрична функція, абсолютно інтегровна на проміжку $[0, \infty)$ вздовж кожного розв'язку $\varphi_t(\varphi)$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$ першого із рівнянь системи (2), тобто

$$\int_0^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| dt < \infty$$

а $\Lambda(\varphi) = \text{diag}(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \dots, \lambda_n(\varphi)) \in C(\mathbb{T}^m)$ — діагональна матриця, по аналогії з [4] називатимемо L -діагональною. Вважатимемо, що діагональні елементи $\lambda_j(\varphi)$ ($j = \overline{1, n}$) матриці $\Lambda(\varphi)$ асимптотично розділені, тобто величина $\text{Re}(\lambda_j(\varphi) - \lambda_\nu(\varphi))$, $j \neq \nu$, не змінює знаку при $\varphi \in \Omega$. Асимптотиці розв'язків систем диференціальних рівнянь вигляду (2) присвячена робота [5].

Наведемо деякі випадки зведення системи вигляду (1) до L -діагонального вигляду (2).

Теорема 1. *Нехай матриця $A(\varphi)$ задовольняє наступні умови:*

- існує

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A \quad (3)$$

для всіх $\varphi \in T^m$ і всі власні числа граничної матриці A різні;

- матриця

$$D(\varphi) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial A(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$

абсолютно інтегровна на $[0, \infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, тобто

$$\int_0^{\infty} \|D(\varphi_t(\varphi))\| dt < \infty,$$

рівномірно по $\varphi \in T^m$. Тоді в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω система (1) за допомогою лінійного перетворення $x = S(\varphi)y$ зводиться до L -діагонального вигляду

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) \in C'(U(\Omega))$, $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$, $C(U(\Omega))$ $\ni Q(\varphi)$ — абсолютно інтегровна на $[T, \infty)$ матрична функція вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

Доведення. Нехай $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$, тобто

$$S^{-1}(\varphi)A(\varphi)S(\varphi) = \Lambda(\varphi), \quad \varphi \in U(\Omega).$$

Згідно з [6], враховуючи умови теореми, в деякому околі $U(\Omega)$ множини Ω існує неперервна, обмежена матриця $S(\varphi)$ з неперервною, обмеженою оберненою матрицею $S^{-1}(\varphi)$, причому матриці $S(\varphi)$, $S^{-1}(\varphi)$ неперервно диференційовні по $\varphi \in U(\Omega)$ і матриці

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$

і

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial S^{-1}(\varphi)}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi),$$

абсолютно інтегровні вздовж будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ рівномірно по $\varphi \in T^m$ на проміжку $[T, \infty)$.

Проведемо в системі (1) заміну:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), S(\varphi)\dot{y} + \dot{S}(\varphi)y = A(\varphi)S(\varphi)y,$$

або ж

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) = \text{diag}(\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi), \dots, \lambda_n(\varphi))$ — діагональна матриця, а $Q(\varphi) = -S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)$, $\varphi \in U(\Omega)$. Оскільки $S(\varphi)$ і $S^{-1}(\varphi)$ обмежені, то з останньої рівності випливає, що існує така додатна стала a_1 , що

$$\|Q(\varphi)\| \leq a_1 \|\dot{S}(\varphi)\|, \quad \varphi \in U(\Omega).$$

Якщо матриця $D(\varphi)$ абсолютно інтегровна на $[0, \infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$, то $\dot{S}(\varphi)$ буде абсолютно інтегровою вздовж кожної траєкторії $\varphi_t(\varphi)$ на проміжку $[T, \infty)$ такому, що $\varphi_t(\varphi) \in U(\Omega)$ для всіх $\varphi \in T^m$, а тому

$$\int_T^\infty \|Q(\varphi_t(\varphi))\| dt \leq a_1 \int_T^\infty \|\dot{S}(\varphi_t(\varphi))\| dt < \infty,$$

тобто $Q(\varphi)$ абсолютно інтегровна на проміжку $[T, \infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$. Теорему доведено.

Відомо [5], що система (1) за виконання умов теореми має фундаментальну систему розв'язків

$$x_j(t, \varphi) = e^{\int^t \lambda_j(\varphi_s(\varphi)) ds} (e_j + \eta_j(t, \varphi)), \quad (j = \overline{1, n}; t \geq T),$$

де $\|\eta_j(t, \varphi)\| \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow \infty$.

Приклад. Застосуємо вищевикладені міркування до наступної системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \ddot{x} + p^2(\varphi)x = 0, \quad (4)$$

де $a(\varphi) \in C'(T^m)$, $p(\varphi)$ — додатна неперервно диференційовна 2π -періодична по φ функція.

Систему (4) можна записати у вигляді:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -p^2(\varphi)x, \quad (5)$$

або ж

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Безпосередні підрахунки показують, що матриця $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)i & -p(\varphi)i \end{pmatrix}$ приводить матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$ до діагонального вигляду

$$-\frac{1}{2p(\varphi)i} \begin{pmatrix} -p(\varphi)i & -1 \\ -p(\varphi)i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p^2(\varphi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)i & -p(\varphi)i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\varphi)i & 0 \\ 0 & -p(\varphi)i \end{pmatrix}.$$

Тому вихідну систему, зробивши в ній заміну

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)i & -p(\varphi)i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

зводимо до системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\varphi)i & 0 \\ 0 & -p(\varphi)i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \frac{\dot{p}(\varphi)}{2p(\varphi)} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

яка є L -діагональною, причому величина $\operatorname{Re}(\lambda_1(\varphi) - \lambda_2(\varphi)) = \operatorname{Re}(2p(\varphi)i) = 0$, тобто не змінює знак. Якщо $\dot{p}(\varphi_t(\varphi))$ абсолютно інтегровна на проміжку $[0, \infty)$ для будь-якої траєкторії $\varphi_t(\varphi)$, то для фундаментальної матриці справедлива асимптотична формула

$$Y(t, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \varepsilon_1(t, \varphi) & \varepsilon_2(t, \varphi) \\ \varepsilon_3(t, \varphi) & e^{-i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \varepsilon_4(t, \varphi) \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon_\nu(t, \varphi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty, (\nu = \overline{1, 4})$.

Повертаючись до вихідних змінних x і y для системи (5) дістанемо фундаментальну матрицю

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t, \varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p(\varphi)i & -p(\varphi)i \end{pmatrix} \cdot Y(t, \varphi) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \tilde{\varepsilon}_1(t, \varphi) & e^{-i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \tilde{\varepsilon}_2(t, \varphi) \\ p(\varphi)i \cdot e^{i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \tilde{\varepsilon}_3(t, \varphi) & -p(\varphi)i \cdot e^{-i \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds} + \tilde{\varepsilon}_4(t, \varphi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де $\tilde{\varepsilon}_\nu(t, \varphi) \rightarrow 0$, при $\nu = 1, 2, 3, 4$.

Покладаючи

$$\tilde{X}(t, \varphi) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} = X(t, \varphi),$$

дістанемо дійсну фундаментальну матрицю

$$X(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds + \eta_1(t, \varphi) & \sin \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds + \eta_2(t, \varphi) \\ -p(\varphi) \sin \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds + \eta_3(t, \varphi) & p(\varphi) \cos \int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds + \eta_4(t, \varphi) \end{pmatrix},$$

де $\eta_j(t, \varphi) \rightarrow 0, j = 1, 2, 3, 4$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким чином, вихідне рівняння (4) при $t \rightarrow \infty$ має загальний розв'язок асимптотичного вигляду

$$x(t, \varphi) = C_1 \cos \left(\int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds \right) + C_2 \sin \left(\int_0^t p(\varphi_s(\varphi)) ds \right) + \eta(t, \varphi),$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі, $\eta(t, \varphi)$ і $\frac{d\eta(t, \varphi)}{dt} \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$.

Як приклад наведемо аналог рівняння Мат'є

$$\dot{\varphi} = \sin \varphi, \ddot{x} + (a - 2h^2 \cos 2\varphi)x = 0.$$

Це рівняння вигляду (4), у якому $a(\varphi) = \sin \varphi$, де φ — кутова координата на одиничному колі і $p^2(\varphi) = a - 2h^2 \cos 2\varphi$, $a > 2h^2$.

$$\frac{\dot{p}}{2p} = \frac{4h^2 \sin 2\varphi}{4p^2} = \frac{h^2 \sin 2\varphi}{a - 2h^2 \cos 2\varphi}.$$

Збіжність $\int_0^\infty \frac{\dot{p}(\varphi_t(\varphi))}{2p(\varphi_t(\varphi))} dt$ еквівалентна збіжності

$$\int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{h^2 \sin 2\varphi}{a - 2h^2 \cos 2\varphi} d\varphi = -\frac{h^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{d(\cos 2\varphi)}{a - 2h^2 \cos 2\varphi} = \frac{1}{4} \ln(a - 2h^2 \cos 2\varphi) \Big|_{\varphi_0}^{\pi},$$

тобто інтеграл збіжний і маємо висновок: з плином часу система наближається до режиму гармонічних коливань з амплітудою $\omega(\varphi_t(\varphi)) \rightarrow \sqrt{a - 2h^2}$.

Перехідний процес описується асимптотичними формулами

$$x(t, \varphi) = C_1 \cos \left(\int_0^t \sqrt{a - 2h^2 \cos 2\varphi_s(\varphi)} ds \right) + \\ + C_2 \sin \left(\int_0^t \sqrt{a - 2h^2 \cos 2\varphi_s(\varphi)} ds \right) + \eta(t, \varphi).$$

Покажемо ще один випадок зведення системи диференціальних рівнянь до L -діагонального вигляду за допомогою лінійної підстановки.

Нехай $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$, тобто

$$S^{-1}(\varphi)A(\varphi)S(\varphi) = \Lambda(\varphi), \varphi \in U(\Omega).$$

За певних умов така матриця існує [6]. Провівши у системі (1) заміну

$$x = S(\varphi)[I + C(\varphi)]y, \varphi \in U(\Omega),$$

одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad S(\varphi)[I + C(\varphi)]\dot{y} = \left\{ [S(\varphi)\Lambda(\varphi) - \dot{S}(\varphi)][I + C(\varphi)] - S(\varphi)\dot{C}(\varphi) \right\} y,$$

або після домноження зліва на $S^{-1}(\varphi)$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad [I + C(\varphi)]\dot{y} = \left\{ \Lambda(\varphi) - S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)[I + C(\varphi)] - \dot{C}(\varphi) \right\} y.$$

Матрицю $C(\varphi)$ визначимо з матричного рівняння, адже вона до цього часу залишалася довільною:

$$\Lambda(\varphi)C(\varphi) - C(\varphi)\Lambda(\varphi) = G(\varphi),$$

де $G(\varphi) = S^{-1}(\varphi)\dot{S}(\varphi)$. На головній діагоналі матриць, що утворюють ліву і праву частини останнього рівняння, розташовані елементи, тотожно рівні нулю, а порівнюючи інші елементи цих двох матриць знайдемо

$$c_{ij}(\varphi) = \frac{g_{ij}(\varphi)}{\lambda_i(\varphi) - \lambda_j(\varphi)}, i \neq j.$$

На головній діагоналі матриці $C(\varphi)$, до прикладу, можна покласти $c_{ii}(\varphi) = 0$. Отже, якщо матриця $C(\varphi)$ задовольняє поставленим умовам, то систему диференціальних рівнянь можна записати:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad [I + C(\varphi)]\dot{y} = [I + C(\varphi)]\Lambda(\varphi)y - [G(\varphi)C(\varphi) - \dot{C}(\varphi)]y$$

або ж після домноження зліва на обернену матрицю $[I + C(\varphi)]^{-1}$

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \quad \dot{y} = \Lambda(\varphi)y - [I + C(\varphi)]^{-1}[G(\varphi)C(\varphi) - \dot{C}(\varphi)]y.$$

Якщо елементи матриць $G(\varphi)C(\varphi)$ і $\dot{C}(\varphi)$ абсолютно інтегровні на проміжку $[T, \infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, при достатньо великому T і $\det[I + C(\varphi)] \neq 0$ в $U(\Omega)$, то система диференціальних рівнянь L -діагональна на цьому інтервалі, в якому елементи матриці абсолютно інтегровні на проміжку $[T, \infty)$ вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$. Таким чином, вище викладені міркування доводять наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай матриця $A(\varphi)$ задовольняє умови теореми 1, $S(\varphi)$ — регулярна в $U(\Omega)$ матриця, що приводить матрицю $A(\varphi)$ до діагонального вигляду в $U(\Omega)$. Нехай матриця $C(\varphi)$ така, що задовольняє в $U(\Omega)$ рівняння $\Lambda(\varphi)C(\varphi) - C(\varphi)\Lambda(\varphi) = G(\varphi)$, де $G(\varphi) = S^{-1}(\varphi)S(\varphi)$. Тоді якщо $G(\varphi)C(\varphi)$ і $\dot{C}(\varphi)$ абсолютно інтегровні на проміжку $[0, \infty)$ вздовж кожної інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$, то в деякому околі $U(\Omega)$ система (1) за допомогою перетворення $x = S(\varphi)[I + C(\varphi)]y$, $\varphi \in U(\Omega)$ зводиться до L -діагонального вигляду*

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \dot{y} = [\Lambda(\varphi) + Q(\varphi)]y,$$

де $\Lambda(\varphi) \in C^1(U(\Omega))$, $\Lambda(\varphi)$ — діагональна матриця, діагональні елементи якої є власними значеннями матриці $A(\varphi)$, $C(U(\Omega))$ є $Q(\varphi)$ — абсолютно інтегровна на $[T, \infty)$ матрична функція вздовж траєкторій $\varphi_t(\varphi)$.

3. Висновки. У роботі досліджено задачу зведення одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m -вимірному тора і n -вимірному евклідового простору, до L -діагонального вигляду. Сформульовано та доведено достатні умови зведення одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі, що має специфічні властивості в ω -граничній множині Ω , до L -діагонального вигляду. Один із сформульованих та доведених випадків проілюстровано на прикладі.

Список використаної літератури

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова: монография. Київ : Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы: монография. Москва : Наука, 1987. 304 с.
3. Рапопорт И. М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. ИАН УССР : Киев, 1954. 287 с.
4. Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. *Duke Math. Journ.* 1948. Vol. 15. P. 111–126.
5. Балого С. І. Асимптотика розв'язків L -діагональних систем. *Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.* 2007. № 2. С. 43–46.
6. Балого С. І. Про діагоналізацію змінної матриці. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. «мат. та інформ.»* 2007. Вип. 14–15. С. 4–8.

Baloha S. I., Hapak O. M., Tyutynnykova G. S., Samus Ye. I., Tyutynnykov S. V. About the reducing of one class of systems of differential equations to the L -diagonal form.

This paper is devoted to the asymptotic integration of systems of differential equations, which are linear extensions of a dynamical system on a torus. The basics of this theory were developed by A. M. Samoilenko. The problem of reducing one class of systems of differential equations defined in the direct product of an m -dimensional torus T^m and an n -dimensional Euclidean space E^n to the L -diagonal form is investigated.

Sufficient conditions for reducing one class of linear expansions of dynamical systems on a torus with specific properties in the ω -boundary set Ω to the L -diagonal form were formulated and proved.

Keywords: m -dimensional torus, n -dimensional Euclidean space, ω -limit set, L -diagonal system, asymptotic behavior of the solutions.

References

1. Mitropolsky, Yu. A., Samoilenko, A. M., & Kulyk, V. L. (1990). *Investigation of dichotomy of linear system of differential equations via Lyapunov functions*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
2. Samoilenko, A. M. (1987). *Elements of mathematical theory of multi-frequency oscillations. Invariant torus*. Moskow: Nauka [in Russian].
3. Rapoport, I. M. (1954). *On some asymptotic methods in the theory of differential equations*. AN USSR: Kiev [in Russian].
4. Levinson, N. (1948). The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations. *Duke Math. Journ.*, 15, 111–126.
5. Baloha, S. I. (2007). Asymptotic behavior of the solutions L -diagonal system. *Scientific Bulletin of Kiev University, series of physical and mathematical sciences*, 2, 43–46 [in Ukrainian].
6. Baloha, S. I. (2007). On the diagonalization of a variable matrix. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, series of mathematics and informatics*, 14–15, 4–8 [in Ukrainian].

Одержано 15.10.2023

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).15-21](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).15-21)**В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²**

¹ Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАДНАПІВГРУП КОМУТАТИВНОЇ НАПІВГРУПИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ДІЛЬНИКІВ НУЛЯ

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, першим автором разом з Ю. А. Дроздом повністю описано всі скінченні ручні групи над довільним фіксованим полем (тобто такі, для яких задача про опис їхніх зображень є ручною).

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Якщо говорити про опис зображень, серед старих результатів є лише окремі результати; найбільш відомими є результати І. С. Понізовського про напівгрупи, що мають скінченне число нерозкладних зображень та результати про алгебри, які можна розглядати також і відносно напівгруп, а саме $\langle a, b \mid ab = ba = 0 \rangle$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов) і $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0 \rangle$ (перший автор і К. Рінгель).

Протягом майже двадцяти років перший автор і його наукові учні (С. М. Дяченко, О. М. Тертична, О. В. Зубарук, Е. М. Костишин, і Я. В. Заціха) детально вивчали матричні зображення для різних класів напівгруп (див. про це в анотації нашої статті в цьому журналі за 2020 рік, том 36, №1, с. 7–15).

Ця стаття авторів присвячена продовженню їхніх досліджень, пов'язаних з матричними зображеннями наднапівгруп скінченних напівгруп.

Ключові слова: наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупи, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.

1. Вступ. Ця робота присвячена матричним зображенням напівгруп спеціального вигляду, які будуються по заданій напівгрупі та її фіксованим системам твірних і визначальних співвідношень.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1] (в термінах таблиць Келі). Г. Е. Форсайт в 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказані в роботі [3].

Зауважимо, що напівгрупи другого порядку вкладаються в напівгрупи третього порядку шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента і тому не вимагають окремого розгляду.

Напівгрупу, яка отримується із деякої циклічної напівгрупи приєднанням нульового чи одиничного елемента, назовемо майже циклічною. Такі напівгрупи,

як і циклічні, не цікаві з точки зору теорії зображень (по суті її матричне зображення задається однією матрицею, канонічні форми яких добре відомі). Згідно роботи [4] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні майже циклічними, вичерпуються такими чотирма напівгрупами:

- a) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = 0, bc = cb = 0;$
- b) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$
- c) $(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$
- d) $(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c.$

В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, в кутових дужках — мінімальну систему твірних, а потім — визначальні співвідношення. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно [4, Теорема 1] напівгрупи b)–d) є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа a) — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу. Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (диною), якщо задача про опис її зображень є ручною (диною); див. загальні означення в роботі [5].

Матричні зображення наднапівгруп напівгруп b) і c) вивчалися авторами відповідно в [6] і [7], а випадок напівгрупи a) добре відомий: див., зокрема, [8], а щодо її найбільш відомих наднапівгруп — [9] і [10].

У цій статті розглядається напівгрупа d), яку ми позначатимемо також через T ; вона єдина із чотирьох не має дільників нуля.

Позначимо визначальні співвідношення $b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c$. відповідно через $(b), (c), (bc^2), (bc), (cb)$ і введемо наступні напівгрупи:

$$\begin{aligned} T^{(b)} &:= T \setminus (b) &:= (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle &: c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c; \\ T^{(c)} &:= T \setminus (c) &:= (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle &: b^3 = b^2, b^2 = c^2, bc = c, cb = c; \\ T^{(bc^2)} &:= T \setminus (bc^2) &:= (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle &: b^3 = b^2, c^3 = c, bc = c, cb = c; \\ T^{(bc)} &:= T \setminus (bc) &:= (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle &: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, cb = c; \\ T^{(cb)} &:= T \setminus (cb) &:= (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle &: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c. \end{aligned}$$

Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі T , тобто є її наднапівгрупою.

Сформулюємо тепер основний результати цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем K , характеристика якого позначається, як звичайно, через $\text{char } K$.

Теорема 1. *Напівгрупа $T^{(x)}$ має скінченний зображувальний тип для довільного поля K і довільного $x \in \{(b), (c), (bc^2), (bc), (cb)\}$.*

2. Матричні зображення напівгрупи T . Без обмеження загальності завжди вважаємо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення напівгрупи, що відповідає елементу x позначається через X . E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$).

У роботі [4] описано канонічні форми матричних зображень всіх напівгруп третього порядку. Сформулюємо відповідну теорему для напівгрупи $T = d$.

Теорема 2. *Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи*

$(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = c$, $cb = c$
над полем K така:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char } K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char } K = 2$.

Те, що це канонічна форма, в даному випадку означає (за означенням першого автора), що будь-яке зображення з точністю до еквівалентності (яка задається одночасною подібністю матриць B і C) має такий же вигляд при деяких розмірах одиничних і нульових клітин; звідси, зокрема, випливає, що з точністю до еквівалентності число нерозкладних зображень скінченне.

Зауважимо, що при описі матричних зображень напівгруп мінімальність системи твірних природна, а мінімальність системи твірних для фіксованої мінімальної системи твірних не має особливого значення (часто “зайві” співвідношення навіть корисні, коли вони мають простий вигляд). Але якщо говорити про тематику взагалі, то, звичайно ж, бажано мати в заключному варіанті як мінімальні системи твірних, так і мінімальні системи визначальних співвідношень. В зв'язку з цим детально проаналізуємо доведення теореми 2 із роботи [4], яке приводимо майже дослівно.

Спочатку перетвореннями подібності приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в такій формі:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки такого ж розміру, як і блоки матриці B , з рівностей $BC = C$ і $CB = C$ випливає, що

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи рівність $B^2 = C^2$, отримуємо $C_1^2 = E$ і залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю C_1 до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $\text{char } K \neq 2$, і до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $\text{char } K = 2$.

У кінці доведення в [4] зауважено, що рівність $C^3 = C$ не використовувалася (вона виконується автоматично) і відмічено, що це впливає і без розгляду зображень, а саме $c^3 = (c^2)c = b^2c = bc = c$. Іншими словами, визначальне співвідношення $c^3 = c$ є “зайвим”.

Проаналізуємо це доведення.

Якщо після приведення матриці B використати лише одну із рівностей $BC = C$ і $CB = B$ — скажімо, перше (інший випадок розглядається аналогічно), то маємо

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді із $B^2 = C^2$ впливає, що $C_1^2 = E$ і $C_i = 0$ при $i = 2, 3, 4$. Тобто прийшли до того самого висновку, що і в основному доведенні не лише без рівності $C^3 = C$, а й без рівності $CB = C$, а це означає, що і визначальне співвідношення $cb = c$ є “зайвим” (бо кожна скінченна напівгрупа має точне зображення).

Отже, із приведених міркувань маємо наступний висновок.

Наслідок 1. *Напівгрупа $T = d$) має такі зображення у вигляді твірних і визначальних співвідношень:*

$$T = (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, b^2 = c^2, bc = c;$$

$$T = (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, b^2 = c^2, cb = c.$$

3. Доведення теореми 1. У доведеннях з матричними обчисленнями ми будемо опускати деталі, рекомендуючи читачеві статтю [6].

Із теореми 2 і наслідку 1 впливає, що залишилося розглянути випадки $T^{(b)}$ і $T^{(bc^2)}$.

Розглянемо спочатку випадок $T^{(b)}$. Враховуючи, що мінімальний поліном елемента c дорівнює $x(x^2 - 1)$, приведемо спочатку перетвореннями подібності матрицю C до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $C_1^2 = E$. Тоді із рівностей $BC = C$ і $CB = B$ впливає, що

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

де $B_1C_1 = C_1$ і $C_1B_1 = C_1$. Нарешті, врахувавши рівність $B^2 = C^2$, маємо, що $B_1^2 = E$, $B_2^2 = 0$. Отже, пара матриць (B, C) розкладається в пряму суму пар матриць а) (B_1, C_1) , де $B_1^2 = E$, $C_1^2 = E$, $B_1C_1 = C_1$, $C_1B_1 = C_1$ і б) $(B_2, 0)$, де

$B_2^2 = 0$. У випадку a) (після скорочення останньої рівності на C_1) маємо, що $B_1 = E$, $C_1^2 = E$, а значить пара B_1, C_1 подібна парі

$$B'_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad C'_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $\text{char } K \neq 2$, і парі

$$B'_1 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad C'_1 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $\text{char } K = 2$. Отже, в обох випадках маємо з точністю до подібності по дві нерозкладні пари, а саме у випадку $\text{char } K \neq 2$ $P_1 = (1, 1)$ і $P_2 = (1, -1)$, а у випадку $\text{char } K = 2$ $P_1 = (1, 1)$ і $P_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

У випадку b) також маємо дві нерозкладні пари: $P_3 = (J_1, 0)$ і $P_4 = (J_2, 0)$, де J_1 і J_2 — клітки Жордана з власним числом 0 відповідно розмірів 1×1 і 2×2).

Отже, якщо говорити про випадок $T^{(b)}$ в цілому, то для пар (B, C) канонічна форма має такий вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char} \neq 2$ і

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char} = 2$.

Розглянемо тепер випадок $T^{(bc2)}$. Оскільки $B^3 = B^2$, $BC = C$ і $CB = C$, то пара (B, C) подібна парі такого вигляду як в доведенні теореми 2 після першого кроку доведення. Рівності $B^2 = C^2$ вже немає, але із рівності $C^3 = C$ маємо, що матриця C_1 (яка допускає подібні перетворення) задовольняє рівність $C_1^3 = C_1$, а значить число нерозкладних пар матриць (B, C) скінченне. Канонічна форма для них має такий вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char} \neq 2$ і

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $\text{char} = 2$.

Теорема 1 доведена.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі продовжується вивчення матричних зображень наднапівгруп спеціального вигляду комутативних напівгруп третього порядку, а саме єдиної напівгрупи без дільників нуля, яка не є ні циклічною, ні майже циклічною. Досліджується їхній зображувальний тип над довільним полем і канонічна форма матричних зображень. Отримані результати знайдуть застосування в першу чергу при вивченні матричних зображень наднапівгруп некомутативних напівгруп третього порядку.

Список використаної літератури

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1953. Vol. 3, P. 1–11.
2. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. Vol. 6. P. 443–447.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки)*. 2013. № 14. С. 62–67.
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика)*. 2018. Т. 32, № 1. С. 36–49.
5. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977. С. 104–114.
6. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика)*. 2020. Т. 36, № 1. С. 7–15.
7. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки)*. 2020. № 3. С. 110–114.
8. Бондаренко В. М., Литвинчук И. В. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика)*. 2012. Т. 23, № 1. С. 19–27.
9. Гельфанд И. М., Пономарьев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца. *Успехи мат. наук.* 1968. Т. 23, № 2. С. 3–60.
10. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2. *Матем. сб.* 1975. Т. 96, № 1. С. 63–74.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of oversemigroups of the commutative semigroup of the third order without zero divisors.

Matrix representations of finite groups over fields are studied sufficiently well; in particular, the first author together with Yu. A. Drozd fully described all finite tame groups over an arbitrary fixed field (i.e. ones for which the problem of classifying their representations is tame).

Matrix representations of semigroups over fields have not been studied to the same extent as representations of groups. If one talks about the classification of representations, among the old results there are only separate results; the most famous are the results of I. S. Ponizovsky on semigroups having a finite number of indecomposable representations and results on algebras which can also be considered relative to semigroups, namely $\langle a, b \mid ab = ba = 0 \rangle$ (I. M. Gelfand, V. A. Ponomaryov) and $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0 \rangle$ (first author and C. Ringel).

For almost twenty years the first author and his scientific students (S. M. Dyachenko, O. M. Tertychna, O. V. Zubaruk, E. M. Kostyshyn and Ya. V. Zatsikha) studied in detail matrix representations for various classes of semigroups (see about this in the abstract of our paper in this magazine for 2020, vol. 36, no. 1, p. 7–15).

This paper of the authors is devoted to the continuation of their research related to matrix representations of oversemigroups of finite semigroups.

Keywords: oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroups, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

References

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2013). On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics*, 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Ser. of mathematics*, 32(1), 36–49. [in Ukrainian]
5. Drozd, Yu. A. (1977). *Pro ruchni ta dyki matrychni problemy* [On tame and wild matrix problems]. Matrix problems. Kyiv: Institute of Math. of AN of Ukrain. SSR [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two annihilating idempotents. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Ser. of mathematics and computer science*, 36(1), 7–15 [in Ukrainian].
7. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin Taras Shevchenko Nat. University of Kyiv, ser. physics and mathematics*, 3, 110–114. [in Ukrainian].
8. Bondarenko, V. M., & Lytvynchuk, I. V. (2012). O nekotorykh ruchnykh i difikh matrichnykh zadachakh postoyannogo ranga [On some tame and wild matrix problems of constant rank]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 23(1), 19–27 [in Russian].
9. Gelfand, I. M., & Ponomarev, V. A. (1968). Insecomposable representations of the Lorentz groups. *Russian Math. Surveys*, 23, 1–58.
10. Bondarenko, V. M. (1975). Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2. *Math. USSR Sbornik*, 25(1), 58–68.

Одержано 15.10.2023

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).22-28](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).22-28)**М. Ф. Городній¹, О. А. Печериця²**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
horodnii@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9991-910X>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
pecheritsa.aleksey@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7016-9854>

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРИ

Отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на всій числовій осі розв'язку одного нелінійного диференціального рівняння з кусково-сталим операторним коефіцієнтом у лінійній частині.

Ключові слова: банахів простір, нелінійне диференціальне рівняння, обмежений розв'язок, лінійний неперервний оператор, кусково-сталий операторний коефіцієнт.

1. Вступ. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — банахів простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X , $C_b(\mathbb{R}, X)$ — банахів простір усіх неперервних і обмежених на \mathbb{R} функцій $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ з нормою $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$.

Зафіксуємо натуральне число p , оператори $A, B; A_k, 1 \leq k \leq p$, з $L(X)$, дійсні числа $t_0 < t_1 < \dots < t_p$, покладемо $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ і розглянемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = T(t)x(t) + f(t, x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в якому $T(t) = A, t \geq t_p; T(t) = A_k, t_{k-1} \leq t \leq t_k, 1 \leq k \leq p; T(t) = B, t < t_0; f : \mathbb{R} \times X \times X \rightarrow X$ — деяке відображення; y — фіксована функція з $C_b(\mathbb{R}, X)$. Обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1) будемо називати таку функцію $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Мета цієї статті — отримати достатні умови для операторів $A, B; A_k, 1 \leq k \leq p$, і відображення f , які забезпечують виконання такої умови.

Умова обмеженості. Для довільної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ диференціальне рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок.

Для лінійного диференціального рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом, частковим випадком якого є рівняння

$$x'(t) = T(t)x(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

умова обмеженості та її зв'язок з умовою експоненціальної дихотомії досліджувались, зокрема, в [1], [2], [3], [4], [5]. Різні підходи до дослідження існування обмежених розв'язків нелінійних аналогів таких рівнянь можна знайти в [3], [4], [5].

2. Зображення диференціального рівняння (2) в еквівалентному операторному вигляді. Зазначимо, що коли $x \in$ відповідним до $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обмеженим розв'язком диференціального рівняння (2), то додатково x' є неперервною функцією на $\widehat{\mathbb{R}}$ і

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|x'(t)\| \leq L\|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

де $L = \max\{\|A\|, \|B\|, \|A_k\|, 1 \leq k \leq p\}$.

Позначимо через Y набір усіх функцій $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$ таких, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $u'(t)$, u' — неперервна функція на $\widehat{\mathbb{R}}$ і $\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'(t)\| < +\infty$. Легко переконатися, що Y — лінійний нормований простір з поточковим додаванням і множенням на комплексне число і нормою

$$\|u\|_Y = \|u\|_\infty + \sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'(t)\|.$$

Далі використовується така лема.

Лема 1. $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банахів простір.

Доведення. Нехай $\{u_m, m \geq 1\}$ — фундаментальна послідовність елементів Y . З означення $\|\cdot\|_Y$ випливає, що тоді послідовність $\{u_m, m \geq 1\}$ є фундаментальною і в банаховому просторі $C_b(\mathbb{R}, X)$, а отже, знайдеться така функція $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що

$$\|u_m - u\|_\infty \rightarrow 0, m \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Доведемо що для кожного фіксованого $t_* \in \widehat{\mathbb{R}}$ існує $u'(t_*)$, а також u' є неперервною функцією на $\widehat{\mathbb{R}}$. Зафіксуємо такі дійсні числа a, b , що $a < t_* < b$, $[a, b] \subset \subset \widehat{\mathbb{R}}$. Знову скориставшись фундаментальністю послідовності $\{u_m, m \geq 1\}$ в просторі Y , робимо висновок, що послідовність $\{u_m(t), t \in [a, b], m \geq 1\}$ є фундаментальною в банаховому просторі $C^1([a, b], X)$ усіх неперервно диференційованих за нормою на $[a, b]$ функцій $v : [a, b] \rightarrow X$ з нормою

$$\|v\|_{C^1} = \max_{t \in [a, b]} \|v(t)\| + \max_{t \in [a, b]} \|v'(t)\|.$$

Тому, з урахуванням (3), існує $u'(t_*)$, $u'_m(t_*) \rightarrow u'(t_*)$, $m \rightarrow \infty$, а також функція $u' : \widehat{\mathbb{R}} \rightarrow X$ неперервна на $\widehat{\mathbb{R}}$.

Зазначимо тепер, що при фіксованому $\varepsilon > 0$ внаслідок фундаментальності $\{u_m, m \geq 1\}$ в просторі Y

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall q \geq 1 \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{R}} : \|u'_m(t) - u'_{m+q}(t)\| < \varepsilon. \quad (4)$$

Перейшовши в (4) до границі при $q \rightarrow \infty$, матимемо:

$$\forall m \geq m_0 \quad \forall t \in \widehat{\mathbb{R}} : \|u'_m(t) - u'(t)\| \leq \varepsilon.$$

Тому

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'(t)\| \leq \varepsilon + \sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'_{m_0}(t)\|, \quad (5)$$

а також

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|u'_m(t) - u'(t)\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Із (3), (5), (6) випливає, що $u \in Y$ і $u_m \rightarrow u$, $m \rightarrow \infty$, в Y .

Лему 1 доведено.

Нехай лінійне диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості. Покладемо

$$D(\mathcal{L}) = \{x \in Y \mid \text{існує така функція } y \in C_b(\mathbb{R}, X), \text{ що} \\ x \text{ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (2), відповідний до } y\}$$

і визначимо лінійний оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset Y \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$ за таким правилом. Для кожної функції $x \in D(\mathcal{L})$ $\mathcal{L}x$ — така функція з $C_b(\mathbb{R}, X)$, що

$$(\mathcal{L}x)(t) = x'(t) - T(t)x(t), \quad t \in \widehat{\mathbb{R}}.$$

При цьому диференціальне рівняння (2) записується в операторному вигляді $\mathcal{L}x = y$.

Лема 2. *Якщо диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості, то оператор \mathcal{L} замкнений.*

Доведення. Зафіксуємо таку послідовність $\{x_m, m \geq 1\} \subset D(\mathcal{L})$, що $x_m \rightarrow x, m \rightarrow \infty$, в Y і $\mathcal{L}x_m \rightarrow y, m \rightarrow \infty$, в $C_b(\mathbb{R}, X)$. Скориставшись означенням $\|\cdot\|_Y$, робимо висновок, що для функції $\tilde{y}(t) = x'(t) - T(t)x(t), t \in \widehat{\mathbb{R}}$, справджується співвідношення

$$\sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|(\mathcal{L}x_m)(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \sup_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|x'_m(t) - x'(t)\| + \max_{t \in \widehat{\mathbb{R}}} \|T(t)\| \cdot \|x_m - x\|_\infty \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Тому $y(t) = \tilde{y}(t)$ для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}}$, а отже, функція x є відповідним до y єдиним обмеженим розв'язком рівняння (2), тобто $x \in D(\mathcal{L}), \mathcal{L}x = y$.

Лему 2 доведено.

3. Обмежені розв'язки диференціального рівняння (1). Позначимо через $\bar{0}$ нульовий елемент в просторі X . Основним результатом даної статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

- i1) *лінійне диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості;*
- i2) *існує така стала $M > 0$, що для кожної функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ і відповідного до y єдиного обмеженого розв'язку x рівняння (2) виконується нерівність $\|x\|_\infty \leq M\|y\|_\infty$;*
- i3) *відображення f неперервне на $\mathbb{R} \times X \times X$ за нормою, тобто*

$$\forall(t_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R} \times X \times X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall(t, u, v) \in \mathbb{R} \times X \times X, \\ |t - t_0| + \|u - u_0\| + \|v - v_0\| < \delta : \|f(t, u, v) - f(t_0, u_0, v_0)\| < \varepsilon;$$

- i4) $\exists C_1 > 0 \quad \forall u_1, u_2, v \in X \quad \forall t \in \mathbb{R} : \|f(t, u_1, v) - f(t, u_2, v)\| \leq C_1\|u_1 - u_2\|;$
- i5) $\exists C_2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall v \in X : \|f(t, \bar{0}, v)\| \leq C_2(1 + \|v\|);$
- i6) $MC_1 < 1$.

Тоді диференціальне рівняння (1) задовольняє умову обмеженості.

Доведення. Зафіксуємо функцію $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Покладемо

$$y_1(t) = f(t, \bar{0}, y(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Із умов і3), і5) випливає, що $y_1 \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Внаслідок умови і1) диференціальне рівняння (2) має єдиний обмежений розв'язок x_1 , відповідний до функції y_1 . Далі для кожного $n \geq 2$ визначимо функцію x_n як єдиний обмежений розв'язок рівняння (2), відповідний до функції $y_n(t) = f(t, x_{n-1}(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $y_n \in C_b(\mathbb{R}, X)$, оскільки внаслідок умов і3), і4) функція y_n неперервна на \mathbb{R} , а також для кожного $t \in \mathbb{R}$

$$\|y_n(t)\| \leq \|y_{n-1}(t)\| + \|y_n(t) - y_{n-1}(t)\| \leq \|y_{n-1}\|_\infty + \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq \|y_{n-1}\|_\infty + C_1 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_\infty.$$

Тут $x_0(t) = \bar{0}$, $t \in \mathbb{R}$.

Із умов і2), і4) випливає, що для кожного $n \geq 2$

$$\|x_n - x_{n-1}\|_\infty \leq M \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t, x_{n-1}(t), y(t)) - f(t, x_{n-2}(t), y(t))\| \leq MC_1 \|x_{n-1} - x_{n-2}\|_\infty,$$

Тому, з урахуванням умови і6), послідовність $\{x_n, n \geq 1\}$ фундаментальна в банаховому просторі $C_b(\mathbb{R}, X)$, а отже, існує така функція $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, що $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Доведемо, що x є відповідним до y обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1). Скориставшись явним виглядом розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку, робимо висновок, що для кожного $n \geq 2$

$$x_n(t) = e^{A(t-t_p)} x_n(t_p) + \int_{t_p}^t e^{A(t-s)} f(s, x_{n-1}(s), y(s)) ds, \quad t \geq t_p.$$

Звідси, перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо

$$x(t) = e^{A(t-t_p)} x(t_p) + \int_{t_p}^t e^{A(t-s)} f(s, x(s), y(s)) ds, \quad t \geq t_p,$$

а отже, для кожного $t > t_p$

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t), y(t)).$$

Аналогічно перевіряється, що для кожного $t \in \widehat{\mathbb{R}} \setminus [t_p, +\infty)$ теж існує $x'(t)$ і виконується рівність (1).

Доведемо єдиність цього обмеженого розв'язку. Нехай функція u також є відповідним до y обмеженим розв'язком диференціального рівняння (1). Тоді x і u є обмеженими розв'язками лінійного диференціального рівняння (2), що відповідають функціям $y_x(t) = f(t, x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$, і $y_u(t) = f(t, u(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$ з простору $C_b(\mathbb{R}, X)$. Тому, внаслідок умов і2), і4),

$$\|x - u\|_\infty \leq M \|y_x - y_u\|_\infty \leq MC_1 \|x - u\|_\infty.$$

Оскільки $MC_1 < 1$, то $x = u$.

Теорему 1 доведено.

Нехай $G : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ — така неперервна за нормою на \mathbb{R} операторнозначна функція, що $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|G(t)\| = C_3 < +\infty$.

Наслідок 1. *Якщо для диференціального рівняння (2) виконуються умови i1), i2) теореми 1, а також $MC_3 < 1$, то диференціальне рівняння*

$$x'(t) = (T(t) + G(t))x(t) + y(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

задовольняє умову обмеженості.

Для доведення наслідка 1 досить застосувати теорему 1 до відображення $f(t, u, v) = G(t)u + v$.

Із леми 2 і теореми Банаха про існування оберненого оператора для замкненого оператора випливає, що коли диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості, то оператор \mathcal{L} має неперервний обернений оператор $\mathcal{L}^{-1} : C_b(\mathbb{R}, X) \rightarrow Y$. Розглянемо лінійний оператор $\mathcal{T} : C_b(\mathbb{R}, X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}, X)$, який визначається за правилом $\mathcal{T}u = \mathcal{L}^{-1}u$, $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Оскільки $\|u\|_\infty \leq \|u\|_Y$ для кожної функції $u \in C_b(\mathbb{R}, X)$, то оператор \mathcal{T} теж обмежений. Тому справджується таке твердження.

Теорема 2. *Якщо диференціальне рівняння (2) задовольняє умову обмеженості, то умова i2) теореми 1 виконується зі сталою $M = \|\mathcal{T}\|$.*

Для диференціального рівняння

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + y(t), & t \geq 0, \\ x'(t) = Bx(t) + y(t), & t < 0, \end{cases} \quad (7)$$

яке є частковим випадком рівняння (2), норму оператора \mathcal{T} можна оцінити таким чином.

Відомо (див., наприклад, [2], гл. 2, § 4), що коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з уявною віссю $i\mathbb{R} = \{it \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\sigma_-(A)$ і $\sigma_+(A)$ — частини спектра $\sigma(A)$, що лежать відповідно у лівій і правій півплощині \mathbb{C} (одна з них може бути порожньою), $P_\pm(A)$ — проєктори Рісса, що відповідають $\sigma_\pm(A)$, то простір X зображується у вигляді прямої суми $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ інваріантних відносно оператора A підпросторів $X_\pm(A) = P_\pm(A)X$. У роботі [6] доведено, що диференціальне рівняння (7) задовольняє умову обмеженості тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

- j1) $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$;
- j2) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Безпосередньо перевіряється що при цьому відповідний до функції $y \in C_b(\mathbb{R}, X)$ обмежений розв'язок x рівняння (7) зображується таким чином: якщо $t \geq 0$, то

$$\begin{aligned} x(t) = & \int_0^t e^{A(t-s)} P_-(A) y(s) ds - \int_t^{+\infty} e^{A(t-s)} P_+(A) y(s) ds + \\ & + e^{At} P_- \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} P_-(B) y(s) ds + e^{At} P_- \int_0^{+\infty} e^{-As} P_+(A) y(s) ds; \end{aligned} \quad (8)$$

якщо $t < 0$, то

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \int_{-\infty}^t e^{B(t-s)} P_-(B)y(s)ds - \int_t^0 e^{B(t-s)} P_+(B)y(s)ds - \\
 & - e^{Bt} P_+ \int_0^{+\infty} e^{-As} P_+(A)y(s)ds - e^{Bt} P_+ \int_{-\infty}^0 e^{-Bs} P_-(B)y(s)ds.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Тут P_- , P_+ – проєктори, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$. Внаслідок нерівності (4.5) із [2, с. 119], існують такі додатні сталі M_A , M_B , γ_A , γ_B , що для кожного $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \max\{\|e^{At} P_-(A)\|, \|e^{-At} P_+(A)\|\} & \leq M_A e^{-\gamma_A t}, \\
 \max\{\|e^{Bt} P_-(B)\|, \|e^{-Bt} P_+(B)\|\} & \leq M_B e^{-\gamma_B t}.
 \end{aligned}$$

Тому, скориставшись зображенням (8) і операторними рівностями $P_- = P_-(A)P_-$, $P_+ = P_+(B)P_+$, для кожного $t \geq 0$ матимемо

$$\begin{aligned}
 \|x(t)\| \leq & M_A \|y\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_A |t-s|} ds + \\
 & + e^{-\gamma_A t} \|P_-\| \left(M_B \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma_B |s|} ds + M_A \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_A |s|} ds \right) \leq K_+ \|y\|_\infty,
 \end{aligned}$$

де

$$K_+ = M_A \left(\frac{2}{\gamma_A} + \|P_-\| \left(\frac{M_B}{\gamma_B} + \frac{M_A}{\gamma_A} \right) \right).$$

Аналогічно внаслідок (9) $\|x(t)\| \leq K_- \|y\|_\infty$ для кожного $t < 0$, де

$$K_- = M_B \left(\frac{2}{\gamma_B} + \|P_+\| \left(\frac{M_B}{\gamma_B} + \frac{M_A}{\gamma_A} \right) \right).$$

Отже, $\|x\|_\infty \leq \max\{K_+, K_-\} \|y\|_\infty$.

Оскільки сталі K_+ , K_- не залежать від y , то $\|\mathcal{T}\| \leq \max\{K_+, K_-\}$ і тому має місце таке твердження.

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови $j1)$, $j2)$ і нерівність $C_3 \max\{K_+, K_-\} < 1$, то диференціальне рівняння*

$$\begin{cases} x'(t) = (A + G(t))x(t) + y(t), & t \geq 0, \\ x'(t) = (B + G(t))x(t) + y(t), & t < 0, \end{cases}
 \tag{10}$$

задовольняє умову обмеженості.

4. Висновки. У статті отримано достатні умови існування єдиного обмеженого на \mathbb{R} розв'язку нелінійного диференціального рівняння (1) з кусково-сталім операторним коефіцієнтом $T(t)$ в лінійній частині. Як наслідок, наведено зручні для застосувань достатні умови існування єдиного обмеженого на \mathbb{R} розв'язку лінійного диференціального рівняння (10) зі змінним операторним коефіцієнтом, які не використовують поняття експоненціальної дихотомії.

Список використаної літератури

1. Баскаков А. Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений. *Успехи математических наук*. 2013. Вып. 68, № 1 (409). С. 77–128.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва : Наука, 1970. 536 с.
3. Бойчук О. А., Журавльов В. П., Покутний О. О. Обмежені розв'язки еволюційних рівнянь. *Український математичний журнал*. 2018. Вып. 70, № 1. С. 7–28.
4. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. Киев : Вища школа, 1992. 319 с.
5. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Москва : Мир, 1985. 376 с.
6. Городній М. Ф., Печериця О. А. Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами. *Нелінійні коливання*. 2021. Вып. 24, № 2. С. 147–157.

Horodnii M. F., Pecherytsia O. A. Bounded solutions to a nonlinear differential equation in a Banach space.

For a nonlinear differential equation with a piecewise constant operator coefficient in the linear part, sufficient conditions for the existence of a unique solution bounded on the entire real axis are obtained.

Keywords: Banach space, nonlinear differential equation, bounded solution, linear bounded operator, piecewise constant operator coefficient.

References

1. Baskakov, A. G. (2013). Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 68(1(409)), 77–128 [in Russian].
2. Daletskii, Yu. L., & Krein, M. G. (1970). *Stability of solutions of differential equations in a Banach space*. Moscow: Nauka [in Russian].
3. Boichuk, O. A., Zhuravlov, V. P., & Pokutnyi, O. O. (2018). Bounded solutions of evolutionary equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70(1), 7–28 [in Ukrainian].
4. Dorogovtsev, A. Ya. (1992). *Periodic and stationary regimes of infinite-dimensional deterministic and stochastic dynamical systems*. Kyiv: Vyshcha Shkola [in Russian].
5. Henry, D. (1985). *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Moscow: Mir [in Russian].
6. Horodni, M. F., & Pecherytsia, O. A. (2021). Bounded solutions of a differential equation with piecewise constant operator coefficients. *Nonlinear Oscillations*, 24(2), 147–157 [in Ukrainian].

Одержано 11.08.2023

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).29-33](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).29-33)О. І. Клесов¹, О. В. Колеснік²¹ Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,

завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

доктор фізико-математичних наук, професор

voselk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0365-7716>² Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

lxndr.kolesnik@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8243-6831>

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ У ПІДСИЛЕНОМУ ЗАКОНІ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РЕКОРДІВ У F^α СХЕМІ

У статті вивчається асимптотична поведінка кількості рекордів у так званій F^α -схемі, яка узагальнює класичну постановку для незалежних однаково розподілених випадкових величин. Отриманий результат є новим навіть у класичній постановці і може трактуватися як оцінка швидкості збіжності у теоремі Реньї.

Ключові слова: незалежні однаково розподілені випадкові величини, F^α -схема, рекорди, кількість рекордів, підсилений закон великих чисел, швидкість збіжності.

1. Вступ. Розглянемо послідовність $\{X_k, k \geq 1\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин, функція розподілу яких є неперервною. Тоді події типу $\{X_i = X_j\}$ мають ймовірність 0, якщо $i \neq j$. Нехай $L(1) = 1$. Означимо рекурентно випадкові величини

$$L(n) = \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

вважаючи, що $\inf \emptyset := +\infty$. Члени послідовності $L = \{L(n), n \geq 1\}$ називаються *моментами рекордів*, побудованими з послідовності $\{X_k, k \geq 1\}$. Ми також розглядаємо послідовність випадкових величин $\mu = \{\mu(n), n \geq 1\}$, означену співвідношенням

$$\mu(n) = \#\{k : L(k) \leq n\}, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

Зрозуміло, що $\mu(n)$ — це *кількість рекордів*, що трапились до моменту n включно.

Граничні властивості послідовності $\{\mu(n)\}$ для збіжності розподілів вивчені повною мірою (див., наприклад, [8]), але збіжності майже напевно приділялось набагато менше уваги. Так, Реньї [9] довів, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln(n)} = 1, \quad \text{майже напевно} \quad (3)$$

(сучасне доведення цього результату можна знайти, наприклад, в [5] на стор. 307–308). Спроби узагальнити цей результат на залежні випадкові величини $\{X_n\}$ є і досі невдалими. Існує лише один випадок, відмінний від класичного, коли це вдається зробити.

В роботі [10] вперше було розглянуто так звану F^α -схему, яка будується за заданої функції розподілу та послідовності додатних чисел $\{\alpha_k\}$. Зрозуміло, що $F^{\alpha_n}(x)$ є функцією розподілу для кожного $n \geq 1$. Сукупність незалежних величин $\{X_n\}$ називається F^α -схемою, якщо функцією розподілу випадкової величини $X_n \in F^{\alpha_n}(x)$. Якщо всі α_n є рівними між собою, то F^α -схема — це сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо ж не всі α_n є рівними між собою, то F^α -схема — це узагальнення класичного випадку.

При вивченні F^α -схеми корисними є допоміжні випадкові величини

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_k \text{ є рекордом,} \\ 0, & \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

У роботі [7] доведено, що $\{I_k\}$ є незалежними випадковими величинами (див. також [1]) з такими ймовірностями “успіху”

$$\mathbf{P}(I_k = 1) = \frac{\alpha_k}{A_k},$$

де $A_1 = \alpha_1$, $A_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, $k \geq 2$. Оскільки I_k — це випадкова величина Бернуллі, то

$$\mathbf{E}I_k = \frac{\alpha_k}{A_k}, \quad \mathbf{D}I_k = \frac{\alpha_k}{A_k} \left(1 - \frac{\alpha_k}{A_k}\right). \quad (4)$$

Звідси випливає, що

$$\mathbf{E}\mu(n) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D}\mu(n) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k} \left(1 - \frac{\alpha_k}{A_k}\right). \quad (6)$$

Для F^α -схеми підсилений закон великих чисел розглядався у багатьох роботах (огляд існуючих результатів наведено в [3]). Один з випадків F^α -схеми, коли підсилений закон великих чисел можна довести, наведено в [4]:

$$\alpha_k = k^s, \quad s > -1. \quad (7)$$

Для цієї F^α -схеми

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n)}{\ln(n)} = s + 1, \quad \text{майже напевно.} \quad (8)$$

Нижче ми наведемо покращення цього результату, яке за формою нагадує підсилений закон великих чисел Марцинкевича–Зігмунда для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин (див., наприклад, [6]), яке вдається встановити для F^α -схеми (7) з обмеженням $s \in \mathbf{N}$.

2. Основний результат. Спочатку ми наведемо загальний результат, а після нього наслідок для класичного випадку.

Теорема 1. Розглянемо F^α -схему (7) з $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Тоді для довільного дійсного $r > \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n))^{1-r} \left(\frac{\mu(n)}{\ln(n)} - s - 1 \right) = 0, \quad \text{майже напевно.} \quad (9)$$

Зрозуміло, що (9) при $r < 1$ дійсно покращує (8).

Доведення. Для доведення теореми використаємо формула Фаульхабера, відому ще з XVII сторіччя:

$$\sum_{k=1}^n k^s = \sum_{k=0}^s f_k n^{s-k+1}, \quad f_k = \frac{C_{s+1}^k B_k}{s+1}, \quad (10)$$

де C_{s+1}^k — біноміальні коефіцієнти, а B_k — числа Бернуллі. Зрозуміло, що

$$f_0 = \frac{1}{s+1}. \quad (11)$$

Позначимо суму у лівій частині (10) через F_n . Оскільки

$$\frac{n^s}{F_n} - \frac{1}{f_0 n} = \frac{f_0 n^{s+1} - F_n}{f_0 n F_n} = \frac{O(n^s)}{f_0 n F_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

$$\frac{n^s}{F_n} = \frac{1}{f_0 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (12)$$

Тому

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0} (\ln(n) + \gamma + o(1)) + O(1),$$

на підставі формули Ойлера

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

де γ — константа Ойлера–Маскероні. Використавши (5), отримуємо

$$\mathbf{E}\mu(n) = \frac{\ln(n)}{f_0} + O(1). \quad (13)$$

Підставивши (12) в (4), отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{E}I_k &= \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0 k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ \mathbf{D}I_k &\leq \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0 k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathbf{D}I_k}{(\ln(k))^{2r}} < \infty,$$

оскільки $r > \frac{1}{2}$. На підставі підсиленого закону великих чисел Колмогорова для неоднаково розподілених незалежних випадкових величин це означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{(\ln(n))^r} = 0, \quad \text{майже напевно.}$$

Якщо асимптотику (13) підставити в цю рівність та врахувати (11), то отримаємо (9).

З теореми 1 ми отримуємо покращення результату Ренні, який раніше не зустрічався у літературі (його можна також назвати результатом про швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел Ренні (3)).

Наслідок 1. *Нехай $s = 0$. Тоді для будь-якого $\frac{1}{2} < r < 1$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n))^{1-r} \left(\frac{\mu(n)}{\ln(n)} - 1 \right) = 0, \quad \text{майже напевно.} \quad (14)$$

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі [9] було доведено ще один результат стосовно поведінки майже напевно n -го рекорду, а саме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(L(n))}{n} = 1, \quad \text{майже напевно.}$$

Тому можна сподіватись, що аналогічний результат є справедливим також і для F^α -схеми (7). З точки зору, викладеній в монографії [2], послідовності $\{L(n)\}$ та $\{\mu(n)\}$ є дуальними об'єктами, які є асимптотично квазіоберненими один до іншого. Тому асимптотична поведінка одного з них визначає асимптотичну поведінку іншого. Безпосереднє застосування підходу, викладеного в [2], неможливо у випадку F^α -схеми, оскільки нормування в (3) не є псевдорегулярною функцією. З іншого боку, шляхи подолання такого ускладнення намічено в [3].

Перспективним напрямком подальших досліджень є розгляд більш загальних F^α -схем. Зокрема, у теоремі 1, як видається, можна позбавитися обмеження $s \in \mathbf{N}$. Ще більш загальні F^α -схеми потребують більш детального розгляду асимптотики послідовності

$$\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{A_k},$$

при $n \rightarrow \infty$. У класичному випадку ця задача зводиться до доведення формули Ойлера. Отримання подібного результату у загальному випадку не є простою задачею.

Список використаної літератури

1. Borovkov K., Pfeifer D. On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 1995. Vol. 45, No. 1–2. P. 65–79.
2. Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes. Berlin : Springer Verlag, 2018.
3. Doukhan P., Klesov O. I., Pakes A., Steinebach J. G. Limit theorems for record counts and times in the F^α -scheme *Extremes*. 2013. Vol. 16, No. 2. P. 147–171.
4. Doukhan P., Klesov O. I., Steinebach J. G. Strong laws of large numbers in an F^α -scheme. *Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels*. Springer International Publishing : Switzerland, 2015. P. 287–303.

5. Gut A. Probability: A Graduate Course. Berlin : Springer-Verlag, 2005.
6. Klesov O. I. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Berlin : Springer Verlag, 2014.
7. Nevzorov V. B. On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*. 1985. Vol. 142. P. 109–118.
8. Nevzorov V. B. Records: Mathematical Theory. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.
9. Rényi A. A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations Combinatorial Methods in Probability Theory. Aarhus : Denmark, 1962. P. 10–117.
10. Yang M. On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 1975. Vol. 12. P. 148–154.

O. I. Klesov, O. V. Kolesnik Rate of convergence in the strong law of large numbers of records in an F^α scheme.

The asymptotic behavior of the number of records in a so called F^α -scheme is considered in the paper. This setting generalizes the classical setting involving independent identically distributed random variables. The result obtained in the paper is new even in the classical setting and can be viewed as an estimate of the rate of convergence in Rényi's theorem.

Keywords: independent identically distributed random variables, F^α -scheme, records, number of records, strong law of large numbers, rate of convergence.

References

1. Borovkov, K., & Pfeifer, D. (1995). On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 45(1–2), 65–79.
2. Buldygin, V. V., Indlekofer, K.-H., Klesov, O. I., & Steinebach, J. (2018). *Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes*. Berlin: Springer Verlag.
3. Doukhan, P., Klesov, O. I., Pakes, A., & Steinebach, J. G. (2013). Limit theorems for record counts and times in the F^α -scheme *Extremes*, 16(2), 147–171.
4. Doukhan, P., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2015). Strong laws of large numbers in an F^α -scheme *Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels*. Springer International Publishing: Switzerland.
5. Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Berlin: Springer-Verlag.
6. Klesov, O. I. (2014). *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables*. Berlin: Springer Verlag.
7. Nevzorov, V. B. (1985). On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 142, 109–118.
8. Nevzorov, V. B. (2001). *Records: Mathematical Theory*. Providence, RI: American Mathematical Society.
9. Rényi, A. A. (1962). *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations Combinatorial Methods in Probability Theory*. Aarhus: Denmark.
10. Yang, M. (1975). On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.*, 12, 148–154.

Одержано 15.10.2023

УДК 512.579, 512.53

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).34-41](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).34-41)**Я. А. Крикля**

ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»,
аспірантка, кафедра алгебри та системного аналізу,
krivorotko.yana@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8860-3433>

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВІЛЬНИХ ЛІВИХ n -ТРИНІЛЬПОТЕНТНИХ ТРІОЇДІВ

Поняття тріюда та триалгебри виникли в праці Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, які побудували ці алгебри за допомогою операд, асоційованих з ланцюговими модулями симплексів та політопів Сташеффа. Триалгебри, як відомо, є лінійними аналогами тріюдів. Серед перших результатів про тріюди є побудова Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко вільного об'єкта рангу 1 у многовиді тріюдів. Тріюди й напівгрупи природно пов'язані між собою: якщо операції тріюда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Останнім часом кількість робіт з теорії тріюдів та триалгебр стрімко зростає, водночас значна увага приділена побудові відносно вільних об'єктів. У цій роботі продовжено вивчення вільних лівих n -тринільпотентних тріюдів. Охарактеризовано всі максимальні підтріюди вільних лівих n -тринільпотентних тріюдів ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n -тринільпотентний тріюд містить підтріюд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n -тринільпотентного тріюда в скінченному випадку. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії триалгебр.

Ключові слова: тріюд, підтріюд, вільний лівий n -тринільпотентний тріюд, напівгрупа.

1. Вступ. Нагадаємо, що тріюд — це непорожня множина T , наділена трьома бінарними асоціативними операціями \dashv , \vdash та \perp , які задовольняють наступні вісім аксіом:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (T1)$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (T2)$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T3)$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \quad (T4)$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \quad (T5)$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \quad (T6)$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \quad (T7)$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (T8)$$

для всіх $x, y, z \in T$. Цей клас універсальних алгебр було введено Ж.-Л. Лодде та М. О. Ронко [7] під час вивчення тернарних планарних дерев. Тріюїди мають широке застосування в теорії триалгебр [1–3, 5, 7]. Вони також мають тісні зв'язки з такими алгебраїчними структурами як дімоноїди [4, 10, 11, 16], діалгебри [6, 8, 9], допельнашівгрупи [14, 15] та n -кратні напівгрупи [19, 22]. Для подальшої інформації про тріюїди див., наприклад, оглядові статті [17, 18].

Теорія многовидів тріюїдів була розвинута в [4, 13, 18, 20, 23–27]. У [20] було побудовано вільні ліві (праві) n -тринільпотентні тріюїди довільного рангу, а у [21] охарактеризовано найменшу ліву (праву) n -тринільпотентну конгруенцію на вільному тріюїді. У цій статті продовжено дослідження, розпочаті в [20, 21]. Нашою метою є вивчення деяких властивостей вільних лівих (правих) n -тринільпотентних тріюїдів довільного рангу. У роботі описано всі максимальні підтріюїди вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n -тринільпотентний тріюїд містить підтріюїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда в скінченному випадку. Використовуючи принцип двоїстості, можна одержати опис відповідних властивостей вільних правих n -тринільпотентних тріюїдів. Отримані результати можуть знайти деякі застосування в теорії триалгебр.

2. Ліві n -тринільпотентні тріюїди. Наведемо визначення вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда [20]. Як зазвичай, \mathbb{N} позначає множину всіх натуральних чисел. Через Ω позначимо сигнатуру тріюїда. Нехай a_1, \dots, a_n — індивідуальні змінні. Через $P(a_1, \dots, a_n)$ будемо позначати множину всіх термів алгебр сигнатури Ω , які мають вигляд $a_1 \circ_1 \dots \circ_{n-1} a_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1, \dots, \circ_{n-1} \in \Omega$. Тріюїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається лівим тринільпотентним, якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$, будь-якого $a \in T$ та будь-якого $p(a_1, \dots, a_n) \in P(a_1, \dots, a_n)$ виконуються наступні тотожності:

$$p(a_1, \dots, a_n) * a = p(a_1, \dots, a_n),$$

$$p(a_1, \dots, a_n) \vdash a = a_1 \vdash \dots \vdash a_n,$$

де $*$ $\in \{\dashv, \perp\}$. Найменше таке n називається індексом лівої тринільпотентності тріюїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$. Для $k \in \mathbb{N}$ лівий тринільпотентний тріюїд з індексом лівої тринільпотентності $\leq k$ називається лівим k -тринільпотентним. Праві k -тринільпотентні тріюїди визначаються двоїстим чином [20]. Зрозуміло, що операції будь-якого лівого (правого) 1-тринільпотентного тріюїда збігаються та він є напівгрупою лівих (правих) нулів.

Клас всіх лівих (правих) n -тринільпотентних тріюїдів утворює підмноговид многовиду тріюїдів. Тріюїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n -тринільпотентних тріюїдів, називається вільним лівим (правим) n -тринільпотентним тріюїдом.

Нагадаємо конструкцію вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда [20].

Нехай $n, k \in \mathbb{N}$ та $L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Будемо вважати $L + k = \{m + k \mid m \in L\}$. Зрозуміло, що $\emptyset + k = \emptyset$. Для $L \neq \emptyset$ покладемо $L^{k,n} = \{m \in L \mid k + m \leq n\}$ та позначимо найменше число множини L через L_{min} . Очевидно, $L^{k,n} = \emptyset$, якщо $k + m > n$ для всіх $m \in L$.

Нехай X — довільна непорожня множина, $F[X]$ — вільна напівгрупа на X та $w \in F[X]$. Довжина слова w позначається через l_w . Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Якщо

$l_w \geq n$, то \overrightarrow{w}^n позначає початкове підслово довжини n слова w , та якщо $l_w < n$, то $\overrightarrow{w}^n = w$. Визначимо операції \dashv , \vdash та \perp на

$$V_n = \{(w, L) \mid w \in F[X], l_w \leq n, L \subseteq \{1, 2, \dots, l_w\}, L \neq \emptyset\}$$

за правилами:

$$\begin{aligned} (w, L) \dashv (u, R) &= (\overrightarrow{wu}^n, L), \\ (w, L) \vdash (u, R) &= \begin{cases} (\overrightarrow{wu}^n, \{n\}), & n < l_w + R_{min}, \\ (\overrightarrow{wu}^n, R^{l_w, n} + l_w) & \text{в інших випадках,} \end{cases} \\ (w, L) \perp (u, R) &= (\overrightarrow{wu}^n, L \cup (R^{l_w, n} + l_w)) \end{aligned}$$

для всіх $(w, L), (u, R) \in V_n$. Алгебра $(V_n, \dashv, \vdash, \perp)$ позначається через $FT_n^l(X)$.

Теорема 1. ([20, Теорема 3.1]) $FT_n^l(X)$ є вільним лівим n -тринільпотентним тріоїдом.

Наслідок 1. ([21, Твердження 2.5]) Вільний лівий n -тринільпотентний тріоїд $FT_n^l(X)$, породжений скінченною множиною $X \times \{1\}$, є скінченним. Більш того, $|FT_n^l(X)| = \sum_{i=1}^n (2^i - 1) \cdot |X|^i$.

3. Деякі підтріоїди вільного лівого n -тринільпотентного тріоїда. Опишемо спочатку всі максимальні підтріоїди тріоїда $FT_n^l(X)$.

Підтріоїд тріоїда G є власним, якщо він не дорівнює G . Підтріоїд тріоїда G є максимальним, якщо він є власним підтріоїдом тріоїда G , який не міститься в будь-якому іншому власному підтріоїді тріоїда G .

Теорема 2. Нехай F — підтріоїд вільного лівого n -тринільпотентного тріоїда $FT_n^l(X)$, $n > 1$. Тоді F є максимальним тоді й лише тоді, коли існує $x \in X$ такий, що $F = V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$.

Доведення. Зауважимо що, якщо $n = 1$, то операції тріоїда $FT_n^l(X)$ збігаються та він є напівгрупою лівих нулів. Тому припустимо, що $n > 1$.

Нехай $x \in X$ та $(w, L), (u, R) \in V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$. Незавжно пересвідчитись, що $(w, L) * (u, R) \in V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$ для будь-якої операції $*$ $\in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Дійсно, оскільки $n > 1$, то довжина слова \overrightarrow{wu}^n буде більше ніж 1, і отже, $\overrightarrow{wu}^n \neq x$. Це означає, що $V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$ є підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$. Очевидно, що він є максимальним.

Навпаки, нехай F — максимальний підтріоїд тріоїда $FT_n^l(X)$. Оскільки $X \times \{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріоїда $FT_n^l(X)$, то $\{(x, \{1\}) \mid x \in X\} \not\subseteq F$, тобто існує $x \in X$ такий, що $(x, \{1\}) \notin F$. Таким чином, $F \subseteq V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$. Оскільки F є максимальним підтріоїдом тріоїда $FT_n^l(X)$, то отримуємо, що $F = V_n \setminus \{(x, \{1\})\}$.

Теорему доведено.

Нагадаємо, що дімоноїд [6] — це непорожня множина, наділена двома бінарними асоціативними операціями \dashv та \vdash , які задовольняють аксіоми (T1) — (T3). Дісполука або дімоноїд ідемпотентів [12] — це дімоноїд, у якого обидві операції ідемпотентні. У [12] було введено поняття дісполуки піддімоноїдів. Наведемо його визначення.

Якщо $\psi : D_1 \rightarrow D_2$ — гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_ψ позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1 .

Нехай D — довільний дімоноїд, J — деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\beta : D \rightarrow J : x \mapsto x\beta,$$

то кожний клас конгруенції Δ_β є піддімоноїдом дімоноїду D , а сам дімоноїд D є об'єднанням таких дімоноїдів D_ξ , $\xi \in J$, що

$$x\beta = \xi \Leftrightarrow x \in D_\xi = \Delta_\beta^x = \{t \in D \mid (x; t) \in \Delta_\beta\},$$

$$D_\xi \dashv D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad D_\xi \vdash D_\varepsilon \subseteq D_{\xi \vdash \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow D_\xi \cap D_\varepsilon = \emptyset.$$

У цьому випадку кажуть, що D розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або D є дісполукою J піддімоноїдів D_ξ , $\xi \in J$). Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то кажуть, що D є сполукою J піддімоноїдів D_ξ , $\xi \in J$. Якщо ж J є напівгрупою лівих (правих) нулів, то кажуть, що D є лівою (правою) сполукою J піддімоноїдів D_ξ , $\xi \in J$.

Застосовуючи поняття дісполуки піддімоноїдів, охарактеризуємо один важливий підтріюїд тріюїду $FT_n^l(X)$.

Теорема 3. *Нехай $n > 1$. Множина $R_n = \{(w, L) \in FT_n^l(X) \mid l_w = n\}$ є підтріюїдом тріюїда $FT_n^l(X)$. Крім того, операції \dashv та \perp на R_n збігаються та R_n є лівою сполукою піддімоноїдів, кожен із яких утворюється з напівгрупи лівих нулів та напівгрупи з нульовим множенням.*

Доведення. У випадку $n = 1$ операції тріюїда $FT_n^l(X)$ збігаються та $R_n = FT_n^l(X)$ є напівгрупою лівих нулів. Тому розглядаємо випадок $n > 1$.

Нехай $(w, L), (u, R) \in R_n$. Тоді $(w, L) * (u, R) \in R_n$ для будь-якої операції $*$ $\in \{\dashv, \vdash, \perp\}$, оскільки $\overrightarrow{w}u = w$. Звідси випливає, що R_n є підтріюїдом тріюїда $FT_n^l(X)$. Враховуючи, що $l_w = l_u = n$, маємо

$$(w, L) \dashv (u, R) = (w, L) \perp (u, R) = (\overrightarrow{w}u, L) = (w, L),$$

$$(w, L) \vdash (u, R) = (\overrightarrow{w}u, \{n\}) = (w, \{n\}).$$

Отже, операції \dashv та \perp на R_n збігаються і R_n є дімоноїдом.

Покажемо, що R_n є лівою сполукою піддімоноїдів. Для цього розглянемо множину

$$K = \{w \in F[X] \mid l_w = n\}.$$

Визначивши на множині K операцію за правилом: $wu = w$ для всіх $w, u \in F[X]$, отримаємо напівгрупу лівих нулів. Позначимо її через K_l . Визначимо далі відображення

$$f : R_n \rightarrow K_l : (w, L) \mapsto w.$$

Безпосередньо перевіряється, що f є сюр'єктивним гомоморфізмом. Зрозуміло, що класами конгруенції Δ_f є піддімоноїди

$$\{(w, L) \mid L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, L \neq \emptyset\}, \quad w \in K_l.$$

Покладемо

$$B_w = \{(w, L) | L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, L \neq \emptyset\}, w \in K_l.$$

Звідси R_n є лівою сполукою K_l піддімоноїдів $B_w, w \in K_l$. Очевидно, що кожний дімоноїд $B_w, w \in K_l$, є ізоморфним дімоноїду

$$(\{L | L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, L \neq \emptyset\}, \prec, \succ)$$

з операціями, визначеними за правилами:

$$L \prec R = L, \quad L \succ R = \{n\}.$$

Теорему доведено.

У роботі [20] показано, що група автоморфізмів вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда $FT_n^l(X)$ є ізоморфною симетричній групі на множині X . Природньо розглянути ендоморфізми вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда $FT_n^l(X)$. Через $End(FT_n^l(X))$ позначимо напівгрупу всіх ендоморфізмів тріюїда $FT_n^l(X)$.

Твердження 1. *Нехай X – непорожня скінченна множина. Тоді*

$$|End(FT_n^l(X))| = \left(\sum_{i=1}^n (2^i - 1) \cdot |X|^i \right)^{|X|}.$$

Доведення. Оскільки $X \times \{1\}$ є найменшою породжуючою множиною тріюїда $FT_n^l(X)$, то кожне відображення $\varphi : X \times \{1\} \rightarrow V_n$ індукує ендоморфізм тріюїда $FT_n^l(X)$. Навпаки, кожний ендоморфізм тріюїда $FT_n^l(X)$ однозначно визначається відображенням із множини $X \times \{1\}$ в тріюїд $FT_n^l(X)$. Добре відомо, що кількість всіх відображень із множини з k елементів у множину з m елементів дорівнює m^k . Отже, попередні міркування приводять нас до такої формули:

$$|End(FT_n^l(X))| = |V_n|^{|X|}.$$

Далі, застосовуючи наслідок 1, дійдемо висновку, що

$$|End(FT_n^l(X))| = \left(\sum_{i=1}^n (2^i - 1) \cdot |X|^i \right)^{|X|}.$$

Твердження доведено.

Зауваження 1. *Для того, щоб охарактеризувати відповідні властивості вільного правого n -тринільпотентного тріюїда, використовуємо принцип двоїстості.*

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі продовжено вивчення вільних лівих n -тринільпотентних тріюїдів. Охарактеризовано всі максимальні підтріюїди вільних лівих n -тринільпотентних тріюїдів ($n > 1$) та показано, що вільний лівий n -тринільпотентний тріюїд містить підтріюїд, який може бути представлений у вигляді лівої сполуки піддімоноїдів. Також підраховано потужність напівгрупи ендоморфізмів вільного лівого n -тринільпотентного тріюїда в скінченному випадку. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії триалгебр.

Список використаної літератури

1. Bagherzadeha F., Bremner M., Madariagab S. Jordan trialgebras and post-Jordan algebras. *J. Algebra*. 2017. Vol. 486. P. 360–395.
2. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 2006. Vol. 12, No. 2. P. 165–178.
3. Ebrahimi-Fard K. J. Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.* 2002. Vol. 61, No. 2 P. 139–147.
4. Huang J., Bai, Y., Chen Y. et al. Constructions of free dibands and tribands. *Semigroup Forum*. 2022. Vol. 104. P. 647–666. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10270-w>
5. Huang J., Chen Y. Gröbner–Shirshov bases theory for trialgebras. *Mathematics*. 2022. Vol. 9. 1207. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9111207>
6. Loday J.-L. Dialgebras. In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. *Springer-Verlag, Berlin*. 2001. Vol. 1763. P. 7–66.
7. Loday J. L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes. *Contemp. Math*. 2004. Vol. 346. p. 369–398. DOI: <https://doi.org/10.1090/conm/346/06296>
8. Majumdar A., Mukherjee G. *Dialgebra cohomology as a G-algebra*. *Transaction of the American Math. Society*. 2003. Vol. 356, No. 6. P. 2443–2457.
9. Sanchez-Ortega J. On the definitions of nucleus for dialgebras. *J. Algebra*. 2013. Vol. 392, No. 15. P. 244–264.
10. Smith J. D. H. Cayley theorems for Loday algebras. *Results Math*. 2022. Vol. 77. P. 218. <https://doi.org/10.1007/s00025-022-01748-8>
11. Smith J. D. H. Directional algebras. *Houston J. Math*. 2016. Vol. 42. P. 1–22.
12. Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids. *Mat. Stud.* 2010. Vol. 33. P. 120–124.
13. Zhuchok A. V. Free commutative trioids. *Semigroup Forum*. 2019. Vol. 98, No. 2. P. 355–368. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-019-09995-y>
14. Zhuchok A. V. Free left n -dinilpotent doppelsemigroups. *Commun. Algebra*. 2017. Vol. 45, No. 11. P. 4960–4970. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1287274>
15. Zhuchok A. V. Structure of free strong doppelsemigroups. *Commun. Algebra*. 2018. Vol. 46, No. 8. P. 3262–3279. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1407422>
16. Zhuchok A. V. Structure of relatively free dimonoids. *Commun. Algebra*. 2017. Vol. 45, No. 4, P. 1639–1656. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1222404>
17. Zhuchok A. V. Structure of relatively free trioids. *Algebra Discrete Math*. 2021. Vol. 31, No. 1. P. 152–166. DOI: <https://doi.org/10.12958/adm1732>
18. Zhuchok A. V. Trioids. *Asian-Eur. J. Math.* 2015. Vol. 8, No. 4. 23 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793557115500898>
19. Zhuchok A. V., Koppitz J. Free products of n -tuple semigroups. *Ukrainian Math. J.* 2019. Vol. 70, No. 11. P. 1710–1726. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01601-2>
20. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. Free left n -trinilpotent trioids. *Commun. Algebra*. 2021. Vol. 49, No. 2. P. 467–481. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1802472>
21. Zhuchok A. V., Kryklia Y. A. The least left n -trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers.* 2022. Vol. 83, No. 4. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-021-00758-x>
22. Zhuchok A. V., Zhuchok Yul. V. Free k -nilpotent n -tuple semigroups. *Commun. Algebra*. 2023. Vol. 51, No. 9. P. 3972–3980. DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2195000>
23. Zhuchok Yul. V. Free n -nilpotent trioids. *Mat. Stud.* 2015. Vol. 43, No. 1. P. 3–11.
24. Zhuchok Yul. V. Free rectangular tribands. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.* 2015. Vol. 78, No. 2, P. 61–73.
25. Zhuchok Y. V. Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math*. 2021. Vol. 32, No. 1. P. 147–160. DOI: <https://doi.org/10.12958/adm1860>
26. Zhuchok Y. V. New models for the free commutative monogenic trioid and its endomorphism monoid. *Semigroup Forum*. 2022. Vol. 105. P. 575–581. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2>
27. Zhuchok Y. V. The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1. *Algebra Univers.* 2016. Vol. 76, No. 3. P. 355–366. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-016-0392-1>

Kryklya Y. A. On some properties of free left n -trinilpotent trioids.

The concepts of a trioid and a trialgebra appeared in the work of J.-L. Loday and M. O. Ronco who constructed these algebras using operads associated with chain modules of simplices and Stasheff polytopes. It is well-known that trialgebras are linear analogues of trioids. Among the first results about trioids is the construction of J.-L. Loday and M. O. Ronco of a free object of rank 1 in a trioid variety. Trioids and semigroups are naturally related: if operations of a trioid coincide, it turns into a semigroup. Recently, the number of works on the theory of trioids and trialgebras is growing rapidly, at the same time, considerable attention is paid to the construction of relatively free objects. This work continues the study of free left n -trinilpotent trioids. All maximal subtrioids of the free left n -trinilpotent trioid ($n > 1$) are characterized, and it is shown that the free left n -trinilpotent trioid contains a subtrioid which can be represented as a left band of subdimonoids. The cardinality of the endomorphism semigroup of the free left n -trinilpotent trioid for the finite case is also calculated. The obtained results can be applied to trialgebra theory.

Keywords: trioid, subtrioid, free left n -trinilpotent trioid, semigroup.

References

1. Bagherzadeha, F., Bremner, M., & Madariagab, S. (2017). Jordan trialgebras and post-Jordan algebras. *J. Algebra*, 486, 360–395.
2. Casas, J. M. (2006). Trialgebras and Leibniz 3-algebras. *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 12(2), 165–178.
3. Ebrahimi-Fard, K. J. (2002). Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation. *Lett. Math. Phys.*, 61(2), 139–147.
4. Huang, J., Bai, Y., & Chen, Y. et al. (2022). Constructions of free dibands and tribands. *Semigroup Forum*, 104, 647–666. <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10270-w>
5. Huang, J., & Chen, Y. (2021). Gröbner–Shirshov bases theory for trialgebras. *Mathematics*, 9, 1207. <https://doi.org/10.3390/math9111207>
6. Loday, J.-L. (2001). Dialgebras. In: Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. Springer-Verlag, Berlin, 1763, 7–66.
7. Loday, J.-L., & Ronco, M. O. (2004). Trialgebras and families of polytopes. *Contemp. Math.*, 346, 369–398. [10.1090/conm/346/06296](https://doi.org/10.1090/conm/346/06296)
8. Majumdar, A., & Mukherjee, G. (2003). Dialgebra cohomology as a G -algebra. *Transaction of the American Math. Society*, 356(6), 2443–2457.
9. Sanchez-Ortega, J. (2013). On the definitions of nucleus for dialgebras. *J. Algebra*, 392(15), 244–264.
10. Smith, J. D. H. (2022). Cayley theorems for Loday algebras. *Results Math*, 77, 218. <https://doi.org/10.1007/s00025-022-01748-8>
11. Smith, J. D. H. (2016). Directional algebras. *Houston J. Math.*, 42, 1–22.
12. Zhuchok, A. V. (2010). Dibands of subdimonoids. *Mat. Stud.*, 33, 120–124.
13. Zhuchok, A. V. (2019). Free commutative trioids. *Semigroup Forum*, 98(2), 355–368. <https://doi.org/10.1007/s00233-019-09995-y>
14. Zhuchok, A. V. (2017). Free left n -dinilpotent doppelsemigroups. *Commun. Algebra*, 45(11), 4960–4970. <https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1287274>
15. Zhuchok, A. V. (2018). Structure of free strong doppelsemigroups. *Commun. Algebra*, 46(8), 3262–3279. <https://doi.org/10.1080/00927872.2017.1407422>
16. Zhuchok, A. V. (2017). Structure of relatively free dimonoids. *Commun. Algebra*, 45(4), 1639–1656. <https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1222404>
17. Zhuchok, A. V. (2021). Structure of relatively free trioids. *Algebra Discrete Math.*, 31(1), 152–166. <https://doi.org/10.12958/adm1732>
18. Zhuchok, A. V. (2015). Trioids. *Asian-Eur. J. Math.*, 8(4), 23. <https://doi.org/10.1142/S1793557115500898>
19. Zhuchok, A. V., & Koppitz, J. (2019). Free products of n -tuple semigroups. *Ukrainian Math. J.*, 70(11), 1710–1726. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01601-2>
20. Zhuchok, A. V., & Kryklya, Y. A. (2021). Free left n -trinilpotent trioids. *Commun. Algebra*, 49(2), 467–481. <https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1802472>

21. Zhuchok, A. V., & Kryklya, Y. A. (2022). The least left n -trinilpotent congruence on the free trioid. *Algebra Univers*, 83(4). <https://doi.org/10.1007/s00012-021-00758-x>
22. Zhuchok, A.V., Zhuchok, Yul.V. (2023). Free k -nilpotent n -tuple semigroups. *Commun. Algebra*, 51, no. 9, 3972–3980. <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2195000>.
23. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free n -nilpotent trioids. *Mat. Stud.*, 43(1), 3–11.
24. Zhuchok, Yul. V. (2015). Free rectangular tribands. *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat.*, 78(2), 61–73.
25. Zhuchok, Y. V. (2021). Free abelian trioids. *Algebra Discrete Math.*, 32(1), 147–160. <https://doi.org/10.12958/adm1860>
26. Zhuchok, Y. V. (2022). New models for the free commutative monogenic trioid and its endomorphism monoid. *Semigroup Forum*, 105, 575–581. <https://doi.org/10.1007/s00233-022-10313-2>
27. Zhuchok, Y. V. (2016). The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1. *Algebra Univers.*, 76(3), 355–366. <https://doi.org/10.1007/s00012-016-0392-1>

Одержано 15.10.2023

УДК 517.946

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).42-51](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).42-51)**В. В. Маринець¹, О. І. Когутич², О. Ю. Питьовка³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
oksana.kohutyich@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3094-2467>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

O.Pitovka@mail.msu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0127-5032>**ОДИН ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ
ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

Будується одна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, яка описує поширення вологи у пористих середовищах. Одержані достатні умови існування, єдиності та регулярності і знакосталості шуканого розв'язку, доведено теореми про диференціальні нерівності, дається апостеріорна оцінка похибки наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: модифікація двостороннього методу, функції порівняння, єдиність розв'язку, диференціальні рівняння в частинних похідних, наближений розв'язок

1. Вступ. Як відомо, процеси переносу вологи в ґрунтах, фільтрації рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачі тепла в гетерогенному середовищі описуються скалярним рівнянням вигляду [1, 2]

$$\begin{aligned} m(t, x)D^{(1.2)}u(t, x) + \alpha(t, x)D^{(1.1)}u(t, x) + d(t, x)D^{(0.1)}u(t, x) + \\ + \eta(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a(t, x)D^{(1.0)}u(t, x) + b(t, x)u(t, x) = g(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

де коефіцієнти диференціального рівняння в частинних похідних (ДРЧП) є неперервними функціями у заданій області $D \in \mathbb{R}^2$. Крайові задачі у випадку рівняння (1) при різних вихідних даних розглядалися у багатьох роботах, зокрема і в [2]–[4].

У роботі [5] та монографії [6] досліджуються задачі з локальними та нелокальними крайовими умовами у випадку нелінійного ДРЧП вигляду

$$\begin{aligned} D^{(2.1)}u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), D^{(1.0)}u(t, x), D^{(0.1)}u(t, x), \\ D^{(1.1)}u(t, x), D^{(0.2)}u(t, x); \end{aligned} \quad (2)$$

при певних умовах, накладених на праву частину рівняння (2) та область відшукування розв'язку розглядуваних крайових задач, одержані достатні умови існування, єдиності, знакосталості шуканого розв'язку та будуються методи знаходження їх наближених розв'язків.

У даній роботі продовжуються дослідження приведені в [5, 6] для нового класу крайових задач і покращуються результати, раніше відомі.

2. Постановка задачі та основні означення. Розглянемо крайову задачу: у просторі функцій $C^*(\overline{D_0}) := C^{(1.2)}(D_0) \cap C(\overline{D_0})$, $D_0 = \{(t, x) | t \in (0, b), x \in (0, a)\}$, знайти розв'язок ДРЧП

$$\begin{aligned} D^{(1.2)}u(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a_2(t, x)D^{(1.1)}u(t, x) = \\ f(t, x, u(t, x), D^{(1.0)}u(t, x), D^{(0.1)}u(t, x)) := f[u(t, x)], \end{aligned} \quad (3)$$

який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} u(0, x) = T(x), \quad x \in [0, a], \\ D^{(0.1)}u(t, 0) = \psi(t), \quad u(t, a) = \varphi(t), \quad t \in [0, b], \end{aligned} \quad (4)$$

де $D^{(k)}u(t, x) : D_0 \rightarrow D_k \subset \mathbb{R}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_r = 0, 1, r = 1, 2$; $k_1 + k_2 < 2$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B = D_0 \times \prod_{k_1, k_2} D_{(k_1, k_2)} \in \mathbb{R}^5$.

Надалі будемо вважати, що задані функції $T(x) \in C^2[0, a]$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^1[0, b]$, $0 \geq a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t, x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ та виконуються умови узгодженості

$$T'(0) = \psi(0), \quad T(a) = \varphi(0), \quad (5)$$

а права частина рівняння (3) $f[u(t, x)] \in C(\overline{B})$.

Неважко переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 1. Якщо $a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D_0)$, $a_2(t, x) \in C^{(1.0)}(D_0)$ і виконується умова

$$D^{(0.1)}a_1(t, x) = D^{(1.0)}a_2(t, x), \quad (6)$$

то крайова задача (3)–(5) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню вигляду

$$u(t, x) = \Phi(t, x) + TF[u(\eta, \zeta)], \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) := & \varphi(t) + \int_a^x T'(\xi) \exp\left(\int_t^0 a_1(\eta, \xi) d\eta\right) d\xi - \\ & - T'(0) \int_a^x \exp\left(\int_t^0 a_1(\tau, \xi) d\tau + \int_\xi^0 a_2(0, \tau) d\tau\right) d\xi + \\ & + \psi(t) \int_a^x \exp\left(\int_\xi^0 a_2(t, \tau) d\tau\right) d\xi, \\ TF[u(\eta, \zeta)] := & \int_a^x \int_0^t \int_0^\xi K(t, \xi, \eta, \zeta) F[u(\eta, \zeta)] d\zeta d\eta d\xi, \\ K(t, x; \eta, \xi) := & \exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau + \int_x^\xi a_2(\eta, \tau) d\tau\right), \end{aligned}$$

$$F[u(t, x)] := f[u(t, x)] + [D^{(0.1)}a_1(t, x) + a_1(t, x)a_2(t, x)] D^{(0.1)}u(t, x).$$

Очевидно, що функція $\Phi(t, x) \in C^*(\overline{D}_0)$ і задовольняє крайові умови (4), (5), а отже, ввівши нову функцію $z(t, x) := u(t, x) - \Phi(t, x)$ ми зводимо задачу (3)–(5) до задачі з однорідними крайовими умовами. Тому, не зменшуючи загальності подальших міркувань, будемо вважати, що $T(x) = 0$, $\varphi(t) = \psi(t) = 0$.

Означення 1. Будемо говорити, що $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$, якщо функція $F[u(t, x)]$ задовольняє наступні умови [7, 8]:

1) $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$,

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $\text{Pr}_{tOx}\overline{B}_1 = \overline{D}_0$, існує така функція $H(t, x, u(t, x), D^{(1,0)}u(t, x), D^{(0,1)}u(t, x); v(t, x), D^{(1,0)}v(t, x), D^{(0,1)}v(t, x)) := H[u(x, y); v(x, y)]$, що:

(а) $H[u(t, x); u(t, x)] \equiv F[u(t, x)]$;

(б) для довільної з простору $C^{(k_1, k_2)}(\overline{D}_0)$ пари функцій $u(t, x), v(t, x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умову $D^{(k_1, k_2)}[u(t, x) - v(t, x)] \geq (\leq) 0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1(k_2 = 0)$, $k_1 + k_2 < 2$, $(t, x) \in \overline{D}_0$, в області \overline{B}_1 виконується нерівність

$$H[u(t, x); v(t, x)] - H[v(t, x); u(t, x)] \geq 0; \quad (8)$$

3) функція $H[u(t, x); v(t, x)]$ в області \overline{B}_1 задовольняє умову Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C^*(\overline{D}_0)$ функцій $u_r(t, x), v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, виконується умова

$$\begin{aligned} & |H[u_1(t, x); u_2(t, x)] - H[v_1(t, x); v_2(t, x)]| \leq \\ & \leq \frac{1}{6} L \sum_{r=1}^2 (|w_r(t, x)| + |D^{(1,0)}w_r(t, x)| + |D^{(0,1)}w_r(t, x)|), \end{aligned}$$

де $w_r(t, x) := u_r(t, x) - v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, $\frac{1}{6} L$ — стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з третього, то $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$ [6]. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_p(t, x), V_p(t, x) \in C^k(\overline{D}_0)$ належать області \overline{B}_1 і $p \in \mathbb{N}_0$.

Введемо позначення:

$$W_p(t, x) = Z_p(t, x) - V_p(t, x), \quad (t, x) \in \overline{D}_0,$$

$$f^p(t, x) = H[Z_p(t, x); V_p(t, x)], \quad \bar{f}^p(t, x) = H[V_p(t, x); Z_p(t, x)],$$

$$D^k \overline{Z}_p(t, x) := D^k Z_p(t, x) - q_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$D^k \overline{V}_p(t, x) := D^k V_p(t, x) + c_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$k = (k_1, k_2), \quad k_r = 0, 1; \quad r = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\overline{f}^p(t, x) := H[\overline{Z}_p(t, x); \overline{V}_p(t, x)], \quad \bar{f}^p(t, x) = H[\overline{V}_p(t, x); \overline{Z}_p(t, x)],$$

$$\omega_p(t, x) := \int_0^x f_p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi, \quad \omega^p(t, x) := \int_0^x \bar{f}^p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\alpha_p(t, x) := D^{(1.1)}Z_p(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_p(t, x) - \omega^p(t, x), \quad (9)$$

$$\beta_p(t, x) := D^{(1.1)}V_p(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_p(t, x) - \omega_p(t, x), \quad (t, x) \in \bar{D}_0,$$

$q_p^k(t, x), c_p^k(t, x) \in C(\bar{D}_0)$ довільними із простору функціями, які задовольняють умови

$$0 \leq q_p^k(t, x) \leq 0,5; \quad 0 \leq c_p^k(t, x) \leq 0,5; \quad (10)$$

$$p \in \mathbb{N}_0; \quad (t, x) \in \bar{D}_0; \quad k_r = 0,1; \quad k_1 + k_2 < 2.$$

3. Побудова модифікації двостороннього методу дослідження задачі (3)–(5) [8]. Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t, x)\}, \{V_p(t, x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t, x) = T\bar{f}^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}(t, x) = T\bar{f}_p(\eta, \zeta), \quad (t, x) \in \bar{D}_0, \quad (11)$$

де функції нульового наближення $Z_0(t, x), V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\bar{D}_0)$, які належать області \bar{B}_1 вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\alpha_0(t, x) \geq 0, \quad \beta_0(t, x) \leq 0, \quad D^{(k_1, k_2)}W_0(t, x) \geq (\leq)0, \quad (12)$$

$$(t, x) \in \bar{D}_0, \quad k_1 = 0,1; \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2.$$

Означення 2. Функції $Z_0(t, x), V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\bar{D}_0)$, які належать області \bar{B}_1 і задовольняють крайові умови (4) та нерівності (12), називаються функціями порівняння задачі (3)–(5).

Зауважимо, що із (11) маємо

$$D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}^p(t, x),$$

$$D^{(1.1)}V_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}_p(t, x).$$

Таким чином із (9) та (11) одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(t, x) &= D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) - \omega^{p+1}(t, x) = \\ &= \bar{\omega}^p(t, x) - \omega^{p+1}(t, x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\beta_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}_p(t, x) - \omega_{p+1}(t, x),$$

$$\alpha_p(t, x) = D^{(1.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] +$$

$$+ a_1(t, x)D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] + \bar{\omega}^p(t, x) - \omega^p(t, x), \quad (14)$$

$$\beta_p(t, x) = D^{(1.1)}[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] +$$

$$+ a_1(t, x)D^{(0.1)}[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + \bar{\omega}_p(t, x) - \omega_p(t, x),$$

$$\begin{cases} W_{p+1}(t, x) = T(\bar{f}^p(\eta, \zeta) - \bar{f}_p(\eta, \zeta)), \\ D^{(1.1)}W_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}W_{p+1}(t, x) = \bar{\omega}^p(t, x) - \bar{\omega}_p(t, x). \end{cases} \quad (15)$$

Відмітимо, що в силу (10)

$$D^{(k_1, k_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} \bar{V}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} \bar{Z}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_0(t, x),$$

$$k_1 = 0, 1; k_2 = 1 (k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2, (t, x) \in \bar{D}_0,$$

тобто, якщо $D^k Z_0(t, x)$, $D^k V_0(t, x) \in \bar{B}_1$, то $D^k \bar{Z}_0(t, x)$ та $D^k \bar{V}_0(t, x)$ також належить області \bar{B}_1 . Із (14), враховуючи першу із умов (4) маємо

$$\begin{aligned} & D^{(0,1)} [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] = \\ & = \int_0^t [\alpha_p(\eta, x) + \omega^p(\eta, x) - \bar{\omega}^p(\eta, x)] \exp \left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau] \right) d\eta := \bar{\alpha}_p(t, x), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & D^{(0,1)} [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] = \\ & = \int_0^t [\beta_p(\eta, x) + \omega_p(\eta, x) - \bar{\omega}_p(\eta, x)] \exp \left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau] \right) d\eta := \bar{\beta}_p(t, x), \end{aligned}$$

звідки при $p = 0$, враховуючи (12), (10) та (8) одержимо

$$D^{(0,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \geq 0, D^{(0,1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \leq 0.$$

Інтегруючи останні нерівності по x від x до a та враховуючи крайові умови (4), маємо

$$Z_0(t, x) - Z_1(t, x) \leq 0, V_0(t, x) - V_1(t, x) \geq 0.$$

Але тоді із (14) випливає, що

$$\begin{aligned} & D^{(1,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] = \\ & = \alpha_0(t, x) - a_1(t, x) D^{(0,1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] + \omega^0(t, x) - \bar{\omega}^0(t, x) \geq 0, \end{aligned}$$

$$D^{(1,1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \leq 0,$$

а отже

$$D^{(1,0)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \leq 0, D^{(1,0)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \geq 0.$$

Із (15) враховуючи, що $\bar{f}^0(t, x) - \bar{f}_0(t, x) \geq 0$ при $p = 0$ маємо

$$D^{(k_1, k_2)} W_1(t, x) \geq (\leq) 0, k_1 = 0, 1; k_2 = 1 (k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2, (t, x) \in \bar{D}_0.$$

Таким чином мають місце нерівності

$$D^{(k_1, k_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} V_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_0(t, x),$$

а отже $D^k Z_1(t, x)$, $D^k V_1(t, x) \in \bar{B}_1$. Але тоді із (13) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(t, x) = \bar{\omega}^0(t, x) - \omega^1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}^0(t, \xi) - f^1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\beta_1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}_0(t, \xi) - f_1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi.$$

Вибираючи довільні з простору $C(\bar{D}_0)$ функції $q_0^k(t, x)$ та $c_0^k(t, x)$, які задовольняють умови (10) таким чином, щоб виконувались нерівності

$$\begin{aligned} D^k [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] - q_0^k(t, x) D^k W_0(t, x) &\geq (\leq) 0, \\ D^k [V_0(t, x) - V_1(t, x)] + c_0^k(t, x) D^k W_0(t, x) &\leq (\geq) 0, \\ k_2 = 1 \ (k_2 = 0), \ (t, x) \in \bar{D}_0, \end{aligned}$$

то із попередніх рівностей маємо $\alpha_1(t, x) \geq 0$, $\beta_1(t, x) \leq 0$, тобто побудовані функції $Z_1(t, x)$, $V_1(t, x)$ є також функціями порівняння крайової задачі (3)–(5). Беручи функції $Z_1(t, x)$ та $V_1(t, x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції переконаємось, що якщо на кожному кроці ітерації (11) неперервні функції $q_0^k(t, x)$ та $c_0^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), вибрати таким чином, щоб в області \bar{B}_1 виконувались нерівності

$$\begin{aligned} D^k [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^k(t, x) D^k W_p(t, x) &\geq (\leq) 0, \\ D^k [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^k(t, x) D^k W_p(t, x) &\leq (\geq) 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(t, x) \in \bar{D}_0, \ k_1 = 0, 1, \ k_2 = 1 \ (k_2 = 0),$$

то для довільних $p \in \mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{aligned} D^k V_p(t, x) \leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x); \\ (t, x) \in \bar{D}_0, \ k_2 = 1 \ (k_2 = 0), \ p \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажемо, що множина функцій $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня. Дійсно, позначимо:

$$\begin{aligned} \alpha_{p,1}(t, x) &:= \alpha_p(t, x) + \omega^p(t, x) - \bar{\omega}^p(t, x), \\ \alpha_{p,2}(t, x) &= \int_0^t \alpha_{p,1}(\eta, x) \exp \left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau \right) d\eta, \\ \beta_{p,1}(t, x) &:= \beta_p(t, x) + \omega_p(t, x) - \bar{\omega}_p(t, x), \\ \beta_{p,2}(t, x) &= \int_0^t \beta_{p,1}(\eta, x) \exp \left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau \right) d\eta, \\ \rho_{p,1}(t, x) &:= \alpha_{p,2}(t, x) - \beta_{p,2}(t, x) + D^{(0,1)} W_p(t, x), \\ \rho_{p,2}(t, x) &:= \alpha_{p,1}(t, x) - \beta_{p,1}(t, x) + D^{(1,1)} W_p(t, x). \end{aligned}$$

Лема 2. *Якщо виконуються умови Лемми 1 і функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\bar{B})$, а крайова задача (3)–(5) має функції порівняння, то множина функцій $q_p^k(t, x)$, $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умови (10), (17), не порожня.*

Доведення. Дійсно, покладемо

$$q_p^{(0.1)}(t, x) = \frac{\alpha_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, \quad q_p(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, \quad q_p^{(1.0)}(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$c_p^{(0.1)}(t, x) = -\frac{\beta_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, \quad c_p(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, \quad c_p^{(1.0)}(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$(t, x) \in \overline{D}_0, \quad p \in \mathbb{N}_0.$$

Очевидно, таким чином вибрані функції $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$, задовольняють умови (10), а

$$D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^{(0.1)} D^{(0.1)} W_p(t, x) = \alpha_{p,2}(t, x) \left[1 - \frac{D^{(0.1)} W_p(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)} \right] \geq 0,$$

$$[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^{(0.1)} W_p(t, x) = -\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi \left[1 + \frac{W_p(t, x)}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi} \right] \geq 0.$$

Аналогічно переконаємось у виконанні усіх нерівностей в (17) і Лема 2 доведена.

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$, виконуються умови Лемми 1 і крайова задача (3)–(5) має функції порівняння. Тоді для функцій $Z_p(t, x)$, $V_p(t, x)$, побудованих згідно закону (11), (12), де $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x) \in C(\overline{D}_0)$ задовольняють в області \overline{B}_1 умови (10), (17), справедливі нерівності (18) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(t, x) \in \overline{D}_0$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.*

Покажемо, що послідовності функцій $\{D^k Z_p(t, x)\}$, $\{D^k V_p(t, x)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18), при існуванні функцій порівняння задач (3)–(5), збігаються рівномірно при $(t, x) \in \overline{D}_0$ до єдиного розв'язку інтегро-диференціального рівняння (7). Враховуючи нерівності (18) для цього достатньо показати, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^k W_p(t, x) = 0$ для $\forall (t, x) \in \overline{D}_0$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.

Позначимо:

$$d := \max_{k_1, k_2} \sup_{\overline{D}_0} |D^{(k_1, k_2)} W_0(t, x)|, \quad q := \max_{k_1, k_2} \sup_{\overline{D}_0} (1 - q_p^k(t, x) - c_p^k(t, x)),$$

$$c := \sup_{\overline{D}_0} |a_1(t, x)|, \quad K := \sup_{\overline{D} \times \overline{D}} K(t, x; \eta, \zeta),$$

$$\gamma := \max \{1, a + b, a(a + b), (a + b)(1 + ab)\}.$$

Тоді із (15) методом математичної індукції неважко переконатись у справедливості оцінок

$$|D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x)| \leq \frac{[qKL\gamma(a + t - x)]^p}{p!} d, \quad k_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad (19)$$

для всіх $(t, x) \in \overline{D}_0$, $p \in \mathbb{N}$.

На підставі оцінок (19) маємо, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x) = 0$, тобто $\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} Z_p(t, x) = D^{(k_1, k_2)} V_p(t, x) := U_{k_1, k_2}(t, x)$.

Для того, щоб показати, що $U_{k_1, k_2}(t, x) = D^{(k_1, k_2)} U(t, x)$, де $U(t, x)$ є регулярним розв'язком інтегро-диференціального рівняння (7) достатньо у (11) перейти до границі, коли $p \rightarrow \infty$ і результат продиференціювати по tk_1 разів, а по $x - k_2$, $k_1 + k_2 < 2$. У силу Лема 1 знайдена гранична функція і буде розв'язком крайової задачі (3)–(5).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теорема 1.*

Тоді:

- 1) інтегро-диференціальне рівняння (7) у класі функцій $C^*(\overline{D}_0)$ має розв'язок і він єдиний при $(t, x) \in \overline{D}_0$;
- 2) послідовності функцій $\{Z_p^k(t, x)\}$, $\{V_p^k(t, x)\}$, побудовані згідно закону (11), (12), (18) збігаються рівномірно при $(t, x) \in \overline{D}_0$ до єдиного розв'язку рівняння (7),
- 3) мають місце оцінки (19);
- 4) для довільних $p \in \mathbb{N}_0$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$ та $(t, x) \in \overline{D}_0$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} D^k V_p(t, x) &\leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k U(t, x) \leq (\geq) \\ &\leq (\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$(t, x) \in \overline{D}_0, \quad k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2;$$

- 5) збіжність ітераційного методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності методу, коли $q_p^k(t, x) \equiv 0$ та $c_p^k(t, x) \equiv 0$ для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, тобто методу

$$Z_{p+1}^*(t, x) = T f^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}^*(t, x) = T \bar{f}^p(\eta, \zeta). \quad (21)$$

Доведення. Єдиність розв'язку рівняння (7) доводиться методом від супротивного [6]. Твердження пунктів 2) та 3) даної Теорема 2 доведені вище.

Доведемо справедливість нерівностей (20). З цією метою припустимо, що для деякого номера $p \in \mathbb{N}$ у деякій точці $(t_0, x_0) \in \overline{D}_0$ виконується нерівність $D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0)$. Тоді для всякого $n \in \mathbb{N}$ у силу нерівностей (18)

$$D^k Z_{p+n}(t_0, x_0) \geq (\leq) D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0),$$

$$k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1 \quad (k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2,$$

а отже послідовність функцій $\{D^k Z_{p+n}(t_0, x_0)\}$ при $n \rightarrow \infty$ не збігається у точці (t_0, x_0) до $D^k U(t_0, x_0)$, що суперечить доведеному.

Аналогічно доводяться інші нерівності у (20).

Покажемо, що збіжність методу (11), (12), (18) не повільніша збіжності ітераційного методу (21).

Нехай $Z_p(t, x)$ та $V_p(t, x)$ — функції порівняння задачі (3)–(5), побудовані згідно деякого двостороннього методу. Тоді із (11) та (21), враховуючи (8), маємо

$$Z_{p+1}^*(t, x) - Z_{p+1}(t, x) = T f^p(\eta, \zeta) - T \bar{f}^p(\eta, \zeta) = T [f^p(\eta, \zeta) - \bar{f}^p(\eta, \zeta)] \leq 0,$$

$$V_{p+1}^*(t, x) - V_{p+1}(t, x) = T[f_p(\eta, \zeta) - \bar{f}_p(\eta, \zeta)] \geq 0.$$

Тоді

$$Z_{p+1}^*(t, x) \leq Z_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}^*(t, x),$$

що і потрібно було показати.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови Теорему 1 і $F[U(t, x)] \equiv H[U(t, x); 0]$, а крайові умови (4) є однорідними.*

Тоді якщо $F[0] \geq (\leq) 0$ в області \bar{B} , то розв'язок задачі (3), (4) задовольняє нерівності

$$D^{(k_1, k_2)}U(t, x) \geq (\leq) 0 \quad (D^{(k_1, k_2)}U(t, x) \leq (\geq) 0),$$

при $(t, x) \in \bar{D}_0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1$ ($k_2 = 0$), $k_1 + k_2 < 2$.

4. Висновок. У даній роботі побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі для ДРЧП. Одержано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та визначено апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку задачі.

Список використаної літератури

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. Москва : Наука, 1976. 352 с.
2. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги. *Дифференциальные уравнения*. 1979. Т. 15, № 1. С. 96–105.
3. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка и экстремальных свойствах его решений. *Дифференциальные уравнения*. 1983. Т. 19, № 1. С. 145–152.
4. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса. *Дифференциальные уравнения*. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–288.
5. Маринец В. В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1988. Т. 24, № 8. С. 1393–1397.
6. Маринець В. В., Маринець К. В., Питьовка О. Ю. Аналітичні методи дослідження крайових задач. Монографія Ужгород : Вид-во УжНУ "Говерла", 2019. 288 с.
7. Marynets V., Kateryna M., Kohutych O. Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. 2021. P. 12. URL: https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics (date of access: 15.04.2023).
8. Marynets V., Marynets K., Kohutych O. On a novel approach for the investigation and approximation of solutions to the systems of higher nonlinear PDES. *Monatshefte für Mathematik*. 2022. 14 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5>

Marynets V. V., Kohutych O. I., Pytovka O. Y. One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments.

The one modification of the two-side method of investigation and approximate solution to the boundary value problem (BVPs) that describe moisture distribution in porous environments is constructed. The sufficient conditions of existence, uniqueness, regularity, and sign-preserving of the desired solution are obtained. The theorems about differential inequalities are proven, and the posterior estimation of error of the approximate solution of BVPs is given.

Keywords: modification of the two-way method, comparison functions, uniqueness of solution, differential equations in parts of derivatives, approximate solution.

References

1. Chudnovskij, A. F. (1976). *Teplofizika pochv* [Thermal physics of soils]. Moscow: Nauka [in Russian].
2. Nahushev, A. M. (1979). Kraevye zadachi dlya nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozheniya k prognozu pochvennoj vlagi [Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture]. *Differenc. uravneniya*, 15(1), 96–105 [in Russian].
3. Shkhanukov, B. A. (1983). O nekotoryh kraevykh zadachah dlya uravneniya tret'ego poriyadka i ekstremal'nykh svoystvah ego reshenij [On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions]. *Differenc. uravneniya*, 18(2), 145–152 [in Russian].
4. Vodahova, V. A. (1982). Kraevaya zadacha s nelokal'nym usloviem A. M. Nahusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa [A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushhev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer]. *Differenc. uravneniya*, 18(2), 280–288 [in Russian].
5. Marynets, V. V. (1988). O nekotorykh zadachah dlya sistem nelinejnykh differencial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh s nelokal'nymi kraevymi usloviyami [On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions]. *Differenc. uravneniya*, 24(8), 1393–1397 [in Russian].
6. Marynets, V. V., Marynets, K. V., & Pytovka, O. Yu. (2019). *Analytical methods of research of boundary value problems*. Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla" [in Ukrainian].
7. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2021). Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. Retrieved from https://www.mdpi.com/journal/mathematics/special_issues/Advanced_Methods_Computational_Mathematical_Physics
8. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2022). On a novel approach for the investigation and approximation of solutions to the systems of higher nonlinear PDES. *Monatshefte für Mathematik*. <https://doi.org/10.1007/800605-022-01771-5>

Одержано 23.08.2023

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).52-61](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).52-61)**В. В. Стаматієва**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

stamatieva56@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2721-8985>

УЗАГАЛЬНЕННЯ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ РАМАНУДЖАНА-ВАТСОНА-КНУТА

У роботі наведено асимптотичний розклад для математичного сподівання моменту $(r + 1)$ -го збігу в узагальненій задачі про дні народження. У випадку $r = 1$ даний розклад добре відомий у літературі як асимптотичний розклад Рамануджана-Ватсона-Кнута. Ідея доведення одержаного результату полягає у застосуванні методу Лапласа до оцінки інтеграла з параметром, який виникає при обчисленні точного значення шуканого математичного сподівання.

Ключові слова: узагальнена задача про дні народження, асимптотичний розклад, метод Лапласа.

1. Вступ. Особливе місце у літературі, присвяченій комбінаторній теорії ймовірностей, посідають задача про дні народження та її подальші узагальнення. Наприклад, нещодавно у роботі [1] було одержано ряд граничних теорем для випадкових величин, пов'язаних із одним з узагальнень такої задачі.

Розглянемо n різних типів об'єктів довільної природи. Нехай представники кожного з цих типів з ймовірністю $\frac{1}{n}$ незалежно від інших один за одним у цілі послідовні моменти часу з'являються у полі зору спостерігача. Введемо випадкову величину $T_r^{(n)}$, $r \geq 1$, яка описує перший момент часу, коли деякий тип об'єктів з'явився в $(r + 1)$ -й раз. Варто відзначити, що, покладаючи $r = 1$ (перший збіг з кимось), а $n = 365$ (загальна кількість днів у невисокосному році), а під представниками розуміти людей, народжених в один з можливих днів року, ми одержимо випадкові величини, що відповідають класичній постановці задачі про дні народження.

Можна навести еквівалентне формулювання даної задачі в термінах урнної схеми. В такому випадку величини $T_r^{(n)}$, $r \geq 1$, означатимуть момент, коли вперше в деякій урні з'являється принаймні $(r + 1)$ -а кулька (див., напр., [4], [5], або [6]).

2. Огляд попередніх результатів. Вагому частину досліджень, котрі стосуються відповідної тематики, було спрямовано на обчислення числових характеристик випадкових величин $T_r^{(n)}$, їх асимптотик та наближених обчислень. Зокрема, у роботі Кламкіна та Ньюмана [2] було одержано точне значення математичного сподівання цих величин, яке у наших позначеннях матиме вигляд

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^{\infty} e^{-t} \left[S_r \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n dt, \quad (1)$$

де $S_r(x) = \sum_{j=0}^r \frac{x^j}{j!}$. Більше того, ними ж було отримано наступну асимптотику:

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) \cdot n^{\frac{r}{r+1}} + o\left(n^{\frac{r}{r+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Цікавою задачею з прикладної точки зору є узагальнення вище зазначеної формули, тобто, можливість одержати більш точне представлення відповідної числової характеристики.

Наприклад, у випадку $r = 1$ з теореми 2 у [3] впливає класичний розклад Рамануджана-Ватсона-Кнута, який в наших позначеннях набуває вигляду

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} + \dots \quad (2)$$

В основі даної роботи лежить отримання аналогічного розкладу у випадку загального $r \geq 2$.

3. Основний результат. Нехай задані величини $T_r^{(n)}$, $r \geq 2$, які означають перший момент часу, коли деякий з n типів з'явився в $(r+1)$ -й раз. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_r^{(n)} = & n^{\frac{r}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!^{r+3}} \cdot \\ & \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) + n^{\frac{r-2}{r+1}} \left(\frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!^{2r+5}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{{}^{r+1}\sqrt{(r+1)!^{r+4}}}{2r!(r+3)(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right) \right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ідея доведення цього факту базується на дослідженні асимптотичної поведінки інтеграла (1). Основним методом є так званий метод Лапласа. Його сутність полягає у дослідженні асимптотики інтеграла навколо точки максимуму підінтегральної функції та доведенні того, що рештою доданків можна знехтувати. Перейдемо до реалізації.

4. Доведення. Перепишемо (1) у наступному вигляді:

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^\infty e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r} \right]^n dt, \quad (3)$$

та введемо заміну змінної $x = \frac{t}{n^{\frac{r}{r+1}}}$. Тоді (3) набуває вигляду

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^\infty e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n dx. \quad (4)$$

Розглянемо границю підінтегрального виразу у (4):

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n = \\ = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \ln \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right] \right)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що розклад функції $f(y) := \ln\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^r}{r!}\right)$, $r \geq 2$, в ряд Тейлора в околі нуля має наступний вигляд:

$$f(y) = y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!} \cdot y^{r+3} + o(y^{r+3}). \quad (5)$$

Покажемо це. Перезапишемо $f(y)$ у наступному вигляді:

$$f(y) = \ln \left[e^y - \left(\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} + \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o(y^{r+3}) \right) \right].$$

Оскільки $\ln(a+h) = \ln a + \frac{h}{a} + O(h^2)$, то

$$\begin{aligned} f(y) &= \ln e^y + \frac{1}{e^y} \left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o(y^{r+3}) \right) + \\ &+ O \left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o(y^{r+3}) \right)^2 = \\ &= y + \left(1 - y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \right) \cdot \left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o(y^{r+3}) \right) + \\ &+ O \left(-\frac{y^{r+1}}{(r+1)!} - \frac{y^{r+2}}{(r+2)!} - \frac{y^{r+3}}{(r+3)!} + o(y^{r+3}) \right)^2 = \\ &= y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!} \cdot y^{r+3} + o(y^{r+3}). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \ln \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right] \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n \cdot \left[\frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} - \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{x^{r+1}}{n} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{x^{r+2}}{n^{\frac{r+2}{r+1}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{r+2}{r+1}}}\right) \right] \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x + n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x - \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{x^{r+2}}{n^{\frac{1}{r+1}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r+1}}}\right) \right) = e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Застосуємо теорему Лебега про мажоровану збіжність. Для цього спочатку покажемо, що

$$\psi_n(x) := e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n,$$

обмежені зверху деякою інтегрованою функцією на $[0; +\infty)$. Оберемо в якості цієї функції $\psi_1(x) = e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} \right]$, $x \geq 0$. Перевіримо, що

$$\begin{aligned} &e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n \leq \\ &\leq e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} \right], \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Ця нерівність еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x - n \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right) &\geq \\ &\geq x - \ln \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} \right). \end{aligned}$$

Оскільки обидві частини дорівнюють 0, при $x = 0$, достатньо довести нерівність для похідних:

$$n^{\frac{r}{r+1}} - n \cdot \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x}{n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^2}{2!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!n^{\frac{r}{r+1}}}}{1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}} \geq 1 - \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}},$$

або

$$\frac{\frac{x^r}{r!}}{1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}} \geq \frac{\frac{x^r}{r!}}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}}.$$

Остання нерівність є очевидною. Оскільки:

1) Виконується

$$\begin{aligned} \psi_n(x) = e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}}; \\ \forall x \geq 0; \end{aligned}$$

2) $\psi_n(x) \leq \psi_1(x)$, $\forall x \geq 0$,

а функція $\psi_1(x) = e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!} \right]$ — інтегровна на $[0; +\infty)$, то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^{\infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx. \quad (6)$$

Обчислимо інтеграл в (6):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = \frac{r+1}{\sqrt[r+1]{(r+1)!}} \cdot \sqrt[r+1]{t} \\ dx = \frac{r+1}{\sqrt[r+1]{(r+1)!}} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| = \frac{r+1 \sqrt[r+1]{(r+1)!}}{r+1} \int_0^{\infty} t^{-\frac{r}{r+1}} \cdot e^{-t} dt = \\ &= \frac{r+1 \sqrt[r+1]{(r+1)!}}{r+1} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{r+1}\right) = |z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)| = \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}T_r^{(n)}}{n^{\frac{r}{r+1}}} &= \int_0^{\infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}} \right]^n dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt[r+1]{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right), \end{aligned}$$

тобто,

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r}{r+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для подальшого доведення нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. $\forall k \geq 0, m \geq 1, c > 0: \int_u^{+\infty} x^k e^{-cx^m} dx = O(u^k \cdot e^{-cu^m}), u \rightarrow \infty.$

Розглянемо

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_u^{+\infty} x^k e^{-cx^m} dx}{u^k \cdot e^{-cu^m}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-u^k \cdot e^{-cu^m}}{ku^{k-1} \cdot e^{-cu^m} - cmu^{m+k-1} \cdot e^{-cu^m}} = 0,$$

що і доводить цей факт (для обчислення границі скористались правилом Лопіталя).

Такий порядок збіжності до нуля, як у правій частині лема 1, надалі будемо називати експоненціальним.

Оберемо довільне число $\alpha \in \left(\frac{r}{r+1}; \frac{r+1}{r+2}\right)$. Тоді (3) можна переписати наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_r^{(n)} &= \int_0^{n^\alpha} e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt + \\ &+ \int_{n^\alpha}^{\infty} e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Функція $e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n$, як не складно пересвідчитися логарифмічним диференціюванням, є монотонно спадною на $[0; +\infty)$.

Покажемо, що другий інтеграл у (7) є нехтовно малим. Введемо заміну змінної $x = \frac{t}{n^{\frac{r}{r+1}}}$, тоді

$$\begin{aligned} &\int_{n^\alpha}^{\infty} e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r}\right]^n dt = \\ &= n^{\frac{r}{r+1}} \int_{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}}^{\infty} e^{-n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x} \left[1 + \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + \frac{x^2}{2n^{\frac{2}{r+1}}} + \frac{x^3}{3!n^{\frac{3}{r+1}}} + \dots + \frac{x^r}{r!n^{\frac{r}{r+1}}}\right]^n dx \leq \\ &\leq n^{\frac{r}{r+1}} \int_{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}}^{\infty} e^{-x} \cdot \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^r}{r!}\right] dx. \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha > \frac{r}{r+1}$, то за лемою 1 порядок збіжності даного інтеграла є експоненціальним. Отже, другим інтегралом у (7) можна знехтувати.

Таким чином, вся асимптотика визначається виключно першим доданком. Перейдемо до його дослідження.

Позначимо

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n^\alpha} e^{-t} \left[1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r} \right]^n dt = \\ &= \int_0^{n^\alpha} e^{-t+n \cdot \ln \left(1 + \frac{t}{n} + \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3!n^3} + \dots + \frac{t^r}{r!n^r} \right)} dt. \end{aligned}$$

Скористаємось (5), перезаписавши дану рівність у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &\ln \left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^r}{r!} \right) = \\ &= y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} - \frac{(r+1)(r+2)}{2(r+3)!} \cdot y^{r+3} + o(y^{r+3}) = \\ &= y - \frac{1}{(r+1)!} \cdot y^{r+1} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot y^{r+2} \underbrace{\left(1 - \frac{r+2}{2(r+3)} \cdot y + o(y) \right)}_{\beta(y)}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n^\alpha} e^{-t+n \cdot \left(\frac{t}{n} - \frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^{r+1}} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+2}} \underbrace{\left(1 - \frac{r+2}{2(r+3)} \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right)}_{\beta\left(\frac{t}{n}\right)} \right)} dt = \\ &= \int_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)} dt. \end{aligned}$$

Оскільки за формулою Тейлора $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + x^2 \gamma(x)$, де $\gamma(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r} + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)} = e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} \cdot e^{\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)} = \\ &= \left[1 + \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \cdot \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \cdot \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)\right) \right] e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt + \frac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt + \\
 &\quad + \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)\right) e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \\
 &= I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)} + I_n^{(4)}.
 \end{aligned}$$

Дослідимо кожний з цих доданків.

$$\begin{aligned}
 1) I_n^{(1)} &= \int_0^{n^\alpha} e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \left| \begin{array}{l} t = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x \\ dt = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot dx \\ x \in \left(0; n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}\right) \end{array} \right| = n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx = \\
 &= n^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx - \int_{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}}^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx \right) = n^{\frac{r}{r+1}} \left({}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) - \varepsilon_n \right),
 \end{aligned}$$

ε_n — експоненціально мала величина.

$$\begin{aligned}
 2) I_n^{(2)} &= \frac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} \cdot \left(1 - \frac{r+2}{2(r+3)} \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) dt = \\
 &= \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot \frac{x^{r+2}}{n^{\frac{1}{r+1}}} \cdot \left(1 - \frac{r+2}{2(r+3)} \cdot \frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}} + o\left(\frac{x}{n^{\frac{1}{r+1}}}\right)\right) dx = \\
 &= \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx - \frac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx + \\
 &\quad + \frac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} \cdot o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot x\right) dx = \\
 &= \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx - \frac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx + \\
 &\quad + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{r+1}{(r+2)!} \int_0^{n^{\alpha - \frac{r}{r+1}}} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx\right).
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що:

$$\begin{aligned}
 \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+2} dx &= \left| \begin{array}{l} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot {}^{r+1}\sqrt{t} \\ dx = {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| = \\
 &= \frac{r+1}{(r+2)!} \cdot n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{r+2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{r+2}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt = \\
 &= n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\frac{2}{r+1}} dt = n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot x^{r+3} dx = \\ & = \frac{1}{2r!(r+3)} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt = \\ & = n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!(r+3)(r+1)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{3}{r+1}} dt = n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!(r+3)(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right). \end{aligned}$$

Отже, з точністю до експоненціально малих доданків маємо, що

$$\begin{aligned} I_n^{(2)} &= n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) - n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!(r+3)(r+1)} \cdot \\ & \quad \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) I_n^{(3)} &= \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot \beta^2\left(\frac{t}{n}\right) \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^\alpha} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt + \\ & \quad + o(\text{від першого доданку}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} \frac{t^{2r+4}}{n^{2r+2}} \cdot e^{-\frac{t^{r+1}}{(r+1)! \cdot n^r}} dt = \left| \begin{array}{l} t = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot x \\ dt = n^{\frac{r}{r+1}} \cdot dx \\ x \in \left(0; n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}\right) \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} \frac{x^{2r+4}}{n^{\frac{2}{r+1}}} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} \cdot n^{\frac{r}{r+1}} dx = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{n^{\alpha-\frac{r}{r+1}}} x^{2r+4} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{\infty} x^{2r+4} \cdot e^{-\frac{x^{r+1}}{(r+1)!}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} = t \\ x = {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot {}^{r+1}\sqrt{t} \\ dx = {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt \end{array} \right| = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(r+1)^2}{((r+2)!)^2} n^{\frac{r-2}{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+4}{r+1}} \cdot t^{\frac{2r+4}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \frac{1}{r+1} t^{-\frac{r}{r+1}} dt = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{r+4}{r+1}} dt = \\ & = \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right), \end{aligned}$$

то

$$I_n^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right).$$

- 4) $I_n^{(4)}$ відрізняється від $I_n^{(3)}$ лише множником $\gamma\left(\frac{r+1}{(r+2)!} \cdot \frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \cdot \beta\left(\frac{t}{n}\right)\right)$, причому $\gamma(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$.
 β — обмежена в околі нуля

$$\frac{t^{r+2}}{n^{r+1}} \leq \frac{(n^\alpha)^{r+2}}{n^{r+1}} = n^{(r+2)\alpha-r-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

оскільки $\alpha < \frac{r+1}{r+2}$. Таким чином, $I_n^{(4)}$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $I_n^{(3)}$.

Отже,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_r^{(n)} = & n^{\frac{r}{r+1}} \cdot {}^{r+1}\sqrt{(r+1)!} \cdot \Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + n^{\frac{r-1}{r+1}} \cdot \frac{1}{(r+2)!} (r+1)!^{\frac{r+3}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) - \\ & - n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \frac{(r+1)!^{\frac{r+4}{r+1}}}{2r!(r+3)(r+1)} \cdot \Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right) + \frac{1}{2} \frac{(r+1)}{((r+2)!)^2} \cdot n^{\frac{r-2}{r+1}} \cdot \\ & \cdot (r+1)!^{\frac{2r+5}{r+1}} \cdot \Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) + o\left(n^{\frac{r-2}{r+1}}\right), \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

5. Приклад застосування. Оцінимо похибку Δ між істинним значенням інтеграла (1) та його наближеною оцінкою згідно з теоремою 1, попередньо зафіксувавши значення r та n . Порівняємо їх також з раніше одержаною асимптотикою у роботі Кламкіна та Ньюмана [2].

Таблиця 1.

Порівняння істинного значення математичного сподівання та його асимптотики

	$r = 2, n = 25$	$r = 2, n = 100$	$r = 2, n = 1000$
Точне значення, $\mathbb{E}T_2^{(r)}$:	16,6129	38,9647	170,252
Наближене значення:	16,577	38,9429	170,2421
Похибка, Δ :	0,0359	0,0218	0,0099
Наближення за Кламкіним та Ньюманом:	13,87	34,959	162,265

Нескладно помітити, що зі зростанням n похибка між істинним значенням інтеграла та його асимптотикою зменшується.

6. Висновки. У даній роботі було виведено декілька перших доданків асимптотичного розкладу математичного сподівання випадкових величин $T_r^{(n)}$, $r \geq 2$, які описують моменти $(r+1)$ -х надходжень об'єктів серед n різних типів за допомогою методу Лапласа. Одержана асимптотика дає змогу з високою точністю оцінювати відповідні числові характеристики у випадку довільного фіксованого $r \geq 2$.

Список використаної літератури

1. Ільєнко А. Б., Стаматієва В. В. Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження. *Науковий вісник Ужгородського університету: Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 39, № 2. С. 38–46. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).38-46](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).38-46)

2. Klamkin M. S., Newman D. J. Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory*. 1967. Vol. 3, P. 279–282.
3. Flajolet Ph., Grabner P. J., Kirschenhofer P., Prodinger H. On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.* 1995. Vol. 58, P. 103–116.
4. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Случайные размещения. Москва : Наука, 1976. 224 с.
5. Holst L. On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.* 1986. Vol. 54, No. 1, P. 15–27.
6. Johnson N. L., Kotz S. Urn models and their application. An approach to modern discrete probability theory : John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1977.

Stamatiieva V. V. Generalization of the asymptotic expansion of Ramanujan-Watson-Knuth.

The paper presents an asymptotic expansion for the mathematical expectation of the moment of the $(r + 1)$ -th coincidence in the generalized birthday problem. In the case where $r = 1$, this expansion is well known in the literature as the Ramanujan-Watson-Knuth asymptotic expansion. The idea of proving the obtained result is to apply the Laplace method to estimate the integral with a parameter that arises when calculating the exact value of the sought mathematical expectation.

Keywords: generalized birthday problem, asymptotic expansion, Laplace's method.

References

1. Iliencko, A. B., & Stamatiieva, V. V. (2021). A limit theorem for point processes associated with the generalized birthday problem. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Series of mathematics and informatics*, 39(2), 38–46. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).38-46](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).38-46) [in Ukrainian].
2. Klamkin, M. S., & Newman, D. J. (1967). Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory*, 3, 279–282.
3. Flajolet, Ph., Grabner, P. J., Kirschenhofer, P., & Prodinger, H. (1995). On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.*, 58, 103–116.
4. Kolchin, V. F., Sevastianov, B. A., & Chistyakov, V. P. (1976). *Sluchaynyye razmeshcheniya* [Random allocations]. Moscow: Nauka [in Russian].
5. Holst, L. (1986). On birthday, collectors', occupancy and other classical urn problems. *Int. Stat. Rev.*, 54(1), 15–27.
6. Johnson, N. L., & Kotz, S. (1977). *Urn models and their application*. An approach to modern discrete probability theory : John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

Одержано 14.10.2023

УДК 512.53, 512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).62-66](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).62-66)**M. V. Styopochkina**

Polissia National University,

Associate professor of the department of higher and applied mathematics,

Candidate of physical and mathematical sciences

stmar@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

**THE COEFFICIENTS OF TRANSITIVITY OF THE POSETS
MINIMAX ISOMORPHIC TO THE SUPERCRITICAL
NON-PRIMITIVE POSET**

The representations of partially ordered sets (abbreviated as posets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter (in matrix form) in 1972, play an important role in the modern representation theory and its applications. After Yu. A. Drozd proved in 1974 that a poset S has finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors), but not enough to be positive as for quivers, problems related to the positive and also non-negative Tits quadratic form began to be of great interest from various points of view.

In this paper we continue to study combinatorial properties of posets that are minimal with non-negative Tits quadratic form.

Key words: supercritical poset, positive and weakly positive quadratic forms, Tits quadratic form, finite representation type, minimax equivalence and isomorphism, coefficient of transitivity, nodal and neighboring elements.

1. Introduction. This paper continues the study of combinatorial properties of posets, minimax isomorphic to the supercritical posets. The cases of primitive supercritical posets were considered in [1–3]. In this paper it is considered the case of non-primitive poset, i.e. $(N, 5)$.

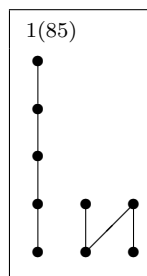
The importance of studying minimax isomorphic posets (introduced by V. M. Bondarenko) is determined by the fact that their Tits quadratic forms are Z -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined Z -equivalence of the Tits quadratic forms for posets.

2. The list of posets minimax isomorphic to $(N, 5)$.

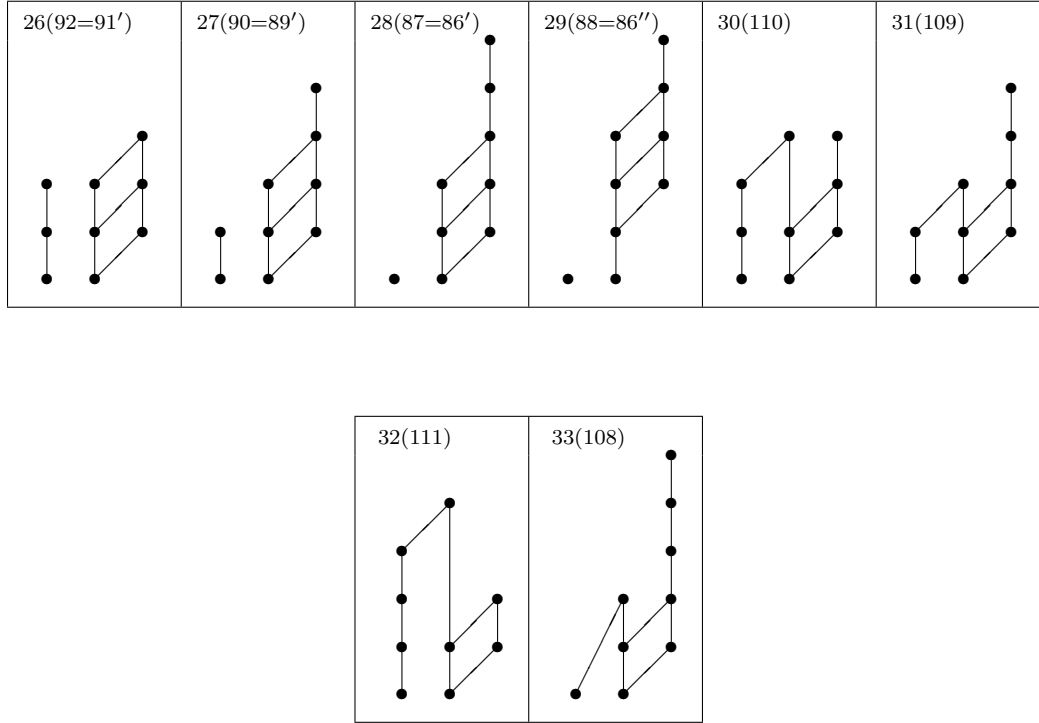
Let P be a poset. For a minimal (resp. maximal) element a of S , denote by $T = S_a^\uparrow$ (respect. $T = S_a^\downarrow$) the following poset: $T = S$ as usual sets, $T \setminus a = S \setminus a$ as posets, the element a is maximal (resp. minimal) in T , and a is comparable with x in T if and only if they are incomparable in S . Two posets S and T are called (min, max)-*equivalent* [4] if there are posets S_1, \dots, S_p ($p \geq 0$) such that, if we put $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then, for every $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$ or $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$. Since some time the term *minimax equivalence* are also used.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of *minimax isomorphism*: posets S and S' are minimax isomorphic if there exists a poset T , which is minimax equivalent to S and isomorphic to S' .

From the results of [5] it follows that the following table contains all (up to isomorphism and duality) posets which are minimax isomorphic to the the only non-primitive supercritical poset $(N, 5)$:



2(40)	3(39)	4(32)	5(35)	6(37)	7(38)
8(36)	9(33)	10(34)	11(75)	12(76)	13(91)
14(93)	15(89)	16(86)	17(100)	18(107)	19(97)
20(98)	21(102)	22(106)	23(103)	24(104)	25(105)



In the parentheses it is placed the numbers from the table of [5].

3. Coefficients of transitivity. Main results. Let S be a poset and $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$. If $(x, y) \in S_{<}^2$ and there is no z satisfying $x < z < y$, then x and y are called *neighboring*. Put $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$ and denote by $n_e = n_e(S)$ the number of pairs of neighboring elements. The ratio $k_t = k_t(S)$ of the numbers $n_w - n_e$ and n_w we call *the coefficient of transitivity of S* . If $n_w = 0$ (then $n_e = 0$), we assume $k_t = 0$ (see [6]). Obviously, dual poset have the same coefficient of transitivity.

The aim of this paper is to calculate k_t for all posets minimax isomorphic to $N_6 = (N, 5) = \{1, 2, \dots, 9 \mid 1 \prec 2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7, 8 \prec 9, 6 \prec 9\}$, which is the only non-primitive supercritical poset.

Theorem 1. *The following holds for posets 1 – 33 minimax isomorphic to N_6 :*

N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t	N	n_e	n_w	k_t
1	7	13	0,46154	12	7	17	0,58824	23	8	21	0,61905
2	9	19	0,52632	13	8	15	0,46667	24	8	27	0,70370
3	9	21	0,57143	14	8	13	0,38462	25	8	23	0,65217
4	9	33	0,72727	15	8	19	0,57895	26	9	15	0,4
5	9	29	0,68966	16	8	25	0,68	27	9	19	0,52632
6	9	25	0,64	17	8	15	0,46667	28	9	25	0,64
7	9	25	0,64	18	8	15	0,46667	29	9	25	0,64
8	9	29	0,68966	19	8	19	0,57895	30	9	17	0,47059
9	10	33	0,69697	20	8	15	0,46667	31	9	19	0,52632
10	10	33	0,69697	21	8	17	0,52941	32	9	17	0,47059
11	7	21	0,66667	22	8	14	0,42857	33	9	23	0,60870

The transitivity coefficients are written out with an accuracy of five decimal places. The value is exact if and only if the number of decimal places is less than five, and two values equal to exactly five digits are equal at all.

The proof is carried out by direct calculations.

Recall that the greatest length among the lengths of all linear ordered subsets of a poset S is called its *height*. An element of a poset is called *nodal*, if it is comparable with all the others elements. A subposet X of T is said to be *dense* if there is not $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$ such that $x_1 < y < x_2$.

Corollary 1. *The coefficient $k_t(S)$ of a poset S is the largest among all the posets minimax isomorphic to N_6 if and only if S contains a dense subposet that consists of five nodal elements.*

4. Conclusions. In this paper we investigate combinatorial aspects of the only supercritical non-primitive poset, namely, describe the coefficients of transitivity for all posets that are minimax isomorphic to it. The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are Z -equivalent. The obtained results can be used in the study of combinatorial aspects of other classes of posets.

References

1. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2018). On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 32(1), 50–53.
2. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2019). On properties of posets of MM-type (1, 2, 7). *Applied problems of mech. and math.*, 17, 7–10.
3. Bondarenko, V. M., Stepochkina, M. V. , & Stoika, M. V. (2020). The coefficients of transitivity of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width 3. *Applied problems of mech. and math.*, 18, 11–13.
4. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, 1, 24–25.
5. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.*, 61(5), 734–746.
6. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2017). Coefficients of transitivity of P-critical posets. *Proc. Inst. Math. of NAS of Ukraine*, 14(1), 46–51.

Стьопочкіна М. В. Коефіцієнти транзитивності частково впорядкованих множин мінімаксно ізоморфних суперкритичній непримітивній множині.

Зображення частково впорядкованих (скорочено ч. в.) множин, які введені Л. А. Назаровою і А. В. Ройтером (в матричній формі) в 1972 р., відіграють важливу роль в сучасній теорії зображень. Після того, як Ю. А. Дрозд у 1974 р. довів, що ч. в. множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

є слабо додатною (тобто додатною на множині невід'ємних векторів), але не досить, щоб додатною як для сагайдаків, задачі, пов'язані з додатними, а також невід'ємними, квадратичними формами Тітса стали цікавими з різних точок зору.

У цій статті ми продовжуємо вивчати комбінаторні властивості ч. в. множин, що є мінімальними, для яких квадратична форма Тітса не є невід'ємною.

Ключові слова: суперкритична ч. в. множина, додатні і слабо додатні квадратичні форми, квадратична форма Тітса, скінченний зображувальний тип, мінімаксна

еквівалентність і мінімаксий ізоморфізм, коефіцієнт транзитивності, вузлові і сусідні елементи.

Список використаної літератури

1. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type $(1,3,5)$. *Науковий вісник Ужгородського університету: Серія «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 32, № 1. С. 50–53.
2. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type $(1; 2; 7)$. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2019. Вип. 17. С. 7–10.
3. Bondarenko V. M., Stepochkina M. V. , Stoika M. V. The coefficients of transitivity of the posets of MM-type being the smallest supercritical poset of width 3. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2020. Вип. 18. С. 11–13.
4. Bondarenko V. M. On (\min, \max) -equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка*. 2005. № 1. С. 24–25.
5. Бондаренко В. М., Степochкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2009. Т. 61, № 5. С. 611–624.
6. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Coefficients of transitivity of P-critical posets. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2017. Т. 14, № 1. С. 46–51.

Одержано 03.10.2023

УДК 512

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).67-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).67-71)**M. Iu. Raievska**

University of Warsaw, Warsaw, Poland;

Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,

Visiting researcher; Senior researcher,

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics

raemarina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6135-7818>**ON SEMIDISTRIBUTIVE LOCAL NEARRINGS**

In [1] it was proved that the additive group of every semidistributive nearring R with an identity is abelian. In this paper we consider finite semidistributive local nearrings. A nearring $R = (R, +, \cdot)$ with identity is said to be local if the set L of all non-invertible elements of R is a subgroup of R^+ . It is shown that the semigroup (L, \cdot) of all non-invertible elements of finite semidistributive local nearrings on 2-generated 2-group is commutative.

Keywords: additive group, local nearring, semidistributive local nearring, 2-generated 2-group, semigroup of all non-invertible elements.

1. Preliminaries.

We recall first some basic definitions of the theory of nearrings.

Definition 1. A set R with two binary operations “+” and “ \cdot ” is called a (left) nearring if the following statements hold:

- (1) $(R, +)$ is a (not necessarily abelian) group with neutral element 0;
- (2) (R, \cdot) is a semigroup;
- (3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ for all $x, y, z \in R$.

If R is a nearring, then the group $R^+ = (R, +)$ is called the additive group of R . If in addition $0 \cdot x = 0$, then the nearring R is called zero-symmetric and if the semigroup (R, \cdot) is a monoid, i. e. it has an identity element i , then R is a nearring with identity i . In the latter case the group R^* of all invertible elements of the monoid (R, \cdot) is called the multiplicative group of R .

Definition 2 ([1]). A (left) nearring R is called semidistributive if so is the multiplication from the right in respect to its addition. In other words, for any elements $r, s, t \in R$ the equality $(r + s + r)t = rt + st + rt$ holds.

It is obvious that every distributive nearring is semidistributive, but not conversely. For example, the nearring $Map(G)$ of all functions on the group G of order 2 is semidistributive and not distributive.

Recall that an element t of a nearring R is called distributive in R if $(r + s)t = rt + st$ for any elements r, s of R .

It is well-known that the additive group of any distributive nearring with identity is abelian. The following two assertions were proved in [1].

Lemma 1. The additive group of every semidistributive nearring R with an identity is abelian.

Lemma 2. *Let R be a semidistributive nearring with an identity. Then the elements of odd orders of the additive group of R are distributive in R . In particular, each semidistributive nearring of odd order is a ring.*

2. Finite semidistributive local nearings.

Maxson shown in [6] that every non-cyclic abelian p -group of order $p^n > 4$ is the additive group of a zero-symmetric local nearring which is not a ring.

Definition 3. *A nearring R with identity is said to be local if the set $L = R \setminus R^*$ of all non-invertible elements of R is a subgroup of R^+ .*

The following lemma characterizes the main properties of finite local nearings (see [3]).

Lemma 3. *Let R be a finite local nearring with identity i and L be the subgroup of R^+ of all non-invertible elements from R . Then R^+ is a p -group for a certain prime number p whose exponent is an additive order of the identity i .*

The following result determines the structural feature of finite local nearings.

Proposition 1. *Each non-trivial subnearring with identity of a finite local nearring is a local nearring.*

Proof. Let $R = (R, +, \cdot)$ be a finite local nearring and L be the subgroup of R^+ of all non-invertible elements from R . Let R_1 be a non-trivial subnearring with identity in R and $(L_1, +)$ be the semigroup of non-invertible elements of R_1 . Since $(L_1, +)$ is a subsemigroup of L it follows that $(L_1, +)$ is a subgroup of L , and hence a subgroup in R_1^+ . Hence R_1 is a local nearring by Definition 3. The statement is proved.

As a direct corollary of Lemmas 1, 2 and 3 we have the following statement.

Lemma 4. *Let R be a finite semidistributive local nearring which is not a ring. Then R^+ is an abelian 2-group.*

Let R be a finite semidistributive local nearring on 2-generated 2-group R^+ . Hence R^+ is an abelian group of type $(2^m, 2^n)$ with $m \geq n \geq 1$ as a corollary of Lemma 4. Let $|R : L| = 2^k$ with $1 \leq k < m + n$. Then $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle$, where $a2^m = b2^n = 0$ with $m \geq n \geq 1$ and $a + b = b + a$. Hence R^+ is of exponent 2^m and, so a coincides with identity of R by Lemma 3. Moreover, each element $x \in R$ is uniquely written in the form $x = ax_1 + bx_2$ with coefficients $0 \leq x_1 < 2^m$ and $0 \leq x_2 < 2^n$. So that $xa = ax = x$ for each $x \in R$. Furthermore, for each $x \in R$ there exist uniquely determined integers $\alpha(x) \in Z_{2^m}$ and $\beta(x) \in Z_{2^n}$ such that $xb = a\alpha(x) + b\beta(x)$ and so some mappings $\alpha : R \rightarrow Z_{2^m}$ and $\beta : R \rightarrow Z_{2^n}$ are determined. So $b \in L$, whence $L = \langle a2^k \rangle + \langle b \rangle$. Furthermore, $R^* = R \setminus L$ and so an element $x = ax_1 + bx_2$ belongs to R^* if and only if $x_1 \not\equiv 0 \pmod{2^k}$.

Lemma 5. *Let $x = ax_1 + bx_2$ and $y = ay_1 + by_2$ be elements of R . Then*

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2).$$

Moreover, for the mappings $\alpha : R \rightarrow Z_{2^m}$ and $\beta : R \rightarrow Z_{2^n}$ the following statements hold:

(0) $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ if and only if the nearring R is zero-symmetric;

- (1) $\alpha(a) = 0$ and $\beta(a) = 1$;
- (2) $\alpha(x) \equiv 0 \pmod{2^{m-n}}$;
- (3) $\alpha(xy) = x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y)$;
- (4) $\beta(xy) = x_2\alpha(y) + \beta(x)\beta(y)$.

Proof. As $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, the nearring R is zero-symmetric if and only if $0 = 0 \cdot b = a\alpha(0) + b\beta(0)$ whence $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, proving statement (0). In addition, from the equality $b = ab = a\alpha(a) + b\beta(a)$ it implies $\alpha(a) = 0$ and $\beta(a) = 1$, and so statement (1) holds. Next, by the left distributive law, we have

$$\begin{aligned} xy &= (xa)y_1 + (xb)y_2 = (ax_1 + bx_2)y_1 + (a\alpha(x) + b\beta(x))y_2 = \\ &= ax_1y_1 + bx_1y_1 + a\alpha(x)y_2 + b\beta(x)y_2 = \\ (*) \quad &= a(x_1y_1 + \alpha(x)y_2) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) \end{aligned}$$

as desired.

Next, by formula (*) for $y = b2^n = 0$ we have $0 = x(b2^n) = a\alpha(x)2^n$. Thus $\alpha(x) \equiv 0 \pmod{2^{m-n}}$, as claimed in (2).

Finally, the associativity of multiplication in R implies that

$$x(yb) = (xy)b = a\alpha(xy) + b\beta(xy).$$

Furthermore, substituting $yb = a\alpha(y) + b\beta(y)$ instead of y in formula (*), we also have

$$xy = a((x_1\alpha(y) + \alpha(x)\beta(y)) + b(x_2\beta(y) + \beta(x)\beta(y))).$$

Comparing the coefficients under a and b in two expressions obtained for $x(yb)$, we derive statements (3) and (4) of the lemma.

Theorem 1. *Let R be a semidistributive local nearring whose additive group R^+ is isomorphic to an abelian group of type $(2^m, 2^n)$ with $m \geq n > 1$. Then the semigroup (L, \cdot) is commutative.*

Proof. If $x = ax_1 + bx_2$ and $y = ay_1 + by_2 \in L$ then $x_1 \equiv 0 \pmod{2^k}$ and $y_1 \equiv 0 \pmod{2^k}$. Let $x_1 = 2s$ and $y_1 = 2t$, where $s, t \in N$. Then for each $x, y \in L$ using the left distributive and semidistributive laws we have:

$$\begin{aligned} xy &= (ax_1 + bx_2)y = (a2s + bx_2)y = (as + bx_2 + as)y = \\ &= (as)y + (bx_2)y + (as)y = as(y + y) + (bx_2)y = \\ &= (as)(y_2) + (bx_2)y = as(a2y_1 + b2y_2) + bx_2(ay_1 + by_2) = \\ &= a2sy_1 + b2sy_2 + bx_2y_1 + a\alpha(b)x_2y_2 + b\beta(b)x_2y_2 = \\ &= ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + a\alpha(b)x_2y_2 + b\beta(b)x_2y_2 = \\ &= a(x_1y_1 + \alpha(b)x_2y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1 + \beta(b)x_2y_2). \end{aligned}$$

At the same time we get:

$$\begin{aligned} yx &= (ay_1 + by_2)x = (a2t + by_2)x = (at + by_2 + at)x = \\ &= (at)x + (by_2)x + (at)x = at(x + x) + (by_2)x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (at)(x_2) + (by_2)x = at(a_2x_1 + b_2x_2) + by_2(ax_1 + bx_2) = \\
&= a_2tx_1 + b_2tx_2 + by_2x_1 + a\alpha(b)x_2y_2 + b\beta(b)x_2y_2 = \\
&= ax_1y_1 + bx_2y_1 + bx_1y_2 + a\alpha(b)x_2y_2 + b\beta(b)x_2y_2 = \\
&= a(x_1y_1 + \alpha(b)x_2y_2) + b(x_1y_2 + x_2y_1 + \beta(b)x_2y_2).
\end{aligned}$$

Therefore $xy = yx$ for each $x, y \in L$ and so (L, \cdot) is commutative, as desired.

As an example, there exist 1068 non-isomorphic local nearrings (LNR) on 2-generated abelian 2-groups of order at most 32, among which 42 are semidistributive (SDLNR). The next table is obtained from the packages SONATA and LocalNR [9] of the computer algebra system GAP.

Additive Group	Number of LNR	Number of SDLNR
$C_2 \oplus C_2$	2	2
$C_4 \oplus C_2$	5	5
$C_4 \oplus C_4$	29	9
$C_8 \oplus C_2$	23	5
$C_8 \oplus C_4$	880	16
$C_{16} \oplus C_2$	129	5

Acknowledgement. The author is grateful to IIE-SRF for the support of her fellowship at the University of Warsaw.

References

1. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Ya. (2023). Semidistributive nearrings with identity. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2211.00456>
2. Aichinger, E., Binder, F., Ecker, Ju., Mayr, P., & Noebauer, C. (2018). SONATA — system of near-rings and their applications. *GAP package, Version 2.9.1*. Retrieved from <https://gap-packages.github.io/sonata/>
3. Amberg, B., Hubert, P., & Sysak, Ya. (2004). Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*, 273, 700–717.
4. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2; 2019. Retrieved from <https://www.gap-system.org>
5. Feigelstock, S. (2006). Additive Groups of Local Near-Rings. *Comm. Algebra*, 34, 743–747.
6. Maxson, C. J. (1970). On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p -groups. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 21, 449–457.
7. Meldrum, J. D. P. (1985). *Near-rings and their links with groups*. London: Pitman Publishing Limited.
8. Pilz, G. (1977). Near-rings. *The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
9. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Y. (2021). LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3 (GAP package). Retrieved from <https://gap-packages.github.io/LocalNR/>

Раєвська М. Ю. Про напівдистрибутивні локальні майже-кільця.

В [1] було доведено, що адитивна група кожного напівдистрибутивного майже-кільця R з одиницею є абелевою. В цій статті розглядаються скінченні напівдистрибутивні локальні майже-кільця. Майже-кільце $R = (R, +, \cdot)$ з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів з R є підгрупою в R^+ . Показано, що напівгрупа (L, \cdot) всіх необоротних елементів скінченного напівдистрибутивного локального майже-кільця на 2-породженій 2-групі є комутативною.

Ключові слова: адитивна група, локальне майже-кільце, напівдистрибутивне локальне майже-кільце, 2-породжена 2-група, напівгрупа всіх необоротних елементів.

Список використаної літератури

1. Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. Semidistributive nearrings with identity. 2023. URL: <https://arxiv.org/abs/2211.00456> (date of access: 12.08.2023).
2. Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P., Noebauer C. SONATA — system of near-rings and their applications. *GAP package, Version 2.9.1*. 2018. URL: <https://gap-packages.github.io/sonata/> (date of access: 13.08.2023).
3. Amberg B., Hubert P., Sysak Ya. Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*. 2004. Vol. 273. P. 700–717.
4. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.10.2; 2019. URL: <https://www.gap-system.org> (date of access: 12.08.2023).
5. Feigelstock S. Additive Groups of Local Near-Rings. *Comm. Algebra*. 2006. Vol. 34. P. 743–747.
6. Maxson C. J. On the construction of finite local near-rings (I): on non-cyclic abelian p -groups. *Quart. J. Math. Oxford (2)*. 1970. Vol. 21. P. 449–457.
7. Meldrum J. D. P. Near-rings and their links with groups. London : Pitman Publishing Limited, 1985. 273 p.
8. Pilz G. Near-rings. The theory and its applications. North Holland : Amsterdam, 1977.
9. Raievska I., Raievska M., Sysak Y. (2021). LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3 (GAP package). URL: <https://gap-packages.github.io/LocalNR/> (date of access: 15.08.2023).

Одержано 15.10.2023

УДК 517.5+517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).72-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).72-81)**Р. В. Хаць**

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,

доцент кафедри математики та економіки,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

khats@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>**ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ ЦІЛИХ
ФУНКЦІЙ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ТИПУ**

В роботі вивчається інтегральне зображення одного класу цілих функцій експоненційного типу. Знайдено умови існування цього інтегрального зображення в термінах розв'язків з відповідних просторів деяких диференціальних рівнянь. Отримано асимптотичні оцінки цілих функцій з розглядуваного класу функцій. Наведено також приклади цілих функцій з цього класу.

Ключові слова: теорема Пелі-Вінера, ціла функція експоненційного типу, диференціальне рівняння, інтегральне зображення, нерівність Шварца.

1. Вступ. Нехай $L^p(X)$ — простір всіх вимірних функцій $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ на вимірній множині $X \subseteq \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1; +\infty).$$

Ціла функція G називається цілою функцією експоненційного типу $\sigma \in [0; +\infty)$ [1–3], якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така стала $c(\varepsilon)$, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується $|G(z)| \leq c(\varepsilon) \exp((\sigma + \varepsilon)|z|)$. Множину всіх цілих функцій експоненційного типу $\sigma \in (0; +\infty)$, звуження яких на \mathbb{R} належить простору $L^2(\mathbb{R})$, позначимо через PW_σ^2 , а клас парних функцій з PW_σ^2 — через $PW_{\sigma,+}^2$. За теоремою Пелі-Вінера [1–3], клас PW_σ^2 складається з функцій G , які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} g(t) dt, \quad g \in L^2(-\sigma; \sigma),$$

а клас $PW_{\sigma,+}^2$ — з функцій G , які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_0^{\sigma} \cos(tz) g(t) dt, \quad g \in L^2(0; \sigma).$$

При цьому, $\|g\|_{L^2(0;\sigma)} = \sqrt{2/\pi} \|G\|_{L^2(0;+\infty)}$ і

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} G(z) \cos(tz) dz.$$

Задача про інтегральне зображення різних класів цілих функцій вивчалась в багатьох працях (див., наприклад, [1–15]). Зокрема, в роботах [6, 7] розглядалось питання про опис класу \mathcal{E} цілих функцій G експоненційного типу $\sigma \leq 1$, які подаються у вигляді

$$G(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz \sin(tz)) g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1). \quad (1)$$

Теорема 1 (див. [6]). Для того щоб ціла функція G подавалася у вигляді (1), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $f(z) - zf'(z) = G(z)$ мало розв'язок $f = F$, який належить простору $PW_{1,+}^2$.

У статті [8] вивчався клас $\tilde{\mathcal{E}}$ цілих функцій Q експоненційного типу $\sigma \leq 1$, які подаються у вигляді

$$Q(z) = \int_0^1 (-z^2 t^2 \cos(tz) + 3tz \sin(tz) + 3 \cos(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1). \quad (2)$$

Теорема 2 (див. [8]). Для того щоб ціла функція Q подавалася у вигляді (2), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $-zf'(z) + 3f(z) = Q(z)$ мало розв'язок $f = G$, який належить до \mathcal{E} .

Теорема 3 (див. [8]). Для того щоб ціла функція Q подавалася у вигляді (2), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння $z^2 f''(z) - 3zf'(z) + 3f(z) = Q(z)$ мало розв'язок $f = F$, який належить до $PW_{1,+}^2$. Якщо ці умови виконані, то функція $z^{-1}(z^{-1}Q'(z))'$ також належить простору $PW_{1,+}^2$ і g можна знайти за кожною з наступних формул:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(z) \cos(tz) dz, \quad g(t) = \frac{2}{\pi t^4} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{Q'(z)}{z} \right)' \cos(tz) dz.$$

У роботі [8] отримано також асимптотичні оцінки цілих функцій $Q \in \tilde{\mathcal{E}}$.

Функція $Q(z) = 2z^4 \cos z$ не належить [8] до $\tilde{\mathcal{E}}$, а функція

$$Q(z) = z \frac{\left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2 - \pi^2/4)\right) (z^2 - \pi^2/4) \sin z + 2z \cos z}{(z^2 - \pi^2/4)^2} + \\ + 3 \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2/4} \left(1 - \frac{4(-\pi+2)}{\pi^3}(z^2 - \pi^2/4)\right),$$

належить [8] до $\tilde{\mathcal{E}}$ з функцією g , визначеною формулою

$$g(t) = \frac{4}{\pi^3 t^2} \left(2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \pi t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right). \quad (3)$$

Метою цієї статті є опис класу $\hat{\mathcal{E}}$ цілих функцій P експоненційного типу $\sigma \leq 1$, які подаються у вигляді

$$P(z) = \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt, \quad (4)$$

з $g \in L^2(0; 1)$. Такі класи функцій виникають при дослідженні деяких некласичних крайових задач для рівняння Бесселя, особливість яких полягає в тому, що система їх канонічних власних функцій є переповненою, тобто залишається повною після відкидання певної їх скінченної кількості (див. [16–21]). В даній роботі ми отримаємо аналоги теорем 1–3 для розглядуваного класу цілих функцій $\hat{\mathcal{E}}$ (див. теореми 4–7). Подібні результати містяться в [14].

2. Основні результати. Основними результатами роботи є наступні твердження, які доповнюють результати робіт [6–9, 18–21].

Теорема 4. Для того щоб ціла функція P подавалась у вигляді (4), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння

$$-z^2 f''(z) + 7z f'(z) - 15f(z) = P(z), \quad (5)$$

мало розв'язок $f = G$, який належить до \mathcal{E} .

Доведення. *Необхідність.* Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$G(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz \sin(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Тоді $G \in \mathcal{E}$,

$$G'(z) = \int_0^1 z t^2 \cos(tz)g(t) dt, \quad G''(z) = \int_0^1 (t^2 \cos(tz) - t^3 z \sin(tz))g(t) dt,$$

і

$$\begin{aligned} & -z^2 G''(z) + 7z G'(z) - 15G(z) = \\ & = \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt = P(z). \end{aligned}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (5) має розв'язок $f = G$, який належить до \mathcal{E} . Тоді

$$f(z) = \int_0^1 (\cos(tz) + tz \sin(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(z) & = -z^2 f''(z) + 7z f'(z) - 15f(z) = \\ & = \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt. \end{aligned}$$

Теорему 4 доведено.

Зауваження 1. Нехай [22]

$$J_{-7/2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k-7/2}}{k! \Gamma(k-5/2)},$$

— функція Бесселя першого роду з індексом $-7/2$, де Γ — класична Гамма-функція Ейлера. Оскільки (див. [22])

$$z^3 \sqrt{z} J_{-7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (z^3 \sin z + 6z^2 \cos z - 15z \sin z - 15 \cos z),$$

то функція $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ подається також у вигляді

$$P(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 z^3 t^3 \sqrt{tz} J_{-7/2}(tz) g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Приклад 1. Функція

$$P(z) = \frac{-4z^2}{(z^2 - \pi^2/4)^3} (2z^2 \cos z + (z^2 - \pi^2/4)(z \sin z + 3 \cos z)) + \\ + \frac{z^2 \cos z - 7z \sin z - 15 \cos z}{z^2 - \pi^2/4} \left(1 - \frac{4(-\pi + 2)}{\pi^3} (z^2 - \pi^2/4) \right),$$

належить до $\widehat{\mathcal{E}}$ з функцією g , визначеною формулою (3). Справді, функція

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2/4} \left(1 - \frac{4(-\pi + 2)}{\pi^3} (z^2 - \pi^2/4) \right),$$

належить [7] до \mathcal{E} з g , визначеною формулою (3). До того ж, функція f є розв'язком рівняння (5), бо

$$f'(z) = \frac{4(-\pi + 2)}{\pi^3} \sin z - \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2/4} - \frac{2z \cos z}{(z^2 - \pi^2/4)^2},$$

$$f''(z) = \frac{4(-\pi + 2)}{\pi^3} \cos z - \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2/4} + \frac{4z \sin z - 2 \cos z}{(z^2 - \pi^2/4)^2} + \frac{8z^2 \cos z}{(z^2 - \pi^2/4)^3}.$$

Тому за теоремою 4 розглядувана функція P подається у вигляді (4).

Теорема 5. Для того щоб ціла функція P подавалась у вигляді (4), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння

$$zf'(z) - 5f(z) = P(z), \quad (6)$$

мало розв'язок $f = Q$, який належить до $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Доведення. Необхідність. Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$Q(z) = \int_0^1 (-z^2 t^2 \cos(tz) + 3tz \sin(tz) + 3 \cos(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Тоді $Q \in \widetilde{\mathcal{E}}$,

$$Q'(z) = \int_0^1 (zt^2 \cos(tz) + z^2 t^3 \sin(tz))g(t) dt,$$

і

$$zQ'(z) - 5Q(z) = \\ = \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt = P(z).$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (6) має розв'язок $f = Q$, який належить до $\widetilde{\mathcal{E}}$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 (-z^2 t^2 \cos(tz) + 3tz \sin(tz) + 3 \cos(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Тому

$$\begin{aligned} P(z) &= zf'(z) - 5f(z) = \\ &= \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt. \end{aligned}$$

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. Для того щоб ціла функція P подавалась у вигляді (4), необхідно й достатньо, щоб диференціальне рівняння

$$z^3 f'''(z) - 6z^2 f''(z) + 15zf'(z) - 15f(z) = P(z), \quad (7)$$

мало розв'язок $f = F$, який належить до $PW_{1,+}^2$. Якщо ці умови виконані, то функція $z^{-1}(z^{-1}(z^{-1}P'(z)))'$ також належить простору $PW_{1,+}^2$ і можна знайти за кожною з наступних формул:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(z) \cos(tz) dz, \quad (8)$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi t^6} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' \right)' \cos(tz) dz. \quad (9)$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція P подається у вигляді (4) і

$$F(z) = \int_0^1 \cos(tz)g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1). \quad (10)$$

Тоді

$$P'(z) = \int_0^1 (z^3 t^4 \cos(tz) - 3t^3 z^2 \sin(tz) - 3t^2 z \cos(tz))g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1),$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' = \int_0^1 (-zt^5 \sin(tz) - t^4 \cos(tz))g(t) dt,$$

$$\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} \left(\frac{P'(z)}{z} \right)' \right)' = - \int_0^1 t^6 \cos(tz)g(t) dt. \quad (11)$$

За теоремою Пелі-Вінера, функції $F(z)$ і $z^{-1}(z^{-1}(z^{-1}P'(z)))'$ належать простору $PW_{1,+}^2$. Крім того,

$$F'(z) = - \int_0^1 t \sin(tz)g(t) dt, \quad F''(z) = - \int_0^1 t^2 \cos(tz)g(t) dt,$$

$$F'''(z) = \int_0^1 t^3 \sin(tz)g(t) dt,$$

і

$$\begin{aligned} & z^3 F'''(z) - 6z^2 F''(z) + 15zF'(z) - 15F(z) = \\ &= \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt = P(z). \end{aligned}$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай рівняння (7) має розв'язок $f = F$, який належить до $PW_{1,+}^2$. Тоді, згідно з теоремою Пелі-Вінера,

$$f(z) = \int_0^1 \cos(tz)g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Тому

$$\begin{aligned} P(z) &= z^3 f'''(z) - 6z^2 f''(z) + 15z f'(z) - 15f(z) = \\ &= \int_0^1 (z^3 t^3 \sin(tz) + 6z^2 t^2 \cos(tz) - 15tz \sin(tz) - 15 \cos(tz))g(t) dt, \end{aligned}$$

тобто функція P подається у вигляді (4). Формули (8) і (9) впливають з рівностей (10) і (11) та формули для оберненого косинус-перетворення Фур'є. Теорему 6 доведено.

Приклад 2. Функція $P(z) = z^7 \sin z$ не належить до $\widehat{\mathcal{E}}$. Справді, для цієї функції P диференціальне рівняння (7) має розв'язок $F(z) = C_1 z + C_2 z^3 + C_3 z^5 + z^4 \cos z - 6z^3 \sin z - 15z^2 \cos z + 15z \sin z$. Проте не існує сталих C_1, C_2 і C_3 таких, що функція P належить простору $PW_{1,+}^2$. Легко бачити, що функція P є парною тільки у випадку, коли $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, і при цьому функція $G(z) = z^4 \cos z - 6z^3 \sin z - 15z^2 \cos z + 15z \sin z$ не належить простору $W_{1,+}^2$, бо $G \notin L^2(\mathbb{R})$. Тому рівняння (7) з $P(z) = z^7 \sin z$ не має розв'язку, який належить до $PW_{1,+}^2$. Отже, за теоремою 6 функція P не подається у вигляді (4).

Теорема 7. Якщо ціла функція P подається у вигляді (4), то

$$|P(z)| \leq c_1 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1 + |\operatorname{Im} z|}} (1 + |z|)^3, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_1 > 0,$$

і P є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$. До того ж, функція $w^{-6}P(w)$ належить до $L^1(1; +\infty)$ і $P(z) = P_1(z) + P_1(-z)$, де P_1 — ціла функція така, що

$$|P_1(z)| \leq c_2 \frac{(1 + |z|)^3}{\sqrt{1 + \operatorname{Im} z}}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad c_2 > 0.$$

Крім того,

$$\int_x^{+\infty} \left| \frac{P(w)}{w^3} \right|^2 dw < +\infty, \quad \int_x^{+\infty} \frac{|P(w)|}{w^6} dw < +\infty,$$

для кожного $x \in (0; +\infty)$ і

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{P(w)}{w^6} dw \right| = o\left(\frac{1}{x^2 \sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Доведення. Нехай $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ і $P(z) := F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + F_4(z)$, де

$$F_1(z) = z^3 \int_0^1 t^3 \cos(tz)g(t) dt, \quad F_2(z) = 6z^2 \int_0^1 t^2 \cos(tz)g(t) dt,$$

$$F_3(z) = -15z \int_0^1 t \sin(tz)g(t) dt, \quad F_4(z) = -15 \int_0^1 \cos(tz)g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

Згідно з теоремою Пелі-Вінера, функції $F_1(z)/z^3$, $F_2(z)/z^2$, $F_3(z)/z$ і $F_4(z)$ належать простору PW_1^2 . До того ж,

$$F_4(z) = -15 \int_0^1 \frac{e^{itz}}{2}g(t) dt - 15 \int_0^1 \frac{e^{-itz}}{2}g(t) dt, \quad g \in L^2(0; 1).$$

За нерівністю Шварца, отримуємо

$$|P(z)| \leq c_3 \frac{e^{|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1 + |\operatorname{Im} z|}} (1 + |z|)^3, \quad z \in \mathbb{C}, \quad c_3 > 0.$$

Тому функція P є парною цілою функцією експоненційного типу $\sigma \leq 1$. Крім того,

$$\int_x^{+\infty} \left| \frac{P(w)}{w^3} \right|^2 dw \leq 15 \int_x^{+\infty} \left(\left| \frac{F_1(w)}{w^3} \right|^2 + \left| \frac{F_2(w)}{w^3} \right|^2 + \left| \frac{F_3(w)}{w^3} \right|^2 + \left| \frac{F_4(w)}{w^3} \right|^2 \right) dw < +\infty,$$

і з нерівності Шварца, одержимо

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{P(w)}{w^6} dw \right| \leq \frac{1}{x^2 \sqrt{5x}} \left(\int_x^{+\infty} \left| \frac{P(w)}{w^3} \right|^2 dw \right)^{1/2} < +\infty, \quad x \in (0; +\infty).$$

Тому функція $w^{-6}P(w)$ належить простору $L^1(1; +\infty)$ і виконується асимптотична рівність (12). Далі, $P(z) = P_1(z) + P_2(z)$, де

$$P_1(z) := \int_0^1 \left(z^3 t^3 \frac{e^{itz}}{2i} + 6z^2 t^2 \frac{e^{itz}}{2} - 15zt \frac{e^{itz}}{2i} - 15 \frac{e^{itz}}{2} \right) g(t) dt,$$

$$P_2(z) := \int_0^1 \left(-z^3 t^3 \frac{e^{-itz}}{2i} + 6z^2 t^2 \frac{e^{-itz}}{2} + 15zt \frac{e^{-itz}}{2i} - 15 \frac{e^{-itz}}{2} \right) g(t) dt.$$

Отже, $P_2(z) = P_1(-z)$, і згідно з нерівністю Шварца, для $z = x + iy$ і $y \geq 0$ виконується

$$\begin{aligned} |P_1(z)| &\leq \frac{15}{2} (1 + |z|)^3 \|g\|_{L^2(0;1)} \left(\int_0^1 e^{-2ty} dt \right)^{1/2} = \\ &= \frac{15}{2} (1 + |z|)^3 \|g\|_{L^2(0;1)} \left(\frac{1 - e^{-2y}}{2y} \right)^{1/2} \leq c_4 \frac{(1 + |z|)^3}{\sqrt{1 + \operatorname{Im} z}}, \quad c_4 > 0. \end{aligned}$$

Теорему 7 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Робота присвячена дослідженню інтегрального зображення одного класу $\widehat{\mathcal{E}}$ цілих функцій P експоненційного типу $\sigma \leq 1$. Знайдено умови для такого представлення в термінах існування розв'язків з відповідних просторів деяких диференціальних рівнянь (див. теореми 4–6). Отримано також асимптотичні оцінки цілих функцій $P \in \widehat{\mathcal{E}}$ (див. теорему 7) та побудовано приклади цілих функцій з $\widehat{\mathcal{E}}$ (див. приклади 1 і 2). Отримані результати можуть бути використані для дослідження повноти системи $\{t^3 \rho_k^3 \sqrt{t \rho_k} J_{-7/2}(t \rho_k) : k \in \mathbb{N}\}$ у просторі $L^2(0; 1)$, де $J_{-7/2}$ — функція Бесселя першого роду з індексом $-7/2$ і $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність різних ненульових комплексних чисел.

Список використаної літератури

1. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr. : Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1996. 248 p.
2. Sedletskii A. M. Analytic Fourier transforms and exponential approximations. *I. Journal of Mathematical Sciences*. 2005. Vol. 129, No. 6. P. 4251–4408. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-005-0349-y>
3. Wiener N., Paley R. C. Fourier transforms in the complex domain. USA : Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1934. 183 p.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Москва : Наука, 1966. 672 с.
5. Griffith J. L. Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales*. 1955. Vol. 89. P. 109–115.
6. Vynnyts'kyi B. V., Dilnyi V. M. On approximation properties of one trigonometric system. *Russian Mathematics*. 2014. Vol. 58, No. 11. P. 10–21. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1066369X14110024>
7. Khats' R. V. On the completeness of a system of Bessel functions of index $-3/2$ in weighted L^2 -space. *Filomat*. 2023. Vol. 37, No. 19. P. 6335–6343. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL2319335K>
8. Khats' R. V. Integral representation of one class of entire functions. *Armenian Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 14, No. 1. P. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.1-1-9>
9. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$. *Matematychni Studii*. 2010. Vol. 34, No. 2. P. 152–159.
10. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Mathematical Journal*. 2013. Vol. 5, No. 2. P. 131–141. DOI: <https://doi.org/10.13108/2013-5-2-131>
11. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2 -spaces. *Eurasian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 6, No. 1. P. 123–131.
12. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R.V. A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler type functions. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*. 2015. Vol. 50, No. 6. P. 300–305. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068362315060060>
13. Tuan V. K., Zayed A. I. Paley-Wiener-type theorems for a class of integral transforms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2002. Vol. 266, No. 1. P. 200–226. DOI: <https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7740>
14. Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations. Walter de Gruiter : Berlin, 2011. 341 p.
15. Unni K. R. Hankel transforms and entire functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1965. Vol. 71, No. 3. P. 511–513. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11303-9>
16. Khats' R. V. Generalized eigenvectors of linear operators and biorthogonal systems. *Constructive Mathematical Analysis*. 2022. Vol. 5, No. 2. P. 60–71. DOI: <https://doi.org/10.33205/cma.1077842>
17. Khats' R. V. Completeness of the system of generalized eigenfunctions for a Bessel-type differential operator. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 274, No. 6. P. 898–911. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06652-2>
18. Шавала О. В. Про деякі апроксимаційні властивості функцій Бесселя з індексом $-5/2$. *Математичні студії*. 2015. Т. 43, № 2. С. 180–184. DOI: <https://doi.org/10.15330/ms.43.2.180-184>
19. Шавала О. В. Про повноту систем функцій, породжених функцією Бесселя. *Буковинський математичний журнал*. 2017. Т. 5, № 3-4. С. 168–171.
20. Винницький Б. В., Шавала О. В. Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя. *Математичні студії*. 2008. Т. 30, № 1. С. 31–41.
21. Vynnyts'kyi B. V., Shavala O. V. Some properties of boundary value problems for Bessel's equation. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society*. 2013. Vol. 10. P. 169–172.

22. Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1944. 804 p.

Khats' R. V. On the integral representation of one class of entire functions of exponential type.

In this paper, we study an integral representation of one class of entire functions of exponential type. Conditions for the existence of this representation in terms of solutions from the corresponding spaces of some differential equations are found. We obtain asymptotic estimates of entire functions from the considered class of functions. We also give examples of entire functions from this class.

Keywords: Paley-Wiener theorem, entire function of exponential type, differential equation, integral representation, Schwarz inequality.

References

1. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr.* USA: Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
2. Sedlets'kiy, A. M. (2005). Analytic Fourier transforms and exponential approximations. *I. Journal of Mathematical Sciences*, 129(6), 4251–4408. <https://doi.org/10.1007/s10958-005-0349-y>
3. Wiener, N., & Paley, R. C. (1934). *Fourier transforms in the complex domain.* USA: Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
4. Dzhrbashyan, M. M. (1966). *Integral transforms and representations of functions in the complex domain.* Moscow: Nauka [in Russian].
5. Griffith, J. L. (1955). Hankel transforms of functions zero outside a finite interval. *Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales*, 89, 109–115.
6. Vynnyts'kyi, B. V., & Dilnyi, V. M. (2014). On approximation properties of one trigonometric system. *Russian Mathematics*, 58(11), 10–21. <https://doi.org/10.3103/S1066369X14110024>
7. Khats', R. V. (2023). On the completeness of a system of Bessel functions of index $-3/2$ in weighted L^2 -space. *Filomat*, 37(19), 6335–6343. <https://doi.org/10.2298/FIL2319335K>
8. Khats', R. V. (2022). Integral representation of one class of entire functions. *Armenian Journal of Mathematics*, 14(1), 1–9. <https://doi.org/10.52737/18291163-2022.14.1-1-9>
9. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2010). Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index $-3/2$. *Matematychni Studii*, 34(2), 152–159.
10. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2013). Completeness and minimality of systems of Bessel functions. *Ufa Mathematical Journal*, 5(2), 131–141. <https://doi.org/10.13108/2013-5-2-131>
11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2015). On the completeness and minimality of sets of Bessel functions in weighted L^2 -spaces. *Eurasian Mathematical Journal*, 6(1), 123–131.
12. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2015). A remark on basis property of systems of Bessel and Mittag-Leffler type functions. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences)*, 50(6), 300–305. <https://doi.org/10.3103/S1068362315060060>
13. Tuan, V. K., & Zayed, A. I. (2002). Paley-Wiener-type theorems for a class of integral transforms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 266(1), 200–226. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7740>
14. Laine, I. (2011). *Nevanlinna theory and complex differential equations.* Berlin: Walter de Gruiter.
15. Unni, K. R. (1965). Hankel transforms and entire functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(3), 511–513. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1965-11303-9>
16. Khats', R. V. (2022). Generalized eigenvectors of linear operators and biorthogonal systems. *Constructive Mathematical Analysis*, 5(2), 60–71. <https://doi.org/10.33205/cma.1077842>
17. Khats', R. V. (2023). Completeness of the system of generalized eigenfunctions for a Bessel-type differential operator. *Journal of Mathematical Sciences*, 274(6), 898–911. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06652-2>
18. Shavala, O. V. (2015). On some approximation properties of the Bessel functions of order $-5/2$. *Matematychni Studii*, 43(2), 180–184. <https://doi.org/10.15330/ms.43.2.180-184> [in Ukrainian].

19. Shavala, O. V. (2017). On completeness of systems of functions generated by the Bessel function. *Bukovinian Mathematical Journal*, 5(3-4), 168–171 [in Ukrainian].
20. Vynnyts'kyi, B. V., & Shavala, O. V. (2008). Boundedness of solutions of a second-order linear differential equation and a boundary value problem for Bessel's equation. *Matematychni Studii*, 30(1), 31–41 [in Ukrainian].
21. Vynnyts'kyi, B. V., & Shavala, O. V. (2013). Some properties of boundary value problems for Bessel's equation. *Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society*, 10, 169–172.
22. Watson, G. N. (1944). *A treatise on the theory of Bessel functions. 2nd ed.* Cambridge: Cambridge University Press.

Одержано 07.10.2023

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).82-95](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).82-95)**Ю. П. Глухов¹, С. Ю. Бабич², Ю. Ю. Млавець³**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uri@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

² Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

РЕАКЦІЯ ШАРУВАТОГО НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянута плоска задача про вплив рухомого навантаження на нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

Ключові слова: нестисливий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження.

1. Вступ. Специфічні інженерні проблеми і закони внутрішнього розвитку фундаментальних досліджень вимагають послідовного і більш повного врахування фізико-механічних характеристик матеріалів та інших властивостей, властивих реальним тілам. Одним із важливих факторів при розв'язанні таких задач є врахування початкових (залишкових) напружень, що є практично в усіх елементах конструкцій і зумовлені як технологічними, так і природними причинами. Все це вимагає побудови моделей деформування пружних матеріалів адекватних реальним процесам, розробки нових та розвиток відомих аналітичних і чисельних методів їх дослідження.

Дане дослідження спрямовано на вивчення закономірностей хвильових процесів в пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого покриття, початкових напружень, різних швидкостей руху поверхневого навантаження.

В даній статті розглянута плоска задача про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Шаруваті середовища з початковими напруженнями досліджувалися в роботах [1–5] та інших.

2. Постановка задачі. Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору — ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj} (\lambda_m - 1) x_m; \quad m, j = \overline{1, 3},$$

де λ_j — видовження, ($\lambda_j = const$, $j = \overline{1, 3}$), δ_{mj} — символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \quad \sigma_{22}^0 \neq 0; \quad \sigma_{33}^0 \neq 0.$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2, x_3) , що вводяться в природному стані, співвідношеннями $\xi_j = \lambda_j x_j$.

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq 0$, а півпростір — область $\xi_2 + h \leq 0$.

На вільну поверхню шару ($\xi_2 = 0$) діє лінійне навантаження P , що рухається з постійною швидкістю v під кутом α протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 . Відносно систем координат, пов'язаних з цим навантаженням, існує плоский деформований усталений стан

$$u_1 = u_1(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_2 = u_2(\xi_1, \xi_2, t); \quad u_3 \equiv 0; \quad p = p(\xi_1, \xi_2, t).$$

Скалярна функція p пов'язана з гідростатичним тиском.

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (1)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [6] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1 . Таким чином, нормальна і дотична складові навантаження будуть $(P \sin \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1) \delta(y_1)$ і $(P \cos \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2) \delta(y_1)$. Тут $\delta(y_1)$ — функція Дірака.

Представлення загальних розв'язків рівнянь руху для нестисливих тіл в рухомій системі координат (1) мають вигляд [6]

$$u_1 = -\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 \chi^{(1)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(2)};$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= -\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^2 \chi^{(2)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(1)}; \\
p &= \tilde{q}_{11}^{-2} \left\{ [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\kappa}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2} + \\
&+ \tilde{q}_{22}^{-2} \left\{ (\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho} v^2) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + [\tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}, \quad (2)
\end{aligned}$$

де

$$\tilde{\beta}_{12}^{(2)} = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{21}^{(2)} = \tilde{\beta}_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\beta}_{11}^{(2)} = \tilde{\beta}_{22}^{(1)} = 0.$$

При вище зазначених припущеннях з урахуванням (2) рівняння усталеного руху нестисливого півпростору можна записати у вигляді [6]

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Функції η_j в рівняннях руху (3) визначаються із рівнянь

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned}
2A\tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2 \tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2 (\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2) - 2\tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{2121}); \\
A_1 \tilde{q}_{22}^2 \tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2 (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2). \quad (5)
\end{aligned}$$

В формулах (2) і (5) ρ — густина матеріалу півпростору в природному стані, \tilde{q}_{tt} , $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ — параметри, що характеризують матеріал півпростору [6].

Значення функцій $\eta_1^2(v)$ і $\eta_2^2(v)$ визначають вид рівнянь руху (3) і відповідно вибір форми їх розв'язку.

Вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху (3) досліджений в статті [3]. В роботі [3] дана оцінка можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Вказані необхідні і достатні умови існування кратних коренів. Для нестисливих матеріалів із потенціалом типу Бартенева-Хазановича виконані чисельні дослідження.

Розглянемо жорсткий контакт між шаром і півпростором при $y_2 = -h$. В цьому випадку граничні умови можна записати

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{21} &= P\delta(y_1) \sin \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_1; \\
\tilde{Q}_{22} &= P\delta(y_1) \cos \alpha + \rho_1 h \ddot{u}_2. \quad (6)
\end{aligned}$$

Розглянемо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (4).

Нерівні корені. В представленні загального розв'язку (2) приймемо

$$\chi = \tilde{\beta}_{11}^{(1)} \chi^{(1)}; \quad \chi^{(2)} = 0; \quad (7)$$

Враховуючи (7), отримаємо представлення розв'язку у вигляді

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_2}; \quad u_2 = \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi,$$

$$p = \tilde{q}_{11}^{-1} \left\{ [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\kappa}_{2112} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right\} \frac{\partial \chi}{\partial y_2}, \quad (8)$$

де

$$\beta_1 = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_2 \equiv 0.$$

Функція $\chi(y_1, y_2)$ визначається з рівняння

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi = 0. \quad (9)$$

У випадку нерівних коренів можна використовувати інше представлення розв'язку. Введемо позначення

$$\Phi = -\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \quad \Psi = \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1}; \quad \chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)}. \quad (10)$$

Після підстановки (10) в (2) і (3) отримаємо

$$\left(\eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Phi = 0; \quad \left(\eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi = 0; \quad (11)$$

і

$$u_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{\partial \Psi}{\partial y_2}; \quad u_2 = \alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y_1},$$

$$p = \tilde{q}_{11}^{-1} \left\{ - [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{\kappa}_{2112} \eta_1^2 - \beta_1 (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + \right.$$

$$\left. + [\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{\kappa}_{2112} \eta_2^2 - \beta_1 (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial y_1 \partial y_2} \right\}. \quad (12)$$

Тут

$$\alpha_1 = \beta_1 \eta_1^{-2}; \quad \alpha_2 = \beta_1.$$

При відсутності початкових напружень представлення розв'язків (12) тотожні представленню Ляме для нестисливих тіл.

В задачі, що розглядається, переміщення визначаються з точністю до довільної константи, тому будемо в подальшому оперувати не переміщеннями, а швидкостями переміщень. Напруження і швидкості переміщень в півпросторі через функцію χ в координатах (y_1, y_2) можна записати

$$\tilde{Q}_{jj} = \left(\alpha_{jj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{jj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_2};$$

$$\tilde{Q}_{mj} = \left(\alpha_{mj}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{mj}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j;$$

$$\dot{u}_1 = v \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1^2 \partial y_2}; \quad \dot{u}_2 = -v \left(\beta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1}. \quad (13)$$

Вирази для напружень і швидкостей переміщень у півпросторі через потенціали Φ і Ψ мають вигляд

$$\tilde{Q}_{jj} = \left(\eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)} - \alpha_{jj}^{(1)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + \left(\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2};$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{mj} &= \left(\eta_1^{-2} \alpha_{mj}^{(1)} - \alpha_{mj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2}; \\ m, j &= 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= -v \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} \right); \quad \dot{u}_2 = -v \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y_2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1^2} \right),\end{aligned}\quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} &= \tilde{\kappa}_{jj22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} - \tilde{\kappa}_{jj11} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1} \left[\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} &= \tilde{\kappa}_{2112} \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} = \tilde{\kappa}_{mj21} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} = -\tilde{\kappa}_{mj12}; \quad j, m = 1, 2.\end{aligned}$$

Отже, задача про усталений рух двошарового нестисливого півпростору з початковими напруженнями при дії навантаження, що рухається з постійною швидкістю, при нерівних коренях зводиться до визначення функцій χ або Φ і Ψ із граничних умов (6). Компоненти напружено-деформованого стану нестисливого півпростору визначаються за формулами (13) або (14).

Рівні корені. Розглянемо випадок, коли $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. Skorистаємося загальним представленням розв'язку (2). Напруження і швидкості переміщень в шаруватому півпросторі у випадку рівних коренів через функції $\chi^{(j)}$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj} &= \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_2}; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \left(\tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1}; \\ m, j &= 1, 2; \quad m \neq j; \\ \dot{u}_1 &= v \left[\tilde{\beta}_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi^{(1)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(2)}}{dy_1} \right]; \\ \dot{u}_2 &= v \left[\tilde{\beta}_{21}^{(2)} \frac{\partial^3 \chi^{(2)}}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \left(\tilde{\beta}_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{d\chi^{(1)}}{dy_1} \right],\end{aligned}\quad (15)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{jj}^{(11)} &= (\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} - \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11}) + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \left[\tilde{\kappa}_{1111} - \rho v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj11} - \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{jj22} + \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} \left[\tilde{\kappa}_{2222} - \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \tilde{\alpha}_{jj}^{(21)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{11}^{-2} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \tilde{\alpha}_{jj}^{(12)} = \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{22}^{-2} (\tilde{\kappa}_{1221} - \rho v^2); \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(11)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(21)} = -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \\ \tilde{\alpha}_{mj}^{(12)} &= -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj21}; \quad \tilde{\alpha}_{mj}^{(22)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{mj12}; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.\end{aligned}\quad (16)$$

Таким чином, у випадку рівних коренів задача, що розглядається, зводиться до визначення функцій $\chi^{(j)}$ із граничних умов (6). При цьому потрібно використовувати формули (15) при позначеннях (16).

3. Розв'язок задачі в області зображень Фур'є. Розв'язок задачі знайдемо з допомогою інтегрального перетворення Фур'є по змінній y_1

$$f^F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y_1) e^{-iky_1} dy_1; \quad (17)$$

і відповідної формули оберненого перетворення

$$f(y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} f^F(k) e^{iky_1} dk; \quad \gamma > 0. \quad (18)$$

Застосовуючи перетворення Фур'є (17) до рівнянь (2), отримаємо

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^{(j)F} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (19)$$

Визначимо розв'язок задачі для випадків нерівних і рівних коренів характеристичного рівняння. Розв'язок запишемо в загальному вигляді для будь-якої швидкості руху навантаження.

Нерівні корені. Рівняння руху (9) і (11) з урахуванням (17) в просторі зображень можна відповідно записати

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \chi^F = 0; \quad (20)$$

і

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2 \right) \Phi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2 \right) \Psi^F = 0. \quad (21)$$

Розв'язок трансформованих рівнянь (20) з урахуванням загасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^F = \sum_{m=1}^2 C_m e^{k_m k \eta_m (y_2 + h)}, \quad (22)$$

де C_m , $m = 1, 2$ — константи інтегрування. Тут $k_j \equiv \sigma = \frac{|k|}{k}$, якщо $\eta_j^2 > 0$, і $k_j = i$, якщо $\eta_j^2 < 0$. У випадку, якщо η_j мають комплексні значення, то в представленні розв'язку (22) необхідно покласти $k_j = 1$; $\eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j$; $j = 1, 2$.

Розв'язок рівнянь (21) для потенціалів Φ^F і Ψ^F будемо шукати у вигляді

$$\Phi^F = C_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2 + h)}; \quad \Psi^F = C_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2 + h)}, \quad (23)$$

де C_m , $m = 1, 2$ — константи інтегрування.

Зауважимо, що для скінченності значень функцій χ^F , Φ^F и Ψ^F необхідно, щоб $\operatorname{Re} \eta_j > 0$.

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням представлення розв'язків (22) мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj}^F &= -k^3 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_{jj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^3 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p = 1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = -k^2 \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= -k^3 v \sum_{m=1}^2 C_m k_m \tilde{\gamma}_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad \dot{u}_2^F = ik^3 v \sum_{m=1}^2 C_m \tilde{\gamma}_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (24)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} &= \eta_1 \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_1^2 \right); \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \eta_2 \left(\tilde{\alpha}_{jj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{jj}^{(2)} \eta_2^2 \right); \\ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2)} \eta_2^2; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \tilde{\gamma}_1^{(1)} &= \eta_1; \quad \tilde{\gamma}_1^{(2)} = \eta_2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(1)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_1^2; \quad \tilde{\gamma}_2^{(2)} = \tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_2 \eta_2^2.\end{aligned}$$

Використовуючи представлення розв'язків (23), в просторі зображень Фур'є параметри, що характеризують напружено-деформований стан півпростору, можна записати

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{jj}^F &= k^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_{jj}^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \tilde{Q}_{pj}^F &= -ik^2 \sum_{m=1}^2 (-i)^{m-1} C_m \gamma_{pj}^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad j, p = 1, 2; \quad j \neq p; \\ u_1^F &= ik \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \quad u_2^F = k \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_2^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_1^F &= vk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} C_m \gamma_1^{(m)} e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}; \\ \dot{u}_2^F &= -ivk^2 \sum_{m=1}^2 i^{m-1} \gamma_2^{(m)} C_m e^{k_m k \eta_m (y_2+h)}, \quad (25)\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{(1)} &= \alpha_{jj}^{(1)} - \eta_1^2 \alpha_{jj}^{(2)}; \quad \gamma_{jj}^{(2)} = k_2 \eta_2 \left(\alpha_{jj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{jj}^{(2)} \right); \\ \gamma_{mj}^{(1)} &= k_1 \eta_1 \left(\alpha_{mj}^{(2)} \eta_1^{-2} - \alpha_{mj}^{(1)} \right); \quad \gamma_{mj}^{(2)} = \alpha_{mj}^{(1)} - \eta_2^2 \alpha_{mj}^{(2)}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \gamma_1^{(1)} &= 1; \quad \gamma_1^{(2)} = k_2 \eta_2; \quad \gamma_2^{(1)} = \alpha_1 k_1 \eta_1; \quad \gamma_2^{(2)} = \alpha_2.\end{aligned}$$

Підставляючи вирази (24) в трансформовані граничні умови (6) маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m , $m = 1, 2$ (представлення розв'язку через функцію χ):

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \tilde{v}^2 k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = ik^{-3} P \sin \alpha; \\ & \left(k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 + \left(k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = -k^{-3} P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогічну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m ($m = 1, 2$) отримуємо, використовуючи граничні умови (6) і вирази (25) (представлення розв'язку через функції Φ і Ψ)

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + i \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = -ik^{-2} P \sin \alpha; \\ & \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 + i \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = k^{-2} P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (27)$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (26) можна записати

$$C_m = k^{-3} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= \rho_1^2 h^2 k^2 \tilde{v}^4 \left(k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} - k_1 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) + \\ &+ \rho_1 h k v^2 \left[k_2 k_1 \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_1^{(2)} - \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) + \left(\tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \right) \right] + \\ &+ \left(k_1 \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} - k_2 \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \right); \\ U_m &= (-1)^m P \left[i \left(k_j \tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 k_j \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

Оригінали напружень і швидкостей переміщень отримуємо, скориставшись формулами (24), (28) і оберненим перетворенням Фур'є (18):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ & \quad m, j = 1, 2; \quad j \neq m; \\ \dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(k_1 \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + k_2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_2 &= \frac{i v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \tilde{\Delta}^{-1} \left(\tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + \tilde{\gamma}_2^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk. \end{aligned} \quad (29)$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (27) має вигляд

$$C_m = k^{-2} \Delta^{-1} U_m; \quad m = 1, 2. \quad (30)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Delta = & \rho_1^2 h^2 k^2 v^4 \left(\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) + \\ & + \rho_1 h k v^2 \left[\left(\tilde{\gamma}_2^{(2)} \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) + \left(\tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \right) \right] + \\ & + \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} \right); \\ U_m = & -i^{m-1} P \left[i \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k v^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

В цьому випадку розв'язок задачі через параметри, що характеризують напружено-деформований стан, можна записати, використовуючи формули (25), (30) і (18):

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{jj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \tilde{Q}_{mj} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(i \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} - \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ \dot{u}_m &= (-i)^{m-1} \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left(\tilde{\gamma}_m^{(1)} U_1 e^{k_1 k \eta_1 (y_2+h)} + i \tilde{\gamma}_m^{(2)} U_2 e^{k_2 k \eta_2 (y_2+h)} \right) e^{iky_1} dk; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned} \quad (31)$$

Рівні корені. Розв'язок трансформованих рівнянь (19) у випадку рівних коренів рівнянь (3) ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$) з урахуванням загасання на нескінченності будемо шукати у вигляді

$$\chi^{(j)F} = \left[C_1^{(j)} + |k| \eta (y_2 + h) C_2^{(j)} \right] e^{|k| \eta (y_2+h)}; \quad j = 1, 2, \quad (32)$$

де $C_m^{(j)}$, $m = 1, 2$ — константи інтегрування.

Введемо постійні інтегрування

$$i C_m^{(2)} = C_m; \quad C_m^{(1)} = C_m; \quad m = \overline{1, 4}. \quad (33)$$

Трансформовані вирази для напружень, переміщень і швидкостей переміщень з урахуванням (15) і (16) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mj}^F &= -i^{1-\delta_{mj}} k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2+h)}; \\ u_j^F &= -i^{\delta_{1j}} k^2 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2+h)}; \end{aligned}$$

$$\dot{u}_j^F = i^{2-\delta_{2j}} \nu k^3 \left\{ \tilde{\gamma}_j^{(1)} [C_1 + |k| \eta (y_2 + h) C_2] + \tilde{\gamma}_j^{(2)} C_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)}; \quad j, m = 1, 2, \quad (34)$$

де

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} + \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(2)} - \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(1)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} = \sigma \eta \left(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)} \right) - \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{jj}^{(4)} = \sigma \eta \left(\tilde{z}_{jj}^{(1)} - \tilde{\zeta}_{jj}^{(1)} \right) + \tilde{\zeta}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} - \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(2)}; \quad \tilde{\gamma}_{jj}^{(3)} = \tilde{z}_{jj}^{(1)} + \sigma \eta \tilde{z}_{jj}^{(2)};$$

$$\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} = -\sigma \eta \left(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)} \right) - \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)}; \quad \gamma_{mj}^{(4)} = -\sigma \eta \left(\tilde{z}_{mj}^{(2)} - \tilde{\zeta}_{mj}^{(2)} \right) + \tilde{\zeta}_{mj}^{(1)};$$

$$\tilde{z}_{mj}^{(p)} = \tilde{\alpha}_{mj}^{(1p)} - \tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)} \eta^2; \quad \tilde{\zeta}_{mj}^{(p)} = 2\tilde{\alpha}_{mj}^{(2p)} \eta^2; \quad j, m, p = 1, 2;$$

$$\gamma_1^{(1)} = -\tau_1^{(1)} + \tau_1^{(2)}; \quad \gamma_1^{(2)} = \tau_1^{(2)} + \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_1^{(3)} = -\tau_1^{(1)} - \tau_1^{(2)};$$

$$\gamma_1^{(4)} = \tau_1^{(2)} - \tau_1^{(3)}; \quad \gamma_2^{(1)} = \tau_2^{(1)} + \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(2)} = \tau_2^{(2)} - \tau_2^{(3)};$$

$$\gamma_2^{(3)} = \tau_2^{(1)} - \tau_2^{(2)}; \quad \gamma_2^{(4)} = \tau_2^{(2)} + \tau_2^{(3)};$$

$$\tau_m^{(1)} = \tilde{\beta}_{m1}^{(1)} - \tilde{\beta}_{m2}^{(1)} \eta^2; \quad \tau_m^{(2)} = \sigma \eta \tilde{\beta}_{m1}^{(m)}; \quad \tau_m^{(3)} = 2\tilde{\beta}_{m2}^{(j)} \eta^2; \quad m, j = 1, 2; \quad m \neq j.$$

Підставляючи вирази (34) в трансформовані граничні умови (6) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих C_m , $m = 1, 2$

$$\left(\sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(1)} \right) C_1 + \left(\sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(2)} \right) C_2 = i k^{-3} P \sin \alpha;$$

$$\left(\tilde{\gamma}_{22}^{(1)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(1)} \right) C_1 - \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(2)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right) C_2 = k^{-3} P \cos \alpha. \quad (35)$$

Розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (35) можна представити у вигляді (28), де

$$\begin{aligned} \Delta = & \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) - \\ & - \rho_1 h k \nu^2 \left[\eta^2 \left(\tilde{\gamma}_{21}^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} \tilde{\gamma}_{21}^{(2)} \right) - \left(\tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_{22}^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_{22}^{(2)} \right) \right] - \\ & - \rho_1^2 h^2 k^2 \nu^4 \sigma \eta \left(\tilde{\gamma}_1^{(2)} \tilde{\gamma}_2^{(1)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} \tilde{\gamma}_2^{(2)} \right); \\ U_m = & P \left[i \left(\tilde{\gamma}_{22}^{(j)} - \rho_1 h k \sigma \eta \nu^2 \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right) \sin \alpha + (-1)^m \left(\sigma \eta \tilde{\gamma}_{21}^{(j)} + \rho_1 h k \nu^2 \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right) \cos \alpha \right]; \\ & j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \end{aligned}$$

Відповідно оригінали напружень і швидкостей переміщень, використовуючи формули (34), (28) і (18), можна записати:

$$\tilde{Q}_{jj} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_{jj}^{(2)} - \tilde{\gamma}_{jj}^{(1)} |k| \eta (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)} e^{i k y_1} dk;$$

$$\tilde{Q}_{mj} = -\frac{i\eta}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_{mj}^{(2)} + \tilde{\gamma}_{mj}^{(1)} \eta |k| (y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k| \eta (y_2 + h)} e^{i k y_1} dk;$$

$$m, j = 1, 2; \quad j \neq m;$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}_1 &= -\frac{v}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_1^{(1)} U_1 + \left[\tilde{\gamma}_1^{(2)} + \tilde{\gamma}_1^{(1)} |k| \eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk; \\
\dot{u}_2 &= \frac{iv}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{+\infty+i\gamma} \sigma \eta \Delta^{-1} \left\{ \tilde{\gamma}_2^{(1)} U_1 - \left[\tilde{\gamma}_2^{(2)} - \tilde{\gamma}_2^{(1)} |k| \eta(y_2 + h) \right] U_2 \right\} e^{|k|\eta(y_2+h)} e^{iky_1} dk.
\end{aligned} \tag{36}$$

З вище викладеного слідує, що напружено-деформований стан поперечно напруженого нестисливого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару визначається із виразів (29), (31) і (36) в залежності від механічних параметрів поверхневого шару і півпростору, швидкості руху навантаження, початкових напружень і координат точки, що досліджується.

4. Чисельні дослідження. З отриманих результатів випливає, що розрахунок інтегралів оберненого перетворення істотно залежить від швидкості руху навантаження. Методика обчислення таких інтегралів приведена в роботі [7].

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом типу Бартенева-Хазановича [6]. Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє. Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження. Розрахунки проводилися при наступних значеннях основних параметрів: $\rho/\rho_1 = 0,5$; $\alpha = \pi/2$.

Для компонентів тензора $\tilde{\kappa}$ мають місце наступні вирази [2]

$$\tilde{\kappa}_{1111} = \tilde{\kappa}_{2222} = 2\mu\lambda_1^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{2112} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1};$$

$$\tilde{\kappa}_{1221} = 2\mu\lambda_1^3(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1212} = \tilde{\kappa}_{2121} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\kappa}_{1122} = \tilde{\kappa}_{2211} = 0.$$

Для розрахунку складових напружень і швидкостей переміщень у півпросторі скористаємося формулами (29) і (36).

Визначимо, як основні характеристики напружено-деформованого стану залежать від початкових напружень при різних швидкостях навантаження (дозвукових і надзвукових).

Досліджувались швидкості навантаження в діапазонах $v < c_1$ і $v > c_1$. Тут c_1 — швидкість поширення поперечних хвиль у напрямку осі Oy_1 в необмеженому нестисливому тілі з початковими напруженнями ($\rho c_1^2 = \tilde{\kappa}_{1221}$).

У випадку, коли $v < c_1$ розглянуті тільки докритичні швидкості навантаження [2].

На рис. 1 показаний розподіл деяких складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$. Тут $c_0^2 = \mu/\rho$.

Для таких швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

На рис. 2 показаний розподіл узагальненого напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при $y_2 = -2h/\lambda_2$ для $v^2 = 0,1c_0^2$ та різних співвідношеннях густини півпростору та поверхневого шару.

Криві 1, 2, 3, 4 і 5 на рис. 1 і 2 відповідають значенням $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_1 = 0,9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = 1,1$ і $\lambda_1 = 1,2$.

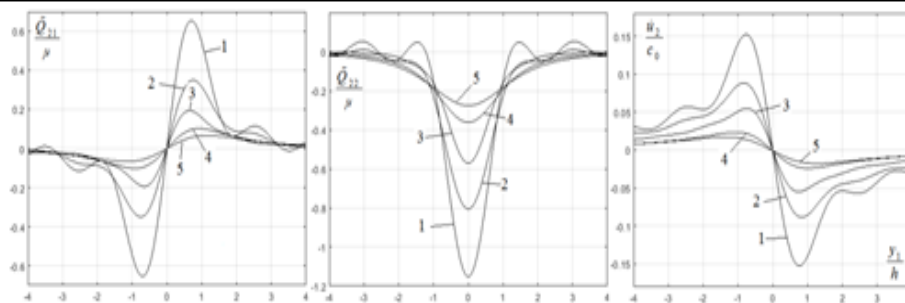


Рис. 1. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{12} і \tilde{Q}_{22} та швидкість переміщення \dot{u}_2 в півпросторі при дозвуковій швидкості $v^2 = 0.1c^2$.

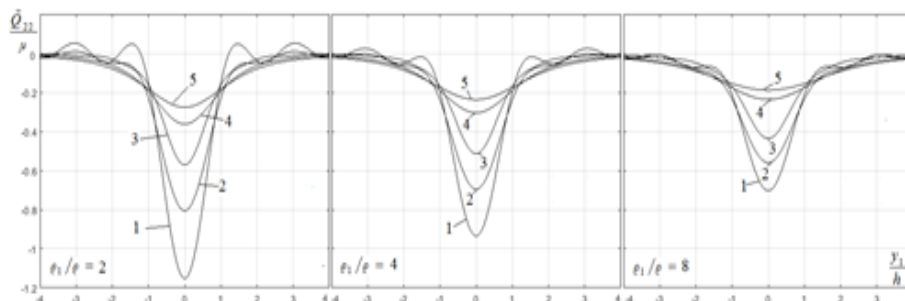


Рис. 2. Узагальнене напруження \tilde{Q}_{22} в півпросторі при різних співвідношеннях густини матеріалів півпростору та поверхневого шару.

Аналіз отриманих числових результатів для докритичних швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки. При заданих λ_1 швидкість зростання значень величин, що досліджується, при стискуванні більше, ніж при розтягуванні. Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стискуванні, ніж при розтягуванні. Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки. Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень значно посилюється. Особливо це має місце для матеріалу, що попередньо стиснений.

Для більш жорсткого шару вплив швидкості поверхневого навантаження і початкових напружень зменшується.

Розглянемо випадок, коли $v > c_1$. Зміна складових напружень і швидкостей переміщень в півпросторі в залежності від відстані до точки прикладання навантаження показана на рис. 3.

Розрахунки в цьому випадку проводилися при $y_2 = -2h/\lambda_2$. Швидкість навантаження становила $v^2 = 2c_0^2$. Умовні позначення на рис. 3 такі ж, як і на рис. 1 і 2.

Для надзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотна, але не зникає пов-

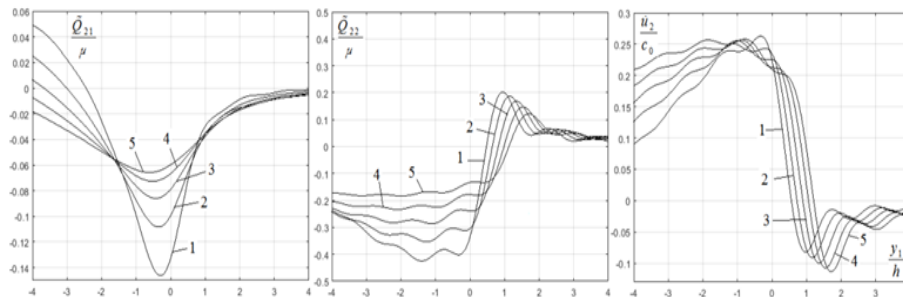


Рис. 3. Узагальнені напруження \tilde{Q}_{12} і \tilde{Q}_{22} та швидкість переміщення \dot{u}_2 в півпросторі при надзвуковій швидкості \tilde{Q}_{22} .

ністю через наявність поверхневого шару. З рис. 3 випливає, що значення напружень і швидкостей переміщень в півпросторі при $v > c_1$ суттєво залежать від початкових напружень в півпросторі. Конкретний тип таких залежностей визначається положенням точки шаруватого середовища щодо точки прикладання навантаження. Так само, як і в випадку, коли $v < c_1$, існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень не залежать від початкових деформацій.

5. Висновок. Таким чином, в даній статті в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями приведений розв'язок плоскої динамічної задачі про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Для розв'язку задачі використаний інтегральний метод Фур'є. Для матеріалу з потенціалом типу Бартенева-Хазановича виконані чисельні дослідження. Вивчений вплив тонкого поверхневого шару, початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на розподіл швидкостей переміщень і напружень в нестисливій основі з початковими напруженнями. Отримані оцінки можуть бути використані для аналізу результатів розрахунків більш складних моделей шаруватих середовищ, що піддаються впливу рухомих навантажень в процесі експлуатації.

РЕЗЮМЕ. Розглянута плоска задача про вплив рухомого навантаження на нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

Список використаної літератури

1. Багно О. М. Вплив шару ідеальної рідини на поверхневу нестійкість нестисливого пружного півпростору, підданого скінченним початковим деформаціям. *Прикл. механіка*. 2022. Т. 58, № 6. С. 29–38.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
3. Babich S. Yu., Gluchov Yu. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 1. P. 43–52..
4. Bagnо О. М. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 6. P. 644–654.
5. Guz O. M., Bagnо O. M. Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of

- a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 1. P. 1–10.
6. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев : «А.С.К», 2004. 672 с.
 7. Wright J. P., Baron M. L. Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1970. Vol. 37, No. 1. P. 148–159.

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu. Reaction of layered incompressible half-space with initial stresses to moving load.

A prestressed incompressible half-space with inhomogeneity in the form of a thin surface layer is considered. The concentrated force moves along the free surface of the protective layer at a constant speed at a certain angle to the surface of the half-space. The solution of the problem was obtained using the method of integral Fourier transformations. The material with the Bartenev-Khazanovich potential was considered for numerical analysis. The calculations were carried out within the framework of the theory of finite initial deformations. The impact of the moving load, initial stresses and mechanical parameters of the elements of the layered base on the main characteristics of its stress-strain state was studied.

Keywords: incompressible half-plane, initial (residual) stresses, moving load.

References

1. Bagno, O. M. (2022). Effect of a layer of an ideal liquid on surface instability incompressible elastic half-space subjected to skin initial deformations *Appl. Mechanics*, 58(6), 29–38.
2. Guz, A. N., Babych, S. Yu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for elastic base with initial stresses*. Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing.
3. Babich, S. Yu., & Gluchov, Yu. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *Int. Appl. Mech.*, 57(1), 43 – 52.
4. Bagno, O. M. (2021). Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. *Int. Appl. Mech.*, 57(6), 644–654.
5. Guz, O. M., & Bagno, O. M. (2021). Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space. *Int. Appl. Mech.*, 57(1), 1–10.
6. Guz A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses*. Kyiv: «A.S.K».
7. Wright, J. P., & Baron, M. L. (1970). Exponentially decaying pressure pulse moving with contact velocity on the surface of a layered elastic material (superseismic half space). *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 37(1), 148–159.

Одержано 17.07.2023

УДК 519.004.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).96-106](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).96-106)**П. П. Зінченко**

Харківський національний університет радіо електроніки,

аспірант кафедри прикладної математики,

petro.zinchenko@nure.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9119-7720>**РЕКУРЕНТНИЙ АНАЛІЗ САМОПОДІБНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ**

У роботі досліджено метод аналізу складності динаміки часових рядів - побудову рекурентних діаграм. Проведено порівняльний аналіз для самоподібних стохастичних реалізацій в залежності від значень показника Херста. Запропоновано метод побудови кольорових рекурентних діаграм для візуалізації динаміки часових рядів. Проведена класифікація часових рядів на основі їх рекурентних діаграм. Для класифікації застосовано залишкову нейронну мережу. Експериментально підтверджено, що використання кольорових діаграм значно покращує точність класифікації. Таким чином доведено, що кольорові рекурентні діаграми разом з залишковими нейронними мережами є потужним інструментом для класифікації та аналізу самоподібних часових рядів.

Ключові слова: рекурентний аналіз, рекурентні діаграми, показник Херста, залишкові нейронні мережі, класифікація часових рядів.

1. Вступ. Більшість динамічних систем є "складними системами що передбачає багатогранну структуру з нелінійним зворотнім зв'язком. До них відносяться процеси, притаманні людському організму та природі, інформаційні, фізичні, технічні та соціальні процеси. На практиці вони представлені часовими рядами (ЧР), які є певною проекцією внутрішніх та зовнішніх зв'язків динамічної системи. Однією з відображень складності динаміки системи є її фрактальна структура.

На даний момент стало загальноприйнятим, що багато ЧР мають довготривалу залежність та фрактальні властивості. Прикладами таких часових рядів є медичні та біологічні сигнали, фінансові ряди, геофізичні та геохімічні сигнали, а також інформаційні трафіки. Фрактальний аналіз знаходить все більше практичного застосування для дослідження та прогнозування ЧР, проте фрактальні характеристики далеко не повністю відображають всю складність динаміки системи.

Відносно новим методом дослідження складності динаміки систем є побудова рекурентних діаграм (РД). Рекурентний аналіз ґрунтується на фундаментальній властивості дисипативних динамічних систем - рекурентності (повторюваності станів). Цей метод аналізу, ґрунтований на представленні властивостей процесів у вигляді геометричних структур, є інструментом для виявлення прихованих залежностей в спостережуваних ЧР. Початково запропоновані в [1] методи рекурентного аналізу дозволяють працювати з рядами різних типів. Крім того, перевага використовуваного графічного інструменту полягає в тому, що він дозволяє досліджувати n -мірну траєкторію фазового простору за допомогою двовимірного представлення його рекурентності і, отже, наочно представляти динамічну картину в цілому.

Протягом останніх років метод РД знайшов широке застосування для аналізу стохастичних часових рядів різної природи [2]. Були розроблені кількісні міри складності структур РД [3, 4]. Особлива увага приділялась хаотичним ЧР, складним коливальним процесам, шумованим ЧР та ін. [6–9]. Однак досі недостатньо уваги було приділено характерним особливостям рекурентного аналізу фрактальних ЧР.

Метою представленої роботи є проведення порівняльного рекурентного аналізу самоподібних стохастичних реалізацій та застосування машинного навчання для класифікації рекурентних діаграм.

2. Рекурентний аналіз. Основна ідея застосування методів нелінійної динаміки до аналізу траєкторії динамічної системи полягає в тому, що основна структура, яка містить всю інформацію про систему, а саме, атрактор системи, може бути відновлена за допомогою вимірювання лише одного компонента цієї системи [10–11]. Широко використовувана процедура Паккарда-Такенса дозволяє відновити фазову траєкторію динамічної системи за однією реалізацією:

$$F(t) = [x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + m\tau)], \quad (1)$$

де: $F(t)$ — m -мірний псевдофазовий простір. $x(t)$ — часова реалізація системи, τ — період запізнення.

Рекурентна діаграма є проекцією m -мірного псевдофазового простору на площину. Нехай точка x_i відповідає точці фазової траєкторії $x(t)$, що описує динамічну систему в m -мірному просторі в момент часу $t = i$, для $i = 1, \dots, N$, тоді рекурентна діаграма RP є масивом точок, де ненульовий елемент з координатами (i, j) відповідає випадку, коли відстань між x_j та x_i менше ε :

$$RP_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad x_i, x_j \in R^m, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

де ε — розмір оточення точки x_j , $\|x_i - x_j\|$ — відстань між точками, $\Theta(\bullet)$ — функція Хевісайда.

Аналіз топології діаграми дозволяє класифікувати процеси: визначати однорідні процеси з незалежними випадковими значеннями; процеси які повільно змінюють параметри; періодичні чи осцилюючі процеси, що відповідають нелінійним системам і т.д. Чисельний аналіз рекурентних діаграм дозволяє обчислювати показники складності структур рекурентних діаграм, такі як показник рекурентності, показник детермінізму, показник ентропії та інші. Міра рекурентності (recurrence rate, RR)

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N RP_{i,j}^\varepsilon, \quad (3)$$

показує щільність рекурентних точок. Цей показник вказує на ймовірність знаходження рекурентної точки в РД (ймовірність повторення стану).

Наступний показник розглядає діагональні лінії. Частотний розподіл довжин l діагональних ліній в RP , $P^\varepsilon(l) = \{l_i; i = 1 \dots N_l\}$, де l_i — довжина i -ї діагональної лінії, а N_l — кількість діагональних ліній. Стохастичні ЧР можуть породжувати дуже короткі діагоналі або зовсім не породжувати їх, у той час

як детерміністичні процеси дають довгі діагоналі і малу кількість окремих рекурентних точок. Таким чином, співвідношення рекурентних точок

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP^\varepsilon(l)}{\sum_{i,j}^N R_{i,j}^\varepsilon(l)}, \quad (4)$$

називається показником детермінізму (determinism, *DET*). Діагональні структури показують час, протягом якого ділянка траєкторії підходить достатньо близько до іншої ділянки траєкторії. Таким чином, ці лінії дозволяють судити про відхилення елементів траєкторії.

Середня довжина діагональних ліній

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N lP^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\varepsilon(l)}, \quad (5)$$

це середній час, протягом якого дві ділянки траєкторії проходять близько одна до одної і може розглядатися як середній час передбачуваності.

Показник ентропії (entropy, *ENTR*) відноситься до ентропії частотного розподілу довжин діагональних ліній.

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln p(l), \quad (6)$$

де $p(l) = \frac{P^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\varepsilon(l)}$ і відображає складність детерміністичної складової в системі.

Розглянемо точку траєкторії x_i і множину пов'язаних з нею рекурентних точок, які формують вертикальні структури на РД. Позначимо $P_i(v) = \{v_k; k = 1, 2, \dots, K\}$ множину довжин вертикальних структур і визначимо розподіл довжин вертикальних ліній $P^\varepsilon(v)$ для всього RP взагалі. Міра замирання (laminarity, *LAM*)

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^{\tilde{N}} vP^\varepsilon(v)}{\sum_{i,j}^N RP_{i,j}^\varepsilon}, \quad (7)$$

визначається відношенням кількості рекурентних точок, які формують вертикальні лінії, до загальної кількості рекурентних точок. Величина *LAM* характеризує наявність станів застигання системи (тобто коли рух системи по фазовій траєкторії зупиняється або рухається дуже повільно). Середня довжина вертикальних структур

$$TT = \frac{\sum_v^{\tilde{N}} vP^\varepsilon(v)}{\sum_{i,j}^N P^\varepsilon(v)}, \quad (8)$$

називається мірою часу зупинки (trapping time, *TT*) і характеризує середній час, який система може провести в околиці певного стану.

3. Самоподібні часові ряди. Завдання сучасної нелінійної фізики, радіоелектроніки, теорії управління та обробки зображень вимагають розробки та

застосування нових математичних моделей, методів та алгоритмічного забезпечення для аналізу даних. Як показали численні дослідження, багато стохастичних процесів у природі та техніці обладують довгостроковою залежністю та фрактальною структурою. Одними з перших реальних стохастичних процесів, у яких були виявлені самоподібні властивості, були інформаційні потоки даних в телекомунікаційних мережах. Існує велика кількість публікацій, присвячених аналізу самоподібних властивостей трафіку та їх впливу на функціонування та якість обслуговування телекомунікаційної мережі. Іншим прикладом фрактальних стохастичних структур є сучасні фінансові ринки. Аналізуючи динаміку виникнення ділянок з різною фрактальною структурою, можна діагностувати та прогнозувати нестабільні стани (кризиси) ринку. Останнім часом численні дослідження показали, що багато біоелектричних сигналів мають фрактальну структуру/Виразні зміни у фрактальних характеристиках кардіо- та енцефалограм проявляються при різних захворюваннях, при зміні розумового та фізичного навантаження на організм. Фрактальний аналіз біоелектричних сигналів може бути основою для проведення статистичних досліджень, що дозволить сформулювати методики, які будуть важливими і для клінічної практики [12, 13].

Самоподібність випадкових процесів полягає в збереженні ймовірнісних характеристик при зміні шкали часу. Стохастичний процес $X(t)$ є самоподібним з параметром H , якщо процес $a^{-H}X(at)$ описується тими ж законами кінцево-мірних розподілів, що і $X(t)$:

$$\text{Law}\{a^{-H}X(at)\} = \text{Law}\{X(t)\}. \quad (9)$$

Параметр H , $0 < H < 1$, відомий як показник Херста, представляє собою ступінь самоподібності процесу. Окрім цього властивості, показник $H > 0,5$ характеризує міру довгострокової залежності стохастичного процесу. Це означає, що якщо часовий ряд протягом певного часу зростає (зменшувався), то з ймовірністю, близькою до показника Херста, ряд буде зберігати цю тенденцію протягом аналогічного проміжку часу [14].

4. Фрактальний броунівський рух. Однією з найвідоміших і простих моделей стохастичної динаміки, що має монофрактальні властивості, є фрактальний броунівський рух (ФБР), який знайшов широке застосування в фізиці, хімії, біології, економіці та теорії інформаційного трафіку.

Гаусівський процес $X(t)$ називається фрактальним броунівським рухом з параметром H , $0 < H < 1$, якщо прирости випадкового процесу $\Delta X(\tau) = X(t + \tau) - X(t)$ мають розподіл такого вигляду:

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0\tau^H} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp}\left[-\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}}\right] dz, \quad (10)$$

де σ_0 — коефіцієнт дифузії. ФБР з параметром $H = 0,5$ збігається з класичним броунівським рухом. Прирости ФБР називають фрактальним гаусівським шумом (ФГШ). На рис. 1 вгорі представлені реалізації ФБР, на рис. 1 внизу представлені ФГШ, побудовані при значеннях показника Херста $H = 0.4, 0.6, 0.9$.

5. Побудова чорно-білих і кольорових рекурентних діаграм. Рекурентні діаграми легко візуалізуються в чорно-білому форматі. Тоді рекурентні

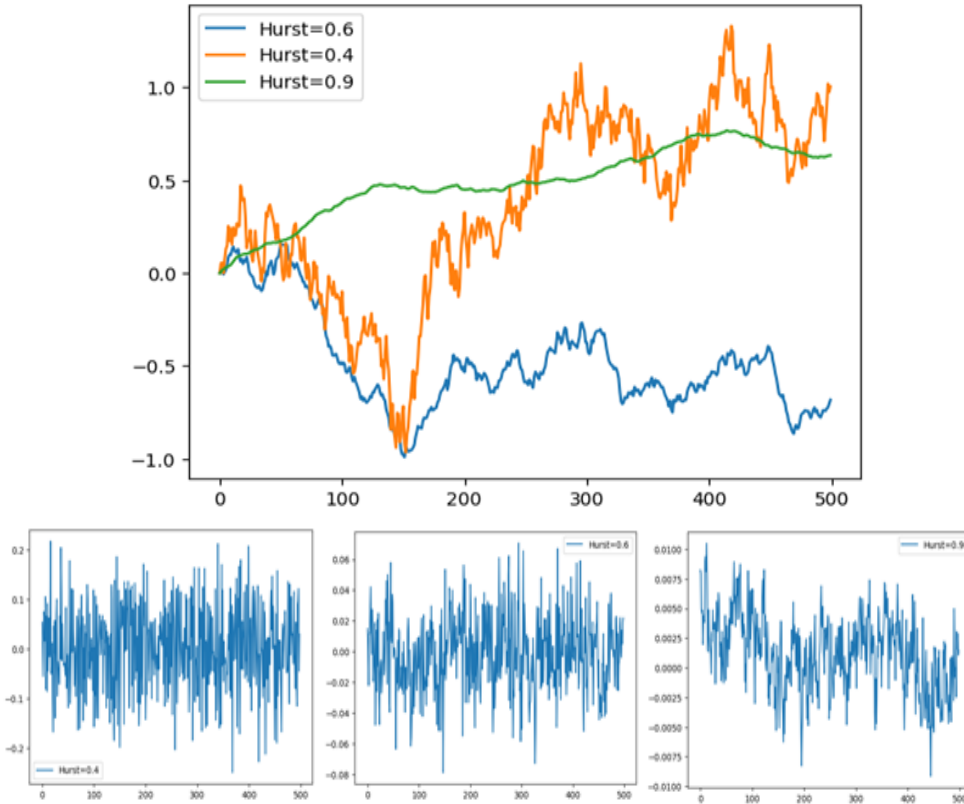


Рис. 1. Реалізації ФБР і ФГШ для різних значень H .

стани відображаються чорним кольором, а решта — білим. Кольорові рекурентні діаграми конструюються шляхом інтеграції аспекту кольору в рамках існуючих рекурентних діаграм. Цей процес включає визначення змінних або параметрів, які підлягають візуалізації кольорами, обрання відповідної кольорової палітри, привласнення конкретних кольорів кожному значенню змінної та їхнє впровадження в рекурентні діаграми. Такий підхід дозволяє підкреслити патерни, аномалії чи інші важливі аспекти даних, сприяючи кращому розумінню та аналізу часових рядів.

Для побудови кольорової діаграми, обчислюється відстань між двома точками фазової траєкторії. На відміну від чорно-білої діаграми, кожному значенню відстані призначається кольорова репрезентація. Кольорова репрезентація може бути отримана, наприклад, на основі лінійної інтерполяції між двома визначеними кольорами — початковим (синій) та кінцевим (червоний). Компоненти RGB кольорової моделі для кожної точки обчислюються за допомогою виразу, використовуючи числове значення, яке змінюється від 0 до 1 (рис. 2).

Отримані кольорові діаграми використовуються для ефективної візуалізації динаміки часових рядів, сприяючи аналізу змін у часі та виділенню ключових аспектів даних. Використання лінійної інтерполяції для формування кольорового спектру дозволяє створити градієнтне кодування числових значень у вигляді кольорів, поліпшуючи сприйняття та розуміння динаміки досліджуваних часових рядів.

6. Класифікація рекурентних діаграм з використанням залишко-



Рис. 2. Градієнтне кодування значень від 0 до 1.

вих нейронних мереж. Рекурентні діаграми виявляють різноманітні структури в послідовності даних, такі як цикли, тренди, періодичність та інші, і можуть виявляти відхилення від нормальної динаміки даних, такі як аномалії та викиди. Хаотичні реалізації відрізняються своєю структурою, яка пов'язана з автокореляційними властивостями системи і відображається в рекурентних діаграмах. Зміна кореляційної структури системи призводить до зміни топології рекурентної діаграми, дозволяючи класифікувати спостережувані часові ряди. Методи машинного навчання, зокрема глибокі нейронні мережі, і особливо згорткові нейронні мережі, виявилися ефективними у класифікації, забезпечуючи найкращі результати розпізнавання зображень, оскільки вони враховують двовимірні топології зображень, на відміну від багатшарового перцептрона.

Основна ідея залишкової нейронної мережі полягає в тому, щоб передавати інформацію через "залишковий блок" або "блок залишкового навчання", який додається до вихідного сигналу [15–16].

Вхідний тензор має форму $(250, 250, 3)$, а потім йому застосовується операція Zero Padding для додавання додаткових пікселів по краях. Перший етап включає два послідовних згорткових шари зі зменшенням розміру за допомогою стрибка та підвищенням глибини за рахунок використання фільтрів. Після кожного згорткового шару застосовуються операції Batch Normalization та активації ReLU.

Далі, на етапі 2, використовуються 3 згорткові блоки для подальшого зменшення розміру та збільшення глибини шляхом з'єднання кількох згорткових шарів.

Згортковий блок складається з 2 частин і використовується в архітектурі залишкових мереж для покращення збіжності і зменшення можливого градієнтного зникнення під час тренування глибоких нейронних мереж. Основний шлях включає три згорткових компоненти. Кожен компонент доповнюється шарами нормалізації партії та активації ReLU. Скорочений шлях складається з одного згорткового компонента до якого додано один шар нормалізації та один шар активації ReLU

У фінальному кроці значення з основного шляху додається до значення з скороченого шляху з використанням операції додавання, і результат проходить через активацію ReLU. Цей згортковий блок дозволяє градієнтам просуватися більш ефективно через мережу, уникати проблем градієнтного зникнення та сприяє навчанню.

Аналогічно, на етапі 3 застосовуються 4 подібні блоки для подальшого вдосконалення властивостей внутрішніх репрезентацій. Після цього застосовується операція Flatten для перетворення тривимірного тензора у вектор, після чого використовується Dropout для регуляризації та запобігання перенавчання. Завершальна частина мережі включає кілька повнозв'язаних шарів з активацією

ReLU та останній повнозв'язаний шар з активацією softmax для виведення оцінок ймовірностей для кожного класу. Кількість вихідних нейронів останнього Dense шару дорівнює кількості класів у вашому завданні класифікації.

7. Результати досліджень модельних даних. Проведений у роботі рекурентний аналіз виявив суттєві відмінності як у візуальній топології, так і у числових характеристиках реалізацій ФБД і ФГШ. У всіх випадках проявляється певна залежність структури та кількісних характеристик РД від ступеня самоподібності.

У таблиці 1 наведені значення кількісних характеристик РД, усереднені за реалізаціями довжиною 1000 значень. Структурні відмінності знайшли своє відображення в кількісних характеристиках. У табл. 1 подані середні значення характеристик РД (ліва колонка для ряду приростів, а права для кумулятивного ряду), що демонструє, що зі зростанням показника Херста збільшуються детерміністичні складові, а отже, передбачуваність ЧР. Цікаво відзначити, що хоча щільність точок (RR) у реалізацій ФБД на порядок нижче, ніж у ФГШ, середня довжина діагональних ліній (L) і середній час, який система може провести в певному стані (TT), у декілька разів більше. Міра детермінізму (DET) в обох випадках близька до показника Херста H і може бути використана як додатковий критерій самоподібності ЧР.

Таблиця 1.

Кількісні характеристики РД для ФБР і ФГШ.

H	RR		DET		L	
	ФГШ	ФБР	ФГШ	ФБР	ФГШ	ФБР
0,6	0,188	0,027	0,615	0,684	2,763	3,866
0,7	0,192	0,035	0,696	0,752	2,821	8,371
0,8	0,204	0,044	0,780	0,858	2,937	15,959
0,9	0,228	0,049	0,889	0,937	3,180	23,292

$ENTR$		LAM		TT	
ФГШ	ФБР	ФГШ	ФБР	ФГШ	ФБР
1,206	1,826	0,476	0,824	2,659	4,010
1,254	2,871	0,544	0,880	2,776	9,547
1,342	3,330	0,616	0,910	2,898	16,352
1,508	3,831	0,717	0,937	3,207	22,235

На рис. 3 подані типові реалізації та РД для ФГШ з показником Херста (ліворуч) та (праворуч). При зростанні показника Херста проявляється нерівномірна структурованість фазового простору, яка відсутня для рядів з параметром Херста, близьким до 0,5. На РД реалізації з великою персистентністю вирівнюються вздовж діагональної лінії, тоді як для рядів з невеликим параметром Херста рекурентні точки заповнюють більшу область фазового простору.

На рис. 4 представлені реалізації та діаграми ФГШ з показником Херста $H = 0,6$ (ліворуч) та $H = 0,9$ (праворуч). Візуально чорно-білі рекурентні діаграми не мають відмінностей, але кольорові діаграми вже мають слабо помітну різницю в структурі.

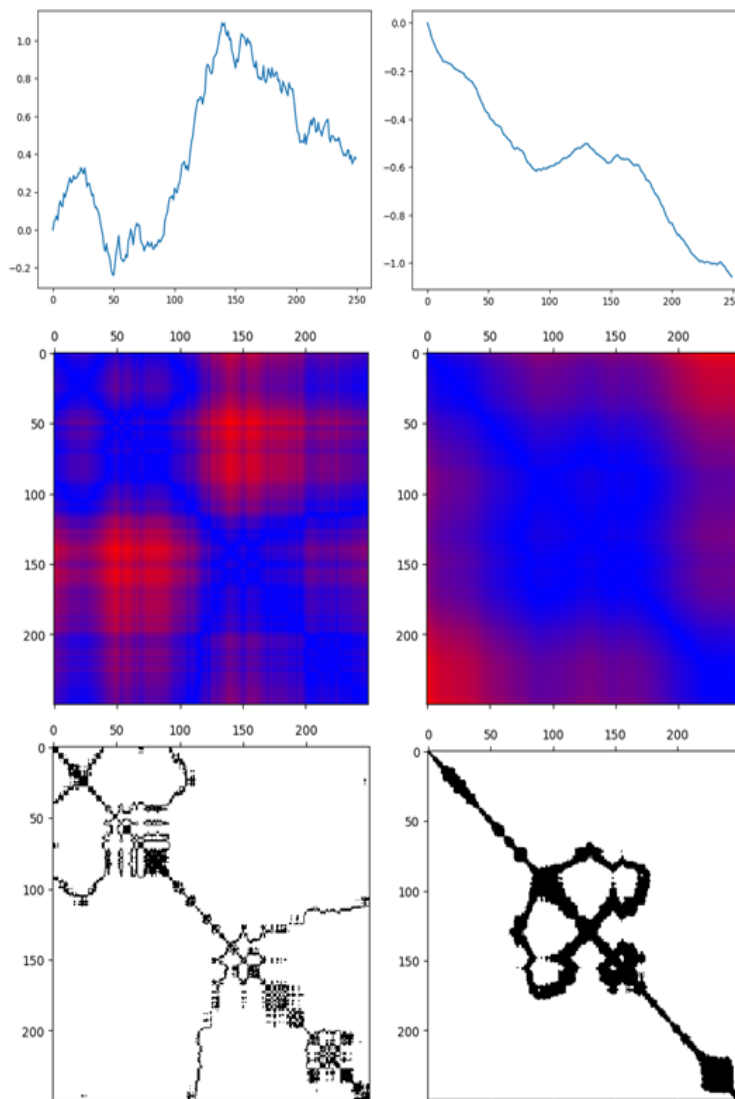


Рис. 3. Реалізації та РД для ФБР, при $H = 0,6$ (ліворуч) та $H = 0,9$ (праворуч).

8. Класифікація рекурентних діаграм за допомогою залишкової нейронної мережі. Для дослідження було обрано 2 класи ФБР з $H = (0,45; 0,55)$ та $H = (0,65; 0,9)$ довжиною 250 значень.

У межах дослідження було проведено порівняння двох підходів до класифікації часових рядів: використання нейронних мереж у поєднанні з чорно-білими та кольоровими рекурентними діаграмами. Для класифікації використовувалась залишкова нейронна мережа описана вище.

На даних які не брали участь в тренуванні нейронної мережі, підхід з кольоровими діаграмами показав точність класифікації 100% для ФБР і 99,99% для ФГШ. Підхід з чорно-білими діаграмами показав 96,25% для ФБР і 75,45% для ФГШ (табл. 2).

Результати підкреслюють важливість вибору типу діаграми, що впливає на точність класифікації часових рядів з використанням нейронних мереж. Зокре-

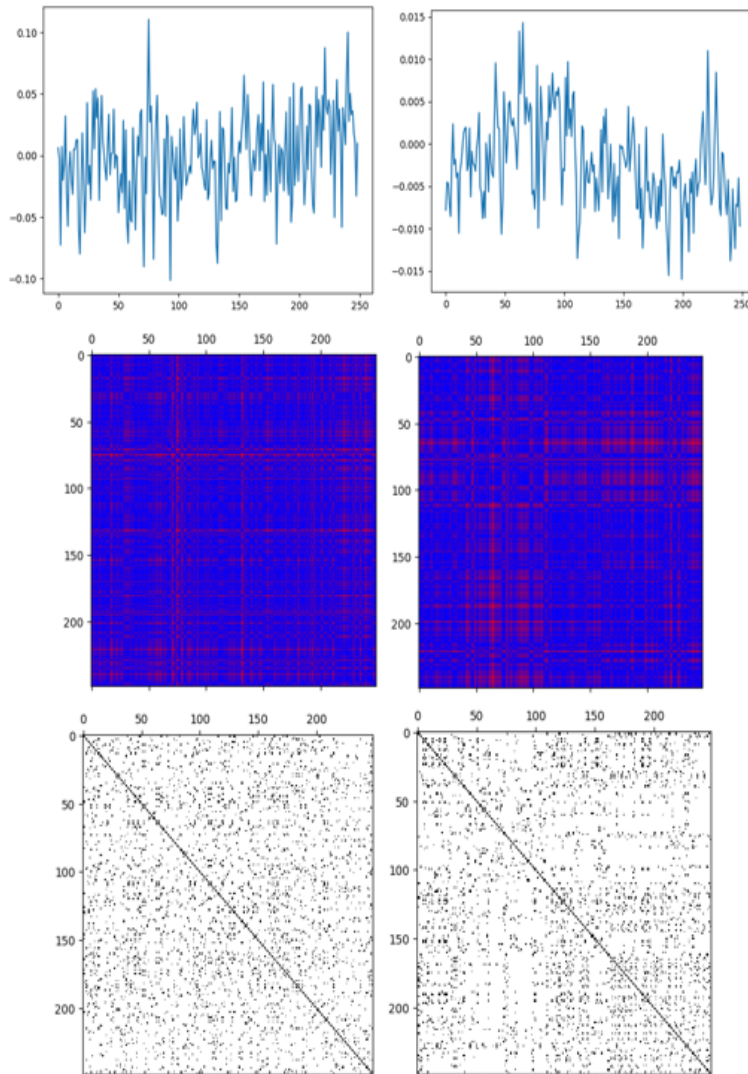


Рис. 4. Реалізації та РД для ФГШ, при $H = 0,6$ (ліворуч) та $H = 0,9$ (праворуч).

Таблиця 2.

Точність класифікації ФБР і ФБШ

	ФБР	ФГШ
Кольорові РД	100%	99,99%
Чорно-білі РД	96,25%	75,45%

ма виявлені відмінності між чорно-білими та кольоровими діаграмами, підкреслюючи потенціал кольорової інформації для поліпшення результатів класифікації.

9. Висновок. У роботі був проведений порівняльний рекурентний аналіз

самоподібних ЧР. Показано, що основним параметром, що впливає на структуру та кількісні показники РД, є показник Херста.

Також в роботі було проведено експеримент з класифікації часових рядів ФБР з різними показниками Херста з використанням нейронних мереж і рекурентних діаграм. Окрім звичайного методу побудови рекурентних діаграм, був використаний модифікований підхід, який включав створення кольорових діаграм. Результати показали значне покращення точності класифікації ФБР з різними показниками Херста при використанні кольорових діаграм. Таким чином, для класифікації рекомендується використовувати кольорові діаграми.

Ці висновки надають цінні практичні вказівки для вибору оптимального підходу в залежності від вимог і характеру часових даних. Отримані результати, мають важливе значення і можуть слугувати основою для подальших досліджень і оптимізації методології з метою максимізації продуктивності класифікації часових рядів на основі нейронних мереж і кольорових рекурентних діаграм.

Список використаної літератури

1. Eckmann J. P., Kamphorst S. O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters (EPL)*. 1987. Vol. 4, No. 9. P. 973–977.
2. Marwan N. A historical review of recurrence plots. *The European Physical Journal Special Topics*. 2008. Vol. 164, No. 1. P. 3–12.
3. Marwan N. et al. Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *Physical Review E*. 2002. Vol. 66, No. 2.
4. Zbilut J. P., Zaldívar-Comenges J.-M., Strozzi F. Recurrence quantification based Liapunov exponents for monitoring divergence in experimental data. *Physics Letters A*. 2002. Vol. 297, No. 3–4. P. 173–181.
5. March T. K., Chapman S. C., Dendy R. O. Recurrence plot statistics and the effect of embedding. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2005. Vol. 200, No. 1–2. P. 171–184.
6. Marwan N. et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*. 2007. Vol. 438, No. 5–6. P. 237–329.
7. Kirichenko L. et al. Two Approaches to Machine Learning Classification of Time Series Based on Recurrence Plots. *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*, Lviv, 21–25 August 2020.
8. Kirichenko L. et al. Detection of DDoS Attacks Based on Visualization of Recurrence Plots. *Proceedings of the International Workshop on Conflict Management in Global Information Networks*. Kyiv, 29 November 2019. P. 23–34.
9. Kirichenko L. O., Kobitskaya Y. A., Habacheva A. Y. Comparative analysis of the complexity of chaotic and stochastic time series. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2014. No. 2.
10. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin : Heidelberg, 1981. P. 366–381.
11. Iwanski J. S., Bradley E. Recurrence plots of experimental data: To embed or not to embed?. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1998. Vol. 8, No. 4. P. 861–871.
12. Pilgrim I., P. Taylor R. Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. *Fractal Analysis*. 2019. IntechOpen.
13. Kirichenko L., Saif A., Radivilova T. Generalized Approach to Analysis of Multifractal Properties from Short Time Series. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2020. Vol. 11, No. 5.
14. Feder J. *Fractals*. Boston. MA : Springer US, 1988.
15. Flexible. High Performance Convolutional Neural Networks for Image Classification. *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Barcelona, 16–22 July 2011. P. 1237–1242.
16. Lecun Y., Bengio Y. Convolutional Networks for Images, Speech, and Time-Series. *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*. 1998.

Zinchenko P. P. Recurrent analysis of self-similar time series.

The work explores a method for analyzing the complexity of time series dynamics - the construction of recurrent diagrams. A comparative analysis is conducted for self-similar stochastic realizations depending on the values of the Hurst exponent. A method for constructing colored recurrent diagrams to visualize the dynamics of time series is proposed. The time series are classified based on their recurrent diagrams, utilizing a residual neural network for classification. Experimental results confirm that the use of colored diagrams significantly improves the accuracy of classification. Thus, it is demonstrated that colored recurrent diagrams, together with residual neural networks, are powerful tools for the classification and analysis of self-similar time series.

Keywords: recurrent analysis, recurrence plot, Hurst exponent, residual neural networks, time series classification.

References

1. Eckmann, J. P., Kamphorst, S. O., & Ruelle, D. (1987). Recurrence Plots of Dynamical Systems. *Europhysics Letters (EPL)*, 4(9), 973–977.
2. Marwan, N. (2008). A historical review of recurrence plots. *The European Physical Journal Special Topics*, 164(1), 3–12.
3. Marwan, N., Wessel, N., Meyerfeldt, U., Schirdewan, A., & Kurths, J. (2002). Recurrence-plot-based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *Physical Review E*, 66(2).
4. Zbilut, J. P., Zaldívar-Comenges, J.-M., & Strozzi, F. (2002). Recurrence quantification based Liapunov exponents for monitoring divergence in experimental data. *Physics Letters A*, 297(3(4)), 173–181.
5. March, T. K., Chapman, S. C., & Dendy, R. O. (2005). Recurrence plot statistics and the effect of embedding. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 200(1(2)), 171–184.
6. Marwan, N., Carmenromano, M., Thiel, M., & Kurths, J. (2007). Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 348(5(6)), 237–329.
7. Kirichenko, L., Radivilova, T., Bulakh, V., Zinchenko, P., & Saif Alghawli, A. (2020). Two Approaches to Machine Learning Classification of Time Series Based on Recurrence Plots. *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. IEEE. Lviv.
8. Kirichenko, L., Zinchenko, P., Radivilova, T., & Tavalbeh, M. Detection of DDoS Attacks Based on Visualization of Recurrence Plots. *Proceedings of the International Workshop on Conflict Management in Global Information Networks*. Kyiv.
9. Kirichenko, L. O., Kobitskaya, Y. A., & Habacheva, A. Y. (2014). COMPARATIVE ANALYSIS OF THE COMPLEXITY OF CHAOTIC AND STOCHASTIC TIME SERIES. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2.
10. Takens, F. (1981). *Detecting strange attractors in turbulence. Lecture Notes in Mathematics*. Springer. Berlin: Heidelberg.
11. Iwanski, J. S., & Bradley, E. (1998). Recurrence plots of experimental data: To embed or not to embed? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 8(4), 861–871.
12. Pilgrim, I., & P. Taylor, R. (2019). *Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges. Fractal Analysis*. IntechOpen.
13. Kirichenko, L., Saif, A., & Radivilova, T. (2020). Generalized Approach to Analysis of Multi-fractal Properties from Short Time Series. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 11(5).
14. Feder, J. (1988). *Fractals*. Boston. MA : Springer US.
15. Flexible. (2011). High Performance Convolutional Neural Networks for Image Classification. *Proceedings of the Twenty-Second International Joint Conference on Artificial Intelligence*.
16. Lecun, Y., & Bengio, Y. (1998). Convolutional Networks for Images, Speech, and Time-Series. *The Handbook of Brain Theory and Neural Networks*.

Одержано 15.10.2023

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).107-118](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).107-118)**Н. В. Ічанська¹, М. В. Лисенко²**

¹ Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
itm.ichanska@nupr.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5963-9288>

² Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри комп'ютерних технологій та інформаційних систем,
кандидат фізико-математичних наук
lysenkop1@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0995-2991>

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВИДОБУТКУ ВУГІЛЛЯ В УКРАЇНІ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ НЕЧІТКОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У статті досліджено динаміку видобутку вугілля в Україні, розглянуто різні підходи до моделювання життєвого циклу процесу експлуатації вуглеводневих покладів. Шляхом використання елементів математичного моделювання, авторами розв'язано задачу апроксимації за допомогою моделі Хольта та методів експоненційного вирівнювання й множинної лінійної регресії. Авторами проаналізовано кожен з цих методів з точки зору ефективності його застосування до розв'язання задач розвитку паливно-енергетичного комплексу України.

Використання адаптивних моделей у прикладних дослідженнях дає можливість працювати зі складними та нестабільними даними. У роботі застосовано методи нечіткого моделювання для прогнозування обсягів видобутку вугілля. Це дозволяє моделювати залежність даного процесу від змінних умов і параметрів вугільного ринку, що сприяє підвищенню точності прогнозування. Запропоноване авторами моделювання дозволяє відобразити прогноз у вигляді трикутного нечіткого числа, а саме вказати можливі очікувані значення.

Ключові слова: методи нечіткого прогнозування, критерії Фішера і Стьюдента, адаптивні моделі, метод експоненційного вирівнювання, рівняння множинної лінійної регресії, модель Хольта, трикутне нечітке число.

1. Вступ. Ключову роль у економіці України виконує енергетичний сектор, він є важливою сферою для забезпечення рівня життя населення й розвитку промисловості країни. Це пояснюється тим, що енергетика забезпечує якісне функціонування міст і сіл, діяльність промислових підприємств, здійснює опалення житлових будинків, що особливо важливо з точки зору шляхів відновлення повоєнної України.

Сучасна енергетична парадигма визначається структурними змінами в споживанні та виробництві енергії, що обумовлюють необхідність переходу до більш сталого, ефективного та екологічно чистого енергетичного комплексу. В умовах зростаючих вимог до енергоефективності та сталого розвитку, прогнозування обсягів видобутку вугілля стає критичним елементом для забезпечення стабільності та оптимізації енергетичного комплексу країни.

Питанням розвитку промислового комплексу України присвячено багато наукових робіт. Це праці таких вчених, як О. І. Амоша, В. П. Вишневський,

І. О. Галиця, Ю. В. Кіндзерський, О. Й. Лесько, А. Д. Олійник, О. В. Пирог, І. В. Причепа, А. В. Шевченко, Т. М. Юсупова, М. Ю. Сушко, М. М. Якубовський та ін. [1, 2]. Основною метою цих досліджень є побудова шляхів ефективної діяльності та вдосконалення видобувних процесів паливної промисловості, що підвищує конкурентоспроможність економіки країни. Використання наукового підходу до проблем розвитку промислового сектору України сприяє виявленню ефективних рішень для розв'язання важких завдань, пов'язаних із зменшенням обсягів виробництва.

Використання адаптивних моделей до розв'язання задач апроксимації є ефективним та дозволяє підвищити точність прогнозування. Засновниками засад використання апарату адаптивного моделювання соціально-економічних процесів є Г. Браун [3], А. Тейл, С. Вейдж [4], П. Вінтерс [5]. Актуальність теми адаптивного моделювання виробничих процесів та прогнозування економічних показників підприємства залишається важливою як на міжнародному, так і на внутрішньому рівнях. Активно проводять дослідження в цій області з метою удосконалення методів та підвищення ефективності їх використання у практичній діяльності такі вчені як: В. Тінякова, О. Г. Ніколаєва, Т. С. Клебанова, В. В. Давніс, О. В. Стогній, Макаров, Ю. П. Корчевой, Г. Г. Півняк та інші [6–10]. Отримані результати досліджень цих вчених сприяють удосконаленню методів адаптивного моделювання і їх застосуванню для прогнозування економічних показників підприємств, підвищенню ефективності виробничих процесів та раціональному використанню ресурсів.

Авторами у роботі [11] проведено наукове дослідження щодо прогнозування видобутку нафти за допомогою елементів математичного моделювання. У роботі [12] проведено аналіз обсягів видобутку вугілля за допомогою методів прогнозування, побудовано та описано моделі лінійної, параболічної та гіперболічної регресії, що апроксимують дані обсягів видобутку вугілля. На відміну від [12], у даній роботі авторами використано методи експоненційного вирівнювання й множинної лінійної регресії та модель Хольта до процесу моделювання експлуатаційних вуглеводневих покладів. Використання цих методів у прогнозуванні видобутку вугілля дозволяє зробити прогнози більш точними та надійними, що сприяє ефективному використанню паливних ресурсів.

2. Постановка задачі. У сучасних дослідженнях математичне моделювання визнано як надзвичайно перспективний напрям, який виявляє ефективність у численних галузях: науці, техніці, економіці, соціології та інших сферах (див., наприклад [13–16]).

Математичні моделі є потужним інструментом для проведення аналізу та вивчення різних природних процесів і явищ. Дослідження адаптивних моделей сприяє розумінню їх природи та поведінки та здійсненню прогнозів.

Основною метою математичного моделювання є побудова якнайбільш точної математичної моделі, на основі якої можна передбачити майбутні результати розвитку процесу. Після дослідження динаміки видобутку вугілля за 2003–2020 роки, авторами у цій роботі розв'язано задачу побудови найбільш точно апроксимуючих моделей за допомогою використання методів нечіткого прогнозування. Авторами проведено верифікацію отриманих модеелй, перевірено їх точність та адекватність, наведено порівняльний аналіз апроксимованих та заданих значень. Тому побудовані в роботі моделі можна використовувати для

опису і уточнення майбутньої динаміки видобутку вугілля в Україні.

Мета статті — апроксимація життєвого циклу видобутку вугілля з використанням методів математичного моделювання та нечіткого прогнозування, а також порівняльний аналіз застосованих методів.

3. Основний результат. Під час розробки стратегічних програм для розвитку вуглевидобувної промисловості України важливо мати науково обґрунтовані прогнози щодо зміни показників, які відображають стан цієї галузі економіки. Такі прогнози дозволяють виявити тенденції в розвитку галузі і створюють основу для ефективного стратегічного планування.

Використання адаптивного моделювання у прогнозуванні видобутку вугілля має важливе практичне значення для вирішення задач оптимізації та управління видобувною галуззю України в умовах сучасних викликів.

Проведене в цій роботі дослідження побудоване на базі даних обсягів видобутку вугілля, яку взято із сайту державної служби статистики України, з розділу “Економічна статистика та економічна діяльність”, у підрозділі “Промисловість” і пункті “Виробництво окремих видів промислової продукції” [17].

Важливу роль в плануванні розвитку вугледобувної галузі відіграють прогнози, засновані на науковому аналізі показників добування вугілля в країні протягом певного ретроспективного періоду. Такі прогнози, зроблені на основі математичних моделей, складають основу для розроблення конкретних заходів щодо розвитку даної галузі економіки.

Для одержання науково обґрунтованого прогнозу видобутку вугілля подамо дані за ретроспективний період 2003–2020 роки [17] у вигляді таблиці 1, через t позначимо номер року.

В 2003–2013 роках періоди зростання видобутку чергуються із періодами його зменшення. Середній річний видобуток за цей період складає 60,23 тис. т., а середнє квадратичне відхилення — 3,37 тис. т., тобто 5,6% від середнього значення. В 2014 та 2015 роках видобуток вугілля значно зменшився: в 2014 році на 28,7% порівняно із попереднім роком, а в 2015 році ще на 34,2%. В 2015–2020 роках середній річний видобуток період складає 27 тис. т., а середнє квадратичне відхилення — 3,16 тис. т., тобто 11,7% від середнього значення.

Щоб одержати обґрунтований прогноз обсягів видобування вугілля необхідно використати кілька різних методів прогнозування, що дасть можливість одержати результуючий прогноз у формі трикутного нечіткого числа. Методи прогнозування вибираємо, беручи до уваги особливості динаміки прогнозованого показника. Такими методами є прогнозування за допомогою рівняння множинної лінійної регресії, метод експоненційного вирівнювання та адаптивний метод на основі моделі Хольта.

Позначимо кількість видобутого вугілля в t -тий рік ретроспективного періоду через $Y(t)$. При використанні множинної лінійної регресії для апроксимації функції $Y(t)$ використовуємо рівність

$$Y(t) = a_0 + a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t),$$

де $X_1(t)$ визначає номер року в ретроспективному періоді, тобто $X_1(t) = t$, а $X_2(t)$ — це штучна змінна, що визначає особливості динаміки змінної $Y(t)$. При зміні t від 1 до 13 приймаємо $X_2(t) = 1$, а при зміні t від 14 до 18 вважаємо, що $X_2(t) = 0$.

Таблиця 1.

Видобуток вугілля в Україні протягом 2003–2020 років.

t	Рік	Видобуто вугілля (тис. т.)
1	2003	59,8
2	2004	59,4
3	2005	60,4
4	2006	61,7
5	2007	58,9
6	2008	59,5
7	2009	55
8	2010	55
9	2011	62,7
10	2012	65,7
11	2013	64,4
12	2014	45,9
13	2015	30,2
14	2016	31,6
15	2017	24,2
16	2018	26,3
17	2019	25,5
18	2020	24,2

Щоб визначити коефіцієнти a_i використаємо матрицю $K = (k_{ij})$ розмірності $T \times 3$, де T — тривалість ретроспективного періоду ($T = 18$), елементи якої визначаються за формулами:

$$k_{t1} = 1, \quad k_{t2} = X_1(t) = t, \quad k_{t3} = X_2(t).$$

Матриця A , що містить коефіцієнти a_i , визначається із рівності

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\tilde{K}K)^{-1}\tilde{K}Y,$$

де \tilde{K} — матриця, транспонована до матриці K , а Y — матриця-стовпець, що складається із значень $Y(t)$.

В результаті виконаних розрахунків одержимо такі матриці $(\tilde{K}K)^{-1}$ та A

$$(\tilde{K}K)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,53333 & -0,08333 & -0,95000 \\ -0,08333 & 0,00521 & 0,04688 \\ -0,95000 & 0,04688 & 0,69880 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 45,31833 \\ -1,18490 \\ 19,79132 \end{pmatrix}.$$

Таким чином рівняння множинної лінійної регресії для апроксимації функції $Y(t)$ має вигляд

$$Y(t) = 45,31833 - 1,18490X_1(t) + 19,79132X_2(t).$$

Використовувати одержане рівняння для прогнозування обсягів видобування вугілля в майбутні роки можна лише за умови його адекватності початковим

даним та значимості його коефіцієнтів. Для перевірки адекватності рівняння регресії початковим даним визначаємо із цього рівняння теоретичні значення $Y_r(t) = a_0 + a_1X_1(t) + a_2X_2(t)$ змінної $Y(t)$ та обчислюємо квадрати різниць $(Y(t) - Y_r(t))^2$ між фактичними і одержаними теоретичними значеннями. На основі одержаних результатів визначаємо коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (Y(t) - Y_r(t))^2}{\sum_{t=1}^T (Y(t) - \bar{Y})^2},$$

де \bar{Y} – середнє значення змінної $Y(t)$ протягом ретроспективного періоду ($\bar{Y} = 48,4$).

Дані для обчислення коефіцієнту детермінації наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Обчислення коефіцієнту детермінації для рівняння множинної лінійної регресії.

Рік	t	X ₁ (t)	X ₂ (t)	Y(t)	Y _r (t)	(Y(t)-Y _r (t))	(Y(t)-Y _r (t)) ²	(Y(t)- \bar{Y}) ²
2003	1	1	1	59,8	63,92476	-4,12476	17,01364	0,00010
2004	2	2	1	59,4	62,73986	-3,33986	11,15469	0,16810
2005	3	3	1	60,4	61,55497	-1,15497	1,33395	0,34810
2006	4	4	1	61,7	60,37007	1,32993	1,76871	3,57210
2007	5	5	1	58,9	59,18518	-0,28518	0,08133	0,82810
2008	6	6	1	59,5	58,00028	1,49972	2,24916	0,09610
2009	7	7	1	55	56,81538	-1,81538	3,29562	23,13610
2010	8	8	1	55	55,63049	-0,63049	0,39752	23,13610
2011	9	9	1	62,7	54,44559	8,25441	68,13524	8,35210
2012	10	10	1	65,7	53,26070	12,43930	154,73626	34,69210
2013	11	11	1	64,4	52,07580	12,32420	151,88587	21,06810
2014	12	12	1	45,9	50,89091	-4,99091	24,90914	193,48810
2015	13	13	1	30,2	49,70601	-19,50601	380,48441	876,75210
2016	14	14	0	31,6	28,72979	2,87021	8,23810	795,80410
2017	15	15	0	24,2	27,54490	-3,34490	11,18833	1268,07210
2018	16	16	0	26,3	26,36000	-0,06000	0,00360	1122,92010
2019	17	17	0	25,5	25,17510	0,32490	0,10556	1177,17610
2020	18	18	0	24,2	23,99021	0,20979	0,04401	1268,07210
Всього		171	13	870,4	870,40000	0,00000	837,02512	6817,68180

Визначаємо коефіцієнт детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{837,02512}{6817,68180} = 0,8122.$$

Перевірка адекватності моделі здійснюється на основі критерію Фішера. Якщо фактичне значення критерію Фішера більше табличного, то рівняння регресії адекватне реальним даним. Фактичне значення критерію Фішера визначаємо за формулою

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{T - 3}{2} = \frac{0,8122 \cdot 15}{0,1878 \cdot 2} = 32,42.$$

Табличне значення критерію Фішера $F(\alpha, k_1, k_2)$ визначаємо за наступними параметрами: довірча імовірність $\alpha = 0,95$, ступені свободи $k_1 = 2$, $k_2 = T - 3 = 15$. Одержимо значення $F(\alpha, k_1, k_2) = 3,7$. Отже, одержане рівняння

множинної лінійної регресії є адекватним початковим даним. Перевіримо значимість коефіцієнтів даного рівняння регресії. Для цього визначаємо дисперсію адекватності

$$S^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (Y(t) - Y_r(t))^2}{T - 3} = \frac{837,02512}{15} = 55,8.$$

Для коефіцієнтів a_1 та a_2 рівняння регресії обчислюємо середні квадратичні відхилення їх оцінок за формулою

$$\sigma_j = \sqrt{w_{jj}S^2},$$

де w_{jj} — елементи головної діагоналі матриці $(XTX)^{-1}$, та відповідні t -статистики за формулою

$$t_{jj} = \frac{|a_j|}{\sigma_j}.$$

Одержимо

$$\sigma_1 = \sqrt{0,00521 \cdot 55,8} = 0,539; \quad t_{11} = \frac{1,18490}{0,539} = 2,1979;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0,6988 \cdot 55,8} = 6,2445; \quad t_{22} = \frac{19,79132}{6,2445} = 3,1694.$$

За критерієм Стьюдента коефіцієнт a_j вважається значимим, якщо величина t_{jj} перевищує табличне значення $t(\alpha, k)$ даного критерію, що відповідає довірчій імовірності α та кількості ступенів свободи $K = T - 3$. Приймавши $\alpha = 0,95$, одержимо $t(\alpha, k) = 2,13145$. Таким чином коефіцієнти a_1 та a_2 рівняння регресії є значимими.

Отже, одержане рівняння множинної лінійної регресії можна використовувати для прогнозування показника $Y(t)$. Для одержання прогнозного значення обсягу видобутку вугілля в 2024 році підставимо в це рівняння значення $t = 22$, що відповідає даному року. Одержимо значення

$$Y(22) = 45,31833 - 1,18490 \cdot 22 = 19,25.$$

Таким чином в 2024 році прогнозується видобуток вугілля в обсязі 19,25 тис. т., тобто зменшення даного показника на 20,45% порівняно із 2020 роком.

При використанні методу експоненційного вирівнювання значення показника $Y(t)$ вирівнюються за допомогою зваженої ковзної середньої, причому вагові коефіцієнти вибираються такими, щоб дані, одержані за останні роки мали більшу вагу порівняно із попередніми. Величина зростання ваги більш нових значень визначається коефіцієнтом η , який підбирається емпірично. В результаті проведених досліджень нами обрано значення $\eta = 0,105$. Апроксимацію реальних значень обсягів видобування вугілля здійснюємо на основі многочлена $L(t) = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 \frac{t^2}{2!}$.

Для першого року ретроспективного періоду вирівняні значення Y_1, Y_2, Y_3 обчислюємо за формулами

$$\begin{cases} Y_1(1) = \theta_0 - \frac{1-\eta}{\eta}\theta_1 + \frac{(1-\eta)(2-\eta)}{2\eta^2}\theta_2, \\ Y_2(1) = \theta_0 - \frac{2(1-\eta)}{\eta}\theta_1 + \frac{2(1-\eta)(3-2\eta)}{2\eta^2}\theta_2, \\ Y_3(1) = \theta_0 - \frac{3(1-\eta)}{\eta}\theta_1 + \frac{3(1-\eta)(4-3\eta)}{2\eta^2}\theta_2. \end{cases} .$$

При $t = 1$ коефіцієнти θ_0 , θ_1 , θ_2 визначаємо, розв'язавши оптимізаційну задачу

$$\sum_{t=1}^T (Y(t) - L(t))^2 = \sum_{t=1}^T \left(Y(t) - \theta_0 - \theta_1 t - \theta_2 \frac{t^2}{2!} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Для наступних років значення вирівняних рядів визначаються на основі рекурентних рівностей

$$\begin{cases} Y_1(t) = (1 - \eta) Y_1(t - 1) + \eta Y(t), \\ Y_2(t) = (1 - \eta) Y_2(t - 1) + \eta Y_1(t), \\ Y_3(t) = (1 - \eta) Y_3(t - 1) + \eta Y_2(t). \end{cases}$$

При цьому коефіцієнти θ_0 , θ_2 , θ_3 теж динамічно змінюються. Їх значення визначаються за формулами

$$\begin{cases} \theta_0(t) = 3Y_1(t) - 3Y_2(t) + Y_3(t), \\ \theta_1(t) = \frac{\eta}{2(1-\eta)^2} [(6 - 5\eta) Y_1(t) - 2(5 - 4\eta) Y_2(t) + (4 - 3\eta) Y_3(t)], \\ \theta_2(t) = \frac{\eta^2}{(1-\eta)^2} (Y_1(t) - 2Y_2(t) + Y_3(t)). \end{cases}$$

Для одержання прогнозованих значень обсягів видобутку вугілля на 2024 рік використаємо рівність

$$Y(T + \nu) = \theta_0(T) + \theta_1(T) \nu + \theta_2(T) \frac{\nu^2}{2!},$$

де $\nu = 4$ кількість років від завершення ретроспективного періоду до року, на який визначається прогноз. Результати прогнозування відображені в таблиці 3, де наведено реальні та розрахункові дані за ретроспективний період (2003–2020 роки), що відповідають значенням t від 1 до 18, та прогноз на 2024 рік, якому відповідає значення $t = 22$.

Отже, використання моделі експоненційного вирівнювання дає можливість прогнозувати в 2024 році видобуток вугілля в обсязі 22,96 тис. т., тобто передбачається певне зменшення даного показника порівняно із 2020 роком. Прогнозоване зменшення складає 5,1% від рівня 2020 року, що істотно менше аналогічної величини, одержаної методом множинної лінійної регресії.

Адаптивна модель Хольта включає дві функції — $g(t)$, що відображає динаміку рівня ряду, та $q(t)$, що відображає динаміку тренду. В перший рік ретроспективного періоду функція $g(t)$ приймає значення, рівне відповідному рівню ряду, а функція $q(t)$ дорівнює нулю, тобто $g(1) = Y(1)$, $r(1) = 0$. В наступні роки значення цих функцій обчислюють за рекурентними формулами

$$g(t) = \beta Y(t) + (1 - \beta)(g(t - 1) + q(t - 1));$$

$$q(t) = \gamma (g(t) - g(t - 1)) + (1 - \gamma)q(t - 1).$$

Коефіцієнт β згладжування ряду та коефіцієнт γ згладжування тренду вибираються емпірично таким чином, щоб забезпечити найвищу точність прогнозування протягом ретроспективного періоду. Для визначення точності прогнозу

Таблиця 3.

Прогнозування очікуваного обсягу видобування вугілля в Україні методом експоненційного вирівнювання.

t	$Y(t)$	$L(t)$	$(Y(t) - L(t))^2$	$Y_1(t)$	$Y_2(t)$	$Y_3(t)$	θ_0	θ_1	θ_2
1	59,8	57,935	3,479	29,068	-9,682	-59,926	56,323	1,770	-0,158
2	59,4	59,230	0,029	32,252	-5,279	-54,188	58,406	1,655	-0,157
3	60,4	60,209	0,036	35,208	-1,028	-48,606	60,101	1,512	-0,156
4	61,7	60,872	0,686	37,990	3,069	-43,180	61,582	1,361	-0,156
5	58,9	61,218	5,373	40,185	6,966	-37,915	61,742	1,081	-0,161
6	59,5	61,248	3,055	42,213	10,667	-32,814	61,825	0,818	-0,164
7	55	60,961	35,536	43,556	14,121	-27,885	60,421	0,417	-0,173
8	55	60,358	28,710	44,758	17,337	-23,137	59,123	0,064	-0,180
9	62,7	59,439	10,635	46,641	20,414	-18,564	60,117	-0,003	-0,176
10	65,7	58,203	56,205	48,643	23,378	-14,160	61,633	0,000	-0,169
11	64,4	56,651	60,050	50,297	26,205	-9,922	62,355	-0,080	-0,166
12	45,9	54,782	78,893	49,835	28,686	-5,868	57,580	-0,756	-0,184
13	30,2	52,597	501,635	47,774	30,690	-2,029	49,221	-1,772	-0,215
14	31,6	50,096	342,095	46,075	32,306	1,576	42,885	-2,481	-0,233
15	24,2	47,278	532,594	43,779	33,510	4,929	35,734	-3,218	-0,252
16	26,3	44,144	318,401	41,943	34,396	8,023	30,665	-3,661	-0,259
17	25,5	40,693	230,833	40,217	35,007	10,856	26,486	-3,963	-0,261
18	24,2	36,926	161,956	38,535	35,377	13,431	22,904	-4,167	-0,259
Прогнозований період									
22	22,96								

обчислюємо для кожного року ретроспективного періоду, починаючи із другого, величини абсолютної похибки та квадрату відносної похибки за формулами

$$\Delta(t) = Y(t) - g(t) - q(t);$$

$$\delta(t) = \frac{\Delta^2(t)}{Y^2(t)}.$$

Точність прогнозу визначається рівністю

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sum_{t=2}^T \delta(t)}{T - 1}.$$

Прогнозоване значення показника $Y(t)$ в j -тий рік після завершення ретроспективного періоду визначається рівністю

$$Y(T + j) = g(T) + jq(T).$$

При прогнозуванні обсягів видобування вугілля параметрами моделі прийняті величини $\beta = 0,6$, $\gamma = 0,7$, при яких точність прогнозу складає 93,54%.

Результати прогнозування методом Хольта відображені в таблиці 4.

Таким чином використання моделі Хольта дає можливість прогнозувати, що обсяг видобування вугілля в Україні в 2024 році досягне 26,89 тис. т., що на 11,13% перевищує рівень 2020 року, але є меншим від рівня 2016 року.

Обсяги видобутку вугілля в Україні в 2003-2020 роках та прогнози на 2024 рік відображені на рисунку 1.

Отже, при використанні рівняння множинної лінійної регресії одержується найменше прогнозоване значення обсягу видобутку вугілля, при використанні експоненційного вирівнювання — дещо більше значення, а використання методу Хольта дає найоптимістичніший прогноз. Одержані значення дають можливість визначити прогноз за допомогою трикутного нечіткого числа. Визначимо

Таблиця 4.

Визначення очікуваних обсягів видобування вугілля в Україні методом Хольта.

Рік	t	$Y(t)$	$g(t)$	$q(t)$	j	$Y(T+j)$	$g(t)+q(t)$	$\Delta(t)$	$\delta(t)$	ϵ
Ретроспективний період										
2003	1	59,8	59,8	0,00000			59,8			93,54%
2004	2	59,4	59,56	-0,16800			59,8	-0,40000	0,00005	
2005	3	60,4	60,00	0,25536			59,39200	1,00800	0,00028	
2006	4	61,7	61,12	0,86345			60,25216	1,44784	0,00055	
2007	5	58,9	60,13	-0,43196			61,98432	-3,08432	0,00274	
2008	6	59,5	59,58	-0,51670			59,70177	-0,20177	0,00001	
2009	7	55	56,63	-2,22358			59,06400	-4,06400	0,00546	
2010	8	55	54,76	-1,97243			54,40202	0,59798	0,00012	
2011	9	62,7	58,74	2,19045			52,78838	9,91162	0,02499	
2012	10	65,7	63,79	4,19561			60,92580	4,77420	0,00528	
2013	11	64,4	65,83	2,68952			67,98593	-3,58593	0,00310	
2014	12	45,9	54,95	-6,81251			68,52390	-22,62390	0,24295	
2015	13	30,2	37,37	-14,34607			48,13704	-17,93704	0,35277	
2016	14	31,6	28,17	-10,74615			23,02874	8,57126	0,07357	
2017	15	24,2	21,49	-7,90079			17,42535	6,77465	0,07837	
2018	16	26,3	21,22	-2,56232			13,58935	12,71065	0,23357	
2019	17	25,5	22,76	0,31324			18,65342	6,84658	0,07209	
2020	18	24,2	23,75	0,78591			23,07461	1,12539	0,00216	
Прогнозний період										
2024					4	26,89				

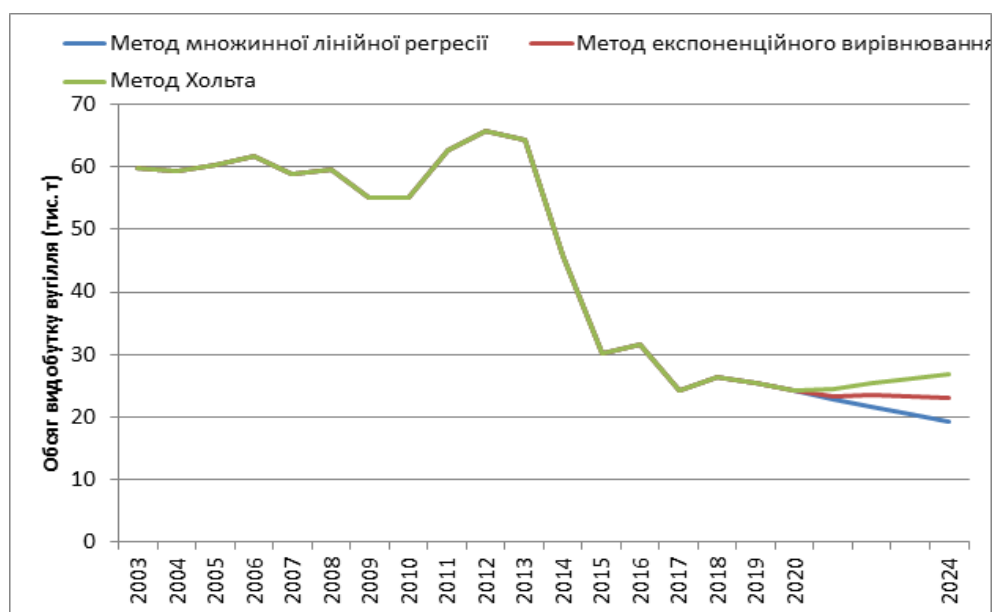


Рис. 1. Обсяги видобутку вугілля в Україні в 2003–2020 роках із прогнозами на 2024 рік.

функцію належності цього числа такою рівністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < F_1; \\ \frac{x-F_1}{F_2-F_1}, & \text{якщо } F_1 \leq x \leq F_2; \\ \frac{F_3-x}{F_3-F_2}, & \text{якщо } F_2 \leq x \leq F_3; \\ 0, & \text{якщо } x > F_3. \end{cases}$$

де F_1 — прогнозоване значення, одержане на основі рівняння множинної лі-

нійної регресії ($F_1 = 19,25$), F_2 — прогнозоване значення, одержане методом експоненційного вирівнювання ($F_2 = 22,96$), F_3 — прогнозоване значення, одержане методом Хольта ($F_3 = 26,89$).

Одержане нечітке трикутне число із функцією належності $f(x)$ визначає прогноз видобутку вугілля в Україні в 2024 році. Графічне відображення даного числа наведено на рисунку 2.

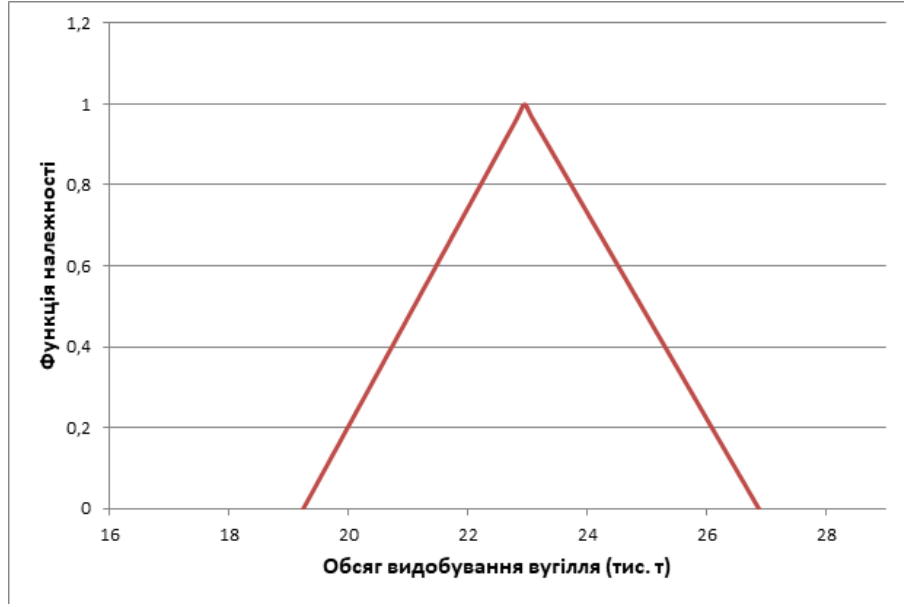


Рис. 2. Прогноз обсягу видобутку вугілля на 2024 рік у вигляді нечіткого трикутного числа.

4. Висновки. Забезпечення позитивної динаміки обсягів видобутку вугілля є критично важливим завданням для урядових органів і підприємств. Реалізація цього завдання передбачає не лише залучення інвестицій у вугільну галузь, а й вдосконалення технологій, відкриття нових родовищ і впровадження нових підходів для підвищення продуктивності видобутку.

Дослідження динаміки та аналіз обсягів видобутку експлуатаційних вуглеводневих покладів, проведений авторами, підтверджує наявність певних особливостей у цьому процесі. У роботі показано, що використання методів нечіткого прогнозування є ефективним і враховує специфіку цього процесу.

Прогнозування видобутку вугілля з використанням адаптивних моделей має значний потенціал, оскільки такий підхід дозволяє моделювати залежність від змінних умов і параметрів вугільного ринку. Це сприяє підвищенню точності прогнозування, оскільки модель адаптується до реальних змін, що відбуваються на ринку. Важливо зазначити, що якість та точність прогнозів значною мірою залежать від якості вхідних даних та ефективності використовуваних методів моделювання.

Реалізація адаптивних моделей для прогнозування обсягів видобутку вугілля може відкрити нові можливості для оптимізації процесів вугледобування, забезпечити більш точні прогнози та сприяти досягненню стабільного розвитку вугільної галузі.

Список використаної літератури

1. Сушко М. Ю. Аналіз сучасного стану розвитку промислової галузі України. *Вісник економічної науки України*. 2017.
2. Юсупова Т. М. Дослідження проблем вітчизняної промисловості в контексті пошуку шляхів відродження її економічного потенціалу. *Вісник економіки транспорту і промисловості*. 2013. № 43. С. 107–110.
3. Brown G. Robert. *Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*. Dover Phoenix Editions : New York, USA.
4. Theil H., Wage S. "Some observations on adaptive forecasting". *Management Science*. 1964. Vol. 10. P. 198–206.
5. Winters, P. R. (1960), "Forecasting sales by exponentially weighted moving averages", *Management Science*, vol. 6, pp. 324-342.
6. Klebanova T. C., Rudachenko, O. O. (2015), "Forecasting of indicators of financial activity of the enterprise of housing and communal services using adaptive models". *Biznes-inform*. Vol. 1. P. 143–148.
7. Стогній О. В., Макаров В. М., Каплін М. І. Потенціал видобутку вугілля в Україні. *Проблеми загальної енергетики*. 2011. № 2, С. 11–16.
8. Корчевой Ю. П., Півняк Г. Г. Новітні технології використання вугілля в енергетиці. 2006.
9. Ніколаєва О. Г. Прогнозування видобутку нафти і газу за допомогою нейромережевого моделювання і трендових моделей. *Науковий вісник Міжнародного гуманітарного університету. Серія: Економіка і менеджмент*. 2018. № 31. С. 121–126.
10. Varnaliy Z., Onishchenko S., Masliy A. Preventing threats as a precondition to increase the level of Economic Security of the State. *Scientific Journal «ScienceRise»*. 2016. Vol. 7/1, No. 24, P. 41–46. DOI: <https://doi.org/10.15587/2313-8416.2016.74409>
11. Ічанська Н. В., Лисенко М. В. Прогнозування видобутку нафти в Україні за допомогою адаптивних моделей. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, Т. 42, № 1, С. 164–173. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).164-173](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).164-173)
12. Ichanska N., Shurpik O. Аналіз динаміки видобутку вугілля в Україні за допомогою методів математичного моделювання. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. Т. 2, № 72. С. 49-53. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2023.2.049>
13. Онищенко В., Ічанська Н., Скриль В., Фурманчук О. Економіко-математичне моделювання інноваційного розвитку підприємств будівельної галузі В: Матеріали 3-ї Міжнародної конференції з будівельних інновацій. ІСВІ 2020. Конспект лекцій з цивільного будівництва, тому 181. / Онищенко В., Мамедова Г., Сивицька С., Гасимов А. Springer : Cham, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
14. Hudz S., Ichanska N., Rendyuk S., Molchanov P. Оптимізація розрахункової схеми двопротитних прогонів у каркасній системі з порталними рамами із застосуванням в'язевих підкосів. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*. Vol. 1, No. 56. P. 30–36. DOI: <https://doi.org/10.26906/znp.2021.56.2504>
15. Gorik A. V., Piskunov V. G., Serov N. I. et al. The Analytical Solution of the Bending Problem for an Inhomogeneous Noncircular Cylindrical Body. *International Applied Mechanics*. 2002. Vol. 38. P. 1261–1271. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>
16. Gorik A. V., Piskunov V. G., Serov M. I. et al. Analytic solution of the problem of bending of a composite beam on the basis of an improved model of deformation. *Strength Mater*. 1999. Vol. 31. P. 85–98. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
17. Міністерство енергетики та вугільної промисловості України. URL: <https://mev.gov.ua/> (дата звернення: 00.00.2023).

Ichanska N. V., Lysenko M. V. Coal mining dynamics research in Ukraine using fuzzy modeling methods.

The article examines the dynamics of coal extraction in Ukraine and discusses various approaches to modeling the life cycle of hydrocarbon deposit exploitation processes. By utilizing elements of mathematical modeling, the authors have solved the approximation problem using the Holt model and exponential smoothing methods, as well as multiple linear regression. The authors have analyzed each of these methods in terms of their effectiveness in addressing the challenges of Ukraine's fuel and energy complex development.

The use of adaptive models in applied research allows for working with complex and

unstable data. In the study, fuzzy modeling methods are applied to forecast coal extraction volumes. This enables modeling the dependence of this process on variable conditions and parameters of the coal market, which contributes to increased forecasting accuracy. The modeling proposed by the authors allows representing the forecast in the form of a triangular fuzzy number, specifically indicating possible expected values.

Keywords: fuzzy forecasting methods, coal mining, Fisher's and Student's criterias, adaptive models, exponential smoothing method, multiple linear regression equation, Holt model, triangular fuzzy number.

References

1. Sushko, M. Y. (2017). Analysis of the current state of the development of the industrial sector in Ukraine. *Bulletin of Economic Science of Ukraine*.
2. Yusupova, T. M. (2013). Research on the problems of the domestic industry in the context of finding ways to revive its economic potential. *Bulletin of Economics, Transport, and Industry*, 43, 107–110.
3. Brown G. Robert (2004). *Smoothing, Forecasting, and Prediction of Discrete Time Series, Dover Phoenix Editions*. New York: USA.
4. Theil, H., & Wage, S. (1964). "Some observations on adaptive forecasting". *Management Science*, 10, 198–206.
5. Winters P. R. (1960). "Forecasting sales by exponentially weighted moving averages". *Management Science*, 6, 324–342.
6. Klebanova, T. C., & Rudachenko, O. O. (2015), "Forecasting indicators of financial activity of housing and communal services enterprises using adaptive models". *Business Inform*, 1, 143–148.
7. Stohmiy, O. V., Makarov, V. M., & Kaplin, M. I. (2011). The Coal Production Potential in Ukraine. *Problems of General Energy*, 2, 11–16.
8. Korchevoy, Yu. P., & Pivnyak, H. H. (2006). *Advanced Coal Utilization Technologies in Energy*.
9. Nikolaeva, O. H. (2018). Forecasting Oil and Gas Production Using Neural Network Modeling and Trend Models. *Scientific Bulletin of the International Humanities University. Series: Economics and Management*, 31, 121–126.
10. Varnaliy, Z., Onishchenko, S., & Masliy, A. (2016). Preventing threats as a precondition to increase the level of Economic Security of the State. *Scientific Journal «ScienceRise»*, 7/1(24), 41–46. <https://doi.org/10.15587/2313-8416.2016.74409>
11. Ichanska, N. V., & Lysenko, M. V. (2023). Forecasting oil production in Ukraine using adaptive models. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series «Mathematics and Informatics»*, 42(1), 164–173. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).164-173](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).164-173)
12. Ichanska, N. V., & Shurpik, O. V. (2023). Analysis of the dynamics of coal mining in Ukraine using mathematical modeling methods.
13. Onyshchenko, V., Ichanska, N., Skryl, V., & Furmanchuk, O. (2022). Economic-mathematical modeling of innovative development of construction industry enterprises. In: Onyshchenko, V., Mamedova, G., Sivitska, S., & Gasimov, A. (Eds.) Proceedings of the 3rd International Conference on Construction Innovations. ICBI 2020. Lecture Notes in Civil Engineering, Vol. 181. Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65.
14. Hudz, S., Ichanska, N., Rendyuk, S., & Molchanov, P. (2022). Optimization of the calculation scheme of two-span passages in a frame system with portal frames using diagonal struts. *Academic Journal Industrial Machine Building, Civil Engineering*, 1(56), 30–36. <https://doi.org/10.26906/znp.2021.56.2504>
15. Gorik, A. V., Piskunov, V. G., Serov, N. I. et al. (2002). The Analytical Solution of the Bending Problem for an Inhomogeneous Noncircular Cylindrical Body. *International Applied Mechanics*, 38, 1261–1271. <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>
16. Gorik, A. V., Piskunov, V. G., Serov, M. I. et al. (1999). Analytic solution of the problem of bending of a composite beam on the basis of an improved model of deformation. *Strength Mater*, 31, 85–98. <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
17. Ministry of Energy and Coal Industry of Ukraine. Retrieved from <https://mev.gov.ua/>

Одержано 14.09.2023

УДК 372.851

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).119-129](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).119-129)**Н. В. Ічанська¹, Д. Ю. Лозицький²**

¹ Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
itm.ichanska@nupp.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5963-9288>

² Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
студент навчально-наукового інституту нафти і газу,
daniilo.lozickiy@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1745-7694>

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ТА ІКТ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

У сучасному інформаційному суспільстві, де кількісні дані та обробка інформації відіграють ключову роль, використання математичного апарату та інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) стає необхідністю. Це є надзвичайно важливим для моделювання, розв'язання складних прикладних задач у наукових дослідженнях і виробничій діяльності.

У роботі досліджено особливості математичної підготовки студентів інженерних спеціальностей і розглянуто можливості вдосконалення освітнього процесу шляхом застосування ІКТ. Авторами підкреслено роль і важливість застосування математичного апарату та інформаційно-комунікаційних технологій при розв'язанні практичних завдань у різних галузях. У статті наведено деякі приклади математичних задач, які застосовуються при розв'язанні інженерних завдань. Використання таких задач при вивченні курсу вищої математики демонструє зв'язок теорії з практикою й сприяє підвищенню мотивації до вивчення математики та застосуванню математичного апарату при дослідженнях виробничих процесів.

Для поліпшення ефективності навчання, авторами запропоновано шляхи оптимізації освітнього процесу та можливості використання сучасних інформаційних технологій для розв'язання практичних завдань.

Ключові слова: освітній процес, прикладні задачі, інформаційно-комунікаційні технології, цифровізація, інженерні завдання, центр мас, ферма, Марле.

1. Вступ. У сучасному суспільстві важливим аспектом є розвиток освіти й ефективна підготовка фахівців, котрі володіють базовими знаннями й здатні до постійного самовдосконалення, самонавчання та адаптації до викликів сучасності.

Важливою складовою базової підготовки сучасних інженерів є вивчення предметів математичного спрямування, оскільки кількісні методи знаходять застосування практично у всіх сферах діяльності.

Використання математичного апарату та інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) при вивченні вищої математики та розв'язанні задач прикладного змісту дозволяють персоналізувати навчальний процес, контролювати рівень знань, а також надають можливості для дистанційного та самостійного навчання.

Прикладні задачі наочно демонструють можливості застосування теоретичних знань й умінь у практичних ситуаціях. Розв'язання цих задач активно

формує критичне мислення, креативний підхід, здатність працювати у команді.

Інформаційно-комунікаційні технології дають можливість осучаснити освітній простір, перетворити навчальний процес у цікаве, доступне, мобільне середовище. При розв'язанні прикладних завдань засобами ІКТ збагачується навчальний процес, розширюється інфопростір, покращується сприйняття начальних матеріалів, виникає активна дискусія, що має зворотній зв'язок [1–3].

Сучасний світ вимагає повну чи максимально часткову цифровізацію всіх сфер суспільства і освіти насамперед. Особливо ефективно процеси цифровізації впливають на розв'язання різноманітних прикладних завдань, адже вони потребують використання певних математичних знань і методів, що часто громіздко та складно, а тому потребує автоматизації.

Поява універсальних пакетів, наприклад, Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, Maxima та ін., суттєво удосконалила проведення обчислень та застосування математичного апарату, а також підвищила популяризацію впровадження інформаційних технологій із застосуванням комп'ютерної техніки [4, 5].

Зручний інтерфейс і широкі можливості дозволяють виконувати багато стандартних і спеціалізованих операцій над функціями та виразами. Потужні графічні можливості, наявність власних мов програмування і засобів суттєво спрощують роботу для роботи з даними. Корисним є те, що ці програми підтримують імпорт та експорт даних до і з інших програмних продуктів (текстові та графічні редактори, електронні таблиці та ін.) [1].

Використання математичних пакетів надає можливість користувачам вирішувати широкий спектр завдань, включаючи проведення математичних досліджень з аналітичними та числовими розрахунками, розробку алгоритмів для чисельних методів, математичне моделювання, аналіз та обробку експериментальних даних, а також створення наукової та інженерної графіки та графічних та числових звітів.

2. Постановка задачі. У сучасному світі, завдяки стрімкому розвитку інформаційних технологій і розповсюдженню комп'ютерів, використання математичного апарату та інформаційно-комунікаційних технологій стало життєво необхідним. Однією з основних пріоритетних задач сучасної державної освітньої політики України є цифровізація та інтеграція національної освіти в світовий освітній контекст. Фундаментальна наука математика є ключовим фактором для вирішення міждисциплінарних проблем [6]. Вона використовується в усіх сферах життєдіяльності нашого суспільства. Особливо ефективним є її застосування в прикладних науках (фізика, біологія, медицина, економіка, географія, лінгвістика, соціологія, психологія та інші). Беззаперечними є актуальність професійної спрямованості математичних знань і навичок та важливість забезпечення високого рівня математичної освіти у майбутніх інженерів з потребою збереження фундаментальності й універсальності дисципліни.

Застосування ІКТ у навчальному процесі проаналізовано й розглянуто у наукових працях В. Михалевича і Я. Крупського [7, 8], М. Жалдака [9], В. Клочко [10], О. Співаковського [11], Ю. Триуса [12] та ін. Актуальною є тематика використання електронних підручників, мультимедійних презентацій, мультимедійних зображень та ін. [13, 14]. Дослідники активно вивчають можливості використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі викладання

математичних предметів (наприклад, [15]).

Ця стаття спрямована на визначення можливостей і переваг інтеграції математики та ІКТ у навчальний процес при підготовці сучасного інженера. **Метою статті** є пошук шляхів удосконалення навчального процесу та висвітлення важливості математичної освіти для студентів інженерних спеціальностей.

3. Основний результат. Сучасна інженерія вимагає від фахівців володіння ІКТ й застосування поглибленого математичного апарату. Для студентів важливим є практичний аспект математики, а також формування у ній коректної математичної постановки прикладних задач і побудови моделей.

Центр маси системи часто розраховується при проектуванні різних деталей в машинобудуванні [16, 17]. Знаходження центра маси відіграє важливу роль у забезпеченні балансу, який може бути застосований, наприклад, при створенні альтернативних варіантів меблів, транспортних засобів, у будівництві, у складуванні та ін. Без знання основних принципів, за якими визначається центр маси, буде складно організувати безпеку робіт з масивними навантаженнями і будь-якими габаритними предметами, що є дуже важливим на промисловому виробництві.

У цій роботі проілюстровано приклад розв'язання задачі з курсу вищої математики для інженерів про знаходження центру маси для каркасної ферми.

Ферма — система стрижнів, коли все навантаження розподіляється всередині самої конструкції і дозволяє перекривати великі прольоти без будь-яких будівельних опор. Основною сферою використання ферм є конструювання металевих каркасів для навісів і різних будівель. Крім того, за допомогою таких конструкцій виконується захист значних площ від сонця і атмосферних опадів. Широко використовуються металеві ферми в спорудженні мостів і як перекриттів в сегменті промислового або приватного будівництва. Локальні використання ферм з профільних труб спостерігається при облаштуванні об'єктів зв'язку, ліній електропостачання, автотранспортних доріг [18].

Розглянемо, наприклад, такі задачі:

знайти координати центру маси плоскої ферми, складеної з тонких однорідних стрижнів однакової погонної ваги:

а)

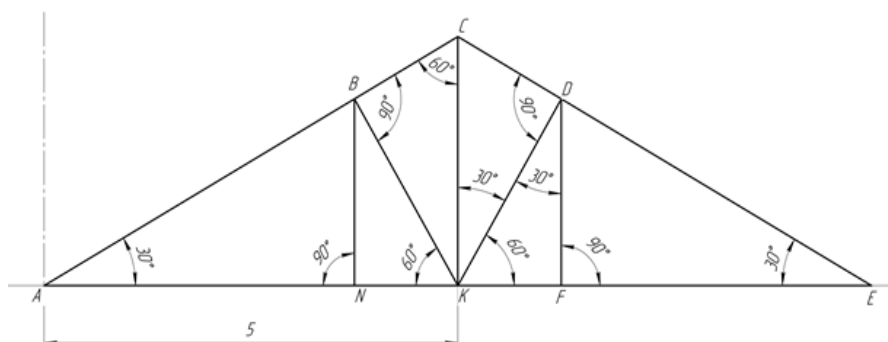


Рис. 1. Симетричний каркас даху.

б)

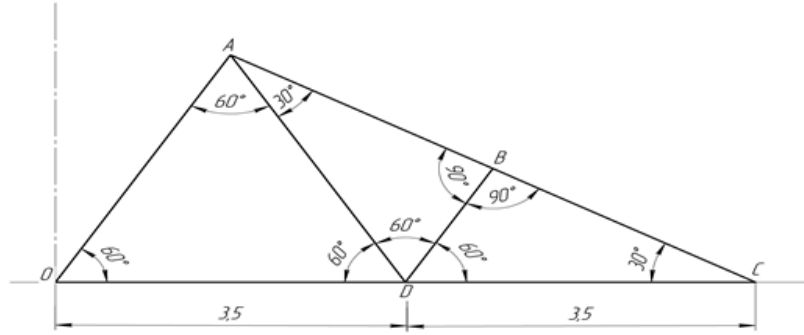


Рис. 2. Несиметричний каркас даху.

Наведемо розв'язання для б).

Передусім виберемо систему координат: вісь Ox направимо вздовж нижнього краю ферми, а вісь Oy — уздовж її лівого краю.

Координати центру маси ферми визначимо за формулами (1), (2):

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n l_i x_i}{l}, \quad (1)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n l_i y_i}{l}, \quad (2)$$

де l_i — довжина i -ої ланки ферми (тут $n = 37$), l — сума довжин всіх ланок, $(x_i; y_i)$ — координати центру маси i -ої ланки.

Знаходимо:

$$AB: l_{AB} = 1; x_{AB} = 0; y_{AB} = 0,5;$$

$$BC: l_{BC} = 1 \tan 30^\circ = 0,58; x_{BC} = 0,29; y_{BC} = 1;$$

$$AC: l_{AC} = 0,58 \cdot 2 = 1,16; x_{AC} = 0,29; y_{AC} = 0,5;$$

$$BE: l_{BE} = 1; x_{BE} = 0; y_{BE} = 1,5;$$

$$EC: l_{EC} = 1,16; x_{EC} = 0,29; y_{EC} = 1,5;$$

$$CD: l_{CD} = 1,16; x_{CD} = 0,58 + 0,29 = 0,87; y_{CD} = 1,5;$$

$$ED: l_{ED} = 1,16; x_{ED} = 0,58; y_{ED} = 2;$$

$$FE: l_{FE} = 1,16 \cot 30^\circ = 2; x_{FE} = 0; y_{FE} = 3;$$

$$FD: l_{FD} = 1,16 \cdot 2 = 2,32; x_{FD} = 0,58; y_{FD} = 3;$$

$$DG: l_{DG} = 2,32; x_{DG} = 1,16 + 0,58 = 1,74; y_{DG} = 3;$$

$$FG: l_{FG} = 2,32; x_{FG} = 1,16; y_{FG} = 4;$$

$$FH: l_{FH} = 2,32; x_{FH} = 0; y_{FH} = 4 + 1,16 = 5,16;$$

$$HI: l_{HI} = 2,32; x_{HI} = 1,16; y_{HI} = 4 + 2,32 = 4 + 2,32 = 6,32;$$

$$IG: l_{IG} = 2,32; x_{IG} = 2,32; y_{IG} = 5,16;$$

$$FI: l_{FI} = 2,32\sqrt{2} = 3,28; x_{FI} = 1,16; y_{FI} = 5,16;$$

$$GK: l_{GK} = 2,32; x_{GK} = 2,32 + 1,16 = 3,48; y_{GK} = 4;$$

$$IJ: l_{IJ} = 2,32; x_{IJ} = 3,48; y_{IJ} = 6,32;$$

$$GJ: l_{GJ} = 3,28; x_{GJ} = 3,48; y_{GJ} = 5,16;$$

JK: $l_{JK} = 2,32$; $x_{JK} = 2,32 + 2,32 = 4,64$; $y_{JK} = 5,16$;
 KL: $l_{KL} = 2,32$; $x_{KL} = 4,64 + 1,16 = 5,8$; $y_{KL} = 4$;
 JM: $l_{JM} = 2,32$; $x_{JM} = 5,8$; $y_{JM} = 6,32$;
 JL: $l_{JL} = 3,28$; $x_{JL} = 5,8$; $y_{JL} = 5,16$;
 ML: $l_{ML} = 2,32$; $x_{ML} = 2,32 \cdot 3 = 6,96$; $y_{ML} = 5,16$;
 MN: $l_{MN} = 2,32$; $x_{MN} = 6,96 + 1,16 = 8,12$; $y_{MN} = 6,32$;
 LO: $l_{LO} = 2,32$; $x_{LO} = 8,12$; $y_{LO} = 0,4$;
 NO: $l_{NO} = 2,32$; $x_{NO} = 2,32 \cdot 4 = 9,28$; $y_{NO} = 5,16$;
 MO: $l_{MO} = 3,28$; $x_{MO} = 8,12$; $y_{MO} = 5,16$;
 LQ: $l_{LQ} = 2,32$; $x_{LQ} = 9,28 - 1,16 - 0,58 = 7,54$; $y_{LQ} = 3$;
 QO: $l_{QO} = 2,32$; $x_{QO} = 9,28 - 0,58 = 8,7$; $y_{QO} = 3$;
 OP: $l_{OP} = 2$; $x_{OP} = 9,28$; $y_{OP} = 3$;
 QP: $l_{QP} = 1,16$; $x_{QP} = 8,7$; $y_{QP} = 2$;
 QT: $l_{QT} = 1,16$; $x_{QT} = 9,28 - 0,58 - 0,29 = 8,41$; $y_{QT} = 1,5$;
 PT: $l_{PT} = 1,16$; $x_{PT} = 9,28 - 0,29 = 8,99$; $y_{PT} = 1,5$;
 PS: $l_{PS} = 1$; $x_{PS} = 9,28$; $y_{PS} = 1,5$;
 TS: $l_{TS} = 0,58$; $x_{TS} = 8,99$; $y_{TS} = 1$;
 SV: $l_{SV} = 1$; $x_{SV} = 9,28$; $y_{SV} = 0,5$;
 TV: $l_{TV} = 1,16$; $x_{TV} = 8,99$; $y_{TV} = 0,5$.

Отже, координати центра маси плоскої ферми:

$$x_c = \frac{329,37}{70,99} = 4,64; \quad y_c = \frac{286,05}{70,99} = 4,03.$$

Використання комп'ютерних математичних систем і пакетів є розумним і корисним для автоматизації обчислень, зокрема Maple, адже багато прикладних задач потребують проведення громіздких обчислень, необхідність візуального представлення результатів і перевірку їх на коректність [19].

Maple — це комп'ютерна алгебраїчна система та середовище для обчислень, яке використовується у вищій математичній освіті та наукових дослідженнях. Вона надає інструменти для символічних та чисельних обчислень, а також графічного відображення математичних виразів. Maple має розширений функціонал для вирішення математичних задач, включаючи алгебру, аналіз, диференціальні рівняння, інтегрування та інше. Програма дозволяє математикам, інженерам та іншим науковцям виконувати складні обчислення, моделювати математичні процеси та розв'язувати різноманітні завдання, пов'язані з математикою та науками [5].

Наприклад, основні функції Maple для розв'язання рівнянь і нерівностей включають:

- `solve()`: Використовується для розв'язання алгебраїчних рівнянь і нерівностей.
- `fsolve()`: Вирішує чисельні рівняння та системи рівнянь за допомогою чисельних методів.
- `solvetoools:-ineq()`: Використовується для розв'язання нерівностей та їх систем.

Maple також має можливість розв'язувати рівняння та нерівності з використанням спеціалізованих пакетів, таких як пакет для розв'язання диференціальних рівнянь `dsolve()` для диференціальних рівнянь.

Таблиця 1.

Дані обчислень

Стрижень	l_i	x_i	y_i	$l_i x_i$	$l_i y_i$
AB	1	0	0,5	0	0,5
BC	0,58	0,29	1	0,17	0,58
AC	1,16	0,29	0,5	0,34	0,58
BE	1	0	1,5	0	1,5
EC	1,16	0,29	1,5	0,34	1,74
CD	1,16	0,87	1,5	1	1,74
ED	1,16	0,58	2	0,67	2,32
FE	2	0	3	0	6
FD	2,32	0,58	3	1,35	6,96
DG	2,32	1,74	3	4,04	6,96
FG	2,32	1,16	4	2,7	9,28
FH	2,32	0	5,16	0	11,97
HI	2,32	1,16	6,32	2,69	14,66
IG	2,32	2,32	5,16	5,38	11,97
FI	3,28	1,16	5,16	3,8	16,92
GK	2,32	3,48	4	8,07	9,28
IJ	2,32	3,48	6,32	8,07	14,66
GJ	3,28	3,48	5,16	11,41	16,92
JK	2,32	4,64	5,16	10,76	11,97
KL	2,32	5,8	4	13,46	9,28
JM	2,32	5,8	6,32	13,46	14,66
JL	3,28	5,8	5,16	19,02	16,92
ML	2,32	6,96	5,16	16,15	11,97
MN	2,32	8,12	6,32	18,84	14,66
LO	2,32	8,12	4	18,84	9,28
NO	2,32	9,28	5,16	21,53	11,97
MO	3,28	8,12	5,16	26,63	16,92
LQ	2,32	7,54	3	17,49	6,96
QO	2,32	8,7	3	20,18	6,96
OP	2	9,28	3	18,56	6
QP	1,16	8,7	2	10,09	2,32
QT	1,16	8,41	1,5	9,76	1,74
PT	1,16	8,99	1,5	10,43	1,74
PS	1	9,28	1,5	9,28	1,5
TS	0,58	8,99	1	5,21	0,58
SV	1	9,28	0,5	9,28	0,5
TV	1,16	8,99	0,5	10,43	0,58
Сума:	70,99	—	—	329,37	286,05

Ця система дозволяє виконувати символний аналіз та обчислення, що дуже корисно для математичних обчислень та наукових досліджень.

Команда `solve()` дозволяє розв'язувати рівняння і системи рівнянь, нерів-

ності і системи нерівностей. Ця команда завжди намагається знайти скінчений розв’язок в аналітичній формі. Її синтаксис доволі простий: solve (рівняння, змінна); solve ({рівняння 1, рівняння 2, ...}, {змінна 1, змінна 2, ...}) [20].

Наведемо приклад розв’язання нелінійної системи двох рівнянь засобами Maple:

$$\begin{cases} x^2 + 26x + y^3 = 0, \\ 3x + y = 0. \end{cases}$$

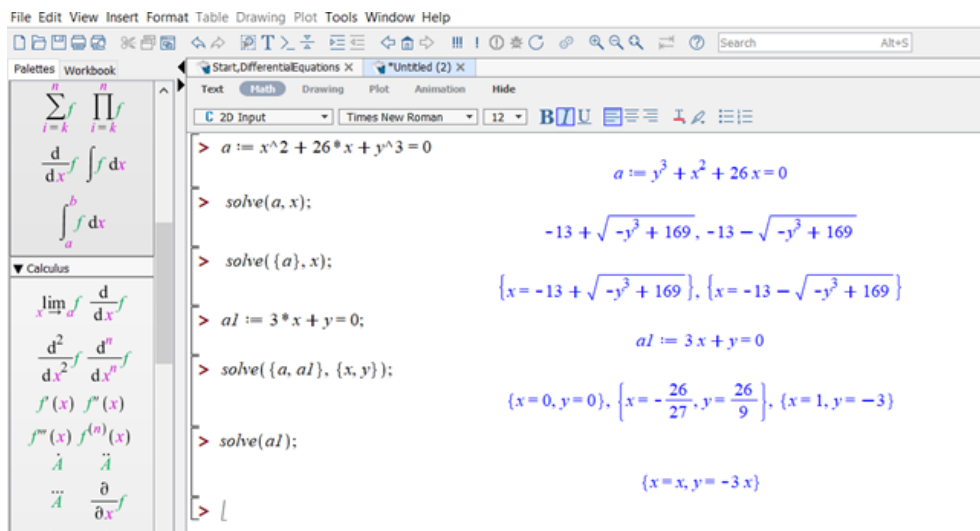


Рис. 3. Приклад розв’язання нелінійної системи.

Зауважимо, що Maple є потужним інструментом для символічних обчислень, який має багато функцій для розв’язання різних математичних завдань, включаючи розв’язання алгебраїчних рівнянь і нерівностей, а також їх систем.

Знаходження похідних та обчислення інтегралів також можна продуктивно зреалізувати в Maple.

Диференціальні рівняння широко описують фізичні процеси і тому їх застосовують в більшості прикладних задач різних галузей науки і техніки, наприклад:

- 1) Механіка: рух тіл, які підпадають під дію сил, рух падаючого предмета або коливання пружини.
- 2) Електроніка: аналіз і проектування електричних ланцюгів, які містять конденсатори, індуктивності і резистори.
- 3) Тепло та масопереніс: рівняння теплопровідності й рівняння дифузії використовуються для моделювання теплопередачі і розповсюдження речовини в системах.
- 4) Хімічні реакції: диференціальні рівняння реакційної кінетики описують швидкість хімічних реакцій та зміни концентрацій речовин з часом.
- 5) Біологія: моделі біологічних процесів, таких як поширення хвороб, популяційні динаміки та фізіологічні процеси.
- 6) Фінанси: моделювання цінових змін на фінансових ринках, ризику та прийняття фінансових рішень.

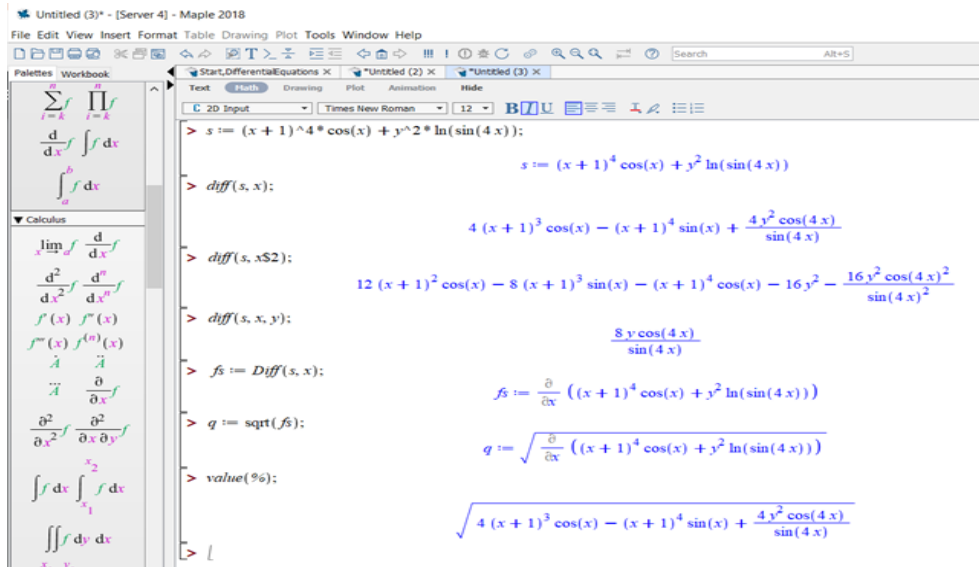


Рис. 4. Приклад знаходження похідних.

- 7) Метеорологія: рівняння для моделювання атмосферних процесів, такі як рух повітря, температурні градієнти та опади.
- 8) Інженерія: аналіз та проектування різноманітних інженерних систем, включаючи електричні кола, механічні конструкції та системи керування.

Диференціальні рівняння є потужним інструментом для моделювання та розуміння різноманітних явищ у природі та техніці. Розв'язання диференціальних рівнянь потребує глибокого володіння математичним апаратом та не є складним при застосуванні комп'ютерних систем.

Отже, Maple є корисним апаратом для вирішення різноманітних математичних проблем.

4. Висновки. При дослідженні авторами розглянуто прикладні задачі на знаходження елементів, що мають широке застосування при розв'язанні інженерних завдань. Наведені приклади наочно демонструють ефективне використання математики при дослідженні фізичних, виробничих і економічних процесів й сприяють підвищенню мотивації до вивчення математики.

Інтеграція математичного апарату при вивченні фахових дисциплін є надзвичайно важливою та перспективною тенденцією. Вона сприяє підвищенню рівня математичної культури, розвитку наукових досліджень і практичних застосувань математики в різних галузях.

ІКТ дозволяють візуалізувати та анімувати дослідження, спрямовувати навчання на комплексний розвиток особистості, значно розширити доступ та обробку різноманітної інформації та ресурсів, а також автоматизувати розрахунки.

Сучасність вимагає змін вимог до майбутнього інженера, потребує постійної перебудови структурних елементів освітнього процесу й його прикладної спрямованості. Якісне засвоєння основних і базових понять математичних дисциплін сприяє конкурентоспроможності та якісній професійній підготовці інженерів.

Список використаної літератури

1. Казнадій С. П., Мурашківська В. П., Руновська Л. А. Використання комп'ютерних технологій в навчальному процесі. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*. 2016. Т. 2, № 56.
2. Ічанська Н., Шурпик О. Інформаційні технології у навчанні вищої математики. *Методологія сучасних наукових досліджень* : Збірник наукових праць за результатами XVIII Міжнародної науково-практичної конференції, присвяченої 300-річчю Г. С. Сковороди. Харків, 2022. С. 246–248.
3. Ічанська Н. В. Освітні інтернет-ресурси та онлайн середовища в навчально-виховній діяльності викладача закладу вищої освіти. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2020. Вип. 4, № 62. С. 40–42. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.4.040>
4. Левчук О. В., Дзись В. Г., Новицька Л. І. Вища математика з використанням MATHCAD: довідник для ВНЗ. Вінниця: ВНАУ, 2013. 130 с.
5. Круський Я. Проблеми ефективної роботи студентів під час використання навчальних Maple тренажерів з покрокового розв'язання типових задач вищої математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету. Частина 3*. 2011. С. 130–135. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpudpu_2011_3_19 (дата звернення: 03.09.2023).
6. Onyshchenko V., Ichanska N., Skryl V., Furmanchuk O. Economic and Mathematical Modeling of Innovative Development of Enterprises in the Construction Industry : Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. Vol. 181. Lecture Notes in Civil Engineering. Springer : Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
7. Михалевич В. М. Підвищення ефективності самостійної навчально-пізнавальної діяльності студентів за допомогою Maple-технологій (перевіряючий комплекс). *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 5 Педагогічні науки: реалії та перспективи*. 2010. Вип. 2. С. 285–290.
8. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.
9. Морзе Н. В., Кочарян А. Б. Модель стандарту ІКТ-компетентності викладачів університету в контексті підвищення якості освіти. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2014. Вип. 43, № 5. С. 27–39.
10. Ключко В. І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі : навч.-метод. посіб. Вінниця : ВДТУ, 1997. 300 с.
11. Сліваковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей : монографія. Херсон : Айлант, 2003. 228 с.
12. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : монографія. Черкаси : Брама-Україна, 2005. 400 с.
13. Morokhovets N. Yu. Developing the Professional Competence of Future Doctors in the Instructional Setting of Higher Medical Educational Institutions. *Wiadomości Lekarskie*. 2017. Vol. LXX, No. 1. P. 101–104.
14. Синиця М. О. Використання мультимедійних технологій у навчальному процесі ВНЗ як засіб формування педагогічних знань : Професійна педагогічна освіта: становлення і розвиток педагогічного знання: монографія / за ред. проф. О.А. Дубасенюк. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2014. С. 418–438.
15. Ічанська Н. Застосування освітніх інтернет-ресурсів у навчальній роботі з іноземними студентами. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2020. Т. 3, № 61. С. 86–89. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.3.086>
16. Горік А. В., Піскунов В. Г., Серов Н. І. Аналітичне рішення задачі про вигин неоднорідного некруглого циліндричного тіла. *Міжнародна прикладна механіка*. 2002. Т. 38. С. 1261–1271. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>.
17. Горік А. В., Піскунов В. Г., Серов М. І. та співавт. Аналітичне рішення задачі про вигин складеної балки на основі вдосконаленої моделі деформування. *Сила Матер.* 1999. Т. 31. С. 85–98. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
18. Сахновський М. М. Розділ IV «Розрахунок конструювання з'єднань та елементів зварних конструкцій». § Ферми. Довідник конструктора будівельних зварних конструкцій.

Дніпропетровськ : „Промінь”, 1975. 237 с.

19. Дрозденко В. О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. Біла Церква, 2019. 328 с.
20. Махней О. В. Математичне забезпечення автоматизації прикладних досліджень: навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2013. 304 с.

Ichanska N. V., Lozitsky D. Yu. Using Mathematical Tools and ICT for Solving Applied Problems.

In the modern information society, where quantitative data and information processing play a crucial role, the use of mathematical tools and information and communication technologies (ICT) becomes a necessity. This is particularly important for modeling and solving complex applied problems in scientific research and industrial activities.

The paper explores the peculiarities of students' mathematical training in engineering specialties and discusses the possibilities of improving the educational process through the application of ICT. The authors emphasize the role and importance of using mathematical tools and information and communication technologies in solving practical tasks in various fields. The article provides some examples of mathematical problems that are applied in solving engineering tasks. The use of such problems in the study of higher mathematics demonstrates the connection between theory and practice and promotes motivation for learning mathematics and applying mathematical tools in production process research.

To enhance the effectiveness of education, the authors propose ways to optimize the educational process and opportunities for using modern information technologies to solve practical tasks.

Keywords: educational process, applied problems, information and communication technologies, digitalization, engineering tasks, center of mass, truss, Maple.

References

1. Kaznadiy, S. P., Murashkowska, V. P., & Runovska, L. A. (2016). The use of computer technologies in the educational process. *Pedagogical Sciences: Theory, History, Innovative Technologies*, 2, 263–269.
2. Ichanska, N., & Shurpyk, O. (2022). Information technologies in teaching higher mathematics. Methodology of modern scientific research. *Collection of scientific works based on the results of the XVIII International scientific and practical conference dedicated to the 300th anniversary of H. S. Skovoroda*. Kharkiv [in Ukrainian].
3. Ichanska, N. V. (2020). Educational Internet resources and online environments in the educational activity of a teacher of a higher education institution. *Control, navigation and communication systems*, 4(62), 40–42. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.4.040>
4. Levchuk, O. V., Dzis, V. G., & Novytska, L. I. (2013). *Higher mathematics using MATHCAD: a guide for universities*. Vinnytsia: VNAU [in Ukrainian].
5. Krupsky, I. (2011). Problems of effective work of students during the use of educational Maple simulators for step-by-step solutions of typical problems of higher mathematics. *Collection of scientific papers of the Uman State Pedagogical University. Part 3*, 130–135. Retrieved from: http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpudpu_2011_3_19
6. Onyshchenko, V., Ichanska, N., Skryl, V., & Furmanchuk, O. (2022). Economic and Mathematical Modeling of Innovative Development of Enterprises in the Construction Industry. In: Onyshchenko, V., Mammadova, G., Sivitska, S., Gasimov, A. (eds.). *Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 181. Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
7. Mykhalevych, V. M., & Krupskiy, Y. V. (2010). Improving the efficiency of independent educational and cognitive activity of students using Maple technologies. *Scientific Bulletin of the National Pedagogical University named after M. P. Dragomanov. Series 5. Pedagogical Sciences: Realities and Prospects*, 22, 285–290 [in Ukrainian].
8. Mikhalevich, V. M. (2016). *The use of computer mathematics systems in the process of education of university students: monograph*. Vinnytsia: VNTU [in Ukrainian].

9. Morze, N. V., & Kocharyan, A. B. (2014). The model of the ICT competence standard of university teachers in the context of improving the quality of education. *Information Technologies and Learning Tools*, 43(5), 27–39.
10. Klochko, V. I. (1997). *The use of advanced information technologies in the study of higher mathematics in a technical university: Educational-methodical manual*. Vinnytsia: VNTU [in Ukrainian].
11. Spivakovsky, O. V. (2003). *Theory and practice of using information technologies in the process of training students of mathematical specialties: a monograph*. Kherson: Aylant [in Ukrainian].
12. Tryus, Y. V. (2005). *Computer-oriented methodical systems of teaching mathematics: monograph*. Cherkasy: Brama-Ukraine [in Ukrainian].
13. Morokhovets, H. Yu. (2017). Developing the Professional Competence of Future Doctors in the Instructional Setting of Higher Medical Educational Institutions. *Wiadomości Lekarskie*, LXX(1), 101–104.
14. Sinytsia, M. O. (2014). The use of multimedia technologies in the educational process of universities as a means of forming pedagogical knowledge. In *Professional pedagogical education: formation and development of pedagogical knowledge: monograph* (418–438). Zhytomyr: Department of the State University named after I. Franka [in Ukrainian].
15. Ichanska, N., & Sirovyi, S. (2020). The use of educational internet resources in teaching foreign students. Systems of Control, Navigation, and Communication. *Collection of Scientific Works*, 3(61), 86–89.
16. Horyk, A. V., Piskunov, V. G., & Serov, N. I. (2002). Analytical solution of the problem of bending of non-uniform non-circular cylindrical bodies. *International Applied Mechanics*, 38, 1261–1271.
17. Horyk, A. V., Piskunov, V. G., & Serov, N. I. (1999). Analytical solution of the problem of bending of a composite beam based on an improved deformation model. *Force of Materials*, 31, 85–98.
18. Sakhnovsky, M. M. (1975). *Chapter IV "Calculation of construction of joints and elements of welded structures". § Farms. Handbook of the designer of construction welded structures*. Dnipropetrovsk: "Ray" [in Ukrainian].
19. Drozdenko, V. O. (2019). *Maple in mathematics: a study guide for students of higher educational institutions of III and IV levels of accreditation*. Bila Tserkva [in Ukrainian].
20. Makhnei, O. V., & Hoi, T. P. (2013). *Mathematical support of automation of applied research: study guide*. Ivano-Frankivsk: Simyk [in Ukrainian].

Одержано 10.10.2023

УДК 004.02

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).130-135](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).130-135)**Х. В. Ліп'яніна-Гончаренко**

Західноукраїнський національний університет,
доцент кафедри інформаційно-обчислювальних систем і управління,
кандидат технічних наук
xrustya.com@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2441-6292>

**МЕТОД ГЕНЕРУВАННЯ РЕКЛАМНОГО ЗОБРАЖЕННЯ НА
ОСНОВІ ВІДЕО ПОТОКУ**

Ця стаття присвячена розробці та дослідженню нового методу генерації рекламного зображення на основі відео потоку. Метод використовує технології машинного навчання та комп'ютерного зору для автоматизації процесу вибору ключових кадрів з відео потоку і створення привабливих рекламних зображень. Робота включає розробку методу для генерації рекламного зображення на основі вибраних кадрів та алгоритму для аналізу відео потоку і вибору ключових кадрів. Розроблений метод має на меті підвищити ефективність рекламних кампаній, зменшити час і ресурси, необхідні для створення рекламних зображень, і дозволить брендам краще адаптуватися до змінних умов ринку та вимог аудиторії.

Ключові слова: рекламне зображення, машинне навчання, комп'ютерний зір, ключові кадри, аналіз відео, генерація зображення.

1. Вступ. В сучасному світі реклама відіграє важливу роль в просуванні продуктів і послуг. Однак, створення ефективних рекламних матеріалів — це складний процес, який вимагає значних зусиль, часу і ресурсів. Особливо це стосується рекламних зображень, які повинні бути привабливими, інформативними і відображати продукт або послугу в найкращому світлі.

Традиційні методи створення рекламних зображень часто включають в себе ручний вибір кадрів з відео, що може бути часомістким і не завжди приводить до найкращих результатів. Крім того, ці методи можуть не враховувати всі можливі варіанти використання відео потоку для генерації рекламних зображень.

В цьому контексті виникає проблема розробки нового методу генерації рекламного зображення на основі відео потоку, який би був більш ефективним, автоматизованим і здатним до самонавчання. Такий метод повинен використовувати передові технології, такі як машинне навчання і комп'ютерний зір, для аналізу відео потоку і вибору найкращих кадрів для генерації рекламних зображень.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Оглядове дослідження [1] висвітлює еволюцію онлайн-реклами з 1994 року. З 2017 року витрати на онлайн-рекламу досягли 209 мільярдів доларів, що становить 41% від усіх витрат на рекламу. Дослідження включає аналіз понад 300 статей, опублікованих за останні 10 років.

Є дослідження [2-5] які фокусуються на використанні машинного навчання та аналітики даних для оптимізації рекламних кампаній. Вони включають використання дерев рішень для цільової моделі взаємодії клієнтів з бізнес-сторінкою, використання класифікаційного дерева для цільової моделі відеомаркетингу вищих навчальних закладів, використання семантичного аналізу для формування

рекламного контенту вищих навчальних закладів, та використання навчання асоціативних правил для формування контексту реклами та цільової аудиторії.

Дослідження [6] представляє набір нових алгоритмів, які використовують глибоке навчання для обробки зображень, машинне навчання та теорію графів для дослідження онлайн-реклами та побудови прогнозних моделей, які можуть передбачити успіх рекламного зображення. Алгоритми були оцінені на наборі даних з більш ніж 260 000 рекламних зображень, і вони успішно побудували регресійні моделі для прогнозування коефіцієнта клікабельності рекламного зображення.

Дослідження [7] фокусується на використанні штучного інтелекту для аналізу веб-реклами та побудови моделей розпізнавання об'єктів, які можуть передбачити, які об'єкти ймовірно з'являться в майбутніх рекламних зображеннях. Дослідження порівнює два підходи — "sinking trainer" та R-CNN, використовуючи HOG та CNN для аналізу. R-CNN показує кращі результати, але потребує більше часу на навчання.

Дослідження [8] представляє нову Генеративну Змагальну Мережу (GAN), названу LayoutGAN, яка синтезує макети, моделюючи геометричні відносини різних типів 2D елементів. Генератор LayoutGAN приймає на вхід набір випадково розміщених 2D графічних елементів і використовує модулі самоуваги для спільного уточнення їхніх міток та геометричних параметрів для створення реалістичного макету. Для створення хороших макетів критично важливим є точне вирівнювання. Тому автори пропонують новий диференційований шар рендерингу каркасу, який відображає згенерований макет у зображення каркасу, на основі якого дискримінатор на основі CNN використовується для оптимізації макетів у просторі зображень.

Дослідження [9] присвячено розробці методу автоматичної генерації банерних зображень для домашніх сторінок електронної комерції. Автори використовують глибоке навчання для автоматичної анотації об'єктів/тегів з зображення та генетичний алгоритм для генерації оптимального макета банера. Цей метод дозволяє створювати велику кількість банерів за короткий час, що покращує персоналізацію і може збільшити кількість кліків на банери.

На відміну від аналога [9], розроблений метод фокусується на використанні відео потоку як вхідних даних, тоді як це дослідження використовує статичні зображення. Крім того, розроблений метод включає в себе аналіз відео потоку і вибір ключових кадрів для генерації рекламних зображень, тоді як це дослідження фокусується на автоматичній анотації об'єктів/тегів і генерації макета банера.

3. Мета роботи. Метою цієї роботи є розробка та дослідження нового методу генерації рекламного зображення на основі відео потоку. Цей метод має на меті використовувати технології машинного навчання та комп'ютерного зору для автоматизації процесу вибору ключових кадрів з відео потоку і створення привабливих рекламних зображень.

Конкретні цілі цієї роботи включають:

- Розробка методу для генерації рекламного зображення на основі вибраних кадрів.
- Розробка алгоритму для аналізу відео потоку і вибору ключових кадрів.

Очікується, що розроблений метод допоможе підвищити ефективність ре-

кламних кампаній, зменшити час і ресурси, необхідні для створення рекламних зображень, і дозволить брендам краще адаптуватися до змінних умов ринку та вимог аудиторії.

4. Виклад основного матеріалу. Метод генерації рекламного зображення на основі відео потоку — це сучасний підхід, який використовує технології машинного навчання та комп'ютерного зору для створення ефективних рекламних матеріалів. Цей метод включає в себе ряд етапів, починаючи з аналізу відео потоку і закінчуючи оцінкою ефективності створеного рекламного зображення.

Основна мета цього методу - використовувати відео потік для визначення ключових моментів або елементів, які можуть бути використані для створення привабливого рекламного зображення. Це може бути особливо корисно для рекламних кампаній, які вимагають високої ступеня візуальної привабливості, наприклад, в рекламі моди, косметики або автомобілів.

Крім того, цей метод може бути використаний для автоматизації процесу створення рекламних зображень, що може призвести до значного збільшення продуктивності та ефективності рекламних кампаній.

Отже, метод генерації рекламного зображення на основі відео потоку включає наступні етапи:

Етап 1. Аналіз відео потоку: На цьому етапі використовуються алгоритми комп'ютерного зору для аналізу відео потоку. Це може включати в себе визначення ключових моментів в відео, які можуть бути використані для генерації рекламного зображення.

Етап 2. Вибір ключових кадрів: На основі аналізу відео потоку вибираються ключові кадри, які найкраще відображають продукт або послугу. Це може включати в себе вибір кадрів, які відображають продукт в найбільш привабливому світлі або які містять елементи, що привертають увагу.

Етап 3. Генерація рекламного зображення: На цьому етапі вибрані кадри перетворюються на рекламні зображення. Це може включати в себе використання технологій машинного навчання для оптимізації зображення з метою привернення уваги аудиторії.

Етап 4. Оцінка ефективності: Після генерації рекламного зображення воно може бути оцінено за ефективністю. Це може включати в себе використання аналітики для визначення того, наскільки добре зображення привертає увагу аудиторії, і внесення необхідних корективів.

Етап 5. Ітерація: На основі оцінки ефективності процес може бути повторений з метою подальшого вдосконалення рекламного зображення.

Далі даний метод представимо у вигляді алгоритму (Рис. 1) генерації рекламного зображення на основі відео, що дозволить краще зрозуміти його структуру та послідовність дій. Це також допоможе в ідентифікації можливих місць для оптимізації та вдосконалення, що може призвести до підвищення ефективності рекламних кампаній. Крім того, це може слугувати основою для розробки автоматизованих систем генерації рекламних зображень, що здатні адаптуватися до змінних умов ринку та вимог аудиторії.

Цей алгоритм (див. Рис. 1) починається з вхідних даних у вигляді відео потоку, який попередньо обробляється для видалення шуму і покращення якості зображення. Потім алгоритм використовує техніки комп'ютерного зору для виділення окремих кадрів з відео потоку. Кожен кадр аналізується за допо-

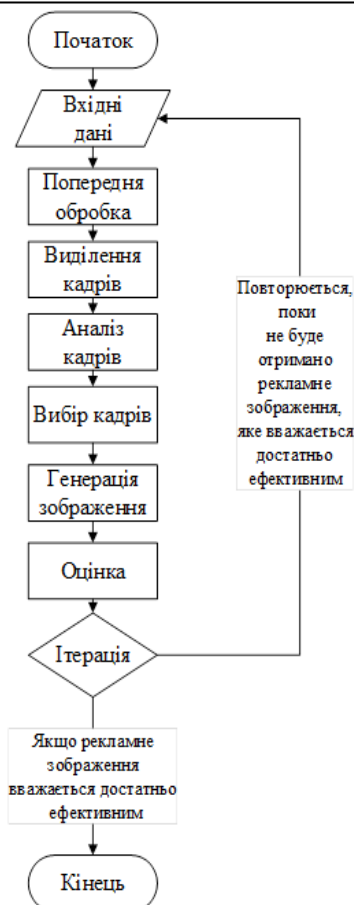


Рис. 1. Алгоритм генерації рекламного зображення на основі відео потоку.

могою алгоритмів машинного навчання для визначення ключових елементів, які можуть бути використані для генерації рекламного зображення. На основі аналізу вибираються кадри, які найкраще відображають продукт або послугу. Вибрані кадри перетворюються на рекламні зображення за допомогою технологій машинного навчання. Рекламні зображення оцінюються за ефективністю, і на основі цієї оцінки вносяться корективи. Процес повторюється, поки не буде отримано рекламне зображення, яке вважається достатньо ефективним. Коли рекламне зображення вважається достатньо ефективним, алгоритм завершується.

Отже, метод генерації рекламного зображення на основі відео потоку відкриває нові можливості для рекламних кампаній. Використання алгоритмів комп'ютерного зору та машинного навчання дозволяє автоматизувати процес вибору ключових кадрів і створення привабливих рекламних зображень.

Цей метод може значно підвищити ефективність рекламних кампаній, оскільки він дозволяє вибирати найбільш привабливі моменти відео потоку і перетворювати їх на рекламні зображення. Такий підхід може привернути більше уваги аудиторії і підвищити впізнаваність бренду.

Однак, важливо пам'ятати, що ефективність цього методу в значній мірі залежить від якості вхідного відео потоку і від точності алгоритмів аналізу відео. Тому для досягнення найкращих результатів може бути необхідно постійно

вдосконалювати алгоритми аналізу відео і машинного навчання, які використовуються на етапах генерації рекламного зображення.

В цілому, метод генерації рекламного зображення на основі відео потоку представляє собою перспективний інструмент для рекламних кампаній, який може допомогти брендам ефективніше привертати увагу аудиторії і підвищувати свою впізнаваність.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Розроблений метод генерації рекламного зображення на основі відео потоку демонструє значний потенціал для підвищення ефективності рекламних кампаній. Використання технологій машинного навчання та комп'ютерного зору дозволяє автоматизувати процес вибору ключових кадрів з відео потоку і створення привабливих рекламних зображень, що може збільшити впізнаваність бренду та привертання уваги аудиторії.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вдосконалення розробленого методу. Це може включати в себе розробку більш точних алгоритмів аналізу відео потоку, оптимізацію процесу вибору ключових кадрів, а також розробку нових технік генерації рекламних зображень.

Також може бути цікавим дослідження можливості інтеграції розробленого методу з іншими технологіями, такими як системи рекомендацій, що може допомогти в подальшому підвищенні ефективності рекламних кампаній.

Крім того, може бути проведено дослідження з метою визначення впливу розробленого методу на поведінку користувачів і впізнаваність бренду, що допоможе краще зрозуміти його ефективність в реальних умовах.

Список використаної літератури

1. Liu-Thompkins Y. A Decade of Online Advertising Research: What We Learned and What We Need to Know. *Journal of Advertising*. 2019. Vol. 48, No. 1. P. 1–13. DOI: <https://doi.org/10.1080/00913367.2018.1556138>
2. Lipyaniina H. Decision tree based targeting model of customer interaction with business page. *CMIS*. 2020. P. 1001–1012.
3. Lipyaniina H. et al. Targeting Model of HEI Video Marketing based on Classification Tree. *ICTERI Workshops*. 2020. P. 487–498.
4. Lipianina-Honcharenko K. et al. An Intelligent Method for Forming the Advertising Content of Higher Education Institutions Based on Semantic Analysis. *Communications in Computer and Information Science* : Cham, 2022. P. 169–182. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-14841-5_11
5. Lipianina-Honcharenko K. et al. Method of forming the context of advertising and target audience based on associative rules learning. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences*. 2022. Vol. 313, No. 5. P. 279–287. DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2022-313-5-279-287>
6. Fire M., Schler J. Exploring Online Ad Images Using a Deep Convolutional Neural Network Approach. *2017 IEEE International Conference on Internet of Things (iThings) and IEEE Green Computing and Communications (GreenCom) and IEEE Cyber, Physical and Social Computing (CPSCoM) and IEEE Smart Data (SmartData)* : Exeter, 2017. P. 21–23. DOI: <https://doi.org/10.1109/ithings-greencom-cpscom-smartdata.2017.160>
7. Patel M., Modi K. *Exploring Online Ad Images using Deep-Learning Approach*. 2020 4th International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS) : Madurai, India, 2020. P. 13–15. DOI: <https://doi.org/10.1109/iciccs48265.2020.9121175>
8. Li J. et al. LayoutGAN: Synthesizing Graphic Layouts with Vector-Wireframe Adversarial Networks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2020. Vol. 43, No. 7. P. 2388–2399. DOI: <https://doi.org/10.1109/tpami.2019.2963663>
9. Vempati S. et al. Enabling Hyper-Personalisation: Automated Ad Creative Generation and

Ranking for Fashion e-Commerce. *Lecture Notes in Social Networks*. 2020. P. 25–48. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-55218-3_2

Lipianina-Honcharenko Kh. V. A method of generating an advertising image based on a video stream.

This article is dedicated to the development and investigation of a new method for generating an advertising image based on a video stream. The method utilizes machine learning and computer vision technologies to automate the process of selecting key frames from a video stream and creating appealing advertising images. The work includes the development of a method for generating an advertising image based on selected frames and an algorithm for analyzing the video stream and selecting key frames. The developed method aims to increase the effectiveness of advertising campaigns, reduce the time and resources required for creating advertising images, and allow brands to better adapt to changing market conditions and audience demands.

Keywords: advertising image, machine learning, computer vision, key frames, video analysis, image generation.

References

1. Liu-Thompkins, Y. (2019). A Decade of Online Advertising Research: What We Learned and What We Need to Know. *Journal of Advertising*, 48(1), 1–13. <https://doi.org/10.1080/00913367.2018.1556138>
2. Lipyanina, H., Sachenko, A., Lendyuk, T., Nadvynychny, S., & Grodskyi, S. (2020). Decision tree based targeting model of customer interaction with business page. *In CMIS*, 1001–1012.
3. Lipyanina, H., Sachenko, S., Lendyuk, T., & Sachenko, A. (2020). Targeting Model of HEI Video Marketing based on Classification Tree. *In ICTERI Workshops*, 487–498.
4. Lipianina-Honcharenko, K., Lendiuk, T., Sachenko, A., Osolinskyi, O., Zahorodnia, D., & Komar, M. (2022). An Intelligent Method for Forming the Advertising Content of Higher Education Institutions Based on Semantic Analysis. *Communications in Computer and Information Science*. Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14841-5_11
5. Lipianina-Honcharenko, K., Lendiuk, T., Sachenko, A., & Wołoszyn, J. (2022). Method of Forming the Context of Advertising and Target Audience based on Associative Rules Learning. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical sciences*, 313(5), 279–287. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2022-313-5-279-287>
6. Fire, M., & Schler, J. (2017). Exploring Online Ad Images Using a Deep Convolutional Neural Network Approach. *2017 IEEE International Conference on Internet of Things (iThings) and IEEE Green Computing and Communications (GreenCom) and IEEE Cyber, Physical and Social Computing (CPSCom) and IEEE Smart Data (SmartData)*. Exeter. <https://doi.org/10.1109/ithings-greencom-cpscom-smartdata.2017.160>
7. Patel, M., & Modi, K. (2020). Exploring Online Ad Images using Deep-Learning Approach. *2020 4th International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS)*. Madurai, India. <https://doi.org/10.1109/iciccs48265.2020.9121175>
8. Li, J., Wang, C., Xu, H., Zhang, L., & Wang, L. (2020). LayoutGAN: Synthesizing Graphic Layouts with Vector-Wireframe Adversarial Networks. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 43(7), 2388–2399. <https://doi.org/10.1109/tpami.2019.2963663>
9. Vempati, S., Chakraborty, S., & Kumar, A. (2020). Enabling Hyper-Personalisation: Automated Ad Creative Generation and Ranking for Fashion e-Commerce. *Lecture Notes in Social Networks*, 25–48. https://doi.org/10.1007/978-3-030-55218-3_2

Одержано 28.05.2023

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).136-143](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143)**І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики,
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

ЕКВАЦІОНАЛЬНЕ ОПИСАННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО ПОВНИХ АЛГЕБР

У роботі продовжується еквациональне дослідження класу універсальних алгебр M_6 . Клас M_6 складається з тридцяти чотирьох функціонально неповних і тридцяти функціонально повних алгебр. У попередній роботі були знайдені повні системи тотожностей для всіх функціонально неповних алгебр. Ці алгебри утворюють сімнадцять одноелементних, один двоелементний, один трьохелементний, два шестиелементних еквациональних кластери. Функціонально повні алгебри класу M_6 утворюють один тридцятиелементний кластер. Для нього знайдені повні системи тотожностей.

Ключові слова: функціонально повна алгебра, еквациональність, повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, еквациональний кластер.

1. Вступ. Дана робота є продовженням дослідження [2], у якому знайдені повні системи тотожностей для всіх функціонально неповних алгебр класу $M_6 = \{U = \langle A, \Omega \rangle; A = \{0, 1\}; \Omega \subset \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus\}\}$. У даній роботі знаходяться повні системи тотожностей для функціонально повних алгебр цього класу.

2. Основні результати. Нехай задано клас універсальних булевих алгебр $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle\}$, $A = \{0, 1\}$, Ω — деяка множина булевих операцій. Позначимо через $R(U)$ множину всіх тотожностей алгебри U .

Означення 1. Алгебри U_1 і U_2 називають еквационально еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.

Означення 2. Алгебра U_1 еквационально вкладається в алгебру U_2 , якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Означення 3. Тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$ називається сигнатурною, якщо $F_2(\varphi)$ формула, яка реалізує операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$, а $F_1(\psi)$ — формула, яка побудована з операцій алгебри U_1 .

Означення 4. Система тотожностей $H \subset R(U)$ називається повною в U , якщо використовуючи операцію суперпозиції, можна довести довільну тотожність $F_1 = F_2$ до лексикографічної рівності.

Нехай алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ і $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ такі, що $\Omega_1 \subset \Omega_2$, і для кожної операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ знайдена сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi)$. Множину цих сигнатурних тотожностей позначимо через $R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Теорема 1. *Якщо для алгебри U_1 знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$, то повна система тотожностей $H(U_2)$ алгебри U_2 дорівнює $H(U_1) \cup R(\Omega_2 - \Omega_1)$.*

Доведення теореми впливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ з формули алгебри U_2 , звівши їх до формул алгебри U_1 , для якої знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$.

Означення 5. *Алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ еквівалентно вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ якщо для кожної операції $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існують сигнатурні тотожності.*

Означення 6. *Алгебри $U_1, U_2, \dots, U_t \in M$ утворюють еквівалентний кластер K , якщо у множині K існує така алгебра U^* , що $\forall U_t \in K$ існує $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_l} \in K$, що $R(U_i) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \dots \subset R(U_{i_l}) = R(U^*)$.*

Функціонально повні алгебри класу M_6 утворюють один тридцятиелементний кластер, який зображено у вигляді сигнатурного графа на рис. 1.

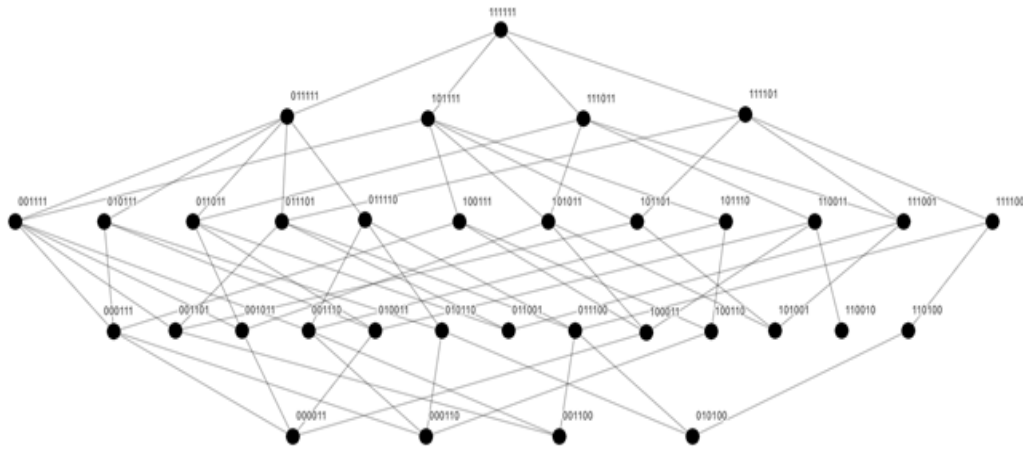


Рис. 1. Функціонально повні алгебри класу M_6 .

У класі M_6 є чотири канонічні функціонально повні алгебри $U_{12}, U_{20}, U_{50}, U_{42}$. На основі канонічних алгебр побудуємо фільтри

$$B_1 = \{U_i = \langle A, \Omega_i | \Omega_{12} \subset \Omega_i \rangle\},$$

$$B_2 = \{U_i = \langle A, \Omega_i | \Omega_{20} \subset \Omega_i \rangle\},$$

$$B_3 = \{U_i = \langle A, \Omega_i | \Omega_{50} \subset \Omega_i \rangle\},$$

$$B_4 = \{U_i = \langle A, \Omega_i | \Omega_{42} \subset \Omega_i \rangle\}.$$

Фільтри B_1 і B_2 утворюють чотиривимірні куби, а фільтри B_3 і B_4 — тривимірні.

У таблиці 1 наведено перелік функціонально повних алгебр, які входять до складу фільтрів B_1, B_2, B_3, B_4 .

Функціонально повні алгебри фільтрів.

B_1	B_2	B_3	B_4
U_{12}	U_{20}	U_{42}	U_{50}
U_{44}	U_{52}	U_{58}	U_{58}
U_{28}	U_{28}	U_{46}	U_{54}
U_{14}	U_{22}	U_{43}	U_{51}
U_{60}	U_{60}	U_{59}	U_{59}
U_{13}	U_{21}	U_{62}	U_{62}
U_{46}	U_{54}	U_{47}	U_{55}
U_{45}	U_{53}	U_{63}	U_{63}
U_{30}	U_{23}		
U_{29}	U_{30}		
U_{15}	U_{29}		
U_{62}	U_{62}		
U_{61}	U_{61}		
U_{47}	U_{55}		
U_{31}	U_{31}		
U_{63}	U_{63}		

З таблиці видно, що фільтри мають спільні алгебри, зокрема

$$B_1 \cap B_2 = \{U_{28}, U_{60}, U_{62}, U_{61}, U_{31}, U_{63}, U_{30}, U_{29}\},$$

$$B_3 \cap B_4 = \{U_{58}, U_{62}, U_{59}, U_{63}\},$$

$$B_1 \cap B_4 = B_3 \cap B_4 \cup U_{46}, \quad B_2 \cap B_3 = B_3 \cap B_4 \cup U_{54},$$

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 = \{U_{62}, U_{63}\}.$$

Алгебри фільтра B_1 зображені на сигнатурному чотиривимірному кубі на рис. 2.

Знайдемо повну систему тотожностей алгебри $U_{12} = \langle A, \neg, \wedge \rangle$.

Припущення 1. Система тотожностей 1–10 є повною для алгебри $U_{12} = \langle A, \neg, \wedge \rangle$.

1. $x \wedge x = x$,
2. $x \wedge y = y \wedge x$,
3. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
4. $\bar{\bar{x}} = x$,
5. $x \wedge \bar{x} = y \wedge \bar{y}$,
6. $x \wedge \bar{y} \wedge z = \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{x} \wedge \bar{z}$,
7. $x \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$,
8. $\bar{x} \wedge x \wedge \bar{x} = \bar{x} \wedge \bar{x}$,
9. $y \wedge x \wedge \bar{x} = y$,
10. $x = \bar{\bar{x}} \wedge y \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}$.

(1)

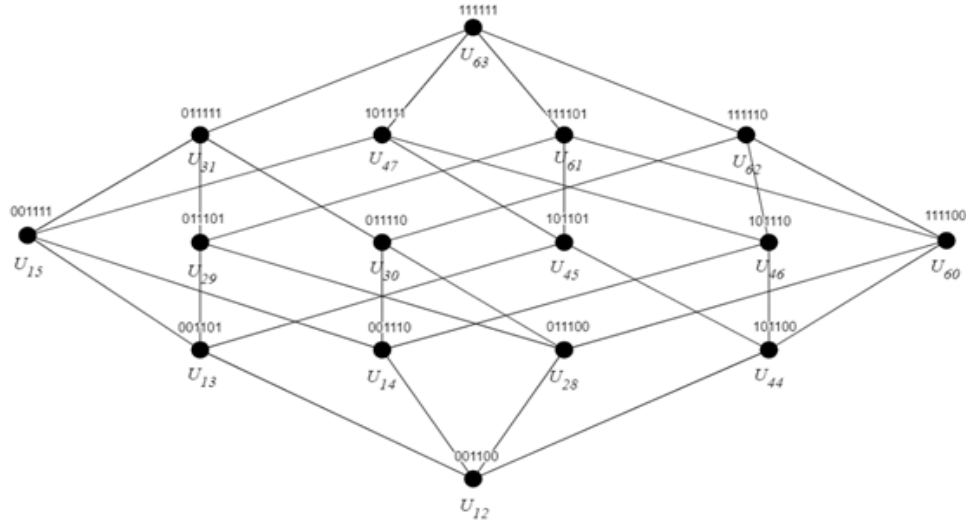


Рис. 2. Алгебри фільтра B_1 .

Доведення зводиться до побудови формули, яку можна вважати аналогом досконалої кон'юнктивної нормальної форми. Алгоритм побудови ДКНФ:

- 1) Використовуючи тотожності 4, 6 добиваємося того, що у формулі F над кожною кон'юнкцією заперечення зустрічається не більше одного разу.
- 2) Тотожність 7 дає можливість зробити всі формули вигляду $\tilde{x}_{i_1} \wedge \tilde{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{i_k}$ повними, де $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ або $\tilde{x}_{i_k} = \overline{x_{i_k}}$, тобто ці формули містять всі змінні, які входять до складу формули F .
- 3) Тотожності 8 і 9 поглинають формули $x \wedge \bar{x}$, крім випадку, коли $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тотожно дорівнює нулю.
- 4) Тотожність 1 поглинає однакові множники, а тотожності 2 і 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних множниках $\tilde{x}_{i_1} \wedge \tilde{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{i_k}$.
- 5) Легко переконатися, що повні елементарні множники приймають значення нуль тільки на одному наборі змінних.
- 6) Два повні елементарні множники утворюють тотожність тоді і тільки тоді, коли вони лексикографічно співпадають.

У фільтрі B_1 повна система тотожностей довільної алгебри складається з тотожностей алгебри U_{12} і відповідних сигнатурних тотожностей. Наприклад, повна система тотожностей $U_{31} = \langle A, 0, 1, \neg, \wedge, \oplus \rangle$ складається із $R(U_{12})$ і сигнатурних тотожностей $0 = x\bar{x}$, $1 = x \vee \bar{x}$, $x \oplus y = \overline{\bar{x}y} \wedge \overline{x\bar{y}}$. Для перевірки того, що формули F_1, F_2 утворюють тотожність, у алгебрі U_{31} досить з цих формул, за допомогою сигнатурних тотожностей, виключити операції $0, 1, x \oplus y$. У результаті отримаємо формули F_1^*, F_2^* . Зрозуміло, що $F_1^* = F_2^* \in R(U_{12})$ тоді і тільки тоді, коли $F_1 = F_2 \in R(U_{31})$. Аналогічно знаходяться повні системи тотожностей решти алгебр фільтра B_1 .

35. Алгебра $U_{12} = \langle A, \neg, \wedge \rangle$. $H(U_{12}) = R(U_{12}) = \{\text{система тотожностей (1)}\}$.
36. Алгебра $U_{44} = \langle A, \neg, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{44}) = \{H(U_{12}), x \oplus y = \overline{\bar{x}y} \wedge \overline{x\bar{y}}\}$.
37. Алгебра $U_{28} = \langle A, \neg, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{28}) = \{H(U_{12}), x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}\}$.
38. Алгебра $U_{14} = \langle A, 1, \neg, \wedge \rangle$. $H(U_{28}) = \{H(U_{12}), 1 = \bar{x} \wedge \bar{E}\}$.
39. Алгебра $U_{13} = \langle A, 0, \neg, \wedge \rangle$. $H(U_{28}) = \{H(U_{12}), 0 = \bar{x} \wedge E\}$.
40. Алгебра $U_{60} = \langle A, \neg, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{60}) = \{H(U_{44}), E \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}\}$.

41. Алгебра $U_{46} = \langle A, 1, \neg, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{46}) = \{H(U_{44}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.
42. Алгебра $U_{45} = \langle A, 0, \neg, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{45}) = \{H(U_{44}), 0 = \bar{x} \wedge x\}$.
43. Алгебра $U_{30} = \langle A, 1, \neg, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{30}) = \{H(U_{28}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.
44. Алгебра $U_{29} = \langle A, 0, \neg, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{29}) = \{H(U_{28}), 0 = \bar{x} \wedge x\}$.
45. Алгебра $U_{15} = \langle A, 0, 1, \neg, \wedge \rangle$. $H(U_{15}) = \{H(U_{28}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.
46. Алгебра $U_{62} = \langle A, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{62}) = \{H(U_{60}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.
47. Алгебра $U_{61} = \langle A, 0, \neg, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{61}) = \{H(U_{60}), 0 = \bar{x} \wedge x\}$.
48. Алгебра $U_{47} = \langle A, 0, 1, \neg, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{47}) = \{H(U_{45}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.
49. Алгебра $U_{31} = \langle A, 0, 1, \neg, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{31}) = \{H(U_{30}), 0 = \bar{x} \wedge x\}$.
50. Алгебра $U_{63} = \langle A, 0, 1, \neg, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{63}) = \{H(U_{61}), 1 = \overline{\bar{x} \wedge x}\}$.

Знайдемо повні системи тотожностей класу функціонально повних алгебр, які входять у фільтр алгебри $U_{20} = \langle A, \neg, \vee \rangle$. Алгебри, що входять до фільтру B_2 утворюють чотиримірний сигнатурний куб, який ізоморфний решітці фільтру алгебр B_1 .

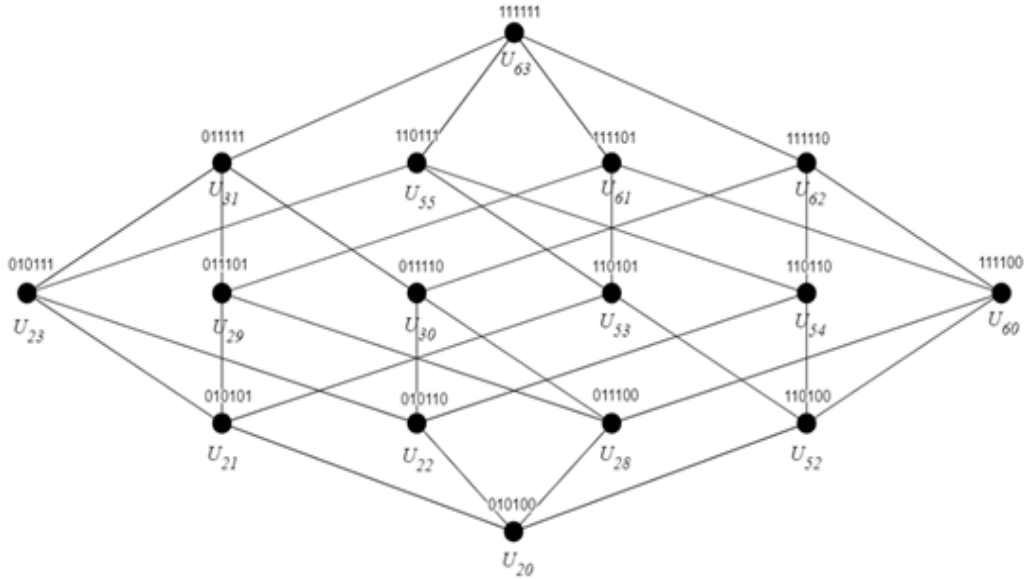


Рис. 3. Алгебри фільтра B_2 .

Припущення 2. Система тотожностей 1–10 є повною для алгебри $U_{20} = \langle A, \neg, \vee \rangle$.

1. $x \vee x = x$,
2. $x \vee y = y \vee x$,
3. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$,
4. $\bar{\bar{x}} = x$,
5. $x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y}$,
6. $\overline{x \vee y \vee z} = \overline{x \vee \bar{y}} \vee \overline{x \vee \bar{z}}$,
7. $\overline{x \vee y} = \overline{x \vee y \vee z} \vee \overline{x \vee y \vee \bar{z}}$,
8. $\overline{x \vee x \vee \bar{x}} = \overline{x \vee \bar{x}}$,
9. $y \vee \overline{x \vee \bar{x}} = E$,
10. $x = \overline{\bar{x} \vee y} \vee \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$.

Формули вигляду $\overline{\tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee \dots \vee \tilde{x}_{i_k}}$ де $\tilde{x}_{i_k} = x_{i_k}$ або $\tilde{x}_{i_k} = \overline{x_{i_k}}$ будемо називати елементарними доданками, а елементарні доданки, що містять всі змінні формули F — повними.

Алгоритми побудови аналогу досконалої диз'юнктивної нормальної форми для формул алгебр $U_{20} = \langle A, \neg, \vee \rangle$.

1. Використовуючи тотожності 4 і 6 добиваємося того, що у формулі F над кожною диз'юнкцією заперечення зберігається не більше одного разу.
2. Тотожність 7 дає можливість зробити всі доданки повними.
3. Тотожності 8 і 9 поглинають формулу $x \vee \bar{x}$, крім випадку коли $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тотожно дорівнює одиниці.
4. Тотожність 1 поглинає однакові доданки, а 2 і 3 лексикографічно впорядковують змінні в елементарних доданках.
5. Повні елементарні доданки приймають одиницю тільки на одному наборі змінних.
6. Два повні елементарні доданки утворюють тотожність тоді і тільки тоді, коли вони лексикографічно співпадають.
7. Використовуючи таблиці фільтрів і сигнатурних тотожностей (табл. 1) побудуємо повні системи тотожностей алгебр, що належать фільтру B_2 .

Знайшовши повну систему тотожностей алгебри U_{20} отримаємо повні системи тотожностей алгебр $U_{52}, U_{38}, U_{21}, U_{54}, U_{53}, U_{23}, U_{55}$, приєднавши до $R(U_{20})$ відповідні сигнатурні тотожності. Повні системи тотожностей алгебр $U_{28}, U_{60}, U_{62}, U_{61}, U_{31}, U_{63}, U_{30}, U_{29}$ знайдені, так як вони входять до складу B_1 .

51. Алгебра $U_{20} = \langle A, \neg, \vee \rangle$. $H(U_{20}) = \{\text{система тотожностей (2)}\}$.
52. Алгебра $U_{52} = \langle A, \neg, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{44}) = \{H(U_{20}), x \oplus y = \overline{x \vee \bar{y} \vee \bar{x} \vee y}\}$.
53. Алгебра $U_{38} = \langle A, 1, \neg, \vee \rangle$. $H(U_{38}) = \{H(U_{20}), 1 = x \vee \bar{x}\}$.
54. Алгебра $U_{21} = \langle A, 0, \neg, \vee \rangle$. $H(U_{21}) = \{H(U_{20}), 0 = \overline{x \vee \bar{x}}\}$.
55. Алгебра $U_{54} = \langle A, 1, \neg, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{54}) = \{H(U_{52}), 1 = x \vee \bar{x}\}$.
56. Алгебра $U_{53} = \langle A, 0, \neg, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{53}) = \{H(U_{52}), 0 = \overline{x \vee \bar{x}}\}$.
57. Алгебра $U_{23} = \langle A, 0, 1, \neg, \vee \rangle$. $H(U_{23}) = \{H(U_{21}), 1 = x \vee \bar{x}\}$.
58. Алгебра $U_{55} = \langle A, 0, 1, \neg, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{23}) = \{H(U_{23}), x \oplus y = \overline{x \vee \bar{y} \vee \bar{x} \vee y}\}$.

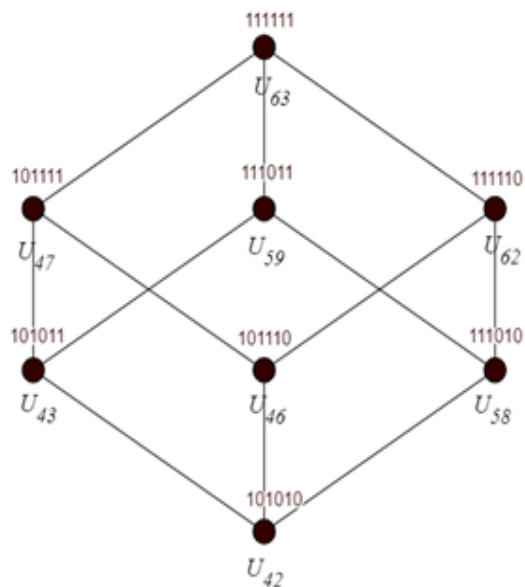
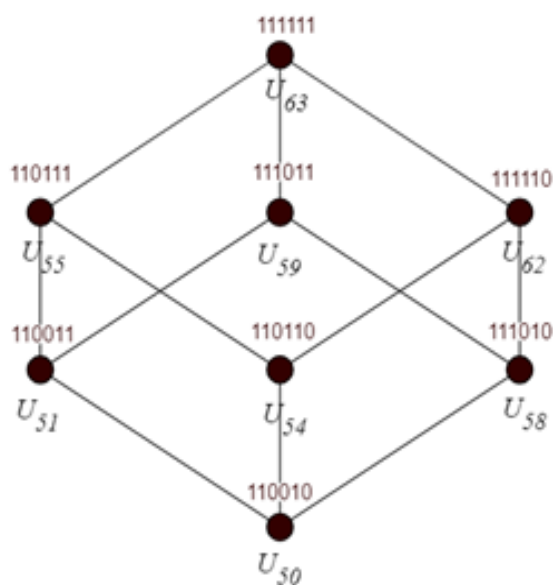
Перейдемо до алгебр фільтра B_3 , алгебри якого зображені на рис. 4.

Наведемо повну систему тотожностей алгебри Жегалкіна $U_{42} = \langle A, 1, \wedge, \oplus \rangle$.

1. $x \oplus x = x \oplus y$,
2. $x \oplus y = y \oplus x$,
3. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$,
4. $y \oplus x \oplus x = y$,
5. $(x \oplus y) \wedge z = x \wedge z \oplus y \wedge z$, (3)
6. $x \wedge x = x$,
7. $x \wedge y = y \wedge x$,
8. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$,
9. $x \wedge 1 = x$.

За допомогою цих тотожностей довільну формулу цієї алгебри можна перетворити в поліном Жегалкіна.

59. Алгебра $U_{42} = \langle A, 1, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{42}) = \{\text{система тотожностей (3)}\}$.
60. Алгебра $U_{43} = \langle A, 0, 1, \wedge, \oplus \rangle$. $H(U_{43}) = \{H(U_{42}), 0 = 1 \oplus 1\}$.
61. Алгебра $U_{58} = \langle A, \neg, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{58}) = \{H(U_{50}), xy = (x \oplus y) \oplus (x \vee y)\}$.
62. Алгебра $U_{59} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee, \oplus \rangle$. $H(U_{59}) = \{H(U_{58}), 0 = 1 \oplus 1\}$.

Рис. 4. Алгебри фільтра B_3 .Рис. 5. Алгебри фільтра B_4 .

Перейдемо до алгебр фільтра B_4 . Для алгебр U_{50} і U_{51} повні системи тотожностей не знайдені. Решта алгебр цього фільтру входять до складу попередніх фільтрів.

3. Висновки. Проведені екваціональні дослідження класу алгебр M_6 показали, що у цьому класі не існує екваціонально еквівалентних алгебр. А також у класі M_6 існує двадцять два екваціональні кластери: двадцять один кластер для функціонально неповних алгебр та один кластер для функціонально повних.

Список використаної літератури

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1935. Vol. 31.

- Р. 433–454.
2. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Еквациональне описання функціонально неповних алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2023. Вип. 1, № 42. С. 194–201. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201)
 3. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2017. Вип. 1, № 30. С. 79–86. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86)
 4. Мич І. А., Ніколенко В. В. Еквациональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2, № 33. С. 109–113. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113)
 5. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В., Денис В. С. Еквациональні дослідження нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 2, № 37. С. 142–149. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149)

Mych I. A., Nikolenko V. V., Vartsaba O. V. Equational description of functionally complete Boolean algebras.

The paper continues the equational investigation of the universal algebras of the class M_6 . The class M_6 consists of thirty-four functionally incomplete and thirty functionally complete algebras. Complete systems of identities for all functionally incomplete algebras were found in previous works. These algebras form seventeen one-element, one two-element, one three-element, and two six-element equational clusters. Functionally complete class algebras form one thirty-element cluster. Complete systems of identities have been found for it.

Keywords: equationality, complete system of identities, signature identity, equational cluster, functionally complete algebra.

References

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31, 433–454.
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(42), 194–201. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201) [in Ukrainian].
3. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(30), 79–86. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86) [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University*, 2(33), 109–113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113) [in Ukrainian].
5. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 142–149. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149) [in Ukrainian].

Одержано 10.05.2023

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).144-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).144-154)**В. В. Поліщук¹, Ю. Ю. Білак², А. А. Шафар³, О. І. Шпак⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри програмного забезпечення систем,
доктор технічних наук

volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри програмного забезпечення систем,
кандидат фізико-математичних наук

yuriy.bilak@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5989-1643>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант,

andrii.shafar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2445-8232>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри програмного забезпечення систем,
кандидат фізико-математичних наук

shpak@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1179-7196>

ГІБРИДНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ ІМІДЖУ МІСЦЯ ПРИЗНАЧЕННЯ В КОНТЕКСТІ СТАЛОГО РОЗВИТКУ РЕГІОНУ

Проведено дослідження актуальної задачі розроблення гібридної моделі оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону.

Гібридна математична модель враховує експертні оцінки учасників туристичного руху щодо відвідування місця призначення через призму здорового та безпечного довкілля; враховується залежність між витратами, кількістю днів перебування та задоволеності відвідування місця призначення; включає експертні висновки рівня сталого розвитку регіонів, як показник між задоволенням сучасних потреб туристичного руху та захистом інтересів майбутніх поколінь через призму здорового та безпечного довкілля. На основі вихідних оцінок підвищується ступінь обґрунтованості рішень щодо розробки майбутніх сценаріїв для інноваційного розвитку туристичної галузі у контексті сталого розвитку регіону. В дослідженні використано адекватний апарат нечітких множин, нечітке логічне виведення, багатовимірні функції належності, інтелектуальний аналіз знань та системний аналіз, що уможливило підвищити ступінь обґрунтованості управлінських рішень щодо майбутніх сценаріїв.

При цьому вперше розроблено гібридну модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону, на основі задоволеності учасників туристичного руху. Модель складається з двох етапів. На першому етапі здійснюється фазифікація вхідних даних, що представляє собою, як лінгвістичні висновки, так і кількісні оцінки. Після цього отримується одна нормована оцінка рівня іміджу місця призначення у розрізі експертів. На другому етапі враховується експертний рівень сталого розвитку регіону та здійснюється дефазифікація даних для одержання однієї агрегованої оцінки рівня іміджу місця призначення в межах регіону. На основі агрегованої оцінки визначається лінгвістичний рівень іміджу місця призначення.

Ключові слова: гібридна модель, прийняття рішень, багатокритеріальне оцінювання, нечіткі множини, цифрова трансформація, сталий розвиток регіонів.

1. Вступ. Представлене дослідження спрямоване на підтримку прийняття рішень щодо оцінювання та вибору регіонів з метою розробки майбутніх сценаріїв для інноваційного розвитку туристичної галузі у контексті сталого розвитку регіону. Майбутні сценарії можуть бути створенні з боку бізнеса для інвестування та розвитку туристичної. З боку держави такі сценарії можуть бути створенні з метою швидкого розвитку та/або підтримки регіонів. Дане дослідження є складовою цифрової трансформації туристичної галузі, оскільки базується на даних та знаннях, засобів програмного забезпечення їх обробки та підтримки прийняття рішень майбутніх сценаріїв.

Гібридна модель — це один із елементів цифрової трансформації туристичної галузі для досягнення сталого світу через призму інтелектуального аналізу даних та знань [1]. Аналіз даних та експертних знань дозволяють підвищити обґрунтованість та якість рішень, що пов'язані з іміджем місця призначення та сталого розвитку регіону, які приймаються у соціо-економічних системах для інноваційного розвитку туристичної галузі, як складової нової глобальної економіки. Крім цього, нові системи підтримки прийняття рішень повинні зосередитися та синхронізуватися на знаннях, що забезпечують сталий розвиток світу, як основного та дуже необхідного виклику сьогодення.

У проведеному дослідженні розглядається сталий розвиток регіонів у контексті іміджу місця призначення — це потреба між задоволенням сучасних потреб туристичного руху та захистом інтересів майбутніх поколінь через призму здорового та безпечного довкілля.

Основною метою даного дослідження є розроблення гібридної моделі оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону.

В результаті дослідження буде кількісна оцінка досліджуваних регіонів, для їх вибору щодо підтримки прийняття рішень та розробки майбутніх сценаріїв для інноваційного розвитку туристичної галузі у контексті сталого розвитку регіону.

2. Огляд літератури. Концепція гібридних моделей полягає у поєднанні кількісних та якісних методів. Вони використовуються за відсутності повних кількісних даних про об'єкт дослідження та в ситуаціях з високою невизначеністю. Для розкриття невизначеності використовується теорія нечіткої математики. Розглянемо сучасні дослідження цифрової трансформації туристичної галузі, що базуються на теорії нечіткої математики.

У роботі [2] використовується нечіткий підхід для оцінки туристичних напрямків з точки зору їх ефективності та стійкості. Автори рекомендують цей підхід для всіх зацікавлених сторін через простоту процедур і легку інтерпретацію результатів.

Багато авторів шукають ефективні рішення для розвитку туризму, які сприяють регіональному розвитку в даній місцевості, тобто вони досліджують сталість регіонального розвитку у зв'язку зі сталим туризмом [3–4].

Стійкість туризму також тісно пов'язана з ризиком туристичних напрямків. Також цей напрямок туризму створює великий простір для застосування методів, заснованих на нечітких підходах. Оцінка туристичних ризиків вимагає знання поточної ситуації та механізмів прогнозування [5].

Питання сталого розвитку також можна вивчати в нових сферах туризму, таких як фермерський туризм, де стійкість вивчається паралельно з розвитком

цієї форми туризму. У роботі [6] визначено індикатори стійкості фермерського туризму та застосував метод повної узгодженості та зваженої суми за нечіткою інформацією для оцінки стійкості.

У роботі [7] автори запропонували метод нечітких багатокритеріальних рішень, як оптимальний інструмент для процесів прийняття рішень щодо вибору відповідного місця для екотуризму.

Автори дослідження [8] використовують підхід нечіткої логіки для вибору стратегічних орієнтирів для сталого туризму, поєднуючи цей підхід нечіткої логіки з екологічними та соціальними показниками.

У роботі [9] розроблено нечіткий індекс стійкості для порівняння підсистем стійкості. Використовуючи нечітку логіку, дослідники розробили динамічну модель з можливістю її модифікації, а також з можливістю використання для прогнозування стійкості місцевості.

У роботі [10] рекомендують використовувати методи на основі нечіткої логіки як оптимальний інструмент для оцінки задоволеності туристів у готелях.

Таким чином, наведене вище, аргументує та підтверджує актуальність оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону на основі теорії нечіткої математики.

3. Матеріали та методи. Нехай розглядається деяка множина регіонів $R = \{R_1; R_2; \dots; R_n\}$, по яких проводиться оцінювання рівня іміджу місця призначення на основі задоволеності туристів та сталого розвитку регіонів. Позначимо $E = \{e_1; e_2; \dots; e_m\}$ — множину експертів (туристи), що відвідали місця призначення та оцінюють рівень його іміджу. Кожний регіон оцінюється експертами на основі K_I — інформаційної моделі критеріїв оцінювання рівня іміджу місця призначення, через призму здорового та безпечного довкілля. В основу даної моделі K_I покладено набір критеріїв оцінювання іміджу місця призначення $K = \{K_1; K_2; \dots; K_l\}$. Крім цього, маємо експертний висновок рівню сталого розвитку регіону щодо захисту інтересів майбутніх поколінь через призму здорового та безпечного довкілля — EV . Даний експертний висновок отримується спеціалістами туристичної галузі.

Формально представимо гібридну модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону в наступному вигляді:

$$\omega(R, E, K_I, EV) \rightarrow \delta(M_H, L_H). \quad (1)$$

ω — оператор, що ставить у відповідність множину вихідних значень δ , при вхідних змінних R, E, K_I, EV .

На виході моделі оцінювання маємо: M_H — оцінку рівня іміджу місця призначення на основі задоволеності учасників туристичного руху та сталого розвитку регіону; L_H — лінгвістичний рівень іміджу місця призначення відповідного регіону.

В результаті отримуємо вихідну оцінку M_H , що містить зміст рівня іміджу місця призначення на основі задоволеності учасників туристичного руху та сталого розвитку регіону. Використовуючи вихідну оцінку здійснюється розробка майбутніх сценаріїв для цифрової трансформації туристичної галузі у контексті сталого розвитку регіонів. Такі сценарії можуть бути, як з боку бізнеса для інвестування туристичної галузі регіонів, або з боку держави для швидкого розвитку та підтримки регіонів через призму здорового та безпечного довкілля.

Для розробленої гібридної моделі визначаються наступні суб'єкти управління:

експерти — туристи, які висловлювалися після відвідування місця призначення стосовно аспектів здорового та безпечного довкілля;

системний аналітик — це особа, яка налаштовує всі процеси оцінювання на основі множини критеріїв оцінювання та гібридної моделі;

ОПР — це особи, що приймають подальші управлінські рішення щодо впровадження майбутніх сценаріїв для розвитку цифрової трансформації регіонального та державного туризму.

Інформаційна модель критеріїв оцінювання рівня іміджу місця призначення. Пропонується множина критеріїв оцінювання іміджу регіону $K = \{K_f; f = \overline{1, l}\}$, що подані у вигляді відповіді на питання:

Яке ваше ставлення до наступних тверджень стосовно безпеки та стійкості місця призначення, що відвідали?

Кожен показник оцінюється експертом за допомогою лінгвістичної змінної $T = \{T_1; T_2; T_3; T_4; T_5\}$, де: T_1 — «Зовсім не погоджуюсь»; T_2 — «Не погоджуюсь»; T_3 — «Ні погоджуюсь, ні не погоджуюсь»; T_4 — «Погоджуюсь»; T_5 — «Цілком погоджуюсь».

Експертам потрібно надати відповідь згідно наступних питань [11]:

K_1 — місце призначення мало якісну інфраструктуру (дороги, аеропорт, комунальні служби);

K_2 — місце призначення мало хорошу мережу туристичної інформації (центри туристичної інформації);

K_3 — житло, запропоноване пунктом призначення, було достатнім;

K_4 — місце призначення мало високий рівень гігієни та чистоти;

K_5 — місце призначення було безпечним;

K_6 — місце призначення пропонувало хороші можливості для покупок;

K_7 — у місці призначення була гарна природа (парки, ліси, стежки);

K_8 — місце призначення мало гарний краєвид;

K_9 — місце призначення мало гарний клімат;

K_{10} — місце призначення пропонувало цікаві культурні заходи (фестивалі, концерти);

K_{11} — місце призначення пропонувало цікаві історичні пам'ятки (музеї, галереї, мистецькі центри);

K_{12} — проживання в місці призначення було прийнятним;

K_{13} — місце призначення було не дорогим;

K_{14} — співвідношення ціни та якості продуктів було хорошим у місці призначення;

K_{15} — місце призначення запропонувало прийнятну вартість моїх витрат на подорож;

K_{16} — у мене була можливість вибору з кількох цінових рівнів;

K_{17} — місце призначення було приємним місцем;

K_{18} — місце призначення було веселим місцем;

K_{19} — місце призначення було захоплюючим місцем;

K_{20} — місцем призначення було незвідане місце;

K_{21} — наявне бажання найближчим часом знову відвідати місце призначення;

K_{22} — рекомендую місце призначення майбутнім туристам.

Крім цього, експертам буде запропоновано критерії оцінювання, де відповідь на питання, буде кількісні оцінки.

K_{23} — кількість витрачених коштів під час відвідування місця призначення?

K_{24} — кількість днів перебування у місці призначення.

Для оцінювання рівня іміджу місця призначення експерту потрібно, на основі власного досвіду, вибрати варіант відповіді на питання по запропонованих критеріях оцінювання з множини лінгвістичних змінних T . Системний аналітик завжди може додати інші показники при новому оцінюванні учасників туристичного руху, оскільки наведена множина критеріїв є відкритою, а модель не залежить від їх кількості.

В результаті після відвідування деякого регіону R , вхідні експертні дані будуть наступні, таблиця 1:

Таблиця 1.

Вхідні експертні дані

Назва критерію	R_1		...	R_n			
	e_1	e_2		e_i	...	e_{m-1}	e_m
K_1	T_{111}	T_{121}	...	T_{1in}	...	$T_{1(m-1)n}$	T_{1mn}
K_2	T_{211}	T_{221}	...	T_{2in}	...	$T_{2(m-1)n}$	T_{2mn}
...
K_{l-2}	$T_{(l-2)11}$	$T_{(l-2)21}$...	$T_{(l-2)in}$...	$T_{(l-2)(m-1)n}$	$T_{(l-2)mn}$
K_{l-1}	α_{111}	α_{121}	...	α_{1in}	...	$\alpha_{1(m-1)n}$	α_{1mn}
K_l	α_{211}	α_{221}	...	α_{2in}	...	$\alpha_{2(m-1)n}$	α_{2mn}

де T_{fij} — змінна з терм-множини T за f -м критерієм, для i -го експерта у j -му регіоні; α_{1ij} , α_{2ij} — кількісні оцінки для i -го експерта у j -му регіоні, $f = \overline{1, l}$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

Ця інформаційна модель дозволяє збирати дані від туристів та використовувати їх задоволеність для оцінки іміджу місця призначення.

Гібридна модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону.

Перший етап. Спочатку здійснюється перехід від лінгвістичних міркувань експертів по кожному критерію до однієї результуючої лінгвістичної оцінки. Для цього кожній лінгвістичній змінній присвоюється деяка кількісна оцінка t :

якщо T_1 — «Зовсім не погоджуюсь», тоді $t_1 = 1$;

якщо T_2 — «Не погоджуюсь», тоді $t_2 = 2$;

якщо T_3 — «Ні погоджуюсь, ні не погоджуюсь», тоді $t_3 = 3$;

якщо T_4 — «Погоджуюсь», тоді $t_4 = 4$;

якщо T_5 — «Цілком погоджуюсь», тоді $t_5 = 5$.

Чим більша задоволеність учасників туристичного руху щодо іміджу місця призначення, тим більше значення кількісної оцінки t .

Далі знаходиться результуюча терм оцінку по критеріях оцінювання, як су-

ма значень кількісних оцінок по відповідному експерту:

$$\Delta_{ij} = \sum_{f=1}^l t_{fij}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Для виведення результуючої терм оцінки пропонується наступна характеристична функція:

$$T_{ij}^* = \begin{cases} T_1^*, & \Delta_{ij} < 30, \\ T_2^*, & 30 \leq \Delta_{ij} < 60, \\ T_3^*, & 60 \leq \Delta_{ij} < 80, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}, \\ T_4^*, & 80 \leq \Delta_{ij} < 100, \\ T_5^*, & \Delta_{ij} \geq 100. \end{cases} \quad (3)$$

Звісно, у класичній теорії нечітких множин використовуються системи нечіткого логічного виводу для отримання результуючих термів. Також можна застосовувати і нечіткі логічні правила, по яких будуються бази знань. Це підходить для задач, коли є можливість застосувати методи навчання для різних комбінацій лінгвістичних змінних по критеріях. У нашому випадку, ми враховуємо сумарну задоволеність учасників туристичного руху, тому не маємо необхідності у конструюванні складних баз знань. А запропонований підхід дозволить швидко відтворити дослідження іншими зацікавленими особами для інших регіонів.

Існує залежність між витратами (критерій K_{23}) та задоволеності відвідування місця призначення. Таку залежність також потрібно враховувати для оцінювання рівня іміджу регіону. Для формалізації даної залежності використовується інтелектуальний аналіз знань та функції належності [1]. Наприклад, таку залежність виражаємо за допомогою гармонійного S-сплайну:

$$\mu_{1ij} = \begin{cases} 0, & \alpha_{1ij} < 1000; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha_{1ij} - 10000}{9000} \cdot \pi\right); & 1000 \leq \alpha_{1ij} \leq 10000; \\ 1, & \alpha_{1ij} > 10000. \end{cases} \quad (4)$$

Також, враховується кількість днів перебування (K_{24}). Чим довше триває подорож, тим глибше пізнається місцевість, а в результаті — оцінки експертів будуть близькі до істини. Для формалізації даної залежності застосовується квадратичний S-сплайн. Нехай в середньому тривалості подорожей складає від 2 до 10 днів, тоді:

$$\mu_{2ij} = \begin{cases} 0, & \alpha_{2ij} \leq 1; \\ 2\left(\frac{\alpha_{2ij} - 1}{10}\right)^2, & 1 < \alpha_{2ij} \leq 6; \\ 1 - 2\left(\frac{11 - \alpha_{2ij}}{10}\right)^2, & 6 < \alpha_{2ij} < 11; \\ 1, & \alpha_{2ij} \geq 11. \end{cases} \quad (5)$$

Далі потрібно результуючі терми T^* визначити на числовому проміжку. Оскільки обчислення відбувається у нормованому просторі оцінок, тоді числовий проміжок — $[0; 1]$. Так, як для розв'язуваної задачі всі експерти вважаються

рівноважними, тому розбиття проміжків беруться однакової величини: $T_1^* = [0; 0,2]$, $T_2^* = (0,2; 0,4]$, $T_3^* = (0,4; 0,6]$, $T_4^* = (0,6; 0,8]$, $T_5^* = (0,8; 1]$.

Залежність результуючої терм оцінки задоволеності учасників туристичного руху T^* та залежності між витратами μ_1 та кількості днів перебування μ_2 природно розглядати, як твердження функцій належності “значення x більше”. Це пояснюється логічним твердженням: якщо подорож тривала досить довго, витрачених коштів багато, а людина отримує розчарування з іміджу місця призначення, тоді вихідна оцінка буде прямувати до 0. Логічне виведення налаштовується за допомогою S -подібної функції належності.

Оскільки, значення залежностей між витратами μ_1 та кількістю днів перебування μ_2 відомо, а також відомо інтервали числових значень для T^* , тоді виражається залежність x із S -подібної функції належності по кожному експерту у відвідуваному регіоні для всіх отриманих результуючих термів T^* відповідно:

$$x_{1gij}^* = \begin{cases} \frac{1}{5} \sqrt{\frac{\mu_{gij}}{2}}, & 0 < \mu_{gij} < 0,5; \\ \frac{1}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{1-\mu_{gij}}{2}} \right), & 0,5 < \mu_{gij} < 1. \end{cases} \quad (6)$$

$$x_{2gij}^* = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{\mu_{gij}}{2}} + 1 \right), & 0 < \mu_{gij} < 0,5; \\ \frac{1}{5} \left(2 - \sqrt{\frac{1-\mu_{gij}}{2}} \right), & 0,5 < \mu_{gij} < 1. \end{cases} \quad (7)$$

$$x_{3gij}^* = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{\mu_{gij}}{2}} + 2 \right), & 0 < \mu_{gij} < 0,5; \\ \frac{1}{5} \left(3 - \sqrt{\frac{1-\mu_{gij}}{2}} \right), & 0,5 < \mu_{gij} < 1. \end{cases} \quad (8)$$

$$x_{4gij}^* = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{\mu_{gij}}{2}} + 3 \right), & 0 < \mu_{gij} < 0,5; \\ \frac{1}{5} \left(4 - \sqrt{\frac{1-\mu_{gij}}{2}} \right), & 0,5 < \mu_{gij} < 1. \end{cases} \quad (9)$$

$$x_{5gij}^* = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{\mu_{gij}}{2}} + 4 \right), & 0 < \mu_{gij} < 0,5; \\ 1 - \frac{1}{5} \sqrt{\frac{1-\mu_{gij}}{2}}, & 0,5 < \mu_{gij} < 1. \end{cases} \quad (10)$$

де $g = \{1; 2\}$; $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, а вибір формул (6)–(10) залежить від значення результуючих термів T_1^* ; T_2^* ; T_3^* ; T_4^* ; T_5^* відповідно.

Таким чином, у результаті фазифікації вхідних даних отримуються дві нормованої оцінки x_{1ij}^* та x_{2ij}^* . Для отримання однієї агрегованої оцінки рівня іміджу місця призначення окремо по експертах e_i пропонується застосувати багатовимірні функції належності в змісті інтелектуального аналізу знань [6]. Оскільки наявне моделювання невизначеностей виду «середнє значення» в двох вимірному просторі оцінок $[0; 1]$, тоді пропонується конусоподібну або пірамідальну функцію належності. Вони визначається тим, що коли значення прямує до максимальних величин, тоді результат прямує до 1. Наприклад пірамідальна функція належності в двовимірному просторі буде мати вигляд:

$$f_{ij} = \max \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} (|x_{1ij}^* - 1| + |x_{2ij}^* - 1|) \right); 0 \right\}, \quad (11)$$

де $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$, масштабування за координатами — $(2; 2)$, центр основи — $(1; 1)$.

Таким чином, отримується агрегована оцінка рівня іміджу місця призначення $f_{ij} \in [0; 1]$ окремо по експертах, що обумовлюють рівень місця призначення на основі задоволеності учасників, ґрунтуючись на інформаційній моделі критеріїв оцінювання рівня іміджу місця призначення.

Другий етап На другому етапі потрібно врахувати експертний рівень сталого розвитку регіону та здійснити дефазифікацію даних для одержання однієї вихідної агрегованої оцінки рівня іміджу місця призначення в межах регіону. Для цього виведеться одне узагальнене значення на основі значень агрегованих оцінок рівня іміджу місця призначення f_{ij} щодо міркувань експертів, кількості витраченого часу та коштів у досліджуваному регіоні R_j . Вважається, що всі експерти є рівноважними, тоді:

$$m_j = \frac{1}{m(R_j)} \sum_{i=1}^{m(R_j)} f_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де $m(R_j)$ — кількість експертів у регіоні R_j . Агрегована оцінка в межах регіону $m_j \in [0; 1]$, характеризує імідж місця призначення, який був оцінений реальним досвідом учасників туристичного руху враховуючи витрати та період перебування.

На наступному кроці особи, що приймають подальші управлінські рішення щодо сценаріїв підтримки регіонального туризму висловлюють висновки щодо сталого розвитку регіону. Такий висновок має лінгвістичну природу $EV = \{EV_1; EV_2; \dots; EV_5\}$, де:

- EV_1 — високий рівень сталого розвитку регіону;
- EV_2 — рівень сталого розвитку регіону вище середнього;
- EV_3 — середній рівень сталого розвитку регіону;
- EV_4 — низький рівень сталого розвитку регіону;
- EV_5 — дуже низький рівень сталого розвитку регіону.

Отримання даного висновку — це складна багатофакторна задача, яка має враховувати концепцію сталого розвитку досліджуваного регіону, складові концепції сталого розвитку (економічна, соціальна, екологічна, їх узгодження), індикатори сталого розвитку та інші фактори. Такі висновки можуть давати тільки фахівці конкретного досліджуваного регіону.

Далі враховується експертний висновок рівня сталого розвитку регіону EV для оцінки рівня іміджу місця призначення M_H . Для цього, вихідні оцінки m_j та експертний висновок об'єднуються за допомогою наступної функції належності:

$$M_H(m_j) = \begin{cases} 0, & m_j < 0; \\ (m_j)^k, & 0 < m_j < 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ 1, & m_j \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

де k — степінь, що залежить від експертного висновку EV . Експериментально пропонується наступні значення порогу: $k = \frac{2}{5}$ для EV_1 ; $k = \frac{4}{5}$ — EV_2 ; $k = 1$ — EV_3 ; $k = \frac{8}{5}$ — EV_4 ; $k = \frac{11}{2}$ — EV_5 .

Таким чином, отримується $M_H(m_j) \in [0; 1]$ оцінка рівня іміджу місця призначення на основі задоволеності учасників туристичного руху та сталого розвитку регіонів.

Для визначення лінгвістичного рівня іміджу місця призначення відповідного регіону (L_H) отримане значення за формулою (13) зіставляється до одної з змінної терм-множин $L = \{il_1, il_2, \dots, il_5\}$ покладаючи наступний зміст рівня іміджу місця призначення:

$M_H \in (0,8; 1]$ — $il_1 =$ «високий»;

$M_H \in (0,6; 0,8]$ — $il_2 =$ «вище середнього»;

$M_H \in (0,4; 0,6]$ — $il_3 =$ «середній»;

$M_H \in (0,2; 0,4]$ — $il_4 =$ «низький»;

$M_H \in [0; 0,2]$ — $il_5 =$ «дуже низький».

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розроблено гібридну модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону на основі залежності між витратами, кількістю днів перебування та задоволеності учасників туристичного руху, а також враховуючи рівень сталого розвитку регіонів. Для цього: розроблено інформаційну модель критеріїв оцінювання рівня іміджу місця призначення, через призму здорового та безпечного довкілля; розроблено гібридну модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону.

В дослідженні використано адекватний апарат нечітких множин, нечітке логічне виведення, багатовимірні функції належності, інтелектуальний аналіз знань та системний аналіз, що уможлиблює підвищити ступінь обґрунтованості управлінських рішень щодо майбутніх сценаріїв. Особливістю дослідження є те, що воно враховує експертні оцінки учасників туристичного руху щодо відвідування місця призначення через призму здорового та безпечного довкілля; враховується залежність між витратами, кількістю днів перебування та задоволеності відвідування місця призначення; включає експертні висновки рівня сталого розвитку регіонів, як показник між задоволенням сучасних потреб туристичного руху та захистом інтересів майбутніх поколінь через призму здорового та безпечного довкілля. На основі вихідних оцінок підвищується ступінь обґрунтованості рішень щодо розробки майбутніх сценаріїв для інноваційного розвитку туристичної галузі у контексті сталого розвитку регіону.

При цьому вперше розроблено гібридну модель оцінювання рівня іміджу місця призначення в контексті сталого розвитку регіону, на основі задоволеності учасників туристичного руху. Модель складається з двох етапів. На першому етапі здійснюється фазифікація вхідних даних, що представляє собою, як лінгвістичні висновки, так і кількісні оцінки. Після цього отримується одна нормована оцінка рівня іміджу місця призначення у розрізі експертів. На другому етапі враховується експертний рівень сталого розвитку регіону та здійснюється дефазифікація даних для одержання однієї агрегованої оцінки рівня іміджу місця призначення в межах регіону. На основі агрегованої оцінки визначається лінгвістичний рівень іміджу місця призначення.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо у апробації дослідження на даних відгуків учасників туристичного руху та конструюванні програмного забезпечення, як складової цифрової трансформації туристичної галузі. Таке програмне забезпечення буде корисним для аналізу регіонів, як для бізнесу з метою

інвестування, так і з боку держави, для розвитку та підтримки регіонів.

Список використаної літератури

1. Polishchuk V., Kelemen M., Włoch I., Polishchuk A., Sharkadi M., Mlavets Yu. Conceptual Model of Presentation of Fuzzy Knowledge. *Proceedings of II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions": X International School-Seminar "Decision Making Theory". CEUR Workshop Proceedings*. Kyiv-Uzhhorod, 28–30 September, 2021. P. 1–12. URL: http://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_1.pdf (date of access: 15.08.2023).
2. Andria J., di Tollo G., Pesenti R. Fuzzy multi-criteria decision-making: An entropy-based approach to assess tourism sustainability. *Tourism Economics*. 2021. Vol. 27, No. 1. P. 168–186. DOI: <https://doi.org/10.1177/1354816619885207>
3. Romao J., Neuts B. Territorial capital, smart tourism specialization and sustainable regional development: Experiences from Europe. *Habitat International*. 2017. Vol. 68. P. 64–74. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.habitatint.2017.04.006>
4. Constantin D. L., Mitrut C. Cultural tourism, sustainability and regional development: Experiences from Romania. *In Cultural Tourism and Sustainable Local Development*. 2016. P. 167–184.
5. Pai P. F., Hung K. C., Lin K. P. Tourism demand forecasting using novel hybrid system. *Expert Systems with applications*. 2014. Vol. 41, No. 8. P. 3691–3702. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.12.007>
6. Ocampo L., Ebisa J. A., Ombe J., Escoto M. G. Sustainable ecotourism indicators with fuzzy Delphi method – A Philippine perspective. *Ecological indicators*. 2018. Vol. 93. P. 874–888. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2018.05.060>
7. Mahdavi A., Niknejad M., Karami O. A fuzzy multi-criteria decision method for ecotourism development locating. *Caspian Journal of Environmental Sciences*. 2015. Vol. 13, No. 3. P. 221–236.
8. Ziyadin S., Borodin A., Streltsova E., Suiubayeva S., Pshembayeva D. Fuzzy logic approach in the modeling of sustainable tourism development management. *Polish Journal of management studies*. 2019. Vol. 19, No. 1. P. 492–504. DOI: <https://doi.org/10.17512/pjms.2019.19.1.37>
9. Jaderi F., Ibrahim Z. Z., Jaafarzadeh N., Abdullah R., Shamsudin M. N., Yavari A. R., Nabavi S. M. B. Methodology for modeling of city sustainable development based on fuzzy logic: a practical case. *Journal of Integrative Environmental Sciences*. 2014. Vol. 11, No. 1. P. 71–91. DOI: <https://doi.org/10.1080/1943815X.2014.889719>
10. Wullur M., Sutapa I. N. Measuring the tourist destination images based on service quality using fuzzy inference system. *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. Vol. 567, No. 1. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/567/1/012007>
11. Skare M., Gavurova B., Polishchuk V. A Fuzzy Multicriteria Model of Sustainable Tourism: Examples From the V4 Countries. *IEEE Transactions on Engineering Management*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEM.2023.3239519>

Polishchuk V. V., Bilak Yu. Yu., Shafar A. A., Shpak O. I. A hybrid mathematical model for evaluating the level of destination image in the context of sustainable development of the region.

Research has been carried out on the actual task of developing a hybrid model for evaluating the level of the image of the destination in the context of the sustainable development of the region.

The hybrid mathematical model takes into account the expert assessments of the participants of the tourist movement regarding visiting the destination through the prism of a healthy and safe environment; the dependence between expenses, the number of days of stay, and the satisfaction of visiting the destination is taken into account; includes expert conclusions on the level of sustainable development of regions, as an indicator between meeting the current needs of the tourist movement and protecting the interests of future generations through the prism of a healthy and safe environment. Based on initial assessments, the degree of validity of decisions regarding the development of future scenarios for the innovative development of the tourism industry in the context of sustainable development of the region increases. The research uses an adequate apparatus of fuzzy sets, fuzzy

logical derivation, multidimensional membership functions, intellectual analysis of knowledge, and system analysis, which makes it possible to increase the degree of reasonableness of management decisions regarding future scenarios.

At the same time, for the first time, a hybrid model was developed for evaluating the level of the image of the destination in the context of sustainable development of the region, based on the satisfaction of the participants of the tourist movement. The model consists of two stages. In the first stage, input data is fuzzification, which represents both linguistic conclusions and quantitative assessments. After that, one normalized assessment of the image level of the destination according to experts is obtained. At the second stage, the expert level of sustainable development of the region is taken into account and data defuzzification is carried out to obtain one aggregated assessment of the image level of the destination within the region. Based on the aggregated assessment, the linguistic level of the image of the destination is determined.

Keywords: hybrid model, decision-making, multi-criteria evaluation, fuzzy sets, digital transformation, sustainable development of regions.

References

1. Polishchuk, V., Kelemen, M., Włoch, I., Polishchuk, A., Sharkadi, M., & Mlavets, Yu. (2021). Conceptual Model of Presentation of Fuzzy Knowledge. *X International School-Seminar "Decision Making Theory". CEUR Workshop Proceedings*. Kyiv-Uzhhorod. Retrieved from http://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_1.pdf
2. Andria, J., di Tollo, G., & Pesenti, R. (2021). Fuzzy multi-criteria decision-making: An entropy-based approach to assess tourism sustainability. *Tourism Economics*, 27(1), 168–186. <https://doi.org/10.1177/1354816619885207>
3. Romao, J., & Neuts, B. (2017). Territorial capital, smart tourism specialization and sustainable regional development: Experiences from Europe. *Habitat International*, 68, 64–74. <https://doi.org/10.1016/j.habitatint.2017.04.006>
4. Constantin, D. L., & Mitrut, C. (2016). Cultural tourism, sustainability and regional development: Experiences from Romania. In *Cultural Tourism and Sustainable Local Development*, 167–184.
5. Pai, P. F., Hung, K. C., & Lin, K. P. (2014). Tourism demand forecasting using novel hybrid system. *Expert Systems with applications*, 41(8), 3691–3702. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.12.007>
6. Ocampo, L., Ebisa, J. A., Ombe, J., & Escoto, M. G. (2018). Sustainable ecotourism indicators with fuzzy Delphi method – A Philippine perspective. *Ecological indicators*, 93, 874–888. <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2018.05.060>
7. Mahdavi, A., Niknejad, M., & Karami, O. (2015). A fuzzy multi-criteria decision method for ecotourism development locating. *Caspian Journal of Environmental Sciences*, 13(3), 221–236.
8. Ziyadin, S., Borodin, A., Streltsova, E., Suiubayeva, S., & Pshembayeva, D. (2019). Fuzzy logic approach in the modeling of sustainable tourism development management. *Polish Journal of management studies*, 19(1), 492–504. <https://doi.org/10.17512/pjms.2019.19.1.37>
9. Jaderi, F., Ibrahim, Z. Z., Jaafarzadeh, N., Abdullah, R., Shamsudin, M. N., Yavari, A. R., & Nabavi, S. M. B. (2014). Methodology for modeling of city sustainable development based on fuzzy logic: a practical case. *Journal of Integrative Environmental Sciences*, 11(1), 71–91. <https://doi.org/10.1080/1943815X.2014.889719>
10. Wullur, M., & Sutapa, I. N. (2019). Measuring the tourist destination images based on service quality using fuzzy inference system. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 567(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/567/1/012007>
11. Skare, M., Gavurova, B., & Polishchuk, V. (2023). A Fuzzy Multicriteria Model of Sustainable Tourism: Examples From the V4 Countries. *IEEE Transactions on Engineering Management*. <https://doi.org/10.1109/TEM.2023.3239519>

Одержано 24.09.2023

УДК 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).155-162](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).155-162)Д. П. Сабов¹, М. М. Шаркаді², Т. Ш. Сабо³

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістр,

szabodora20@outlook.hu

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0176-8211>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук, доцент

marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант,

szabotibor11@outlook.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2505-3728>

ВИКОРИСТАННЯ НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ У ДОСЛІДЖЕННЯХ СЕЙСМОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ РЕГІОНУ

Землетруси здатні спричиняти масштабні руйнування та завдавати шкоди людському життю, тому це є предметом багатьох досліджень. Вчені та дослідники прагнуть покращити наше розуміння природи підземних поштовхів та пропонують різні методи передбачення їх початку та оцінки їх впливу.

Нечітке моделювання знаходить широке застосування в дослідженні землетрусів, охоплюючи передбачення землетрусів, оцінку небезпеки, аналіз ризику та розробку систем підтримки прийняття рішень. Нечіткі моделі здатні інтегрувати дані різного типу, такі як сейсмічні дані, геодезичні вимірювання та геологічні дані, щоб передбачити ймовірність і силу майбутніх землетрусів. Крім того, ці моделі можуть враховувати зміни в часі та просторі під час виникнення землетрусів, дозволяючи ідентифікувати регіони з високим ризиком і обчислювати потенційні збитки.

У статті запропоновано застосування підходу нечіткого моделювання в сейсмічних дослідженнях, а також використання нечіткої логіки в сейсмічному моделюванні для обробки неточних даних і врахування невизначеностей. Комбінації нечітких моделей з іншими обчислювальними методами та джерелами даних використані для підвищення точності та передбачуваності.

Ключові слова: нечітке моделювання, функція належності, землетрус, сейсмологічне явище.

1. Вступ. Понад 120 000 квадратних кілометрів, що еквівалентно приблизно 20% загальної території України, підпадають під класифікацію зон сейсмічного ризику. Ці території належать до зон, де можливі підземні поштовхи магнітудою від 6 до 9 балів за шкалою MSK-64. У цих сейсмічно небезпечних зонах проживає значна популяція – 10,9 мільйонів осіб, що становить приблизно 22% від загальної чисельності населення країни. [1] На Рис. 1 показано епіцентри землетрусів у Карпатському регіоні за період з 2019 по 2023 роки.

Закарпатська сейсмогенна зона вирізняється найвищою сейсмічністю в Карпатському регіоні [2], [3]. Тут зафіксовані локальні землетруси магнітудою до 7 балів за шкалою MSK.

2. Хімічні аспекти землетрусів та їхні впливи на екосистеми. Землетруси, властиві природні явища, відзначаються складною системою наслідків,

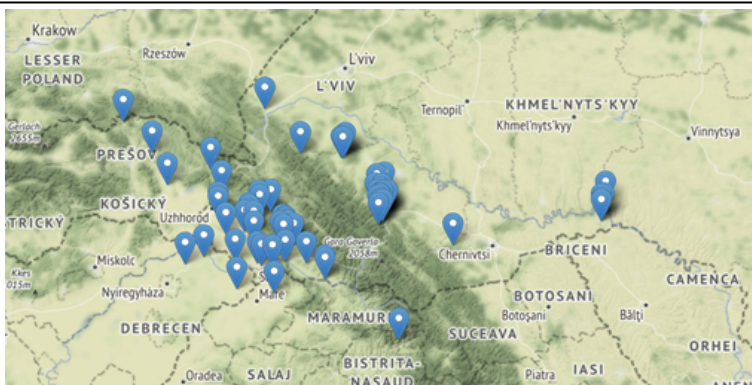


Рис. 1. Епіцентри землетрусів у Карпатському регіоні 2019-2023 рр.

які охоплюють не лише фізичні руйнування, але й ряд хімічних процесів, здатних істотно вплинути на навколишнє середовище та екосистеми. Під впливом землетрусів глибокі шари землі можуть вивільнювати різноманітні гази, включаючи метан та вуглекислий газ. Це може відбуватися через фізичний тиск та зміни температури, спричинені самим землетрусом. Вивільнення таких газів в атмосферу може призвести до змін у хімічному складі повітря в районі події. Зокрема, вуглекислий газ є одним з головних теплотримаючих парникових газів, і його велика кількість в атмосфері може сприяти глобальному потеплінню.

Підземні поштовхи також можуть викликати розчинення мінералів у ґрунті та воді під впливом тиску та змін температури. Це може призвести до змін у хімічному складі ґрунту та водних джерел. Ці зміни в хімічному складі можуть вплинути на рослинність та тваринний світ, оскільки деякі організми можуть бути чутливі до змін у концентрації різних хімічних речовин у навколишньому середовищі.

Ці хімічні аспекти землетрусів підкреслюють важливість вивчення і моніторингу хімічних процесів, які відбуваються під час сейсмічних подій, та розробки заходів для зменшення їхнього потенційного впливу на навколишнє середовище та екосистеми.

3. Постановка проблеми дослідження. Дослідження цього питання викликало необхідність первинної обробки сейсмічних даних. Спочатку було ретельно зібрано вичерпну копію даних про землетруси, що охоплюють період з 2019 року по поточний 2023 рік. Отриманий набір даних, що складається загалом із 71 рядка та 6 стовпців, точно документує важливі параметри, включаючи час початку, широту, довготу, магнітуду, глибину та місцезнаходження. Комплексний аналіз цієї інформації може дати кілька важливих висновків, таких як:

- Просторову дисперсію цих сейсмічних явищ можна визначити, вивчивши їх координати довготи та широти.
- Дослідження розподілу магнітуд дозволяє визначити частоту землетрусів для різних магнітуд.
- Ретельне дослідження розподілу по глибині може дати цінну інформацію про глибини, на яких відбуваються землетруси.
- Дослідження частоти землетрусів у часі дозволяє глибше зрозуміти часовий розподіл цих геологічних явищ.

На Рис. 2 показано розподіл землетрусів за глибиною та магнітудою.

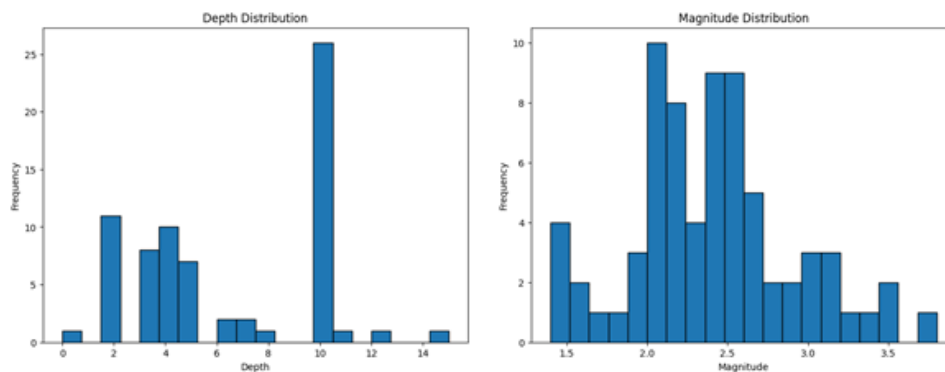


Рис. 2. а) розподіл землетрусів по глибині. б) розподіл магнітуди землетрусів.

Частота землетрусів у період 2019-2023 років наведена на Рис. 3.

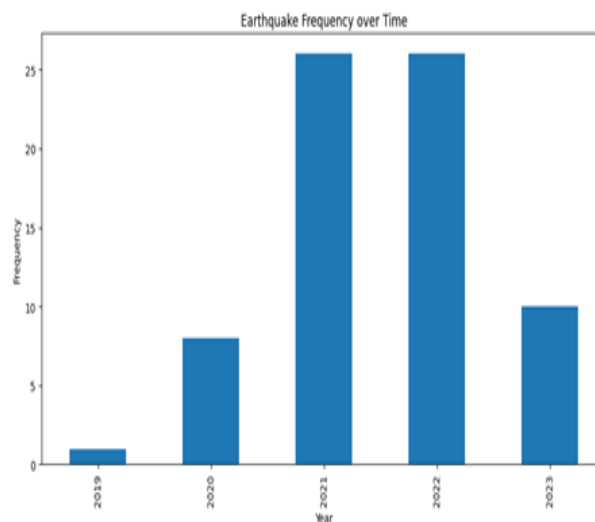


Рис. 3. Частота землетрусів з 2019 по 2023 червень.

Розробка моделей прийняття рішень для задач, що характеризуються низькою формалізацією та використанням експертної інформації, може бути досягнута шляхом використання теорії нечітких множин і створення нечітких логічних систем [4, 5, 6].

Це дослідження присвячене застосуванню нечіткої логіки як надійного підходу для оцінки пов'язаного ризику для кожної сейсмічної події, враховуючи як її величину, так і глибину. Фундаментальна концепція цього дослідження передбачає точне визначення функцій належності та правил, які базуються на експертних знаннях або заздалегідь визначених критеріях. Отриманий показник, який називається «Ризик», ретельно розраховується за допомогою складної системи нечіткого контролю. Крім того, для покращення розуміння розрахованих значень ризику використовується комплексний метод візуалізації з використанням діаграм розсіювання. Поєднання нечіткої логіки з візуалізацією сприяє

більш глибокому розумінню оцінки ризику землетрусів, роблячи суттєвий внесок у сферу сейсмологічних досліджень [7].

4. Результати дослідження. Нечітка логіка, розширення традиційної бінарної логіки, дозволяє обробляти та представляти дані, які є неоднозначними або невизначеними. Структура теорії нечітких множин використовує функції належності для класифікації лінгвістичних змінних на основі їхнього ступеня істинності, дозволяючи більш складний аналіз. Для формалізації знань, отриманих від експерта або групи експертів за допомогою нечітких множин, стає необхідною процедура створення відповідних функцій належності [8]. Ці процедури є ключовим етапом у проблемах прийняття рішень, оскільки якість прийнятих рішень залежить від того, наскільки точно сконструйована функція належності інкапсулює досвід експерта або експертів. Використання теорії нечітких множин для формалізації знань за своєю суттю представляє проблему вибору типу нечіткої множини для побудови функцій належності та відповідної нечіткої моделі, узгодженої з вибраним типом нечіткої множини [4, 5].

Запропоновано функції належності для глибини та магнітуди землетрусів для врахування внутрішньої невизначеності, пов'язаної з цими величинами.

Для змінної "магнітуда":

- Низька: трикутна функція належності з параметрами [0, 0, 4]

$$\mu_{low}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-0}{4-0}, \frac{4-x}{4-0} \right) \right);$$

- Середня: трикутна функція належності з параметрами [2, 5, 8]

$$\mu_{medium}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-2}{5-2}, \min \left(\frac{8-x}{8-5}, \frac{x-2}{8-2} \right) \right) \right);$$

- Висока: трикутна функція належності з параметрами [6, 10, 10]

$$\mu_{high}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-6}{10-6}, \frac{10-x}{10-6} \right) \right);$$

Для змінної "глибина":

- Неглибока: трикутна функція належності з параметрами [0, 0, 30]

$$\mu_{shallow}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-0}{30-0}, \frac{30-x}{30-0} \right) \right);$$

- Середня: трикутна функція належності з параметрами [20, 50, 80]

$$\mu_{medium}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-20}{50-20}, \min \left(\frac{80-x}{80-50}, \frac{x-20}{80-20} \right) \right) \right);$$

- Глибока: трикутна функція належності з параметрами [70, 100, 100]

$$\mu_{deep}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x-70}{100-70}, \frac{100-x}{100-70} \right) \right);$$

Для змінної "ризик":

– Низький: трикутна функція належності з параметрами [0, 0, 5]

$$\mu_{low}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x - 0}{5 - 0}, \frac{5 - x}{5 - 0} \right) \right);$$

– Середній: трикутна функція належності з параметрами [2, 5, 8]

$$\mu_{medium}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x - 2}{5 - 2}, \frac{8 - x}{8 - 5}, \frac{x - 2}{8 - 2} \right) \right);$$

– Високий: трикутна функція належності з параметрами [6, 10, 10]

$$\mu_{high}(x) = \max \left(0, \min \left(\frac{x - 6}{10 - 6}, \frac{10 - x}{10 - 6} \right) \right);$$

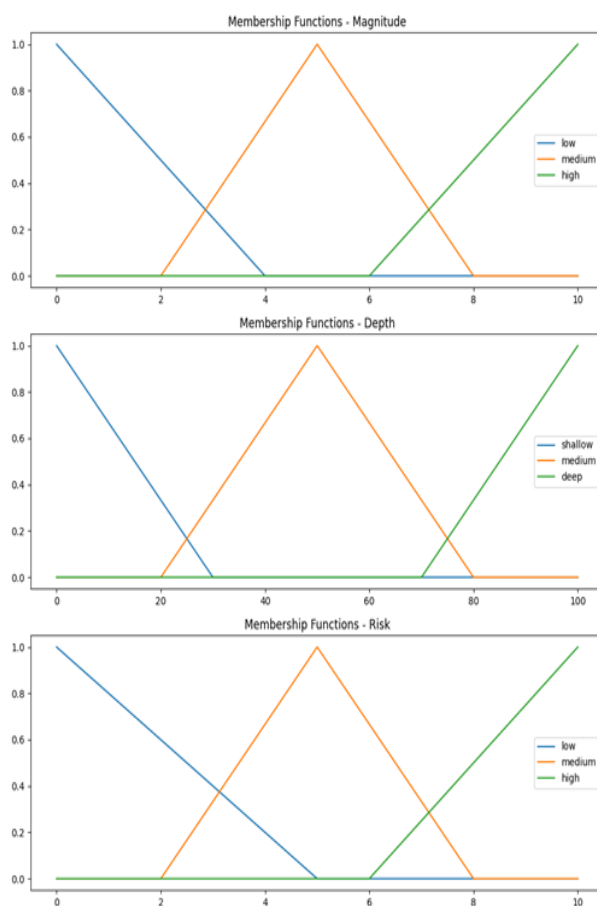


Рис. 4. Функції належності для а) магнітуди, б) глибини, в) ризику.

Для практичного застосування системи нечіткої логіки розроблено набір правил. Ці правила формалізують встановлені знання або заздалегідь визначені критерії, які регулюють зв'язок між глибиною землетрусу, магнітудою та ризиком. Процес оцінювання враховує нюанси та тонкощі, пов'язані з оцінкою ризику землетрусу шляхом застосування підходу, заснованого на нечітких правилах.

Виходом системи нечіткого керування є рівень ризику для кожного землетрусу позначений як «Ризик». Для підвищення зрозумілості та інтерпретації цих оцінок ризиків використовується техніка візуалізації діаграм розсіювання. Цей метод візуалізації, пропонуючи графічне представлення рівнів ризику, полегшує ідентифікацію закономірностей, тенденцій і областей, що викликають серйозне занепокоєння як для дослідників, так і для зацікавлених сторін.

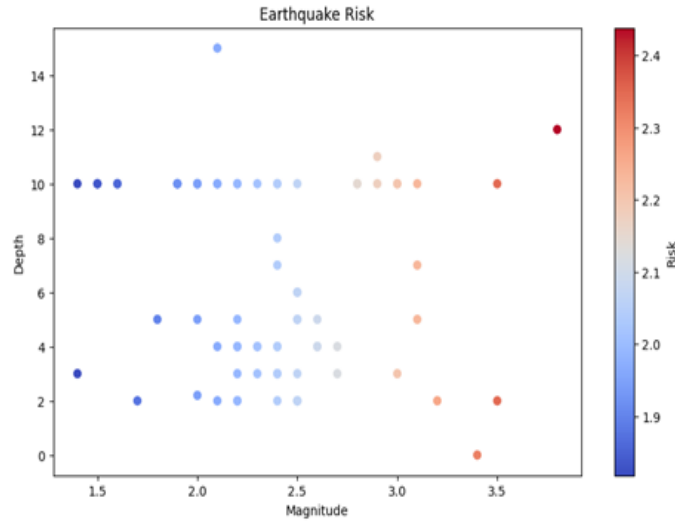


Рис. 5. Розрахунок ризику землетрусу.

Графік (рис. 8) представляє зв'язок між магнітудою, глибиною та рівнем ризику землетрусів у наборі даних за допомогою нечіткої логіки:

- Вісь X (магнітуда): Магнітуда — це міра енергії, вивільненої землетрусом, і зазвичай коливається від 0 до 10. Значення на осі X відповідають магнітуді кожного землетрусу в наборі даних.
- Вісь Y (глибина): вісь Y представляє глибину землетрусів. Глибина означає, наскільки глибоко відбувається землетрус у земній корі. Значення на осі ординат відповідають глибині кожного землетрусу в наборі даних.
- Колір (ризик): колір кожної точки на графіку відображає рівень ризику, пов'язаний із відповідною магнітудою та глибиною землетрусу. Кольорову шкалу вказує кольорова смуга в правій частині графіка. У цьому прикладі кольори варіюються від холодних (низький ризик) до теплих (високий ризик). Ви можете інтерпретувати рівень ризику на основі кольору кожної точки.

Після ретельного розгляду та вивчення стає зрозуміло, що сейсмічні події, які відбуваються на великих глибинах, неодмінно несуть вищий рівень ризику, особливо коли магнітуда перевищує 3,0. Нечітка логіка суттєво підтримує ідею про те, що землетруси з більш глибокими джерелами, як правило, мають більший потенціал для негативних результатів та небезпек [9].

Аналіз показує, що середньозважений рівень ризику становить 20,46231804428824. При більш детальному розгляді даних стає очевидним, що землетруси з найбільшим зваженим ризиком мають наступні атрибути: магнітуда 3,8, глибина 12,0, значення ризику 2,438034 і зважена міра ризику 24,380342.

Таблиця 1.

Рівень ризику землетрусів

Вид ризику	Сума землетрусів за ризиком	Відсоток землетрусів
<i>Низький</i>	29	59.15493
<i>Середній</i>	42	40.84507
<i>Високий</i>	0	0.00000

Ці результати підкреслюють важливість врахування цих сейсмічних явищ під час оцінки комплексної панорами ризику.

5. Висновки. Проведене дослідження покращує наше розуміння складної динаміки сейсмічних явищ і нашу здатність передбачати та усувати їх наслідки. Нечітке моделювання, що використовується в дослідженнях землетрусів, дозволяє точніше охопити притаманну складність цих подій шляхом включення елементів невизначеності та неточності. Це, у свою чергу, дозволяє покращити передбачення землетрусів, комплексну оцінку небезпеки та сформулювати ефективні стратегії для побудови стійких громад у сейсмонебезпечних регіонах. Цього можна досягти шляхом постійного вдосконалення методологій нечіткого моделювання та сприяння співпраці між експертами з різних галузей.

Майбутні шляхи розвитку цього дослідження охоплюють впровадження різноманітних форм функцій належності та дослідження того, як їхні параметри впливають на ефективність нечітких моделей у представленні невизначеностей, притаманних експериментальним даним.

Список використаної літератури

1. Chapman C. H. A new method for computing synthetic seismograms. *Geophysical Journal International*. 2004. Vol. 54, No. 3. P. 481–518.
2. Malytsky D. Seismicity of the Carpathian region. *International Journal of Physical Sciences*. 2006. Vol. 1, No. 2, P. 085–092.
3. Vahdat K., Smith N., Amiri G. Fuzzy multicriteria for developing a risk management system in seismically prone areas. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2014. Vol. 48. P. 235–248.
4. Мальяр М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород : ПА «АУТДОР-ШАРК», 2016. 222 с.
5. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems 100 Supplements*. 1999. P. 9–34.
6. Mendel J. M., John R. I., Liu F. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2006. Vol. 14, No. 6, P. 808–821.
7. Назаревич Л. Є., Назаревич А. В. Сейсмічність і деякі особливості сейсмотектоніки українських Карпат. *Геодинаміка*. 2006. Т. 14, № 6, С. 808–821.
8. Andalib A., Zare M., Atry F. A fuzzy expert system for earthquake prediction, case study : The Zagros range. In Proc. of the 3rd International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization. UAE, 2009. P. 1–4.
9. Кендзера О., Пронишин Р., Бень Я., Вербицький С. Сейсмічність і сейсмічна небезпека Карпатського регіону України. *Геодинаміка*. 1998. Т. 1/1998. С. 127–135.

Sabov D. P., Sharkadi M. M., Sabo T. S. Fuzzy models' use in the study of seismological processes in the region.

Due to the ability of earthquakes to cause large-scale destruction and damage to human life, earthquakes have always been the subject of research and concern. Scientists and

researchers are constantly striving to improve our understanding of earthquakes and offer pragmatic methods for predicting their onset and assessing their impact.

Fuzzy modeling is widely used in earthquake research, covering earthquake prediction, hazard assessment, risk analysis, and the design of decision support systems. Fuzzy models are able to integrate different data resources, such as seismic data, geodetic measurements, and geological data, to predict the probability and strength of future earthquakes. In addition, these models can take into account changes in time and space during the occurrence of earthquakes, allowing the identification of high-risk regions and the calculation of potential damage.

This paper proposes the application of the fuzzy modeling approach in seismic research, as well as the use of fuzzy sets and fuzzy logic in seismic modeling to process imprecise data and account for uncertainties. Combinations of fuzzy models with other computational methods and data sources are explored to improve their accuracy and predictability.

Keywords: fuzzy modeling, membership function, earthquake, seismological phenomenon.

References

1. Chapman, C. (2004). A new method for computing synthetic seismograms, *Geophysical Journal International*, 54, 481–518.
2. Malytsky, D. (2006). Seismicity of the Carpathian region. *International Journal of Physical Sciences*, 1(2), 085–092.
3. Vahdat, K., Smith, N., & Amiri, G. (2014). Fuzzy multicriteria for developing a risk management system in seismically prone areas. *Socio-Economic Planning Sciences*, 48, 235–248.
4. Malyar, M. (2016). *Modeli i metody bahatokryterialnoho obmezhenno-racionalnoho vyboru: Monohrafija* [Models and methods of multi-criteria bounded rational choice: Monograph]. Uzhhorod: RA "OUTDOOR-SHARK" [in Ukrainian].
5. Zadeh, L. (1999). Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems 100 Supplements*, 9–34.
6. Mendel, J., John, R., & Liu, F. (2006). Interval type-2 fuzzy logic systems made simple. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 14(6), 808–821.
7. Nazarevych, L., Nazarevych, A. (2012). Seismicity and some features of seismotectonics of the Ukrainian Carpathians. *Geodynamics*, 12, 145–151 [in Ukrainian].
8. Andalib, A., Zare, M., & Atry, F. (2009). A fuzzy expert system for earthquake prediction, case study: The Zagros range. *In Proc. of the 3rd International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*. UAE.
9. Kendzera, O., Pronyshyn, R. S., Ben, Y., & Verbytsky, S. (1998). Seysmichnist' i seysmichna nebezpeka Karpats'koho rehionu Ukrayiny [Seismicity and seismic hazard of the Carpathian region of Ukraine]. *Geodynamics*, 1/1998, 127–135 [in Ukrainian].

Одержано 15.09.2023

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moscow: Izdatel'svo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 43 №2

2023

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,
В. В. Маринець, К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса,
В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua