



*серія*

# **МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Том 44 № 1*

**2024**

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

# НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

*Том 44 № 1*

Ужгород 2024

УДК 51+001

**Науковий вісник Ужгородського університету.** Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2024. Т. 44, № 1. 186 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1)).

### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.ekon.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №3 від 20 травня 2024 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №7 від 28 травня 2024 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія KB №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2024

© Ужгородський національний університет,  
2024

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY  
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

# SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of  
MATHEMATICS AND INFORMATICS

*Volume 44 No 1*

Uzhhorod 2024

UDC 51+001

**Scientific Bulletin of Uzhhorod University.** Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2024. Vol. 44, No 1. 186 p.  
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1)).

## EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.). Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 3 of May 20, 2024) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 7 of May 28, 2024)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua).

# ЗМІСТ

## Розділ 1: Математика і статистика

1. Бондаренко В. М., Стъопочкіна М. В. Класифікація частково впорядкованих множин, ММ-тип яких дорівнює симетричній надсуперкритичній множині порядку 9 . . . . . 7
2. Колеснік О. В. Центральна гранична теорема та закон повторного логарифму для рекордів у  $\mathbf{F}^\alpha$  схемі . . . . . 15
3. Онисько В. З., Шепарович І. Б. Інтерполяційна задача Ньютона в класі мероморфних функцій із швидкозростаючими вузлами . . . . . 26
4. Порохнавець І. М., Шапочка І. В. Класифікація неізоморфних груп деякого класу черніковських 3-груп . . . . . 37
5. Юськович В. К. Про транзієнтність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками . . . . . 51

## Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. Вронський С. В., Андрашко Ю. В. Автоматизоване тестування як засіб оцінювання рівня знань здобувачів вищої освіти . . . . . 58
2. Глебена М. І., Макарович А. В. SingleStoreDB конектор для Apache Beam . . . 66
3. Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Маляр М. М., Млавець Ю. Ю. Напружено-деформований стан нестисливого півпростору з початковими напруженнями та захисним покриттям при дії рухомого навантаження . . . . . 83
4. Гнатієнко В. Г., Гнатієнко Г. М., Зозуля О. Л., Снитюк В. Є. Метод прогнозування врожайності сільськогосподарських культур з використанням мультифакторного аналізу та нейронних мереж . . . . . 93
5. Горват І. В., Кондрук Н. Е., Кондрук Є. Б., Нерода В. А. Сегментування країн Євросоюзу за фінансовою допомогою студентам . . . . . 106
6. Іллічева Л. М., Авдеева Т. В. Прогнозування часу та періодів очікування страхових випадків . . . . . 114
7. Кижина Є. Б. Метод поетапного розподілу соціальних послуг між виконавцями . . . 120
8. Кирилов С. О., Кирилова Л. О., Юрій Р. Ф. Застосування роевого та еволюційного алгоритму для вирішення дворівневих задач оптимізації . . . 128
9. Кондрук Н. Е., Зінченко М. О., Крічфалушій О. І., Пендлішак Т. В., Рябицька М. О. Сегментація ринку криптовалют за трендами вартості . . . . 138
10. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Еквациональні кластери булевих алгебр . . . . . 146
11. Поліщук І. В., Дурняк Б. В. Модель підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури . . . 155
12. Симонов Д. І., Заїка Б. Ю. Моделювання управління складними інформаційними багатокомпонентними системами . . . . . 168
13. Шаркаді М. М., Доровці А. Ф. Використання нечітких моделей у соціологічних дослідженнях . . . . . 175

# CONTENTS

## Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* Classification of the posets of  $MM$ -type being the symmetric oversupercritical poset of order 9 ..... 7
2. *Kolesnik O. V.* Central limit theorem of records and law of the iterated logarithm in an  $F^\alpha$  scheme ..... 15
3. *Onys'ko V. Z., Sheparovych I. B.* Newton's interpolation problem in the class of meromorphic functions with the fast-growing nodes ..... 26
4. *Porokhnavets I. M., Shapochka I. V.* Classification of non-isomorphic groups of a certain class of Chernikov 3-groups ..... 37
5. *Yuskovych V. K.* On transience of solutions of stochastic differential equations with jumps ..... 51

## Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. *Vronskyi S. V., Andrashko Yu. V.* Automated testing as a method of assessing the level of knowledge of higher education acquires ..... 58
2. *Hlebena M. I., Makarovych A. V.* SingleStoreDB connector for Apache Beam ..... 66
3. *Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Malyar M. M., Mlavets Yu. Yu.* Stress-strain state of incompressible half-space with initial stresses and protective coating under the action of a moving load ..... 83
4. *Hnatiienko V. H., Hnatiienko H. M., Zozulia O. L., Snytyuk V. Ye.* Method of forecasting yield of agricultural crops using multifactor analysis and neural networks ..... 93
5. *Horvat I. V., Kondruk N. E., Kondruk Y. B., Neroda V. A.* Segmentation of European Union countries by financial aid to students ..... 106
6. *Illicheva L. M., Avdeeva T. V.* Prediction of time and periods of waiting for insurance cases ..... 114
7. *Kykyna Y. B.* The method of staged distribution of social services among providers ..... 120
8. *Kyrylov S., Kyrylova L., Yuriy R.* Application of the swarm and evolutionary algorithm for solving two-level optimization problems ..... 128
9. *Kondruk N. E., Zinchenko M. O., Krichfalushii O. I., Pendlyshak T. V., Ryabytska M. O.* Segmentation Of The Cryptocurrency Market By Price Trends ..... 138
10. *Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.* Equational clusters of Boolean Algebras ..... 146
11. *Polishchuk I. V., Durnyak B. V.* Mathematical model of decision-making support regarding the suitability of financing in the development of tourist infrastructure ..... 155
12. *Symonov D. I., Zaika B. Y.* Modeling the management of complex information multicomponent systems ..... 168
13. *Sharkadi M. M., Dorovtsi A. F.* Fuzzy models' use in sociological researches ..... 175

УДК 512.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).7-14](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).7-14)**V. M. Bondarenko<sup>1</sup>, M. V. Styopochkina<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,  
 Leading researcher of the department of algebra and topology,  
 Doctor of physical and mathematical sciences  
[vitalij.bond@gmail.com](mailto:vitalij.bond@gmail.com)  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

<sup>2</sup> Polissia National University,  
 Associate professor of the department of higher and applied mathematics,  
 Candidate of physical and mathematical sciences  
[stmar@ukr.net](mailto:stmar@ukr.net)  
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

## CLASSIFICATION OF THE POSETS OF *MM*-TYPE BEING THE SYMMETRIC OVERSUPERCritical POSET OF ORDER 9

Representations of posets were introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter in 1972, and the first author was one of those who took an active part in the development of the relevant theory. The first criterion in it was the criterion on finiteness of the representation types obtained by M. M. Kleiner. In 1992 he proved that a poset  $S$  is of finite representation type if and only if it does not contain full subposets of the form  $K_1 = (1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  and  $K_5 = (N, 4)$ . These posets are called critical posets (relative to the finiteness of type) in the sense that they are minimal posets with an infinite number, up to equivalence, of indecomposable representations. Now they are called the Kleiner's posets. In 1974, Yu. A. Drozd proved that a poset  $S$  has finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) := z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors). Consequently, the Kleiner's posets are also critical relative to weak positivity of the Tits quadratic form. In 2005, the authors proved that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset.

A similar situation takes place for posets of tame representation type. In 1975, L. A. Nazarova proved that a poset  $S$  is tame if and only if it does not contain full subsets of the form  $N_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$  and  $(N, 5)$ . So these posets are critical relative to the tameness and she called them supercritical. They are also critical relative to weak non-negativity of the Tits quadratic form. In 2009, the authors proved that a poset is critical relative to non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset.

The first author suggested to introduce posets (called oversupercritical) which differ from the supercritical posets to the same extent as the supercritical posets differ from the critical ones.

In previous papers, the authors described all posets that are minimax isomorphic to any oversupercritical poset except  $(1, 4, 4)$  and studied some of their combinatorial properties. The case of the poset  $(1, 4, 4)$  is considered in this paper.

**Keywords:** representation, critical and supercritical poset, oversupercritical poset, Tits quadratic form, finite and tame representation type, positivity and weak positivity, non-negativity and weak non-negativity.

**1. Introduction.** Representations of posets were introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter [1], and Kyiv algebraists actively participated in development of

the relevant theory (see, e.g., [2] – [11]). The first criterion in it was the criterion on finiteness of the representation types obtained by M. M. Kleiner [2]. He proved that a posets  $S$  is of finite representation type if and only if it does not contain full subposets of the form  $K_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  and  $K_5 = (N, 4)$  (see below Remark 1). These posets are called critical posets (relative to the finiteness of type) in the sense that they are minimal posets with an infinite number, up to equivalence, of indecomposable representations. Now they are called the Kleiner's posets. On the other hand, Yu. A. Drozd [3] proved that a poset  $S$  has finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) := z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of nonnegative vectors). Consequently, the critical posets are also critical relative to the weak positivity of the Tits quadratic form. In [12] the authors proved that a poset is critical relative to the positivity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a Kleiner's poset (such isomorphism was introduced by the first author in [13]); in this paper all such posets are fully described (they are named by the authors as  $P$ -critical).

A similar situation takes place for posets of tame representation type. L. A. Nazarova [4] proved that a poset  $S$  is tame if and only if it does not contain full subsets of the form  $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$  and  $(N, 5)$  (see below Remark 1). So these posets are critical relative to the tameness and she called them supercritical. They are also critical relative to weak non-negativity of the Tits quadratic form. In [14] the authors proved that a poset is critical relative to non-negativity of the Tits quadratic form if and only if it is minimax isomorphic to a supercritical poset. In [15] all such posets are fully described (they are named by the authors as  $NP$ -critical).

The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are  $\mathbb{Z}$ -equivalent, and minimax isomorphism itself is a fairly general constructively defined  $\mathbb{Z}$ -equivalence for posets.

In [16] were introduced *1-oversupercritical posets* which differ from supercritical sets to the same extent as the latter differ from critical ones; often, including in this paper, they are simply called *oversupercritical*. Such posets are exhausted (up to isomorphism) by the following:

- 1)  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , 2)  $(1, 1, 1, 1, 2)$ , 3)  $(1, 1, 2, 2)$ , 4)  $(1, 1, 1, 3)$ ,
- 5)  $(2, 3, 3)$ , 6)  $(2, 2, 4)$ , 7)  $(1, 4, 4)$ , 8)  $(1, 3, 5)$ , 9)  $(1, 2, 7)$ , 10)  $(N, 6)$ .

**Remark 1.** For posets  $X, Y$ ,  $Z = (X, Y)$  is denoted their direct sum, i.e.,  $Z = X \cup Y$  and any elements  $x \in X$  and  $y \in Y$  are incomparable;  $(m)$  denotes the linearly ordered set  $1 < 2 < \dots < m$  and  $N$  the poset  $1 < 2, 3 < 4, 1 < 4$ . These notations are used as a rule when the posets are specified by their Hasse diagrams.

In previous papers [16] – [19], the authors described all posets that are minimax isomorphic to a oversupercritical poset, except the single asymmetric one of order greater than 8 (i.e.,  $(1, 4, 4)$ ) and studied some of their combinatorial properties. The case of the poset  $(1, 4, 4)$  is considered in this paper.

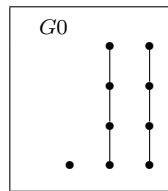
**2. The main result.** We consider only finite posets and identify them with their Hasse diagrams.

For a poset  $S$  and its minimal (respectively maximal) element  $a$ , we denote by  $T = S_a^\uparrow$  (respectively  $T = S_a^\downarrow$ ) the following poset:  $T = S$  as usual sets,  $T \setminus a = S \setminus a$  as posets, the element  $a$  is maximal (respectively minimal) in  $T$ , and  $a$  is comparable with  $x$  in  $T$  if and only if they are incomparable in  $S$ . Two posets  $S$  and  $T$  are called (min, max)-*equivalent* if there are posets  $S_1, \dots, S_p$  ( $p \geq 0$ ) such that, if we put  $S = S_0$  and  $T = S_{p+1}$ , then, for every  $i = 0, 1, \dots, p$ , either  $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$  or  $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$  [13]. Obviously, any poset is (min, max)-equivalent to itself (if one put  $p = 0$ ). Since some time we also use the term *minimax equivalence*.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of *minimax isomorphism*: posets  $S$  and  $S'$  are minimax isomorphic if there exists a poset  $T$  which is minimax equivalent to  $S$  and isomorphic to  $S'$ .

Let  $P$  be a fix poset. A poset  $S$  is called of *MM-type  $P$*  if  $S$  is minimax isomorphic to  $P$  [20]. In the case when the poset  $P$  is an oversupercritical one we say that  $S$  is of *oversupercritical MM-type*.

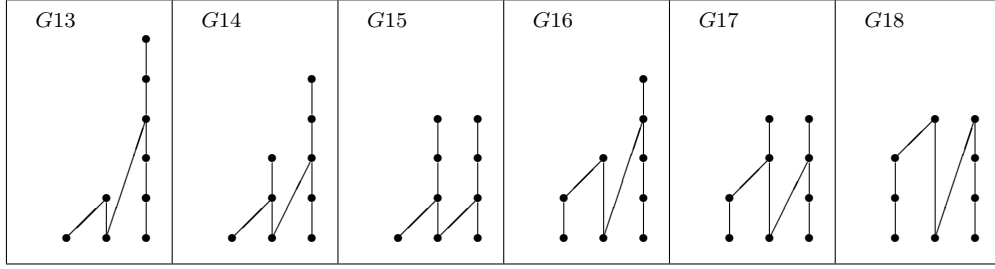
The main result of this paper describes all posets of oversupercritical *MM-type  $P$*  with  $P$  to be the oversupercritical poset of order 9, i.e.,  $P$  is equal to  $G_0 = (1, 4, 4)$ :



Recall that a poset  $T$  is called *dual* to a poset  $S$  and is denoted by  $S^{\text{op}}$  if  $T = S$  as usual sets and  $x < y$  in  $T$  if and only if  $x > y$  in  $S$ .

**Theorem 1.** *Up to isomorphism and duality, the complete set of posets minimax isomorphic to  $G_0$  consists of, in addition to  $G_0$  itself, the posets indicated in the following table:*

|       |       |       |          |          |          |
|-------|-------|-------|----------|----------|----------|
| $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$    | $G_5$    | $G_6$    |
|       |       |       |          |          |          |
| $G_7$ | $G_8$ | $G_9$ | $G_{10}$ | $G_{11}$ | $G_{12}$ |
|       |       |       |          |          |          |



**3. Proof of Theorem 1.** The definition of posets of the form  $T = S_a^\uparrow$  can be extended to posets of the form  $T = S_A^\uparrow$ , where  $A$  is a lower subposet of  $S$ , i.e.,  $x \in A$  whenever  $x < y$  and  $y \in A$ . Namely,  $T = S_A^\uparrow$  is defined as follows:  $T = S$  as usual sets, partial orders on  $A$  and  $S \setminus A$  are the same as before, but comparability and incomparability between elements of  $x \in A$  and  $y \in S \setminus A$  are interchanged and the new comparability can only be of the form  $x > y$ . In the special case, when  $A = \{a\}$  is a one-element subposet, we identify  $A$  with  $a$ . Instead of  $(S_A^\uparrow)^\uparrow_B$  write  $S_{AB}^{\uparrow\uparrow}$ .

For subposets  $X, Y$  of  $S$  of a poset  $S$ ,  $X < Y$  means that  $x < y$  for any  $x \in X, y \in Y$ . Subposets  $X$  and  $X'$  of  $S$  are called *strongly isomorphic* if there exists an automorphism  $\varphi : S \rightarrow S$  such that  $\varphi(X) = X'$  (as equality of subposets). Similarly, pairs  $(Y, X)$  and  $(Y', X')$  of subposets of  $S$  are called *strongly isomorphic* if there exists an automorphism  $\varphi : S \rightarrow S$  such that  $\varphi(Y) = Y'$  and  $\varphi(X) = X'$ .

In [12], the authors propose the following algorithm for finding (up to isomorphism) all posets that are minimax isomorphic to a given one.

**I.** Describe, up to strongly isomorphic, all lower subposets of  $P \neq S$  in  $S$ , and, for every of them, build the poset  $S_P^\uparrow$  ( $P = \emptyset$  is not excluded).

**II.** Describe, up to strongly isomorphic, all pairs  $(Q, P)$  consisting of a proper lower subposet  $Q$  in  $S$  and a nonempty lower subposet  $P$  in  $Q$  such that  $P < S \setminus Q$ ; for every such pair, build the poset  $S_{QP}^{\uparrow\uparrow}$ .

**III.** Among the posets obtained in I and II, choose one from each class of isomorphic posets.

For the poset  $G_0$ , we denote the partial order by  $\prec$  and number the points with numbers  $1, 2, 3, \dots$  in such a way that  $i < j$  whenever  $i \prec j$  or  $i$  is (in the picture) to the left of  $j$ . Then the poset  $G_0$  consists of the numbers  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  and we have  $2 \prec 3 \prec 4 \prec 5, 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9$ .

Now we apply our algorithm to the proof of the theorem.

**Step I.** Describe (up to strongly isomorphic) all lower subposets. They are:

for  $G_0$  —  $X_0 = \emptyset$ ,  $X_1 = \{1\}$ ,  $X_2 = \{2\}$ ,  $X_3 = \{1, 2\}$ ,  $X_4 = \{2, 3\}$ ,  $X_5 = \{2, 6\}$ ,  $X_6 = \{1, 2, 3\}$ ,  $X_7 = \{1, 2, 6\}$ ,  $X_8 = \{2, 3, 4\}$ ,  $X_9 = \{2, 3, 6\}$ ,  $X_{10} = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $X_{11} = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $X_{12} = \{2, 3, 4, 5\}$ ,  $X_{13} = \{2, 3, 4, 6\}$ ,  $X_{14} = \{2, 3, 6, 7\}$ ,  $X_{15} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $X_{16} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ,  $X_{17} = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ ,  $X_{18} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $X_{19} = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ ,  $X_{20} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $X_{21} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ ,  $X_{22} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $X_{23} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ,  $X_{24} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $X_{25} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ,  $X_{26} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $X_{27} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $X_{28} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ .

Denote by  $K_i$  the poset  $G_0^{\uparrow}_{X_i}$ . Then it is easy to see that

$K_0 \cong G_0$ ,  $K_1 \cong G_7$ ,  $K_2 \cong G_{12}$ ,  $K_3 \cong G_6^{\text{op}}$ ,  $K_4 \cong G_{10}$ ,  $K_5 \cong G_{18}$ ,  $K_6 \cong G_5^{\text{op}}$ ,  $K_7 \cong G_{15}^{\text{op}}$ ,  $K_8 \cong G_8$ ,  $K_9 \cong G_{16}$ ,  $K_{10} \cong G_4^{\text{op}}$ ,  $K_{11} \cong G_{14}^{\text{op}}$ ,  $K_{12} \cong G_1$ ,  $K_{13} \cong$

$G_{13}, K_{14} \cong G_{17}, K_{15} \cong G_{10}^{\text{op}}, K_{16} \cong G_{13}^{\text{op}}, K_{17} \cong G_{17}^{\text{op}}, K_{18} \cong G_4, K_{19} \cong G_{14}, K_{20} \cong G_8^{\text{op}}, K_{21} \cong G_{16}^{\text{op}}, K_{22} \cong G_5, K_{23} \cong G_{15}, K_{24} \cong G_{10}^{\text{op}}, K_{25} \cong G_{18}^{\text{op}}, K_{26} \cong G_6, K_{27} \cong G_{12}^{\text{op}}, K_{28} \cong G_7^{\text{op}}.$

**Step II.** Describe (up to strongly isomorphic) all pairs of lower subposets (see the algorithm). They are:

for  $G_0$  —  $X'_1 = (X_{20}, \{6\}), X'_2 = (X_{24}, \{6\}), X'_3 = (X_{24}, \{6, 7\}), X'_4 = (X_{27}, \{6\}), X'_5 = (X_{27}, \{6, 7\}), X'_6 = (X_{27}, \{6, 7, 8\}).$

Denote by  $K'_i$  the poset  $(G_0^{\uparrow_V})^{\uparrow_W}$  and  $(V, W) = X'_j$ . Then it is easy to see that  $K'_1 \cong G_2^{\text{op}}, K'_2 \cong G_9^{\text{op}}, K'_3 \cong G_3, K'_4 \cong G_{11}, K'_5 \cong G_9, K'_6 \cong F_2.$

**Step III.** It is easy to verify that in I and II each of the posets  $G_i$ , indicated in the condition of the theorem, and dual to them (in the non-dual cases) occurs only once. And hence the theorem is proved.

**4. Coefficients of transitivity.** Let  $S$  be a (finite) poset and  $S_{<}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in S, x < y\}$ . If  $(x, y) \in S_{<}^2$  and there is no  $z$  satisfying  $x < z < y$ , then we say that  $x$  and  $y$  are *neighboring*. We put  $n_w = n_w(S) := |S_{<}^2|$  and denote by  $n_e = n_e(S)$  the number of pairs of neighboring elements. The ratio  $k_t = k_t(S)$  of the numbers  $n_w - n_e$  and  $n_w$  are called the *coefficient of transitiveness* of  $S$ ; if  $n_w = 0$  (then  $n_e = 0$ ), we assume  $k_t = 0$  (see [20]).

In this part of the paper we calculate  $k_t$  for the posets of *MM*-type to be  $G_0$ .

**Theorem 2.** *The following holds for posets  $G_i$ :*

| $N$   | $n_e$ | $n_w$ | $k_t$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $G_0$ | 6     | 12    | 0,5   |

| $N$   | $n_e$ | $n_w$ | $k_t$   | $N$      | $n_e$ | $n_w$ | $k_t$   | $N$      | $n_e$ | $n_w$ | $k_t$   |
|-------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|---------|----------|-------|-------|---------|
| $G_1$ | 8     | 32    | 0,75    | $G_7$    | 8     | 20    | 0,6     | $G_{13}$ | 8     | 20    | 0,6     |
| $G_2$ | 9     | 32    | 0,71875 | $G_8$    | 7     | 24    | 0,70833 | $G_{14}$ | 8     | 18    | 0,55556 |
| $G_3$ | 9     | 32    | 0,71875 | $G_9$    | 8     | 24    | 0,66667 | $G_{15}$ | 8     | 18    | 0,55556 |
| $G_4$ | 8     | 26    | 0,69231 | $G_{10}$ | 7     | 18    | 0,61111 | $G_{16}$ | 8     | 16    | 0,5     |
| $G_5$ | 8     | 22    | 0,63636 | $G_{11}$ | 8     | 18    | 0,55556 | $G_{17}$ | 8     | 16    | 0,5     |
| $G_6$ | 8     | 20    | 0,6     | $G_{12}$ | 7     | 14    | 0,5     | $G_{18}$ | 8     | 14    | 0,42857 |

*The transitivity coefficients are written out with an accuracy of five decimal places. The value is exact if and only if the number of decimal places is less than five, and two values equal to exactly five digits are equal at all.*

The proof is carried out by direct calculations using [21, Lemmas 1 -5].

Recall that the greatest length among the lengths of all linear ordered subsets of a poset  $S$  is called its *height*. An element of a poset is called *nodal*, if it is comparable with all the others elements. A subposet  $X$  of  $T$  is said to be *dense* if there is not  $x_1, x_2 \in X, y \in T \setminus X$  such that  $x_1 < y < x_2$ .

Note that a poset of *MM*-type  $G_0$  can have at most four nodal elements.

**Corollary 1.** *The coefficient  $k_t(S)$  of a poset  $S$  is the largest among all the posets of *MM*-type  $G_0$  if and only if  $S$  contains a dense subposet with four nodal elements.*

**5. Conclusions.** In this paper we describe the finite posets that are minimax isomorphic to the oversupercritical poset  $(1, 4, 4)$  which is a single symmetric one of the order 9. We also study combinatorial properties of these posets, namely calculate their transitivity coefficients.

Analogous results for the rest of the oversupercritical posets were obtained by the authors earlier.

The importance of studying minimax isomorphic posets is determined by the fact that their Tits quadratic forms are  $\mathbb{Z}$ -equivalent.

The obtained results (together with the corresponding research methods) can be used in the study of other classes of posets.

## References

1. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
2. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 32–41 [in Russian].
3. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkts. Anal. Prilozh.*, 8(3), 34–42 [in Russian].
4. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5), 963–991 [in Russian].
5. Bondarenko, V. M., Zavadskij, A. G., & Nazarova, L. A. (1979). On representations of tame partially ordered sets. *Representations and Quadratic Forms. Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR*, 75–105 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M. (1983). Exact partially ordered sets of infinite growth. *Linear Algebra and Representation Theory. Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR*, 68–85 [in Russian].
7. Bondarenko, V. M., Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1986). Representations of partially ordered sets with involution. *Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR, Preprint 86.80*, 24p. [in Russian].
8. Bondarenko, V. M. (1988). Bundles of semi-chains and their representations. *Inst. Math. Acad. Sci. Ukrain. SSR, Preprint 88.50*, 32p. [in Russian].
9. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1991) Tame partially ordered sets with involution. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 183, 149–159 [in Russian].
10. Bondarenko, V. M., & Zavadskij, A. G. (1991) Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth. *CSM Conf. Proc.*, 11, 67–88.
11. Zavadskij, A. G. (1991) Differentiation algorithm and classification of representations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 55(5), 1007–1048 [in Russian].
12. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2(3), 18–58 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, (1), 24–25.
14. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2008). (Min, max)-equivalence of posets and nonnegative Tits forms. *Ukr. Math. J.*, 60(9), 1349–1359.
15. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukr. Math. J.*, 61(5), 734–746.
16. Bondarenko, V. V., Bondarenko, V. M., Styopochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 22(2), 17–25 [in Russian].
17. Bondarenko, V. V., & Styopochkina, M. V. (2013). Non-primitive 1-oversupercritical partially ordered set and min-equivalence. *Scien. J. of NPU named after Dragomanov. Series 1. Phys.-Math. sciences*, 14, 55–61 [in Russian].
18. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2021). On posets of sixth order having over-

- supercritical MM-type. *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 38(1), 7–15.
19. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2023). Classification of the posets of minmax type which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order. *Math. methods and phys.-mech. fields*, 66(1-2), 1–11.
  20. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2018). On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod Univ. Series of Math. and Inform.*, 32(1), 50–53.
  21. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2023). Classification of the posets of minmax type which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order. *Math. Sci. (N.Y.)*, 274(5), 583–593.

**Бондаренко В. М., Стюпочкіна М. В.** Класифікація частково впорядкованих множин, MM-тип яких дорівнює симетричній надсуперкритичній множині порядку 9.

Зображення ч. в. множин (частково впорядкованих множин) над полем ввели Л. А. Назарова і А. В. Ройтер в 1972 р., і перший автор був одним із тих, хто брав активну участь у розвитку відповідної теорії. Першим критерієм у ній був отриманий М. М. Клейнером критерій скінченності зображувального типу. У 1992 р. він довів, що ч. в. множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вони не містять повних ч. в. підмножин вигляду  $K_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $K_2 = (2, 2, 2)$ ,  $K_3 = (1, 3, 3)$ ,  $K_4 = (1, 2, 5)$  і  $K_5 = (N, 4)$ . Ці ч. в. множин називаються критичними ч. в. множинами (щодо скінченності типу) в тому сенсі, що це мінімальні ч. в. множин з нескінченною кількістю нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності). Тепер їх також називають ч. в. множинами Клейнера. У 1974 р. Ю. А. Дрозд довів, що ч. в. множина  $S$  має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) := z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

є слабо додатною (тобто додатною на множині невід'ємних векторів). Отже, ч. в. множини Клейнера є також критичними щодо слабкої додатності квадратичної форми Тітса. У 2005 р. автори довели що ч. в. множин є критичною щодо додатності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона є мінімаксно ізоморфна деякій ч. в. множині Клейнера.

Подібну ситуацію маємо з ч. в. множинами ручного зображувального типу. У 1975 р. Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина  $S$  є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду  $N_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $N_2 = (1, 1, 1, 2)$ ,  $N_3 = (2, 2, 3)$ ,  $N_4 = (1, 3, 4)$ ,  $N_5 = (1, 2, 6)$  і  $(N, 5)$ . Отже, ці ч. в. множини є критичними щодо ручного зображувального типу і вона назвала їх суперкритичними; вони є також критичними щодо слабкої невід'ємності квадратичної форми Тітса. У 2009 році автори довели, що ч. в. множина є критичною щодо невід'ємності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно ізоморфна деякій суперкритичній ч. в. множині.

Перший автор запропонував ввести ч. в. множини (названі надсуперкритичними), які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин в тій же мірі, що суперкритичні відрізняються від критичних.

У попередніх статтях автори описали (з точністю до ізоморфізму) всі ч. в. множини, мінімаксно ізоморфні довільній надсуперкритичній множині, окрім (1,4,4), і вивчили деякі їхні комбінаторні властивості. У цій статті розглядається випадок ч. в. множини (1, 4, 4).

**Ключові слова:** зображення, критична та суперкритична ч. в. множина, надсуперкритична ч. в. множина, квадратична форма Тітса, скінченний і ручний зображувальний тип, додатність і слабка додатність, негативність і слабка негативність.

### Список використаної літератури

1. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 5–31.
2. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Т. 28. С. 32–41.
3. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, Вып. 3. С. 34–42.
4. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР. Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1975. Т. 39, Вып. 5. С. 963–991.
5. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Завадский А. Г. О представлениях ручных частично упорядоченных множеств. *Представления и квадратичные формы*. – Киев: Ин-т математики АН УССР. 1979. С. 75–105.
6. Бондаренко В. М. Точные частично упорядоченные множества бесконечного роста. *Линейная алгебра и теория представлений*. – Киев: Ин-т математики АН УССР. 1983. С. 68–85.
7. Бондаренко В. М., Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств с инволюцией. *Препр. Ин-т математики АН УССР*. 1986. 86.80. 24 с.
8. Бондаренко В. М. Связки полупростых множеств и их представления. *Препр. Ин-т математики АН УССР*. 1988. 88.60. 32 с.
9. Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В. Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией. *Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова*. 1990. Т. 183. С. 149–159.
10. Bondarenko V. M., Zavadskij A. G. Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth. *CSM Conf. Proc.* 1991. Vol. 11. P. 67–88.
11. Завадский А. Г. Алгоритм дифференцирования и классификация представлений. *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1991. Т. 55, вып. 5. С. 1007–1048.
12. Бондаренко В. М., Степochкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, вып. 3. С. 18–58.
13. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko Kyiv Nation. Univer. Math. Mechanics*. 2005. No. 1. P. 24–25.
14. Бондаренко В. М., Степochкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2008. Т. 60, № 9. С. 1157–1167.
15. Бондаренко В. М., Степochкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2009. Т. 61, № 5. С. 611–624.
16. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степochкина М. В., Червяков И. В. 1-надсуперкритические частично упорядоченные множества с тривиальной группой автоморфизмов и min-эквивалентность. *Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ.* 2011. Вип. 22, № 2. С. 17–25.
17. Бондаренко В. В., Степochкина М. В. Непрimitивное 1-надсуперкритическое частично упорядоченное множество и min-эквивалентность. *Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. Серія 1. фіз.-мат. науки*. 2013. № 14. С. 55–61.
18. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On posets of sixth order having oversupercritical MM-type. *Scien. Bull. of Uzhhorod University. Series of Math. and Inform.* 2021. Vol. 38, No. 1. P. 7–15.
19. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. Classification of the posets of minmax type which are symmetric oversupercritical posets of the eighth order. *Math. methods and phys.-mech. fields*. 2023. Vol. 66, No. 1-2. P. 1–11.
20. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On properties of posets of MM-type (1,3,5). *Scien. Bull. of Uzhhorod University. Series of Math. and Inform.* 2018. Vol. 32, No. 1. P. 50–63.
21. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On transitivity coefficients for minimal posets with non-positive quadratic Tits form. *Math. methods and phys.-mech. fields*. 2021. Vol. 64, No. 1. P. 5–14.

Одержано 16.04.2024

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).15-25](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).15-25)**О. В. Колеснік**

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

lxndr.kolesnik@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8243-6831>**ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ТА ЗАКОН  
ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМУ ДЛЯ РЕКОРДІВ У  $F^\alpha$  СХЕМІ**

У статті вивчається асимптотична поведінка кількості рекордів у так званій  $F^\alpha$ -схемі, яка узагальнює класичну постановку для незалежних однаково розподілених випадкових величин. Знайдені умови за яких асимптотичні теореми можна записати через накопичену інтенсивність. Показано структуру точної асимптотики. Розглянуто приклади, що підтверджують оптимальність результатів.

**Ключові слова:** незалежні випадкові величини,  $F^\alpha$ -схема, рекорди, кількість рекордів, центральна гранична теорема, закон повторного логарифму.

**1. Вступ.** Розглянемо послідовність  $\{X_k, k \geq 1\}$  незалежних випадкових величин, функції розподілу яких є неперервними. Тоді події типу  $\{X_i = X_j\}$  мають ймовірність 0, якщо  $i \neq j$ . Нехай  $L(1) = 1$ . Для  $n \geq 2$  означимо рекурентно випадкові величини

$$L(n) = \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}$$

вважаючи, що  $\inf \emptyset := +\infty$ . Члени послідовності  $L = \{L(n), n \geq 1\}$  називаються *моментами рекордів*, побудованими за  $\{X_k, k \geq 1\}$ . Означимо послідовність випадкових величин  $\mu = \{\mu(n), n \geq 1\}$ , задану співвідношенням

$$\mu(n) = \#\{k \geq 1 : L(k) \leq n\}, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Видно, що  $\mu(n)$  – це *кількість рекордів*, що трапились до моменту  $n$  включно.

В роботі [10] вперше було розглянуто так звану  $F^\alpha$ -схему, яка будується за заданої функції розподілу  $F$  та послідовності додатних чисел  $\{\alpha_k\}$ . Зрозуміло, що  $(F)^{\alpha_n}$  є функцією розподілу для кожного  $n \geq 1$ . Сукупність незалежних величин  $\{X_n\}$  називається  $F^\alpha$ -схемою, якщо  $\mathbf{P}(X_n < x) = (F(x))^{\alpha_n}$ . Якщо всі  $\alpha_n$  є рівними між собою, то  $F^\alpha$ -схема – це сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо ж не всі  $\alpha_n$  є рівними між собою, то  $F^\alpha$ -схема – це узагальнення класичного випадку.

При вивченні  $F^\alpha$ -схеми корисними є індикаторні випадкові величини

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_k \text{ є рекордом,} \\ 0, & \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

У роботі [7] доведено, що  $\{I_k, k \geq 1\}$  є незалежними випадковими величинами (див. також [1]), що дозволить застосовувати класичні граничні теореми.

Також відомі ймовірності, що рекорд відбувся. Вони мають значення

$$\mathbf{P}(I_k = 1) = p_k = \frac{\alpha_k}{A_k} = 1 - \frac{A_{k-1}}{A_k}, \quad (2)$$

де  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = \alpha_1$ ,  $A_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ ,  $k \geq 2$ .  $A_n$  називається накопиченою інтенсивністю до моменту  $n$ . Саме через неї часто можна виразити необхідні асимптотики, або й зовсім, задавати схему через поведінку або формулу  $A_n$ .

Оскільки  $I_k$  – випадкова величина Бернуллі, то

$$\mathbf{E}I_k = p_k, \quad \mathbf{D}I_k = p_k(1 - p_k).$$

Звідси, згідно з (1), випливає

$$\mu(n) = \sum_{k=1}^n I_k, \quad \mathbf{E}\mu(n) = \sum_{k=1}^n p_k, \quad \mathbf{D}\mu(n) = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k). \quad (3)$$

**Зауваження 1.** Якщо  $\mathbf{E}\mu(n)$  – обмежене, то за лемою Бореля-Кантеллі для подій  $\{I_k = 1\}$  будемо мати майже напевно скінчену кількість рекордів, і тоді не зможемо говорити про асимптотики. Тому надалі  $\mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \infty$ . Окрім того, найбільше інтересу має випадок, коли  $p_n \rightarrow 0$ . Саме він надалі буде розглядатися, хоча деякі результати цієї умови не вимагатимуть.

## 2. Асимптотики $\mathbf{E}\mu(n)$ та $\mathbf{D}\mu(n)$ .

**Лема 1.** Нехай  $1 \leq s < n$ . Тоді:

$$\ln \frac{A_n}{A_s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m$$

**Доведення.** Скориставшись рівностями (2) та рядом Меркатора для логарифма отримуємо

$$\begin{aligned} \ln \frac{A_n}{A_s} &= \ln \prod_{k=s+1}^n \frac{A_k}{A_{k-1}} = \ln \prod_{k=s+1}^n \frac{1}{1 - p_k} = \sum_{k=s+1}^n -\ln(1 - p_k) = \\ &= \sum_{k=s+1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(p_k)^m}{m} = |\text{всі члени ряду додатні}| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m \end{aligned}$$

□

**Лема 2.** Нехай  $t \geq 0$ ,  $1 \leq s < n$ . Тоді  $\left(\sum_{m=1}^0 := 0\right)$ :

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m < \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n \frac{(p_k)^{t+1}}{1 - p_k}.$$

**Доведення.** Із леми (1) випливає рівність

$$\ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m = \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m.$$

Тоді нижня оцінка є просто першим доданком суми праворуч.

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1} = \sum_{m=t+1}^{t+1} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m < \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m$$

А верхня є заміною знаменника на мінімальний за  $m$  та сумуванням прогресії.

$$\sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m < \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m = \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n \frac{(p_k)^{t+1}}{1-p_k}$$

□

**Лема 3.** Нехай  $p_n \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$\mathbf{D}\mu(n) \sim \mathbf{E}\mu(n).$$

**Доведення.** Для  $s < k \leq n$  маємо оцінки відношення сум  $(p_k)^2$  до сум  $p_k$ :

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\sum_{k=s+1}^n (p_k)^2}{\sum_{k=s+1}^n p_k} \leq \frac{\sup_{s < k \leq n} p_k \sum_{k=s+1}^n p_k}{\sum_{k=s+1}^n p_k} \leq \sup_{s < k} p_k; \\ 0 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=s+1}^n (p_k)^2}{\sum_{k=s+1}^n p_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=s+1}^n (p_k)^2}{\sum_{k=s+1}^n p_k} \leq \sup_{s < k} p_k; \\ 0 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2 - \sum_{k=1}^s (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n) - \sum_{k=1}^s p_k} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2 - \sum_{k=1}^s (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n) - \sum_{k=1}^s p_k} \leq \sup_{s < k} p_k. \end{aligned}$$

Поділимо чисельник і знаменник на  $\mathbf{E}\mu(n)$ , обрахуємо частково границі за  $n$ , де це можливо, у доданках під нижньою та верхньою границями. Оскільки  $\mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \infty$ , ми позбавились суми з межею  $s$ . Оцінкою для будь-якого  $s$  буде

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \leq \sup_{s < k} p_k.$$

За означенням верхньої границі, та враховуючи  $p_k \rightarrow 0$ , отримуємо при  $s \rightarrow \infty$

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} p_k = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0.$$

Тому відношення має нульову границю. Згідно з рівностями (3) отримаємо

$$\frac{\mathbf{D}\mu(n)}{\mathbf{E}\mu(n)} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)}{\mathbf{E}\mu(n)} = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n (p_k)^2}{\mathbf{E}\mu(n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

□

**Теорема 1.** Нехай  $t \geq 0, p_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

Якщо  $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} < \infty$ , то:

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m \rightarrow \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^{\infty} (p_k)^m \in (0, \infty), n \rightarrow \infty,$$

інакше:

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m \sim \frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1}, n \rightarrow \infty.$$

**Доведення.** З леми (2) для будь-якого  $s \geq 1$  маємо нерівності

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m < \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n \frac{(p_k)^{t+1}}{1-p_k}.$$

Оскільки  $p_n \rightarrow 0$  оцінивши верхню суму замінивши знаменник на мінімальний, подібно до доведення леми (3) отримуємо

$$\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1} < \ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m < \frac{1}{1 - \sup_{s < k} p_k} \cdot \frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1}.$$

Якщо  $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} < \infty$ , то різниця логарифму та сум обмежена зверху границею цього ряду на деяку константу, а враховуючи, що за лемою (1)

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m = \sum_{m=t+1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m,$$

то видно монотонне зростання послідовності за  $n$ . Отже, вона існує та дорівнює нескінченній сумі, при тому додатній, що доводить першу частину теореми.

Надалі  $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^{t+1} \rightarrow \infty$ . Поділивши, будемо мати

$$1 < \frac{\ln \frac{A_n}{A_s} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^m}{\frac{1}{t+1} \sum_{k=s+1}^n (p_k)^{t+1}} < \frac{1}{1 - \sup_{s < k} p_k};$$

$$1 < \frac{\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m - \left( \ln \frac{A_s}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^s (p_k)^m \right)}{\frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1} - \left( \frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^s (p_k)^{t+1} \right)} < \frac{1}{1 - \sup_{s < k} p_k}.$$

Поділивши чисельник та знаменник на  $\frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1} \rightarrow \infty$ , розглянемо нижню та верхню границі послідовності за  $n$ . Тоді, оскільки вирази в дужках від  $n$  не залежать, вони зникнуть і будемо мати

$$1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m}{\frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m}{\frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1}} \leq \frac{1}{1 - \sup_{s < k} p_k}$$

Тепер середня частина від  $s$  не залежить, і в силу довільності  $s$ , коли  $s \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{1 - \sup_{s < k} p_k} \rightarrow \frac{1}{1 - \limsup_{k \rightarrow \infty} p_k} = \frac{1}{1 - \lim_{k \rightarrow \infty} p_k} = |p_k \rightarrow 0| = 1.$$

Отже, маємо рівність нижньої та верхньої границь одиниці, тому

$$\ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{m=1}^t \frac{1}{m} \sum_{k=2}^n (p_k)^m \sim \frac{1}{t+1} \sum_{k=2}^n (p_k)^{t+1}, n \rightarrow \infty$$

□

**Наслідок 1.** Нехай  $p_n \rightarrow 0, A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$D\mu(n) \sim E\mu(n) \sim \ln A_n.$$

**Доведення.** Візьмемо у теоремі (1)  $t = 0$ . Якби було  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = E\mu(n) < \infty$ , то за першою частиною теореми  $\ln A_n \rightarrow const$ , але це не так, тому маємо виконання другої частини та еквівалентність

$$\ln \frac{A_n}{A_1} \sim \sum_{k=2}^n p_k \Rightarrow E\mu(n) \sim \ln A_n \text{ і за лемою (3) } \Rightarrow D\mu(n) \sim E\mu(n) \sim \ln A_n.$$

□

**Наслідок 2.** Нехай  $p_n \rightarrow 0, A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

Якщо  $\sum_{k=1}^{\infty} (p_k)^2 < \infty$ , то:

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - E\mu(n) \rightarrow const \in (0, \infty),$$

інакше:

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - E\mu(n) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (p_k)^2.$$

**Доведення.** Беремо у теоремі (1)  $t = 1$ , помітимо математичне сподівання.

□

Оскільки математичне сподівання та дисперсія приймають участь у граничних теоремах, то природно виникає питання, коли можна їх замінити на еквівалентності, а коли доведеться уточнювати асимптотику. Окрім того, маємо на меті використовувати саме накопичену інтенсивність  $A_n$  для асимптотичних виразів. Дисперсія найчастіше стоїть у знаменнику, тому для неї достатньо еквівалентності, то ж насправді залишається з'ясувати точну асимптотику для математичного сподівання.

Перед тим як перейти до граничних теорем, розглянемо декілька прикладів, які покажуть точні асимптотики.

**Приклад 1.** Нехай  $A_n = 1 + \lambda \ln n$ ,  $\lambda > 0$ , тоді

$$p_n = 1 - \frac{1 + \lambda \ln(n-1)}{1 + \lambda \ln n} = \frac{-\lambda \ln(1 - \frac{1}{n})}{1 + \lambda \ln n} = \frac{\lambda}{n(1 + \lambda \ln n)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right).$$

Помітимо, що ряд з  $p_n^2$  є збіжним. Тому за наслідком (2) маємо

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const} \in (0, \infty).$$

Тут  $\ln A_n = \ln(1 + \lambda \ln n)$ . Після спрощень та об'єднання констант буде

$$\ln \ln n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}.$$

**Приклад 2.** Нехай  $A_n = n^\tau$ ,  $\tau > 0$ , тоді

$$p_n = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^\tau = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\tau = \frac{\tau}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Знову, ряд з  $p_n^2$  є збіжним. Тому за наслідком (2) маємо

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const} \in (0, \infty).$$

Тут  $\ln A_n = \tau \ln n$ . Після спрощень та об'єднання констант буде

$$\tau \ln n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}.$$

**Приклад 3.** Нехай  $A_n = e^{n^\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ , тоді зробивши деякі технічні дії над рядами експоненти та біноміальним рядом можна отримати

$$p_n = \sum_{s=1}^{[1/(1-\beta)]} \frac{(-1)^{s-1} \beta^s}{s!} \frac{1}{n^{s(1-\beta)}} + O\left(\frac{1}{n^{([1/(1-\beta)]+1)(1-\beta)}}\right)$$

У сумі саме такі доданки, що ряд з залишкових членів збігається. Помітимо, що ряд з  $p_n^2$  є збіжним при  $0 < \beta < 1/2$  і за наслідком (2) у термінах  $\ln A_n$

$$0 < \beta < 1/2 : \quad \ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}.$$

Якщо для  $\beta \geq 1/2$  хочемо асимптотику збіжності саме до константи, доведеться окрім суми перших степенів віднімати наступні до степені  $t$ , поки не отримаємо збіжний ряд, що відбудеться при  $t = \left\lceil \frac{1}{1-\beta} \right\rceil$ .

Коли  $\frac{1}{1-\beta}$  — ціле число, буде виникати логарифм з асимптотики гармонічного ряду. А у проміжках присутні степені, які теж можна точно оцінити. Без технічних подробиць наведемо результати у термінах  $\ln A_n$ :

$$\begin{aligned}\beta = \frac{1}{2} : \quad & \ln A_n - \frac{1}{4} \ln \ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}; \\ \frac{1}{2} < \beta < \frac{2}{3} : \quad & \ln A_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta^2}{2\beta-1} \cdot (\ln A_n)^{\frac{2\beta-1}{\beta}} - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}; \\ \beta = \frac{2}{3} : \quad & \ln A_n - \frac{2}{3} \sqrt{\ln A_n} + \frac{2}{27} \ln \ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}.\end{aligned}$$

Дані приклади можна об'єднувати і написати асимптотику для

$$A_n = e^{n^\beta} n^\tau (1 + \lambda \ln n), \quad 0 \leq \beta < 1, \tau \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Результатом у найбільш точній формі, який додатково стартує з однакового з математичним сподіванням значенням, вважаючи, що  $\frac{n^0-1}{0} = \ln n$ ,  $\sum_{s=2}^1 = 0$ , коли таке виникає, буде

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \sum_{s=2}^{[1/(1-\beta)]} \frac{(-1)^s \beta^s}{s!} \cdot \frac{n^{1-s(1-\beta)} - 1}{1 - s(1-\beta)} - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow \text{const}, n \rightarrow \infty.$$

Тобто  $\tau, \lambda$  приховані всередині  $\ln A_n$ , окрім того навіть при  $\beta = 1$  отримується розумна асимптотика, але тоді це вже не випадок  $p_n \rightarrow 0$ . Правомірною постає гіпотеза щодо такого ж вигляду асимптотики для деякого коефіцієнту  $\beta$ , який можна було б означити, наприклад, як  $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln A_n}{\ln n}$ , але це питання ще потребує додаткових досліджень, і скоріше за все занурення у теорію монотонних правильно змінних функцій. Надалі сформулюємо результати для граничних теорем теорії ймовірностей, коли відсутня необхідність у доданках із суми та визначенні  $\beta$ .

**3. Центральна гранична теорема.** Покажемо спочатку доведення відомого результату для справжніх моментів суми незалежних випадкових величин, якими якраз є індикатори рекордів.

**Теорема 2.** Нехай  $D\mu(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$\frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{D\mu(n)}} \Rightarrow N(0, 1)$$

**Доведення.** З'ясуємо виконання ЦГТ для  $\mu(n)$ , перевіривши достатні умови у формі Ляпунова.

$$\exists \delta > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |I_k - p_k|^{2+\delta}}{\left(\sqrt{D\mu(n)}\right)^{2+\delta}} = 0$$

Візьмемо  $\delta = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{E} |I_k - p_k|^3}{(\mathbf{D}\mu(n))^{3/2}} &= \frac{\sum_{k=1}^n p_k^3(1-p_k) + (1-p_k)^3 p_k}{(\mathbf{D}\mu(n))^{3/2}} = \frac{\sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)(p_k^2 + (1-p_k)^2)}{(\mathbf{D}\mu(n))^{3/2}} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^n p_k(1-p_k)}{(\mathbf{D}\mu(n))^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}} \rightarrow 0, \text{ оскільки } \mathbf{D}\mu(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** Нехай  $p_n \rightarrow 0, A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k^2 &= o\left(\sqrt{\ln A_n}\right) \\ &\Updownarrow \\ \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n}} &\Rightarrow N(0, 1) \end{aligned}$$

**Доведення.** Із загальних умов теореми та наслідку (1) маємо

$$\mathbf{D}\mu(n) \sim \mathbf{E}\mu(n) \sim \ln A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Тому, із теореми (2) виконується ЦГТ у вигляді

$$\xi_n := \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}} \Rightarrow \xi \sim N(0, 1)$$

Враховуючи еквівалентність  $\mathbf{D}\mu(n) \sim \ln A_n$ , за теоремою Слуцького

$$\eta_n := \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n}} = \xi_n \frac{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n)}}{\sqrt{\ln A_n}} \Rightarrow \xi \cdot 1 \sim N(0, 1)$$

**Достатність.** Згідно наслідку (2) після спрощення констант

$$\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \rightarrow const \quad \text{або} \quad \ln A_n - \mathbf{E}\mu(n) \sim \sum_{k=1}^n p_k^2$$

В будь-якому разі з умови теореми випливає  $\Delta_n := (\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)) / \sqrt{\ln A_n} \rightarrow 0$ , звідки за теоремою Слуцького

$$\beta_n := \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n}} = \eta_n - \Delta_n \Rightarrow \xi - 0 \sim N(0, 1).$$

**Необхідність.** Будемо доводити від супротивного. Нехай виконується ЦГТ у вигляді  $\beta_n \Rightarrow N(0, 1)$ , але порушується перша умова, тобто

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 \neq o\left(\sqrt{\ln A_n}\right), \text{ звідки необхідно } \sum_{k=1}^n p_k^2 \rightarrow \infty.$$

Оскільки у цьому випадку, згідно наслідку (2) та з леми (2)

$$1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (p_k)^2 \quad \text{та} \quad 1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n) > \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n p_k > 0,$$

то порушення першої умови означає існування додатної (можливо нескінченної) верхньої границі

$$C := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \ln \frac{A_n}{A_1} - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \in (0, \infty]$$

Використаємо виконання ЦГТ у двох виглядах:  $\beta_n \Rightarrow N(0, 1)$ ,  $\eta_n \Rightarrow N(0, 1)$ , розглянувши їх на підпоследовності  $\{n_k, k \geq 1\}$ , де  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{n_k} = C$ . Враховуючи  $\beta_{n_k} + \Delta_{n_k} = \eta_{n_k}$ , за теоремою Слуцького для  $0 < C < \infty$  отримуємо суперечність з різними граничними розподілами

$$N(0, 1) + C \Leftarrow \beta_{n_k} + \Delta_{n_k} = \eta_{n_k} \Rightarrow N(0, 1).$$

Якщо  $C = \infty$ , поділимо рівність на  $\Delta_{n_k}$  і отримуємо суперечність

$$1 \Leftarrow \frac{\beta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} + 1 = \frac{\eta_{n_k}}{\Delta_{n_k}} \Rightarrow 0.$$

□

Слід зауважити, що розглянуті раніше приклади показують граничні випадки для виконання теореми. Оскільки теорема є двосторонньою, то асимптотика  $\ln A_n$  замість математичного сподівання вичерпується на таких випадках.

**4. Закон повторного логарифму.** Покажемо спочатку виконання ЗПЛ для справжніх моментів. Знову маємо випадок незалежних випадкових величин.

**Теорема 4.** Нехай  $\mathbf{D}\mu(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n) \ln \ln \mathbf{D}\mu(n)}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu(n) \ln \ln \mathbf{D}\mu(n)}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

**Доведення.** З'ясуємо виконання ЗПЛ для  $\mu(n)$ , перевіривши умови теореми Колмогорова для центрованих індикаторів  $I_k$ .

$$\exists \{M_n > 0, n \geq 1\} : M_n = o\left(\sqrt{\frac{\mathbf{D}\mu(n)}{\ln \ln \mathbf{D}\mu(n)}}\right), |I_k - p_k| \leq M_n.$$

Візьмемо  $M_n = 2$ . Оскільки  $\mathbf{D}\mu(n) \rightarrow \infty$ , то всі умови явно виконуються. □

**Теорема 5.** Нехай  $p_n \rightarrow 0, A_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ . Тоді:

$$\sum_{k=1}^n p_k^2 = o\left(\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.}$$

**Доведення.** Доведення достатності, враховуючи знання асимптотики різниці  $\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)$ , є прямим переходом до часткових границь під верхніми та нижніми границями, подібно до доведення ЦГТ, навіть без використання результатів по типу теореми Слуцького. Тому наведемо від супротивного доведення необхідності.

Нехай виконуються ЗПЛ для точних моментів за теоремою (4) та з асимптотичними замінами, але не виконується достатня умова. Тоді, будемо мати твердження

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \ln A_n}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, & \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.} \\ \Updownarrow & \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = -\sqrt{2} \text{ м.н.}, & \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = \sqrt{2} \text{ м.н.} \end{aligned}$$

І через порушення умови теореми маємо суперечність

$$\begin{aligned} (0, \infty] \ni \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A_n - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} + \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} \right) \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln A_n - \mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{\sqrt{\ln A_n \ln \ln A_n}} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \text{ м.н.} \end{aligned}$$

□

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У статті наведено загальні оцінки на точну асимптотику математичного сподівання рекордів у  $F^\alpha$ -схемі та критерій, коли асимптотика виражається максимально просто через накопичену інтенсивність у ЦГТ і ЗПЛ.

Із розглянутих прикладів видно, що можна означити деякий клас монотонних функцій, для яких можна знайти параметри для подальшого вдосконалення результатів, що й буде досліджуватися надалі.

Іншим напрямком може бути дослідження випадку  $p_n \rightarrow p > 0$ , але з попередніх досліджень ефекти випадку  $p_n \rightarrow 0$  знову будуть мати вирішальний вплив, просто навколо точки  $p > 0$ .

### Список використаної літератури

1. Borovkov K., Pfeifer D. On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference*. 1995. Vol. 45, No. 1–2. P. 65–79.
2. Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes. Berlin : Springer Verlag, 2018.
3. Doukhan P., Klesov O. I., Pakes A., Steinebach J. G. Limit theorems for record counts and times in the  $F^\alpha$ -scheme *Extremes*. 2013. Vol. 16, No. 2. P. 147–171.
4. Doukhan P., Klesov O. I., Steinebach J. G. Strong laws of large numbers in an  $F^\alpha$ -scheme *Mathematical Statistics and Limit Theorems : Festschrift in Honour of Paul Deheuvels*. Springer International Publishing : Switzerland, 2015. P. 287–303.
5. Gut A. Probability: A Graduate Course. Berlin : Springer-Verlag, 2005.
6. Klesov O. I. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Berlin : Springer Verlag, 2014.
7. Nevzorov V. B. On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*. 1985. Vol. 142. P. 109–118.
8. Nevzorov V. B. Records: Mathematical Theory. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.

9. Rényi A. A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations *Combinatorial Methods in Probability Theory*: Math. Inst. Aarhus Univ. Aarhus: Denmark, 1962. P. 10–117.
10. Yang M. On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 1975. Vol. 12. P. 148–154.

**Kolesnik O. V.** Central limit theorem of records and law of the iterated logarithm in an  $F^\alpha$  scheme.

The article studies the asymptotic behavior of the number of records in the so-called  $F^\alpha$ -scheme, which generalizes the classical statement for the independent identically distributed random variables. Found conditions under which asymptotic theorems can be written in terms of accumulated intensity. The structure of exact asymptotics is shown. Examples that confirm optimality of the results are considered.

**Keywords:** independent random variables,  $F^\alpha$  scheme, records, number of records, central limit theorem, law of the iterated logarithm.

## References

1. Borovkov, K., & Pfeifer D. (1995). On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 45(1–2), 65–79.
2. Buldygin, V. V., Indlekofer, K.-H., Klesov, O. I., & Steinebach, J. (2018). *Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes*. Berlin: Springer Verlag.
3. Doukhan, P., Klesov, O. I., Pakes, A., & Steinebach, J. G. (2013). Limit theorems for record counts and times in the  $F^\alpha$ -scheme *Extremes*, 16(2), 147–171.
4. Doukhan, P., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2015). Strong laws of large numbers in an  $F^\alpha$ -scheme, *Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels*. Springer International Publishing: Switzerland.
5. Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course*. Berlin: Springer-Verlag.
6. Klesov, O. I. (2014). *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables*. Berlin: Springer Verlag.
7. Nevzorov, V. B. (1985). On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*. 142, 109–118.
8. Nevzorov, V. B. (2001). *Records: Mathematical Theory*. Providence, RI: American Mathematical Society.
9. Rényi, A. A. (1962). Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations, *Combinatorial Methods in Probability Theory*. Math. Inst. Aarhus Univ. Aarhus: Denmark.
10. Yang, M. (1975). On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 12, 148–154.

Одержано 22.03.2024

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).26-36](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).26-36)**В. З. Онісько<sup>1</sup>, І. Б. Шепарович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка,  
аспірант кафедри математики та економіки  
[vitalii.onysko@dspu.edu.ua](mailto:vitalii.onysko@dspu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-8695-7242>

<sup>2</sup> Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка,  
доцент кафедри математики та економіки,  
кандидат фізико-математичних наук  
[i.sheparovych@dspu.edu.ua](mailto:i.sheparovych@dspu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0110-3864>

## ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ЗАДАЧА НЬЮТОНА В КЛАСІ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ ІЗ ШВИДКОЗРОСТАЮЧИМИ ВУЗЛАМИ

Нехай  $(\lambda_k)$  — послідовність різних комплексних чисел така, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$  і  $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| \leq \frac{1}{\Delta}$ ,  $\Delta > 1$ . У роботі отримано асимптотичну оцінку мероморфної функції, поданої у вигляді ряду раціональних дробів:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)}$$

де  $(a_k)$  — послідовність комплексних чисел така, що  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n} \leq C_1$ ,  $u \in (1, \Delta)$ . Також доведено, що мероморфну функцію, що має нулі в точках  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  та полюси в точках  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ , для якої зовні кругів  $U(u\lambda_k, \sigma) := \{|z - u\lambda_k| \leq \sigma\}$  ( $\sigma > 0$ ) виконується:

$$|F(z)| < C_1 \left( \frac{\Delta}{(\Delta - u)} + \frac{u - 1}{\Delta(u\Delta - 1)r} \right) \exp \left( \frac{u(u - 1)}{(\Delta - 1)(\Delta - u)} \right), \quad r = |z| > 1 \quad (C_1 > 0)$$

можна зобразити у вигляді вказаного функціонального ряду, де

$$a_k = \frac{\lambda_k(u - 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} F(\zeta) \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)} d\zeta, \quad \Gamma_k = \partial U(\zeta; R_k), \quad |\lambda_k| < R_k < |\lambda_{k+1}|.$$

**Ключові слова:** мероморфна функція, раціональні дробі, нулі, полюси.

**1. Вступ.** Інтерполяційна задача полягає в знаходженні умов, за яких у заданому класі існує функція  $f$ , яка в точках  $\lambda_k$  приймає значення  $d_k$ :  $f(\lambda_k) = d_k$ . Ця інтерполяційна задача з різних боків вивчалась в працях багатьох математиків (див. [1–11]). Одним з аспектів згаданої проблеми є питання про відновлення функції  $f$  за числами  $d_k$ . У деяких випадках таке відновлення можна здійснити за допомогою ряду Ньютона

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(z), \quad P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k).$$

Питання про розвинення цілих функцій в ряд Ньютонa досліджувалося в працях А. Гельфонда [3–5], І. Ібрагімова [10], С. Абдрашітової [2], Б. Винницького [7] та інших. Добре відомим [5: 193] є таке твердження.

**Теорема А.** Якщо  $q$  — деяке число,  $|q| > 1$ ,  $\lambda_k = q^{k-1}$ , то кожна ціла функція  $f$ , яка задовольняє умову

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \ln M_f(r) - \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} - \frac{\ln r}{2} \right) = -\infty,$$

розвивається в рівномірно збіжний в кожному крузі  $\{z : |z| \leq r\}$ ,  $0 < r < +\infty$ , ряд Ньютонa

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(z), \quad P_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k),$$

де  $\alpha_k := \alpha_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=r} \frac{f(t)}{P_{k+1}(t)} dt$ ,  $r > \max\{|\lambda_i| : i \in \overline{1; k+1}\}$ .

А також такі твердження [3].

**Теорема Б.** Якщо для цілої функції  $g(z)$  справедлива нерівність:

$$|g(z)| < A e^{\omega \ln^2 |z|}, \quad \omega < \frac{1}{2 \ln \beta}, \quad \beta > 1,$$

то вона розвивається в нескінченний ряд:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - \beta) (z - \beta^2) \dots (z - \beta^n),$$

який збіжний у всій площині  $\mathbb{C}$ .

**Теорема В.** Якщо  $g(\beta^n)$  — цілі числа ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) і ціла функція задовольняє нерівність

$$g(z) < e^{\frac{\ln^2 |z|}{4 \ln \beta}} |z|^{-\frac{1}{2}} \varepsilon(|z|), \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \varepsilon(|z|) = 0,$$

то  $g(z)$  — поліном.

Відомо (див. [12–14]), що мероморфну функцію можна наблизити раціональними функціями. І, навпаки, маючи послідовність точок, можна побудувати мероморфну функцію, що має полюси в цих точках. У 1935 році Рене Лагранж [1] описав властивості мероморфної функції, зображеної рядом раціональних функцій. Ряд, описаний в його роботі, має такий вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)}{(z - \beta_1)(z - \beta_2) \dots (z - \beta_n)},$$

де  $a_n, \alpha_n, \beta_n$  — комплексні числа, ( $n = 1, 2, \dots$ ), ( $\alpha_n = \alpha + nu$ ;  $\beta_n = \beta + nv$ ).

Використавши описані в [1] методи, А. О. Гельфонд і Д. М. Тоїдзе [4] побудували мероморфну у півплощині функцію  $F$ , з простими полюсами  $\{ku, k \in \mathbb{N}\}$  і нулями  $\{k, k \in \mathbb{N}\}$ , яка задовольняє певні умови росту. Були доведені [3] такі теореми.

**Теорема Г.** Мероморфна функція  $F(z)$ , яка зображена у вигляді ряду

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-(n-1))}{(z-u)(z-2u)\dots(z-nu)},$$

що збігається у півплощині  $\Re(z) > \lambda = \frac{\lambda}{1-\frac{1}{u}}$ , де

$$\lambda = \begin{cases} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{k=1}^n u^{-k} \frac{a_k}{k} \right|}{\ln n}, & \text{якщо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} u^{-k} \text{ — розбіжний,} \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \sum_{k=1}^{\infty} u^{-k} \frac{a_k}{k} \right|}{\ln n}, & \text{якщо } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} u^{-k} \text{ — збіжний,} \end{cases}$$

задовольняє умову

$$|F(\alpha + re^{i\theta})| < Cr^{1+\lambda+2\varepsilon} \left( \frac{1+r\cos\theta}{r} \right)^{\alpha(1-\frac{1}{u})-\lambda} e^{\varphi(\theta)r}.$$

Тут  $z = \alpha + re^{i\theta}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(r)$  рівномірно прямує до нуля, коли  $r \rightarrow \infty$ , при  $\alpha > \lambda$ ,  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$  і  $|z - ku| \geq \delta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_n$  — довільні комплексні числа,  $u$  — ірраціональне число, і

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) = & \left(1 - \frac{1}{u}\right) \cos\theta \ln \left( \frac{2u \cos\theta}{\sqrt{u^2 - 2u \cos 2\theta} + 1} \right) + \cos\theta \frac{\ln u}{u} + \\ & + \left(1 + \frac{1}{u}\right) \sin\theta \operatorname{arctg} \left( \frac{u+1}{u-1} \operatorname{tg}\theta \right) - \frac{\pi}{2} |\sin\theta|. \end{aligned}$$

**Теорема Д.**[3] Мероморфну функцію  $F(z)$  з простими нулями  $\{k, k \in \mathbb{N}\}$  та простими полюсами  $\{ku, k \in \mathbb{N}\}$ , яка задовольняє умову

$$|F(\alpha + re^{i\theta})| < C(1+r)^{1+\lambda+2\varepsilon} \left( \frac{1+r\cos\theta}{1+r} \right)^{\alpha(1-\frac{1}{u})-l} e^{\varphi(\theta)r},$$

де  $u > 1$ ,  $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $|z - ku| \geq \delta > 0$ ,  $C$  — стала,  $\varepsilon$  рівномірно прямує до нуля, коли  $r \rightarrow \infty$ , можна розвинути в ряд

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-(n-1))}{(z-u)(z-2u)\dots(z-nu)},$$

який рівномірно збіжний, якщо  $\Re(z) > L > \frac{1+l}{1-\frac{1}{u}}$ ,  $\Re(z) > \alpha$ ,  $|z| < R$ ,  $|z - ku| \geq \delta$ ,  $k = \overline{0; n}$ , для будь-яких додатних  $R$  і  $\delta$ .

Ми узагальнюємо ці результати на випадок вузлів, що швидко зростають.

**2. Основні результати.** Нехай  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  — послідовність різних комплексних чисел з точкою згущення на  $\infty$ , така що  $|\lambda_k/\lambda_{k+1}| \leq \delta < 1$ . Отримаємо в деякій мірі аналоги Теорем Г і Д для функції  $F$ , яка має нулі в точках

$\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  та полюси в точках  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ , де  $1 < u < \Delta := 1/\delta$ . Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)}, \quad (1)$$

де  $a_n$  — комплексні числа такі, що ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n}$  є збіжним.

**Теорема 1.** *Якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n} \leq C_1$ ,  $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| \leq \delta < 1$ ,  $1 < u < \Delta := 1/\delta$ , то ряд (1) рівномірно збігається на кожному компактi з  $\mathbb{C} \setminus \{u\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$  до функції  $F$  і справедлива оцінка*

$$|F(z)| < \left( \frac{\ln r}{\left(1 - \frac{u}{\Delta}\right) \ln \Delta} + \frac{C_1(u-1)}{\Delta(u\Delta-1)r} \right) \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right)$$

для  $|z - u\lambda_k| \geq \sigma > 0$ ,  $r = |z| > 1$ .

**Доведення.** Виберемо фіксоване значення  $|z| = r$ . Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що  $r > 1$ . Тоді, знайдеться таке натуральне число  $m$ , що  $u|\lambda_m| < \Delta|\lambda_m| \leq r < \Delta|\lambda_{m+1}|$ . Нехай

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)} = \sum_{n=1}^{m+1} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)} + \sum_{n=m+2}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)} =: I_1 + I_2.$$

Тоді  $|F(z)| \leq |I_1| + |I_2|$ . Знайдемо оцінку для  $I_1 = \sum_{n=1}^{m+1} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)}$ . Оскільки

для  $\left| \frac{z}{l} \right| < 1$  справедливе розвинення  $\ln \left( 1 - \frac{z}{l} \right) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{z}{l} \right)^j$ , то

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \exp \left| \ln \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)} \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \ln (z - \lambda_k) - \sum_{k=1}^n \ln (z - u\lambda_k) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{\lambda_k}{z} \right) - \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 - \frac{u\lambda_k}{z} \right) \right| = \\ &= \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left( - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda_k}{z} \right)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{u\lambda_k}{z} \right)^j \right) \right|. \end{aligned}$$

Окрім цього, якщо  $\Delta > u$ , то збіжним до деякого числа є ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j(\Delta^j - 1)} \leq \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}.$$

Тому, враховуючи, що

$$u|\lambda_m| < \Delta|\lambda_m| \leq r < \Delta|\lambda_{m+1}|,$$

$$\left| \frac{\lambda_k}{z} \right| \leq \frac{1}{\Delta} \left| \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| \left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+2}} \right| \cdots \left| \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right| \left| \frac{\Delta\lambda_m}{r} \right| \leq \frac{1}{\Delta^{m-k+1}},$$

маємо

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_n|} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j} \left( \frac{\lambda_k}{z} \right)^j \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_n|} \exp \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\Delta^{m-k+1}} \right)^j \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r - u\lambda_n|} \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j\Delta^j} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\Delta^j} \right)^{m-k} \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r - u\lambda_n|} \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{j(\Delta^j - 1)} \right) \leq \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{|r - u\lambda_n|} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \leq \\ &\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{r \left( 1 - \frac{u|\lambda_m|}{\Delta|\lambda_m|} \right)} \leq \\ &\leq \frac{\Delta/|\lambda_1|}{(\Delta-u)} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{\Delta^m |\lambda_1|} \leq \\ &\leq \frac{\Delta/|\lambda_1|}{(\Delta-u)} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=1}^{m+1} \frac{|a_n|}{u^n} \leq \frac{\Delta C_1}{(\Delta-u)} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right), \end{aligned}$$

бо  $r \geq \Delta|\lambda_m| \geq \Delta^m |\lambda_1|$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n} \leq C_1$ .

Знайдемо оцінку для  $I_2$ ,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \left| \exp \left( \ln \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (z - u\lambda_k)} \right) \right| = \\ &= \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{|z - u\lambda_k|} \left| \exp \left( \sum_{k=1}^m \ln (z - \lambda_k) - \sum_{k=1}^m \ln (z - u\lambda_k) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) - \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln \left( 1 - \frac{z}{u\lambda_k} \right) \right) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{|z-u\lambda_n| u^{n-1}} \left| \exp \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-u^j}{ju^j} \left( \frac{z}{\lambda_k} \right)^j \right) \right| \leq \\
&\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{u^n |\lambda_n| \left| 1 - \frac{z}{u\lambda_n} \right|} \times \\
&\quad \times \exp \left( \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-u^j}{ju^j} \left( \frac{r}{|\lambda_k|} \right)^j (\cos \varphi)^j \right) \leq \\
&\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{u^n |\lambda_n| \left| 1 - \frac{z}{u\lambda_n} \right|} \times \\
&\quad \times \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-u^j}{ju^{2j}} \sum_{k=m+1}^{n-1} \left( \frac{r}{|\lambda_k|} \right)^{2j} \right) \leq \\
&\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{u^n |\lambda_{m+2}| \left( 1 - \frac{\Delta|\lambda_{m+1}|}{u|\lambda_n|} \right)} \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-u^j}{ju^{2j}} \frac{\Delta^{2j}}{\Delta^{2j}-1} \right) \leq \\
&\leq \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{u^n \Delta |\lambda_{m+1}| \left( 1 - \frac{1}{u} \right)} \exp \left( - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j}{ju^{2j}} \right) \leq \\
&\leq \frac{\Delta(u-1)}{(u\Delta-1)} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{|a_n|}{u^n \Delta^2 |\lambda_m|} \leq \\
&\leq \frac{C_1(u-1)}{\Delta(u\Delta-1)r} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right).
\end{aligned}$$

бо  $\cos \varphi = \frac{r}{u|\lambda_k|}$ , де  $\varphi = \arg z - \arg(u\lambda_k)$  (див. рис. 1).

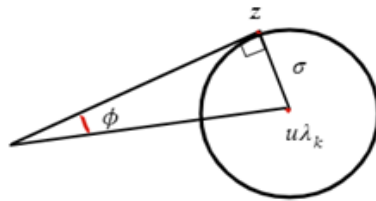


Рис. 1

Об'єднавши оцінки для  $I_1$  і  $I_2$ , отримаємо

$$\begin{aligned}
|F(z)| &\leq \frac{\Delta C_1}{(\Delta-u)} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) + \frac{C_1(u-1)}{\Delta(u\Delta-1)r} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \leq \\
&\leq C_1 \left( \frac{\Delta}{(\Delta-u)} + \frac{u-1}{\Delta(u\Delta-1)r} \right) \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right).
\end{aligned}$$

Звідки на основі ознаки Веєрштрасса робимо висновок про справедливість теореми 1. ■

**Теорема 2.** Якщо  $1 < u < \Delta$ ,  $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| \leq 1/\Delta$ , і функція  $F(z)$ , маючи прості нулі в точках  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  та полюси в точках  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ , задовольняє умову

$$|F(z)| < C_1 \left( \frac{\Delta}{(\Delta - u)} + \frac{u - 1}{\Delta(u\Delta - 1)r} \right) \exp \left( \frac{u(u - 1)}{(\Delta - 1)(\Delta - u)} \right), \quad r = |z| > 1, \quad (2)$$

зовні кругів  $U(u\lambda_k, \sigma)$  ( $C_1$  — деяка додатна стала), то  $F(z)$  можна зобразити у вигляді ряду (1), де

$$a_k = \frac{\lambda_k(u - 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} F(\zeta) \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)} d\zeta.$$

**Доведення.** Деякі міркування повторимо з [1]. Нехай мероморфна функція  $F(z)$  з простими нулями в точках  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  та полюсами в точках  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  задовольняє умову (2). Очевидною є рівність

$$R_0 - R_n = \sum_{k=1}^n R_{k-1} - R_k, \quad (3)$$

де

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)} d\zeta, \quad (4)$$

Причому контур інтегрування  $\Gamma_n$  є колом радіусу  $\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|$  з центром в точці  $(0; 0)$ . Тоді

$$R_{k-1} - R_k = \frac{P_{k-1}(z)}{Q_{k-1}(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k-1}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_{k-1}(\zeta)} d\zeta - \frac{P_k(z)}{Q_k(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{Q_k(\zeta)}{P_k(\zeta)} d\zeta. \quad (5)$$

Полюси функції  $F$  в точках  $u\lambda_k, u\lambda_{k+1}, \dots$  (не погашені нулями  $Q_{k-1}$ ) лежать поза контуром  $\Gamma_k$ , бо  $\frac{2u}{u+1}|\lambda_k| < u|\lambda_k|$ . А полюси підінтегральної функції, що породжені нулями  $P_k$ , лежать в середині  $\Gamma_k$  (бо  $\frac{2u}{u+1}|\lambda_k| > |\lambda_k|$ ). Тому в першому інтегралі (5), контур  $\Gamma_{k-1}$  можна замінити на  $\Gamma_k$ . Отже, мають місце співвідношення

$$R_n - R_0 = \sum_{k=1}^n a_k \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)}, \quad a_k = \frac{\lambda_k(u - 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} F(\zeta) \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)} d\zeta. \quad (6)$$

Ще розглянемо один інтеграл по невеликому колу  $\Gamma_s$  (у від'ємному напрямі), для одного із значень  $k = s$ , в залежності від положення полюса в підінтегральній функції в (4) в точці  $\zeta = z$ . Згідно інтегральної теореми Коші, такий інтеграл рівний  $-F(z)$ .

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \frac{Q_s(\zeta)}{P_s(\zeta)} \frac{P_s(z)}{Q_s(z)} d\zeta = -F(z). \quad (7)$$

Доведемо, що  $R_n \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Тут  $m$  — таке натуральне число, що  $u|\lambda_m| < \Delta|\lambda_m| \leq r < \Delta|\lambda_{m+1}|$ , звідки  $\left|\frac{\lambda_k}{z}\right| \leq \frac{1}{\Delta^{m-k+1}}$ .

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| &= \left| \frac{\prod_{k=1}^n (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)} \right| \leq \frac{1}{u^{n-m}} \exp \left| \sum_{k=1}^m \ln(z - \lambda_k) - \sum_{k=1}^m \ln(z - u\lambda_k) \right| \times \\ &\quad \times \exp \left| \sum_{k=m+1}^n \ln \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) - \sum_{k=m+1}^n \ln \left( 1 - \frac{z}{u\lambda_k} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{u^{n-m}} \exp \left| \sum_{k=1}^m \left( -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{\lambda_k}{z} \right)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{u\lambda_k}{z} \right)^j \right) \right| \times \\ &\quad \times \left| \exp \left( \sum_{k=m+1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - u^j}{ju^j} \left( \frac{z}{\lambda_k} \right)^j \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{u^{n-m}} \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u^j - 1}{ju^j} \frac{1}{\Delta^j - 1} \right) \times \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - u^j}{ju^{2j}} \sum_{k=m+1}^{n-1} \left( \frac{r}{|\lambda_k|} \right)^{2j} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{u^{n-m}} \exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right) \exp \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - u^j}{ju^{2j}} \frac{\Delta^{2j}}{\Delta^{2j} - 1} \right) \leq \frac{\exp \left( \frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)} \right)}{u^{n-m}}. \end{aligned}$$

З іншого боку, якщо  $\zeta = \frac{2u}{u+1}|\lambda_n|e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0; 2\pi]$ , то

$$\begin{aligned} \left| \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)} \right| &= \left| \exp \left( \ln \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta - u\lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (\zeta - \lambda_k)} \right) \right| = \left| \exp \left( \ln \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta - u\lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (\zeta - \lambda_k)} \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{u} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{2u\lambda_n}{u+1} + \ln \left( 1 - \frac{(u+1)\lambda_k}{2\lambda_n} \right) - \ln \frac{2u\lambda_n}{u+1} \ln \left( 1 - \frac{(u+1)\lambda_k}{2u\lambda_n} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{u} \exp \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{(u+1)\lambda_k}{2\lambda_n} \right)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{(u+1)\lambda_k}{2u\lambda_n} \right)^j \right) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{u} \exp \sum_{k=1}^{n-1} \left( -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{u+1}{2\Delta} \right)^j + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left( \frac{u+1}{2u|\Delta|^{n-k}} \right)^j \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{u} \left( 1 - \frac{u+1}{2\Delta} \right)^{n-1} \exp \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(\Delta^j - 1)} \left( \frac{u+1}{2u} \right)^j \leq \frac{2}{u-1} \left( 1 - \frac{u+1}{2\Delta} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Тому, використовуючи оцінку (2), отримуємо

$$|R_n(z)| \leq \left| \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} \right| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \left| \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \right| \left| \frac{Q_n(\zeta)}{P_n(\zeta)} \right| |d\zeta| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}}{u^{n-m}(u-1)} \frac{\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|}{\left|\frac{2u|\lambda_n|}{u+1}-r\right|} M_F\left(\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|\right) \leq \\
&\leq \frac{2\exp\left(\frac{u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right)}{u^{n-m}} \frac{|\lambda_n| M_F\left(\frac{2u}{u+1}|\lambda_n|\right)}{|\lambda_n| \left|\frac{r}{|\lambda_n|}-\frac{2u}{u+1}\right|} \left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1} \leq \\
&\leq 2C_1 \exp\left(\frac{2u(u-1)}{(\Delta-1)(\Delta-u)}\right) \frac{r\left(1-\frac{u+1}{2\Delta}\right)^{n-1}}{u^n \left|\frac{r}{|\lambda_n|}-\frac{2u}{u+1}\right|} \frac{u-1}{(u\Delta-1)^{\frac{2u(\Delta-u)}{u+1}}|\lambda_n|},
\end{aligned}$$

Звідки випливає, що для кожного фіксованого  $r \in \mathbb{R}$ ,  $R_n \rightarrow 0$ , якщо  $n \rightarrow \infty$ . Таким чином, врахувавши (3), (6) і (7) і спрямувавши  $n \rightarrow \infty$ , отримаємо такий вигляд функції  $F$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\prod_{m=1}^{k-1} (z - \lambda_m)}{\prod_{m=1}^k (z - u\lambda_m)}.$$

Теорема 2 доведена. ■

**Зауваження 1.** Використовуючи (6), на основі теорії лишків, можна отримати вираз для  $a_k$

$$a_k = \lambda_k (u-1) \sum_{m=1}^k F(\lambda_m) \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\lambda_m - u\lambda_j)}{\prod_{\substack{j=1, \\ j \neq m}}^k (\lambda_m - \lambda_j)}.$$

**3. Висновки.** Отже, в роботі отримано оцінку ряду (1) на кожному компактні з  $\mathbb{C} \setminus \{u\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ , якщо  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n} \leq C_1$ ,  $\left|\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right| \leq \frac{1}{\Delta} < 1$ . З іншого боку показано, що мероморфну в  $\mathbb{C}$  функцію  $F$  з простими полюсами  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  та нулями  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  для якої справедлива оцінка (2), можна розвинути в ряд Ньютона (1). Окрім того, знайдено вигляд коефіцієнтів  $a_n$  цього ряду через  $\lambda_k$ .

### Список використаної літератури

1. Lagrange R. Mémoire sur les séries d'interpolation. *Acta Math.* 1935. Vol. 64. P. 1–80.
2. Абдрашитова С. А. О классе сходимости интерполяционной задачи Ньютона для целых функций нулевого порядка. Деп. в ВИНТИ. 1976. 18 с.
3. Гельфонд А. О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии. *Матем. сб.* 1933. Т. 40, № 1. С. 42–47.
4. Гельфонд А. О., Тоидзе Д. М. Разложение мероморфной функции в ряд рациональных дробей и ряд Тейлора. *Матем. сб.* 1937. Т. 44, № 5, С. 935–945.
5. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Москва : Гостехиздат, 1952. 400 с.
6. Гончаров В. Л. Интерполяционные процессы и целые функции. *УМН.* 1937. № 3. С. 113–143.
7. Винницький Б. В. О полноте системы  $\{f(\lambda_n z)\}$ . *Укр. мат. журн.* 1984. Т. 36, № 5, С. 655–658.

8. Казьмин Ю. А. Об одной задаче А. О. Гельфонда. *Матем. сб.* 1973. Вып. 132, № 4, С. 521–543.
9. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы. *Изв. АН СССР, сер.матем.* 1980. Т. 44, № 5. С. 1066–1114.
10. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. Москва : Наука, 1971. 520 с.
11. Гольдберг А. А., Левин Б. Я., Островский И. В., Целые и мероморфные функции: Итоги науки и техн. *Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления.* 1991. Т. 85. С. 5–185.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Москва : Наука, 1968. 624 с.
13. John B. Conway, Functions of one complex variable. Springer-Verlag New York : Heidelberg — Berlin. 1978.
14. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1974. 320 с.

**Onys'ko V. Z., Sheparovych I. B.** Newton's interpolation problem in the class of meromorphic functions with the fast-growing nodes.

Let  $(\lambda_k)$  be a sequence of different complex numbers such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$  and  $\left| \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right| \leq \frac{1}{\Delta}$ ,  $\Delta > 1$ . In the paper there obtain an asymptotic estimate for meromorphic function presented as series of rational fractions

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (z - \lambda_k)}{\prod_{k=1}^n (z - u\lambda_k)},$$

where  $(a_k)$  is a sequence of complex numbers such that  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{u^n} \leq C_1$ ,  $u \in (1, \Delta)$ . Moreover, there proved that the meromorphic function having zeros at the points  $\{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  and poles at the points  $\{u\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$  holds outside the disks  $U(u\lambda_k, \sigma) := \{|z - u\lambda_k| \leq \sigma\}$  ( $\sigma > 0$ ), for which condition

$$|F(z)| < C_1 \left( \frac{\Delta}{(\Delta - u)} + \frac{u - 1}{\Delta(u\Delta - 1)r} \right) \exp \left( \frac{u(u - 1)}{(\Delta - 1)(\Delta - u)} \right), \quad r = |z| > 1 \quad (C_1 > 0)$$

can be represented in the form of the mentioned functional series, where

$$a_k = \frac{\lambda_k(u - 1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} F(\zeta) \frac{Q_{k-1}(\zeta)}{P_k(\zeta)} d\zeta, \quad \Gamma_k = \partial U(\zeta; R_k), \quad |\lambda_k| < R_k < |\lambda_{k+1}|.$$

**Keywords:** meromorphic function, rational fractions, zeros, poles.

## References

1. Lagrange, R. (1935). Mémoire sur les séries d'interpolation. *Acta Math.*, 64, 1–80.
2. Abdrashitova, S. A. (1976). *On the class of convergence of Newton's interpolation problem for entire functions of zero order*. Man. dep. in UISTR [in Russian].
3. Gelfond, A. (1933). On the functions that are integers at the points of a geometric progression. *Mat. sb.*, 40(1), 42–47.
4. Gelfond, A. O., & Toidze, D. M. (1937). Decomposition of a meromorphic function into a series of rational fractions and a Taylor series, *Mat. Sb.*, 44(5), 935–945 [in Russian].
5. Gel'fond, A. O. (1967). *Calculus of finite differences*. Nauka: Moscow [in Russian].
6. Goncharov, V. L. (1937). Interpolation processes and entire functions. *UMN*, (3), 113–143.
7. Vinnitskiy, B. V. (1984). Completeness of the system  $\{f(\lambda_n z)\}$ . *Ukr. Math. J.*, 36(5), 655–658 [in Russian].
8. Kaz'min, Yu. A. (1973). On some Gel'fond's problem. *Mat. sb.*, 132(4), 520–543 [in Russian].

9. Korobeynyk, Yu. F. (1980). Interpolation problems, non-trivial expansions of zero and representing systems. *Izv. Academy of Sciences of the USSR, ser. math.*, 44(5), 1066–1114 [in Russian].
10. Ibragimov, I. I. (1971). *The methods of functions interpolation and some of their applications*. Moscow: Nauka [in Russian].
11. Goldberg, A. A., Levin, B. Ya., & Ostrovsky, I. V. (1991). Integer and meromorphic functions: Results of science and technology. *Ser. Modern. problem math. Fund. directions*, 85, 5–185 [in Russian].
12. Markushevich, A. I. (1968). *Theory of analytical functions*. Moscow: Nauka [in Russian].
13. John, B. (1978). *Conway, Functions of one complex variable*. Springer-Verlag New York: Heidelberg — Berlin.
14. Sveshnikov, A. G., & Tikhonov, A. N. (1974). *Theory of functions of a complex variable*. Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 21.03.2024

УДК 512.544

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).37-50](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).37-50)**І. М. Порохнавець<sup>1</sup>, І. В. Шапочка<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,  
[ivan.porokhnavets@uzhnu.edu.ua](mailto:ivan.porokhnavets@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,  
кандидат фізико-математичних наук  
[ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua](mailto:ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0904-7879>

**КЛАСИФІКАЦІЯ НЕІЗОМОРФНИХ ГРУП ДЕЯКОГО КЛАСУ  
ЧЕРНІКОВСЬКИХ 3-ГРУП**

В цій роботі описуються з точністю до ізоморфізму деякі черніківські 3-групи, що є циклічними розширеннями повних абелевих 3-груп з умовою мінімальності.

Нехай  $\mathbb{C}_{3^\infty}$  — адитивна квазіциклічна 3-група, а  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$  — зовнішня пряма сума  $n$  екземплярів квазіциклічної 3-групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}$  для деякого натурального числа  $n$ . Добре відомо, що група  $\text{Aut } \mathbb{C}_{3^\infty}^n$  ізоморфна повній лінійній групі  $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_3)$ , де  $\mathbb{Z}_3$  — кільце цілих 3-адичних чисел. Тому надалі для довільної матриці  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{Z}_3)$  та довільного елемента  $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$  через  $A(c)$  позначатимемо образ елемента  $c$  при автоморфізмі, що відповідає матриці  $A$ . Нехай  $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$  — множина всіх твірних елементів групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}$ , де  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ , причому  $3a_0 = 0$ ,  $3a_r = a_{r-1}$  для довільного  $r \in \mathbb{N}$ .

Розглянемо циклічну адитивну групу  $H$  порядку 27 з твірним елементом  $h$  і деяке матричне зображення  $\Gamma$  цієї групи степеня  $n$  над кільцем  $\mathbb{Z}_3$ . Образ будь-якого елемента  $h'$  групи  $H$  позначатимемо через  $\Gamma_{h'}$ . Визначимо дію  $\cdot$  групи  $H$  на групі  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$  за правилом  $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$  для довільних елементів  $h' \in H$  і  $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . Підкреслимо, що ядро  $\text{Ker } \Gamma$  є підгрупою стабілізатора кожного елемента із  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . Нескладно переконатися, що множина

$$A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

є підгрупою групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . Для матричного зображення  $\Gamma$  групи  $H$  та деякого елемента  $c \in A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma)$  побудуємо групу  $G(\Gamma, c)$  наступним чином:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{3^\infty}^n,$$

а бінарна операція  $+$  задається так

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h, \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

де  $i, j \in \{0, 1, \dots, 26\}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ ,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i+j < 27, \\ 1, & \text{якщо } i+j \geq 27. \end{cases}$$

Відомо, що таким чином побудована група є циклічним розширенням групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$  за допомогою групи  $H$ , а як наслідок, є черніківською 3-групою.

В роботі описані з точністю до ізоморфізму всі черніківські 3-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку 27 і які визначаються матричним  $\mathbb{Z}_3$ -зображенням [3]

$$\Gamma : h \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

де  $\tilde{\eta}$  — незвідна  $\mathbb{Z}_3$ -матриця 18-го порядку вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle t \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Ключові слова:** черніковська група, матричне зображення групи, незвідна компонента зображення.

**1. Вступ.** Нехай  $H = \langle h \rangle$  — циклічна група 27-го порядку;  $\eta, \xi, \varepsilon$  — первісні корені з 1 відповідно 27-го, 9-го і 3-го степенів;  $\mathbb{Z}_3$  — кільце цілих 3-адичних чисел. Розглянемо  $\mathbb{Z}_3$ -зображення групи  $H$  вигляду:

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де  $t = \eta - 1, u = \xi - 1$ . Опишемо всі не ізоморфні розширення групи  $\mathbb{C}_{3\infty}^{26}$ , що є розширенням прямої суми 26-ти екземплярів 3-групи  $\mathbb{C}_{3\infty}$ , за допомогою групи  $H$ , і які визначаються зображенням  $\Gamma$ . Із [1] слідує, що кожне таке розширення цілком визначається елементом  $m$  групи  $\mathbb{C}_{3\infty}^n$ , що задовольняє умові  $\Gamma_h(m) = m$ .

Надалі всюди через  $a_0, a_1, a_2, \dots$  будемо позначати твірні елементи квазіциклічної 3-групи  $\mathbb{C}_{3\infty}$ , які задовольняють умовам  $3a_0 = 0, 3a_i = a_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Якщо  $u$  — елемент квазіциклічної 3-групи  $\mathbb{C}_{3\infty}$ , то для довільного натурального числа  $k$  через  $u^{(k)}$  будемо позначати елемент групи  $\mathbb{C}_{3\infty}^k$  вигляду

$$\underbrace{(u, u, \dots, u)}_{k \text{ раз}}.$$

**Теорема 1.** *Нехай*

$$m(i, j, k) = (ka_0 - ja_0, ka_0^{(8)}, -ka_0^{(9)}, ja_0 - ia_0, ja_0^{(2)}, -ja_0^{(3)}, ia_0, -ia_0),$$

де  $i, j, k = 0, 1, 2$ . Тоді

$$A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma) = \{m(i, j, k) \mid i, j, k = 0, 1, 2\}.$$

**Доведення.** За означенням групи  $A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma)$  ця група складається з усіх таких елементів  $m \in \mathbb{C}_{3\infty}^{26}$ , що

$$\Gamma_h(m) = m. \quad (2)$$

Нехай  $m = (x, y, z)$ , де

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_{18}) \in \mathbb{C}_{3\infty}^{18}, \quad x_1, x_2, \dots, x_{18} \in \mathbb{C}_{3\infty},$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_6) \in \mathbb{C}_{3\infty}^6, \quad y_1, y_2, \dots, y_6 \in \mathbb{C}_{3\infty},$$

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_{3\infty}^2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{3\infty}.$$

Тоді із (2) слідує, що

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon} \cdot z^T = z^T, \\ \tilde{\xi} \cdot y^T + \langle u \rangle z^T = y^T, \\ \tilde{\eta} \cdot x^T + \langle t \rangle y^T = x^T, \end{cases} \quad (3)$$

де  $x^T, y^T, z^T$  — вектор-стовпці, одержані транспонуванням відповідно вектор-рядків  $x, y, z$ .

Із першого рівняння системи (3) одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -z_2 = z_1, \\ z_1 - z_2 = z_2. \end{cases}$$

Звідси

$$z = (ia_0, -ia_0), \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Аналогічно, із другого рівняння системи (3) одержимо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ia_0 \\ -ia_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_6 = ia_0, \\ y_1 - y_2 = -ia_0, \\ y_2 - y_3 = 0, \\ y_3 - y_4 - y_6 = 0, \\ y_4 - y_5 = 0, \\ y_5 - y_6 = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$y = (ja_0 - ia_0, ja_0^{(2)}, -ja_0^{(3)}), \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

Нарешті, із третього рівняння системи (3) будемо мати:

$$\begin{cases} -x_1 - x_{18} = ja_0, \\ x_1 - x_2 = -ja_0, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0, \\ \vdots \\ x_8 - x_9 = 0, \\ x_9 - x_{10} - x_{18} = 0, \\ x_{10} - x_{11} = 0, \\ \vdots \\ x_{16} - x_{17} = 0, \\ x_{17} - x_{18} = 0. \end{cases}$$

Звідси випливає наступне

$$x_{10} = x_{11} = x_{12} = \dots = x_{18}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = \dots = x_9, \\ x_{18} = -ka_0, \quad x_9 = 2x_{18} = ka_0, \quad x_1 = ka_0 - ja_0.$$

Далі матимемо, що

$$x = (ka_0 - ja_0, ka_0^{(8)}, -ka_0^{(9)}), \quad k \in \{0, 1, 2\}.$$

Теорема доведена.

**Наслідок 1.** Існує 27 нееквівалентних розширень групи  $\mathbb{C}_{3\infty}^{26}$  за допомогою циклічної групи  $H = \langle h \rangle$  27-го порядку, що визначаються зображенням

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

**Доведення.** Очевидно

$$B(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma) = \{(E + \Gamma_h + \dots + \Gamma_h^{26})(m) \mid m \in \mathbb{C}_{3\infty}^{26}\} = 0.$$

Тому  $A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma) / B(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma) \cong A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma)$ . Оскільки

$$|A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma)| = 27,$$

то наслідок доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $\mathbb{C}_{3\infty}^{26}$  — пряма сума 26-ти екземплярів квазіциклічної 3-групи

$$\mathbb{C}_{3\infty} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \mid 3a_0 = 0, 3a_i = a_{i-1}, \quad i \in \mathbb{N} \rangle;$$

$H = \langle h \rangle$  — циклічна група 27-го порядку;

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

— матричне  $\mathbb{Z}_3$ -зображення групи  $H$ , де  $\eta, \xi, \varepsilon$  — первісні корені з 1 відповідно 27-го, 9-го і 3-го степенів,  $t = \eta - 1$ ,  $u = \xi - 1$  Далі нехай

$$m(i, j, k) = (ju + km_\eta, jm_\xi + iv, im_\varepsilon), \quad (4)$$

де

$$m_\eta = \begin{pmatrix} a_0^{(9)} & -a_0^{(9)} \end{pmatrix}, \quad m_\xi = \begin{pmatrix} a_0^{(3)} & -a_0^{(3)} \end{pmatrix}, \quad m_\varepsilon = (a_0, -a_0),$$

$$u = (-a_0, 0^{(17)}), \quad v = (-a_0, 0^{(5)}), \quad i, j, k \in \{0, 1, 2\}.$$

Всі неізоморфні розширення групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$  за допомогою групи  $H$ , що визначаються зображенням  $\Gamma$  вичерпуються наступними групами:

$$G(\Gamma, m(0, 0, 0)), \quad G(\Gamma, m(1, 0, 0)), \quad G(\Gamma, m(0, 1, 0)), \quad G(\Gamma, m(0, 0, 1)).$$

**Доведення.** Нехай виконуються умови теореми. Спочатку покажемо, що серед вказаних груп:  $G(\Gamma, m(0, 0, 0)), G(\Gamma, m(1, 0, 0)), G(\Gamma, m(0, 1, 0)), G(\Gamma, m(0, 0, 1))$  немає попарно ізоморфних.

Доведемо, що група  $G(\Gamma, m(0, 0, 1))$  не є ізоморфною групі  $G(\Gamma, m(1, 0, 0))$ . Припустимо протилежне, нехай  $G(\Gamma, m(0, 0, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 0))$ . Тоді за теоремою 2 існує оборотна матриця  $C \in GL(26, \mathbb{Z}_3)$  і натуральне число  $r$ , що не ділиться на 3, що

$$C\Gamma(h)C^{-1} = \Gamma(h)^r \quad (5)$$

і

$$Cm(0, 0, 1) = rm(1, 0, 0) \quad (6)$$

Із рівності (5) випливає, що матриця  $C$  має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}$$

де  $C_{11}, C_{22}, C_{33}$  — оборотні матриці над  $\mathbb{Z}_3$  відповідно порядків 18, 6, 2, а  $C_{12}, C_{13}, C_{23}$  — відповідно  $18 \times 6$ -,  $18 \times 2$ - та  $6 \times 2$ -матриці над  $\mathbb{Z}_3$ . Тоді рівність (6), враховуючи позначення (4), перепишеться у вигляді

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ rv \\ rm_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Це б означало, що

$$C_{11}m_\eta = 0, \quad 0 = rv, \quad 0 = rm_\varepsilon.$$

Останнє неможливо, тому група  $G(\Gamma, m(0, 0, 1))$  не ізоморфна групі  $G(\Gamma, m(1, 0, 0))$ . Аналогічно доводиться, що групи, перераховані в теоремі, попарно неізоморфні.

Тепер покажемо, що всі інші групи, що є розширенням групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$  за допомогою групи  $H$ , що визначаються зображенням  $\Gamma$ , крім тих, що фігурують в теоремі попарно ізоморфні.

Розглянемо матрицю  $C$ , вигляду

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & X & Z \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & Y \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix},$$

де  $\Theta_1 \in \mathbb{Z}_3[\eta]$ ,  $\Theta_2 \in \mathbb{Z}_3[\xi]$ ,  $\Theta_3 \in \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$ ,  
 $X, Y, Z$  — відповідно  $18 \times 6$ -,  $18 \times 2$ -,  $6 \times 2$ - матриці такі, що

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}X + \langle t \rangle \tilde{\Theta}_2 &= \tilde{\Theta}_1 \langle t \rangle + X\tilde{\xi}, \\ \tilde{\xi}Y + \langle u \rangle \tilde{\Theta}_3 &= \tilde{\Theta}_2 \langle u \rangle + Y\tilde{\varepsilon}, \\ \tilde{\eta}Z + \langle t \rangle Y &= X \langle u \rangle + Z\tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{7}$$

Матриці  $X$  і  $Y$  можна подати у вигляді:

$$X = X' + X'', \quad Y = Y' + Y'',$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}X' + \langle t \rangle \tilde{\Theta}_2 &= \langle t\Theta'_2 \rangle + X'\tilde{\xi}, \\ \tilde{\xi}Y' + \langle u \rangle \tilde{\Theta}_3 &= \langle u\Theta'_3 \rangle + Y'\tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}X'' + \langle \Theta'_2 t \rangle &= \langle \Theta_1 t \rangle + X''\tilde{\xi}, \\ \tilde{\xi}Y'' + \langle \Theta'_3 u \rangle &= \langle \Theta_2 u \rangle + Y''\tilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Звідси  $X'' = \langle \langle x'' \rangle \rangle$  — матриця, перший стовпець якої складається з координат елемента  $x'' \in \mathbb{Z}_3[\eta]$  у  $\mathbb{Z}_3$ -базисі  $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{17}$  кільця  $\mathbb{Z}_3[\eta]$ , другий — з координат елемента  $x''\eta$ , третій —  $x''\eta^2$ , четвертий —  $x''\eta^3$ , п'ятий —  $x''\eta^4$ , шостий —  $x''\eta^5$ .

$Y'' = \langle \langle y'' \rangle \rangle$  — матриця, перший стовпець якої складається з координат елемента  $y'' \in \mathbb{Z}_3[\xi]$  у  $\mathbb{Z}_3$ -базисі  $1, \xi, \dots, \xi^5$  кільця  $\mathbb{Z}_3[\xi]$ , другий — з координат елемента  $y''\xi$ .

$$\begin{aligned} (\Theta'_2 - \Theta_1) t &= x''\Phi_9(\eta), \\ (\Theta'_3 - \Theta_2) u &= y''\Phi_3(\xi). \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \Theta'_3 - y'' \frac{\Phi_3(\xi)}{u}, \\ \Theta_1 &= \Theta'_2 - x'' \frac{\Phi_9(\eta)}{t}. \end{aligned}$$

$z_1, z_2$  — елементи кільця  $\mathbb{Z}_3[\eta]$ , координати яких у базисі  $1, \eta, \eta^2, \dots, \eta^{17}$  співпадають відповідно з елементами першого і другого стовпців матриці  $Z$ .

З рівності (7) маємо

$$\begin{aligned} \eta z_1 - z_2 &= y_5(\eta - 1), \\ z_1 + (\eta + 1) z_2 &= x''(1 - \eta) + (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5)(\eta - 1), \\ y_j &\in \mathbb{Z}_3, \quad j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}. \end{aligned}$$

Звідси

$$z_2 = \eta z_1 - y_5 t,$$

$$x'' = -z_1 \frac{\Phi_3(\eta)}{t} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \eta.$$

Отже,

$$C = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & X & Z \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & Y \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де  $\Theta_3 \in \mathbb{Z}_3[\varepsilon]$ ,  $y'' \in \mathbb{Z}_3[\xi]$ ,  $z_1 \in \mathbb{Z}_3[\eta]$ , а все інше визначається за допомогою вище вказаних рівностей.

Тоді легко бачити, що виконується рівність  $C\Gamma(h)C^{-1} = \Gamma(h)$ .

Розглянемо тепер матрицю  $C_1$ , вигляду (8), що визначається елементами  $\Theta_3 = \varepsilon$ ,  $z_1 = 1 + \eta^2$ ,  $y'' = 1 + \xi^3$ . Очевидно, що для матриці  $C_1$  має місце рівність

$$C_1\Gamma(h)C_1^{-1} = \Gamma(h).$$

Крім того

$$C_1(m(0, 1, 0)) = m(0, 1, 2), \quad C_1(m(0, 1, 2)) = m(0, 1, 1),$$

$$C_1(m(0, 1, 1)) = m(0, 1, 0).$$

Отже, за теоремою 2, одержуємо

$$G(\Gamma, m(0, 1, 0)) \cong G(\Gamma, m(0, 1, 1)) \cong G(\Gamma, m(0, 1, 2)).$$

Аналогічно, використовуючи матрицю  $C_1$ , можна показати, що

$$G(\Gamma, m(1, 0, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 2)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 2)),$$

$$G(\Gamma, m(1, 0, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 0)),$$

$$G(\Gamma, m(1, 0, 2)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 1)).$$

Також неважко бачити, що за допомогою матриці  $C_2$ , вигляду (8), що визначається елементами  $\Theta_3 = 1 + \varepsilon$ ,  $z_1 = 1 + \eta + \eta^2 + \eta^3$ ,  $y'' = 1 + \xi$ , ми одержимо

$$G(\Gamma, m(1, 0, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 2)).$$

Тепер розглянемо скалярну матрицю  $T$ , 26-го порядку з елементом 2 на діагоналі. За допомогою цієї матриці, використовуючи теорему 2, легко показати, що

$$G(\Gamma, m(0, 0, 2)) \cong G(\Gamma, m(0, 0, 1)), \quad G(\Gamma, m(0, 2, 0)) \cong G(\Gamma, m(0, 1, 0)),$$

$$G(\Gamma, m(0, 2, 1)) \cong G(\Gamma, m(0, 1, 2)), \quad G(\Gamma, m(0, 2, 2)) \cong G(\Gamma, m(0, 1, 1)),$$

$$G(\Gamma, m(2, 0, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 0)), \quad G(\Gamma, m(2, 0, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 2)),$$

$$G(\Gamma, m(2, 0, 2)) \cong G(\Gamma, m(1, 0, 1)), \quad G(\Gamma, m(2, 1, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 0)),$$

$$G(\Gamma, m(2, 1, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 2)), \quad G(\Gamma, m(2, 1, 2)) \cong G(\Gamma, m(1, 2, 1)),$$

$$G(\Gamma, m(2, 2, 0)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 0)), \quad G(\Gamma, m(2, 2, 1)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 2)),$$

$$G(\Gamma, m(2, 2, 2)) \cong G(\Gamma, m(1, 1, 1)).$$

Таким чином ми одержали, що всі інші групи, що є розширенням групи  $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$  за допомогою групи  $H$ , що визначаються зображенням  $\Gamma$ , крім тих, що фігурують в теоремі попарно ізоморфні. Теорема доведена.

### Список використаної літератури

1. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские  $p$ -группы и целочисленные  $p$ -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753.
2. Гудивок П. М., Шапочка И. В. О черниковских  $p$ -группах. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 3. С. 291–304.
3. Гудивок П. М., Рудько В. П. Про  $p$ -адичні цілочислові зображення циклічної  $p$ -групи. *Допов. АН УРСР.* 1966. № 9. С. 1111–1113.

**Porokhnaveets I. M., Shapochka I. V.** Classification of non-isomorphic groups of a certain class of Chernikov 3-groups.

In this paper, some Chernikov 3-groups, which are cyclic extensions of divisible Abelian 3-groups with the minimality condition, are described with accuracy up to isomorphism.

Let  $\mathbb{C}_{3^\infty}$  be an additive quasicyclic 3-group, and let  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$  be an external direct sum  $n$  instances of the quasicyclic 3-group  $\mathbb{C}_{3^\infty}$  for some positive integer  $n$ . It is well known that the group  $\text{Aut } \mathbb{C}_{3^\infty}^n$  isomorphic to the complete linear group  $\text{GL}(n, \mathbb{Z}_3)$ , where  $\mathbb{Z}_3$  the ring of 3-adic integers. Therefore, in the future for an arbitrary matrix  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{Z}_3)$  and an arbitrary element  $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$  through  $A(c)$  denote the image of the element  $c$  in the automorphism that corresponds to the matrix  $A$ . Let  $\{a_r \mid r \in \mathbb{N}_0\}$  be the set of all generators of the group  $\mathbb{C}_{3^\infty}$ , where  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  and  $3a_0 = 0$ ,  $3a_r = a_{r-1}$  for all  $r \in \mathbb{N}$ .

Consider a cyclic additive group  $H$  of order 27 with a generating element  $h$  and some matrix image  $\Gamma$  of this group of degree  $n$  over the ring  $\mathbb{Z}_3$ . The image of any element  $h'$  of the group  $H$  is denoted by  $\Gamma_{h'}$ . Determine the action  $\cdot$  of the group  $H$  on the group  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$  by the rule  $h' \cdot c = \Gamma_{h'}(c)$  for arbitrary elements  $h' \in H$  and  $c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . We emphasize that the kernel  $\text{Ker } \Gamma$  is a subgroup of the stabilizer of each element with  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . It is easy to see that the set

$$A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma) = \{c \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n \mid h \cdot c = c\}$$

is a subgroup of  $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ . For the matrix image  $\Gamma$  of the group  $H$  and some element  $c \in A(\mathbb{C}_{3^\infty}^n, H, \Gamma)$  we construct the group  $G(\Gamma, c)$  as follows:

$$G(\Gamma, c) = H \times \mathbb{C}_{3^\infty}^n,$$

and the binary operation  $+$  is set as follows

$$(ih, c_1) + (jh, c_2) = ((i+j)h, \mu_{i,j}c + jh \cdot c_1 + c_2),$$

where  $i, j \in \{0, 1, \dots, 26\}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}_{3^\infty}^n$ ,

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{if } i+j < 27, \\ 1, & \text{if } i+j \geq 27. \end{cases}$$

Paper deals with the classification up to isomorphism of all Chernikov 3-groups quotient group of which by maximal divisible Abelian subgroup is a the cyclic group of the order 27 and which determined by the matrix  $\mathbb{Z}_3$ -representation [3]

$$\Gamma : h \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & \langle t \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

where  $\tilde{\eta}$  is the irreducible  $\mathbb{Z}_3$ -matrix of the order 18 of type

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \langle t \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle u \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Keywords:** Chernikov group, matrix representation of group, irreducible component of representation.

## References

1. Gudivok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov  $p$ -groups and integer  $p$ -adic representations of finite groups. *Ukr. Mat. J.*, 44(6), 742–753.
2. Gudivok, P. M., & Shapochka, I. V. (1999). On the Chernikov  $p$ -groups. *Ukr. Mat. J.*, 51(3), 291–304.
3. Gudivok, P. M., & Rud'ko, V. P. (1966). On  $p$ -adic integral representations of the cyclic  $p$ -group. *Dopovidi Akad. Nauk URSR*, 9, 1111–1113.

Одержано 04.04.2024

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).51-57](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).51-57)**В. К. Юськович**

НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,

v.yuskovych@kpi.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3759-3587>

## ПРО ТРАНЗІЄНТНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТРИБКАМИ

У статті розглянуто стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками та наведено деякі достатні умови, що гарантують прямування його розв'язку до нескінченності (транзієнтність) майже напевно. Спочатку доводиться допоміжний результат про апіорну оцінку другого моменту розв'язку за умов обмеженості зносу та степеневі обмеженості шуму. Далі доводиться теорема про транзієнтність розв'язку за додаткової умови відокремленості зносу від нуля. Основний результат статті встановлює транзієнтність розв'язку за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля поза межами деякого відрізка, степеневі обмеженості шуму та його невідродженості у деякому відрізку.

**Ключові слова:** стохастичне диференціальне рівняння, стрибки, транзієнтність, прямування до нескінченності, асимптотична поведінка.

**1. Вступ та огляд літератури.** Першими асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з вінерівським шумом почали досліджувати Гіхман Й. Г. та Скороход А. В. У праці [1] вони досліджували умови прямування розв'язку до нескінченності (транзієнтності) та рекурентності. Їхній підхід полягає у використанні гармонічних функцій. У випадку стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками, що ми розглядаємо в цій статті, використання гармонічних функцій призводить до складнощів.

Питання транзієнтності розв'язків стохастичних рівнянь є важливим при дослідженні їх асимптотичної поведінки. У праці [2] Булдигіна В. В., Клесова О. І., що досліджували питання асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичних та звичайних диференціальних рівнянь, умова транзієнтності розв'язку висувалася як припущення.

У попередніх працях автора досліджено деякі задачі щодо асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних рівнянь: у статті [4] розглянуто багатовимірні стохастичні диференціальні рівняння, а в статті [5] – стохастичні диференціальні рівняння зі стрибками. У статті [5] основна увага приділяється дослідженню асимптотики розв'язку, а його транзієнтність припускається.

Пилипенко А. Ю., Проске Ф. Н., Павлюкевич І. Є., Кулик О. М. у своїх працях [6], [7], [8], [9] досліджують задачу регуляризації звичайних диференціальних рівнянь шляхом додавання малого шуму. Задача про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, зокрема і задача про транзієнтність, є важливою для розв'язання згаданої вище задачі регуляризації.

**2. Постановка задачі.** Нехай  $W$  – вінерівський процес,  $N$  – пуассонівська випадкова міра на множині  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  з мірою інтенсивності  $\nu(du) \cdot dt$ , причому процес  $W$  та випадкова міра  $N$  незалежні. Позначимо через  $\tilde{N}$  компенсовану

пуассонівську випадкову міру, що відповідає пуассонівській випадковій мірі  $N$ , тобто  $\tilde{N}(du, dt) = N(du, dt) - \nu(du)dt$ .

Нехай  $X$  – розв’язок стохастичного диференціального рівняння зі стрибками вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)\tilde{N}(du, dt), \quad (1)$$

$$X(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

Під *транзієнтністю* процесу  $X$  ми розуміємо те, що цей процес за модулем прямує до нескінченності майже напевно, коли час прямує до нескінченності, тобто  $|X(t)| \rightarrow \infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ , м.н. У цій статті ми вивчатимемо достатні умови того, що  $X(t) \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow \infty$ , м.н.

**3. Основна частина.** Одержимо апріорну оцінку для другого моменту розв’язку рівняння (1) у випадку, коли знос обмежений, а шум степеневно обмежений.

**Лема 1.** *Припустимо, що:*

(А) *функція  $a$  обмежена;*

(Б) *функції  $b$  та  $c$  задовольняють умову степеневого зростання*

$$\exists C \geq 0 \exists \beta \in [0, \frac{1}{2}] \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u)\nu(du) \leq C \left(1 + (x^2)^\beta\right). \quad (2)$$

Тоді

$$\exists \tilde{C} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}X^2(t) \leq \tilde{C} (1 + t^2).$$

**Доведення.** Перепишемо рівняння (1) в інтегральному вигляді:

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(X(s))ds + \int_0^t b(X(s))dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u)\tilde{N}(du, ds). \quad (3)$$

Добре відомо, що другий момент процесу  $X$  локально обмежений, тобто

$$\forall T \geq 0 \quad \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}X^2(t) < \infty.$$

За нерівністю Коші–Буняковського:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X^2(t) &\leq 4 \left( x_0^2 + \mathbb{E} \left( \int_0^t a(s)ds \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left( \int_0^t b(s)dW(s) \right)^2 + \mathbb{E} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u)\tilde{N}(ds, du) \right)^2 \right) \\ &= 4 (x_0^2 + E_1(t) + E_2(t) + E_3(t)), \end{aligned}$$

де через  $E_1, E_2, E_3$  позначено відповідні математичні сподівання.

Враховуючи умову (А),

$$\exists A \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |a(x)| \leq A. \quad (4)$$

Оцінимо доданок  $E_1$ . За нерівністю Коші–Буняковського

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \mathbb{E} \left( \int_0^t a(X(s)) ds \right)^2 \leq t \mathbb{E} \int_0^t a^2(X(s)) ds \\ &\quad (\text{за теоремою Фубіні}) = t \int_0^t \mathbb{E} a^2(X(s)) ds \\ &\quad (\text{за формулою (4)}) \leq t \int_0^t A^2 ds = A^2 t^2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що інтеграли у доданках  $E_2, E_3$  є мартингалами. Оцінимо ці доданки:

$$\begin{aligned} E_2(t) + E_3(t) &= \mathbb{E} \left( \int_0^t b(X(s)) dW(s) \right)^2 + \mathbb{E} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \right)^2 \\ &\quad (\text{за ізометрією Іто}) = \mathbb{E} \int_0^t b^2(X(s)) ds + \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \nu(du) ds \\ &= \mathbb{E} \int_0^t \left( b^2(X(s-)) + \int_{\mathbb{R}} c^2(X(s-), u) \nu(du) \right) ds \\ &\quad (\text{за умовою (Б)}) \leq C \mathbb{E} \int_0^t (1 + X^2(s-))^\beta ds \\ &\quad (\text{за теоремою Фубіні}) = C \int_0^t (1 + \mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \\ &\quad (\text{за нерівністю Єнсена}) \leq C \left( t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right). \end{aligned}$$

Таким чином, отримали нерівність

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq 4 \left( x_0^2 + A^2 t^2 + C \left( t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right) \right),$$

з якої неважко отримати нерівність

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C_1 \left( 1 + t^2 + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right),$$

де позначили  $C_1 = 8 \max(x_0^2, A^2, C)$ .

Використовуючи узагальнену лему Гронуолла–Беллмана (див. Corollary 7.5 з книги [3]), отримуємо оцінку

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq \left( C_1^{1-\beta} (1 + t^2)^{1-\beta} + C_1(1 - \beta)t \right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Поділивши останню нерівність на  $t^2 > 0$ , отримаємо, що

$$\frac{\mathbb{E} X^2(t)}{t^2} \leq \left( C_1^{1-\beta} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right)^{1-\beta} + \frac{C_1(1 - \beta)}{t^{1-2\beta}} \right)^{\frac{1}{1-\beta}} \rightarrow C_1, \quad t \rightarrow \infty,$$

з чого неважко вивести, що

$$\exists \tilde{C} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{E} X^2(t) \leq \tilde{C}(1 + t^2),$$

що й треба було довести.

Використаємо вищенаведену лему для доведення наступного результату щодо лінійної оцінки нижньої асимптотики розв'язку майже напевно за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля та степеневі обмеженості шуму.

**Теорема 1.** *Припустимо, що виконуються умови лемми 1. Тоді*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \geq \underline{A} \quad \text{м.н.},$$

де  $\underline{A} = \inf_{x \in \mathbb{R}} a(x)$ .

**Доведення.** Поділимо стохастичне рівняння (3) на  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{X(t)}{t} &= \frac{x_0}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t a(X(s))ds + \frac{1}{t} \int_0^t b(X(s))dW(s) + \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \\ &= \frac{x_0}{t} + T_1(t) + T_2(t) + T_3(t), \end{aligned} \quad (5)$$

де через  $T_1, T_2, T_3$  позначено відповідні доданки. Очевидно, що  $\frac{x_0}{t} \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Дослідимо збіжність доданків  $T_1, T_2, T_3$ .

Маємо, що  $\liminf_{t \rightarrow \infty} T_1(t) \geq \underline{A}$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Дійсно,

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow \infty} T_1(t) &= \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(X(s))ds \\ (\text{за умовою (A)}) &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \underline{A}ds = \underline{A}. \end{aligned}$$

Покажемо, що  $T_2(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , м.н. Оцінимо другий момент підінтегрального процесу у доданку  $T_2$ . За умовою (2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}b^2(t) &\leq \mathbb{E} \left( C \left( 1 + (X^2(t))^\beta \right) \right) = C \left( 1 + \mathbb{E} (X^2(t))^\beta \right) \\ (\text{за нерівністю Єнсена}) &\leq C \left( 1 + (\mathbb{E}X^2(t-))^\beta \right) \\ (\text{за лемою 1}) &\leq C \left( 1 + \left( \tilde{C} ((1+t^2))^\beta \right) \right) \leq C_1(1+t^{2\beta}) \end{aligned}$$

для деякої сталої  $C_1 \geq 0$ . Тоді, використовуючи наслідок 1 зі статті [5], отримуємо збіжність

$$T_2(t) = \frac{1}{t} \int_0^t b(s)dW(s) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Покажемо, що  $T_3(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$ , м.н. Аналогічно оцінюванню другого моменту підінтегрального процесу у доданку  $T_2$ , можна отримати оцінку підінтегрального процесу у доданку  $T_3$ :

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(X(t-), u) \nu(du) \leq C(1+t^{2\beta}).$$

Тоді, використовуючи наслідок 2 зі статті [5], отримуємо збіжність

$$T_3(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(X(s-), u) \tilde{N}(ds, du) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Таким чином, використовуючи одержані вище збіжності, переходячи до нижньої границі при  $t \rightarrow \infty$  у формулі (5), отримуємо твердження теореми.

З попередньої теореми неважко отримати наступний наслідок щодо прямування розв'язку до нескінченності майже напевно.

**Наслідок 1.** *Припустимо, що виконуються умови теореми 1, причому  $\underline{A} > 0$ . Тоді*

$$X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Останній наслідок надає деякі прості достатні умови того, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності майже напевно. Умову обмеженості для коефіцієнта зносу можна послабити, якщо не вимагати її виконання в деякому відрізку. Сформулюємо та доведемо наступну теорему, що є основним результатом цієї статті.

**Теорема 2.** *Припустимо, що:*

(А) *функції  $a, b, c$  задовольняють локальну умову Ліпшиця:*

$$\forall R \geq 0 \quad \exists L \geq 0 \quad \forall \{x, y\} \subset [-R, R]$$

$$(a(x) - a(y))^2 + (b(x) - b(y))^2 + \int_{\mathbb{R}} (c(x, u) - c(y, u))^2 du \leq L(x - y)^2.$$

*Крім того, припустимо, що для деякого числа  $\delta > 0$  виконуються умови:*

(Б) *функція  $a$  обмежена та, крім того, відокремлена від нуля поза відрізком:*

$$\exists \underline{A} > 0 \quad \forall x \notin [-\delta, \delta] \quad a(x) \geq \underline{A};$$

(В) *функції  $b, c$  задовольняють умову степеневого зростання (2), а також умову локальної невід'єдненості:*

$$\forall R \geq 2\delta \quad \exists \underline{C} > 0 \quad \left[ \begin{array}{ll} \forall x \in [-2\delta, R] & |b(x)| \geq \underline{C}, \\ \forall x \in [-2\delta, R] & \int_{\mathbb{R}} c(x, u) \nu(du) \geq \underline{C}. \end{array} \right. \quad (6)$$

*Тоді  $X(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$*

**Доведення.** З умови (А) теореми випливає, що для будь-якого початкового значення  $X(0)$  існує єдиний сильний розв'язок рівняння (1), що є строго марковським процесом. Для  $x \in \mathbb{R}$  позначимо через  $X_x$  розв'язок рівняння (1) з початковою умовою  $X_x(0) = x$  та через

$$\tau_x(A) = \inf \{t \geq 0: X_x(t) \in A\}$$

позначимо момент потрапляння розв'язку в множину  $A$ .

*Крок 1.* Покажемо, що розв'язок  $X$  виходить з інтервалу  $(-\infty, -\delta)$  майже напевно. Позначимо через  $\tilde{a}$  ліпшицеву функцію таку, що  $\tilde{a}(x) = a(x)$ ,  $x \notin [-\delta, \delta]$ , та  $\tilde{a}(x) \geq \underline{A}$ ,  $x \in [-\delta, \delta]$ . Для  $x \in \mathbb{R}$  позначимо через  $\tilde{X}_x$  розв'язок стохастичного рівняння

$$d\tilde{X}_x(t) = \tilde{a}(\tilde{X}_x(t))dt + b(\tilde{X}_x(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(\tilde{X}_x(t), u)\tilde{N}(du, dt) \quad (7)$$

з початковою умовою  $\tilde{X}_x(0) = x$ . Стохастичне рівняння (7) задовольняє умови наслідку 1, тому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{X}_x(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (8)$$

З властивості локальності стохастичних інтегралів та єдиності розв'язку випливає, що

$$\forall x \notin [-\delta, \delta] \quad \forall t \in [0, \tau_x[-\delta, \delta]) \quad X_x(t) = \tilde{X}_x(t) \quad \text{м.н.} \quad (9)$$

Таким чином, з формул (8) та (9) випливає, що  $\tau_{x_0}[-\delta, +\infty) < \infty$  м.н.

**Крок 2.** Покажемо, що для довільного числа  $R \geq 2\delta$  розв'язок  $X$  досягає множини  $[R, +\infty)$  майже напевно. З умови (B) випливає, що розв'язок  $X$  майже напевно виходить з проміжку  $[-2\delta, R]$ . Більш того, для будь-якого числа  $R \geq 2\delta$  існує таке число  $p > 0$ , що для будь-якої початкової умови  $x \geq -\delta$  імовірність того, що розв'язок  $X_x$  вийде з проміжку  $[-2\delta, R]$  через правий кінець, не менше, ніж  $p$ . Враховуючи крок 1, отримуємо, що з імовірністю 1 знайдеться момент часу  $t$  такий, що  $X(t) > R$ .

**Крок 3.** Покажемо нарешті, що розв'язок  $X$  прямує до нескінченності майже напевно. Виконуючи оцінки, як у теоремі 1, можна показати, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P} \left\{ \inf_{t \geq 0} \tilde{X}_x(t) > \delta \right\} \rightarrow 1, \quad R \rightarrow \infty.$$

Тоді, враховуючи формули (8) та (9), отримуємо, що

$$\inf_{x \geq R} \mathbb{P} \{X_x(t) \rightarrow +\infty\} \rightarrow 1, \quad R \rightarrow \infty.$$

Враховуючи кроки 1, 2 та строго марковську властивість, з останньої збіжності отримуємо

$$\mathbb{P} \{X(t) \rightarrow +\infty\} = 1,$$

що й треба було довести.

**4. Висновки.** Ми розглянули стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками та навели деякі достатні умови, що гарантують прямування його розв'язку до нескінченності (транзієнтність) майже напевно. Спочатку ми довели допоміжний результат про апіорну оцінку другого моменту розв'язку за умов обмеженості зносу та степеневості обмеженості шуму. Далі ми довели теорему про транзієнтність розв'язку за додаткової умови відокремленості зносу від нуля. В основному результаті статті ми встановили транзієнтність розв'язку за умов обмеженості зносу, його відокремленості від нуля поза межами деякого відрізка, степеневості обмеженості шуму та його невивірженості у деякому відрізку.

#### Список використаної літератури

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.
2. Булдігін В. В., Клесов О. І., Тимошенко О. А. Асимптотична поведінка стохастичних диференціальних рівнянь. Вінниця: ФОП Кушнір Ю. В., 2018.
3. Mao X. Exponential stability of stochastic differential equations. *Marcel Dekker*. 1994.
4. Yuskovych V. K. On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. *Theory of Stochastic Processes*. 2023. Vol. 27, No. 1. P. 53–66.
5. Юськович В. К. Про асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками. *Український математичний журнал*. 2023. Вип. 75, № 11. С. 1570–1584.
6. Pilipenko A., Proske F. N. On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case. *Stochastics and Dynamics*. 2018. Vol. 18, No. 6.
7. Pilipenko A., Proske F. N. On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise. *Statistics & Probability Letters*. 2018. Vol. 132. P. 62–73.

8. Pavlyukevich I., Pilipenko A. Generalized Peano problem with Lévy noise. *Electronic Communications in Probability*. 2020. Vol. 25, No. 85. P. 1–14.
9. Kulik A., Pilipenko A. Yu. On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2021. Vol. 72. P. 1445–1481.

**Yuskovych V. K.** On transience of solutions of stochastic differential equations with jumps.

In the article, we consider a stochastic differential equation with jumps and state some sufficient conditions that guarantee transience (approaching to infinity) of its solution almost surely. First, we prove an auxiliary result about an a priori estimation of the second moment of the solution under the conditions of boundedness of the drift and power-law boundedness of the noise. Next, we prove a theorem on transience of the solution under the additional condition that the drift is separated from zero. The main result of the article establishes the transience of the solution under the conditions of boundedness of the drift, its separation from zero outside of some segment, power-law boundedness of the noise, and its non-degeneracy in some segment.

**Keywords:** stochastic differential equation, jumps, transience, approaching infinity, asymptotic behavior.

## References

1. Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. (1968) Stochastic differential equations. *Kiev: Naukova dumka* [In Russian].
2. Buldygin, V. V., Klesov O. I., Tymoshenko O. A. (2018) Asymptotic behavior of stochastic differential equations. *Vinnytsia: FOP Kushnir Yu. V.* [In Ukrainian].
3. Mao, X. (1994) Exponential stability of stochastic differential equations. *Marcel Dekker*.
4. Yuskovych, V. K. (2023) On asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations in multidimensional space. *Theory of Stochastic Processes*, 27, 1, 53–66.
5. Yuskovych, V. K. (2023) On asymptotics of solutions of stochastic differential equations with jumps. *Ukrainian Mathematical Journal*, 75, 11, 1570–1584 [In Ukrainian].
6. Pilipenko, A., Proske, F. N. (2018) On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case. *Stochastics and Dynamics*, 18, 6.
7. Pilipenko, A., Proske, F. N. (2018) On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise. *Statistics & Probability Letters*, 132, 62–73.
8. Pavlyukevich, I., Pilipenko, A. (2020) Generalized Peano problem with Lévy noise. *Electronic Communications in Probability*, 25, 85, 1–14.
9. Kulik, A., Pilipenko, A. Yu. (2021) On regularization by a small noise of multidimensional ODEs with non-Lipschitz coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*, 72, 1445–1481.

Одержано 08.04.2024

УДК 378+51

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).58-65](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).58-65)**С. В. Вронський<sup>1</sup>, Ю. В. Андрашко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,  
[s.vronsky@uzhnu.edu.ua](mailto:s.vronsky@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9960-6437>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,  
кандидат технічних наук  
[yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua](mailto:yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

## АВТОМАТИЗОВАНЕ ТЕСТУВАННЯ ЯК ЗАСІБ ОЦІНЮВАННЯ РІВНЯ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

В статті розглянуто переваги та недоліки автоматизованого методу тестування для оцінки знань здобувачів вищої освіти. Також висвітлені можливі альтернативи модернізації даного методу у майбутньому. Враховуючи поступову інформатизацію суспільства в глобальному масштабі, даний підхід дозволить підвищити якість механізму оцінки знань учнів — майбутніх здобувачів вищої освіти.

**Ключові слова:** автоматизоване тестування, вища освіта, рівень знань, генерування завдань, оптимізація математичного алгоритму.

**1. Вступ.** Навчання є складним та багатогранним процесом, що включає в себе не тільки процес набуття певних знань та навичок, необхідних у подальшому житті, але і перевірку результатів самого навчання. Враховуючи поступову інформатизацію суспільства, все більшого поширення набули методи автоматизованої перевірки знань.

Критерії оцінювання є різноманітними, оскільки ті методи оцінювання, що є виключно об'єктивними, адекватно оцінюють результати тестування для точних та природничих наук, у випадку гуманітарних дисциплін зберігається суб'єктивна частина, що оцінюється безпосередньо людиною.

Огляд автоматизованого методу тестування дозволить пояснити доцільність його застосування з точки зору визначення рівня знань здобувачів вищої освіти.

**2. Основний результат. Постановка завдання.** Основним завданням даного дослідження є визначення теоретичних основ та засад формування методології автоматизованої тестової перевірки знань здобувачів вищої освіти. Також розглядаються альтернативні методи оцінювання, що можуть підвищити ефективність функціонування такого підходу до оцінки рівня знань майбутніх абітурієнтів.

Буде враховано специфіку попередніх моделей автоматизованих систем оцінки рівня знань здобувачів вищої освіти при розробці можливих рекомендацій щодо підвищення ефективності їх функціонування.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Оскільки оцінювання рівня знань майбутніх студентів є важливим завданням, теоретичними та практичними його розробками займалися як вітчизняні, так і закордонні науковці.

Серед вітчизняних дослідників варто відмітити таких як П. М. Маланюк, О. С. Шкіль, В. І. Каук, С. В. Напрасник, Є. С. Цимбалюк, О. А. Щербаков,

Л. В. Зайцева, Н. О. Прокоф'єва. В своїх роботах вони проводили дослідження стосовно автоматизації процесу навчання, а також аналізували метод автоматизованого тестового оцінювання знань.

Зарубіжні науковці досліджували також ефект впровадження даного методу та його ефективність: Lichtenwald Terrance G., Jagannathan K. T. Gomersall Bob, Scheuermann, Friedrich; Julius Björnsson.

В дослідженні [4] автори розглянули модель оцінювання ефективності систем електронного навчання методом визначення задоволення студентів від навчання. Використовуючи метод PLS-SEM емпіричним шляхом було підібрано параметри моделі визначення задоволення студентів. Показано, що якість та простота системи тестування знань входить до чотирьох факторів, які є значущими при оцінюванні системи електронного навчання в найбільшій мірі.

У статті [1] систематизовано дидактичні завдання, для вирішення яких застосовується автоматизовані системи педагогічного тестування. Обґрунтовано систему критеріїв для вибору автоматизованої системи педагогічного тестування для вирішення завдань педагогічної діагностики.

Результати дослідження [2] розкривають особливості конструювання тестів для оцінювання загального рівня знань здобувачів вищої освіти в сучасних умовах державної освітньої системи. Особлива увага приділяється структуруванню тестової системи загалом, так і тестовим блокам зокрема.

У дослідженні [3] виявлено чинники, що сприяють подоланню труднощів, що виникають у першокурсників, як-от: електронні ресурси бібліотеки, умови проживання в гуртожитку, стосунки в студентській групі, допомога від батьків, родичів, однокурсників, студентів старших курсів. Також приділена увага емоційній підготовці майбутніх абітурієнтів для вирішення тестів, генерованих автоматизованою системою оцінювання рівня знань.

Стаття [5] описує поєднання автоматизованого методу оцінювання знань із рукописним варіантом вирішення завдань (Paper-and-Pencil-Based Testing). Це дозволяє усунути надмірний вплив як об'єктивного, так і суб'єктивного елементів в оцінюванні якості знань абітурієнта.

При створенні системи автоматизованого контролю знань та умінь розробники повинні брати до уваги кілька факторів, що будуть впливати на ефективність дії самої системи. Це:

- розробка методу генерування самого тестового блоку, що включає в себе завдання різноманітної складності;
- створення алгоритму обробки даних;
- визначення найбільш ефективного методу інтерпретації отриманих в результаті перевірки результатів.

Розробка тестового блоку включає в себе наявність певного набору завдань, що відповідають спеціальності майбутнього здобувача вищої освіти. Це може бути здійснено безпосереднім імпортом файлів з готовими завданнями або створення програмного забезпечення, що діє за принципом генератора випадкових чисел, коли тестовий блок формується навмання самою системою із сукупності завдань однакового рівня складності.

Алгоритм обробки даних включає в себе розподіл та сортування отриманих результатів, залежно від того, який рівень успішності проявив кожен з абітурієнтів.

Інтерпретація результатів тестування є проблемою, вирішення якої ґрунтується на тих показниках, які здатна виміряти і подати для аналізу система тестування. З іншого боку, педагогічна теорія визначає вимоги до змісту результатів тестування. Сьогодні в автоматизованих системах тестування вимірюються і фіксуються такі показники щодо навчальних досягнень студента і його психофізіологічних характеристик:

- частка правильних відповідей:
  - проста;
  - з корекцією вгадування;
  - векторна відповідно до структури бази завдань;
  - за компонентами семантичної мережі
  - рівень складності завдань, що студент виконує із ймовірністю правильної відповіді, що складає 50%;
- час виконання кожного завдання.

Під час як формування набору тестових завдань, так і вибору методу інтерпретації отриманих результатів необхідно враховувати, до якого типу систем автоматичного оцінювання знань належить обрана. Враховуючи це, можливо уникнути викривлення отриманих результатів та найбільш повно і достовірно оцінити рівень знань здобувача вищої освіти.

**Види систем автоматичного оцінювання знань.** Загалом усі системи автоматизованого тестування знань можна поділити на три типи: самоналаштовувані (адаптивні) системи, стаціонарні та комбіновані [1]. Кожна з них має як свої переваги, так і недоліки. В залежності від предмету, тестування з якого проходить здобувач вищої освіти, необхідно обирати найбільш адекватну систему тестового оцінювання.

#### ***Самоналаштовувана (адаптивна) система тестування***

У деяких випадках система тестового оцінювання може й сама приймати рішення, яке наступне питання буде перед здобувачем — так звана самоналаштовувана система, що дозволяє оцінити попередній рівень знань абітурієнта, згодом, залежно від результатів тестування вирішувати, яке питання має бути наступним.

За умови, якщо відсотковий показник правильних відповідей у попередніх тестах знижується, знижується також і рівень складності наступних питань, і навпаки. При підвищенні успішного вирішення тестових завдань даний тип систем обирає більш складні завдання. Таким чином спостерігається ефект зворотного зв'язку між програмою та людиною, яка вирішує поставлені завдання.

Перевагою даної системи є те, що вона дозволяє виявити показник освітнього рівня здобувача вищої освіти з подальшим можливим його покращенням, недоліком — те, що при вступі до вищих навчальних закладів абітурієнти з різним рівнем знань можуть набирати однакову кількість балів. Це обумовлено тим, що одному абітурієнту дістаються завдання більш прості, аніж іншому.

Фактично, мова йде про систему автоматичного регулювання, що складається з двох послідовних ланок: об'єкту регулювання (тобто набору завдань) і самого регулятора (механізму визначення наступного завдання за складністю).

### ***Стационарна система тестування***

На відміну від адаптивної системи, даний вид автоматизованого тестування передбачає собою просто набір певних питань та завдань, що пропонуються для вирішення здобувачу вищої освіти. Усі завдання розподілені за рівнем складності та за порядком їх вирішення, незалежно від того, які результати при вирішенні попередніх завдань демонструє абітурієнт. Варіанти, що можуть бути як однаковими, так і різними, діляться на кілька блоків із різним рівнем складності.

Перевагою такого підходу є однаковий підхід до всіх здобувачів, оскільки надає їм можливість продемонструвати свої знання за рівних умов та при виконанні однакових тестів. Таким чином можливо обрати найбільш талановитих здобувачів.

Недоліком може стати вгадування правильної відповіді, що не базується на реальних знаннях здобувача. На відміну від адаптивної системи, стаціонарна дозволяє певну вільність при вирішенні завдань, заснованих на тестовому методі оцінювання знань.

### ***Комбінована система тестування***

Суть комбінованої системи оцінювання полягає в поєднанні рис двох вищезгаданих систем, оскільки дозволяє усунути недоліки кожної з них. Тестова форма (тобто, перші кілька блоків) включають в себе елементи стаціонарної системи — таким чином оцінюється загальний рівень знань здобувача вищої освіти.

Після того, як абітурієнт виконав завдання, система оцінює його рівень знань на основі поточних результатів, формуючи рівень складності для наступних блоків тестування. На основі подальших результатів автоматично визначається рівень складності завдань, що формують кожен черговий блок.

Недоліком даного методу автоматичного оцінювання знань є можливість хибного рішення системи стосовно складності подальшого рівня завдань, оскільки необхідно враховувати фактор вгадування правильної відповіді з попередніх тестових завдань. Перевага методу полягає в тому, що за умови надання здобувачу питань з відкритою відповіддю, виявиться, чи насправді при вирішенні блоків із закритою відповіддю, він (чи вона), керувалися виключно набутими попередньо знаннями.

### ***Алгоритм побудови та аналізу ефективності створеної системи автоматизованої оцінки знань***

Враховуючи різноманітність розглянутих систем, важливо сформулювати покрокову схему для створення аналогу схеми на практиці. В залежності від того, яка саме система розглядається, етапи її роботи можливо поділити на наступні стадії:

- 1) початкова (ознайомлення) — для адаптивної моделі необхідно ознайомитися із попередніми результатами, що були продемонстровані здобувачем з метою найбільш ефективно побудови подальших блоків завдань. Для стаціонарного варіанту моделі даний етап не є важливим, оскільки завдання системи видавати вже сформовані тестові блоки;
- 2) аналіз отриманих даних. Для всіх трьох типів систем оцінювання він є невід'ємним, складаючи основу для того, щоб вирішити, яку саме бальну оцінку отримує абітурієнт;

- 3) обробка попередніх результатів, що включає в себе агрегування даних за блоками, рідше — порівняння результатів окремих здобувачів;
- 4) формування остаточного результату оцінювання за прийнятою шкалою.

Винятком є комбінована система автоматизованого тестового оцінювання, оскільки розробникам доведеться з самого початку її створення встановлювати фільтр, за допомогою якого система буде здійснювати переключення з одного режиму на інший. Тобто встановлений в систему фільтр має визначати критичне значення помилок чи правильних відповідей, відповідно до якого зі стаціонарної системи переходить в адаптивну.

У подальшому формування алгоритму відповідає загальному принципу: оцінювання результатів тестування — їх аналіз — формування кінцевого балу здобувача.

При цьому розробник тестової системи має уникати того, щоб у запропонованих варіантах відповідей були відсутні варіанти, що дублюють один одного, або того, що відповідь може бути неоднозначною, і трактуватися кожним із здобувачів по-різному.

У цьому випадку в саму систему закладена відповідь, що на думку розробника, є правильною. Хоча, відповідь може бути дуальною, тобто, наприклад, з чотирьох запропонованих варіантів однаково істинними за суттю, можуть бути два, три, чи навіть, чотири.

### ***Психо-емоціональна складова автоматизованого тестування***

Суб'єктивна точка зору розробників тестової системи може викривити об'єктивно отримані результати автоматизованого тестування. Для уникнення цієї проблеми варто формулювати запитання максимально чітко, що відповідають реальним фактам в тій, чи іншій царині дисципліни [4].

Типовим прикладом є так званий «Парадокс Монті Голла», коли гравцю з телевізійної гри пропонують змінити своє рішення. Саме формулювання питання наступне:

«Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір?».

Такий варіант поведінки системи також може бути вкладений в систему автоматизованої тестової системи, проте він змушує засумніватися абітурієнта в надійності правильної відповіді, оскільки в даному випадку можуть бути присутні як емоційна, так і психологічна складова, що суттєво впливають на остаточне рішення, чи є обране правильним. В цьому випадку можуть бути перевірені не тільки рівень попередньо набутих знань та навичок, а також емоційна стійкість та можливість приймати рішення за складних умов. Такі навички необхідні також за умови, якщо автоматизована тестова система розподіляє час на вирішення певного завдання, замість того, щоб абітурієнту був відведений загальний час на вирішення всіх завдань в цілому [1].

В останньому випадку здобувач вищої освіти може пропускати деякі тестові завдання, вирішуючи ті, у відповідях на які він (чи вона) є впевнені. В результаті на вирішення сумнівних завдань залишається час.

Такий підхід дозволяє визначити, чи є потенційно придатними до професій,

що потребують негайних рішень в обмежений проміжок часу, а також перевіряють абітурієнта на стресостійкість. Серед цих професій варто відзначити майбутніх лікарів, пілотів, моряків, інженерів [1].

Специфічність даних професій полягає не тільки в тому, щоб приймати складні рішення в короткі проміжки часу, але також в тому, що нести відповідальність за правильність рішення, що було прийняте. Це відбувається через те, що такі професії вимагають також усвідомлення серйозності прийнятого рішення.

Сам по собі такий підхід може бути складним, оскільки часто люди діють на підставі емоцій, що не завжди є хорошими радниками. Наприклад, один з нейрохірургів, що є відомим сьогодні, зізнався, що іноді варто нічого не робити з пацієнтом, аби не нашкодити, ніж робити щось за принципом «робити хоча б щось».

В деяких випадках при вирішенні тестових завдань здобувач вищої освіти перебуває перед вибором: або залишити той варіант, що він вважає за правильний, чи змінити його на інший, або просто не відповідати на запитання.

В цьому і можуть полягати складнощі функціонування автоматизованих систем знань абітурієнтів. Система може оцінити виключно відсотковий півень правильних, чи неправильних відповідей на поставлені тестові завдання, проте не зможе оцінити, який емоційний стан був у абітурієнта під час виконання завдання.

Враховуючи вищесказане, можливо у якості індикатора застосувати час прийняття рішення щодо того, яка відповідь правильна, яка — ні, теоретично можливо визначити як впевненість у тому, що відповідь є правильною, також рішучість прийняття даного рішення.

### ***Співставлення психо-емоціональної складової тестування з алгоритмом роботи системи оцінювання***

При розробці завдань для автоматизованого тестового контролю необхідно враховувати як ефективність дії безпосередньо самої системи, так і взаємний зв'язок, що виникає між здобувачем вищої освіти та безпосередньо самою програмою, налаштовану на оцінку рівня знань абітурієнта [5].

Це можливо здійснити за допомогою синхронізації процесів формування переліку завдань, що необхідні для вирішення, і прогнозування можливої поведінки при їх вирішенні. Для цього можливо сформувати електронну платформу, що буде поєднувати між собою елементи адаптивної, стаціонарної, комбінованої систем оцінювання із фільтром часу щодо прийняття рішень про правильність обраної відповіді.

В результаті ефективність відбору кандидатів здобувачів вищої освіти підвищиться.

Необхідно також враховувати, на яку саме спеціальність планує вступати абітурієнт. В залежності від важливості його спеціальності, можливо коригувати часовий діапазон для вирішення питання щодо правильності обраного рішення [3].

**3. Висновки.** В процесі розвитку інформаційних технологій все більшу нішу займають автоматизовані методи оцінювання якості знань здобувачів вищої освіти. Тестовий метод є доволі простим, в той же час під час його розробки необхідно враховувати не тільки самі завдання, що пропонуються для вирішення абітурієнту, проте і ту спеціальність, що здобувач планує отримати.

Розглянуті моделі дозволяють оцінити ефективність кожної з них, також визначити, що за недоліки можуть виникати при їх застосуванні на практиці.

Серед розглянутих — адаптивної, стаціонарної та комбінованої моделей автоматизованого оцінювання рівня знань здобувачів вищої освіти, найбільш ефективною є самоналаштовувана (адаптивна) модель, що дозволяє в режимі онлайн адаптуватися під рівень знань абітурієнта, що дозволяє визначити поточний рівень знань.

При створенні системи автоматизованого оцінювання варто враховувати не тільки час на виконання завдань, проте також і їх тип, що може вплинути на результати кінцевого тестування. Специфіка поведінки кожного окремо взятого абітурієнта також впливає на можливі кінцеві результати іспиту.

Тому, окрім звичайного формування системи автоматизованого оцінювання, варто брати до уваги випадкову величину, що вирахувати досить складно — а саме людську поведінку.

Людська поведінка в ситуації на реагування перед нею поставлені проблеми чи завдання є основою для формування автоматизованої системи тестового оцінювання, оскільки на основі попередніх вибірок формується майбутня схема системи оцінювання, що може використовуватися у теперішньому, так і у майбутньому. Моделювання базується на основі людських рішень, здійснених попередньо.

Подальша розробка систем автоматизованого оцінювання має включати в себе елементи як суб'єктивні, так і об'єктивні параметри - як формат самої системи, так і прогнозовану поведінку користувача. Для більшої надійності щодо вірогідності правильного варіанту відповіді можливо ввести завдання, що генеруються випадково, незалежно від того, як абітурієнт вирішував попередні завдання.

### Список використаної літератури

1. Білоусова Л. І., Колгатін О. Г. Проблеми ефективного використання автоматизованих систем тестування. *Інформаційні технології в освіті та науці*. 2015. Vol. 1, № 1. P. 8–16. URL: <https://uesit.org.ua/index.php/itse/article/view/193> (дата звернення: 08.12.2023).
2. Кухар О. Г., Сергієнко В. П. Конструювання тестів. Курс лекцій : навч. посіб. Луцьк, 2022.
3. Староста В. І., Попадич О. О. Деякі чинники адаптації студентів-першокурсників в умовах класичного університету. *Ukrainian Journal of Educational Studies and Information Technology*. 2018. Vol. 6, № 2. P. 16–26.
4. Al-Fraihat D., Joy M., Masa'deh R. & Sinclair J. Evaluating E-learning systems success : An empirical study. *Computers in human behavior*. 2020. Vol. 102. P. 67–86. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chb.2021.08.004>
5. Ebrahimi M. R., Toroujeni S. M. H. & Shahbazi V. Score Equivalence, Gender Difference, and Testing Mode Preference in a Comparative Study between Computer-Based Testing and Paper-Based Testing. *International journal of emerging technologies in learning*. 2019. Vol. 14, № 7. P. 128–143. URL: <https://online-journals.org/index.php/i-jet/article/view/10175> (дата звернення: 10.12.2023).

**Vronskyi S. V., Andrashko Yu. V.** Automated testing as a method of assessing the level of knowledge of higher education acquires.

The article examines the advantages and disadvantages of the automated testing method for assessing the knowledge of higher education applicants. Possible alternatives for modernizing this method in the future are also highlighted. Taking into account the gradual informatization of society on a global scale, this approach will allow improving the quality

of the knowledge assessment mechanism of students — future students of higher education.

**Keywords:** automated testing, higher education, knowledge level, task generation, mathematical algorithm optimization.

## References

1. Bilousova, L. I., & Kolhatin, O. H. (2015). Problemy efektyvnoho vykorystannia avtomatyzovanykh system testuvannia. *Informatsiini tekhnolohii v osviti ta nautsi*, 1(1), 8–16. Retrieved from <https://uesit.org.ua/index.php/itse/article/view/193> [in Ukrainian].
2. Kukhar, O. H., & Serhiienko, V. P. (2022). *Konstruiuvannia testiv*. Kurs leksii: navch. posib. Lutsk [in Ukrainian].
3. Starosta, V. I., & Popadych, O. O. (2018). Deiaki chynnyky adaptatsii studentiv-pershokursnykiv v umovakh klasychnoho universytetu. *Ukrainian Journal of Educational Studies and Information Technology*, 6(2), 16–26 [in Ukrainian].
4. Al-Fraihat, D., Joy, M., Masa'deh, R., & Sinclair, J. (2020). Evaluating E-learning systems success : An empirical study. *Computers in human behavior*, 102, 67–86. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2021.08.004>
5. Ebrahimi, M. R., Toroujeni, S. M. H., & Shahbazi, V. (2019). Score Equivalence, Gender Difference, and Testing Mode Preference in a Comparative Study between Computer-Based Testing and Paper-Based Testing. *International journal of emerging technologies in learning*, 14(7), 128–143. Retrieved from <https://online-journals.org/index.php/i-jet/article/view/10175>

Одержано 25.01.2024

УДК 004.65

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).66-82](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).66-82)**М. І. Глебена<sup>1</sup>, А. В. Макарович<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
завідувач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,  
кандидат фізико-математичних наук

myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>

<sup>2</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,  
здобувач другого (магістерського) рівня вищої освіти, ОНП "Системи і методи прийняття  
рішень"

adalbert.makarovych@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2352-9933>

## SINGLESTOREDB КОНЕКТОР ДЛЯ APACHE BEAM

В статті досліджено процес розробки SingleStoreDB конектора для Apache Beam та складнощі, які виникли під час цього процесу. Для реалізації конектора використано мову програмування Java. Для компіляції та менеджменту залежностей проекту використано систему автоматичного збирання Gradle. Для забезпечення неперервного тестування конектора використано інструмент для неперервної інтеграції Jenkins. Задля комунікації із базою даних використано бібліотеку SingleStore JDBC Driver. Об'єктом дослідження обрано процес обміну даних між Apache Beam та SingleStoreDB. Предметом дослідження є конектор, що дозволяє ефективно обмінюватись даними між Apache Beam та SingleStoreDB. Для розробки конектора проаналізовані вимоги до нього. Продемонстровано, що основними вимогами є можливість паралельного запису даних, можливість паралельного читання даних за допомогою розподілених властивостей SingleStoreDB, можливість виконати запити читання даних непаралельно для специфічних запитів. Досліджено можливість використання різних способів паралельного читання та запису даних. Згідно досліджень найоптимальнішим способом паралельного читання є розбиття запиту на декілька незалежних використовуючи певну колонку. Найоптимальнішим способом запису даних є використання запиту LOAD DATA. На відміну від INSERT запиту надсилає дані як окремий потік байтів, а не як частину запиту. За рахунок цього, дані можна відправляти набагато більшими групами. Протестовано конектор та налаштовано систему неперервної інтеграції. Розроблено документацію та інтегровано конектор в GitHub репозиторій Apache Beam. Розроблений конектор може бути використаний для ETL процесів під час яких Apache Beam відповідає за обробку та збереження даних в SingleStoreDB, що надає зручніший спосіб конфігурації та кращу продуктивність в порівнянні із JdbcIO конектором. Результати досліджень можуть бути використані для створення конекторів між іншими технологіями та СКБД SingleStoreDB.

**Ключові слова:** база даних, конектор, розподілені системи, ETL, Apache Beam, SingleStore, OLAP, OLTP.

**1. Вступ.** Apache Beam вважається наступним кроком в еволюції розподілених систем обробки даних [25]. Існуючий JdbcIO конектор дозволяє з'єднання із більшістю реляційних баз даних, однак, він не враховує їхні особливості. SingleStoreDB є розподіленою системою керування базами даних. Ця СКБД підтримує як OLAP так і OLTP способи використання. За рахунок цього, вона набула популярності для аналізу великих обсягів даних. Архітектура SingleStoreDB передбачає можливості для паралелізації запитів запису та читання. Ці можливості не враховані в JdbcIO конекторі.

Apache Beam містить більше 50 конекторів, які інтегровані в систему і підтримуються розробниками APACHE SOFTWARE FOUNDATION. Крім цього, існує 10 конекторів, які не вбудовані в саму систему і підтримуються третіми сторонами. Незважаючи на таку велику кількість інтеграцій, існує величезна кількість технологій, з якими Apache Beam ще не інтегрований.

Якщо розглядати використання Apache Beam із реляційними базами даних, які використовують мову SQL, то найзагальнішим способом інтеграції таких технологій є використання JDBC драйверів. Apache Beam включає в себе JdbcIO конектор. За допомогою цієї бібліотеки, система може під'єднуватись до будь-якої реляційної бази даних, яка має свій JDBC драйвер. Таке рішення є найпростішим способом розширити кількість підтримуваних технологій.

Таким чином, на даний момент, можливо читати та записувати дані в базу даних SingleStoreDB використовуючи JdbcIO. Але цей спосіб не враховує особливості бази даних SingleStoreDB. Через це конектор має не найкращу швидкість та надає не найкращий користувацький досвід. Це зумовлює необхідність розробки конектора, який враховував би особливості SingleStoreDB та надавав якіснішу практику використання для користувачів.

**2. Основний результат.** *Об'єктом дослідження* є процес обміну даних між Apache Beam та SingleStoreDB.

*Предметом дослідження* є конектор, що дозволяє ефективно обмінюватись даними між Apache Beam та SingleStoreDB.

*Мета роботи* полягає у реалізації Apache Beam конектора для SingleStoreDB, який би враховував можливості та особливості цієї СКБД.

*Для досягнення поставленої мети виокремлені наступні завдання:*

- сформулювати вимоги до конектора, необхідні для задоволення потреб користувачів;
- реалізувати та протестувати конектор;
- інтегрувати конектор в GitHub репозиторій Apache Beam.

**Матеріал і методи досліджень.** Для реалізації конектора використано мову програмування Java. Для компіляції та менеджменту залежностей проекту використано систему автоматичного збирання Gradle. Для того, щоб забезпечити неперервне тестування конектора використано інструмент для неперервної інтеграції Jenkins. Для комунікації із базою даних використано бібліотеку SingleStore JDBC Driver.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** В 2017 році APACHE SOFTWARE FOUNDATION оголосила Apache Beam проектом найвищого рівня [22]. Ця технологія базується на моделі програмування MapReduce опублікованій в 2004 році розробниками компанії Google [12]. В цій науковій роботі продемонстровано, що за допомогою цієї моделі можна виразити багато прикладних завдань. Програми, написані в цьому функціональному стилі, автоматично розпаралелюються та виконуються на великому кластері стандартних машин. Це дозволяє програмістам без жодного досвіду роботи з паралельними та розподіленими системами, легко використовувати ресурси таких систем.

Apache Beam може бути використаний для ETL завдань та інтеграції даних. Такі завдання корисні для переміщення великих обсягів даних між джерелами даних, трансформації їх до необхідного формату або завантаження даних в нові системи [3].

Apache Beam розроблений таким чином, щоб користувачі могли реалізувати новий I/O конектор. Для цього завдання розроблені спеціальні інтерфейси та набір інструкцій та рекомендацій [8, 9, 10, 15].

SingleStoreDB це розподілена реляційна СКБД [11]. За рахунок розподіленості запити читання та завантаження даних можуть бути розпаралелені. SingleStoreDB надає можливості швидкого завантаження даних за допомогою запитів LOAD DATA [18], а також можливість паралельного читання даних [19]. Ці особливості СКБД були вдало використані для створення конектора із Apache Spark, а отже перспективним є дослідження використання їх при інтеграції із Apache Beam.

**Результати дослідження та їх обговорення.** Створення якісного конектора вимагає детального аналізу особливостей систем, які він має поєднувати. Також важливо виділити ситуації, в яких користувачі будуть використовувати ці системи разом. Після проведення цього аналізу, можна виділити найважливіший функціонал та сформулювати вимоги до конектора.

SingleStoreDB це розподілена реляційна СКБД [11]. Ця СКБД представляє собою кластер із декількома вузлами. Кожен вузол є процесом запущеним на конкретній машині. Всі вузли поділяються на два типи:

- Агрегатори — відповідають за передачу запитів до листків і надсилання результату виконання запитів до клієнта
- Листки — вузли, що зберігають частину даних.

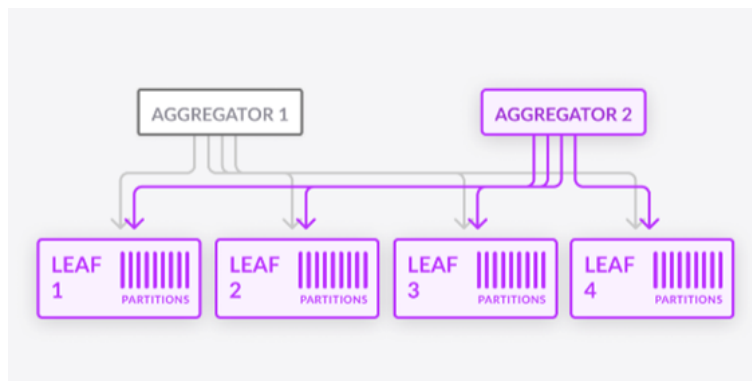


Рис. 1. Архітектура SingleStoreDB кластера [11].

Для оптимізації швидкодії, SingleStoreDB автоматично розбиває дані на розділи. Кожен листок може зберігати декілька розділів [6].

За рахунок такої архітектури, SingleStoreDB може паралельно обробляти дані на декількох вузлах незалежно. Також, це дозволяє користувачам горизонтально розширювати їхній кластер у випадку, якщо їм потрібно більше обчислювальних ресурсів. Користувачі здатні надсилати запити до різних агрегаторів, щоб не бути обмеженими швидкістю мережі однієї машини.

Ще однією особливістю SingleStoreDB є універсальне сховище, яке є еволюцією columnstore таблиць. На відміну від стандартної реалізації columnstore таблиць, реалізація SingleStoreDB підтримує транзакційні процеси, для яких зазвичай доводиться використовувати rowstore таблиці [24]. Ця особливість дозволяє одночасно завантажувати та оновлювати дані в таблицях, та проводити

на них аналітичні запити, що містять агрегації. За рахунок цієї особливості SingleStoreDB і отримала свою назву.

Кластер SingleStoreDB може бути запущений у двох варіантах:

- Cloud
- Self-managed

При використанні Cloud, кластер створюється і конфігурується автоматично. Клієнт отримує єдину адресу, яку він може використовувати для надсилання запитів до бази даних. Всі запити розподіляються між агрегаторами, балансуючи навантаження на кластер. Крім того, такий спосіб розгортання надає можливість використання bottomless. Це особливість бази даних, яка передбачає, що самі дані будуть відвантажуватись на S3. За рахунок, цього ресурси необхідні для виконання обчислень та ресурси необхідні для збереження даних стають незалежними. Користувач може зберігати терабайти даних на маленькому кластері і платити за сховище незалежно ресурсів необхідних для виконання операцій над ними [14].

Self-managed розгортання надає клієнту можливість розгорнути кластер на своїх серверах та встановити набагато більше особливих конфігурацій.

Apache Beam є уніфікованою моделлю програмування та множиною бібліотек для створення та виконання конвеєрів для обробки даних [3]. В 2004 році компанія Google опублікувала наукову роботу про модель програмування MapReduce [12]. Ця модель базується на двох операціях Map і Reduce. В роботі показано, що багато реальних задач можна виразити через цю модель. При цьому, програми написані на основі такої моделі можна паралелізувати і виконувати на великих кластерах. Пізніше на основі цієї моделі було створено багато реалізацій таких як Hadoop, Flume, Spark, Flink. Наступним кроком в еволюції цих моделей було створення Apache Beam. Основними особливостями Apache Beam є:

- уніфікована мова програмування для пакетної та потокової обробки даних;
- велика кількість підтримуваних джерел для запису та збереження даних;
- можливість виконання обчислень на різних системах (наприклад, на тих самих Flink, Spark);
- наявність SDK для різних мов програмування (Go, Java, Python, Typescript).

Розглянемо кожну з цих особливостей окремо.

В старих фреймворках для паралельної обробки даних таких як Hadoop, Flink, Spark реалізовано різний API для пакетної та потокової обробки даних [25]. Для прикладу, в Apache Spark для пакетної обробки використовувались RDD та Dataframe, а для потокової — Datastreams.

На Рис. 3. можна побачити приклади коду пакетної та потокової обробки даних в Spark.

На відміну, від цих фреймворків, Apache Beam надає єдиний API для обробки пакетових та поточкових даних.

Наступною особливістю Apache Beam є портативність. Ця модель не виконує операції сама по собі, а замість цього делегує виконання іншим системам. Це робить компанії незалежними від технологій, які вони використовують. Якщо компанія використовувала Spark кластер для виконання обчислень, але з часом помітила, що Flink має кращу швидкість, то вони можуть легко мігрувати на

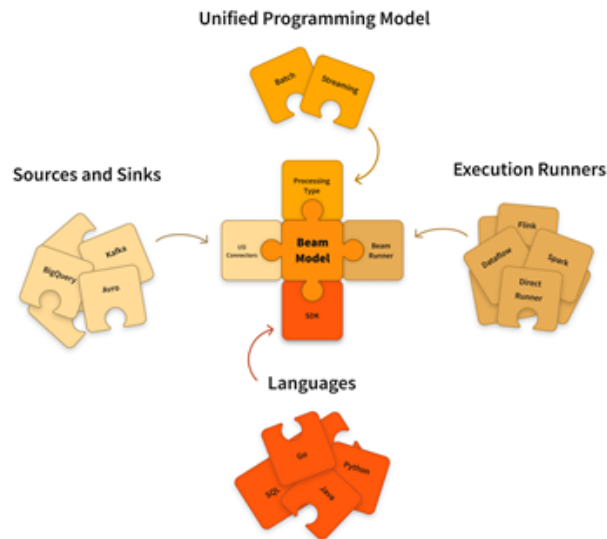


Рис. 2. Особливості Apache Beam [3].

### Spark batch example

```
val sc = new SparkContext(conf)
val lines = sc.textFile(...)
val words = lines.flatMap(_.split(" "))
val pairs = words.map(word -> (word, 1))
val wordCounts = pairs.reduceByKey(_ + _)

wordCounts.show()
```

### Spark streaming example

```
val ssc = new StreamingContext(conf, Seconds(1))
val lines = ssc.socketTextStream("localhost", 9999)
val words = lines.flatMap(_.split(" "))
val pairs = words.map(word -> (word, 1))
val wordCounts = pairs.reduceByKey(_ + _)

wordCounts.print()
```

Рис. 3. Приклад потокової та пакетової обробки даних в Spark.

```
pipeline = beam.pipeline()

data = pipeline | "ReadData" >> beam.io.ReadFromText("data.txt")
processed_data = data | "ProcessData" >> beam.Map(lambda x: x.upper())
processed_data | "WriteData" >> beam.io.WriteToText("processed_data.txt")

pipeline.run()
```

Рис. 4. Приклад обробки пакетових і поточкових даних в Apache Beam.

нову технологію. Для цього не доведеться готувати всіх інженерів і переписувати існуючий код.

Ще одна особливість це підтримка багатьох мов програмування. Подібний

функціонал реалізований і в інших системах, але в Apache Beam є можливість використання функціоналу написаного на різних мовах всередині одного конвеєра. Це дозволяє розробникам використовувати улюблену мову програмування і інтегрувати частини коду всередині однієї програми.

Останньою особливістю є підтримка багатьох джерел для запису та збереження даних. Розробники Apache Beam надають велику кількість рекомендацій для створення конекторів до їхньої технології [15].

Для того, щоб підтримувати всі згадані вище особливості модель програмування має бути максимально простою. Кожна зайва абстракція буде значно ускладнювати процес підтримки уніфікованості та портативності моделі.

Основними абстракціями Beam є [5]:

- Pipeline (конвеєр) — напрямлений ациклічний граф даних та операцій над ними
- PCollection — невпорядкована множина елементів, яка відповідає вершинам графу. Зазвичай дані в цій множині розподілені.
- PTransform — перетворення над PCollection, що відповідають ребрам графу

Зазвичай Beam конектор складається з декількох PTransform (для читання та для запису даних). PTransform для читання або запису даних представляє собою клас, що містить функцію читання/запису. Ця функція буде паралельно викликатись для того, щоб прочитати або записати частину даних.

Враховуючи зазначені вище особливості можна припустити, що найбільш поширеною ситуацією, в якій користувач захоче інтегрувати ці дві технології буде випадок використання Apache Beam для ETL процесу, а SingleStoreDB для збереження даних та проведення їхнього аналізу. Apache Beam надає просту модель, яку легко вивчити та інтегрувати для того, щоб завантажувати дані з різних джерел, трансформувати їх та зберігати в базі даних. SingleStoreDB в свою чергу надає можливість швидко зберігати великі множини даних та обробляти їх після. В такий спосіб можна реалізувати аналітику в реальному часі над даними зібраними із різних джерел.

Для того, щоб максимально використати можливості обох розподілених систем — конектор має мати можливість паралельного запису та читання даних. Існуючий JdbcIO конектор має такі можливості. Проте, для запису даних він використовує INSERT запити [17]. SingleStore дозволяє завантажувати дані за допомогою LOAD DATA запитів [18]. Другий спосіб є набагато оптимальнішим, адже при ньому всі рядки таблиці відправляються окремим файлом і не мають бути закодовані всередині самого запиту.

Щодо паралельного читання, то JdbcIO конектор розбиває SELECT запит на декілька SELECT запитів із фільтром по певній колонці. Наприклад, замість запиту

```
SELECT a, b FROM t
```

конектор може надіслати наступні запити до бази даних

```
SELECT a, b FROM t WHERE 0 < a < 100
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE 100 < a < 200
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE 200 < a < 300
```

Такий спосіб паралелізації запитів зможе працювати з більшістю реляційних баз даних. З іншого боку він має ряд недоліків. Користувач має вибрати колонку для розбиття. Вказати верхню та нижню межу (інакше конектор буде

запускати додаткові запити для визначення цих параметрів). Також важливо пересвідчитись, що вибрана колонка має індекс і що дані в ній рівномірно розподілені.

SingleStore є розподіленою базою даних і вже містить в собі функціонал для розбиття множини рядків на підмножини для виконання обчислень. Найкращим способом розпаралелити читання результату SELECT запиту є RESULT TABLES [19]. Доцільним є проведення досліджень щодо використання цього функціоналу у новому конекторі для Apache Beam.

Деякі запити до бази даних не можуть бути розпаралелені (наприклад SHOW TABLES). Для них доцільно розробити можливість непаралельного читання.

Отже вимогами до конектора будуть:

- можливість паралельного запису даних за допомогою LOAD DATA
- можливість паралельного читання даних за допомогою розподілених властивостей SingleStoreDB
- можливість виконати запити читання даних непаралельно для специфічних запитів.

Найпопулярнішим способом з'єднання з базами даних, які підтримують SQL є використання JDBC API. Використовуючи JDBC API, застосунки написані на мові Java можуть виконувати SQL запити, діставати результати та поширювати назад до відповідних джерел даних. З часів появи в січні 1997 року JDBC API став широко поширеним і реалізованим. Компанія SingleStore розробила свій власний JDBC драйвер. Цей драйвер сумісний з версією стандарту 4.2 та ліцензований згідно GNU LGPL. Ця бібліотека є найкращим вибором для комунікації Javaзастосунків із SingleStore.

Перед розробкою конектора була проведена консультація з розробниками компанії Google (LukaszCwik, KennethKnowles, BrianHulette, ChamikaraJayaalath, JohnCasey) та розроблена технічна документація [<http://surl.li/haioi>] відповідно до зразка [<http://surl.li/haioi>].

Всі параметри необхідні для створення з'єднання із базою даних інкапсульовані в єдиному класі DataSourceConfiguration. Цей клас відповідальний за валідацію та встановлення всіх параметрів а також за створення з'єднання за допомогою JDBC драйвера.

Клас DataSourceConfigutration надає можливість встановлення певних параметрів.

Endpoint — ім'я хоста або IP адреса бази даних в наступному форматі host:[port].

Username — ім'я користувача бази даних (за замовчуванням — root).

Password — пароль для користувача (за замовчуванням — пуста стрічка).

Database — база даних, яка буде використана за умови, якщо іншої не вказано в запиті.

ConnectionPropertirs — список конфігурацій для JDBC драйвера.

Параметр вказується в наступному форматі "key1=value1;key2=value2;...;keyN=valueN".

Список всіх підтримуваних параметрів доступний за посиланням [23].

Параметр endpoint є обов'язковим.

Приклад коду для створення об'єкта DataSourceConfiguration.

```
SingleStoreIO.DataSourceConfiguration  
    .create("myHost:3306")
```

```
.withDatabase("db")
.withConnectionProperties("connectTimeout=30000")
.withPassword("password")
.withUsername("admin");
```

Результати деяких запитів в SingleStore не можна прочитати паралельно. Прикладами таких запитів є “SHOW TABLES”, “SHOW DATABASES”.

Саме для таких запитів необхідно реалізувати PTransform, який би просто виконував запит та повертав його результат. При імплементації паралельного читання можна використовувати досвід отриманий при реалізації простішої версії.

Цей PTransform приймає на вхід спеціальну початкову множину (PBegin) і повертає множину типів визначених користувачем (PCollection<T>). Для того, щоб запустити процес читання використано PTransformParDo. Він створить єдиний екземпляр класу DoFn та запустить єдину функцію для виконання запиту та читання результату.

Налаштувати це перетворення можна за допомогою наступних параметрів:

- `dataSourceConfiguration` — об’єкт типу `DataSourceConfiguration` з усією інформацією необхідною для створення з’єднання
- `query` — SQL запит, що має бути виконаний
- `table` — таблиця з якої читати дані
- `statementPreparator` — об’єкт що реалізує інтерфейс `StatementPreparator`. Цей об’єкт має реалізовувати функцію `setParameters`. Вона приймає об’єкт типу `PreparedStatement` та має встановити всі параметри запиту. Основною мотивацією для параметризації запитів в SingleStore є захист від SQL ін’єкцій.
- `outputParallelization` — логічна змінна, яка вказує чи необхідно перегрупувати результуючу множину для того, щоб розділити її між всіма робітниками. Цей процес необхідний, щоб паралелізувати подальші операції над множиною. За замовчуванням значення параметра істинне.
- `rowMapper` — об’єкт, який реалізує інтерфейс `RowMapper`, а саме функцію `mapRow`, яка приймає `ResultSet` та перетворює рядок результату до бажаного типу.

Параметр `dataSourceConfiguration` є обов’язковим. Параметри `query` та `table` є взаємовиключними, але хоча б один з них повинен бути вказаний.

Приклад непаралельного читання даних:

```
PCollection<USER_DATA_TYPE>items = pipeline.apply(
    SingleStoreIO.<USER_DATA_TYPE>read()
        .withDataSourceConfiguration(dc)
        .withTable("MY_TABLE") // or.withQuery("QUERY")
        .withStatementPreparator(statementPreparator)
        .withOutputParallelization(true)
        .withRowMapper(mapper)
);
```

Під час створення технічної документації досліджено 3 способи реалізації паралельного читання даних. Один з них вже був описаний в 1 розділі (підрозділ — формулювання вимог до конектора). Цей спосіб полягає в тому, щоб замість одного SELECT запиту запустити декілька паралельно. Кожен з них

відповідає за прочитання рядків з певного проміжку. Проміжки визначаються за допомогою однієї з колонок результату.

Наприклад замість запити

```
SELECT a, b FROM t
```

конектор може надіслати наступні запити до бази даних

```
SELECT a, b FROM t WHERE 0 < a < 100
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE 100 < a < 200
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE 200 < a < 300
```

Цей спосіб реалізований в JdbcIO та має наступні недоліки:

- користувач змушений вказати колонку для розбиття запити
- користувач змушений пересвідчитись, що колонка має індекс, інакше запит буде надто повільним
- один під-запит буде читати інформацію з різних листків SingleStore і через це збільшується кількість трафіку між вузлами розподіленої бази даних
- необхідно або вказати нижню та верхню межу, або конектор буде витрачати ресурси на їх визначення
- для деяких запитів база даних буде виконувати однакові підрахунки для кожного підзапиту.

Головною перевагою цього методу є те, що можна керувати рівнем паралелізму.

SingleStore має спеціальний функціонал для паралельного читання даних. Рекомендований спосіб реалізації паралельного читання складається з наступних кроків:

- Виконати запит `CREATE RESULT TABLE tmp AS SELECT ... FROM ...`
- Одночасно почати читати дані з кожного розділу бази даних за допомогою запити `SELECT ... FROM ::tmp WHERE partition_id() = id`
- Після закінчення цього процесу виконати запит `DROP RESULT TABLE tmp`.

Крім цього, з'єднання за допомогою якого виконано перший крок весь час має залишатись відкритим. Повторне читання із одного розділу є неможливим [19].

На жаль, цей спосіб суперечить вимогам, які накладає модель Apache Beam. Відповідно до рекомендацій по розробці конекторів, PTransform повинен відповідати наступним вимогам:

- Він повинен підтримувати можливість серіалізації. Це необхідно, щоб клас можна було надіслати системі, яка власне виконує всі операції.
- Він повинен бути незмінним. Всі приватні поля класу повинні бути оголошені як `final`.
- Він має підтримувати можливість паралельного виконання. При цьому обчислення над різних розділах даних повинні бути незалежними. Також, при виникненні помилок процес має мати можливість повторного виконання.
- Його має бути можливо покрити юніт-тестами [8].

Перша проблема виникає із серіалізацією. Об'єкт з'єднання з базою даних не можна серіалізувати. Для створення таблиці з результатом потрібно підтримувати відкрите з'єднання впродовж всього часу читання. Такі з'єднання можна було б зберігати незалежно від PTransform. Але тоді всі паралельні процеси будуть залежати від одного об'єкта, що порушує третю умову.

Наступна проблема це те, що всі паралельні процеси читання мають почати читати одночасно. Beam не надає таких гарантій. Звісно, якщо кластер на якому виконуються операції має достатньо ресурсів, то він запустить всі процеси. Але конектор не має можливостей, щоб перевірити чи ця умова виконується. Через це відповідальність за забезпечення конектора достатньою кількістю ресурсів для виконання читання лягає на користувача. Це значно погіршує досвід використання конектора. До прикладу, якщо користувач захоче одночасно запустити читання двох таблиць за допомогою Spark, то він має пересвідчитись що кількість ядер в Spark кластері більша за кількість розділів в базі даних помножених на два. Часто користувачі не мають достатньо глибокого розуміння принципів роботи зазначених технологій, щоб забезпечувати необхідні гарантії. При цьому, це руйнує основну перевагу моделі Beam — простоту використання та незалежність від системи, що виконує обчислення.

Третьою проблемою є те, що читання не можна виконати повторно при виникненні помилок. Якщо виникла помилка при читанні одного розділу — весь процес потрібно повторити з самого початку. При збільшенні кількості даних до певної межі виникає ситуація, що читання хоча б з одного розділу завжди зазнає помилки. Це може ставатись через помилки із з'єднанням або нестабільність мережі. Якщо щоразу перезапущати весь процес читання, то він може ніколи не закінчитись.

SingleStore підтримує читання з матеріалізованих таблиць результату. Відмінністю цих таблиць від попередніх є те, що з матеріалізованої таблиці можна читати один розділ декілька разів, а також що не обов'язково починати читати всі розділи одночасно.

Хоча такий спосіб і вирішує деякі проблеми, але всерівно виникає необхідність зберігати відкрите з'єднання впродовж часу читання. Ще матеріалізовані таблиці результату зберігають всі дані в оперативній пам'яті бази даних. Для читання великих результатів (терабайти даних) цей підхід не підійде.

Одним із завдань є інтегрувати конектор в GitHub репозиторій Apache Beam, щоб в майбутньому за його підтримку відповідали розробники Apache Beam. Розглянутий спосіб паралельного читання порушує рекомендації до розробки конекторів, а отже інтегрувати його буде надзвичайно важко.

Розглянемо ще один спосіб паралельного читання даних. Припустимо, що користувач хоче прочитати результат SELECT запиту. Цей запит можна обгорнути в ще один SELECT запит та додати фільтр WHERE partition\_id()=x. Таким чином, можна прочитати рядки тільки з одного розділу бази даних. Такі запити можна легко запустити для кожного розділу. Вони будуть повністю незалежними.

*Наприклад, замість запиту:*

```
SELECT a, b FROM t
```

*конектор може надіслати наступні запити до бази даних:*

```
SELECT a, b FROM t WHERE partition_id() = 0
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE partition_id() = 1
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE partition_id() = 2
```

```
SELECT a, b FROM t WHERE partition_id() = 4
```

Перевагами цього методу порівняно із першим запропонованим є те, що:

- користувач не змушений вказати колонку для розбиття запиту і не має

хвилюватись що ця колонка має індекс

- один під-запит буде читати інформацію з одного листка SingleStore і через це кількість трафіку між вузлами розподіленої бази даних є мінімальною
- користувач не повинен вказувати кількість розділів результату та верхню/нижню межі колонок

Отже, реалізувавши паралельне читання за допомогою цього способу значно спроститься конфігурація та використання конектора. Саме цей варіант вибраний для фінальної реалізації.

*Паралельне читання можна конфігурувати за допомогою наступних параметрів:*

- dataSourceConfiguration — об'єкт типу DataSourceConfiguration з усією інформацією необхідною для створення з'єднання
- query — SQL запит, що має бути виконаний
- table — таблиця з якої читати дані
- rowMapper - об'єкт, який реалізовує інтерфейс RowMapper, а саме функцію mapRow, яка приймає ResultSet та перетворює рядок результату до бажаного типу.

*Приклад паралельного читання даних:*

```
PCollection<USER_DATA_TYPE>items = pipeline.apply(
    SingleStoreIO.<USER_DATA_TYPE>readWithPartitions()
        .withDataSourceConfiguration(dc)
        .withTable("MY_TABLE") // or.withQuery("QUERY")
        .withRowMapper(mapper)
);
```

Для запису даних елементи множини необхідно розбити на групи. Кожна група надсилається до бази даних за допомогою окремого LOAD DATA запиту. На відміну від INSERT запитів, які використовуються в JdbcIOконекторі, вони надсилають дані як окремий потік байтів, а не як частину запиту. За рахунок цього, дані можна відправляти набагато більшими групами. Також, зменшується кількість трафіку.

PTransform для запису даних підтримує наступні параметри:

- dataSourceConfiguration — об'єкт типу DataSourceConfiguration з усією інформацією необхідною для створення з'єднання
- table — таблиця в яку записувати дані
- batchSize — Кількість елементів множини, які надсилаються одним запитом. За замовчуванням — 100000.
- userDataMapper — об'єкт, який реалізовує інтерфейс UserDataMapper, а саме функцію mapRow, яка приймає елемент множини та перетворює масив стрічок. Ці стрічки потім об'єднуються в CSV формат та надсилаються до бази даних

*Приклад запису даних:*

```
data.apply(
    SingleStoreIO.<USER_DATA_TYPE>write()
        .withDataSourceConfiguration(dc)
        .withTable("MY_TABLE")
        .withUserDataMapper(mapper)
        .withBatchSize(100000)
);
```

);

Проведено тестування швидкодії запису даних за допомогою реалізованого конектора та існуючого JdbcIO. Під час тестування базу даних SingleStore, запущену в docker контейнері. Результати тестування наведені в таблиці 1. Відповідно до них, LOAD DATA запити працюють приблизно вдвічі швидше ніж INSERT запити.

Таблиця 1.

Порівняння швидкодії запису даних використовуючи SingleStoreIO та JdbcIO.

| Кількість рядків | SingleStoreIO | JdbcIO      |
|------------------|---------------|-------------|
| 100000           | 4.638 сек.    | 6.772 сек.  |
| 200000           | 8.312 сек.    | 12.269 сек. |
| 500000           | 17.956 сек.   | 38.105 сек. |
| 1000000          | 33.877 сек.   | 78.197 сек. |

Для того, щоб конектор використовували, його потрібно протестувати, задокументувати та поширити на платформах, де користувачі зможуть легко про нього дізнатись. У випадку Beam, найкращим способом поширити конектор є інтегрувати його в GitHub репозиторій Apache Beam. Конектори, які інтегровані в цей GitHub репозиторій називаються вбудованими (built-in). Їхньою підтримкою займаються ком'юніті Beam, що є великою перевагою, адже не потрібно буде витрачати ресурси на виправлення помилок, підтримування інтегрованої системи тестування. Також, ці конектори можуть мати свої web-сторінки в документації Apache Beam.

Для інтеграції конектора в репозиторій Apache Beam, він повинен бути протестований відповідно до їхніх стандартів [7].

Тести запускаються на платформі Jenkins(<https://www.jenkins.io/>) за допомогою GitHubActions(<https://github.com/features/actions>).

Для конектора написано наступні види тестів:

- Юніт тести — тести, що виконують невеликі частини коду конектора. Вони використовують фреймворкJUnit (<https://junit.org/junit5/>). Ці тести комунікують з макетом бази даних створеним за допомогою фреймворку Mockito. Ця група тестів запускається кожного разу, коли хтось створює гілку і змінює в ній код пов'язаний із певним тестом.
- Інтеграційні тести. Ці тести комунікують із справжньою базою даних і перевіряють коректність основного функціоналу. SingleStore запускається за допомогою технології Kubernetes (<https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/deploy/kubernetes.html>). Цю групу тестів запускають розробники Apache Beam перед тим, як додати зміни в головну гілку.
- Тести продуктивності. Ці тести як і інтеграційні тести комунікують із справжньою базою даних, але вони завантажують великі масиви даних для вимірювання продуктивності конектора. Ця група тестів запускається раз в день для того, щоб перевірити чи якісь зміни не спровокували погіршення продуктивності.

Тести продуктивності запускаються раз в день і їхній результат візуалізується за допомогою Grafana.

**Обговорення результатів дослідження.** Перед розробкою конектора створено GitHub завдання з пропозицією розробки SingleStoreIO конектора (<https://github.com/apache/beam/issues/22617>) проведено консультацію з розробниками компанії Google (LukaszCwik, KennethKnowles, BrianHulette, Chami-karaJayalath, JohnCasey) та розроблено технічну документацію. В цій документації узгоджені всі проблемні питання реалізації конектора. На основі даного документу здійснені зміни в коді, які представлені у вигляді двох пул реквестів до репозиторію Apache Beam:

- <https://github.com/apache/beam/pull/23535>
- <https://github.com/apache/beam/pull/24290>

Всі зміни протестовано. Перевіркою коду займалися наступні розробники:

- JohnCasey(<https://github.com/johnjcasey>)
- YiHu(<https://github.com/Abacn>)
- AhmadAbualsaud(<https://github.com/ahmedabu98>)
- PabloEstrada(<https://github.com/pabloem>)

Їхні коментарі були враховані і після успішного проходження тестів код додано в головну гілку проекту. В результаті, підтримка бази даних SingleStore додана в Apache Beam у версії 2.44 (<https://beam.apache.org/blog/beam-2.44.0/>)

Конектор можна завантажити або додати в систему автоматичного збирання із Maven репозиторію (<https://mvnrepository.com/artifact/org.apache.beam/beam-sdks-java-io-singlestore>).

Документування бібліотеки є надзвичайно важливим етапом. Без нього користувачі можуть просто не дізнатись про її існування або не могли коректно використовувати. Apache Beam розробили стандарти для документування конекторів [10]. На момент створення конектора ці стандарти ще були на стадії розробки і нами використовувався доступ до робочого варіанту.

Весь текст документації зберігається в тому самому GitHub репозиторії, що й код конекторів. Для оновлення документації створено наступний пул реквест (<https://github.com/apache/beam/pull/24377>). Його перевірено та додано до головної гілки YiHu (<https://github.com/Abacn/>).

Дані зміни включали створення сторінки, яка містить пояснення всіх перетворень доданих конектором, їх параметрів та прикладів використання [2]. Також SingleStoreIO конектор додано до таблиці всіх вбудованих конекторів [16]. Автори документації SingleStore теж оновили її, додавши інформацію про цей конектор [21]. Через деякий час після релізу конектора Akmal Chaudhri (старший технічний євангеліст компанії SingleStore) написав блог про використання цього конектора [2].

*Наукова новизна та практична цінність дослідження.* Конектор може бути використаний для ETL процесів під час яких Apache Beam відповідає за обробку та збереження даних в SingleStoreDB. Він надає зручніший спосіб конфігурації та кращу продуктивність в порівнянні із JdbcIO конектором. Також, результати досліджень можуть використовуватись для створення конекторів між іншими технологіями та СКБД SingleStoreDB.

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** На основі аналізу можливих сценаріїв застосування Apache Beam та SingleStore та особливостей цих технологій сформульовано вимоги до конектора необхідні для задоволення потреб користувачів, а саме:

- можливість паралельного запису даних за допомогою LOAD DATA;
- можливість паралельного читання даних за допомогою розподілених властивостей SingleStoreDB;
- можливість виконати запити читання даних непаралельно для специфічних запитів.

Розроблено конектор, який відповідає наведеним вимогам. Під час розробки досліджено можливість використання різних способів паралельного читання та запису даних. Згідно досліджень найоптимальнішим способом паралельного читання є розбиття запиту на декілька незалежних використовуючи певну колонку. Найоптимальнішим способом запису даних є використання запиту LOAD DATA. Конектор протестовано та налаштована система неперервної інтеграції.

Код конектора перевірено спеціалістами та інтегровано в GitHub репозиторій Apache Beam. Вихідний код конектора можна знайти за посиланням : (<https://github.com/apache/beam/tree/master/sdks/java/io/singlestore>). Він надає зручніший спосіб конфігурації та кращу продуктивність в порівнянні із JdbcIO конектором. Інформацію про SingleStore конектор можна знайти на офіційній документації Apache Beam [26] та офіційній документації SingleStore [16]. Перспективами подальших досліджень є спроби реалізації конекторів для аналогічних технологій таких як Hadoop, Flume, Flink.

### Список використаної літератури

1. Adalbert M. SingleStore Apache Beam IO Connector Design Doc. Retrieved from: [https://docs.google.com/document/d/1WU-hkoZ93SaGXyOz\\_UtX0jXzIRl194hCId\\_IdmEV9jw/edit#heading=h.wskna8eurvjv](https://docs.google.com/document/d/1WU-hkoZ93SaGXyOz_UtX0jXzIRl194hCId_IdmEV9jw/edit#heading=h.wskna8eurvjv)
2. Akmal Ch. Quicktip: Using Apache Beam with SingleStoreDB. Retrieved from: <https://medium.com/@VeryFatBoy/quick-tip-using-apache-beam-with-singlestoredb-452d4256a7ca>
3. Apache Beam Overview. Retrieved from: <https://beam.apache.org/get-started/beam-overview/>
4. Automate your workflow from idea to production. Retrieved from: <https://github.com/features/actions>
5. Basics of the Beam model. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/basics/>
6. Cluster Components. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/introduction/distributed-architecture/cluster-components.html#cluster-components>
7. Contribution Testing Guide. Retrieved from: <https://cwiki.apache.org/confluence/display/BEAM/Contribution+Testing+Guide>
8. Developing I/O connectors for Java. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/developing-io-java/>
9. [Template] Apache Beam Design Doc. Retrieved from: <https://docs.google.com/document/d/1kVePqjt2daZd0bQHGUwghlcLbhvrny7VpflAzk9sjUg/edit?usp=sharing>
10. I/O Standards. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/io-standards/>
11. Interaction of Cluster Components. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/introduction/distributed-architecture/interaction-of-cluster-components.html#interaction-of-cluster-components>
12. Jeffrey Dean and Sanjay Ghemawat. MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters. To appear in OSDI 2004. Retrieved from: <https://static.googleusercontent.com/media/research.google.com/uk//archive/mapreduce-osdi04.pdf>
13. Jenkins. Retrieved from: <https://www.jenkins.io/>
14. JosephVictor. Engineering. The future is bottomless. Retrieved from: <https://www.singlestore.com/blog/the-future-is-bottomless/>

15. Overview: Developing a new I/O connector. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/developing-io-overview/>
16. I/O Connectors. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/connectors/>
17. SingleStore Documentation. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/reference/sql-reference/data-manipulation-language-dml/insert.html>
18. SingleStore LOAD DATA. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/reference/sql-reference/data-manipulation-language-dml/load-data.html>
19. SingleStore Read Query Results in Parallel. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/query-data/read-query-results-in-parallel.html>
20. SingleStore. Retrieved from: [https://download.oracle.com/otn-pub/jcp/jdbc-4\\_2-mrel2-spec/jdbc4.2-fr-spec.pdf?AuthParam=1683632646\\_268549c0a0b191629570c83d4e48b211](https://download.oracle.com/otn-pub/jcp/jdbc-4_2-mrel2-spec/jdbc4.2-fr-spec.pdf?AuthParam=1683632646_268549c0a0b191629570c83d4e48b211)
21. SingleStore. Load Data from Apache Beam. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/load-data/load-data-from-a-data-source/load-data-from-apache-beam.html>
22. THE APACHE SOFTWARE FOUNDATION ANNOUNCES APACHE® BEAM™ AS A TOP-LEVEL PROJECT. Retrieved from: <https://news.apache.org/foundation/entry/the-apache-software-foundation-announces> (дата звернення 17.04.2023)
23. The SingleStore JDBC Driver. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/developer-resources/connect-with-application-development-tools/connect-with-java-jdbc/the-singlestore-jdbc-driver.html#connection-string-parameters>
24. Universal Storage. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/create-a-database/columnstore/universal-storage.html>
25. Why Apache Beam is the next big thing in big data processing. Retrieved from: [https://medium.com/@shafiq\\_iqubal/why-apache-beam-is-the-next-big-thing-in-big-data-processing-808abacf52f1](https://medium.com/@shafiq_iqubal/why-apache-beam-is-the-next-big-thing-in-big-data-processing-808abacf52f1)
26. SingleStoreDB I/O. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/built-in/singlestore/>

## Hlebena M. I., Makarovych A. V. SingleStoreDB connector for Apache Beam.

The process of developing the SingleStoreDB connector for Apache Beam is described, along with the challenges encountered during this process. Java programming language was utilized for implementing the connector. Gradle, an automated build system, was used for project compilation and dependency management. Continuous testing of the connector was ensured using the Jenkins continuous integration tool. Communication with the database was facilitated using the SingleStore JDBC Driver library. The research object selected was the data exchange process between Apache Beam and SingleStoreDB, with the connector serving as the subject of investigation, enabling efficient data exchange between the two platforms. Requirements analysis was conducted for the connector, identifying key requirements such as the ability for parallel data writes, parallel data reads using SingleStoreDB distributed properties, and the ability to execute non-parallel data read queries for specific requests. Various methods of parallel data reading and writing were explored, with research indicating that the most optimal method for parallel reading involves splitting the query into several independent ones using a certain column. The most efficient method for data writing was found to be using the LOAD DATA query, which sends data as a separate stream of bytes rather than as part of the query, allowing for larger data batches to be sent. The connector was tested, and continuous integration was set up. Documentation was developed, and the connector was integrated into the Apache Beam GitHub repository. The developed connector can be used for ETL processes where Apache Beam is responsible for data processing and storage in SingleStoreDB, providing a more convenient configuration and better performance compared to the JdbcIO connector. The research results can be utilized for creating connectors between other technologies and the SingleStoreDB database management system.

**Keywords:** database, connector, distributed systems, ETL, Apache Beam, SingleStore, OLAP, OLTP.

## References

1. Adalbert, M. SingleStore Apache Beam IO Connector Design Doc. Retrieved from: [https://docs.google.com/document/d/1WU-hkoZ93SaGXyOz\\_UtX0jXzIRl194hCId\\_IdmEV9jw/edit#heading=h.wskna8eurvjv](https://docs.google.com/document/d/1WU-hkoZ93SaGXyOz_UtX0jXzIRl194hCId_IdmEV9jw/edit#heading=h.wskna8eurvjv)
2. Akmal, Ch. Quicktip: Using Apache Beam with SingleStoreDB. Retrieved from: <https://medium.com/@VeryFatBoy/quick-tip-using-apache-beam-with-singlestoredb-452d4256a7ca>
3. Apache Beam Overview. Retrieved from: <https://beam.apache.org/get-started/beam-overview/>
4. Automate your workflow from idea to production. Retrieved from: <https://github.com/features/actions>
5. Basics of the Beam model. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/basics/>
6. Cluster Components. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/introduction/distributed-architecture/cluster-components.html#cluster-components>
7. Contribution Testing Guide. Retrieved from: <https://cwiki.apache.org/confluence/display/BEAM/Contribution+Testing+Guide>
8. Developing I/O connectors for Java. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/developing-io-java/>
9. [Template] Apache Beam Design Doc. Retrieved from: <https://docs.google.com/document/d/1kVePqjt2daZd0bQHGUwghlcLbhvrny7VpflAzk9sjUg/edit?usp=sharing>
10. I/O Standards. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/io-standards/>
11. Interaction of Cluster Components. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/introduction/distributed-architecture/interaction-of-cluster-components.html#interaction-of-cluster-components>
12. Jeffrey Dean and Sanjay Ghemawat. MapReduce: Simplified Data Processing on Large Clusters. To appear in OSDI 2004. Retrieved from: <https://static.googleusercontent.com/media/research.google.com/uk//archive/mapreduce-osdi04.pdf>
13. Jenkins. Retrieved from: <https://www.jenkins.io/>
14. JosephVictor. Engineering. The future is bottomless. Retrieved from: <https://www.singlestore.com/blog/the-future-is-bottomless/>
15. Overview: Developing a new I/O connector. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/developing-io-overview/>
16. I/O Connectors. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/connectors/>
17. SingleStore Documentation. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/reference/sql-reference/data-manipulation-language-dml/insert.html>
18. SingleStore LOAD DATA. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/reference/sql-reference/data-manipulation-language-dml/load-data.html>
19. SingleStore Read Query Results in Parallel. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/query-data/read-query-results-in-parallel.html>
20. SingleStore. Retrieved from: [https://download.oracle.com/otn-pub/jcp/jdbc-4\\_2-mrel2-spec/jdbc4.2-fr-spec.pdf?AuthParam=1683632646\\_268549c0a0b191629570c83d4e48b211](https://download.oracle.com/otn-pub/jcp/jdbc-4_2-mrel2-spec/jdbc4.2-fr-spec.pdf?AuthParam=1683632646_268549c0a0b191629570c83d4e48b211)
21. SingleStore. Load Data from Apache Beam. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/load-data/load-data-from-a-data-source/load-data-from-apache-beam.html>
22. THE APACHE SOFTWARE FOUNDATION ANNOUNCES APACHE® BEAM™ AS A TOP-LEVEL PROJECT. Retrieved from: <https://news.apache.org/foundation/entry/the-apache-software-foundation-announces>
23. The SingleStore JDBC Driver. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/managed-service/en/developer-resources/connect-with-application-development-tools/connect-with-java-jdbc/the-singlestore-jdbc-driver.html#connection-string-parameters>
24. Universal Storage. Retrieved from: <https://docs.singlestore.com/db/v8.0/en/create-a-database/columnstore/universal-storage.html>
25. Why Apache Beam is the next big thing in big data processing. Retrieved

- from: [https://medium.com/@shafiqal\\_iqbal/why-apache-beam-is-the-next-big-thing-in-big-data-processing-808abacf52f1](https://medium.com/@shafiqal_iqbal/why-apache-beam-is-the-next-big-thing-in-big-data-processing-808abacf52f1)
26. SingleStoreDB I/O. Retrieved from: <https://beam.apache.org/documentation/io/built-in/singlestore/>

Одержано 20.04.2024

Ю. П. Глухов<sup>1</sup>, С. Ю. Бабич<sup>2</sup>, М. М. Маляр<sup>3</sup>, Ю. Ю. Млавець<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
старший науковий співробітник,  
кандидат фізико-математичних наук  
[gluchov.uriy@gmail.com](mailto:gluchov.uriy@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

<sup>2</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
провідний науковий співробітник,  
доктор технічних наук, професор  
[babich\\_sy@ukr.net](mailto:babich_sy@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,  
доктор технічних наук  
[mykola.malyar@uzhnu.edu.ua](mailto:mykola.malyar@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

<sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua](mailto:yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

## НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНІЙ СТАН НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ТА ЗАХИСНИМ ПОКРИТТЯМ ПРИ ДІЇ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В роботі з використанням комплексних потенціалів в загальній формі для нестисливих пружних тіл дана постановка і приведений розв'язок двовимірної задачі про дію рухомого навантаження на вільну поверхню попередньо напруженого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

**Ключові слова:** шаруватий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, комплексні потенціали.

**1. Вступ.** В даній статті розглянута задача про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Розв'язок задачі отримано за допомогою методу комплексних потенціалів. Аналогічна задача досліджена з використанням методу інтегральних перетворень Фур'є в роботі [1].

При відсутності шару точний розв'язок задачі про реакцію на рухоме навантаження півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів було отримано в [2]. Пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі при дії рухомого навантаження розглядалася в роботі [5].

**2. Постановка задачі.** Розглядається попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору — ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей, вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj} (\lambda_m - 1) x_m; \quad m, j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

де  $\lambda_j$  — подовження ( $\lambda_j = \text{const}$ ;  $j = \overline{1, 3}$ ),  $\delta_{mj}$  — символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \quad \sigma_{22}^0 \neq 0; \quad \sigma_{33}^0 \neq 0. \quad (2)$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ , що вводяться в природному стані, співвідношеннями

$$\xi_j = \lambda_j x_j. \quad (3)$$

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площина  $\xi_1 O \xi_3$  співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область  $-h \leq \xi_2 \leq 0$ , а півпростір — область  $\xi_2 + h \leq 0$ .

До вільної границі шару ( $\xi_2 = 0$ ) прикладено лінійне навантаження  $P$ , що рухається з постійною швидкістю  $v$  протягом великого проміжку часу і не залежить від координати  $\xi_3$ .

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (4)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, що виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [2] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною  $h$  моделюється зосередженими масами з густиною  $\rho_1$ .

Рівняння руху нестисливого півпростору в умовах плоскої деформації при  $\xi_2 + h \leq 0$  мають вигляд [2]

$$N_{11}u_1 + N_{12}u_2 + N_{13}p = 0; \quad N_{21}u_1 + N_{22}u_2 + N_{23}p = 0; \quad N_{31}u_1 + N_{32}u_2 = 0. \quad (5)$$

У рухомій системі координат (3) диференціальні оператори в виразах (5) мають вигляд

$$N_{m\alpha} = \tilde{\kappa}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \tilde{\rho} v^2 \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}; \quad i, m, \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$N_{13} \equiv N_{31} = \tilde{q}_{11} \frac{\partial}{\partial y_1}; \quad N_{23} \equiv N_{32} = \tilde{q}_{22} \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (6)$$

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при  $y_2 = -h$ : жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = P_1(y_1) + h\rho_1\ddot{u}_1; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\rho_1\ddot{u}_2; \quad (7)$$

і нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\rho_1\ddot{u}_2. \quad (8)$$

Тут  $P_1(y_1)$ ,  $P_2(y_1)$  — відповідно дотичні та нормальні напруження на вільній поверхні шаруватого півпростору.

При вказаних вище умовах маємо плоску усталену задачу, що полягає у розв'язку рівнянь руху (5) з позначенням (6) відповідно при граничних умовах (7) або (8) і умові загасання на нескінченності.

Запишемо постановку задачі в комплексних потенціалах.

Враховуючи позначення (6), рівняння усталеного руху півпростору можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \chi^{(j)} = 0; \quad (9)$$

$$j = 1, 2;$$

де величини  $\mu_1$  і  $\mu_2$  — корені рівняння

$$\mu^4 + 2A\mu^2 + A_1 = 0. \quad (10)$$

Коефіцієнти  $A$  і  $A_1$  у випадку нестисливого тіла визначаються із співвідношень

$$2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212});$$

$$2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \quad \tilde{\rho} = \rho; \quad (11)$$

$\rho$  — густина матеріалу півпростору в природному стані. Складові тензора  $\tilde{\kappa}$  і величини  $q_i$  визначаються для конкретних постановок задач [2].

Введемо наступні комплексні змінні

$$z_j = y_1 + \mu_j(y_2 + h); \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j(y_2 + h); \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Враховуючи (12), рівняння руху для півпростору (9) в рухомій системі координат (4) через функції  $\chi^{(j)}$  можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^4 \chi^{(j)}}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (10).

Рівні корені. Нехай виконується умова

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu. \quad (14)$$

Загальний розв'язок рівняння (13) представимо у вигляді

$$\chi^{(j)} = \text{Re} \left[ F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1) \right]. \quad (15)$$

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)'}(z_1) = \mu_1 \phi_j(z_1); \quad F_j^{(2)'}(z_1) = \phi_j(z_1); \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

Підставимо (15) у вирази для переміщень і співвідношення пружності з врахуванням (16) і отримаємо представлення напружень і переміщень через введені аналітичні функції  $\phi_j(z_1)$  ( $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{kj} &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\phi_1''(z_1) + \bar{z}_1 \phi_2''(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \phi_2'(z_1) \right\}; \\ u_k &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_k^{(1)} [\phi_1'(z_1) + \bar{z}_1 \phi_2'(z_1)] + \gamma_k^{(2)} \phi_2(z_1) \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}^{(1)} &= \alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2 \left( \alpha_{ii}^{(11)} + \alpha_{ii}^{(22)} + \mu_1^2 \alpha_{ii}^{(21)} \right); \\ \gamma_{ii}^{(2)} &= 3\alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2 \left( \alpha_{ii}^{(11)} - \alpha_{ii}^{(22)} - 3\mu_1^2 \alpha_{ii}^{(21)} \right); \\ \gamma_{ij}^{(1)} &= \mu_1 \left[ \alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} + \mu_1^2 \left( \alpha_{ij}^{(21)} + \alpha_{ij}^{(22)} \right) \right]; \\ \gamma_{ij}^{(2)} &= \mu_1 \left[ 3\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} - \mu_1^2 \left( \alpha_{ij}^{(21)} + 3\alpha_{ij}^{(22)} \right) \right]; \\ \gamma_1^{(1)} &= \beta_{11}^{(2)} + \mu_1^2 \left( \beta_{12}^{(2)} - \beta_{11}^{(1)} \right); \quad \gamma_1^{(2)} = 2 \left( \beta_{11}^{(2)} - \mu_1^2 \beta_{12}^{(2)} \right); \\ \gamma_2^{(1)} &= \mu_1 \left( \beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)} + \mu_1^2 \beta_{22}^{(1)} \right); \\ \gamma_2^{(2)} &= 2\mu_1 \left( \beta_{21}^{(1)} - \mu_1^2 \beta_{22}^{(1)} \right); \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (18)$$

Параметри  $\alpha_{ij}^{(kn)}$  і  $\beta_{ij}^{(k)}$  в співвідношеннях (18) у випадку нестисливих тіл визначаються по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(kn)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{nn}^{-2} \left( \tilde{\kappa}_{knnk} - \delta_{n2} \tilde{\rho} v^2 \right); \\ \alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\kappa}_{iinn} \tilde{q}_{nn}^{-1} - \tilde{\kappa}_{iikk} \tilde{q}_{kk}^{-1} + \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{kk}^{-2} \left[ \tilde{\kappa}_{kkkk} - \tilde{\rho} v^2 - \tilde{q}_{kk} \tilde{q}_{nn}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}) \right]; \\ \alpha_{ij}^{(kn)} &= -\tilde{\kappa}_{ijnk} \tilde{q}_{nn}^{-1}; \quad \alpha_{ij}^{(kk)} = \tilde{\kappa}_{ijnk} \tilde{q}_{nn}^{-1}; \quad i, j, n, k = 1, 2; \quad i \neq j; \quad n \neq k; \\ \beta_{12}^{(2)} &= \beta_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \beta_{21}^{(2)} = \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Використовуючи (15) з урахуванням (16) граничні умови при  $y_2 = -h$  для жорсткого контакту (7) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_1^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \left( \gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_1(y_1); \\ \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_2(y_1); \end{aligned}$$

а для нежорсткого контакту (8) — у вигляді

$$\operatorname{Re} \left[ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) \right] = 0;$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_1(y_1). \quad (21)$$

В системах рівнянь (20) і (21) введені нові аналітичні функції

$$\Phi_1(y_1) = \phi_1''(y_1) + y_1 \phi_2''(y_1); \quad \Phi_2(y_1) = \phi_2'(y_1). \quad (22)$$

Коефіцієнти  $\gamma_i^{(j)}$  і  $\gamma_{ik}^{(j)}$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) в системах рівнянь (20) і (21) для нестисливого півпростору визначаються із співвідношень (18) при позначення (19).

Таким чином, задача про усталений рух попередньо напруженого нестисливого півпростору, захищеного пружним шаром, у випадку рівних коренів рівняння (10) зводиться до знаходження функцій  $\phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) із систем рівнянь (20), (22) або (21), (22) в залежності від умов контакту між елементами шаруватого середовища.

Нерівні корені. Розглянемо випадок нерівних коренів

$$\mu_1 \neq \mu_2. \quad (23)$$

Розв'язок рівнянь (13) представимо у вигляді

$$\chi = 2\operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (24)$$

де  $F_j(z_j)$  — довільні аналітичні функції комплексних змінних  $z_j$ .

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j''(z_j) = \Phi_j(z_j). \quad (25)$$

Підставляючи (24) у вирази для переміщень і потім у співвідношення пружності, з урахуванням (25), отримуємо вирази напружень і переміщень через введені аналітичні функції  $\Phi_j(z_j)$  комплексних змінних  $z_j$  (12).

$$\tilde{Q}_{ij} = 2\operatorname{Re} \left[ \gamma_{ij}^{(1)} \Phi_1'(z_1) + \gamma_{ij}^{(2)} \Phi_2'(z_2) \right];$$

$$u_k = 2\operatorname{Re} \left[ \gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2) \right]; \quad i, j, k = 1, 2. \quad (26)$$

В (26) введені наступні позначення для коефіцієнтів, які входять в вирази для напружень і переміщень,

$$\begin{aligned} \gamma_{jj}^{(k)} &= \mu_k(\alpha_{jj}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{jj}^{(2)}); \quad \gamma_{ij}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)}; \\ \gamma_1^{(j)} &= -\mu_j; \quad \gamma_2^{(j)} = \beta_1 + \mu_j^2 \beta_2; \quad i, j, k = 1, 2; \quad i \neq j; \end{aligned} \quad (27)$$

де параметри  $\beta_j$  і  $\alpha_{ij}^{(k)}$  у випадку нестисливих тіл визначаються по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(1)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} [\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho} v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})] - \tilde{\kappa}_{ii11} + \tilde{\kappa}_{ii22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \\ \alpha_{ii}^{(2)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{2112}; \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= -\tilde{\kappa}_{ij12}; \quad i \neq j; \quad \beta_1 = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_2 \equiv 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Використовуючи комплексні потенціали, запишемо граничні умови для даної задачі при  $y_2 = -h$ . Будемо розглядати, як і раніше, жорсткий та нежорсткий контакти між захисним шаром і півпростором. Із (7), (8) і (26) при  $y_2 = -h$  маємо:

1) жорсткий контакт

$$2\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) + \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_1^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_1^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_1(y_1);$$

$$2\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_2(y_1); \quad (29)$$

2) нежорсткий контакт

$$\operatorname{Re} \left[ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) \right] = 0;$$

$$2\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_2(y_1). \quad (30)$$

В системах рівнянь (29) і (30) параметри  $\gamma_i^{(j)}$ ,  $\gamma_{ik}^{(j)}$  ( $i, j, k = 1, 2$ ) визначаються із співвідношень (27) з врахуванням (28).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі в випадку нерівних коренів рівняння (10) можна отримати, розв'язуючи відносно функцій  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2$ ) системи рівнянь (29) і (30) при жорсткому і нежорсткому контакті між захисним шаром і півпростором відповідно.

**3. Метод розв'язку задачі.** Отримаємо розв'язок задачі про усталений рух попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям при дії рухомого навантаження. Для цього застосуємо метод М. І. Мусхелішвілі [4], оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. Відповідно до [4], для довільної голоморфної в нижній півплощині  $y_2 + h < 0$  функції  $f(z)$ , яка неперервна до границі включно, справедливі наступні співвідношення

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -f(z) + \frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{f}(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -\frac{1}{2}\bar{a}, \quad (31)$$

де

$$z = y_1 + i(y_2 + h). \quad (32)$$

В (31) вважалось, що функцію  $f(y_1)$  при великих  $|y_1|$  можна представити у вигляді

$$f(y_1) = a + o(|y_1|^{-\varepsilon}) = f(\infty) + o(|y_1|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (33)$$

Враховуючи викладене, перейдемо до дослідження задачі в площині  $y_1 O y_2$ . Відносно поведінки комплексних потенціалів  $\Phi_j(z_j)$ ,  $\phi_j(z_1)$  на нескінченності приймемо такі ж обмеження, як і в лінійній теорії пружності [3, 4].

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (10).

Рівні корені. Розглянемо випадок рівних коренів (14). В цьому випадку задача зводиться до визначення аналітичних функцій  $\phi_j$  із рівнянь (20), (22) або (21), (22) (в залежності від умов контакту).

Використовуючи рівняння (20) і формули (31) і (33), у випадку жорсткого контакту між захисним шаром і півпростором маємо

$$\begin{aligned}\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_1^{(1)}\Phi_1'(z) + \left( \gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1 dy_1}{y_1 - z}; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z},\end{aligned}\quad (34)$$

а при нежорсткому контакті рівняння (21) із врахуванням (31) і (33) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)}\Phi_2(z) &= 0; \\ \gamma_{22}^{(1)}\Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)}\Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)}\Phi_1'(z) + \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z}.\end{aligned}\quad (35)$$

Системи рівнянь (34) і (35) неважко привести до вигляду

$$L[\Phi_j(z)] = f_j(z); \quad j = 1, 2; \quad (36)$$

де диференціальний оператор  $L$  і функції  $f_j$  ( $j = 1, 2$ ) визначаються у випадку жорсткого контакту по формулам

$$\begin{aligned}L &= \rho_1^2 h^2 v^4 \left( \gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} - \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ &+ \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} + \gamma_{21}^{(1)} \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) - \right. \\ &\left. - \left( \gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) \gamma_{22}^{(1)} \right] \frac{d}{dz} + \left( \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} \right); \end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}f_1(z) &= \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(2)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(2)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \right. \\ &+ \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[ \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) P(y_1)_1 - \left( \gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} \right) P_2(y_1) \right]}{(y_1 - z)^2} dy_1 \left. \right\}; \\ f_2(z) &= -\frac{1}{i\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(1)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \right. \\ &+ \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_1^{(1)} P_2(y_1)}{(y_1 - z)^2} dy_1 \left. \right]; \end{aligned}\quad (38)$$

а у випадку нежорсткого контакту по формулам

$$L = \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} \left( \gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \right) \right] \frac{d}{dz} + \left( \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} \right); \quad (39)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j+1}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \quad (40)$$

Так як при  $y_2 = -h$ ,  $y_1 = z = z_1$ , то вирази (36)–(40) також можна розглядати в площині  $z_1$ .

Таким чином, для жорсткого і нежорсткого контактів задача при рівних коренях рівняння (10) звелася до розв'язку звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами виду (36) відносно функцій  $\Phi_j(z_1)$  ( $j = 1, 2$ ) або, відповідно до принятих позначень (22), функцій  $\phi_1''(z_1) + z_1 \phi_2''(z_1)$  і  $\phi_2'(z_1)$ . Отримавши функції  $\phi_1''(z_1) + z_1 \phi_2''(z_1)$  і  $\phi_2'(z_1)$ , легко визначити функції  $\phi_j''(z_1)$  ( $j = 1, 2$ ), а потім напруження і швидкості переміщень у півпросторі (переміщення в даному випадку визначаються з точністю до довільної константи), використовуючи формули (17).

Більш детально аналіз отриманих результатів проведемо для випадку нерівних коренів.

*Нерівні корені.* Нехай виконується умова (23). До систем рівнянь (29) і (30) застосуємо формули (31) і (33). В результаті при жорсткому контакті між захисним шаром і півпростором отримаємо наступну систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій  $\Phi_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ).

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) + \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_1^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_1^{(2)} \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(y_1) dy_1}{y_1 - z}; \\ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (41)$$

При нежорсткому контакті аналогічна система диференціальних рівнянь відносно аналітичних функцій  $\Phi_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ) має вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) &= 0; \\ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[ \gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (42)$$

В результаті нескладних перетворень системи диференціальних рівнянь (41) і (42) можна записати в вигляді (36), де при жорсткому контакті

$$\begin{aligned} L = \rho_1^2 h^2 v^4 \left( \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ + \rho_1 h v^2 \left[ \left( \gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) - \right. \\ \left. - \left( \gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} + \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \frac{d}{dz} + \left( \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right); \end{aligned} \quad (43)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j-1}}{2i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\gamma_{22}^{(m)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(m)} P_2(y_1)] dy_1}{y_1 - z} + \right. \\ \left. + \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\gamma_2^{(m)} P_1(y_1) + \gamma_1^{(m)} P_2(y_1)] dy_1}{(y_1 - z)^2} \right\}; \\ j, m = 1, 2; \quad j \neq m; \quad (44)$$

а при нежорсткому контакті

$$L = \rho_1 h v^2 \left( \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \frac{d}{dz} + \left( \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right); \quad (45)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j+1}}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z}; \quad j, m = 1, 2; \quad j \neq m. \quad (46)$$

Так як при  $y_2 = -h$ ,  $y_1 = z = z_1 = z_2$ , то вирази (41)–(46) можна розглядати також в площинах  $z_1$  і  $z_2$ .

Таким чином, задача у випадку нерівних коренів зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь виду (36) відносно функцій  $\Phi_j(z_j)$  ( $j = 1, 2$ ) в позначеннях (43), (44) або (45), (46) (в залежності від умов контакту між захисним шаром і основою). Компоненти напружено-деформованого стану півпростору визначаються за допомогою співвідношень (26) та виразів для функцій  $\Phi'_j(z_j)$  ( $j = 1, 2$ ).

Критичні швидкості руху навантаження повинні визначатися з умов існування дійсних додатних кратних коренів характеристичного рівняння диференціальних рівнянь (36).

Порівняльний аналіз формул, отриманих в [1], дозволяє стверджувати, що рівняння  $\Delta(k) = 0$  має ті ж корені, що і характеристичне рівняння диференціальних рівнянь (36).

Отже, застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати, аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є в роботі [1].

**4. Висновки.** В даній роботі розглянута плоска динамічна задача про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений нестисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Для розв'язку задачі застосовується метод Мухелішвілі, оснований на інтегралах типу Коші для півплощини. При цьому задача зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих аналітичних функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є.

### Список використаної літератури

1. Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю. Реакція шаруватого нестисливого півпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2023. Т. 43, № 2. С. 82–95.
2. Гузь А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. Киев : Наук. думка, 1983. 296 с.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва : Наука, 1977. 416 с.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 708 с.
5. Babich S. Yu., Glukhov Yu. P., Guz A. N. Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.* 2008. Vol. 44, No 5. P. 481–492.

**Glukhov Yu. P., Babich S. Yu., Malyar M. M., Mlavets Yu. Yu.** Stress-strain state of incompressible half-space with initial stresses and protective coating under the action of a moving load.

In the work with the use of complex potentials in a general form for incompressible elastic bodies, this formulation is given and the solution of the two-dimensional problem of the action of the moving load on the free surface of a prestressed half-space with heterogeneity in the form of a thin surface layer is given.

**Keywords:** layered half-space, initial (residual) stresses, moving load, complex potentials.

### References

1. Glukhov, Yu. P., Babich, S. Yu., & Mlavets, Yu. Yu. (2023). Reaction of Layered Incompressible Half-Space with Initial Stresses to Moving Load. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 43(2), 82–95 [in Ukrainian].
2. Guz, A. N. (1983). *Mechanics of Brittle Fracture of Materials with Initial Stresses*. Kyiv: Nauk. dumka [in Russian].
3. Lekhnitskii, S. G. (1977). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Nauka [in Russian].
4. Muskhelishvili, N. I. (1966). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Moscow: Nauka [in Russian].
5. Babich, S. Yu., Glukhov, Yu. P., & Guz, A. N. (2008). Using Complex Potentials to Determine the Reaction of a Prestressed Two-Layer Elastic Half-Space to a Moving Load. *Int. Appl. Mech.*, 44(5), 481–492.

Одержано 03.01.2024

В. Г. Гнатієнко<sup>1</sup>, Г. М. Гнатієнко<sup>2</sup>, О. Л. Зозуля<sup>3</sup>, В. Є. Снитюк<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

магістрант кафедри інтелектуальних технологій

[vladgnat1483@gmail.com](mailto:vladgnat1483@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2678-5158>

<sup>2</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

заступник декана факультету інформаційних технологій з наукової роботи,

кандидат технічних наук

[g.gna5@ukr.net](mailto:g.gna5@ukr.net)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0465-5018>

<sup>3</sup> ТОВ «Сингента»,

керівник групи технічних радників,

кандидат біологічних наук

[alexandr.zozulya@syngenta.com](mailto:alexandr.zozulya@syngenta.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3500-3423>

<sup>4</sup> Київський національний університет ім. Т. Шевченка,

декан факультету інформаційних технологій,

доктор технічних наук, професор

[snytyuk@knu.ua](mailto:snytyuk@knu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9954-8767>

## МЕТОД ПРОГНОЗУВАННЯ ВРОЖАЙНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР З ВИКОРИСТАННЯМ МУЛЬТИФАКТОРНОГО АНАЛІЗУ ТА НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Дослідження присвячене розробці інтелектуальної технології прогнозування врожайності з використанням супутникових, геоінформаційних даних та кліматичних показників. Використання сучасних методів машинного навчання надає представникам аграрного сектору стратегічні переваги, дозволяючи знижувати ризики від надмірного використання пестицидів та сприяти сталому розвитку сільського господарства. У статті пропонується здійснювати оптимізацію процесу переджнивного підсушування рослин з метою прискорення досягання і полегшення збирання врожаю (десикацію) соняшнику, використовуючи моделювання обсягів можливих втрат врожаю на основі даних, одержаних в період вегетації культури. Така пропозиція є актуальною, оскільки її використання забезпечує підвищення точності прогнозів та ефективність управлінських рішень разом із зменшенням витрат на обробку полів.

**Ключові слова:** сільськогосподарські культури, десикація, прогнозування, супутникові дані, кліматичні показники, вегетаційні індекси, нейронні мережі.

**1. Вступ.** Активний розвиток цифрової агрономії відкриває широкі перспективи для інтенсифікації розвитку аграрного сектору, одночасно породжуючи низку складних задач і викликів. На тлі змін клімату, коливань ринкових цін та зростаючих вимог до ефективності використання природних ресурсів, стандартизація вимог законодавства України щодо захисту рослин до Європейських норм у плануванні бюджету та оптимізація процесів догляду за рослинами стає все більш актуальною. Сучасний розвиток цифрових технологій, штучних нейронних мереж, штучного інтелекту, нових підходів до статистичної обробки даних є передумовою переходу виробників на новий рівень ведення сільськогосподарського виробництва.

Недосконалість та неможливість застосування традиційних статистичних підходів, які надають лише приблизну оцінку врожайності, стають особливо помітними на фоні потреб сучасного аграрного виробництва. Хоча ці методи забезпечують аналіз поточного стану та прогнозування майбутньої врожайності, вони не дозволяють задовольнити потребу в точному та деталізованому плануванні. У той же час, штучний інтелект з його можливостями глибокого аналізу даних і машинного навчання, відкриває нові горизонти для значного підвищення точності прогнозування врожайності. Відповідні технології мають великий потенціал для революціонізації агрономії, пропонуючи інноваційні рішення для оптимізації агротехнічних заходів та підвищення ефективності виробництва. Перехід до використання цих передових технологій вимагає не лише розвитку нового інструментарію та методик, але й глибокого переосмислення підходів до управління аграрними процесами.

**2. Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Сучасні системи прогнозу врожайності з використанням штучного інтелекту охоплюють широкий спектр методів і технологій. Наведемо кілька важливих напрямків досліджень у цій галузі.

1. Використання глибоких нейронних мереж дозволяє досить точно прогнозувати врожайність, аналізуючи дані про погодні умови і характеристики ґрунту та демонструючи середню точність 85–89%. Однак, головним недоліком такого підходу є його обмеження щодо прогнозування на рівні всього поля, що не дозволяє враховувати локальні мікрокліматичні та ґрунтові варіації, що є важливими для деталізованого прогнозування [1].
2. Машинне навчання з використанням традиційних алгоритмів забезпечує високу точність прогнозування загальної врожайності поля. Однак, попри теоретичні можливості деталізованого аналізу, в рамках цього дослідження детальний прогноз по окремих ділянках не описується та не реалізується [2].
3. Дослідження, в яких застосовуються рекурентні нейромережі з використанням навчання з підкріпленням для прогнозування врожайності, демонструють середню точність на рівні 93.7%. Цей метод фокусовано на визначенні загальної врожайності всього поля, але здійснити прогнозування за окремими ділянками не можливо [3].
4. У дослідженнях, де використовувалась стратифікована випадкова вибірка для збору урожаю картоплі та емпіричні рівняння на основі індексів NDVI та SAVI, досягнуто значних результатів з похибками 3.8%–7.5%, однак тестова вибірка належала тому ж полю, що і тренувальна [4].

Сучасні підходи до прогнозування врожайності, що використовують технології штучного інтелекту, безсумнівно, є підставою для досягнення значних результатів при обробці великих обсягів даних та наданні достовірних прогнозів на рівні цілого поля. Усі методи, які ґрунтуються на аналізі складної взаємодії між генетичними характеристиками рослин, погодними умовами, властивостями ґрунту та іншими зовнішніми факторами, демонструють високу точність прогнозування.

Попри свою ефективність у визначенні загальних трендів врожайності, підходи, які розглянуто вище, мають істотні обмеження, особливо коли мова йде про деталізацію до рівня окремих ділянок поля, а не всього поля в цілому.

Основною проблемою є те, що більшість існуючих моделей орієнтовані на прогнозування сумарної врожайності всього поля, не враховуючи внутрішньопольові варіації, які можуть мати критичне значення для точного управління агротехнічними заходами. Це обмеження робить неможливим формування детальної карти врожайності, що, в свою чергу, обмежує потенціал застосування таких систем для розв'язання ряду ключових задач. Зокрема, оптимізація диференційованого внесення добрив та засобів захисту рослин, підтримки водного режиму, проведення біологічних досліджень для вивчення впливу різних комбінацій агротехнічних факторів на продуктивність конкретних ділянок ґрунту, залишається поза межами можливостей цих технологій. У дослідженні, де було сформовано емпіричні рівняння для прогнозування [4], хоч і було реалізовано метод деталізованого прогнозування, тестові вибірки належали тим же самим полям, на яких було сформовано тренувальні вибірки, що значно обмежує потенційні можливості застосування моделі через її недостатню універсальність. Розвиток методів, здатних забезпечити деталізований аналіз на рівні локальних ділянок, стає пріоритетним напрямком удосконалення систем прогнозування врожайності, відкриваючи нові перспективи для точного землеробства.

**3. Постановка задачі.** Основна мета цього дослідження полягає у розробці технології прогнозування врожайності та визначення можливих втрат внаслідок нерівномірного дозрівання. Ці втрати можуть бути суттєво зменшені шляхом десикації посівів. У кожному конкретному випадку виникає питання доцільності цього додаткового агротехнічного заходу. Його вирішення пов'язане із прогнозуванням врожайності на окремих ділянках поля, прогнозуванням втрат на кожній ділянці, оптимізації умов посіву та догляду за рослинами, включаючи густоту посіву, час та інтенсивність внесення гербіцидів та фунгіцидів.

Для побудови моделі визначено предиктори, які можуть впливати на нерівномірність дозрівання, а саме — дата посіву, погодні умови, вологість, ФАО (або групу стиглості гібриду), попередники тощо. Такий прогноз дає можливість фермеру оцінити економічну доцільність агротехнічного захисту, який планується, застосувати вибірково обробку окремих ділянок, зменшуючи пестицидне навантаження на навколишнє середовище.

Результатом дослідження має стати система прогнозування врожайності з деталізацією до локальних ділянок, яка інтегрує супутникові знімки, метеорологічні дані, інформацію про рослину та її догляд (гібрид, густоту посіву, типи хімічної обробки, декілька видів вегетаційних індексів — GLI, CLg, CLr, NDWI, NDVI тощо).

Для побудови деталізованої карти врожайності виконується розбиття поля на окремі ділянки, на кожній з яких виконується окремий прогноз. Позначимо реальне значення врожайності  $i$ -ої ділянки поля  $Y$  як  $y_i \in Y$ ,  $i = 1, \dots, n$ , а прогнозоване —  $\hat{y}_i = f_0(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , де  $x_i \in X$ , — вектор вхідних даних, що описує стан  $i$ -ої ділянки  $i = 1, \dots, n$ , впродовж періоду дозрівання,  $X$  — матриця даних для всіх ділянок поля  $Y$ ;  $\theta$  — параметри моделі прогнозування врожайності  $Y$ ;

$\theta$  — параметри моделі прогнозування;

$f$  — функціональна залежність між вхідними даними стану поля та врожайністю, що встановлюється методами машинного навчання.

Потрібно ідентифікувати залежність, яка є розв'язком задачі

$$L(f_{\theta}(x_i), y_i) \rightarrow \min, \quad i = 1, \dots, n,$$

де  $n$  — кількість ділянок на полі  $Y$ ,  $L$  — функція втрат, що відображає відхилення прогнозованих значень від реальних, та здійснити прогнозування врожайності при заданих вхідних даних.

**Математична модель** Задача прогнозування врожайності є надзвичайно складною, порівнюваною із прогнозуванням погоди, і вимагає не тільки врахування великої кількості параметрів, але й ідентифікації ключових факторів, від яких найбільше залежить результат.

На врожайність впливає велика кількість параметрів: хімічний склад та структура ґрунту, його вологість, рівень рН, внесені типи добрив, особливості їх застосування тощо. Важливими факторами є погодні умови: температура повітря, рівень опадів, вологість, інтенсивність сонячного світла, а також присутність та активність шкідників і хвороб. Не менш важливими є агротехнічні заходи: обробка ґрунту, дотримання сівозмін, методи посіву та методи збирання врожаю. Крім того, необхідно враховувати генетичні особливості посівного матеріалу, його стійкість до хвороб та адаптивність до погодних умов.

Нагадаємо, що основною задачею даного дослідження є прогнозування врожайності кожної ділянки поля на основі аналізу детальних даних про стан рослин, що включають дані, отримані з супутникових знімків у різних спектрах, які конвертуються у вегетаційні індекси NDVI, NDWI, CLg, CLr, GLI [5]. Важливими є також метеорологічні дані: температура, кількість опадів, швидкість та напрямки вітру, хмарність, сонячна радіація та атмосферний тиск. Доповнюються ці дані інформацією про агротехнічні заходи, включаючи обробку поля гербіцидами та фунгіцидами, тип гібрида соняшника (раннього чи пізнього) та густоту посіву. Для навчання та валідації моделі використовується тренувальний датасет, в якому для кожної ділянки поля надано дані про урожайність в тонах на гектар.

Введемо умовні позначення для подальшого опису методу.

Нехай  $X_i$  — матриця даних для  $i$ -го поля, елементи матриці  $x_{ijkl} \in X_i$ ,  $n$  — кількість полів у навчальній вибірці; дні проведення спостережень  $j \in J = \{j_1, \dots, j_m\}$ ;  $m$  — кількість днів спостережень, що були проведені для поля;

Кожній ділянці відповідає рядок матриці

$$l \in L = \{NDVI, NDWI, GLI, CLr, CLg, \text{wind speed}, \text{seeding density}, \dots\}$$

— вхідні дані.

Множина вхідних даних має значний обсяг. Структуру даних наведено на рисунку 1. Дані за усі дні спостережень складають разом багатовимірний масив розмірності  $n \times |L| \times m$ .

Щоб зменшити розмірність вхідного вектора даних та оптимізувати процес прогнозування, проводиться попередній аналіз даних та відбір найбільш значущих ознак (feature selection). Одним з ключових інструментів у цьому процесі є кореляційний аналіз, який допомагає виявити статистичні зв'язки між різними ознаками. З допомогою кореляційного аналізу виявляють ознаки, які сильно

|     | NDVI | NDWI | GLI | CLr | CLg | wind speed | seeding density | ... |
|-----|------|------|-----|-----|-----|------------|-----------------|-----|
| 1   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 2   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 3   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 4   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 5   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 6   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 7   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 8   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| 9   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |
| ... | ...  | ...  | ... | ... | ... | ...        | ...             | ... |
| m   |      |      |     |     |     |            |                 | ... |

Рис. 1. Схематичне представлення структури навчального набору даних до проведення попередньої обробки.

корелюють між собою. Серед таких ознак експертним шляхом з допомогою експертів з аграрного сектору визначається тільки одна ознака, відкидаючи інші для зменшення розмірності датасету. Це дозволяє підвищити ефективність моделі, зберігаючи тільки найінформативніші ознаки.

На етапі попередньої обробки виконуються наступні кроки.

Крок 1. Видалення викидів для кожного дня окремо для кожного поля із застосуванням методу z-score [6, 7].

Значення z-score для кожного елемента визначається за формулою:

$$z_{ijkl} = \frac{x_{ijkl} - \mu_{ijl}}{\sigma_{ijl}},$$

де  $x_{ijkl} \in X_i$ ;  $\mu_{ijl} = \sum_{k=1}^m x_{ijkl}/m$  — середнє значення  $l$ -го параметра за день  $j$ -ий в матриці  $X_i$ ;  $\sigma_{ijl} = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ijkl} - \mu_{ijl})^2/m}$  — стандартне відхилення  $l$ -го параметра за  $j$ -ий день в матриці  $X_i$ ,  $z_{ijkl}$  — z-оцінка елемента  $x_{ijkl}$ .

**Евристика Е1.** Будемо вважати елемент  $x_{ijkl}$  викидом, якщо значення  $|z_{ijkl}| > 2.9$ . У такому випадку весь  $k$ -ий рядок за  $j$ -ий день матриці  $X_i$  видаляється з навчального набору.

Крок 2. Для кожної матриці  $X_i$ ,  $i = \overline{1, g}$ , для кожної послідовності елементів  $x_{ijkl} \in X_i$ ,  $j \in J$  обчислюються агреговані дані за формулами:

$$x_{ikl}^{\min} = \min_{j \in J} (x_{ijkl}), \quad x_{ikl}^{\text{mean}} = \frac{1}{|J|} \sum_{j \in J} x_{ijkl}, \quad x_{ikl}^{\max} = \max_{j \in J} (x_{ijkl}),$$

утворюючи матрицю агрегованих значень  $X'_i$ .

Крок 3. Об'єднання даних у загальний датасет  $X = \bigcup_{i=\overline{1, g}} X'_i$ .

Крок 4. Повторне видалення викидів на об'єднаному датасеті  $X$ :

$$z'_{ql} = \frac{x'_{ql} - \mu'_l}{\sigma'_l},$$

де  $x'_{ql} \in X$  — елемент матриці, що відповідає рядку  $q$  і параметру  $l$ ;

$\mu'_l = \sum_{q=1}^s x'_{ql}/s$  — середнє значення параметра  $l$  в матриці  $X$ ;

$\sigma'_l = \sqrt{\sum_{q=1}^s (x'_{ql} - \mu'_l)^2/s}$  — стандартне відхилення параметра  $l$  в матриці  $X$ ;

$z'_{ql}$  —  $z$ -оцінка елемента  $x'_{ql}$ .

**Евристика Е2.** Будемо вважати елемент  $x'_{ql}$  викидом, якщо  $|z'_{ql}| > 2.9$ . У такому випадку весь рядок  $q$  матриці  $X$  видаляється з навчального набору.

Повторне видалення викидів є важливим кроком, оскільки видалення викидів окремо в межах кожного поля не гарантує відсутності неправильних даних у зібраному наборі. При об'єднанні різних полів можливі ситуації, коли дані, які вважалися нормальними для одного поля, стають аномальними у контексті загального набору через різницю в масштабах, розподілах чи інших характеристиках. Тому необхідно знову видаляти викиди, щоб забезпечити консистентність та однорідність всіх зібраних даних.

У дослідженні для категоріальних ознак, таких як типи гібридів та рослини-попередники, було застосовано метод one-hot encoding. Цей метод дозволяє перетворити категоріальні дані у форму, яка придатна для обробки алгоритмами машинного навчання. Для кожної категоріальної ознаки створюється набір нових змінних (стовпців), де кожна змінна представляє одну категорію. Якщо в оригінальному записі спостерігалася певна категорія, то відповідний стовпчик для цієї категорії отримує значення 1, а всі інші — 0.

Для внесення даних про дати гербіцидних та фунгіцидних обробок, які є частиною застосування захисних засобів у рослинництві, було реалізовано метод, схожий на one-hot encoding. Замість використання безпосередньо кількості днів від дати посіву до моменту обробки, дані були представлені через бінарні стовпчики, що відображають певні діапазони днів проведення спостережень.

**Евристика Е3.** Експертами було встановлено типові часові діапазони для внесення фунгіцидів (34–82 дні від дати посіву) та гербіцидів (24–62 дні).

**Евристика Е4.** Ці діапазони днів проведення спостережень було поділено на окремі категорії. Для фунгіцидів це стовпчики {34, 46, 58, 70, 82}, а для гербіцидів — {24, 33, 43, 52, 62}.

**Евристика Е5.** Кожна дата внесення хімікатів віднесена до найближчої категорії. Наприклад, якщо фунгіциди були застосовані на 48-й день після посіву, то вектор для цього випадку буде складатися з елементів {0, 1, 0, 0, 0}, що відповідає категорії 46.

У результаті застосування описаних методів обробки даних для кожної ділянки поля було створено вектор інформації, який описує її розвиток впродовж періоду дозрівання. Для навчання прогнозу моделі була використана Light Gradient Boosting Machine (LightGBM) [8], яка є ансамблевою моделлю, що послідовно будує та ускладнює дерева рішень, використовуючи градієнтний спуск для оптимізації втрат. Використання LightGBM у цьому дослідженні дозволи-

ло ефективно здійснювати прогнозування врожайності, надаючи можливість детально аналізувати кожен окрему ділянку поля ізольовано.

Розглядаючи аспекти аналізу інформації, крім традиційного векторного представлення моніторингових значень, можна виокремити візуальний аспект, який дає змогу оцінювати великі території на основі образів. Це доповнює числові дані, надаючи ширшу картину стану сільськогосподарських угідь [9, 10]. Об'єднання цих підходів сприяє створенню синергетичного ефекту, розширює уявлення про об'єкт дослідження та збільшує точність прогнозів. Для забезпечення контекстної інформації було розроблено спеціалізовану модель комп'ютерного зору на основі архітектури U-net, яка аналізує залежності на великих територіях, ідентифікуючи високопродуктивні зони та області з потенційно нижчою врожайністю.

У процесі роботи моделі комп'ютерного зору вхідною інформацією для обробки є прямокутні зображення (патчі), отримані в результаті розбиття великих полів на менші сегменти.

Оскільки сільськогосподарські поля мають різноманітні розміри, у цьому дослідженні для ефективної обробки даних було застосовано метод розбиття зображень на менші частини, відомі як патчі. Такий підхід дозволяє забезпечити деталізовану сегментацію кожної частини поля окремо, після чого отримані патчі зіставляються разом, утворюючи цілісне сегментоване зображення поля. Цей процес не лише спрощує обробку великих ділянок землі, але й підвищує точність сегментації за рахунок детального аналізу кожного фрагменту.

У процесі накладання патчів було використано метод з ваговими коефіцієнтами, який дозволяє більш гладко інтегрувати частини зображення між собою. При цьому кожен піксель на ділянках, які перекриваються, отримує вагу залежно від його відстані до центру патча. Ця процедура сприяє м'якшому і більш природньому переходу між сегментами. Такий підхід мінімізує ризик різких відмінностей на границях патчів, забезпечуючи високу якість кінцевого сегментованого зображення і точне відображення варіативності врожайності на полях. Формула для визначення вагового коефіцієнта  $w(x, y)$  для пікселя, розташованого на відстані  $(x, y)$  від центру патча, може бути представлена таким чином:

$$w(x, y) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}},$$

де  $x$  та  $y$  — відстані від пікселя до центру патча за відповідними осями;  $\sigma$  — параметр, що визначає ширину "дзвона" гаусівської кривої, тобто рівень згладжування на краях патчів.

Враховуючи, що краї полів зазвичай не є прямими, і кожне поле характеризується своєю унікальною формою, виникає необхідність ефективної обробки патчів, що частково охоплюють межі поля і виходять за них. Для вирішення цієї проблеми і оптимізації процесу сегментації були впроваджені маски, які накладаються на патчі.

Ці маски виконують функцію індикаторів, вказуючи моделі, які пікселі в патчі належать до поля, а які знаходяться за його межами і не повинні враховуватися при аналізі. Таким чином, маски дозволяють моделі фокусуватися лише на релевантних ділянках зображення, ігноруючи ті частини патчів, що виходять за межі поля. Це значно підвищує точність і ефективність сегментації,

оскільки зменшується кількість шуму та нерелевантних даних, які обробляються моделлю.

Модель U-net, розроблена для виконання сегментації земельних ділянок, ефективно аналізує умови розвитку рослин на великих масштабах, враховуючи комплексні змінні та індивідуальні особливості кожної ділянки (рис. 2 [7]). Після завершення сегментації, кожна ідентифікована ділянка поля проходить через додатковий етап аналізу за допомогою алгоритму LightGBM, який виконує прогнозування з урахуванням конкретного сегменту, до якого належить ділянка.

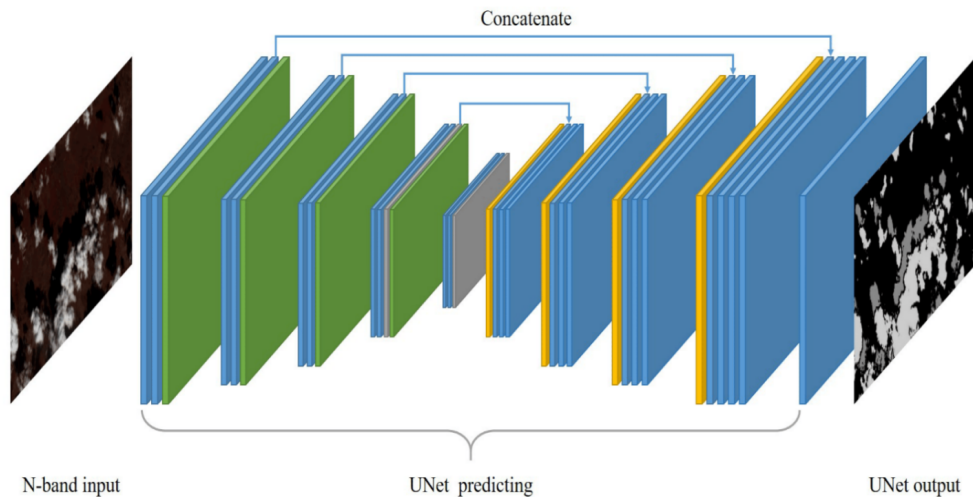


Рис. 2. Приклад виконання сегментації на основі супутникового зображення [7].

**4. Одержані результати дослідження.** У межах експериментальних досліджень компанії «Сингента» для перевірки точності прогнозування врожайності було виділено декілька полів, які не було включено до навчальної вибірки. Кожне поле розділене на окремі ділянки, для яких модель виконує прогнозування врожайності індивідуально. Прогноз для кожної ділянки порівнюється з фактичними даними збору врожаю, на основі чого обчислюється корінь середньоквадратичної помилки (RMSE), що дозволяє оцінити точність моделі.

Далі, врожайність кожної ділянки у тонах на гектар переводиться в тони, шляхом множення на площу однієї ділянки. Таким чином, обчислюється сумарна врожайність всього поля за прогнозованими даними та порівнюється з фактичною сумарною врожайністю. Точність сумарного прогнозу врожайності поля оцінюється шляхом розрахунку відсоткового відхилення прогнозованої врожайності від реальної.

Хоча ключовим показником є точність сумарної врожайності, точність прогнозування для окремих ділянок також має велике значення для подальших досліджень. Завдяки цьому можна масштабувати та універсалізувати систему, забезпечивши високу точність як у загальному прогнозі, так і в індивідуальному застосуванні до окремих ділянок. Це дозволить вирішувати широке коло завдань, таких як оптимізація диференційованого внесення препаратів, оцінка

впливу точкової обробки поля різними агрохімічними речовинами, оцінка локального впливу різних комбінацій факторів, включно з рельєфом, відбитим сонячним випромінюванням та станом ґрунту кожної конкретної ділянки.

У рамках дослідження ефективності системи прогнозування врожайності було отримано результати, які представлено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Результати дослідження ефективності системи прогнозування врожайності

| Поле                  | MAE      | Точність  | Прогнозований врожай (т) | Фактичний врожай (т) | Площа (га) |
|-----------------------|----------|-----------|--------------------------|----------------------|------------|
| Flora_Baba_22         | 0.360007 | 98.299489 | 189.184446               | 192.400052           | 101        |
| East-West_Serby_26_23 | 0.722826 | 96.284523 | 89.576487                | 87.459699            | 26.6       |
| East-West_Serby_37_23 | 0.585210 | 92.651682 | 98.978797                | 106.251481           | 37         |
| East-West_Serby_57_23 | 0.705239 | 93.220749 | 209.482780               | 195.217092           | 57.4       |
| East-West_Serby_69_23 | 0.724573 | 95.723041 | 253.647770               | 242.73062            | 69         |
| Zhuravske_Field_2_22  | 0.548212 | 86.796210 | 126.477451               | 109.757490           | 29.9       |

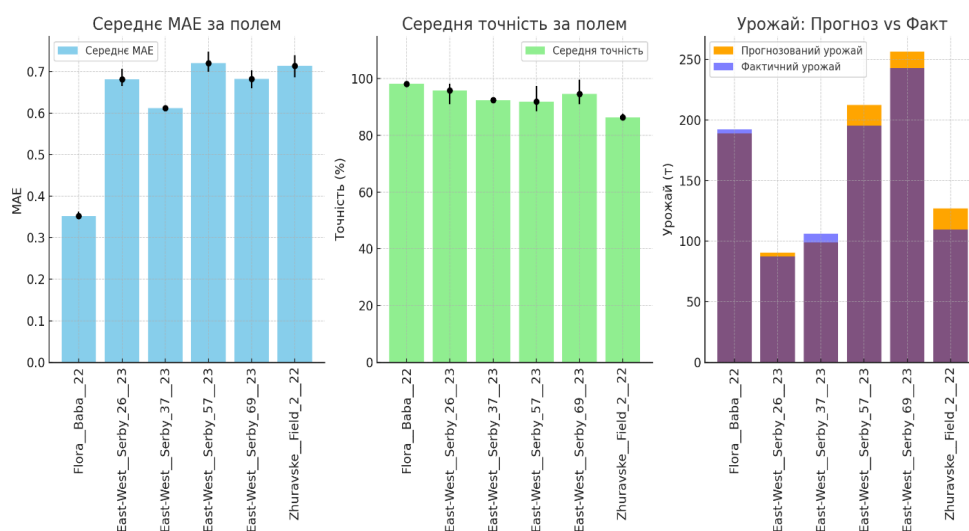


Рис. 3. Візуалізація отриманих показників точності.

Використання створеної моделі дозволило оцінити потенційну врожайність з досить високою точністю, як це видно з отриманих даних. Проведений аналіз показує, що модель не є достатньо стабільною: найнижчу точність зафіксовано на рівні 87.62%, а найвищу — на рівні 97.88%. Середнє значення помилки по всіх ділянках поля (MAE) становить 0.608. Середня точність прогнозування сумарної врожайності складає 92.78%.

Існує проблема вимушеного використання обмеженої вибірки для навчання та тестування. У навчальній вибірці наявні лише 8 полів, що значно обмежує здатність моделі узагальнювати знання та адаптуватися до нових умов. Це контрастує з сучасними методами прогнозування врожайності, де для навчання використовуються сотні, а інколи й тисячі полів, дозволяючи моделям краще розрізняти різноманітні патерни росту рослин. З розширенням навчальної вибірки, модель зможе ідентифікувати нові закономірності та покращити свою точність, стаючи більш ефективною у прогнозуванні врожайності в різноманітних агрокліматичних умовах та регіонах. Це важливо для підвищення точності

прогнозів і зробить модель більш універсальною та придатною для широкого спектра застосувань.

На рисунках 4 та 5 наведено приклади візуалізації прогнозів. На кожному рисунку ліворуч розміщено карту реальної врожайності, праворуч — карту прогнозованої врожайності.

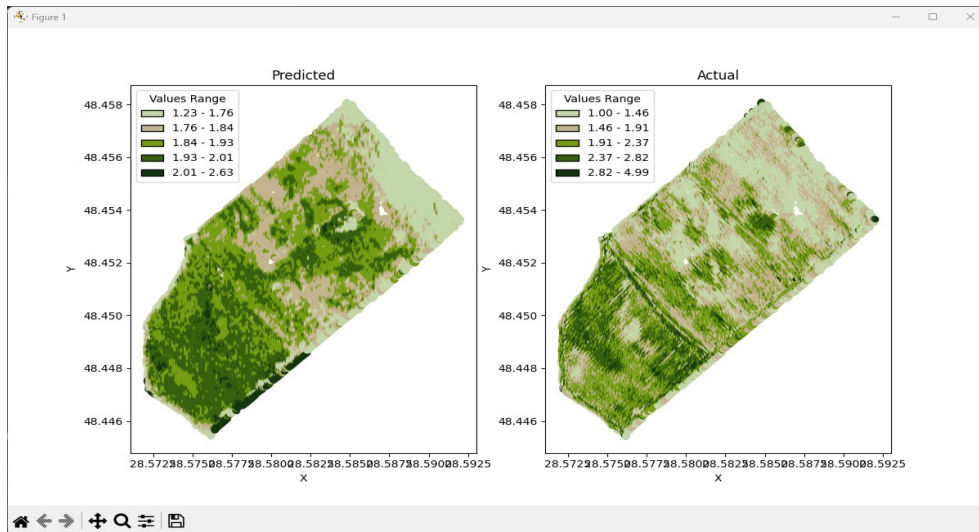


Рис. 4. Візуалізація результатів роботи моделі прогнозу, приклад 1.

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Завдяки впровадженню моделі, яка здатна виконувати деталізований прогноз з локалізацією до окремих ділянок, відкриваються нові перспективи застосування в сільськогосподарській індустрії. Такий підхід дозволяє проводити глибокий аналіз впливу локальних факторів на розвиток та врожайність рослин, що сприяє виявленню оптимальних умов для їхнього зростання. Крім того, це відкриває можливості для оптимізації диференційованого внесення добрив та хімічних речовин для захисту рослин, значно підвищуючи ефективність сільськогосподарських практик та мінімізуючи негативний вплив людської діяльності на довкілля.

Висока точність прогнозів, забезпечена застосуванням моделі, дозволяє з великою достовірністю здійснювати планування бюджету фермерських господарств. Це, в свою чергу, дозволяє агровиробникам ефективно планувати та оптимізувати витрати, забезпечуючи краще управління ресурсами та підвищення загальної рентабельності. Таким чином, реалізація описаної моделі відкриває значні можливості для підвищення продуктивності та підтримки сталого розвитку в аграрному секторі.

При подальших дослідженнях збагачення навчальної вибірки через додавання даних з різноманітних географічних локацій та умов вирощування стане ключем до максимізації універсальності моделі, дозволяючи їй ефективно працювати з ширшим спектром агроєкосистем.

Оптимізація навчальної вибірки шляхом балансування її структури видаленням надмірно представлених даних і аугментацією (збільшення обсягу) менш представлених категорій відіграє важливу роль у підвищенні точності прогнозів. Це дозволить моделі краще адаптуватися до варіативності умов та особливостей різних видів сільськогосподарських культур.

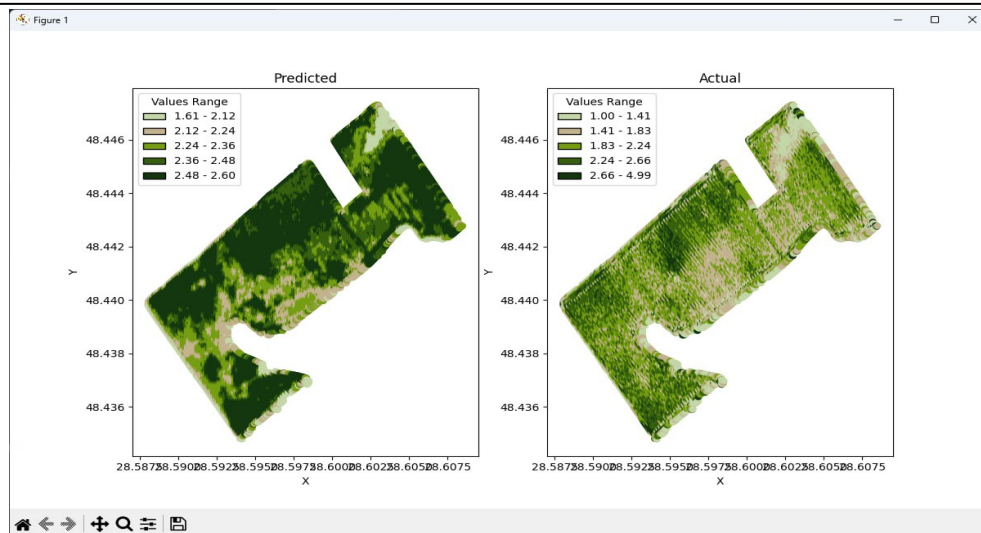


Рис. 5. Візуалізація результатів роботи моделі прогнозу, приклад 2.

Розробка методу для генерації та аналізу комбінацій можливих варіантів догляду за рослинами відкриває нові перспективи для створення комплексних систем рекомендацій. Це не тільки підвищить точність індивідуалізованих прогнозів для кожної ділянки, але й допоможе визначити найефективніші стратегії агротехнічних заходів, заснованих на глибокому аналізі потенційної врожайності.

Розширення сфери застосування моделі шляхом проведення досліджень на нових видах культур, виходячи за межі одного соняшнику, сприятиме генералізації та адаптації системи прогнозування для широкого спектру аграрних потреб. Такий підхід не тільки розширить можливості використання штучного інтелекту в агрономії, але й забезпечить більш глибоке розуміння впливу різноманітних факторів на продуктивність культур, сприяючи сталому розвитку аграрного сектору.

### Список використаної літератури

1. Khaki S., Wang L. Crop yield prediction using deep neural networks. *Front. Plant Sci.* 2019. Vol. 10. P. 621.
2. Paudel D., Boogaard H., A. de Wit, Janssen S., Osinga S., Pylianidis C., Athanasiadis I. N. Machine learning for large-scale crop yield forecasting. *Agric. Syst.* 2021. Vol. 187. P. 103016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.agsy.2020.103016>
3. Elavarasan D., Vincent P. M. D. Crop Yield Prediction Using Deep Reinforcement Learning Model for Sustainable Agrarian Applications. *IEEE Access.* 2020. Vol. 8. P. 86886–86901. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2992480>
4. Al-Gaadi K. A., Hassaballa A. A., Tola E., Kayad A. G., Madugundu R., Alblewi B., Assiri F. Prediction of Potato Crop Yield Using Precision Agriculture Techniques. *PLoS One.* 2016. Vol. 11, No. 9. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0162219>
5. Зозуля О. Л. Сучасні методи цифрового моніторингу в рослинництві : Монографія / О. Л. Зозуля, В. В. Швартау, Л. М. Михальська, О. Л. Ковель, Г. М. Гнатієнко, В. Є. Снитюк, В. М. Домрачев, Н. П. Тменова. Київ : Від А до Я, 2023. 254 с.
6. Anusha P. V., Anuradha C., Murty P. S. R. C., Kiran C. S. Detecting Outliers in High Dimensional Data Sets using Z-Score Methodology. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering.* 2019. Vol. 9, No. 1. P. 48–53. DOI: <https://doi.org/10.35940/ijitee.A3910.119119>
7. Jiao L., Huo L., Hu C., and Tang P. Refined Unet: Unet-Based Refinement Network for

- Cloud and Shadow Precise Segmentation. *Remote Sensing*. 2020. Vol. 12, No. 12: 2001. DOI: <https://doi.org/10.3390/rs12122001>
8. Ke G., Meng Q., Finley T., Wang T., Chen W., Ma W., Ye Q., and Liu T.-Y. Lightgbm: A highly efficient gradient boosting decision tree. *31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017)* : Long Beach, CA : USA. 2017. Vol. 30. P. 3146–3154.
  9. Bilan S., Hnatiienko V., Ilarionov O., and Krasovska H. The Technology of Selection and Recognition of Information Objects on Images of the Earth's Surface Based on Multi-Projection Analysis. *CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the III International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" (IntSol-2023)* : Symposium Proceedings Kyiv — Uzhhorod : Ukraine. 2023 September 27–28. Vol. 3538. P. 23–32.
  10. Hnatiienko H., Domrachev V., Saiko V. Monitoring the condition of agricultural crops based on the use of clustering methods. *15th International Conference Monitoring of Geological Processes and Ecological Condition of the Environment* : Monitoring. Nov 2021. Vol. 2021. P. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20215K2049>

**Hnatiienko V. H., Hnatiienko H. M., Zozulia O. L., Snytyuk V. Ye.**  
Method of forecasting yield of agricultural crops using multifactor analysis and neural networks.

The study focuses on the development of an intelligent yield forecasting system using satellite data, geoinformation data and climate indicators. The introduction of modern information technologies, such as machine learning and big data analytics, provides the agricultural sector with strategic advantages, reducing the risks of excessive use of desiccants and promoting sustainable agricultural development. This study is relevant for the agricultural sector, as it improves the accuracy of forecasts and the effectiveness of management decisions, while reducing costs and increasing the productivity of field processing.

**Keywords:** agricultural crops, desiccation, forecasting, satellite data, climate indicators, vegetation indices, neural networks.

## References

1. Khaki, S., & Wang, L. (2019). Crop yield prediction using deep neural networks. *Front. Plant Sci.*, 10, 621.
2. Paudel, D., Boogaard, H., A. de Wit, Janssen, S., Osinga, S., Pylianidis, C., & Athanasiadis, I. N. (2021). Machine learning for large-scale crop yield forecasting. *Agric. Syst.*, 187, 103016. <https://doi.org/10.1016/j.agry.2020.103016>
3. Elavarasan, D., & Vincent, P. M. D. (2020). Crop Yield Prediction Using Deep Reinforcement Learning Model for Sustainable Agrarian Applications. *IEEE Access*, 8, 86886–86901. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2992480>
4. Al-Gaadi, K. A., Hassaballa, A. A., Tola, E., Kayad, A. G., Madugundu, R., Alblewi, B., & Assiri, F. (2016). Prediction of Potato Crop Yield Using Precision Agriculture Techniques. *PLoS One*, 11(9). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0162219>
5. Zozulia, O. L. (2023). *Modern methods of digital monitoring in crop production: Monograph*. Kyiv: Vid A do Ya [in Ukrainian].
6. Anusha, P. V., Anuradha, C., Murty, P. S. R. C., & Kiran, C. S. (2019). Detecting Outliers in High Dimensional Data Sets using Z-Score Methodology. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 9(1), 48–53. <https://doi.org/10.35940/ijitee.A3910.119119>
7. Jiao, L., Huo, L., Hu, C., & Tang, P. (2020). Refined Unet: Unet-Based Refinement Network for Cloud and Shadow Precise Segmentation. *Remote Sensing*, 12(12), 2001. <https://doi.org/10.3390/rs12122001>
8. Ke, G., Meng, Q., Finley, T., Wang, T., Chen, W., Ma, W., Ye, Q., & Liu, T.-Y. (2017). Lightgbm: A highly efficient gradient boosting decision tree. *31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017)*. Long Beach, CA: USA.
9. Bilan, S., Hnatiienko, V., Ilarionov, O., & Krasovska, H. (2023). The Technology of Selection and Recognition of Information Objects on Images of the Earth's Surface Based on Multi-

- Projection Analysis. *CEUR Workshop Proceedings. Selected Papers of the III International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" (IntSol-2023)*. Symposium Proceedings Kyiv — Uzhhorod: Ukraine.
10. Hnatiienko, H., Domrachev, V., & Saiko, V. (2021). Monitoring the condition of agricultural crops based on the use of clustering methods. *15th International Conference Monitoring of Geological Processes and Ecological Condition of the Environment*. Monitoring. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20215K2049>

Одержано 27.04.2024

УДК 519.237.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).106-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).106-113)**І. В. Горват<sup>1</sup>, Н. Е. Кондрук<sup>2</sup>, Є. Б. Кондрук<sup>3</sup>, В. А. Нерода<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики  
[inna.horvat@uzhnu.edu.ua](mailto:inna.horvat@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3686-3565>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат технічних наук  
[natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua](mailto:natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики  
[yevhen.kondruk@uzhnu.edu.ua](mailto:yevhen.kondruk@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8555-3351>

<sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики  
[vladyslav.neroda@uzhnu.edu.ua](mailto:vladyslav.neroda@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2037-6631>

## СЕГМЕНТУВАННЯ КРАЇН ЄВРОСОЮЗУ ЗА ФІНАНСОВОЮ ДОПОМОГОЮ СТУДЕНТАМ

Використання технік кластеризації та їх порівняльного аналізу є невід'ємною складовою сучасних наукових досліджень через їх потенціал у виявленні структур та патернів у складних наборах даних. Ці техніки дозволяють класифікувати об'єкти за схожістю та групувати їх у кластери, що сприяє розумінню прихованих зв'язків та виявленню нових знань. Дослідження присвячено вивченню практичних аспектів використання технік кластеризації у задачі сегментування країн Євросоюзу за фінансовою допомогою студентам і включає в себе порівняльний аналіз методів кластеризації (k-Means, ієрархічної кластеризації), забезпечуючи цим об'єктивність та точність отриманих результатів. Використано різні індекси для визначення оптимальної кількості кластерів, такі як метод ліктя, метод силуету, метод Девіса-Болдіна та індекс Калінські-Харабаса. Отримано чотири ідентичні кластери за обома методами, отже дані мають виражену структуру, яка однозначно інтерпретується як чотири різні категорії. Такий результат свідчить про консистентність та надійність знайдених кластерів, що додатково підтверджує значущість проведеної змістовної інтерпретації.

**Ключові слова:** кластерний аналіз, k-Means, ієрархічна кластеризація.

**1. Вступ.** Обробка та аналіз даних стає все більш важливим завданням у багатьох галузях, від науки до бізнесу. Одним із ключових етапів цього процесу є кластеризація — метод, що дозволяє групувати схожі об'єкти для подальшого вивчення їхніх властивостей та взаємодій. В цьому контексті, методи кластеризації виявляються вирішальними для отримання структурованої, неочевидної інформації з наборів даних. Однак вибір оптимального підходу групування для конкретних задач може бути нетривіальним, оскільки різні техніки мають власні особливості та обмеження. Тому порівняння методів кластерного аналізу виникає з необхідності вибору оптимального підходу до обробки даних в залежності від конкретного об'єкта дослідження та доменної області.

Фінансова допомога студентам є важливим аспектом освітнього процесу в багатьох країнах світу. З метою ефективного розподілу ресурсів та забезпечення максимальної користі виникає потреба в її аналізі.

Одними з потужних інструментів аналізу даних є методи кластеризації, такі як k-Means та ієрархічна кластеризація. Вони є популярними методами машинного навчання, які дозволяють автоматично групувати схожі об'єкти в окремі кластери та дозволяють виявити приховані закономірності, структури, що можуть бути важливими для подальшого аналізу та прийняття рішень.

Дослідження присвячено вивченню практичних аспектів використання техніки кластеризації у реальних задачах. Це може стати потужним інструментом для аналізу та управління фінансовою допомогою студентам і сприяти більш ефективному використанню ресурсів та забезпеченню максимальної користі для студентської громадськості.

Мета дослідження полягає в сегментуванні країн Євросоюзу за фінансовою допомогою студентам. Отримані результати можуть бути корисним для грантових організацій та урядових установ у прийнятті рішень щодо розподілу фінансових ресурсів в освітній сфері.

**2. Огляд літератури.** В [1] автори провели порівняльний аналіз методів k-Means та ієрархічної кластеризації і встановили, що k-Means ефективний у кластеризації великих наборів даних, і його продуктивність покращується зі збільшенням кількості кластерів. Для категоріальних даних було застосовано ієрархічний алгоритм, і відповідно до його складності використано новий підхід для надання рангових значень кожному категоріальному атрибуту. Встановлено, що центроїдний алгоритм ефективніший, ніж алгоритм ієрархічної кластеризації. Під час кластеризації певних (зашумлених) даних обидва методи мають певну неоднозначність.

Основний підхід авторів [2] полягав у розгляді даних з одним і двома кластерами відповідно до еталонної моделі очікуваних кластерів (включаючи ядро, перехідні та віддалені області) і застосуванні різних методів агломеративної кластеризації до цих даних.

У статті [3] автори основну увагу звернули на популярний алгоритм k-Means і проблеми ініціалізації та неможливості обробки даних із змішаними типами ознак. Експериментальний аналіз показав, що не існує універсального рішення для задач алгоритму k-means.

У [4] порівняльні дослідження авторів базувались на часі виконання та обсязі пам'яті, яку використовували техніки кластеризації. Щодо часу виконання метод k-середніх виявився кращим, для агломеративної ієрархічної кластеризації зі збільшенням розмірності наборів даних час виконання швидко зростає. Щодо використання пам'яті, темп збільшення використання пам'яті був вищий для агломеративної ієрархічної кластеризації, однак k-Means використовував більше пам'яті.

Дана праця присвячена дослідженню ефективності застосування інструментів кластерного аналізу для аналізу фінансової допомоги студентам в країнах Європейського союзу з урахуванням їхнього рівня освіти.

**3. Постановка проблеми.** Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

- створити набір даних «Фінансова допомога студентам»;

- розробити інформаційно-аналітичну систему, яка реалізує класичні методи кластеризації  $k$ -середніх та ієрархічну, засоби визначення кількості кластерів;
- 3D-візуалізувати структуру даних, визначити оптимальну кількість кластерів;
- провести порівняльний аналіз отриманих результатів та їх інтерпретувати.

**4. Методи дослідження.** Метод  $k$ -Means [8] — це алгоритм кластеризації, який використовується для групування даних в  $k$  кластерів.

Він розділяє набір даних на попередньо задану кількість кластерів ( $k$ ) так, щоб об'єкти всередині одного кластера були більш схожі один на одного, ніж на об'єкти з інших кластерів. Алгоритм включає ініціалізацію центроїдів, призначення об'єктів до найближчих центроїдів, перерахунок центроїдів та оцінку якості кластеризації.

Ієрархічна кластеризація [8] — це метод групування даних, де починаючи з кожного об'єкта як окремої групи, алгоритм поступово об'єднує інші кластери в залежності від їх схожості. Цей процес може бути агломеративним, коли кластери поступово об'єднуються, або дивізійним, коли відбувається розділення кластерів. В результаті отримуємо деревоподібну структуру, яку можна візуалізувати у вигляді дендрограми.

Індекс силуету (Silhouette Index) [5, 6] визначає кількість кластерів за допомогою внутрішнього індексу. Внутрішній індекс — це спосіб визначити валідність кластерів без зовнішньої інформації. Двома основними даними, які використовуються для визначення внутрішнього індексу є згуртованість і поділ кластерів. Згуртованість вимірює наскільки тісно дані пов'язані один з одним в одному кластері. Поділ кластерів показує наскільки кожен кластер відокремлений від іншого. Інструмент, який використовується для вимірювання згуртованості і поділу кластерів, полягає у вимірюванні їх відстані. Відстань за замовчуванням є Евклідовою, але є також інші: Манхеттенська, Мінковського, тощо.

Індекс ліктя (Elbow Index) [7] використовується для визначення кількості кластерів у наборі даних за допомогою візуалізації з обчислення суми квадратів квадратів відстаней між кожною точкою даних і центроїдом свого кластера. Цей показник дозволяє ідентифікувати точку на графіку, де зміна суми квадратів відстаней спадає раптово, утворюючи вигин «ліктя». Кількість кластерів визначається як точка, де спостерігається цей раптовий спад, що вказує на оптимальну кількість груп, яка найкраще відображає структуру даних.

Індекс Девіда-Болдіна (Davies\_bouldin Index) [8] вимагає ініціалізації значень діапазону  $k$ . Для кожного значення  $k$  розраховується значення індексу Девіда-Болдіна і зберігається для відображення, коли значення  $k$  досягне максимуму, тоді виконується візуалізація і те значення яке найближче до 0 і є найкращим.

Індекс Калінські-Харабаса (Calinski\_harabasz Index) [9] розраховується як відношення міжкластерної дисперсії до внутрішньокластерної дисперсії, з урахуванням кількості кластерів. Значення  $k$ , яке відповідає найбільшому числу, вибирається як оптимальна кількість кластерів для заданого набору даних.

**5. Експерименти.** У центрі уваги цього дослідження — застосування методів  $k$ -Means та ієрархічної кластеризації до задачі аналізу фінансової допомоги

студентам за рівнем освіти.

Збір даних про фінансову допомогу студентам за рівнем освіти — у відсотках від загальних державних видатків проводився із офіційного веб-сайту Eurostat (<https://ec.europa.eu/eurostat>). Дані складаються з окремих звітів по фінансовій допомозі студентам за різні роки. Крім того, на етапі попередньої обробки вони були усереднені за роками 2012–2014, 2015–2017, 2018–2020 і переведені у формат csv.

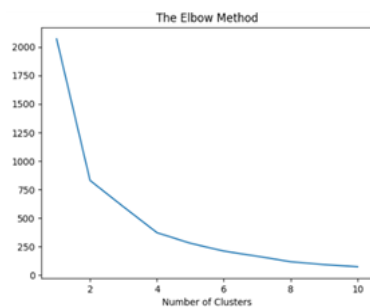
Для кластеризації за допомогою алгоритму k-Means необхідно спочатку визначити кількість кластерів. Для розв'язання цієї проблеми немає єдиного універсального способу. У даному дослідженні було використано кілька індексів визначення оптимальної кількості кластерів, а саме індекс ліктя, індекс силуету, індекс Девіса-Болдіна та індекс Калінскі-Харабаса. Кожен із них визначає найкраще значення кількості кластерів, вибір робиться на основі агрегованих показників більшості із них.

Індекс ліктя показав дві ліктьові точки, що визначило оптимальну кількість кластерів, як показано на рис. 1(а) на рівні 2 та 4.

Індекс силуету оцінює якість кластеризації, враховуючи як внутрішню однорідність кластерів, так і різницю між ними. Оптимальна кількість кластерів визначається чотирма групами, де значення силуету досягає максимуму (рис. 1(б)).

Індекс Девіса-Болдіна оцінює якість кластеризації, враховуючи середню відстань між кластерними центрами та розміри кластерів. Оптимальна кількість кластерів визначилась чотирма — мінімумом індексу Девіса-Болдіна (рис. 1(с)).

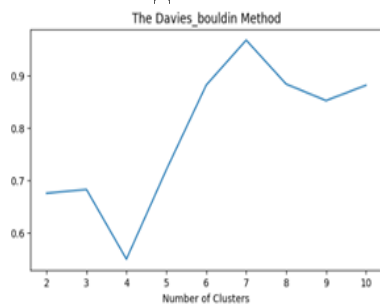
Індекс Калінскі-Харабаса оцінює якість кластеризації, враховуючи внутрішню однорідність кластерів та відстань між кластерними центрами. Оптимальна кількість кластерів — 4: найбільше значення індексу Калінскі-Харабаса (рис. 1(д)).



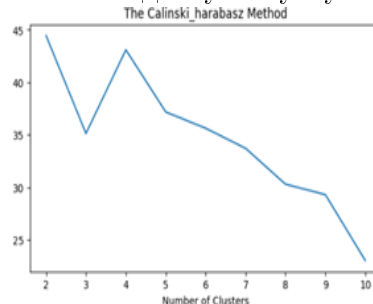
а. Індекс ліктя.



б. Індесу силуету.



с. Індекс Девіса-Болдіна.



д. Індекс Калінскі-Харабаса.

Рис. 1. Моделі визначення оптимальної кількості кластерів.

Провівши аналіз отриманих результатів обрано оптимальну кількість кластерів — 4. Наступний крок — візуалізація кластеризації. Для кращого розуміння результатів використаємо 3D графік. Останній крок — це інтерпретація результатів.

Для візуалізації результатів ієрархічної кластеризації використано деревоподібну структуру — дендрограму (рис. 2). На ній кожен лист відповідає окремому об'єкту, а висота кожної гілки показує відстань між об'єднаними кластерами. За дендрограмою визначено оптимальний рівень розподілу, що також відповідає 4 кластерам і найкраще відображає структуру даних шляхом обрізання дерева на певному рівні (червона горизонтальна лінія).

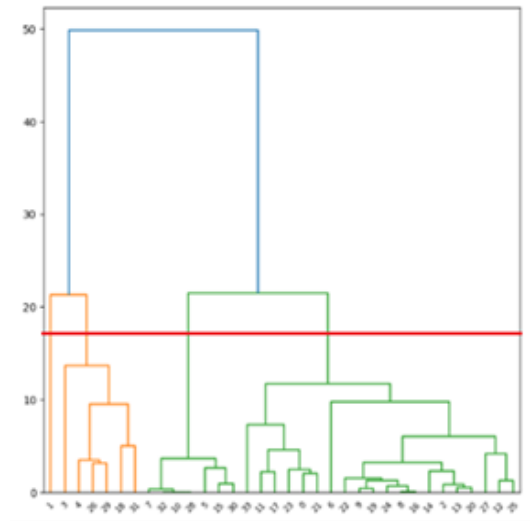


Рис. 2. Дендрограма ієрархічної кластеризації.

**6. Результати дослідження.** При кластеризації набору даних методом k-Means та методом ієрархічної кластеризації було отримано 4 ідентичних кластери (рис. 3):

Кластер 1: Естонія, Греція, Хорватія, Люксембург, Ліхтенштейн, Швейцарія, Сербія.

Кластер 2: Бельгія, Чехія, Ірландія, Іспанія, Франція, Італія, Кіпр, Латвія, Литва, Угорщина, Мальта, Австрія, Польща, Португалія, Румунія, Словенія, Словаччина, Фінляндія, Ісландія, Туреччина.

Кластер 3: Данія, Німеччина, Нідерланди, Швеція, Норвегія, Велика Британія.

Кластер 4: Болгарія.

**7. Обговорення.** Методи кластеризації k-Means і ієрархічна кластеризація — це два поширених підходи до розв'язання задачі кластеризації у машинному навчанні і аналізі даних. Обидва методи мають свої переваги і недоліки.

У контексті вихідних даних, модель k-середніх призначає кожному об'єкту конкретний кластер, визначаючи його приналежність до певної групи, тоді як ієрархічна кластеризація дозволяє отримати інформацію про всю структуру кластерів на різних рівнях ієрархії, що дає змогу аналізувати дані на різних рівнях деталізації.

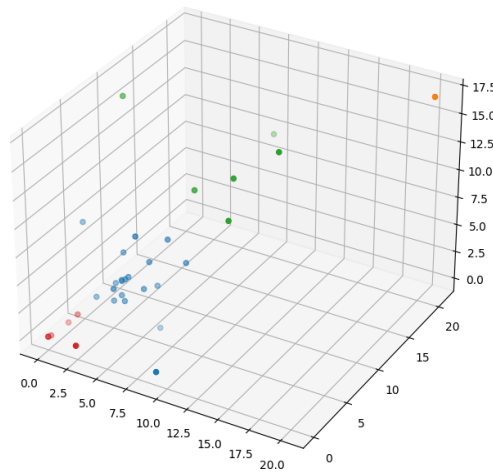


Рис. 3. Візуалізація кластерної структури.

Отримання чотирьох ідентичних кластерів як центроїдним методом, так і методом ієрархічної кластеризації вказує на те, що дані мають виражену структуру, яка однозначно інтерпретується як чотири різні категорії. Такий результат свідчить про консистентність та надійність знайдених кластерів, що додатково підтверджує їхню значущість у виявленні внутрішніх патернів та структур в досліджуваних даних.

Кластер 1 можна інтерпретувати як країни, які надають мінімальну фінансову допомогу студентам. Кластер 2 містить країни, які надають допомогу нижчу за середній рівень. Кластер 3 характеризує країни, які надають допомогу на рівні вище за середній. Кластер 4 відображає країну, яка забезпечує найвищий рівень фінансової допомоги студентам.

**8. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У даній статті було проведено комплексне дослідження яке є розвитком напрямку прикладного аналізу даних [10–12] і спрямоване на аналіз фінансової допомоги студентам в залежності від країни Євросоюзу. На початковому етапі роботи було створено набір даних, що включав в себе відомості про фінансову підтримку студентів країн Євросоюзу з 2012 по 2020 роки відображену трьома усередненими періодами. Далі розроблено інформаційно-аналітичну систему, що реалізує класичні методи кластеризації, такі як k-Means та ієрархічну кластеризацію та ряд індексів визначення оптимальної кількості кластерів. Проведено структурування датасету та виділено чотири групи схожості.

Представлена 3D-модель структури даних, що сприяло кращому розумінню даних. Проведений порівняльний аналіз отриманих результатів показав їхній збіг, що свідчить про стабільність виявленої структури даних та підтверджує відповідність отриманих кластерів реальним зв'язкам у досліджуваному наборі даних. Наведена змістовна інтерпретація може бути корисна для грантових організацій та урядових установ у прийнятті рішень щодо розподілу фінансових ресурсів в освітній сфері.

### Список використаної літератури

1. Gupta A., Sharma H., Akhtar A. A comparative analysis of k-means and hierarchical clustering. *EPRA International Journal of Multidisciplinary Research (IJMR)*. 2021. Vol. 7, No. 8. P. 412–418. DOI: <https://doi.org/10.36713/epra8308>
2. Tokuda E. K., Comin C. H., Costa L. D. F. Revisiting agglomerative clustering. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*. 2022. Vol. 585, No. 126433. P. 1–17. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126433>
3. Ahmed M., Seraj R., Islam S. M. S. The k-means algorithm: A comprehensive survey and performance evaluation. *Electronics*. 2020. Vol. 9, No. 8. P. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics9081295>
4. Karthikeyan B., Dipu Jo George, G. Manikandan, Tony T. A comparative study on k-means clustering and agglomerative hierarchical clustering. *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*. 2020. Vol. 8, No. 5. P. 1600–1604. DOI: <https://doi.org/10.30534/ijeter/2020/20852020>
5. Saputra D., Saputra M., Oswari L. Effect of distance metrics in determining k-value in k-means clustering using elbow and silhouette method. *Sriwijaya international conference on information technology and its applications*. 2019. Vol. 172. P. 341–346. DOI: <https://doi.org/10.2991/aisr.k.200424.051>
6. Kondruk N. E. A comparative study of cluster validity indices. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2019. No. 4. P. 59–67. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-6>
7. Ashari I., Dwi Nugroho E., Baraku R., Novri Yanda I., and Liwardana R. Analysis of Elbow, Silhouette, Davies-Bouldin, Calinski-Harabasz, and Rand-Index Evaluation on K-Means Algorithm for Classifying Flood-Affected Areas in Jakarta. *Journal of Applied Informatics and Computing*. 2023. Vol. 7, No. 1. P. 95–103. DOI: <https://doi.org/10.30871/jaic.v7i1.4947>
8. Hassan I., Abdullahi M., Ali Y. Analysis of Techniques for Selecting Appropriate Number of Clusters in K-means Clustering Algorithm. *International Conference on Computing and Advances in Information Technology*. 2021. P. 90–96.
9. Rachwał A. et al. Determining the quality of a dataset in clustering terms. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, No. 5. P. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.3390/app13052942>
10. Kondruk N. E. Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2018. Vol. 3, No. 46. P. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
11. Kondruk N. E., Malyar M. M. Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. P. 436–441. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
12. Кондрук Н. Е. Моделі багатофакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Математика і інформатика*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

**Horvat I. V., Kondruk N. E., Kondruk Y. B., Neroda V. A.** Segmentation of European Union countries by financial aid to students.

The use of clustering techniques and their comparative analysis is an integral part of modern scientific research due to their potential to reveal structures and patterns in complex data sets. These techniques allow classifying objects by similarity and grouping them into clusters, which helps to understand hidden relationships and discover new knowledge. The research is devoted to the study of practical aspects of using clustering techniques in the task of segmenting EU countries by student financial aid and includes a comparative analysis of clustering methods (k-Means, hierarchical clustering), thus ensuring the objectivity and accuracy of the results obtained. Various indices were used to determine the optimal number of clusters, such as the elbow method, the silhouette method, the Davis-Bouldin method, and the Kalinski-Harabasz index. Four identical clusters were obtained using both methods, so the data has a distinct structure that can be unambiguously interpreted as four different categories. This result indicates the consistency and reliability of the found clusters, which further confirms the significance of the meaningful interpretation.

**Keywords:** cluster analysis, k-Means, hierarchical clustering.

## References

1. Gupta, A., Sharma, H., & Akhtar, A. (2021). A comparative analysis of k-means and hierarchical clustering. *EPRA International Journal of Multidisciplinary Research (IJMR)*, 7(8). <https://doi.org/10.36713/epra8308>
2. Tokuda, E. K., Comin, C. H., & Costa, L. D. F. (2022). Revisiting agglomerative clustering. *Physica A: Statistical mechanics and its applications*, 585(126433), 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.126433>
3. Ahmed, M., Seraj, R., & Islam, S. M. S. (2020). The k-means algorithm: A comprehensive survey and performance evaluation. *Electronics*, 9(8), 1–12. <https://doi.org/10.3390/electronics9081295>
4. Karthikeyan, B., George, D. J., Manikandan, G., & Thomas, T. (2020). A comparative study on k-means clustering and agglomerative hierarchical clustering. *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*, 8(5), 1600–1604. <https://doi.org/10.30534/ijeter/2020/20852020>
5. Saputra, D. M., Saputra, D., & Oswari, L. D. (2020, May). Effect of distance metrics in determining k-value in k-means clustering using elbow and silhouette method. In *Sriwijaya international conference on information technology and its applications (SICONIAN 2019)*. Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/aisr.k.200424.051>
6. Kondruk, N. E. (2019). A comparative study of cluster validity indices. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 4, 59–67. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-6>
7. Ashari, I. F., Nugroho, E. D., Baraku, R., Yanda, I. N., & Liwardana, R. (2023). Analysis of Elbow, Silhouette, Davies-Bouldin, Calinski-Harabasz, and Rand-Index Evaluation on K-Means Algorithm for Classifying Flood-Affected Areas in Jakarta. *Journal of Applied Informatics and Computing*, 7(1), 95–103. <https://doi.org/10.30871/jaic.v7i1.4947>
8. Hassan, I. H., Abdullahi, M., & Ali, Y. S. (2021). Analysis of Techniques for Selecting Appropriate Number of Clusters in K-means Clustering Algorithm. *International Conference on Computing and Advances in Information Technology*. 90–96.
9. Rachwał, A. et al. (2023). Determining the quality of a dataset in clustering terms. *Applied Science*, 13(5), 1–20.
10. Kondruk, N. E. (2018). Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 3(46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
11. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (2021). Analysis of Cluster Structures by Different Similarity Measures. *Cybern. Syst. Anal.*, 57, 436–441. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>
12. Kondruk, N. E. (2022). Models of multivariate forecasting. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

Одержано 29.04.2024

УДК 51-7:368.025(045)

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).114-119](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).114-119)**Л. М. Іллічева<sup>1</sup>, Т. В. Авдеєва<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Національний авіаційний університет,  
факультет комп'ютерних наук та технологій (ФКНТ), доцент кафедри прикладної  
математики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[m\\_ilicheva@ukr.net](mailto:m_ilicheva@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5209-6823>

<sup>2</sup> Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,  
старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь  
[avdeeva.tetyana@gmail.com](mailto:avdeeva.tetyana@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7775-8512>

## ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСУ ТА ПЕРІОДІВ ОЧІКУВАННЯ СТРАХОВИХ ВИПАДКІВ

У роботі розглядаються закономірності визначення середнього часу до появи першого страхового випадку, першого із деякої кількості страхових випадків; закономірності розподілу «рекордних» по тривалості періодів між страховими випадками.

**Ключові слова:** математичне сподівання часу очікування страхового випадку, експоненціальний розподіл, «рекордні» значення серед найбільших періодів очікування страхових випадків.

**1. Вступ.** Вивчення різних аспектів ризиків, які пов'язані з невизначеністю можливих втрат, відноситься до тематики актуарної математики. Коли мова йде про страхову справу, перш за все мають на увазі принципи формування тарифних ставок. Тарифна ставка — ціна страхового ризику й інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Тарифна ставка, по якій укладається договір страхування, називається брутто-ставкою. У свою чергу, брутто-ставка складається з двох частин: нетто-ставки і навантаження. Нетто-ставка виражає ціну страхового ризику. В основі формування нетто-ставки за будь-яким видом страхування лежить ймовірність настання страхового випадку [8: 102]. До підписання контракту й придбання страхового полісу клієнт наражається на деякий ризик, що може привести до збитків. Придбавши страховий поліс і заплативши за нього детерміновану суму (страхову премію), клієнт позбавляється ризику, але сам ризик приймає на себе страхова компанія. Тобто, подія, яка може привести до фінансових втрат клієнта, стає страховим випадком [7]. Величина страхової виплати є випадковою величиною, причому у окремому інтервалі часу може відбутися кілька страхових випадків. Так, страхування на випадок хвороби, страхування автомобілів та інших видів власності є прикладами подібних ситуацій.

**2. Постановка завдання.** Дослідити величину середнього часу очікування першого страхового випадку; першого із можливих кількох страхових випадків; закономірностей формування найдовших проміжків між кількома страховими випадками.

**3. Огляд літератури.** Прогнозування середнього часу очікування першого страхового випадку та середнього часу очікування одного із кількох страхових

випадків, номерів «рекордів» серед послідовності страхових випадків мають важливе значення при розробці тонтин-продуктів. Тонтин — інвестиція, пов'язана із життям особи, причому дохід забезпечується доти, доки особа жива. Зазвичай, у загальний фонд вноситься деяка сума, відсотки розподіляються в середині групи застрахованих осіб між тими, хто дожив до розподілу. Огляд розвитку подібних продуктів міститься у роботі [3]. При розгляді питань, пов'язаних із формуванням пенсійних фондів, важливу роль відіграють випадкові фактори, які в свою чергу, впливають на величини внесків. Внески можна оптимізувати із врахуванням ризику платоспроможності та формувати різні моделі контролю. Огляд подібних моделей міститься у роботі [9]. Сучасний підхід до методів оцінювання міститься у книзі [5, 10].

У роботі [5: 44] вводиться випадкова величина  $X = IB$ , яка описує страхові виплати за виділений інтервал часу:

- випадкова величина  $B$  — загальна величина виплат у вказаному інтервалі;
- $I$  — індикатор для події (чи відбувся хоча б один страховий випадок у даному інтервалі).

Величина  $I$  фіксує існування ( $I = 1$ ) або відсутність ( $I = 0$ ) страхових випадків в інтервалі, але не кількість страхових випадків у ньому. Далі розглядаються різні випадки і оцінюється розподіл випадкових величин  $B$ ,  $I$  для конкретних моделей (страхування на 1 рік на випадок смерті від нещасного випадку, страхування автомобілів та ін.). Кожного разу проводиться оцінювання конкретних умовних розподілів випадкової величини  $X$ . Схожим чином, у роботі [4: 149] при аналізі тактики страхової компанії вводиться поняття індексу страхового випадку клієнта, тобто, випадкової величини, яка дорівнює 1, якщо страховий випадок має місце та 0 — у протилежному випадку. Надалі ж розглядається прибуток страхової компанії. У роботі [8: 119] наведена методика актуарної оцінки ступеня страхових ризиків та розрахунок страхових тарифів із страхування від окремих ризиків. Але не приділяється увага оцінкам часу настання страхових випадків. У роботі [6: 146] розглядаються методологічні засади та інструментарій кількісної оцінки ризику, різні підходи до моделювання та врахування ризиків. Тобто, ризик розглядається як поняття, яке не можна оминати у менеджменті. Тим важливіше оцінювати час, коли ще можна його ігнорувати. У [5: 361] розглядається моделювання процесу сумарних страхових виплат при деяких умовах на процес  $N(t)$ , який відображає кількість страхових випадків ( $N(t)$  представлений біноміальним або пуассонівським процесами). У відповідності до класу  $N(t)$  аналізується процес сумарних страхових виплат. Можна розглянути це питання при більш загальних умовах на процес  $N(t)$ , виділяючи саме «рекордні» значення у цьому процесі.

**4. Основний результат.** Покажемо, яким чином можна визначити середній час очікування першого страхового випадку.

Для опису середнього часу очікування цієї події введемо дискретну модель, тобто, час розглядається дискретно, зміни можуть проходити тільки у моменти часу:  $\partial, 2\partial, 3\partial, \dots$ . Тобто, випробування відбуваються саме у ці проміжки часу. Поява страхового випадку може бути ототожнена з першим успіхом у послідовності випробувань за схемою Бернуллі [2: 13].

Нехай  $T$  — час очікування першого успіху у послідовності випробувань Бернуллі із ймовірністю успіху  $p$ . Тоді  $P\{T > n\partial\} = (1 - p)^n$ , середній час очікува-

ння  $E(T)$  — обчислюється наступним чином. Подія  $T = n\partial$  може бути описана як різниця подій:  $\{T > (n-1)\partial\} \setminus \{T > n\partial\}$ . Тоді її ймовірність:

$$\begin{aligned} P\{T = n\partial\} &= P\{T > (n-1)\partial\} - P\{T > n\partial\} = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = \\ &= (1-p)^{n-1}(1 - (1-p)) = (1-p)^{n-1}p. \end{aligned}$$

Час очікування можна представити як геометрично розподілену дискретну випадкову величину:

$$E(T) = \sum_1^{\infty} k\partial(1-p)^{k-1}p = \partial p(1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \dots) = \frac{\partial p}{p^2} = \frac{\partial}{p}.$$

При обчисленні суми ряду використана властивість похідної для суми геометричної прогресії із знаменником  $q = 1-p$ , а саме:

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1-q}; \quad 1 + 2q + 3q^2 + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Користуючись відомою ймовірністю  $p$ , можна прогнозувати час очікування першого страхового випадку, який приводить до фінансових збитків.

Якщо величина  $\partial$  спадає, але так, що  $\frac{\partial}{p} = a$  — фіксоване, тоді можна розглянути період часу  $t$ , протягом якого може відбутися вже  $n \approx \frac{t}{\partial}$  випробувань і тоді:

$$P(T > t) \approx \left(1 - \frac{\partial}{a}\right)^{\frac{t}{\partial}} = \left(\left(1 + \frac{1}{-\frac{a}{\partial}}\right)^{-\frac{a}{\partial}}\right)^{-\frac{\partial t}{a\partial}} \approx e^{-\frac{t}{a}}.$$

Для часу очікування першого успіху  $T$  одержали формулу відомого експоненціального розподілу.

Випадкова величина  $X$  має експоненціальний (показниковий) розподіл з параметром  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), якщо її функція розподілу:  $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $x > 0$ . Введемо позначення  $X \sim \exp(\alpha)$ . Тоді  $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ , як показано вище.

Тобто, середній час очікування першого страхового випадку оцінюється як математичне сподівання для першого успіху у схемі Бернуллі і дорівнює  $\frac{\partial}{p}$ , де  $p$  — ймовірність реалізації страхового випадку;  $\partial$  — тривалість проміжку, протягом якого не відбувається страхова подія (страхова подія може відбутися тільки у моменти часу  $\partial, 2\partial, 3\partial, \dots$ ). У загальному випадку час очікування першого страхового випадку описується експоненціальним розподілом.

Розглянемо випадок, коли страхову компанію однаково турбує настання хоч якогось із кількох страхових випадків, припустимо, із  $n$  випадків. Тоді, час очікування кожної із цих подій —  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . [3: 170]

Якщо страхові випадки незалежні, цікавить саме  $\eta = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$ . При цьому  $P(T_i > x) = e^{-a_i x}$ , тоді:

$$P(\eta > x) = P\left(\bigcap_1^n \{T_i > x\}\right) = \prod_1^n P(T_i > x) = e^{-x \sum_1^n a_i}.$$

Час очікування  $\eta$  знову має експоненціальний розподіл. Оскільки

$$E(T_i) = \frac{1}{a_i}, \quad a_i = \frac{1}{E(T_i)},$$

тоді середній час очікування якогось із  $n$  страхових випадків:

$$E\eta = \left( \sum_1^n a_i \right)^{-1} = \left( \sum_1^n \frac{1}{E(T_i)} \right)^{-1}.$$

Наведена формула характеризує середній час очікування хоча б одного із кількох страхових випадків.

Перейдемо до визначення номерів «рекордів» серед найбільших періодів очікування або серед найбільших фінансових втрат при деякій кількості страхових випадків.

Коли клієнт застрахований від фінансових збитків, для їх покриття має значення як час очікування страхового випадку, так і розміри цих фінансових збитків. Позначимо  $X_i, i = 1, \dots$  — часи очікування відповідних страхових випадків або розміри кожного із фінансових збитків (для зручності розглянемо нескінченну їх кількість). Припустимо також, що  $X_1, X_2, \dots$  — незалежні випадкові величини з однаковим розподілом  $F$  [2: 29].

Якщо ввести випадкову величину  $N$  (яка характеризує «рекордні» номери для введеної вище послідовності) — значення першого індексу  $k$  ( $k = 2, \dots$ ), для якого  $X_k > X_1$ , то подія  $\{N > n\}$  відбудеться тоді і тільки тоді, коли максимальний елемент вже скінченної послідовності  $X_1, X_2, \dots, X_n$  є початковим. Ймовірність цієї події дорівнює  $n^{-1}$ , оскільки початковий елемент вибирається випадковим чином із  $n$  можливих. Подія  $\{N = n + 1\}$  може розглядатися як різниця подій  $\{N > n\} \setminus \{N > n + 1\}$ , що дозволяє отримати ймовірність цієї події:

$$P\{N = n + 1\} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Формула виведена тільки при умові, що  $X_i, i = 1, \dots$  незалежні і мають одну й ту саму неперервну функцію розподілу  $F$ . Якщо вважати, що  $N(1) = 1$ , а для  $n \geq 2$ :

$$N(n) = \min \{j : j > N(n - 1), X_j > X_{N(n-1)}\},$$

тоді  $P\{N(n) < \infty\} = 1$ , оскільки  $P\{N(2) = j\} = \frac{1}{j(j-1)}$  одержимо:

$$EN(n) = 1 + \sum_2^\infty i \frac{1}{i(i-1)} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{i} = \infty, \quad n \geq 2.$$

Випадкова величина  $N$  має скінченну ймовірність, але нескінченне математичне сподівання.

Відомо, що послідовність  $N(n)$  утворює ланцюг Маркова, тобто для усіх векторів  $(j_2, \dots, j_{n-1})$ , котрим відповідає додатня ймовірність умови у лівій частині наступної рівності [1: 259]:

$$P\{N(n) = k | N(t) = j_t, 2 \leq t \leq n\} = P\{N(n) = k | N(n-1) = j_{n-1}\},$$

причому умовні ймовірності  $P\{N(n) = k | N(n-1) = j\}$  дорівнюють  $\frac{j}{k(k-1)}$ , якщо  $k > j \geq n-1 \geq 2$  і дорівнюють 0 при інших значеннях  $j$  та  $k$ .

Тоді можна знайти розподіл випадкових величин  $N(n)$  при різних значеннях  $n$ . Наприклад, при  $n = 3$  отримаємо:

$$\begin{aligned} P\{N(3) = k\} &= \sum_{j=2}^{\infty} P(N(3) = k | N(2) = j) \cdot P(N(2) = j) = \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} \frac{j}{k(k-1)} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Тобто, можна визначати ймовірність настання третього (і, відповідно, усіх наступних) «рекордів» для послідовності страхових випадків. Послідовність випадкових величин  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$  може відображати як час очікування чергового страхового випадку, так і характеризувати фінансові збитки, які пов'язані з  $i$ -тим страховим випадком.

Звернемося до характеристики приростів «рекордних» значень для часів очікування незалежних страхових випадків.

Вважаємо, що випадкові величини  $X_i, i = 1, \dots$  мають експоненціальний розподіл (можна трактувати їх як часи очікування настання відповідних страхових випадків). Позначимо через  $\{X_{N(n)}, n > 1\}$  — послідовність «рекордних» значень. Можна зробити висновок, що відповідні їм прирости послідовних «рекордних» значень характеризуються як незалежні випадкові величини, які теж мають експоненціальний розподіл.

Тобто, має місце наступне твердження [1: 265]:

Нехай випадкові величини  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$  мають функцію розподілу  $F(x) = 1 - e^{-x}, (x > 0)$ ;  $X_{N(n)}, (n > 1)$  — послідовність «рекордів» для  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ .

Нехай  $Y_1 = X_{N(1)} = X_1, Y_j = X_{N(j)} - X_{N(j-1)}, (j \geq 2)$ . Тоді величини  $Y_1, Y_2, \dots$  незалежні, їх загальна функція розподілу —  $F(x)$ .

Встановимо зв'язок між послідовністю «рекордних» значень для часів очікування страхових випадків і номерами «рекордів».

Нехай випадкові величини  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$  мають функцію розподілу  $F(x) = 1 - e^{-x}, (x > 0)$ ;  $X_{N(n)}, (n > 1)$  — послідовність «рекордів» для  $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ .

Тоді з ймовірністю 1 виконується співвідношення [1: 264]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{|\log N(n) - X_{N(n)}|}{\log(n)} = 1.$$

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі розглянуті визначення: середнього часу очікування першого страхового випадку; середнього часу очікування першого із кількох страхових випадків; номерів «рекордів» серед найбільших періодів очікування або серед найбільших фінансових збитків при можливій великій кількості страхових випадків. Також наведені характеристики: приростів «рекордних» значень для часів очікування незалежних страхових випадків; зв'язку між послідовністю «рекордних» значень для часів очікування страхових випадків і номерами «рекордів». Надалі можна досліджувати співвідношення між послідовністю «рекордних» значень для часів

очікування страхових випадків і номерами «рекордів» вже для конкретних законів для розподілів цих величин.

### Список використаної літератури

1. Galambos J. The asymptotic theory of extreme order statistics. New York : Wiley, 1978. 352 p.
2. Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. *New York-London-Sydney*. 1971. Vol. 2. 669 p.
3. Chen A, Thai N. and Thorsten S. (2022). Unit-Linked Tontine: Utility-Based Design, Pricing and Performance. *Risks*. Vol. 10, No. 4. 78. DOI: <https://doi.org/10.3390/risks10040078>
4. Ястремський О. Основи теорій економічного ризику. Київ : Артєк, 1997. 248 с.
5. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A. and Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics. The Society of Actuaries : Schaumburg, 1997. <https://dx.doi.org/10.1080/03610928908830089>
6. Вітлінський В. В., Великоіваненко Г. І. Ризикологія в економіці та підприємництві: Монографія. Київ : КНЕУ, 2004. 480 с.
7. Зинченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику: навч. посібн. Київ : Видавн.-полігр. центр «Київський університет», 2008. 224 с.
8. Ковтун І. О., Денисенко М. П., Кабанов В. Г. Основи актуарних розрахунків. Навч. посібник. Київ : «ВД Професіонал», 2008. 480 с.
9. Chang S. C. Realistic Pension Funding: A Stochastic Approach. *Journal of Actuarial Practice*. 2000. Vol. 8. P. 5–42.
10. Wüthrich M. V., Merz M. Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications. Springer Actuarial, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9>

**Illicheva L. M., Avdeeva T. V.** Prediction of time and periods of waiting for insurance cases.

The work examines the regularities of determining the average time until the appearance of the first insurance event, the first of a certain number of insurance events; regularities of the distribution of "record" duration periods between insurance cases.

**Keywords:** mathematical expectation of waiting time for an insurance event, exponential distribution, "record" values among the longest waiting periods for insurance events.

### References

1. Galambos, J. (1978). *The asymptotic theory of extreme order statistics*. New York: Wiley.
2. Feller, W. (1971). An Introduction to Probability Theory and Its Applications. *New York-London-Sydney*, 2, 669 p.
3. Chen, A, Thai, N., & Thorsten, S. (2022). Unit-Linked Tontine: Utility-Based Design, Pricing and Performance. *Risks*, 10(4), 78. <https://doi.org/10.3390/risks10040078>
4. Yastremskyi, O. (1997). *Basics of theories of economic risk*. Kyiv: Artek [in Ukrainian].
5. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries: Schaumburg. <https://dx.doi.org/10.1080/03610928908830089>
6. Vitlinsky, V. V., & Velikoivanenko, G. I. (2004). *Riskology in economics and entrepreneurship: Monograph*. Kyiv: KNEU [in Ukrainian].
7. Zinchenko, N. M. (2008). *Mathematical methods in the theory of risk: Education manual*. Kyiv: Kyiv University [in Ukrainian].
8. Kovtun, I. O., Denysenko, M. P., & Kabanov, V. G. (2008). *Basics of actuarial calculations. Education manual*. Kyiv: VD Professional [in Ukrainian].
9. Chang, S C. (2000). Realistic Pension Funding: A Stochastic Approach. *Journal of Actuarial Practice*, 8, 5–42.
10. Wüthrich, M. V., & Merz, M. (2023). *Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications*. Springer Actuarial. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-12409-9>

Одержано 10.01.2024

УДК 352/354:004.9:658.3:519.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).120-127](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).120-127)**Є. Б. Кикина**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри програмного забезпечення систем,  
[yevhen.kykyna@uzhnu.edu.ua](mailto:yevhen.kykyna@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8466-8547>

## МЕТОД ПОЕТАПНОГО РОЗПОДІЛУ СОЦІАЛЬНИХ ПОСЛУГ МІЖ ВИКОНАВЦЯМИ

Цифровізація сфери публічного управління спонукає до розробки нових ефективних механізмів супроводу основних процесів прийняття рішень. Дослідження зосереджено на розробці моделі та методу оптимізації процесів розподілу робіт між виконавцями соціальних послуг для уразливих груп населення. Виконано математичну постановку задачі розподілу послуг між виконавцями, яка дозволяє враховувати запити від отримувачів, їх ступені відповідності вимогам, що ставлять до отримувачів, а також кількості отримувачів, яким одночасно може надаватися кожна конкретна послуга. Пропонується зводити цю задачу до задачі одно чи багатокритеріальної задачі лінійного програмування з булевими змінними. Розроблено ітераційний метод поетапного розподілу послуг, який інтегрує вже встановлені відповідності між потребами отримувачів і можливостями виконавців. Вхідними даними в методі є не тільки об'єктивні дані, які характеризують отримувачів і виконавців послуг, а й оцінки, отримані від експертів чи особи, що приймає рішення. Враховується не лише пріоритетність отримувачів, але й специфічні послуги, які можуть надавати виконавці. Метод дозволяє ефективно адаптуватись до змін у потребах та ресурсах, а також вводити нові запити без переривання вже наявних процесів.

Науковий внесок дослідження полягає у розробці методу та практичного підходу до розподілу соціальних послуг, який може бути використаний для проектування програмних продуктів, що підтримують відповідні процеси прийняття рішень. Подальші дослідження можуть включати розробку інструментів для прогнозування майбутніх потреб у соціальних послугах, що розширить можливості адаптації до змінюваних умов обслуговування.

**Ключові слова:** прийняття рішень, цифровізація, оптимізація, критерії ефективності, ітераційний метод, групи пріоритетності, отримувач соціальної послуги.

**1. Вступ.** Цифровізація процесів на ринку соціальних послуг набуває особливої актуальності в умовах сучасних викликів. Вона сприяє підвищенню ефективності управління, забезпеченню точності та оперативності в обробці даних, що є критично важливим для швидкого та адекватного реагування на потреби уразливих груп населення. Цифрові технології дозволяють автоматизувати збір та аналіз інформації, роблячи процеси більш прозорими та знижуючи можливість людських помилок. Також, впровадження інформаційних систем веде до поліпшення координації між різними учасниками ринку, від замовників до виконавців послуг, що забезпечує більш ефективний розподіл ресурсів та оптимізацію робочих процесів. В цілому, цифровізація є ключовим елементом у модернізації соціальних послуг, підвищуючи їх доступність та якість.

**2. Аналіз літературних даних і постановка проблеми.** Наукові джерела, які стосуються описаних проблем логічно можна поділити на кілька груп.

Першу групу становлять джерела з сфери соціальних послуг [1, 2]. Тут деталізовані процеси взаємодії між акторами ринку соціальних послуг, а також особливості, які потребують подальших досліджень.

Моделям і методам прийняття рішень в соціальній сфері присвячена велика кількість сучасних наукових досліджень. У роботі [3] виконано дослідження проблеми знаходження оптимального розподілу соціальних послуг між виконавцями. Розроблена модель передбачає, що всі заявки на послуги є рівнозначними за пріоритетністю, а послуги будуть надаватися одночасно. Такий підхід є достатнім у випадку, коли модель необхідно застосувати одноразово та незадоволені заявки на отримання послуг можна повністю відкинути з розгляду.

Задача розподілу послуг між виконавцями може бути представлена як задача багатокритеріальної оптимізації [4–6]. Такі задачі, у випадку неможливості досягнення «ідеальної точки», розв'язуються шляхом зведення до однокритеріальної задачі. Для цього задають правило для згортання критеріїв в один суперкритерій [7, 8]. Інший підхід полягає у застосуванні прийомів теорії прийняття рішень, зокрема введення послідовних поступок, наближення до «ідеальної точки» та інші [9, 10]. У таких випадках задачі багатокритеріальної оптимізації характеризуються великою розмірністю та часто мають порожню множину допустимих розв'язків, що також спонукає до застосування теорії прийняття рішень.

Таким чином, для розв'язання задачі розподілу послуг між виконавцями, можливим є застосування комплексу математичних моделей і методів, які належать до різних розділів математики. Проте, наразі не існує єдиного універсального методу розв'язання цієї задачі.

**3. Мета і завдання дослідження.** Дослідження присвячене аналізу та розв'язання проблеми розподілу робіт між виконавцями в процесах надання соціальних послуг уразливим групам населення.

Розглядається етап, на якому для кожного потенційного отримувача вже встановлено факт його відповідності вимогам, яким мають відповідати отримувачі, а також для кожного виконавця відомий перелік послуг, які він може надавати. **Метою даного дослідження** є розробка моделі та методу поетапного розподілу послуг між виконавцями в процесах обслуговування отримувачів послуг з урахуванням їх груп пріоритетності.

Для досягнення зазначеної мети були поставлені такі завдання:

- виконати вербальну та математичну постановки задач розподілу соціальних послуг між виконавцями;
- розробити метод поетапного розподілу послуг між виконавцями з урахуванням груп пріоритетності отримувачів цих послуг.

**4. Моделювання задачі розподілу соціальних послуг між виконавцями.** Введемо позначення: нехай  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_L\}$  — множина послуг, які можуть бути надані виконавцями;

$W = \{W_1, W_2, \dots, W_N\}$  — множина виконавців послуг, при чому  $W_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iL})$  — вектор, компоненти якого визначають одномоментні обсяги послуг, тобто  $w_{il}$  дорівнює кількості отримувачів, яким виконавець з номером  $i$  може надавати послугу з номером  $l$ ;

$O = \{O_1, O_2, \dots, O_T\}$  — множина потенційних отримувачів послуг, при чому для кожного елементу  $O_t$  задано вектори  $V_t = (v_{t1}, v_{t2}, \dots, v_{tL})$  та  $(\mu_{t1}, \mu_{t2}, \dots, \mu_{tL})$ . Перший вектор характеризує потреби відповідної особи в послугах, тобто  $v_{tl}$  дорівнює заявленій потребі в тривалості надання послуги з номером  $l$ . В свою чергу, другий вектор характеризує міру відповідності потенційного отримувача

послугі, на яку він претендує. Ці міри можуть бути обчислені за допомогою методу розробленого в [11].

Необхідно побудувати такий розподіл робіт між виконавцями, який би відповідав отриманим заявкам, тобто задовольняв наступні обмеження:

$$\forall i = \overline{1, N} : \text{if } \exists(t, l), t = \overline{1, T}, l = \overline{1, L} : v_{tl} = 0 \text{ then } y_{ilt} := 0 \quad (1)$$

$$\forall i = \overline{1, N} : \text{if } \exists(t, l), t = \overline{1, T}, l = \overline{1, L} : \mu_{tl} \leq \mu_{\min} \text{ then } y_{ilt} := 0 \quad (2)$$

$$\forall t = \overline{1, T} : \text{if } \exists(i, l), i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L} : w_{tl} = 0 \text{ then } y_{ilt} := 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N y_{ilt} \leq 1, \forall(t, l), \forall t = \overline{1, T}, \forall l = \overline{1, L}, \quad (4)$$

$$\forall l_1, l_2 \in \{1, 2, \dots, L\}, l_1 \neq l_2, \forall t_1, t_2 \in \{1, 2, \dots, T\} : y_{il_1 t_1} \cdot y_{il_2 t_2} = 0, i = \overline{1, N} \quad (5)$$

$$\sum_{t=1}^T y_{ilt} \leq w_{il}, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, \quad (6)$$

де  $Y = (y_{ilt})$  — матриця розподілу, тобто  $y_{ilt} = 1$ , якщо виконавець з номером  $i$  буде надавати послугу з номером  $l$  особі з номером  $t$ ;

- умова (1) означає, що виконавцям будуть призначені тільки ті послуги, на які є заявки від конкретних осіб;
- виконання умови (2) не допускає надання послуги особі, яка їй не відповідає.  $\mu_{\min} \in [0; 1)$  — порогове значення міри належності. Очевидно, що  $\mu_{\min} \neq 1$ ;
- умова (3) не дає призначати послуги виконавцям, які їх не можуть надавати. Ця умова дозволить звузити множину допустимих розв'язків, а, отже, і зменшить час розв'язування оптимізаційної задачі;
- умова (4) означає, що послугу особі може надавати тільки один виконавець;
- умова (5) означає, що одномоментно виконавець може надавати тільки одну послугу (наприклад, проведення групових занять);
- умова (6) дозволяє враховувати обмеження щодо одномоментних обсягів послуги, яку може надавати виконавець.

Умови (1)–(6) задають задачу булевого програмування. Вона може бути як однокритеріальною, так і багатокритеріальною, в залежності від сфери застосування та бачення особи, що приймає рішення.

Цільовими функціями у цих задачах може бути одна або декілька з наступних:

Максимізація охоплення послугами заявників (7):

$$F_1(Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T y_{ilt} \rightarrow \max. \quad (7)$$

Максимізація послуг з урахуванням пріоритетності отримувачів (8):

$$F_2(Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T \mu_{tl} \cdot y_{ilt} \rightarrow \max. \quad (8)$$

Застосування цільової функції виду (8) дозволить забезпечити першочергове включення в процес надання послуг отримувачів з більшими значеннями міри відповідності. Також, можливим є її ускладнення шляхом поділу споживачів на групи пріоритетності таким чином:

Введемо в розгляд правило визначення групи пріоритетності:

$$\psi(\mu_{tl}) = \begin{cases} 1, & \text{if } \mu_{tl} \in (\mu_1; 1]; \\ \mu_1, & \text{if } \mu_{tl} \in (\mu_2; \mu_1]; \\ \mu_2, & \text{if } \mu_{tl} \in (\mu_3; \mu_2]; \\ \dots & \\ 0, & \text{if } \mu_{tl} \leq \mu_{\min}; \end{cases} \quad (9)$$

де  $1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_{\min} \geq 0$  та задаються особою, що приймає рішення або власником проблеми.

Тоді, цільова функція матиме вид (10):

$$F_3(Y) = \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{t=1}^T \psi(\mu_{tl}) \cdot y_{ilt} \rightarrow \max. \quad (10)$$

**5. Ітераційний метод послідовного розподілу послуг між виконавцями.** Розглянемо задачу (1)–(6) з цільовою функцією (7), (8) або (10). Ця задача належить до лінійних задач булевого програмування і може бути розв’язаною одним з відомих методів оптимізації [12, 13]. Як видно з характеру обмежень, поставлена задача завжди має тривіальний розв’язок, коли матриця розподілу є нульовою, тобто, множна допустимих розв’язків є непорожньою.

Можливим є випадок, коли оптимальних розв’язків є кілька. Тоді доцільним є введення додаткових правил, які б забезпечували рівномірність надання послуг (наприклад, однакову кількість різним отримувачам) або навпаки, максимальне комплексне охоплення одних і тих же отримувачів різними послугами.

Пропонується ітераційний метод послідовного розподілу послуг між виконавцями, який полягає в наступному.

*Перша ітерація методу.*

На першій ітерації методу розв’язуємо задачу (1)–(6) із заданою цільовою функцією. Позначимо через  $Y^{(1)*} = (y^{(1)*}_{ilt})$  — обраний оптимальний розв’язок задачі. Обчислимо мінімальне значення тривалості послуги, яка буде надана після першої ітерації (11):

$$\Delta v_1 = \min_{t = \overline{1, T}, l = \overline{1, L}, \exists i \in \{1, 2, \dots, N\} : y^{(1)*}_{ilt} \neq 0} \{v_{tl}\} \quad (11)$$

Далі, для кожної впорядкованої трійки  $(i_0, l_0, t_0)$ ,  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $l_0 \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $t_0 \in \{1, 2, \dots, T\}$ , такої що  $y^{(1)*}_{i_0 l_0 t_0} = 1$ , виконаємо такі перетворення:

$$v_{t_0 l_0} := v_{t_0 l_0} - \Delta v_1, \quad (12)$$

$$w_{i_0 l_0} := w_{i_0 l_0} - 1. \quad (13)$$

Перетворення (12)–(13) є підготовчими поправками для наступної ітерації методу.

Наступна ітерація методу може настати у двох випадках:

Випадок 1. Від початку надання послуг, визначених на першій ітерації минув період часу  $\Delta v_1$ , тобто надання найменш тривалих послуг завершилось. У цьому випадку, перед переходом до наступної ітерації, необхідно здійснити такі поправки. Для всіх впорядкованих трійок  $(i_0, l_0, t_0)$ ,  $i_0 \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $l_0 \in \{1, 2, \dots, L\}$ ,  $t_0 \in \{1, 2, \dots, T\}$ , такої що  $y_{i_0 l_0 t_0}^{(1)*} = 1$  та  $v_{t_0 l_0} = 0$  виконуємо перетворення:

$$y_{i_0 l_0 t_0}^{(1)*} := 0, \quad (14)$$

$$w_{i_0 l_0} := w_{i_0 l_0} + 1. \quad (15)$$

Кроки (14)–(15) вивільняють виконавців, які завершили надання послуг та роблять їх доступними для нових отримувачів.

Випадок 2. Надходження нових заявок на отримання послуг, тобто, внесення змін у початкові дані. У цьому випадку перед переходом на наступну ітерацію додаткових перетворень робити не потрібно.

*j-а ітерація методу*

До задачі (1)–(6) додаємо обмеження (16)–(17):

$$\forall(i, l, t), i = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, t = \overline{1, T} : \text{if } y_{ilt}^{(j-1)*} = 1 \text{ then } y_{ilt} := 0 \quad (16)$$

$$\forall(l, t), l = \overline{1, L}, t = \overline{1, T} : \text{if } \exists i \in \{1, 2, \dots, M\} : y_{ilt}^{(j-1)*} = 1 \text{ then } y_{ilt} := 0 \quad (17)$$

Обмеження (16) робить недоступним для призначення послуги виконавцю, який вже її виконує. В свою чергу обмеження (17) робить недоступною для призначення послугу, яка вже виконується.

Далі розв'язуємо оптимізаційну задачу. Позначимо через  $Y^* = (y_{ilt}^*)$  розв'язок задачі. Тоді, отриманий на заданій ітерації розподіл послуг буде визначатися такою матрицею:  $Y^{(j)*} = Y^{(j-1)*} + Y^*$ .

Даний метод є поетапним та ітераційним. Це означає, що його можна виконувати доти, поки є потреба в реалізації розподілу послуг між виконавцями. В ході роботи алгоритму даного методу можуть змінюватися вхідні дані, що не вплине на його якість та коректність.

**6. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Дослідження присвячене аналізу та розв'язанню проблеми розподілу робіт між виконавцями в процесах надання соціальних послуг уразливим групам населення. В умовах невідомого росту запитів на соціальні послуги від населення та обмеженої кількості виконавців таких послуг, важливою є проблема розподілу послуг між виконавцями. Було визначено, що не існує єдиних підходів до вирішення цієї проблеми.

Вербальна та математична постановка задачі розподілу послуг між виконавцями дозволяє поєднувати дані, отримані з законів та інших нормативних актів, які регулюють процеси надання послуг, дані отримані від експертів та особи, що приймає рішення, а також результати розв'язання задач, які передують задачі розподілу послуг між виконавцями. Задача може бути сформульована як одно або багатокритеріальна задача лінійного програмування з булевими змінними.

Для розв'язання задачі було розроблено ітераційний метод поетапного розподілу послуг між виконавцями з урахуванням груп пріоритетності отримувачів цих послуг. Метод також дозволяє враховувати кількості осіб, яким виконавець

може одномоментно надавати одну і ту ж послугу. Така ситуація можлива, наприклад, у випадку проведення групових занять. Передбачена можливість додавання до розгляду заявок нових отримувачів послуг без переривання обслуговування тих отримувачів, послуги яким вже надаються.

Розроблений метод може стати інструментом в процесах цифровізації ринку соціальних послуг та бути використаний при проектуваннях програмних продуктів для супроводу процесів прийняття рішень у соціальній сфері для розподілу послуг між виконавцями. На наступних етапах дослідження доцільним є розгляд задачі розподілу ресурсів в процесі надання соціальних послуг, а також розробки інструменту для прогнозування потреб в соціальних послугах в майбутні періоди часу.

### Список використаної літератури

1. Горемикіна Ю. В. Моніторинг і оцінювання якості та ефективності соціальних послуг: прикладний аспект. *Демографія та соціальна економіка*. 2016. № 3. С. 120–132.
2. Кривобок Ю. Соціальні послуги у системі соціального захисту: проблеми та перспективи удосконалення в Україні. *Політичний менеджмент*. 2012. № 1–2. С. 97–102.
3. Mulesa O., Melnyk O., Horvat P., Tokar M., Peresoliak V., Kumar H. Modeling of Decision-Making Processes in the Service Management System. 2023 IEEE 18th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT). IEEE, 2023. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/CSIT61576.2023.10324217>
4. Khan H. U., Abbas M., Khan F., Nazir S., Binbusayyis A., Alabdultif A., Taekeun W. Multi-criteria decision-making methods for the evaluation of the social internet of things for the potential of defining human behaviors. *Computers in Human Behavior*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chb.2024.108230>
5. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Springer Science : Business Media, 2005. Vol. 491.
6. Haseli G., Sheikh R., Ghouschi S. J., Hajiaghaei-Keshteli M., Moslem S., Deveci M., Kadry S. An extension of the best–worst method based on the spherical fuzzy sets for multi-criteria decision-making. *Granular Computing*. 2024. Vol. 9, Iss. 2. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41066-024-00462-w>
7. Червак-Смерічко О. Ю. Один із способів відшукування парето-оптимальних альтернатив: побудова надкритеріїв паретівської згортки багатьох критеріїв. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Економіка*. 2022. Вип. 1, № 61. С. 133–141.
8. Freiheit T. I., Rao S. S. A modified game theory approach to multiobjective optimization. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* : American Society of Mechanical Engineers, 1988, September. P. 107–114.
9. Mulesa O., Horvat P., Radivilova T., Sabadosh V., Baranovskyi O., Duran S. Design of mechanisms for ensuring the execution of tasks in project planning. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Vol. 2, No. 4(122). P. 16–22. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.277585>
10. Лучаківський А. О. Оптимізація фінансової стійкості банку з допомогою методу послідовних поступок. *Вісник Університету банківської справи Національного банку України*. 2014. № 2. С. 244–247.
11. Мулеса О. Ю., Кикина Є. Б. Розробка методу нечіткої класифікації для вибору отримувачів соціальних послуг. *Наука і техніка сьогодні*. 2024. Т. 4, № 32. С. 1171–1181. DOI: [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-4\(32\)-1171-1181](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-4(32)-1171-1181).
12. Андрашко Ю. В., Кузка О. І. Зведення деяких задач багатокритеріального булевого програмування до послідовності однокритеріальних задач. *VII Міжнародна школа-семінар теорія прийняття рішень*. 2014.
13. Manquinho V., Marques-Silva J., Planes J. Algorithms for weighted boolean optimization. *Theory and Applications of Satisfiability Testing-SAT 2009* : 12th International Conference, SAT 2009, Swansea, UK, June 30–July 3, 2009. Proceedings 12. Springer Berlin Heidelberg, 2009. P. 495–508.

**Kykyna Y. B.** The method of staged distribution of social services among providers.

The digitization of the public administration sector prompts the development of new effective mechanisms for supporting the main decision-making processes. The study focuses on creating a model and method for optimizing the distribution of tasks among providers of social services to vulnerable population groups. A mathematical formulation of the task distribution problem among providers has been developed, allowing for consideration of requests from recipients, their degrees of compliance with the requirements set for recipients, and the number of recipients that can simultaneously receive each specific service. It is proposed to reduce this task to a problem of single or multi-criteria linear programming with Boolean variables. An iterative method for the staged distribution of services has been developed, integrating already established correspondences between the needs of the recipients and the capabilities of the providers. The method's input data includes not only objective data characterizing the recipients and service providers, but also assessments obtained from experts or the decision-maker. The method accounts not only for the prioritization of recipients but also for the specific services that providers can offer. The method allows for effective adaptation to changes in needs and resources, as well as the introduction of new requests without interrupting existing processes.

The scientific contribution of the study lies in the development of a method and practical approach to the distribution of social services, which can be used for designing software products that support corresponding decision-making processes. Further research may include developing tools for predicting future needs in social services, expanding the capabilities for adaptation to changing service conditions.

**Keywords:** decision-making; digitization; optimization; effectiveness criteria; iterative method; priority groups; social service recipient.

## References

1. Goremykina, Y. V. (2016). Monitoring and evaluation of quality and effectiveness of social services: Applied aspect. *Demography and Social Economy*, 3, 120–132 [In Ukrainian].
2. Kryvobok, Y. (2012). Social services in the system of social protection: Problems and perspectives of improvement in Ukraine. *Political Management*, 1–2, 97–102 [In Ukrainian].
3. Mulesa, O., Melnyk, O., Horvat, P., Tokar, M., Peresoliak, V., & Kumar, H. (2023). Modeling of Decision-Making Processes in the Service Management System. In *2023 IEEE 18th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT)* IEEE. <https://doi.org/10.1109/CSIT61576.2023.10324217>
4. Khan, H. U., Abbas, M., Khan, F., Nazir, S., Binbusayyis, A., Alabdultif, A., & Taekeun, W. (2024). Multi-criteria decision-making methods for the evaluation of the social internet of things for the potential of defining human behaviors. *Computers in Human Behavior*. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2024.108230>
5. Ehrgott, M. (2005). Multicriteria optimization. (Vol. 491). Springer Science: Business Media.
6. Haseli, G., Sheikh, R., Ghouschi, S. J., Hajiaghahi-Keshteli, M., Moslem, S., Deveci, M., & Kadry, S. (2024). An extension of the best–worst method based on the spherical fuzzy sets for multi-criteria decision-making. *Granular Computing*, 9(2), 1–18. <https://doi.org/10.1007/s41066-024-00462-w>
7. Chervak-Smerichko, O. Y. (2022). One of the ways of finding Pareto-optimal alternatives: Building supercriteria of Pareto convolution of many criteria. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Economics*, 1, 133–141 [In Ukrainian].
8. Freiheit, T. I., & Rao, S. S. (1988). A modified game theory approach to multiobjective optimization. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers.
9. Mulesa, O., Horvat, P., Radivilova, T., Sabadosh, V., Baranovskyi, O., & Duran, S. (2023). Design of mechanisms for ensuring the execution of tasks in project planning. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4), 16–22. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.277585>
10. Luchakivskyi, A. O. (2014). Optimization of the financial stability of the bank using the

- method of sequential concessions. *Bulletin of the University of Banking of the National Bank of Ukraine*, 2, 244–247 [In Ukrainian].
11. Mulesa, O. Y., & Kikina, Y. B. (2024). Development of a fuzzy classification method for selecting recipients of social services. *Science and Technique Today*, 4(32), 1171–1181. [https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-4\(32\)-1171-1181](https://doi.org/10.52058/2786-6025-2024-4(32)-1171-1181) [In Ukrainian].
  12. Andrashko, Y. V., & Kuzka, O. I. (2014). Reduction of some multi-criteria boolean programming problems to a sequence of single-criterion problems. *VII International School-Seminar Decision Theory* [In Ukrainian].
  13. Manquinho, V., Marques-Silva, J., & Planes, J. (2009). Algorithms for weighted boolean optimization. In *Theory and Applications of Satisfiability Testing - SAT 2009 : 12th International Conference, SAT 2009, Swansea, UK, June 30-July 3, 2009, Proceedings 12*. Springer Berlin Heidelberg.

Одержано 12.04.2024

УДК 004.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).128-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).128-137)**С. О. Кирилов<sup>1</sup>, Л. О. Кирилова<sup>2</sup>, Р. Ф. Юрій<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Одеський національний морський університет,  
доцент кафедри математики, фізики та астрономії,  
кандидат фізико-математичних наук  
[kyrylovserhii@gmail.com](mailto:kyrylovserhii@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-9361>

<sup>2</sup> Одеський національний економічний університет,  
старший викладач кафедри статистики та математичних методів в економіці,  
кандидат фізико-математичних наук  
[kirillovaludmilaalex@gmail.com](mailto:kirillovaludmilaalex@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4577-242X>

<sup>3</sup> Вінницький національний медичний університет імені М. І. Пирогова,  
доцент кафедри біофізики, медичної апаратури та інформатики,  
кандидат фізико-математичних наук  
[rayisakoval1@gmail.com](mailto:rayisakoval1@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5917-9370>

## ЗАСТОСУВАННЯ РОЄВОГО ТА ЕВОЛЮЦІЙНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ДВОРІВНЕВИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

В статті досліджується складність вирішення дворівневих задач оптимізації з використанням роевих систем. Розглядається об'єкт управління як комплексна роева система, яка описується функціями взаємодії між часовими моментами, станами, управлінськими впливами та виходами. Структурно система представлена як інтеграція обчислювальних систем і включає канали сприйняття (входи) і передачі (виходи) інформації. Основна увага приділяється аналізу впливу інформаційних сигналів на поведінку системи, а також розробці моделей для оптимального управління на основі абстрактних інформаційних процесів. Досліджено модель керованої системи забезпечує збір, генерацію, обробку та редуплікацію інформації в контексті специфічних умов експлуатації, такі процеси моделюються через семантичні гіперграфи та інтеграцію елементарних підсистем з відповідними функціями згортки інформації, які детально описуються у статті. Дослідження також розглядає розробку еволюційного алгоритму для системи, що включає аналіз внутрішніх та зовнішніх інформаційних потоків, а також механізми впливу на поведінку системи. Результати моделювання дозволяють відображати динаміку станів системи та оптимізувати управлінські рішення на основі множини можливих стратегій. Стаття звертає увагу на важливість тимчасової логіки та нечітких моделей для забезпечення гнучкості та адаптивності роевих систем, зосереджуючись на формалізації відносин у системі через нечіткі відносини еквівалентності та часткового порядку. Описано використання ґрат та алгебраїчних систем для розробки структурної організації управління, що дозволяє ефективно моделювати роеві системи як інтегровані комплекси. Розробка методів для перевірки та валідації ефективності роевих алгоритмів в різноманітних задачах оптимізації, забезпечуючи їх надійність і відповідність. Стаття висвітлює потенційні напрямки для подальших досліджень, зокрема розробку нових методів для покращення алгоритмічної складності та застосування роевих та еволюційних алгоритмів у нових областях. Подальше інтегрування з машинним навчанням та іншими технологіями може забезпечити більшу адаптивність та ефективність роевих систем.

**Ключові слова:** роевий алгоритм, еволюційний алгоритм, оптимізаційна проблема, цільова функція, квадратична залежність, оператор кросовера, батьківська популяція.

**1. Вступ.** У сучасному світі, зі зростанням складності технологічних, економічних та соціальних систем, виникає потреба у розробці все більш ефективних методів оптимізації для вирішення складних проблемних завдань. Дворівневі задачі оптимізації, які містять взаємодію між двома рівнями прийняття рішень, є одними з найбільш відомих, оскільки вони вимагають одночасного розв'язання задач умовної оптимізації на кожному з рівнів. Традиційні методи оптимізації часто виявляються неефективними для роботи з такими задачами через їх високу обчислювальну складність та специфіку. Використання роєвого та еволюційного алгоритмів відкриває нові можливості для вирішення дворівневих задач оптимізації завдяки їх здатності ефективно працювати зі складними пошуковими просторами та адаптуватися до змінних умов задачі. Такі алгоритми засновані на моделюванні поведінки природних систем і демонструють високу ефективність у розв'язання оптимізаційних задач, які важко піддаються традиційним методам і їхнє застосування може включати широкий спектр галузей, від інженерних розрахунків та проектування до економіки та управління.

Враховуючи актуальність питань оптимізації в сучасних дослідженнях та розвитку технологій, застосування роєвого та еволюційного алгоритмів для вирішення дворівневих задач оптимізації відкриває нові напрями у дослідженнях та практичному застосуванні, пропонуючи вдосконалені та ефективні рішення для складних системних завдань. Таким чином, розглядане дослідження є надзвичайно актуальним для подальшого розвитку наукових знань та їх практичної реалізації у різних галузях.

Метою дослідження є порівняльний аналіз ефективності роєвих та еволюційних алгоритмів у вирішенні прикладних завдань дворівневої оптимізації.

**2. Постановка задачі.** В роботі [9] зазначається, що в основі детермінованих евристичних методів оптимізації лежить принцип знаходження локально кращого рішення на кожному кроці. Пошук глобально кращого рішення забезпечується через вибір рішення, яке є найкращим на всіх ітераціях [16]. Рух простором пошуку здійснюється на підставі раніше зроблених виборів, а дії на наступних кроках не впливають на поточні, що відрізняє даних клас алгоритмів від динамічного програмування.

Розглянуті у роботі [13] алгоритми роєвого інтелекту та еволюційні алгоритми є алгоритмами дискретної оптимізації, оскільки здійснюють пошук кращого рішення інтерактивно. При цьому область використання цих методів включає як безперервні завдання, так і дискретні та гібридні. В основі цих алгоритмів лежать принципи та закономірності, що спостерігаються в природі. Вони належать до популяційних методів, оскільки використовують системи, які з агентів. У статті [11] запропоновано спосіб віднесення алгоритмів до роєвих: у формулах, що описують міграцію агентів рою, необхідна наявність об'єкта, який дає можливість непрямого обміну інформацією між ними.

У роботах [2], [8] описано основні етапи процесу оптимізації всіма популяційними алгоритмами. На першому етапі відбувається ініціалізація популяції. Вона полягає у створенні на просторі пошуку заданої кількості наближень до шуканого рішення. На другому етапі здійснюється міграція агентів популяції шляхом їх переміщення за допомогою набору специфічних міграційних операторів за простором рішень для наближення до екстремуму функції, що оптимізується. На етапі перевіряються умови припинення роботи алгоритму.

**3. Основний результат.** Складність вирішення дворівневих задач оптимізації може вимагати об'єднання безлічі обслуговуючих інформаційних підсистем, що забезпечують єдиний процес обробки. Будемо розглядати об'єкт управління як роєву систему, яка описується функцією виду:

$$\Theta = \langle S, A, B, C \rangle, \quad (1)$$

де  $S$  — безліч моментів часу,  $A$  — безліч станів роєвої системи,  $B$  — безліч миттєвих вхідних управлінь,  $C$  — безліч виходів роєвої системи. З метою побудови моделі керованої системи будемо розглядати вхідні впливи як канали сприйняття, а вихідні — в якості каналів передачі інформації про стан керованої системи. Крім того, дослідження раціонального впливу вимагає наявності певної моделі об'єкта управління, що дозволяє приймати рішення про вибір оптимального шляху, здатного наблизити об'єкт управління до поставленої мети (або повернути на задану траєкторію) [15]. Ця модель може бути описана різними відносинами у множинах  $S, A, B, C$ . Як показано в [3], процес може бути представлений сукупністю абстрактних елементарних актів: процес генерації інформації; процес реценції інформації; процес кодування інформації; процес передачі інформації по каналу зв'язку; процес зчитування та реалізації інформації; процес редуплікації за допомогою оператора при розв'язанні дворівневих задач оптимізації. Для можливості моделювання об'єкта управління з використанням абстрактних примітивів, визначимо типову потокову структуру кожного з них (рис. 1.).

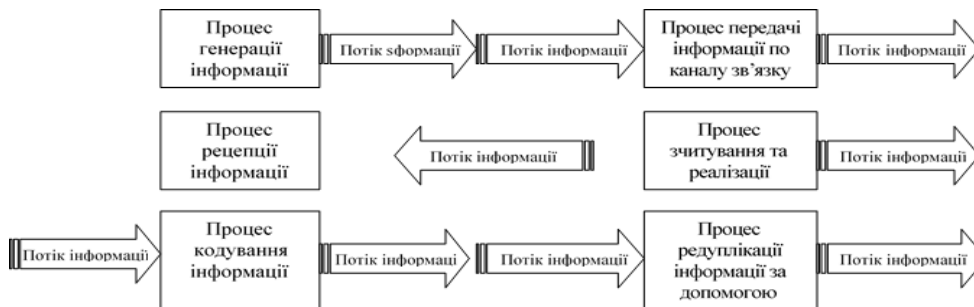


Рис. 1. Потокова структура типових інформаційних процесів в роєвих мережах при розв'язанні дворівневих задач оптимізації (сформовано на основі [3, 14]).

З огляду на специфіку об'єкта управління (частиною інформаційного процесу часто є система оперативного управління, необхідність побудови системи управління на верхньому рівні обумовлена вимогами інтеграції різнорідних обчислювальних систем і забезпечення структурного управління комплексом в цілому) і ієрархічність системи управління, крім функцій оперативного управління необхідна реалізація механізму комплексного оцінювання діяльності об'єкта управління, що формує і передає агрегований потік інформації [6]. Таким чином, система вирішення дворівневих задач оптимізації здатна генерувати два типи сигналів: управлінський вплив і інформаційний сигнал про стан об'єкта впливу. Будемо розглядати роєву мережу як сукупність спільно цілеспрямованих функціонуючих розподілених об'єктів, що можна описати видом:

$$\Omega = \langle X, Y, S \rangle, \quad (2)$$

де  $X, Y$  — безлічі вхідних і вихідних впливів, які є частиною універсуму;  $S$  — семантичний гіперграф, що інтерпретує структуру системи:

$$S = (S_N, R, p), \quad (3)$$

де  $S_N = \{S_i\}_{i=\overline{1, N}}$  — безліч елементарних підсистем ( $N$  — потужність безлічі  $S_N$ ),  $R$  — безліч типів з'єднання підсистем,  $p$  — предикат інцидентності, який визначається для пар  $(S_i, r)$  ( $S_i \in S_N, r \in R$ ).

Елементарну підсистему визначимо у вигляді:

$$S_i = (X_i, Y_i, O_i, \sigma_i, f_i), \quad (4)$$

де  $X_i$  — безліч входів,  $Y_i$  — безліч виходів,  $O_i$  — інформаційний стан елементарної підсистеми,  $\sigma_i$  — вихідна функція;  $f_i$  — згортка інформації про стан об'єкта впливу.

Вихідна функція ( $\sigma_i : O_i \times X_i \rightarrow Y_i$ ), що характеризує підсистему, визначається як композиція трьох відображень:

$$\varphi_1 : X_i \rightarrow O_i^B; \quad \varphi_2 : O_i^B \rightarrow O_i^U; \quad \varphi_3 : O_i^U \rightarrow Y_i. \quad (5)$$

Функція згортки інформації ( $f_i : O_i \times X_i \rightarrow O_j$ ) задається подібним чином:

$$\psi_1 : O_i^B \rightarrow O_j^O; \quad \psi_2 : O_i^O \rightarrow Y_i. \quad (6)$$

Модель еволюційного алгоритму системи  $O_i$  включає три частини:

- 1) внутрішня інформація  $O^B$  — частина моделі предметної області, що відображає відомості системи про середовище, цілі, що характеризують можливості поведінки роєвої системи і її призначення. Кількість внутрішньої інформації визначає ступінь організованості роєвої системи, ступінь обмеження числа її незалежних станів;
- 2) відображає інформація  $O^O$  — відомості про систему і середовищі, що характеризують їх в кожен конкретний момент часу;
- 3) керуюча інформація  $O^U$  — сукупність відомостей, переданих від керуючої підсистеми до об'єкта управління і яка впливає на його поведінку.

Для відображення динаміки еволюційного алгоритму системи вирішення дворівневих задач оптимізації використовуємо тимчасову логіку з багатогілковим часом, яка дозволяє найбільш наочно відображати зміну станів роєвої системи та мотивований вибір варіантів реалізації керуючого впливу [7]. Тоді модель еволюційного алгоритму роєвої системи покажемо трійкою:

$$O = (W, R, P), \quad (7)$$

де  $W$  — безліч станів,  $R$  — відношення досяжності одного стану з іншого  $R \subseteq W \times W$ ,  $P$  — функція призначення станів атомарних висловлювань (висловлювань пропозиційної логіки).

Формалізм опису інтелектуальної багатоагентної роєвої системи при розв'язанні дворівневих задач оптимізації. При транспарентному відборі зі всієї безлічі роєвих систем перш за все відбираються ті, які відповідають одній і тій же сталій цілі або безлічі стратегічних цілей. Застосовуючи ці принципи до

етапу концептуального проектування роєвих систем, з урахуванням невизначеності як невід'ємної характеристики початкових етапів проектування, кожної з відібраних систем зіставляється нечітка характеристика ступеня відповідності поставленої мети.

Визначимо безліч  $X_\Sigma$ , елементами якого є всі можливі підсистеми розглянутої предметної області. Причому елементами безлічі  $X_\Sigma$  є не тільки окремі підсистеми, що представляють самостійну цінність, а й складові їх частини, що допускають розгляд в якості підсистем. Відзначимо, що наведене визначення безлічі  $X_\Sigma$  передбачає проектування на рівні систем і підсистем і одержувані результати мати узагальнений характер. Однак, сучасний рівень вирішення дворівневих задач оптимізації характеризується уніфікацією компонентів і інтерфейсів, модульною структурою створюваних систем (або компонентною структурою інформаційних систем), причому окремі модулі реалізують все більш складні функції [4].

Виділимо вихідне безліч систем  $X \subseteq X_\Sigma$  з безлічі всіх можливих роєвих систем, якоюсь мірою відповідають поставленій меті. Визначимо на  $X$  безліч нечітких відносин еквівалентності  $\tilde{R}$ . Конкретні  $\tilde{r}_i \subseteq \tilde{R}_i$  можуть характеризувати еквівалентність як по цілій підсистемі в цілому, так і відображати, наприклад, факт володіння підсистемами  $x, y \subseteq X$  деяким загальним властивостям.

Під нечітким відношенням  $\tilde{r}_i$  на непорожню множину  $X$  будемо розуміти  $\tilde{r}_i = (X, \tilde{R}_i)$ , де  $\tilde{R}_i$  є нечіткою підмножиною декартова квадрата безлічі  $X$ . При цьому  $X$  називається областю завдання,  $\tilde{R}_i$  — нечітким графіком відносини. Носієм нечіткої відносини  $\tilde{r}_i$ , називається чітке ставлення  $r_i = (X, r_r)$ , у якого графік  $R_i$  є носієм графіка  $\tilde{R}_i$ . Для можливості зіставлення систем  $x, y \subseteq X$  задамо безліч відносин часткового порядку  $P$  і нечіткого часткового порядку  $\tilde{P}$ . Нечітким відношенням часткового порядку називається нечітке відношення, носієм якого є чітке ставлення часткового порядку. При цьому нечітке відношення часткового порядку має такі властивості:

- 1) рефлексивність:  $p_i(x, x) = 1$ ;
- 2) антисиметричність:  $p_i(x_1, x_2) \succ 0 \rightarrow p_i(x_2, x_1) = 0$ ;
- 3) транзитивність:  $p_i(x_1, x_3) \geq p_i(x_1, x_2) \wedge p_i(x_2, x_3)$ .

Будемо використовувати термін «нечіткий простір систем» ( $\Sigma$ ) для позначення підмножини  $X$  безлічі  $X_\Sigma$  всіх роєвих систем з заданими на ньому нечіткими відносинами еквівалентності та часткової впорядкованості, що мають поміж ознак систем загальну «головну мету системи»:

$$\Sigma = (X, \tilde{R}, \tilde{P}). \quad (8)$$

Відзначимо переконливі властивості відносин на  $\Sigma$ . Як було доведено, безліч чітких відносин еквівалентності  $R$  з заданим на ній частковим порядком  $\leq (r_1 \leq r_2 \equiv x(r_1)y \rightarrow x(r_2)y)$  є повною структурою з одиницею, з чого можна зробити висновок, що  $\tilde{R}$  є нечіткою решіткою. Ця властивість нечітких відносин на нечіткому просторі систем дозволяє застосовувати до побудованих на його основі моделей роєвих систем, методи теорії алгебраїчних систем, однією з найбільш розвинених і опрацьованих з яких є теорія решіток. Представлення роєвої системи за допомогою нечіткої решітки дозволяє враховувати виникаючі процеси моделювання її невизначеності [10].

Процес проектування тісно пов'язаний з аналізом і синтезом характеристик систем з  $X$ . Аналіз містить виявлення властивостей і параметрів систем для порівняння, тобто відображення безлічі елементів  $X$  на безліч характеристик або значень будь-якого функціоналу. Синтез — зворотне відображення безлічі бажаних властивостей системи в безліч  $X$ , при якому відбирається його підмножина, елементи якої володіють необхідними характеристиками. З метою формалізації даного факту розглянемо трійку:

$$(X, Y, \tilde{f}). \quad (9)$$

де  $X \subseteq X_\Sigma$ ,  $Y$  — безліч властивостей, якими можна характеризувати елементи  $X$ ,  $\tilde{f}$  — двомісний нечіткий предикат інцидентності, властивий для всіх пар  $(x, y)$  ( $x \in X, y \in Y$ ) і приймає значення в інтервалі  $[0, 1]$ , що характеризує ступінь володіння елемента властивістю  $y$ :

$$\tilde{f} : X \times Y \rightarrow [0; 1]. \quad (10)$$

До числа ознак можуть бути віднесені специфічні характеристики роєвих систем які виражають їх особливості:

- а) умови функціонування;
- б) рівень безпеки;
- с) вимоги щодо ресурсного забезпечення;
- д) інтелектуальне забезпечення;
- е) технологічна та комерційна досконалість [12].

З метою формалізації процесу синтезу структури роєвих систем з безлічі елементів  $X$ , припустимо, що всі типи вимог до проєктованої системи можуть бути виражені за допомогою єдиної ієрархії, утвореної символами — простими компонентами, з яких формуються складні організаційні зв'язки, тобто «Мова програмних висловлювань». Позначимо таку ієрархію:

$$\Xi = \{\xi_\alpha^0, \xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^k\}. \quad (11)$$

де  $\xi_\alpha^i$  — її блок, кількість блоків  $k$  приймає кінцеве значення. Блок  $\xi$  в ієрархії це ланцюжок елементів ієрархії  $\xi = \{\xi_\alpha^{k1}, \dots, \xi_\alpha^{ks}\}$ . Передбачається, що всі блоки ієрархії не порівнюються відносно один одного, тобто один не впливає з іншого. Для підтвердження прийнятих припущень можна звернутися до формулювання мети на обмеженій природній мові, яка використовується в програмних середовищах, для якої характерним є обмежене використання таких лінгвістичних конструкцій, як референція та еліпсис, що робить її структуру близькою до лінійної [1]. Ієрархія  $\Xi$  являє собою універсальне безліч елементів, що виражають все властивості систем  $x \in X$ . На безлічі  $\Xi$  введемо операцію  $\oplus$  зчеплення елементів:

$$(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{ks}) \oplus (\xi_{q1}, \xi_{q2}, \dots, \xi_{qr}) = (\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{ks}\xi_{q1}, \xi_{q2}, \dots, \xi_{qr}), \quad (12)$$

причому операція зчеплення має такі властивості:

1. Кожний елемент визначається зчепленням символів алфавіту.
2. Будь-які два символи або елементи можуть бути переставлені.
3. Символи та елементи мають властивість ідемпотентності.

4. Символ  $\xi_\alpha = aim(x)$  — (головна мета системи) відіграє роль одиниці та володіння їм служить тут тривіальним висловлюванням, що не впливає на вигляд.

Безліч елементів, що виражають характеристики систем, разом з операцією зшивання перетворюють її на підгрупу:

$$\Omega = (\Xi, \oplus). \quad (13)$$

Його, ми пропонуємо називати простором образів систем, на якому можна ввести операцію часткового порядку:

$$(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{ks}) \leq (\xi_{q1}, \xi_{q2}, \dots, \xi_{qr}), \quad (14)$$

якщо перший елемент є наслідком другого, тобто якщо існує елемент  $\xi_{p1}, \dots, \xi_{pt}$  такий, що утворює  $(\xi_{k1}, \xi_{k2}, \dots, \xi_{ks}) \leq (\xi_{q1}, \xi_{q2}, \dots, \xi_{qr})$ , тобто більш вузький елемент покриває більший клас об'єктів, тоді як більш широкий елемент, шляхом введення додаткових ознак, звужує цей клас.

Пару  $(\Sigma, \Omega)$  будемо називати реалізованою, якщо існує сюр'єктивне нечітке відображення:

$$X \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \Xi. \quad (15)$$

Яке формує для в кожній роевій системі  $x \in X$  «елемент»  $\xi \in \Xi$ , що містить ознаки  $x$  і тільки їх. Під сюр'єктивним відображенням  $\rho$  безлічі  $A$  на  $B$  розуміється накладення безлічі  $A$  на безліч  $B$ , тобто таке відображення, для якого  $\forall b \in B \exists a \in A \mid \rho(a)b$ . Відображення  $\tilde{\varphi}$  відповідає завданню аналізу властивостей системи. Властивість сюр'єктивності впливає зі змісту вирішення дворівневих задач оптимізації — не має сенсу вводити характеристики, якими не володіє аналізована роева система.

Розглянемо зворотне відображення  $\tilde{\varphi}^{-1} : \xi \rightarrow x$ , яке здійснює зіставлення «елементу»  $\xi \in \Xi$ , системи  $x \in X$ , що реалізує ознаки, які укладені в «елементі»  $\xi$ . Назвемо дане відображення оператором проєктування. Нехай  $(\Sigma, \Omega)$  — реалізована пара, тобто існує відображення  $\varphi$ . Відомо, що кожне сюр'єктивне відображення породжує еквівалентність — ядро відображення, при якому еквівалентні  $x, y \in X$ , для яких  $\varphi(x) = \varphi(y)$ . Розглянемо безліч  $X_\xi$  прообразів елементів  $\xi \in \Xi$  при відображенні  $\varphi$ . В силу сюр'єктивності відображення  $\varphi$  безлічі  $\xi \in \Xi$  не є пустими, не перетинаються і в сумі покривають весь простір  $X$ :

$$X = \bigcup_{\xi \in \Xi} X_\xi; \quad X_{\xi^1} \cap X_{\xi^2} = \emptyset \text{ if } \xi^1 \neq \xi^2. \quad (16)$$

Розбиття простору  $X$  на безлічі  $X_\xi$  відповідає еквівалентності, для якої безлічі  $X_\xi$  служать суміжними класами та назад. Оскільки  $\Xi$  є структурою, то часткова впорядкованість елементів  $\xi \in \Xi$  може бути використана для визначення часткової впорядкованості суміжних класів на  $X$  щодо відносин еквівалентності:

$$\xi^1 \leq \xi^2 \rightarrow X_{\xi^1} \leq X_{\xi^2}. \quad (17)$$

Як доведено в [5], декомпозиція простору систем є ґратами щодо операцій перетину та об'єднання, де порядок заданий вкладенням множин. Представлений спосіб вирішення дворівневих задач оптимізації можна розглядати в якості

основи формалізації багатоагентного компонування при використанні роєвого та еволюційного алгоритму.

**4. Висновки та перспективи подальших досліджень.** Визначено, що рішення дворівневих оптимізаційних задач вимагає комплексної інтеграції різнорідних обчислювальних і інформаційних систем, що забезпечує ефективне управління і взаємодію всіх компонентів системи для досягнення загальної цілі. Подання об'єкта управління як роєвої системи дозволяє детально аналізувати його стани через визначення вхідних і вихідних впливів та їх взаємозв'язків, що сприяє побудові більш точних прогнозів поведінки системи.

Доведено, що використання еволюційних алгоритмів управління роєвими системами забезпечує адаптацію до змін у середовищі та здатність до самоорганізації, що є критичним для динамічних умов функціонування. Застосування концепції нечітких ієрархій та взаємозв'язків у системах управління дає можливість врахування невизначеності та складності у прийнятті рішень, що сприяє створенню гнучких і масштабованих роєвих систем. Обґрунтовано, що використання тимчасової логіки дозволяє аналізувати та прогнозувати зміни станів системи з часом, що покращує здатність системи адаптуватися і відповідати на змінні умови зовнішнього середовища. Визначення ключових підсистем і створення нечітких відносин в моделі дає змогу оптимізувати управління, вибираючи найбільш важливі елементи для досягнення загальної цілі системи.

Перспективи подальших досліджень можуть бути організовані навколо кількох основних напрямків:

- 1) Дослідження можуть бути спрямовані на розробку та впровадження нових, більш ефективних алгоритмічних стратегій для зниження обчислювальної складності роєвих алгоритмів;
- 2) Визначення нових областей, де роєві та еволюційні алгоритми можуть бути ефективно застосовані, такі як робототехніка, автоматизоване проектування, кібербезпека та інші комплексні системи, що вимагають високої адаптивності та швидкого реагування;
- 3) Інтеграція роєвих та еволюційних алгоритмів з іншими машинно-навчальними методами, як-от глибоке навчання, для створення гібридних інтелектуальних систем, що поєднують переваги різних підходів.

#### Список використаної літератури

1. Безклубенко І. С., Гетун Г. В., Баліна О. І., Буценко Ю. П. Дослідження властивостей множини ефективних значень критеріїв в задачі оптимізації інженерної мережі. *Управління розвитком складних систем*. 2022. № 51, С. 81–86.
2. Горда О. В., Цюцюра С. В., Лященко Т. О. Cognitive elements of information environments. *Управління розвитком складних систем*. 2022. № 51. С. 49–57. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.49-57>
3. Гуляницький Л. Ф., Мулеса О. Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2016. 142 с.
4. Димова Г. О. Розробка моделі складання розкладу занять методом еволюційного пошуку. *Таврійський науковий вісник. Серія: Технічні науки*. 2022. № 2. С. 3–9. DOI: <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.2.1>
5. Журавльов О., Лісковський Д. Методологія використання генетичного алгоритму для розв'язання містобудівних задач. *Містобудування та територіальне планування*. 2023. № 84. С. 145–152. DOI: <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2023.84.145-152>
6. Македон В. В., Михайленко О. Г. Управління внутрішніми інвестиційними проектами в регіональному промисловому кластері підприємств. *Підприємництво та інновації*. 2022. № 25. С. 56–63. DOI: <https://doi.org/10.32782/2415-3583/25.9>

7. Олійник Д., Олійник Л. Про ефективність операторної модифікації генетичного алгоритму в задачах двовимірної оптимізації. *Грааль науки*. 2022. № 11. С. 221–229. DOI: <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.24.12.2021.038>
8. Abu-Arquub O., Abo-Hammour Z., Momani Sh. Application of continuous genetic algorithm for nonlinear system of second-order boundary value problems. *Applied Mathematics and Information Sciences*. 2014. Vol. 8, No 1. P. 235–248.
9. Gan G., Ma Ch., Wu J. Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications. Philadelphia, Pennsylvania : SIAM, 2007. 455 p.
10. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Algorithms and Combinatorics). New York : Springer, 2018. 455 p.
11. La Torre D., Colapinto C., Durosini I., Triberti S. Team Formation for Human-Artificial Intelligence Collaboration in the Workplace: A Goal Programming Model to Foster Organizational Change. *IEEE Transactions on Engineering Management*. 2023. Vol. 70, No. 5. P. 1966–1976. DOI: <https://doi.org/10.1109/TEM.2021.3077195>
12. Makedon V., Dzeveluk A., Khaustova Y., Bieliakova O., Nazarenko I. Enterprise multi-level energy efficiency management system development. *International Journal of Energy, Environment, and Economics*. 2021. Vol. 29, No. 1. P. 73–91.
13. McAfee A., Brynjolfsson E. Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future. New York : W.W. Norton & Company, 2017. 340 p.
14. Molga M., Smutnicki C. Test functions for optimization need. 3 kwietnia, 2005. 43 p.
15. Shelukhin M., Kupriichuk V., Kyrylko N., Makedon V., Chupryna N. Entrepreneurship Education with the Use of a Cloud-Oriented Educational Environment. *International Journal of Entrepreneurship*. 2021. Vol. 25, No. 6. URL: <https://www.abacademies.org/articles/entrepreneurship-education-with-the-use-of-a-cloudoriented-educational-environment-11980.html> (дата звернення: 02.04.2024).
16. Yang X. S. Firefly algorithms for multimodal optimization. In *proceedings of the 5th Symposium on Stochastic Algorithms, Foundations and Applications*. 2009. P. 169–178.

**Kyrylov S., Kyrylova L., Yuriy R.** Application of the swarm and evolutionary algorithm for solving two-level optimization problems.

The article examines the complexity of solving two-level optimization problems using swarm systems. The object of management is considered as a complex swarm system, which is described by the functions of interaction between time points, states, management influences and outputs. Structurally, the system is presented as an integration of computer systems and includes channels for receiving (inputs) and transmitting (outputs) information. The main attention is paid to the analysis of the influence of information signals on the behavior of the system, as well as to the development of models for optimal control based on abstract information processes. The studied model of the controlled system provides collection, generation, processing and reduplication of information in the context of specific operating conditions, such processes are modeled through semantic hypergraphs and the integration of elementary subsystems with the corresponding functions of information convolution, which are described in detail in the article. The study also considers the development of an evolutionary algorithm for the system, which includes the analysis of internal and external information flows, as well as mechanisms of influence on the behavior of the system. The results of modeling allow to display the dynamics of system states and optimize management decisions based on a set of possible strategies. The paper draws attention to the importance of temporal logic and fuzzy models to ensure the flexibility and adaptability of swarm systems, focusing on the formalization of relations in the system through fuzzy relations of equivalence and partial order. The use of lattices and algebraic systems for the development of a structural management organization is described, which allows to effectively model swarm systems as integrated complexes. Development of methods for checking and validating the effectiveness of swarm algorithms in various optimization tasks, ensuring their reliability and compliance. The paper highlights potential directions for further research, including the development of new methods to improve algorithmic complexity and the application of swarm and evolutionary algorithms in new

domains. Further integration with machine learning and other technologies can provide greater adaptability and efficiency of control systems.

**Keywords:** swarm algorithm, evolutionary algorithm, optimization problem, objective function, quadratic dependence, crossover operator, parent population.

## References

1. Bezklubenko, I. S., Getun, G. V., Balina, O. I., & Butsenko, Yu. P. (2022). Study of the properties of the set of effective criteria values in the engineering network optimization problem. *Management of the development of complex systems*, 51, 81–86 [in Ukrainian].
2. Gorda, O. V., Tsiucsyura, S. V., & Lyashchenko, T. O. (2022). Cognitive elements of information environments. *Management of the development of complex systems*, 51, 49–57. <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.51.49-57> [in Ukrainian].
3. Hulianytskyi, L., & Mulesa, O. (2016). *Applied methods of combinatorial optimization*. Kyiv: VPTs “Kyivskyi universytet” [in Ukrainian].
4. Dymova, G. O. (2022). Development of a model for drawing up a class schedule by the evolutionary search method. *Taurian Scientific Bulletin. Series: Technical sciences*, 2, 3–9. <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.2.1> [in Ukrainian].
5. Zhuravlov, O., & Liskovskyi, D. (2023). Methodology for using a genetic algorithm to solve urban planning problems. *Urban Development and Spatial Planning*, 84, 145–152. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2023.84.145-152> [in Ukrainian].
6. Makedon, V. V., & Mykhaylenko, O. H. (2022). Management of internal investment projects in the regional industrial cluster of enterprises. *Pidpryyemnytstvo ta innovatsiyi*, 25, 56–63. <https://doi.org/10.32782/2415-3583/25.9> [in Ukrainian].
7. Oliynyk, D., & Oliynyk, L. (2022). On the efficiency of operator modification of the genetic algorithm in two-dimensional optimization problems. *Grail of science*, 11, 221–229. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.24.12.2021.038> [in Ukrainian].
8. Abu-Arquub, O., Abo-Hammour, Z., & Momani, Sh. (2014). Application of continuous genetic algorithm for nonlinear system of second-order boundary value problems. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8(1), 235–248.
9. Gan, G., Ma, Ch., & Wu, J. (2007). *Data Clustering: Theory, Algorithms and Applications*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM.
10. Korte, B., & Vygen, J. (2018). *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms (Algorithms and Combinatorics)*. New York: Springer.
11. La Torre, D., Colapinto, C., Durosini, I., & Triberti, S. (2023). Team Formation for Human-Artificial Intelligence Collaboration in the Workplace: A Goal Programming Model to Foster Organizational Change. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 70(5), 1966–1976. <https://doi.org/10.1109/TEM.2021.3077195>
12. Makedon, V., Dzeveluk, A., Khaustova, Y., Bieliakova, O., & Nazarenko, I. (2021). Enterprise multi-level energy efficiency management system development. *International Journal of Energy, Environment, and Economics*, 29(1), 73–91.
13. McAfee, A., & Brynjolfsson, E. (2017). *Machine, Platform, Crowd: Harnessing Our Digital Future*. New York: W. W. Norton & Company.
14. Molga, M., & Smutnicki, C. (2005). *Test functions for optimization needs*. 3 kwietnia.
15. Shelukhin, M., Kupriichuk, V., Kyrylko, N., Makedon, V., & Chupryna, N. (2021). Entrepreneurship Education with the Use of a Cloud-Oriented Educational Environment. *International Journal of Entrepreneurship*. 25(6). Retrieved from <https://www.abacademies.org/articles/entrepreneurship-education-with-the-use-of-a-cloudoriented-educational-environment-11980.html>
16. Yang, X. S., & Chen, J. (2007). Algorithm of Marriage in Honey Bees Optimization Based on the Wolf Pack Search. *In proceedings of the International Conference of Intelligent Pervasive Computing*, 462–467.

Одержано 18.04.2024

УДК 336.76, 519.237.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).138-145](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).138-145)**Н. Е. Кондрук<sup>1</sup>, М. О. Зінченко<sup>2</sup>, О. І. Крічфалушій<sup>3</sup>,  
Т. В. Пендлишак<sup>4</sup>, М. О. Рябицька<sup>5</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат технічних наук  
[natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua](mailto:natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
бакалавр спеціальності прикладна математика  
[zinchenko.maryna@student.uzhnu.edu.ua](mailto:zinchenko.maryna@student.uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3295-8199>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
бакалавр спеціальності прикладна математика  
[krichfalushii.oleksandr@student.uzhnu.edu.ua](mailto:krichfalushii.oleksandr@student.uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8728-674X>

<sup>4</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
бакалавр спеціальності прикладна математика  
[pendlyshak.tetiana@student.uzhnu.edu.ua](mailto:pendlyshak.tetiana@student.uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-2412-3776>

<sup>5</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
бакалавр спеціальності прикладна математика  
[riabytska.milana@student.uzhnu.edu.ua](mailto:riabytska.milana@student.uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7829-578X>

## СЕГМЕНТАЦІЯ РИНКУ КРИПТОВАЛЮТ ЗА ТРЕНДАМИ ВАРТОСТІ

У сучасному світі ринок криптовалют постійно еволюціонує, відзначаючи значні зміни та тренди, які впливають на їхню вартість. Серед широкого спектру криптовалютних активів стежити за цими трендами стає все складніше та важливіше, оскільки вони не лише відображають ринкову активність, але і вказують на потенційні можливості та ризики для інвесторів та регуляторів. Актуальність задачі полягає в необхідності розуміння динаміки цього сектору, адаптування інвестиційних стратегій до змін у ціновій динаміці та попиті на різні види криптовалют. В ході роботи сформовано набір даних річної вартості 200 різновидів криптовалют в несприятливому для розвитку криптовалютного ринку часовому періоді. Проведено сегментацію криптовалют за динамікою вартості криптовалютних активів на основі ліній трендів, моделей k-середніх та “ліктя”. В результаті, визначено 7 кластерів та описано їх змістовну інтерпретацію. Проведений аналіз може допомогти розробити стратегії управління ризиками та прийняття рішень для інвесторів та учасників ринку криптовалют.

**Ключові слова:** криптовалюта, кластеризація, k-means, метод ліктя, сегментація.

### Список умовних позначень:

Bias, Intercept — зміщення;

Data Mining — інтелектуальний аналіз даних;

K-means — метод k-середніх;

Slope — кутовий коефіцієнт, нахил;

WCSS — Within-Cluster Sum of Squares (внутрішньо кластерна сума квадратів відстаней).

**1. Вступ.** Тема криптовалют є поширеною в сучасному світі. Від початку існування біткоїна капіталізація криптовалют значно зросла і постійно зростає, а їхня кількість постійно збільшується і вже перевищує тисячі. Існує багато досліджень щодо роботи цієї “системи”, проте її не так легко зрозуміти. З одного боку, ринок відкриває багато можливостей для інвесторів та комерційних організацій чим створює сприятливу економічну атмосферу та стимулює інновації, а з іншого, це хиткий і нестабільний спосіб заробітку, який має багато ризиків.

Криптовалюта, включаючи Біткойн, в останні роки продемонструвала значну цінність через обіг 14 мільйонів монет. Інвестори, які бачать потенціал у цій технології, формують значну частину загальної капіталізації. Цей процес ймовірно буде тривати до тих пір, поки ринок остаточно не затвердить криптовалюту та не забезпечить стабільність її вартості [1].

На відміну від деяких країн, де заборонено криптовалюту, є інші, які прогресивніші в цьому плані і навіть визнають біткойн офіційним засобом платежу. Зокрема в Україні, Верховна рада легалізувала використання віртуальних активів [1].

Дане дослідження має на меті проаналізувати, узагальнити та сегментувати основні тенденції ринку криптовалют базуючись на даних періоду з 1 жовтня 2022 по 1 жовтня 2023, використовуючи інструменти Data Mining. Відповідно, необхідно розробити програмно-аналітичну систему, яка б реалізувала методи кластеризації та надавала додаткову інформацію про фінансову поведінку криптовалют, допомагала визначити їхню перспективність при прийнятті рішень. Зокрема, основна методологія передбачає застосування алгоритмів кластеризації криптовалют на підкласи, використовуючи їх представлення у вигляді рівняння тренду, сформованого на наявних історичних даних.

**2. Огляд літератури.** На даний час існує достатньо багато наукових робіт присвячених аналізу ринку криптовалют. Можна виділити основні напрямки таких досліджень: побудова прогнозних моделей, сегментація цифрових валют на групи схожості та інший аналіз. Так в [2–5] проведено порівняння прогнозуючих моделей штучних нейронних мереж, авторегресійних, ансамблевих та ін.

Праці [6–8] присвячені застосуванню різних підходів кластеризації. Так в [6] пропонується нова методологія, яка заснована на застосуванні трьох різних алгоритмів розділеної кластеризації, яка, як стверджується, допомагає впорядкувати та зрозуміти основні тенденції ринку, на основі фінансової поведінки криптовалют. В [7] проведено групування криптовалют методом k-Means із використанням додаткових підходів редукції простору. В [8] проведено аналіз ринку криптовалют ієрархічною моделлю, що дало можливість визначати, яка валюта здійснює суттєвий вплив на інші, а також прийняти рішення щодо диверсифікації ризиків (інвестуючи у валюти, що знаходяться у різних кластерах).

Праця [9] присвячена аналізу 5 найпопулярніших криптовалют щодо виявлення розривів, переломів трендів і викидів, а в [10] розглянуто криптовалюту як об’єкт інвестування в Україні.

Враховуючи, що ринок криптовалют є вкрай динамічним і швидкозмінним та наявні певні “необ’єктивні” чинники, зокрема, регулювання криптовалют в різних країнах, то постає необхідність його дослідження для розуміння і виявлення можливостей, уникнення ризиків при прийнятті обґрунтованих рішень у

цьому інноваційному секторі.

**3. Постановка задачі.** Метою даного дослідження є проведення кластерного аналізу трендів вартості криптовалют для подальшого їхнього сегментування на однорідні групи.

Для її реалізації потрібно виконати наступні завдання:

- створити датасет вартості криптовалют за період з жовтня 2022 по жовтень 2023;
- підготувати та обробити дані;
- реалізувати кластеризацію даних;
- візуалізувати отримані результати;
- провести порівняльний аналіз результатів та зробити їх змістовну інтерпретацію.

**4. Формування датасету.** У дослідженні були взяті дані з <https://coinmarketcap.com/> щодо помісячної вартості 200 криптовалют у період з жовтня 2022 по жовтень 2023. За останні роки з'явилась величезна кількість нових криптовалют, частина з яких майже не торгувалась, що призвело до їхньої недовговічності. Тому для точних та якісних результатів було включено найбільші криптовалюти за ринковою капіталізацією.

**5. Методи.** Метод  $k$ -Means це один із найвідоміших алгоритмів кластеризації. Його принцип полягає в розподілі  $n$  спостережень на  $k$  кластерів, кожен з яких визначається центроїдом. Перевага даної моделі у її простоті та швидкості, а недолік у потребі заздалегідь визначати кількість кластерів для розбиття. Також цей алгоритм залежить від визначення початкових центроїдів, тому він є варіативним — виконуючи його кілька разів поспіль ймовірно можуть вийти різні результати.

Метод ліктя є одним із способів визначення оптимальної кількості кластерів. Для цього виявляють “лікоть” на графіку, який відображає залежність індексу суми внутрішньокластерних відстаней (WCSS) від кількості кластерів. Лікоть — це точка, де спостерігається різке зменшення приросту WCSS.

**6. Експерименти.** Дослідження включало аналіз 200 різних криптовалют на основі їх рівнянь трендів, які будувались методом лінійної регресії. Для покращення точності аналізу та уникнення спотворення результатів використовувалась методика виключення викидів — значень, що відхиляються від очікуваного розподілу даних. Це сприяло уточненню результатів кластеризації, що було важливим етапом у роботі над дослідженням. У випадку цього експерименту, викиди вказують на аномальні значення коефіцієнтів рівнянь трендів (кутового коефіцієнта —  $\text{slope}$  або вільного члена —  $\text{bias}$ ,  $\text{intercept}$ ). У результаті квантифікації отримано 15 криптовалют, які були відокремлені в окремі групи 3 та 4 для забезпечення більш точного аналізу існуючих тенденцій на ринку.

Одним із ключових етапів експерименту було групування криптовалют на основі значень кутового коефіцієнта. Основну групу криптовалют розподілено за наявним “висхідним чи низхідним трендом” розвитку їх вартості. Групування криптовалют за значенням кутового коефіцієнта ( $\text{slope}$ ) було здійснене з метою виявлення тенденцій в їхній ціновій динаміці та прогнозування подальшого руху цін. Такий підхід використаний для виділення активів з різними темпами росту або спаду цін. Криптовалюти з кутовим коефіцієнтом менше



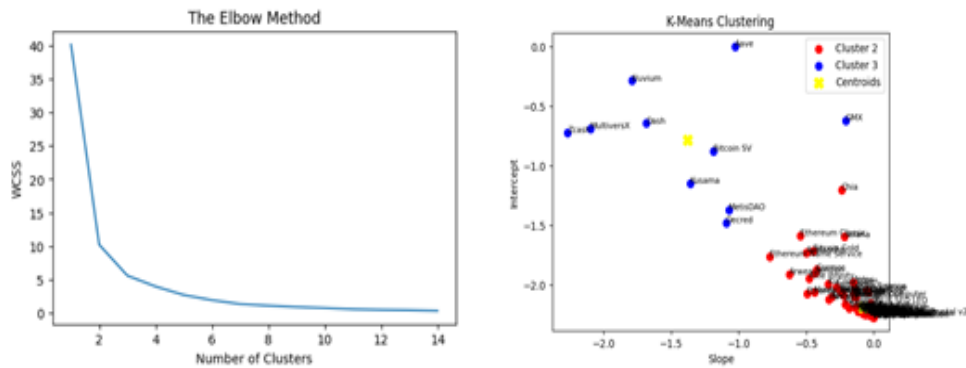


Рис. 2. Метод ліктя та візуалізація кластерної структури криптовалют групи 2.

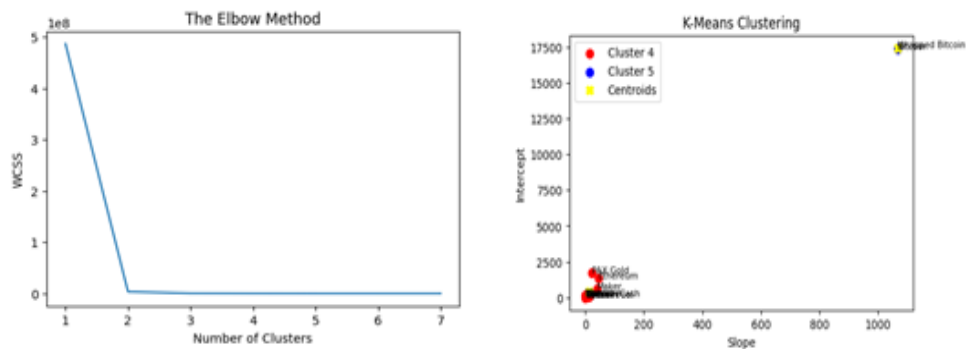


Рис. 3. Метод ліктя та візуалізація кластерної структури криптовалют групи 3.

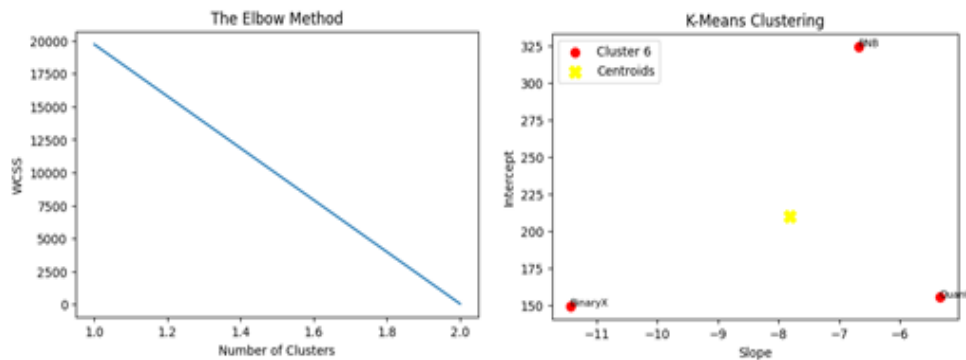


Рис. 4. Метод ліктя та візуалізація кластерної структури криптовалют групи 4.

Кластер 1 визначає криптовалюти з середнім темпом зростання вартості. Такі криптовалюти можуть бути пов'язані з інноваційними технологіями.

На рис. 2 показана кластерна структура групи 2. Ці криптовалюти мають від'ємні значення кутового коефіцієнту. Криптовалюти кластеру 2 характеризуються помірно-стабільним падінням ціни, кластеру 3 — спадаючим трендом середньої інтенсивності (кут нахилу до  $-66$  градусів). Це означає, що у цих

криптовалют падає цінність і вони можуть втрачати свою вартість з часом у майбутньому.

У групу 3 входять дванадцять найбільш перспективних криптовалют — Bitcoin, Wrapped Bitcoin, Maker, PAX Gold, Ethereum та інші. З рис. 3 видно, що кластери 4, 5 містять криптовалюту із інтенсивно зростаючим трендом: в кластері 4 відносно недорогої по відношенню до кластера 7. Можна зробити висновки, що ця група найбільш стійка до зовнішніх чинників (війна, економічні кризи, політичні ситуації, тощо).

Група 4 включає “вартісні” криптовалюту, що показали спадний тренд, хоча вони достатньо популярні в досліджуваному періоді. Сюди входили тільки 3 криптовалюту, такі як BNB, Quant, BinaryX. Тому можна припустити, що вони не є стійкими до зовнішніх чинників в форсмажорних обставинах.

**9. Висновки.** Робота присвячена сегментації ринку криптовалют за трендами вартості та відображає напрямок розвитку прикладного аналізу даних [11, 12] і дозволяє зрозуміти вплив різних факторів на криптовалютний ринок та прогнозувати його подальший розвиток.

В дослідженні було створено датасет вартості 200 криптовалют в несприятливому для розвитку криптовалютного ринку часовому періоді. Це дало додаткову можливість проаналізувати його динаміку в умовах негативної кон’юнктури. Проведено сегментацію криптовалют за динамікою вартості криптовалютних активів на основі ліній трендів, моделей k-середніх та “ліктя”. В результаті, визначено 7 кластерів криптовалют та описано їх змістовну інтерпретацію. Проведений аналіз може допомогти розробити стратегії управління ризиками та прийняття рішень для інвесторів та учасників ринку криптовалют.

### Список використаної літератури

1. Легалізація криптовалюту: законопроект ухвалено у другому читанні. *Слово і Діло*. URL: <https://www.slovoudilo.ua/2021/09/08/novyna/suspilstvo/lehalizacziya-kryptovalyuty-zakonoproekt-uxvaleno-druhomu-chytanni> (дата звернення: 24.04.2024).
2. Bebeshko B. Analysis of digital cryptocurrency market forecasting methods and models. *Cybersecurity: Education, Science, Technique*. 2022. Vol. 2, No. 18. P. 163–174. DOI: <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2022.18.163174>
3. Tripathy N. et al. Empirical Forecasting Analysis of Bitcoin Prices *International journal of electrical and computer engineering systems*. 2024. Vol. 15, No. 1. P. 21–29. DOI: <https://doi.org/10.32985/ijeces.15.1.3>
4. Tripathy N., Hota S., Mishra D. Performance analysis of bitcoin forecasting using deep learning techniques. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. 2023. Vol. 31, No. 3. P. 1515–1522. DOI: <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v31.i3.pp1515-1522>
5. Moroz V. et al. Analysis of LSTM and GMDH network models for cryptocurrency forecasting. *Bulletin of the National Technical University "KhPI" A series of "Information and Modeling"*. 2020. Vol. 1, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2020.01.10>
6. Lorenzo L., Arroyo J. Analysis of the cryptocurrency market using different prototype-based clustering techniques. *Financial Innovation*. 2022. Vol. 8, No. 1. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40854-021-00310-9>
7. Сабов Д. П., Шаркаді М. М. Підходи щодо кластеризації криптовалют. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Математика і інформатика*. 2023. Т. 42, № 1. С. 201–207. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).201-207](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).201-207)
8. Базик І. П., Кібальник Л. О. Використання кластерного методу для аналізу ринку криптовалют. *Актуальні проблеми природничих і гуманітарних наук у дослідженнях молодих учених «Родзинка — 2019» : XXI Всеукр. наук. конф. молодих уч.* 2019. С. 70–72.
9. Gonak I., Horyn V. Cryptocurrency as an object of investment. *Scientific Notes of Ostroh Academy National University, "Economics" Series*. 2022. Vol. 1, No. 26(54). P. 71–84. DOI:

- [https://doi.org/10.25264/2311-5149-2022-26\(54\)-71-84](https://doi.org/10.25264/2311-5149-2022-26(54)-71-84)
10. Mohamed S. D., Ismail M. T., Ali M. K. B. M. Cryptocurrency Returns Over a Decade: Breaks, Trend Breaks and Outliers. *Scientific Annals of Economics and Business*. 2023. Vol. 71, No. 1. P. 1–20. DOI: <https://doi.org/10.47743/saeb-2024-0003>
  11. Kondruk N. E. Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*. 2018. No. 3. P. 98–105. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
  12. Кондрук Н. Е. Моделі багатофакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія : Математика і інформатика*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

**Kondruk N. E., Zinchenko M. O., Krichfalushii O. I., Pendlyshak T. V., Ryabytska M. O. Segmentation Of The Cryptocurrency Market By Price Trends.**

In today's world, the cryptocurrency market is constantly evolving, noting significant changes and trends that affect their value. Among the wide range of cryptocurrency assets, it is becoming increasingly difficult and important to follow these trends, as they not only reflect market activity but also indicate potential opportunities and risks for investors and regulators. The urgency of the task lies in the need to understand the dynamics of this sector, to adapt investment strategies to changes in price dynamics and demand for different types of cryptocurrencies. In the course of the work, a dataset of the annual value of 200 types of cryptocurrencies in a time period unfavorable for the development of the cryptocurrency market was formed. Cryptocurrencies were segmented by the dynamics of the value of cryptocurrency assets based on trend lines, k-averages and elbow models. As a result, 7 clusters are identified and their meaningful interpretation is described. The analysis can help develop risk management and decision-making strategies for investors and cryptocurrency market participants.

**Keywords:** cryptocurrency, clustering, k-means, elbow method, segmentation.

## References

1. Legalization of cryptocurrency: the bill was passed in the second reading. *Word and Deed*. Retrieved from <https://www.slovoidilo.ua/2021/09/08/novyna/suspilstvo/lehalizacziya-kryptovaluty-zakonoprojekt-uxvaleno-druhomu-chytanni>
2. Bebeshko, B. (2022). Analysis of digital cryptocurrency market forecasting methods and models. *Cybersecurity: Education, Science, Technique*. 2(18), 163–174. <https://doi.org/10.28925/2663-4023.2022.18.163174>
3. Tripathy, N., Hota, S., Mishra, D., Satapathy, P., & Kumar Nayak, S. (2024). Empirical Forecasting Analysis of Bitcoin Prices. *International journal of electrical and computer engineering systems*, 15(1), 21–29. <https://doi.org/10.32985/ijeces.15.1.3>
4. Tripathy, N., Hota, S., & Mishra, D. (2023). Performance analysis of bitcoin forecasting using deep learning techniques. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 31(3), 1515–1522. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v31.i3.pp1515-1522>
5. Moroz, V., Helvig, J., Moroz, D., & Zhukov, P. (2020). Analysis of LSTM and GMDH network models for cryptocurrency forecasting. *Bulletin of the National Technical University "KhPI" A series of "Information and Modeling"*, 1(3). <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2020.01.10>
6. Lorenzo, L., & Arroyo, J. (2022). Analysis of the cryptocurrency market using different prototype-based clustering techniques. *Financial Innovation*, 8(1). <https://doi.org/10.1186/s40854-021-00310-9>
7. Sabov, D. P., & Sharkadi, M. M. (2023). Approaches to clusterization of cryptocurrencies. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 42(1), 201–207. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).201-207](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).201-207)
8. Bazik I. P., Kibalnyk L. O. (2019). Using the cluster method to analyze the cryptocurrency market, *Actual problems of natural sciences and humanities in the research of young scientists «Rodzinka — 2019»*. XXI All-Ukrainian scientific conference of young scientists.
9. Gonak, I., & Horyn, V. (2022). Cryptocurrency as an object of investment. *Scientific*

- Notes of Ostroh Academy National University, "Economics" Series*, 1(26(54)), 71–84. [https://doi.org/10.25264/2311-5149-2022-26\(54\)-71-84](https://doi.org/10.25264/2311-5149-2022-26(54)-71-84)
10. Mohamed, S. D., Ismail, M. T., & Ali, M. K. B. M. (2023). Cryptocurrency Returns Over a Decade: Breaks, Trend Breaks and Outliers. *Scientific Annals of Economics and Business*, 71(1), 1–20. <https://doi.org/10.47743/saeb-2024-0003>
  11. Kondruk, N. E. (2018) Use of length-based similarity measure in clustering problems. *Radio Electronics. Computer Science. Control*, 3(46), 98–105. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-3-11>
  12. Kondruk, N. E. (2022) Models of multivariate forecasting. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)

Одержано 29.04.2024

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).146-154)**І. А. Мич<sup>1</sup>, В. В. Ніколенко<sup>2</sup>, О. В. Варцаба<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат фізико-математичних наук

[ihor.mych@uzhnu.edu.ua](mailto:ihor.mych@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

<sup>2</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,  
кандидат фізико-математичних наук

[volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua](mailto:volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики

[olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua](mailto:olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

**ЕКВАЦІОНАЛЬНІ КЛАСТЕРИ БУЛЕВИХ АЛГЕБР**

У роботі продовжується еквациональне дослідження в класі булевих алгебр. Розглядається клас алгебр, який включає в себе всі алгебри з нульарними, унарними та бінарними операціями. Вводяться нові поняття сигнатурних тотожностей та еквационального кластеру. Це дає можливість розбити множину алгебр  $M_{11}$  на кластери. Алгебри, які знаходяться в першому кластері дають можливість виражати повну систему тотожностей однієї алгебри через іншу, використовуючи сигнатурні тотожності.

**Ключові слова:** повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, еквациональний кластер.

**1. Вступ.** У роботі проводяться дослідження класу універсальних булевих алгебр класу  $M_{11}$ . У роботі [1] дане повне описання класу нульарних алгебр, алгебр Булевого кубу та кубу Жегалкіна. У роботах [2, 3, 4] приведені еквациональні решітки функціонально повних і неповних алгебр класу  $M_{11}$ , знайдені повні системи тотожностей для класу алгебр  $M_6$ . Клас алгебр  $M_6$  включає в себе всі алгебри сигнатура яких може мати тільки операції  $0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus$ .

У даній роботі проводяться еквациональні дослідження функціонально неповних алгебр класу  $M_{11}$ , вивчено 22 кластери з 24.

**2. Основні результати.** Нехай задано клас універсальних булевих алгебр  $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle; A = \{0, 1\}; \Omega — деяка множина булевих операцій\}$ . Позначимо через  $R(U)$  множину всіх тотожностей алгебри  $U$ .

**Означення 1.** Алгебри  $U_1$  і  $U_2$  називаються еквационально еквівалентними, якщо  $R(U_1) = R(U_2)$ .

**Означення 2.** Алгебра  $U_1$  еквационально вкладається в алгебру  $U_2$ , якщо  $R(U_1) \subset R(U_2)$ .

**Твердження 1.** Якщо алгебра  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  еквационально вкладається в алгебру  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ , то  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ .

**Доведення.** Якщо  $R(U_1) \subset R(U_2)$ , а  $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$ , то в алгебрі  $U_1$  можемо побудувати формулу  $F(\varphi)$ , яка містить операцію  $\varphi \in \Omega_1 - \Omega_2$ . У цьому випадку тотожність  $F(\varphi) = F(\varphi) \notin R(U_2)$ .

Нехай  $R(U_1) \subset R(U_2)$ .

**Означення 3.** Тотожність  $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$  називається сигнатурною, якщо  $F_2(\varphi)$  — формула, яка реалізує операцію  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ , а  $F_1(\psi)$  — формула, яка належить алгебрі  $U_1$ .

Наприклад, якщо  $U_1 = \langle A, \neg, \vee, \wedge \rangle$ ,  $U_2 = \langle A, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow \rangle$ , то сигнатурні тотожності мають вигляд:  $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ ;  $x \Leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy$ .

**Означення 4.** Алгебра  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  називається еквівалентним розширенням алгебри  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ , якщо  $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  існує сигнатурна тотожність  $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$ .

Множину таких сигнатурних тотожностей позначимо через  $R(\Omega_2 - \Omega_1)$ .

**Означення 5.** Система тотожностей  $H \subset R(U_1)$  називається повною в  $U_1$ , якщо використовуючи операцію суперпозиції можна довести довільну тотожність до лексикографічної рівності, використовуючи тільки тотожності з  $H$ .

**Твердження 2.** Якщо для алгебри  $U_1$  знайдеться повна система тотожностей  $H(U_1)$ , а алгебра  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$  є еквівалентним розширенням  $U_1$ , то  $H(U_2) = H(U_1) \cup R(\Omega_2 - \Omega_1)$ .

**Доведення.** Доведення твердження випливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операцію  $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  з формул алгебри  $U_2$ , звести їх до формул алгебри  $U_1$ , для якої знайдена повна система тотожностей  $H(U_1)$ .

**Означення 6.** Алгебри  $U_1, U_2, \dots, U_t \in M$  утворюють еквівалентний кластер  $K$ , якщо в множині  $K$  існує така алгебра  $U^*$ , що  $\forall U_i \in K$  існує така послідовність алгебр  $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_i} \in K$ , що  $R(U_1) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \dots \subset R(U_{i_i}) = R(U^*)$ ,  $i \forall U_t \notin K, R(U_t) \not\subset R(U^*)$ .

**Означення 7.** Алгебра  $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$  називається еквівалентним звуженням алгебри  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ , якщо  $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$  існує сигнатурна тотожність  $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$ .

Якщо алгебра  $U_1$  є еквівалентним звуженням алгебри  $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ , і для алгебри  $U_2$  знайдена повна система тотожностей  $H(U_2)$ , то за допомогою сигнатурних тотожностей можемо ввести в сигнатуру алгебри  $U_1$  операції  $\Omega_2 - \Omega_1$ .

У даній роботі проводяться еквівалентні дослідження класу алгебр  $M_{11}$ , який включає в себе всі алгебри, сигнатури яких складаються з усіх унарних операцій арності яких не перевищує два.

|   |      |                  |     |                  |     |              |            |                |                       |           |                   |           |                   |       |   |
|---|------|------------------|-----|------------------|-----|--------------|------------|----------------|-----------------------|-----------|-------------------|-----------|-------------------|-------|---|
| 0 | $xy$ | $x \Leftarrow y$ | $x$ | $y \Leftarrow x$ | $y$ | $x \oplus y$ | $x \vee y$ | $x \uparrow y$ | $x \Leftrightarrow y$ | $\bar{y}$ | $y \Rightarrow x$ | $\bar{x}$ | $x \Rightarrow y$ | $y x$ | 1 |
| 0 | 0    | 0                | 0   | 0                | 0   | 0            | 0          | 1              | 1                     | 1         | 1                 | 1         | 1                 | 1     | 1 |
| 0 | 0    | 0                | 0   | 1                | 1   | 1            | 1          | 0              | 0                     | 0         | 0                 | 1         | 1                 | 1     | 1 |
| 0 | 0    | 1                | 1   | 0                | 0   | 1            | 1          | 0              | 0                     | 1         | 1                 | 0         | 0                 | 1     | 1 |
| 0 | 1    | 0                | 1   | 0                | 1   | 0            | 1          | 0              | 1                     | 0         | 1                 | 0         | 1                 | 0     | 1 |

Пари функцій  $\bar{x} \text{ і } \bar{y}$ ;  $y \Rightarrow x \text{ і } x \Rightarrow y$ ;  $x \Leftarrow y \text{ і } y \Leftarrow x$  задають одну операцію. Таким чином, 16 функцій задають 11 операцій.

У даній роботі досліджується клас універсальних алгебр

$$M_{11} = \{U = \langle A, \Omega \rangle, A = \{0, 1\}, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, |, \uparrow\}\}.$$

Клас алгебр  $M_{11}$  розіб'ємо на чотири підкласи  $M_{11} = M_{11}^1 \cup M_{11}^2 \cup M_{11}^3 \cup M_{11}^4$ , де  $M_{11}^1$  — множина всіх алгебр в сигнатуру яких не входять стрілка Пірса та штрих Шеффера,  $M_{11}^2$  — входить стрілка Пірса і не входить штрих Шеффера,  $M_{11}^3$  — входить штрих Шеффера і не входить стрілка Пірса,  $M_{11}^4$  — входить стрілка Пірса та штрих Шеффера.

Розглянемо клас алгебр

$$M_{11}^1 = \{U = \langle A, \Omega \rangle, A = \{0, 1\}, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \Leftrightarrow\}\}.$$

Алгебри цього класу утворюють дев'ятимірний сигнатурний куб. До складу цього кубу входять 512 алгебр. Кожна вершина кубу однозначно визначається сигнатурою, яку іноді позначають числом, що є розкладом за степенем двійки.

У роботі [1] детально вивчено структуру цього сигнатурного кубу. Розіб'ємо клас алгебр  $M_{11}^1$  на два сигнатурні граfi, які представляють функціонально неповні та функціонально повні алгебри, зображені на рис. 1, 2.

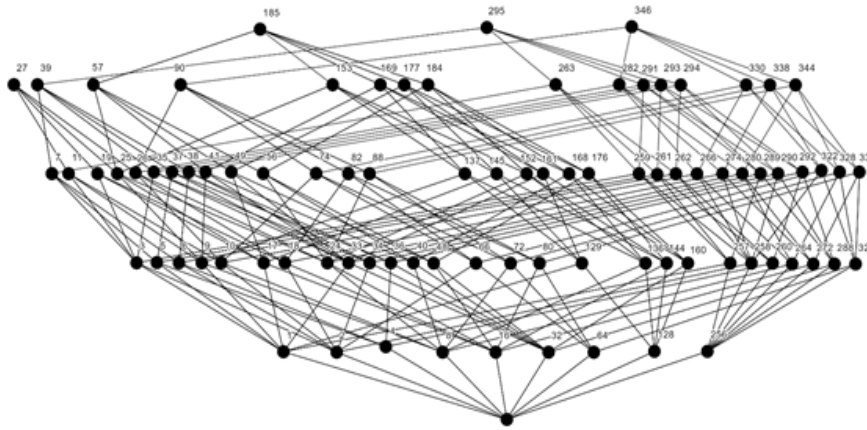


Рис. 1. Функціонально неповні алгебри класу  $M_{11}^1$ .

Еквациональні кластери зручно представляти у вигляді сигнатурно-еквівалентних графів. Вершинами кластеру є алгебри, які входять до складу кластеру, а ребра позначають сигнатурними тотожностями, які з'єднують пари алгебр, одне з яких є еквациональним розширенням (звуженням) іншої. Всього в класі алгебр  $M_{11}$  побудовано двадцять п'ять кластерів. Вісімдесят вісім функціонально неповних алгебр розподілені по двадцяти чотирьох кластерах: чотирнадцять одноелементних, два двоелементних, один трьохелементний, два чотирьохелементних, один двадцятиелементний, два вісімнадцятиелементних. Отже 424 елементний кластер об'єднує всі функціонально повні алгебри.

Еквациональний кластер має алгебру, що має максимальну сигнатуру  $U^*$  і декілька елементів з мінімальною сигнатурою. Еквациональні кластери дають можливість:

- А) знаходити повні системи тотожностей для алгебр еквационального кластеру;
- Б) передавати проблему  $F_1 = F_2 \in R(U_1)$  для алгебри для якої не знайдено повну систему тотожностей алгебрі  $U_2$ , для якої повні системи тотожностей знайдені.

Еквациональні кластери поділяються на три типи:



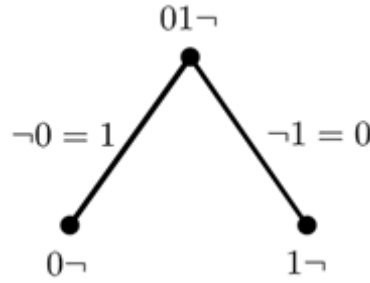


Рис. 4. Трьохелементний кластер.

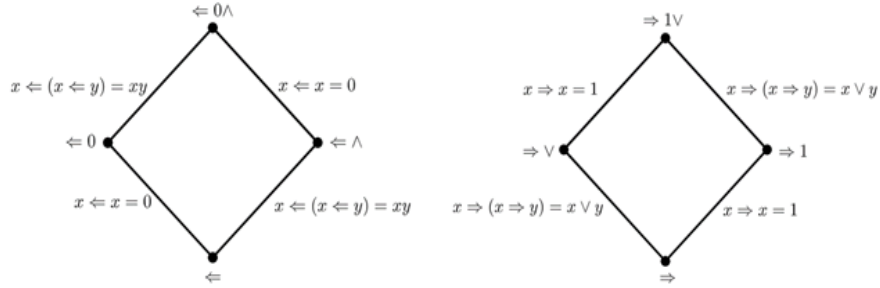


Рис. 5. Чотирьохелементні кластери.

алгебр. Знайдемо повні системи тотожностей для другого двохелементного кластеру. Перейдемо до знаходження повних систем тотожностей другого двохелементного кластеру.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ . Повна система тотожностей:

- 1)  $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$ ;
- 2)  $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$ ;
- 3)  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$ ;
- 4)  $x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = y$ ;
- 5)  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow x) = x \Leftrightarrow y$ .

1. Тотожність (3) дає можливість опустити дужки у доданках алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ .

2. З тотожностей (1), (5) випливає, що формула  $x \Leftrightarrow x$  є окремою формулою, або вона поглинається іншими формулами. Тому довільна формула алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$  або співпадає з формулою  $x \Leftrightarrow x$  або має вигляд  $x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}$ .

Нехай  $F_1 = F_2 \in R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$ . Покажемо, що  $F_1 = x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k} = F_2 = x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}$ , якщо вони лексикографічно співпадають. Допустимо, що  $x_{i_1} \in F_1$ , а  $x_{j_1} \notin F_2$ , тоді на наборі  $x_{i_1} = 0$ , а решта змінних рівна одиниці, формула  $F_1 = 0$ , а формула  $F_2 = 1$ . Тобто формула  $F_1 = F_2 \notin R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$ . Таким чином, знайдена повна ситема тотожностей для алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ .

Повну систему тотожностей алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow, 1 \rangle$  можемо отримати з  $R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$  через тотожність  $1 = x \Leftrightarrow x$ .

Випишемо повну систему тотожностей для алгебри  $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$ :

- 1)  $0 \Leftrightarrow 0 = x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$ ;
- 2)  $0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0 = x$ ;
- 3)  $0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ;
- 4)  $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$
- 5)  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$ ;
- 6)  $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$ .

За допомогою цих тотожностей для довільних формул  $F$  алгебри  $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$  можна побудувати тотожності формул, в яких кожна змінна і 0 будуть зустрічатися не більше одного разу. Тоді в цій алгебрі існують формули тільки двох типів:

$$0 \Leftrightarrow x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}, \quad x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}.$$

Легко показати, що якщо лексикографічно приведені формули не співпадають, то існує набір, на якому вони приймають різні значення.

Покажемо, що повною системою тотожностей для алгебри  $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$  є така система рівностей:

- 1)  $\bar{\bar{x}} = x$ ;
- 2)  $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$ ;
- 3)  $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$ ;
- 4)  $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$ ;
- 5)  $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$ ;
- 6)  $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y$ ;
- 7)  $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \bar{y}$ ;
- 8)  $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}$ ;
- 9)  $x \Leftrightarrow \bar{x} = y \Leftrightarrow \bar{y}$ ;
- 10)  $x_1 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_4 = x_1 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow \bar{x}_4$ ;
- 11)  $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \bar{y}$ .

Використовуючи формули (1) і (6) отримаємо формули, у яких заперечення зустрічається тільки над змінними і не більше одного разу. Тотожність (10) дає можливість отримати формули, які мають не більше одного заперечення.

У даній алгебрі існує тільки три типи формул:

- 1)  $x_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}$ ;
- 2)  $\bar{x}_{i_1} \Leftrightarrow x_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}$ ;
- 3)  $x_{i_1} \Leftrightarrow \bar{x}_{i_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}$ .

Для кожної з цих формул можемо знайти набір, на якому вона приймає протилежне значення до формули з якою вона лексикографічно не співпадає.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри  $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ . Повна система тотожностей:

- 1)  $x \oplus x = y \oplus y$ ;
- 2)  $x \oplus x \oplus x = x$ ;
- 3)  $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \Leftrightarrow y$ ;
- 4)  $(x \oplus x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \oplus y$ ;
- 5)  $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \oplus y) = x \Leftrightarrow y$ ;
- 6)  $x \Leftrightarrow x \oplus y = x \oplus x \Leftrightarrow y$ ;
- 7)  $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$ ;
- 8)  $(x \Leftrightarrow y) \oplus (x \Leftrightarrow z) = y \oplus z$ ;
- 9)  $(x \Leftrightarrow y) \oplus z = x \Leftrightarrow (y \oplus z)$ ;

- 10)  $x \oplus y \Leftrightarrow z \oplus u = x \oplus y \oplus z \Leftrightarrow u$ ;  
 11)  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ ;  
 12)  $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$ .

Тотожності (9), (11), (12) дають можливість опустити всі дужки у формулах цієї алгебри. Тотожності (3) і (5) опускають формулу  $x \Leftrightarrow x$ , а тотожності (2) і (4) формулу  $x \oplus x$ . Формула (10) дає можливість перенести доданки через операцію  $\Leftrightarrow$ .

У результаті використання цих тотожностей формулу  $F$  можна звести до вигляду:  $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \dots \oplus x_{i_k} \Leftrightarrow x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{i_k}$ .

Тотожність (7) дає можливість отримати формули, в яких жодна змінна не може одночасно належати  $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$  і  $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{i_k}\}$ .

Легко показати, якщо у формулах  $F_1$  і  $F_2$ , отриманих в результаті цих перетворень,  $x_i \in F_1$  і  $x_i \notin F_2$ , то існує набір  $\alpha$ , що  $x_i = 0$ , а всі інші змінні дорівнюють одиниці. На цьому наборі  $F_1(\alpha) = 0$ , а  $F_2(\alpha) = 1$ , тобто  $F_1 \neq F_2 \in R(U)$ , якщо вони лексикографічно співпадають.

Таким чином, знайдені повні системи тотожностей для всіх мінімальних алгебр кластера:  $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$ ,  $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$ ,  $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ ,  $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$ ,  $U = \langle A, \neg, \oplus \rangle$ . Ми виконали повне екваціональне описання двадцятиелементного кластера.

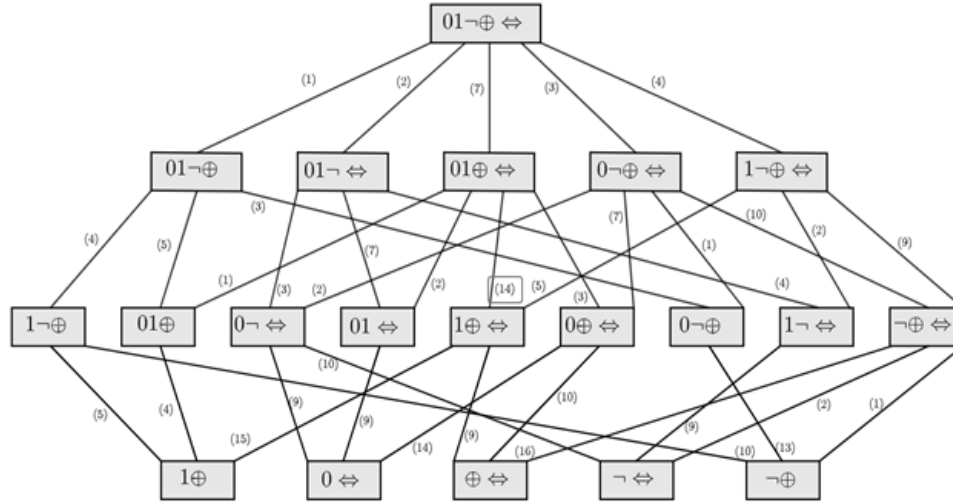


Рис. 6. Двадцятиелементний екваціональний кластер.

Випишемо сигнатурні тотожності, якими позначені ребра двадцятиелементного кластера:

- 1)  $x \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$ ;
- 2)  $x \oplus y = \overline{x} \Leftrightarrow y$ ;
- 3)  $1 = \overline{0}$ ;
- 4)  $0 = \overline{1}$ ;
- 5)  $\overline{x} = x \oplus 1$ ;
- 6)  $\overline{x} = y \Leftrightarrow (x \oplus y)$ ;
- 7)  $\overline{x} = x \Leftrightarrow 0$ ;
- 8)  $1 = x \vee \overline{x}$ ;
- 9)  $1 = x \Leftrightarrow x$ ;

- 10)  $0 = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{x}$ ;
- 11)  $0 = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \oplus y)$ ;
- 12)  $0 = 1 \oplus 1$ ;
- 13)  $0 = x \oplus x$ ;
- 14)  $x \oplus y = (0 \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y$ ;
- 15)  $x \Leftrightarrow y = 1 \oplus E \oplus y$ ;
- 16)  $\bar{x} = (x \oplus x) \Leftrightarrow x$ .

Справді для того, щоб знайти, наприклад, повну систему тотожностей алгебри  $U = \langle A, 0, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$  досить рухаючись по ребрах (використовуючи відповідні сигнатурні тотожності (11) перейти до сигнатури алгебри  $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ , а далі або за допомогою (9) перейти до алгебр  $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$  або за допомогою (12) до алгебр  $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$ . Таким чином, алгебра  $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$  у двадцяти-елементному екваціональному кластері має  $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$  повних систем тотожностей. Найбільше повних систем тотожностей має алгебра  $U^* = \langle A, 0, 1, \neg, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ , а найменше — по одній повній системі п'ять алгебр першого ярусу.

Рухаючись по ребрах екваціонального кластеру відбувається процес усунення «надлишкових» операцій.

**3. Висновки.** У даному дослідженні знайдені методи, які дозволяють:

1. Розбити множину алгебр  $M_{11}$  на 25 кластерів.
2. Для кожного кластеру визначити його тип. Це дає можливість знайти повні системи тотожностей у всіх алгебрах кластерів першого типу і повні системи тотожностей для частини алгебр другого типу.
3. Визначити класи алгебр, які належать до алгебр кластеру третього типу, для яких знаходження повних систем тотожностей виявилось досить складною задачею.

### Список використаної літератури

1. Варцаба О. В., Мич І. А., Ніколенко В. В., Денис В. С. Екваціональні дослідження нульарних алгебр, алгебр булевого кубу та кубу Жегалкіна. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 2, № 37. С. 142–149. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149)
2. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Екваціональне описання функціонально неповних алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2023. Вип. 42, № 1. С. 194–201. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201)
3. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Екваціональне описання функціонально повних алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2023. Вип. 43, № 2. С. 136–143. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).136-143](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143)
4. Мич І. А., Ніколенко В. В. Повні системи тотожностей в одному класі алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2017. Вип. 1, № 30. С. 79–86. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86)
5. Мич І. А., Ніколенко В. В. Екваціональна решітка одного класу алгебр. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер.: «Математика і інформатика»*. 2018. Вип. 2, № 33. С. 109–113. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113)

**Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V.** Equational clusters of Boolean Algebras.

The paper continues the equational research of the class of Boolean algebras. A class of algebras is considered, which includes all algebras with null, unary, and binary operations. New concepts of signature identities and equational clusters are introduced. This makes it possible to divide a set of algebras into clusters. Algebras in the first cluster make it

possible to express the complete system of identities of one algebra through another, using signature identities.

**Keywords:** complete system of identities, signature identity, equational cluster.

## References

1. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 142–149. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149) [in Ukrainian].
2. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 42(1), 194–201. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201) [in Ukrainian].
3. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 43(2), 136–143. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).136-143](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143) [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(30), 79–86. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86) [in Ukrainian].
5. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(33), 109–113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113) [in Ukrainian].

Одержано 29.04.2024

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).155-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).155-167)**І. В. Поліщук<sup>1</sup>, Б. В. Дурняк<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
асистент кафедри програмного забезпечення систем,  
[inna.polishchuk@uzhnu.edu.ua](mailto:inna.polishchuk@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6395-4744>

<sup>2</sup> Української академії друкарства, Львів,  
ректор,  
доктор технічних наук, професор  
[durnyak@uad.lviv.ua](mailto:durnyak@uad.lviv.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1526-9005>

## МОДЕЛЬ ПІДТРИМКИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ЩОДО ДОЦІЛЬНОСТІ ФІНАНСУВАННЯ У РОЗВИТОК ТУРИСТИЧНОЇ ІНФРАСТРУКТУРИ

Проведено дослідження актуальної задачі розроблення моделі підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури, на основі прогнозованої оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності досліджуваних регіонів, думок експертів щодо рівня якості туристичних послуг та розвитку туризму, а також міркуваннях експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

В основу дослідження покладений сучасний математичний апарат, а саме теорія нечітких множин, регресійний аналіз, системний підхід, інтелектуальний аналіз знань та нейро-нечіткі мережі, що в сукупності дозволяють підвищити ступінь обґрунтованості остаточних управлінських рішень.

Цінність моделі є те, що вона з одного боку поєднує кількісні прогнозовані оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності досліджуваних регіонів, отримані за допомогою аналізу реальних даних, а з іншого, експертні висновки щодо рівня якості туристичних послуг та перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

На основі вихідної оцінки підвищується ступінь обґрунтованості прийняття управлінських рішень щодо доцільності фінансування інвесторами у розвиток туристичної інфраструктури, вибору найкращої комбінації регіонів, наприклад для мережевого бізнесу, або органам державної влади щодо підтримки окремих регіонів для зменшення розриву розвитку туризму.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо в розробленні програмного забезпечення у вигляді веб-платформи, на основі розробленої моделі підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури.

**Ключові слова:** гібридна модель, прийняття рішень, багатокритеріальне оцінювання, нечіткі множини, туристична інфраструктура, сталий розвиток регіонів.

**1. Вступ.** Розвиток туризму може внести суттєвий внесок у економіку. При правильному фінансуванні інфраструктури можна привертати більше туристів, що сприяє зростанню доходів для місцевого бізнесу і збільшує податкові надходження. Розвиток туристичної інфраструктури часто супроводжується створенням нових робочих місць у сфері готельного господарства, ресторанного бізнесу, транспортних послуг і т.д. Крім цього, інвестиції в туристичну інфраструктуру можуть покращити імідж регіону як туристичного напрямку, що привертає увагу туристів та інвесторів. Правильно спроектована інфраструктура може допомагати зберігати та охороняти природні та культурні ресурси

регіону. Покращення інфраструктури, яка задовольняє потреби туристів, часто також призводить до поліпшення якості життя місцевого населення через нові можливості та послуги.

У зв'язку з вище наведеним, представлено наукове дослідження, що спрямоване на підтримку прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури в регіонах, на прикладі Закарпатської, Львівської та Івано-Франківської областях. Математична модель базується на прогностичній аналітиці, поєднує кількісні дані з експертними висновками та використовує сучасний інструмент нейро-нечітких мереж. У дослідженні визначається кількісна оцінка рівня щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури регіонів, із застосуванням теорії нечітких множин, регресійного аналізу, системного підходу, інтелектуального аналізу знань та нейро-нечітких мереж. Дослідження було проведене на реальних експертних даних, що дало можливість налаштувати розроблену модель із застосування навчання нейро-нечіткої мережі.

Основною метою даного дослідження є розроблення моделі підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури, на основі прогнозованої оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності досліджуваних регіонів, думок експертів щодо рівня якості туристичних послуг та розвитку туризму, а також міркуваннях експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

**2. Огляд літератури.** В період отримання та обробки інтелектуальних знань, постає задача формалізації думок експертів, щодо певного об'єкту дослідження. Відсутні універсальні способи перетворення дослідних людських експертних знань у базу знань систем нечіткого виведення. Системи нечіткого виведення можуть використовувати людські експертні знання та виконувати нечітке виведення для отримання вихідної оцінки [1]. Також існує потреба в розробці методів навчання для отримання вихідної оцінки з необхідним рівнем точності [2]. Тому нейро-нечіткі мережі широко застосовуються в різних сферах та прикладних задачах [3]. Вони поєднують нейронні мережі для навчання процесів з експертними (суб'єктивними) міркуваннями для обробки нечіткої інформації. Крім того, механізм навчання нейронних мереж не покладається на людську експертизу, а через однорідну структуру нейронних мереж складно витягти структуровані знання [4].

У роботі [5] вказують на складність процесів прийняття рішень у сфері туризму через різні інституційні та географічні рамки, а також політику, що створює макросередовище туристичних систем. Це вимагає залучення експертних груп до розробки систем підтримки прийняття рішень, які б уможливили аналізувати асиметричні напрями соціально-економічного розвитку досліджуваних регіонів.

Також Резвані та ін. [6] звертають увагу на сильну неоднорідність проблем прийняття рішень у туристичній галузі та досліджують можливість усунення ризику в процесах прийняття рішень у сфері природного туризму. Автори тестують відповідні процеси прийняття рішень з урахуванням різних ступенів ризику, щоб допомогти менеджерам з оптимальними процесами розподілу ресурсів.

У роботі [7] наголошують на необхідності вивчення різних демографічних профілів туристів у підготовці платформи даних, необхідної для розробки систем прийняття рішень. Результати їхнього аналізу підтвердили значні відмінності між когортами поколінь у сферах використання інформаційних-комунікаційних технологій, а також у підходах до ризиків.

Стилос у роботі [8] звертає увагу на те, що технологічний прогрес сприяє розробці нових додатків, наприклад штучного інтелекту, але одночасно з цим розвитком також необхідно створити нові теоретичні основи, які б підтверджували роль когнітивних теорій. На думку авторів, їхня позиція зараз дуже слабка.

Критичний аналіз і синтез міждисциплінарної літератури також необхідні для підтримки розробки нових систем, методів і моделей, що використовуються в стратегічних процесах. Тому автори у роботі [9] досліджували стратегічні процеси в туристичному маркетингу та їх складність. На думку авторів, результати аналізу економічних наслідків подій також повинні бути впроваджені в процеси прийняття рішень. Це також висуває вимоги до конкретної бази даних і підтримує створення інноваційних методологій.

Багатокритеріальні процеси прийняття рішень представляють собою виклик для впровадження інноваційних методологій, розроблених на основі конкретних заходів, реалізованих у туристичних дестинаціях. Через це, у роботі [10] критикується обмеження результатів від використання багатокритеріальних методів прийняття рішень, якщо вони застосовуються традиційними процесами. Доведений факт, що стандартизовані показники важливі для порівняльного аналізу та створення рейтингів країн, регіонів, населених пунктів, напрямків, але в індивідуалізованих процесах прийняття рішень на основі специфіки регіонів та інвестиційних планів необхідно залучати якісні оцінки експертів. Вони володіють найбільшими знаннями та досвідом із галузевою специфікою, що виключає ризики на різних аналітичних рівнях.

Таким чином, наведене вище, аргументує та підтверджує актуальність розробки моделей підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури.

**3. Матеріали та методи.** Формально модель підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури, описується у вигляді теоретико-множинної моделі наступним чином:

$$\{R, C, M_1, M_2, M_3|f\}. \quad (1)$$

Де маємо:  $R = \{R_1; R_2; \dots; R_m\}$  — множина регіонів, по яких буде оцінюватись рівень доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури;  $C = \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$  — множина учасників туристичного руху, що оцінювали рівень внутрішньої та зовнішньої інфраструктури у місці призначення, що відвідали у відповідному регіоні;  $M_1$  — модель прогнозування рівня туристичного руху для регіоні;  $M_2$  — гібридна нечітка модель оцінювання рівня якості туризму в регіоні;  $M_3$  — прогнозна модель оцінювання рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури на основі нейро-мережевого підходу.

В результаті отримаємо вихідну оцінку  $f$  — кількісна оцінки рівня щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури. Отриманий

рівень містить зміст доцільності фінансування інвесторами у розвиток туристичної інфраструктури, вибору найкращої комбінації регіонів для мережевого бізнесу, або органам державної влади щодо підтримки окремих регіонів для зменшення розриву розвитку туризму.

Оскільки поставлена задача з області підтримки прийняття рішень та експертного оцінювання, тоді вводяться наступні суб'єкти управління: експерт — це особа, що має досвід, знання та компетенції у туристичній галузі, його сучасного стану та перспектив розвитку; системний аналітик — це особа, яка збирає вхідні дані та налаштовує процеси оцінювання на основі запропонованих моделей; ОПР — це особи (інвестори, органи державної влади, місцеве самоврядування), що приймають подальші рішення стосовно доцільності фінансування проектів для розвитку туристичної інфраструктури.

*Модель прогнозування рівня туристичного руху вибраного регіону —  $M_1$ .*

Нехай у деякому вибраному регіоні  $R$  наявна можливість експертно оцінити рівень туристичного руху відносно інфраструктури та доступності в різні періоди  $\varepsilon_p$  ( $p = 1, 2, \dots, l$ ). Таке оцінювання авторами вже було проведене у попередньому дослідженні [11], яке дозволяє отримати вхідні агреговані оцінки  $m_R \in [0; 1]$ . Такі оцінки обумовлюють рівень задоволеності подорожі відносно очікуваного та реального досвіду, ґрунтуючись на реальних даних експертів та лінгвістичних критеріях оцінювання рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності туристичного руху. Вхідні агреговані оцінки  $m_R \in [0; 1]$ , отримуються за допомогою нечіткої моделі оцінювання рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності в регіонах [11]. Не зменшуючи загальності, звісно, що можна застосувати й інші методи та моделі, які здатні оцінити рівень туризму в регіоні у різні періоди, а на виході отримуються нормовані оцінки  $[0; 1]$ .

Нехай наявні вхідні кількісні оцінки  $m_R(\varepsilon_1); m_R(\varepsilon_2); \dots; m_R(\varepsilon_l)$  рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності деякого регіону  $R$  для різних років  $\varepsilon_1; \varepsilon_2; \dots; \varepsilon_l$ . У зв'язку з цим, маємо можливість прослідкувати динаміку та спрогнозувати рівень туристичного руху на майбутні періоди  $\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_{l+2}, \dots$ .

Для цього пропонується парна лінійна регресія, що здатна спрогнозувати кількісну оцінку  $m_R$  рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності деякого регіону  $R$  для майбутніх періодів. Рівняння парної лінійної регресії для даної задачі буде мати наступний вигляд [12]:

$$Y(\varepsilon) = a + b\varepsilon, \quad (2)$$

Значення коефіцієнтів  $a, b$  пропонується обчислювати методом найменших квадратів:

$$b = \frac{l \cdot \sum_{u=1}^l \varepsilon_u \cdot m_R(\varepsilon_u) - \sum_{u=1}^l \varepsilon_u \cdot \sum_{u=1}^l m_R(\varepsilon_u)}{l \cdot \sum_{u=1}^l (\varepsilon_u)^2 - \left( \sum_{u=1}^l \varepsilon_u \right)^2}, \quad (3)$$

$$a = \frac{1}{l} \sum_{u=1}^l m_R(\varepsilon_u) - b \cdot \frac{1}{l} \sum_{u=1}^l \varepsilon_u. \quad (4)$$

Підставляючи значення майбутнього періоду  $\varepsilon_{l+1}$  у рівняння (2) отримується вихідна прогнозована оцінка  $(m_R)_P = Y(\varepsilon_{l+1}) \in [0; 1]$  рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності вибраного регіону  $R$ . На основі таких оцінок, можна прослідковувати динаміку та тренд рівня туристичного руху досліджуваного регіону. Маючи такі дані, ОПР може приймати проактивні рішення щодо підвищення якості туристичного руху.

Звісно дана модель не враховує різні непередбачувані ситуації та обмеження, наприклад пандемію COVID-19. Вона здатна оцінювати у безпечних умовах функціонування системи. Для оцінювання рівня керованості процесами у системі з врахуванням режимів функціонування можна використовувати інші нечіткі підходи.

*Гібридна нечітка модель оцінювання рівня якості туризму в регіоні —  $M_2$ .*

Пропонується гібридна нечітка модель, що базується на основі:

- 1) прогнозованого рівня  $(m_R)_P \in [0; 1]$  задоволеності подорожі відносно очікуваного та реального досвіду — рівень досвіду туристів;
- 2) міркувань експертів стосовно якості туризму у регіоні — рівень досвіду експертів.

На виході моделі отримується нормована кількісна оцінка рівня якості туризму вибраного регіону.

Формально модель представляється наступним чином. Нехай аналізується об'єкт із двома входами та одним виходом:

$$Y = X_R((m_R)_P, \Delta_R). \quad (5)$$

Де  $Y(X_R) = \Xi$  — вихідна нормована оцінка рівня якості туризму вибраного регіону; вхідні прогнозовані оцінки  $(m_R)_P$  рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності вибраного регіону з інтервалу  $[0; 1]$ ;  $R$  — регіон оцінювання рівня туристичного руху;  $\Delta_R$  — лінгвістичні міркування експертів стосовно якості туристичних послуг та розвитку туризму в оцінюваному регіоні;  $X_R$  — оператор, що ставить у відповідність вихідну змінну  $Y$ , при вхідних змінних  $((m_R)_P, \Delta_R)$  для відповідного регіону.

Нехай існують деякі експерти в галузі туризму, які висловлюють свої лінгвістичні міркування  $\Delta$  щодо якості туристичних послуг та розвитку туризму для відповідного регіону. Для уніфікованих відповідей пропонується наступна терм-множина лінгвістичних змінних  $\Delta = \{\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3; \Delta_4; \Delta_5\}$ , де:  $\Delta_1$  — «низький рівень якості туристичних послуг»;  $\Delta_2$  — «рівень якості туристичних послуг нижче середнього»;  $\Delta_3$  — «середній рівень якості туристичних послуг»;  $\Delta_4$  — «рівень якості туристичних послуг вище середнього»;  $\Delta_5$  — «високий рівень якості туристичних послуг».

Нехай терм-множина лінгвістичних змінних  $\Delta$  представлена на деякому числовому проміжку для розмежування термів  $[a_0; a_5] \in [0; 1]$ , де  $\Delta_1 \in [a_0; a_1]$ ,  $\Delta_2 \in [a_1; a_2]$ ,  $\Delta_3 \in [a_2; a_3]$ ,  $\Delta_4 \in [a_3; a_4]$ ,  $\Delta_5 \in [a_4; a_5]$ . Значення розбиття проміжків можуть налаштовуватись та змінюватись системними аналітиками за побажаннями ОПР.  $t_R$  — змінна з терм-множини  $\Delta$  для  $R_C$ -го регіону.

Далі обчислюється рівень якості туризму вибраного регіону на основі прогнозованої кількісної оцінки рівня, відносно інфраструктури та доступності, а також лінгвістичного рівня якості туристичних послуг та розвитку туризму в

регіоні, за допомогою наступної характеристичної функції:

$$\Xi_R = \begin{cases} a_1 \cdot (m_R)_P, & \text{якщо } t_R \in \Delta_1; \\ a_2 \cdot (m_R)_P, & \text{якщо } t_R \in \Delta_2; \\ a_3 \cdot (m_R)_P, & \text{якщо } t_R \in \Delta_3; \\ a_4 \cdot (m_R)_P, & \text{якщо } t_R \in \Delta_4; \\ a_5 \cdot (m_R)_P, & \text{якщо } t_R \in \Delta_5. \end{cases} \quad (6)$$

Таким чином, отримано вихідну кількісну оцінку  $\Xi_R \in [0; 1]$  рівня якості туризму деякого регіону  $R$ . Рівень якості у даному трактуванні розглядається відносно прогнозної аналітики рівня інфраструктури та доступності. Оцінка характеризується тим, що чим більше значення, тим краща інфраструктура, зовнішня та внутрішня доступність, з погляду учасників туристичного руху, а рівень якості туристичних послуг та розвитку туризму в регіоні — високий. На основі кількісної оцінки рівня якості туризму, можна аналізувати ситуацію у туристичній інфраструктурі, в розрізі регіонів, для прийняття рішень щодо доцільності покращення доступності, внутрішньої та зовнішньої інфраструктури з метою підвищення туристичного руху регіонів.

*Прогнозна модель оцінювання рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури на основі нейро-мережевого підходу —  $M_3$ .*

Розроблено прогнозну модель оцінювання рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури на основі нейро-мережевого підходу, яка з одного боку використовує кількісну оцінку рівня якості туризму деякого регіону, отриману на основі прогнозної аналітики, а з іншого боку використовує досвід, знання та компетенції експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні. Дане дослідження стосується процесу моделювання досвіду, знань та компетенції експертів для отримання кількісної оцінки рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури на основі нейро-нечітких мереж.

Нехай маємо  $m$  регіонів дослідження  $R = \{R_1; R_2; \dots; R_m\}$ . Також наявні, кількісні нормовані оцінки рівня якості туризму в розрізі по регіонах  $\Xi_R = (\Xi_{R_1}, \Xi_{R_2}, \dots, \Xi_{R_m})$ .

Також використовуються міркування експертів, що аналізують політику деякого регіону стосовно можливості швидкого потенційного росту туристичного руху. Для цього, експерт (група експертів) аналізує ситуацію, на основі власного досвіду, знань та компетенції щодо туризму в регіоні, роблячи висновки та ставить одну лінгвістичну оцінку по кожному регіону  $R$  щодо перспектив швидкого зростання туристичного руху, з терм-множини  $L = \{l_1; l_2; l_3; l_4; l_5\}$ .

Таким чином, для оцінювання рівня щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури, маємо наступні вхідні дані:  $I_1(\Xi_{R_1}; L(R_1))$ ,  $I_2(\Xi_{R_2}; L(R_2))$ ,  $\dots$ ,  $I_m(\Xi_{R_m}; L(R_m))$ . На основі представлених вхідних даних, необхідно вивести вихідну агреговану оцінку  $f$ , де  $f \in [0; 1]$ . Аналізуючи значення  $f$ , приймається остаточне рішення щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури для досліджуваних регіонів  $R$ .

Для розв'язку сформульованої задачі скористаємось моделлю п'ятишарової нейро-нечіткої мережі типу Takagi-Sugeno-Kang [13]. Далі покроково представляється прогнозна модель оцінювання рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури.

*1-й-крок*

На першому кроці виконується операція фазифікація, яка кожному вхідному значенню  $I_g(\Xi_{R_g}; L(R_g))$ ,  $g = \overline{1, m}$  ставить у відповідність значення функції належності. Для цього пропонується наступний підхід. Розглядається термножи́на лінгвістичних змінних  $L = \{l_1; l_2; l_3; l_4; l_5\}$  у вигляді трикутних функцій належності на числовому проміжку  $[0; 1]$ . Де:

$l_1$  = “низькі перспективи швидкого зростання туристичного руху в регіоні”;

$l_2$  = “перспективи швидкого зростання туристичного руху в регіоні нижче середнього”;

$l_3$  = “середні перспективи швидкого зростання туристичного руху в регіоні”;

$l_4$  = “перспективи швидкого зростання туристичного руху в регіоні вище середнього”;

$l_5$  = “високі перспективи швидкого зростання туристичного руху в регіоні”.

Шляхом експериментальних досліджень на реальних даних Закарпатської, Львівської та Івано-Франківської областей отримано розбиття лінгвістичних змінних на числовому проміжку  $[0; 1]$ :  $l_1 \in [0; 0,2]$ ,  $l_2 \in [0,1; 0,4]$ ,  $l_3 \in [0,2; 0,6]$ ,  $l_4 \in [0,4; 0,8]$ ,  $l_5 \in [0,6; 1]$ .

Далі вводиться змінна  $\vartheta_g$ , що дозволяє коригувати оцінку відносно впевненості експерта щодо присвоєння ним оцінки:

$$\vartheta_g = I_g(\Xi_{R_g}; L(R_g)) = \begin{cases} 0,1 \cdot \Xi_{R_g} & \text{якщо } R_g \in l_1; \\ 0,2 \cdot \Xi_{R_g} & \text{якщо } R_g \in l_2; \\ 0,4 \cdot \Xi_{R_g} & \text{якщо } R_g \in l_3; \\ 0,6 \cdot \Xi_{R_g} & \text{якщо } R_g \in l_4; \\ 0,8 \cdot \Xi_{R_g} & \text{якщо } R_g \in l_5. \end{cases}, \quad g = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Для фазифікація даних обчислюються значення функцій належності наступним чином [13]:

$$\mu_g^{l_1} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \vartheta_g \leq 0, \\ 10\vartheta_g, & \text{якщо } 0 < \vartheta_g \leq 0,1, \\ 2 - 10\vartheta_g, & \text{якщо } 0,1 < \vartheta_g < 0,2, \\ 0, & \text{якщо } \vartheta_g \geq 0,2. \end{cases}; \quad (8)$$

$$\mu_g^{l_2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \vartheta_g \leq 0,1, \\ 10\vartheta_g - 1, & \text{якщо } 0,1 < \vartheta_g \leq 0,2, \\ 2 - 5\vartheta_g, & \text{якщо } 0,2 < \vartheta_g < 0,4, \\ 0, & \text{якщо } \vartheta_g \geq 0,4. \end{cases}; \quad (9)$$

$$\mu_g^{l_3} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \vartheta_g \leq 0,2, \\ 5\vartheta_g - 1, & \text{якщо } 0,2 < \vartheta_g \leq 0,4, \\ 3 - 5\vartheta_g, & \text{якщо } 0,4 < \vartheta_g < 0,6, \\ 0, & \text{якщо } \vartheta_g \geq 0,6. \end{cases}; \quad (10)$$

$$\mu_g^{l_4} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \vartheta_g \leq 0,4, \\ 5\vartheta_g - 2, & \text{якщо } 0,4 < \vartheta_g \leq 0,6, \\ 4 - 5\vartheta_g, & \text{якщо } 0,6 < \vartheta_g < 0,8, \\ 0, & \text{якщо } \vartheta_g \geq 0,8. \end{cases}; \quad (11)$$

$$\mu_g^{l_5} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \vartheta_g \leq 0,6, \\ 5\vartheta_g - 3, & \text{якщо } 0,6 < \vartheta_g \leq 0,8, \\ 5 - 5\vartheta_g, & \text{якщо } 0,8 < \vartheta_g < 1, \\ 0, & \text{якщо } \vartheta_g \geq 1. \end{cases} \quad (12)$$

В результаті процесу фазифікації отримуються наступні функції:

$$\mu_g^1 = \begin{cases} \mu_g^{l_1}, & \text{якщо } R_g \in l_1; \\ \mu_g^{l_2}, & \text{якщо } R_g \in l_2; \\ \mu_g^{l_3}, & \text{якщо } R_g \in l_3; \\ \mu_g^{l_4}, & \text{якщо } R_g \in l_4; \\ \mu_g^{l_5}, & \text{якщо } R_g \in l_5. \\ \mu_g^2 = \Xi_{Rg}. \end{cases} \quad (13)$$

Причому  $\mu_g^1 \neq 0$ ;  $\mu_g^2 \neq 0$ ,  $g = \overline{1, m}$ . В протилежному випадку подальші обчислення не мають змісту.

Таким чином, у нейронах першого шару розкривається суб'єктивність експертних думок, які стають нормовані та порівнювані.

#### 2-й-крок

На наступному кроці відбувається агрегація рівнів належності. Він складається з  $m$  мультиплікативних вузлів і формує радіально базисні активаційні функції [13]:

$$\begin{cases} \mu_1 = \prod_{g=1}^m \mu_g^1, \\ \mu_2 = \prod_{g=1}^m \mu_g^2. \end{cases} \quad (14)$$

Де  $\mu_1, \mu_2$  агреговані рівні належності на 2 шарі.

#### 3-й-крок

На третьому кроці відбувається навчання. Даний шар нейро-мережі складається із синаптичних ваг  $w_1, w_2$ . Ваги обчислюються в процесі навчання нейро-нечіткої мережі на реальних даних прикладної задачі. Іншими словами — це параметричний шар, в якому адаптації підлягають лінійні ваги.

У загальному випадку для глибокого навчання синаптичні ваги представляються у вигляді многочленів:

$$\begin{cases} w_1 = w_0^1 + \sum_{g=1}^m w_g^1 x_g, \\ w_2 = w_0^2 + \sum_{g=1}^m w_g^2 x_g. \end{cases} \quad (15)$$

Для проведеного дослідження було здійснено глибоке навчання на реальних даних [14], щоб визначити значення синаптичних ваг  $w_1, w_2$ . При цьому, згідно початкових умов експерт (група експертів) вважається компетентний, а його висновки близькі до істини. В якості експертів виступали автори статті. У результаті проведеного експерименту отримано наступні значення синаптичних ваг:

$$w_1 = \alpha; \quad w_2 = \alpha + 0,051. \quad (16)$$

Де

$$\alpha = \begin{cases} 0, & u_2 \leq 0; \\ u_2/0,226, & 0 < u_2 < 0,226; \\ 1, & u_2 > 0,226. \end{cases} \quad u_2 = \mu_1 + \mu_2.$$

В даному підході, говорити про адекватність навчання, а отже і отримання вихідної оцінки, можливо лише у випадку, коли згідно початкових умов експерти компетентні. В протилежному випадку, отримані ваги будуть свідчити про рівень компетентності експертної групи.

*4-й-крок*

Четвертий крок представляє собою шар нейро-мережі, що утворений двома модулями сумування і обчислює суми вихідних сигналів другого і третього шарів [13]:

$$\begin{cases} u_1 = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = w_1 \prod_{g=1}^m \mu_g^1 + w_2 \prod_{g=1}^m \mu_g^2, \\ u_2 = \mu_1 + \mu_2 = \prod_{g=1}^m \mu_g^1 + \prod_{g=1}^m \mu_g^2. \end{cases} \quad (17)$$

*5-й-крок*

Відбувається нормалізація, в результаті якої формується вихідний сигнал для виведення рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури:

$$f = \frac{u_1}{u_2}. \quad (18)$$

Таким чином, відбувається дефазифікація даних та отримується  $f \in [0; 1]$  — кількісна оцінка рівня щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури з використанням досвіду, знань та компетенцій експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні. Значення рівня можна характеризувати наступним чином. Якщо оцінка прямує до 1 — це означає, що тренд розвитку та якості туристичної інфраструктури регіону зростає, учасники туристичного руху задоволені послугами, туристичний потік з кожним роком буде збільшуватися, тому вкладені кошти у проекти розвитку туристичних об'єктів регіону швидко у майбутньому окупляться.

Розроблена модель підвищує точність та об'єктивність оцінювання, оскільки з одного боку використовує кількісні оцінки рівня якості туризму деякого регіону, а з іншого використовує досвід, знання та компетенції експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

**4. Результати дослідження.** Результати дослідження були верифіковані та апробовані на реальних даних, що збиралися з жовтня по грудень 2023 року, від 327 респондентів учасників туристичного руху в Закарпатській, Львівській та Івано-Франківській областях [14]. З метою відкритості даних, всі дані та обчислення, що стосуються даного дослідження представлені авторами у відкритому доступі [14]. Респонденти повинні були заповнити дослідницьку анкету, що була націлена на вивчення ставлення туристичного досвіду у різних вибраних сферах. Респонденти висловитися щодо вражень про відвідуванні регіони за період з 2020 до 2023 років. У загальному дослідницька анкета містила 320 питань, які були об'єднані у 16 груп. Хочемо зауважити, що отриманий набір даних відповідає всім вимогам формування статистичної вибірки даних,

причому респонденти відібралися у відповідності демографічним вимогам та охоплювали повну множину елементів досліджуваної проблематики.

Оцінювання здійснюється на основі всіх даних. У якості експерименту наводяться приклади оцінювання на фрагментах даних певних регіонів.

Нехай, для ілюстрації моделі прогнозування рівня туристичного руху вибраного регіону —  $M_1$ , наприклад, наводиться Закарпатська область. Тут, на основі реальних наборів даних було проведено дослідження та експертно оцінено доступність регіону та відповідно рівень туристичного руху в різні роки 2020 та раніше (45 експерти), 2021 (40 експертів), 2022 (34 експертів), 2023 (90 експерти).

Вхідні дані, що обумовлюють рівень задоволеності подорожі відносно очікуваного та реального досвіду учасниками туристичного руху, які позначаються оцінками  $m_R$  представлені у базі даних [14], у розрізі по різних роках.

Вхідні кількісні оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності Закарпатської області, наступні:  $m_R(2020) = 0,808$ ;  $m_R(2021) = 0,794$ ;  $m_R(2022) = 0,791$ ;  $m_R(2023) = 0,887$ .

Здійснимо прогнозну аналітику рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності застосовуючи парну лінійну регресію (2), а значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  обчислюються методом найменших квадратів (3) та (4):  $b = 0,022$ ,  $a = -43,65$ , тоді регресійне рівняння буде мати вигляд  $Y(\varepsilon) = -43,65 + 0,022\varepsilon$ .

Маючи рівняння лінійної регресії, перш за все перевіримо правильність прогнозу на наявних даних. Для цього в отримане рівняння підставимо рік 2023:  $Y(2023) = -43,65 + 0,022 \cdot 2023 = 0,856$ . Бачимо, що прогнозоване значення близьке до реального, з наближеною похибкою 3% ( $0,887 - 0,856 = 0,031$ ), тому рівняння може бути застосоване для прогнозування майбутніх періодів. Наприклад, для років 2024–2026 маємо наступні вихідні прогнозовані оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності Закарпатської області:  $m_R(2024) = 0,878$ ;  $m_R(2025) = 0,9$ ;  $m_R(2026) = 0,922$ .

Як видно з динаміки, можемо зробити висновок, що Закарпатська область має позитивну динаміку щодо інфраструктури, зовнішньої та внутрішньої доступності в пункті призначення, при цьому реальний позитивний досвід буде переважати очікуваний.

Продовжуючи експерименти, проілюструємо обчислення за допомогою розробленої гібридної нечіткої моделі оцінювання рівня якості туризму в регіоні —  $M_2$ .

Наприклад, вибрано наступні райони: Берегівський (Закарпатська область); Калуський (Івано-Франківська область); Львівський (Львівська область); Рахівський (Закарпатська область); Хустський (Закарпатська область). Прогнозований рівень задоволеності подорожі відносно очікуваного та реального досвіду на 2024 рік.

Нехай системний аналітик терм-множину лінгвістичних змінних  $\Delta$  інтерпретує на числовому проміжку  $[0; 1]$ , де  $\Delta_1 \in [0; 0,2]$ ,  $\Delta_2 \in [0,2; 0,4]$ ,  $\Delta_3 \in [0,4; 0,6]$ ,  $\Delta_4 \in [0,6; 0,8]$ ,  $\Delta_5 \in [0,8; 1]$ . Далі аналітики висловили свої лінгвістичні міркування  $\Delta$  щодо якості туристичних послуг та розвитку туризму для відповідного регіону. Здійснюється мультиплікація для отримання оцінок рівня якості туризму регіону за допомогою характеристичної функції (6). Вхідні дані та ре-

зультати обчислень представлені у табл. 1.

Таблиця 1.

Вхідні дані по вибраним регіонам

| Райони       | Прогнозні оцінки | Міркування аналітиків | Вихідна кількісна оцінка |
|--------------|------------------|-----------------------|--------------------------|
| Берегівський | 0,823            | $\Delta_3$            | 0,494                    |
| Калуський    | 0,78             | $\Delta_4$            | 0,624                    |
| Львівський   | 0,925            | $\Delta_5$            | 0,925                    |
| Рахівський   | 0,829            | $\Delta_3$            | 0,497                    |
| Хустський    | 0,785            | $\Delta_4$            | 0,628                    |

**5. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі побудована модель підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури. Інноваційна модель підвищує ступень обґрунтованості прийняття управлінських рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури оцінюваних регіонів. Вона базується на прогнозованій оцінці рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності досліджуваних регіонів, думок експертів щодо рівня якості туристичних послуг та розвитку туризму, а також міркуваннях експертів стосовно перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

В основу дослідження покладений сучасний математичний апарат, а саме теорія нечітких множин, регресійний аналіз, системний підхід, інтелектуальний аналіз знань та нейро-нечіткі мережі, що в сукупності дозволяють підвищити ступінь обґрунтованості остаточних управлінських рішень. Цінність моделі є те, що вона з одного боку поєднує кількісні прогнозовані оцінки рівня туристичного руху відносно інфраструктури та доступності досліджуваних регіонів, отримані за допомогою аналізу реальних даних, а з іншого, експертні висновки щодо рівня якості туристичних послуг та перспектив швидкого зростання туристичного руху в регіоні.

На основі вихідної оцінки підвищується ступінь обґрунтованості прийняття управлінських рішень щодо доцільності фінансування інвесторами у розвиток туристичної інфраструктури, вибору найкращої комбінації регіонів, наприклад для мережевого бізнесу, або органам державної влади щодо підтримки окремих регіонів для зменшення розриву розвитку туризму.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо в розробленні програмного забезпечення у вигляді веб-платформи, на основі розробленої моделі підтримки прийняття рішень щодо доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури. Таке програмне забезпечення буде корисним інструментом для: підтримки прийняття рішень щодо фінансування у розвиток туристичної інфраструктури; органів державної влади з метою підтримки окремих регіонів для зменшення розриву розвитку туризму; вибору найкращої комбінації регіонів, для відкриття мережевого бізнесу та інше.

#### Список використаної літератури

1. Wenshun Lv., Park Ju H., Junwei Lu, Runan Guo. Adaptive fuzzy output feedback control for

- a class of uncertain nonlinear systems in the presence of sensor attacks. *Journal of the Franklin Institute*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.10.047>.
2. Chandrika K. Intelligent sampling for surrogate modeling, hyperparameter optimization, and data analysis. *Machine Learning with Applications*. 2022. Vol. 9. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mlwa.2022.100373>
  3. Paulo Vitor de Campos Souza. Fuzzy neural networks and neuro-fuzzy networks: A review the main techniques and applications used in the literature. *Applied Soft Computing*. 2020. Vol. 92. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106275>
  4. Zhang R., Tao J. A nonlinear fuzzy neural network modeling approach using an improved genetic algorithm. *IEEE Trans. Ind. Electron.* 2018. Vol. 65, No. 7. P. 5882–5892.
  5. Stoffelen A., Vanneste D. Tourism and cross-border regional development: insights in European contexts. *European Planning Studies*. 2017. Vol. 25, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1080/09654313.2017.1291585>
  6. Rezvani M., Nickravesh F., Astaneh A. D., Kazemi N. A risk-based decision-making approach for identifying natural-based tourism potential areas. *Journal of Outdoor Recreation and Tourism*. 2022. Vol. 37. P. 1013–1033. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jort.2021.100485>
  7. Reisenwitz T. H., Fowler J. G. Information Sources and the Tourism Decision-making Process: An Examination of Generation X and Generation Y Consumers. *Global Business Review*. 2019. Vol. 20, No. 6. P. 1372–1392. DOI: <https://doi.org/10.1177/0972150919848938>
  8. Stylos N. Technological evolution and tourist decision-making: a perspective article. *Tourism Review*. 2020. Vol. 75, No. 1. P. 273–278. DOI: <https://doi.org/10.1108/TR-05-2019-0167>
  9. Della Lucia M. Economic performance measurement systems for event planning and investment decision making. *Tourism Management*. 2013. Vol. 34. P. 91–100. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tourman.2012.03.016>
  10. Ilban M. O., Yildirim H. H. Determination of tourism activities of the world's best tourism destinations using the multi-criteria decision-making method. *Cogent Social Sciences*. 2017. Vol. 3, No. 1. DOI: <https://doi.org/10.35666/25662880.2015.1.521>
  11. Поліщук І. В., Поліщук В. В., Повханич В. І. Нечітка модель оцінювання рівня туристичного руху щодо інфраструктури та доступності. *Наукові записки. Технічні науки*. 2023. Т. 66, № 1. С. 104–116. DOI: <https://doi.org/10.32403/1998-6912-2023-1-66-104-116>
  12. James G. MacKinnon. Fast cluster bootstrap methods for linear regression models. *Econometrics and Statistics*. 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.11.009>
  13. Маляр М. М., Поліщук А. В., Поліщук В. В., Шаркаді М. М. Нейро-нечітка модель багатокритеріального оцінювання. *Радіоелектроніка, інформатика, управління. Запоріжжя : ЗНТУ*, 2019. С. 83–91. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-8>
  14. Дані 327 респондентів для оцінювання рівня доцільності фінансування у розвиток туристичної інфраструктури. URL: [https://docs.google.com/spreadsheets/d/13ag2i1OccJOGS3\\_MF6RqDSEWS-hyooEP/edit?usp=sharing&ouid=110688046638619396256&rtfpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/13ag2i1OccJOGS3_MF6RqDSEWS-hyooEP/edit?usp=sharing&ouid=110688046638619396256&rtfpof=true&sd=true) (дата звернення: 02.02.2024).

**Polishchuk I. V., Durnyak B. V.** Mathematical model of decision-making support regarding the suitability of financing in the development of tourist infrastructure.

Research has been carried out on the actual task of developing a mathematical model to support decision-making regarding the feasibility of financing the development of tourist infrastructure, based on the predicted assessment of the level of tourist traffic concerning the infrastructure and accessibility of the studied regions, the opinions of experts regarding the level of quality of tourist services and the development of tourism, as well as the opinions of experts regarding the prospects of rapid growth of tourist traffic in the region. The research is based on a modern mathematical apparatus, namely the theory of fuzzy sets, regression analysis, systematic approach, intellectual analysis of knowledge, and neuro-fuzzy networks, increasing the validity of final management decisions. The value of the model is that, on the one hand, it combines quantitative estimates of the level of tourist traffic about the infrastructure and accessibility of the studied regions, obtained through

the analysis of real data, and on the other hand, expert conclusions on the level of quality of tourist services and the prospects for the rapid growth of tourist traffic in the region.

Based on the initial assessment, the degree of reasonableness of management decision-making regarding the practicality of financing by investors in the development of tourism infrastructure, the choice of the best combination of regions, for example for network business, or the support of individual regions to reduce the gap in tourism development is increased. Further research of the problem can be seen in the developed software in the form of a web platform, based on the developed decision support model regarding the feasibility of financing the development of tourist infrastructure.

**Keywords:** hybrid model, decision-making, multi-criteria evaluation, fuzzy sets, tourist infrastructure, sustainable development of regions.

## References

1. Wenshun, Lv., Park, Ju H., Junwei, Lu, & Guo, R. (2022). Adaptive fuzzy output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems in the presence of sensor attacks. *Journal of the Franklin Institute*. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.10.047>
2. Chandrika, K. (2022). Intelligent sampling for surrogate modeling, hyperparameter optimization, and data analysis. *Machine Learning with Applications*, 9. <https://doi.org/10.1016/j.mlwa.2022.100373>
3. Paulo Vitor de Campos Souza. (2020). Fuzzy neural networks and neuro-fuzzy networks: A review the main techniques and applications used in the literature. *Applied Soft Computing*, 92. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106275>
4. Zhang, R., & Tao, J. (2018). A nonlinear fuzzy neural network modeling approach using an improved genetic algorithm. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 65(7). 5882–5892.
5. Stoffelen, A., & Vanneste, D. (2017). Tourism and cross-border regional development: insights in European contexts. *European Planning Studies*, 25(6). <https://doi.org/10.1080/09654313.2017.1291585>
6. Rezvani, M., Nickravesh, F., Astaneh, A. D., & Kazemi, N. (2022). A risk-based decision-making approach for identifying natural-based tourism potential areas. *Journal of Outdoor Recreation and Tourism*, 37, 1013–1033. <https://doi.org/10.1016/j.jort.2021.100485>
7. Reisenwitz, T. H., & Fowler, J. G. (2019). Information Sources and the Tourism Decision-making Process: An Examination of Generation X and Generation Y Consumers. *Global Business Review*, 20(6), 1372–1392. <https://doi.org/10.1177/0972150919848938>
8. Stylos, N. (2020). Technological evolution and tourist decision-making: a perspective article. *Tourism Review*, 75(1), 273–278. <https://doi.org/10.1108/TR-05-2019-0167>
9. Della Lucia, M. (2013). Economic performance measurement systems for event planning and investment decision making. *Tourism Management*, 34, 91–100. <https://doi.org/10.1016/j.tourman.2012.03.016>
10. Ilban M. O., & Yildirim, H. H. (2017). Determination of tourism activities of the world's best tourism destinations using the multi-criteria decision-making method. *Cogent Social Sciences*, 3(1). <https://doi.org/10.35666/25662880.2015.1.521>
11. Polishchuk, I. V., Polishchuk, V. V., & Povkhanych, V. I. (2023). A fuzzy model for assessing the level of tourist traffic in relation to infrastructure and accessibility. *Scientific papers. Technical sciences*, 66(1), 104–116. <https://doi.org/10.32403/1998-6912-2023-1-66-104-116>
12. James, G. MacKinnon. (2021). Fast cluster bootstrap methods for linear regression models. *Econometrics and Statistics*, <https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2021.11.009>
13. Malyar, M. M., Polishchuk, A. V., Polishchuk, V. V., & Sharkadi, M. M. (2019). Neuro-fuzzy multicriteria assessment model. *Radio electronics, informatics, management*. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2019-4-8>
14. Data from 327 respondents for assessing the level of feasibility of financing the development of tourist infrastructure. Retrieved from [https://docs.google.com/spreadsheets/d/13ag2i1OccJOGS3\\_MF6RqDSEWS-hyooEP/edit?usp=sharing&oid=110688046638619396256&rtpof=true&sd=true](https://docs.google.com/spreadsheets/d/13ag2i1OccJOGS3_MF6RqDSEWS-hyooEP/edit?usp=sharing&oid=110688046638619396256&rtpof=true&sd=true)

Одержано 02.02.2024

УДК 519.71: 517.97

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174)**Д. І. Симонов<sup>1</sup>, Б. Ю. Зайка<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,  
молодший науковий співробітник,  
доктор філософії  
[denys.symonov@gmail.com](mailto:denys.symonov@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6648-4736>

<sup>2</sup> Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,  
[zaikabohdan5@gmail.com](mailto:zaikabohdan5@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9567-8361>

## МОДЕЛЮВАННЯ УПРАВЛІННЯ СКЛАДНИМИ ІНФОРМАЦІЙНИМИ БАГАТОКОМПОНЕНТНИМИ СИСТЕМАМИ

Поняття складності має різноманітні аспекти, включаючи математичні моделі, невизначеність та синергетичні ефекти. Визначення критеріїв складності детермінованих систем залишається проблемою через її багатозначність. У цій статті розглядається моделювання лінійних та дисипативних динамічних систем. Лінійні системи описуються матрицями та функціями, що визначають залежності між станом, «входом» та «виходом» системи. Дослідження дисипативних систем важливе для уточнення моделей складних систем, оскільки враховує явища дисипації енергії. Аналіз типів атракторів дисипативних систем та їх властивостей допомагає розуміти поведінку системи в різних умовах. Врахування впливу початкових умов та реакції системи на випадкові величини є ключовим аспектом для ефективного управління складними системами.

**Ключові слова:** моделі, багатокомпонентні системи, динамічні системи, дисипативні динамічні системи, атрактори, хаос, рівновага системи.

**1. Вступ.** Огляд сучасних джерел [1–4] свідчить, що при формулюванні поняття «складна система» автори роблять акцент на двох ключових аспектах: структурі та поведінці системи. Загалом, уявлення більшості авторів зводиться до того, що складна система відрізняється унікальною структурою та непередаваною поведінкою. Така система складається з множини взаємопов'язаних елементів і є складною для опису, розуміння та управління.

Незважаючи на широке використання терміну "складні системи на сьогоднішній день відсутні чіткі критерії для оцінки та порівняння детермінованих систем за складністю. Це зумовлено тим, що саме поняття складності є багатозначним і може бути розглянуте як атрибут, так і сутнісне поняття. Приклади складності можуть включати: складність обчислень, топологічну складність графа, технологічну складність інтерфейсу, складність управління рухомими об'єктами, апроксимацію рельєфу, алгоритмічну складність, складність генетичного коду, складність випадкових взаємодій, складність нелінійних процесів та інші.

**2. Проблема моделювання процесів багатокомпонентних систем.** Розуміння складних систем, які змінюються між різними станами та саморегулюються за допомогою потоків [5–6], дає можливість досліджувати динамічні системи з чіткою або не повністю визначеною поведінкою.

Основною ознакою складних багатокomпонентних систем є розвинена багаторівнева структура взаємодії підсистем та елементів усередині підсистем. На рисунку 1 зображено узагальнену структурну декомпозицію багатовимірних динамічних систем.

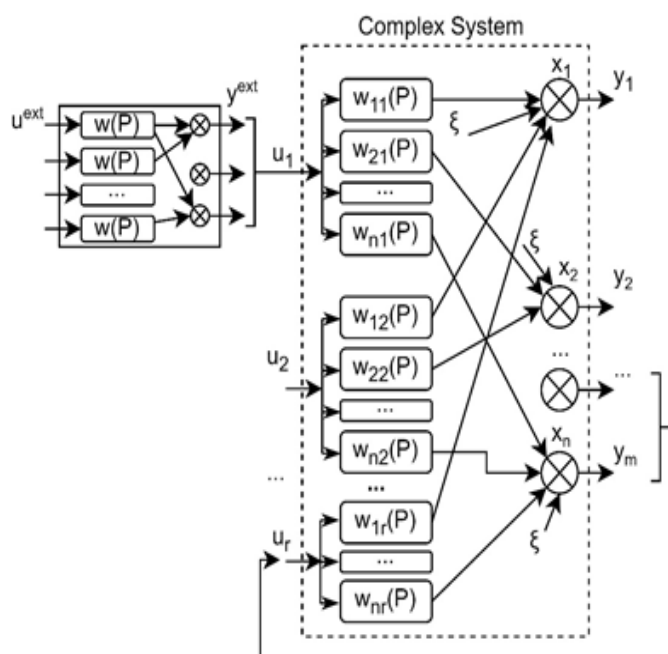


Рис. 1. Структурна декомпозиція багатовимірних динамічних систем.

Аналізуючи рисунок 1, можна зробити припущення, що складним багатокomпонентним системам властива наступна низка ознак:

- розвинена структура з псевдоієрархічним розподілом, де взаємодія відбувається не лише згори донизу, але й у зворотному напрямку, та вимагає впровадження адаптивних інтелектуальних систем управління з гнучкою структурою [7];
- множина описів можливих математичних моделей складних систем та необхідність використання методів і алгоритмів ранжування та вибору реалізації системної моделі;
- різноманітні форми невизначеності  $\xi$  [8], що призводять до непередбачуваних динамічних процесів та виникають в складних системах під впливом взаємодії підсистем;
- наявність синергетичного ефекту, що призводить до багатоваріантної поведінки підсистем та їх елементів.

Початкове моделювання процесів цільового управління складними інформаційними багатокomпонентними системами різного призначення зазвичай розпочинається з моделювання детермінованої динамічної системи з кількох причин:

- по-перше, детерміновані моделі дозволяють легше розуміти та аналізувати основні принципи функціонування системи, оскільки вони базуються на чітких математичних взаємозв'язках. Це допомагає ідентифікувати ключові фактори та взаємозв'язки між компонентами системи, що може бути корисним для подальшого розвитку більш складних моделей.

- по-друге, моделювання детермінованих динамічних систем сприяє створенню базової структури, яка може служити основою для подальшого вдосконалення та оптимізації моделей. Це особливо корисно в контексті складних інформаційних систем, де принципи функціонування може бути важко визначити через велику кількість компонентів та їхні взаємозв'язки.

Початкова детермінована модель дозволяє розширити розуміння системи та визначити ключові аспекти, які необхідно врахувати для досягнення поставленої мети управління. Такий початковий підхід створює основу для подальшого вдосконалення та адаптації моделі до реальних умов та вимог управління.

Припустимо, що ми розглядаємо лінійну динамічну систему, яка має дві важливі властивості:

- по-перше, вона повністю керована, що означає, що ми маємо повний контроль над усіма її входами та можемо маніпулювати ними за нашим бажанням;
- по-друге, ця система є повністю спостережуваною, що означає, що ми маємо доступ до інформації про всі її стани або виходи у будь-який момент часу.

Лінійна динамічна система (рисунк 1) буде мати вигляд (1)–(2), де  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — незмінні матриці, відповідно:

$$x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (1)$$

$$y(t) = C \cdot x(t), \quad (2)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор стану системи;  $u \in \mathbb{R}^r$  — вектор «входу»;  $y \in \mathbb{R}^m$  — вектор «виходу»;  $n \gg 1$ ,  $m \cdot r \geq n$ ; матриці  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  мають повний ранг.

Спектр матриці  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  буде мати значення (3):

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda_i \cdot I_n) = 0, i = \overline{1, n}\}, \quad (3)$$

де  $\mathbb{C}$  — простір комплексних чисел;  $I_n$  — одинична матриця розміру  $n \times n$ .

Рівняння зміни вхідного сигналу (вектор «входу»)  $u_i$  від часу  $t$  буде мати вигляд:

$$u_i(t) = F_i(t, (y_i(t - \Delta t), u_i(t - \Delta t))), \quad (4)$$

де  $F_i$  — функція, що визначає залежність «вхідного» сигналу від стану системи («виходу») на попередньому етапі та зовнішніх факторів.

Розгляд детермінованих динамічних систем важливий, але часто є недостатнім для повного моделювання складних багатокомпонентних систем. Це пояснюється тим, що багатокомпонентні системи можуть включати в себе велику кількість елементів, що взаємодіють між собою із складними структурами зв'язків та поведінки. Детерміновані моделі не завжди в змозі врахувати всі аспекти цієї взаємодії, що призводить до втрати точності та реалістичності результатів. Водночас дисипативні динамічні системи враховують явища дисипації енергії, які можуть бути критичними для правильного опису поведінки складних систем. Це важливо, оскільки дисипація може впливати на стійкість системи, зміну її режимів роботи та загалом динаміку системи відповідно до її фізичних властивостей. Таким чином, розгляд дисипативних динамічних систем є необхідним для отримання більш повного та реалістичного уявлення про складні багатокомпонентні системи.

Припустимо, що  $u(0) = u_0$  та  $B$  — матриця, що визначається гладкою функцією, то рішення (4) для часу  $t$  існує для будь-якого  $t$  у кожній точці фазового простору.

Знайдемо величину зміни «вхідного» сигналу:

$$\Delta\Psi = \prod_i \Delta u_i, t \rightarrow 0, \quad (5)$$

відповідно,

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta\Psi)}{dt} &= \frac{d(\Delta u_1)}{dt} \cdot \prod_{i>1} \Delta u_i + \frac{d(\Delta u_2)}{dt} \cdot \prod_{i>2} \Delta u_i + \dots = \\ &= \prod_i \Delta u_i \cdot \frac{d(\Delta u_1)}{dt} \cdot \frac{1}{\Delta u_1} + \prod_i \Delta u_i \cdot \frac{d(\Delta u_2)}{dt} \cdot \frac{1}{\Delta u_2} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Враховуючи (5) та (6), отримаємо:

$$\frac{d(\Delta\Psi)}{dt} = \Delta\Psi \cdot \sum_i \frac{1}{\Delta u_i} \cdot \frac{d(\Delta u_i)}{dt},$$

або

$$\Lambda \equiv \frac{1}{\Delta\Psi} \cdot \frac{d(\Delta\Psi)}{dt} = \sum_i \frac{1}{\Delta u_i} \cdot \frac{d(\Delta u_i)}{dt}. \quad (7)$$

Якщо  $\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial u_i(0)} \cdot u_i(0)$ , то  $\frac{d(\Delta u_i)}{dt} = \Delta u_i(0) \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial u_i(0)}$ , отже в момент часу  $t \rightarrow 0$  рівняння (7) буде мати вигляд:

$$\Lambda|_{t \rightarrow 0} = \sum_i \frac{\Delta u_i(0)}{\Delta u_i} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial u_i(0)}|_{t \rightarrow 0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial u_i} = \operatorname{div} F. \quad (8)$$

Вважаючи, що  $t \rightarrow \infty$ , то всі рішення дисипативних динамічних систем зосереджені в деякій підмножині рішень (атрактори), відповідно  $\operatorname{div} F = 0$ .

Атрактори дисипативних динамічних систем бувають трьох основних типів: стійка стаціонарна точка, стійкий граничний цикл та інваріантний тор. Для чіткої диференціації цих типів атракторів необхідні чіткі критерії, які також мають бути здатні розрізняти регулярний та хаотичний рух системи. Враховуючи, що хаотичність зумовлена нестійкістю фазових траєкторій, які розходяться з часом, то міра їх розбіжності слугує логічним критерієм для опису динамічної системи.

Припустимо, що в час  $t = 0$  існує дві фазові точки стану системи  $x_1(0)$  і  $x_2(0)$ , з яких починається еволюційний розвиток багатокomпонентної системи, яка суворо залежить від початкових умов ( $t > 0$ ). Якщо розвиток системи буде мати вплив малої випадкової величини  $\xi$ , то виникне розбіжність між станом точок  $x_1(t)$  і  $x_2(t)$ :

$$l(t) = |\xi(t)| = |x_1(t) - x_2(t)| > 0. \quad (9)$$

Вважаючи, що багатокomпонентні системи зазвичай функціонують в довготривалих періодах ( $t \rightarrow \infty$ ), то середня швидкість експоненційного розбігу

траєкторій, незважаючи на тип режиму функціонування системи (хаотичний або регулярний), буде мати вигляд:

$$h \approx \lim_{\substack{l(0) \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \ln \frac{l(t)}{l(0)}, \quad (10)$$

де  $h$  — ентропія Колмогорова-Сіная [9].

Відповідно, якщо:

- $l(t) \rightarrow 0$ ,  $h < 0$  — система має стійку стаціонарну точку;
- $l(t) \rightarrow 0$ ,  $h > 0$  — система має хаотичний характер поведінки.

Враховуючи (8), рівняння (1) для  $n$ -ітерацій буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x(t+2) &= A^2 \cdot x(t) + (1+A) \cdot B \cdot u(t), \\ x(t+3) &= A^3 \cdot x(t) + (A^2 + A + 1) \cdot B \cdot u(t), \\ &\dots, \\ x(t+n) &= A^n \cdot x(t) + B \cdot u(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^n A^{n-1}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Відповідно, рівняння (2) буде мати вигляд:

$$y(t+n) = C \cdot \left( A^n \cdot x(t) + B \cdot u(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^n A^{n-1}\right) \right). \quad (12)$$

Рівняння (11)–(12) забезпечують підґрунтя для подальшого аналізу нелінійної динамічної системи.

Як було зазначено, рівняння (10) передбачає самобалансування динамічної системи, тобто в процесі тривалого функціонування система повертається в стан рівноваги. Але, якщо для керування системою є критичною можливість виникнення хаотичної поведінки (суттєвого впливу випадкової величини  $\xi$ ), то рівняння (11) доцільно доповнити параметром коригуючого сигналу  $F_{contr}$ , який буде мати опосередкований вплив на «вхід» системи. Відповідно, рівняння (11) буде мати вигляд:

$$x(t+n) = A^n \cdot x(t) + B \cdot u(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^n A^{n-1}\right) + F_{contr},$$

або

$$x(t+n) = A^n \cdot x(t) + B \cdot u(t) \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^n A^{n-1}\right) + l(t) \cdot e^{\ln \frac{l(t)}{l(0)}}. \quad (13)$$

В процесі планування системи керування багатокомпонентних динамічних систем (складних систем) необхідно розуміти, що ці системи є залежними від початкового стану системи. Ці системи можуть мати декілька атракторів, кожен з яких матимуть власний центр тяжіння, і значення  $l(t)$  (відхилення від очікуваного стану рівноваги) буде залежати від в якій точці  $x_1(0)$  виявиться система.

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У статті досліджено поняття складних систем, зокрема їх структура та поведінка, як ключові аспекти. Розглянуто процес моделювання процесів багатокомпонентних систем. Розглянуто лінійну динамічну систему та її характеристики, зокрема спектр матриці та зміну вхідного сигналу. Детерміновані моделі не завжди враховують всі аспекти складних багатокомпонентних систем, тому важливо було розглянути дисипативні динамічні системи. Атрактори цих систем можуть бути різних типів, включаючи стійкі стаціонарні точки та хаотичні цикли. Запропонований підхід відіграє важливу роль у розвитку керування складними системами, враховуючи їхню залежність від початкових умов, і забезпечує основу для адаптації до реальних умов та вимог управління, розглядаючи як системи з повним керуванням, так і спостережувані системи.

### Список використаної літератури

1. Shan S., Zhang Z., Ji W., Wang H. Analysis of collaborative urban public crisis governance in complex system: A Multi-agent Stochastic Evolutionary Game Approach. *Sustainable Cities and Society*. 2023. Vol. 91. P. 104418. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.scs.2023.104418>
2. Jin M., Sun K., He S. A novel fractional-order hyperchaotic complex system and its synchronization. *Chinese Physics B*. 2023. Vol. 32. P. 060501. DOI: <https://doi.org/10.1088/1674-1056/acc0f6>
3. Huang Z., Sun Y., Wang W. Generalizing Graph ODE for Learning Complex System Dynamics across Environments. *29th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* : Proceedings from 2023. P. 798–809. DOI: <https://doi.org/10.1145/3580305.3599362>
4. Shritika Waykar E. A. Innovations in Computational Approaches for Nonlinear Problems and Complex System Simulations. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*. 2023. Vol. 31, No. 1. P. 34–51. DOI: <https://doi.org/10.52783/cana.v31.298>
5. Симонов Д. І. Алгоритм визначення оптимального потоку в ланцюгах постачання з урахуванням багатокритеріальних умов та стохастичності процесів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2021. № 2. С. 109–116. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.15>
6. Симонов Д. І. Аналіз потоку в мережі як метод оптимізації управління ланцюгом постачання. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2023. № 1. С. 5–14. DOI: <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.01>
7. Shi P., Yan B. A Survey on Intelligent Control for Multiagent Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2021. Vol. 51, No. 1. P. 161–175. DOI: <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3042823>
8. Симонов Д. І., Горбачук В. М. Метод пошуку рішень у динамічній моделі управління запасами за невизначеності. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки*. 2022. № 4. С. 31–39. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4>
9. Gutjahr T., Keller K. Ordinal Pattern Based Entropies and the Kolmogorov–Sinai Entropy: An Update. *Entropy*. 2020. Vol. 22, No. 1. P. 63. DOI: <https://doi.org/10.3390/e220100>

**Symonov D. I., Zaika B. Y.** Modeling the management of complex information multicomponent systems.

The concept of complexity has various aspects, including mathematical models, uncertainty and synergistic effects. Determining the criteria of complexity of deterministic systems remains a problem due to its multidimensionality. In this article, we consider the modeling of linear and dissipative dynamical systems. Linear systems are described by matrices and functions that define the dependencies between the state, "input" and "output" of the system. The study of dissipative systems is important for refining models of complex systems because it takes into account the phenomena of energy dissipation. The analysis of the types of attractors of dissipative systems and their properties helps to understand

the behavior of the system under different conditions. Taking into account the influence of initial conditions and the system's response to random variables is key to the effective management of complex systems.

**Keywords:** models, multicomponent systems, dynamical systems, dissipative dynamical systems, attractors, chaos, system equilibrium.

## References

1. Shan, S., Zhang, Z., Ji, W., & Wang, H. (2023). Analysis of collaborative urban public crisis governance in complex system: A Multi-agent Stochastic Evolutionary Game Approach. *Sustainable Cities and Society*, 91, 104418. <https://doi.org/10.1016/j.scs.2023.104418>
2. Jin, M., Sun, K., & He, S. (2023). A novel fractional-order hyperchaotic complex system and its synchronization. *Chinese Physics B*, 32, 060501. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/acc0f6>
3. Huang, Z., Sun, Y., & Wang, W. (2023). Generalizing Graph ODE for Learning Complex System Dynamics across Environments, *29th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data Mining: Proceedings from 2023*. <https://doi.org/10.1145/3580305.3599362>
4. Shritika Waykar, E. A. (2023). Innovations in Computational Approaches for Nonlinear Problems and Complex System Simulations. *Communications on Applied Nonlinear Analysis*, 31(1), 34–51. <https://doi.org/10.52783/cana.v31.298>
5. Symonov, D. I. (2021). Algorithm for determining the optimal flow in supply chains taking into account multi-criteria conditions and stochasticity of processes. *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series of physical and mathematical sciences*, (2), 109–116. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.15> [in Ukrainian].
6. Symonov, D. I. (2023). Network flow analysis as a method of optimizing supply chain management. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, (1), 5–14. <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2023.1.01> [in Ukrainian].
7. Shi, P., & Yan, B. (2021). A Survey on Intelligent Control for Multiagent Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(1), 161–175. DOI: <https://doi.org/10.1109/TSMC.2020.3042823>
8. Symonov, D. I., & Gorbachuk, V. M. (2022). A method of finding solutions in a dynamic model of inventory management under uncertainty. *Bulletin of Taras Shevchenko Kyiv National University. Series of physical and mathematical sciences*, (4), 31–39. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.4> [in Ukrainian].
9. Gutjahr, T., & Keller, K. (2020). Ordinal Pattern Based Entropies and the Kolmogorov–Sinai Entropy: An Update. *Entropy*, 22(1), 63. <https://doi.org/10.3390/e220100>

Одержано 15.04.2024

**М. М. Шаркаді<sup>1</sup>, А. Ф. Доровці<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,  
кандидат економічних наук, доцент  
[marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua](mailto:marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

<sup>2</sup> Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II,  
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
асистент кафедри математики та інформатики ЗУІ ім. Ференца Ракоці II,  
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики  
[adam.dorovtsi@uzhnu.edu.ua](mailto:adam.dorovtsi@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4038-4945>

## ВИКОРИСТАННЯ НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ У СОЦІОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У сучасному світі ми все частіше стикаємося з невизначеністю, як у реальному житті, так і в науці. Ці невизначеності також зустрічаються і в соціологічних дослідженнях. У статті розглянемо, як нечіткі моделі можуть бути застосовані у соціологічних дослідженнях. Запропоновано метод застосування нечіткої логіки на прикладі дослідження добробуту населення. Оскільки добробут населення є багатограним і складним явищем, ми спочатку побудуємо ієрархічну систему, щоб зробити його більш зрозумілим і легшим для моделювання. Таким чином, добробут населення можна поділити на три основні категорії: економічний, екологічний і соціальний. У даній роботі приділимо більше уваги дослідженню економічного добробуту, побудувавши його математичну модель за допомогою нечітких множин.

**Ключові слова:** соціологічні дослідження, нечіткі множини, добробут населення, моделювання, економічний добробут.

**1. Вступ.** Моделювання процесу дослідження соціального стану суб'єкта потребує системного підходу, тобто застосування системного аналізу для розглядуваних ситуацій, процесів, явищ, об'єктів тощо. Виходячи із принципів системного аналізу, процес визначення рівня добробуту має ієрархічну будову, тобто наявність множини елементів різних рівнів із відповідним підпорядкуванням. Основною закономірністю таких систем являється ієрархічна структура їх загального розташування на багатьох рівнях [1].

Однією із властивостей систем ієрархічної структури можна вважати: послідовне вертикальне розміщення підсистем (вертикальна декомпозиція); права впливу підсистем верхнього рівня або пріоритетне право; залежність підсистем верхнього рівня від підсистем нижнього рівня через їх функціональне виконання.

Зміст вертикального підпорядкування означає, що будь-яка ієрархія представлена сукупністю взаємодіючих підсистем. Під “системою” або “підсистемою” будемо розглядати блоки обробки вхідної інформації у вихідну.

Право впливу це коли на діяльність підсистеми будь-якого рівня безпосередньо і явно діють вищі рівні, частіше всього ближчий старший рівень. Ця дія носить обов'язковий характер для підсистем нижчого рівня, оскільки через неї виражається пріоритет дій і цілей більш високих рівнів.

Залежність підсистем верхнього рівня від підсистем нижнього рівня це існування оберненого зв'язок знизу вгору між елементами системи. Успіх роботи верхнього рівня залежить і від сумарного ефекту роботи підсистем нижнього рівня. Таким чином, інформація, що надсилається «вгору» — агрегується, а та, що надходить «вниз» — декомпозиється.

Найбільш типовою і простою структурою ієрархії є дворівнева, яка має лише один вище стоячий координуючий елемент і  $n$  підлеглих йому нижче стоячих елементів (рис. 1). Така структура дозволяє будувати будь-які багаторівневі ієрархії з дворівневими підсистемами, як із окремих модулів.

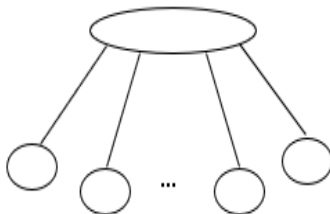


Рис. 1. Дворівнева ієрархічна структура.

**2. Аналіз досліджень і публікацій.** Про аналіз добробуту населення присвячена низка наукових праць, зокрема: Вдовин М. Л. зі співавторами [5–6], Палига Є. та Панчишин Т. у [7] здійснюють статистичну оцінку добробуту життя населення в Україні

**3. Постановка проблеми дослідження.** У роботі розглядається процес визначення рівня стану «добробут населення», тобто його оцінка.

Добробут населення — це багатогранне явище. Люди часто плутають економічний добробут з реальним добробутом населення, однак економічне благополуччя не дає повної картини реального добробуту населення. Як зазначено на сайті ОЕСР, «реальний добробут — це щось більше, ніж просто ВВП і статистичні дані» [2]. У роботі [3] розглянуто індикатори добробуту, сформульовані OECD Better Life Index, для України. В даній статті побудуємо ієрархічну структуру на основі наявних індикаторів, а також побудуємо математичну модель з використанням нечітких множин для оцінки цих індикаторів. Індикатори, сформульовані ОЕСР, є наступними: дохід, житло, робота, громада, освіта, навколишнє середовище, участь у суспільному житті, здоров'я, задоволеність життям, безпека.

Для того, щоб оцінити добробут населення, вищезазначені показники необхідно згрупувати, щоб зробити математичне моделювання більш прозорим і зрозумілим з використанням нечітких множин.

Пропонується наступне групування індикаторів:

1) Економічні індикатори

- а) Дохід
- б) Житло
- с) Робота

2) Соціальні індикатори

- a) Громада
- b) Освіта
- c) Участь у суспільному житті
- d) Здоров'я
- e) Задоволеність життям
- f) Безпека

3) Навколишнє середовище

**4. Результати досліджень.** На основі вищезгаданого групування будемо ієрархічну структуру, яка буде виглядати наступним чином (рис. 2.):

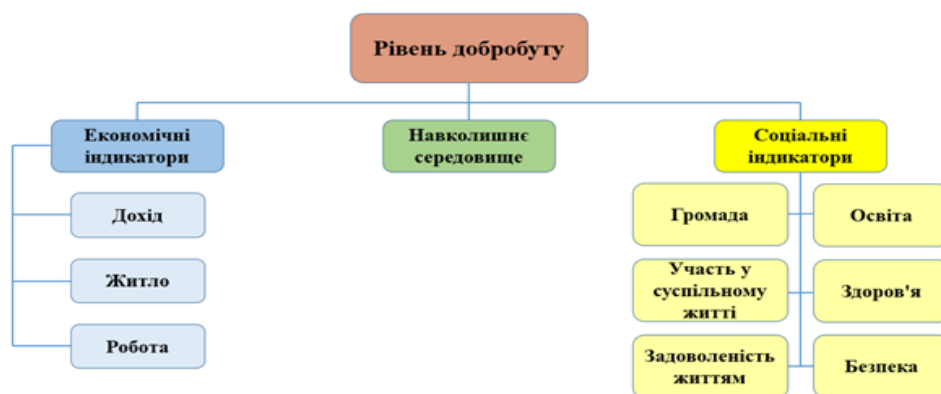


Рис. 2. Ієрархічна структура для оцінювання рівня добробуту. Побудовано авторами.

Після побудови ієрархічної структури запропоновано математичну модель для оцінки кожного індикатора і приведемо приклад побудови нечітких множин [4] для визначення рівня економічного добробуту, тобто будемо моделі для таких індикаторів як: дохід, житло, робота. У дослідженні використовується програмне забезпечення Matlab.

Індикатора «Дохід», наприклад, можна оцінити на основі наступних параметрів: чисте багатство на одну особу, чистий наявний дохід. Для даних параметрів побудуємо функції належності, наприклад, чистого наявного доходу можемо описати трьома функціями належності. Якщо чистий наявний дохід «низький» — тоді пропонуємо лінійну  $z$ -подібну функцію належності, яка описується наступною формулою:

$$f(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a; \\ \frac{b-x}{b-a}, & a < x < b; \\ 0, & b \leq x. \end{cases}$$

Якщо чистий наявний дохід «середній» — тоді пропонуємо трикутну фун-

кцію належності, яка описується наступною формулою:

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c; \\ 0, & c \leq x. \end{cases}$$

Якщо чистий наявний дохід «високий» — тоді пропонуємо лінійну s-подібну функцію належності, яка описується наступною формулою:

$$f(x, a, b) = \begin{cases} 1, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & b \leq x. \end{cases}$$

Такими ж функціями належності описується і чисте багатство на одну особу. На основі двох вхідних параметрів і 9 правил «Якщо — То» на виході отримуємо оцінку індикатора «Дохід». Fuzzy Inference System (в подальшому FIS-структура) має наступний вигляд (рис. 3):

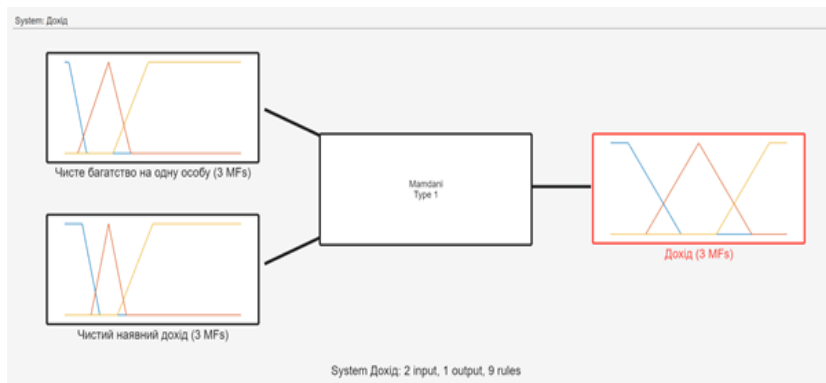


Рис. 3. FIS-структура для індикатора «Дохід».

Далі побудуємо FIS-структури для інших індикаторів. FIS-структури індикаторів «Житла» та «Робота» показані на рисунках 4 та 5 відповідно.

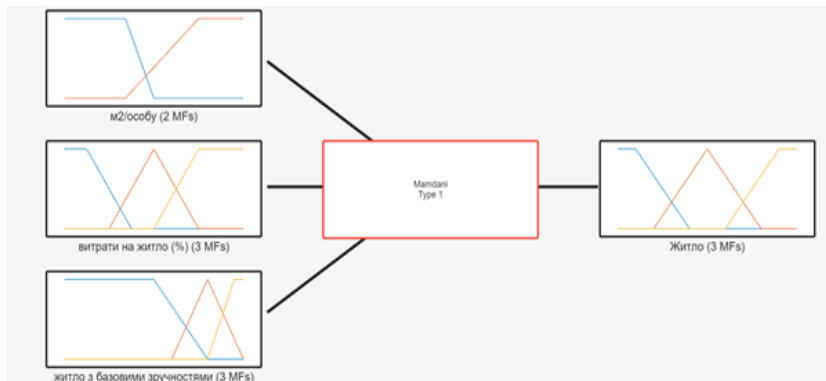


Рис. 4. FIS-структура для індикатора «Житло».

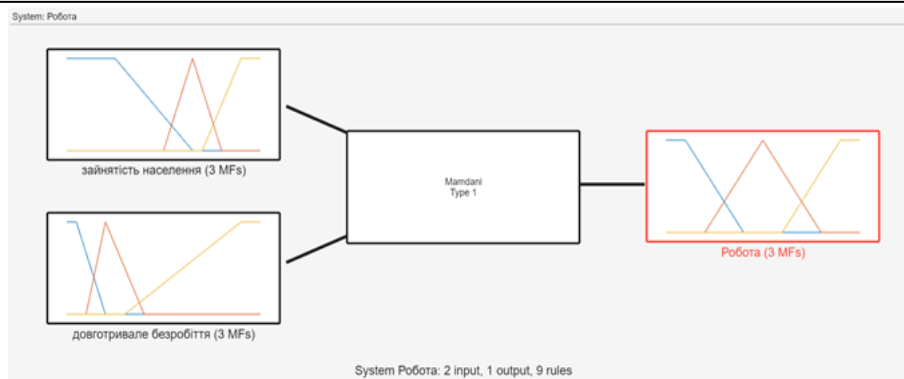


Рис. 5. FIS-структура для індикатора «Робота».

Для отримання рівня економічного добробуту нам потрібно з'єднати вищезгадані FIS-структури, тому з отриманих FIS-структур побудуємо FIS-дерево, який показано на рисунку 6.

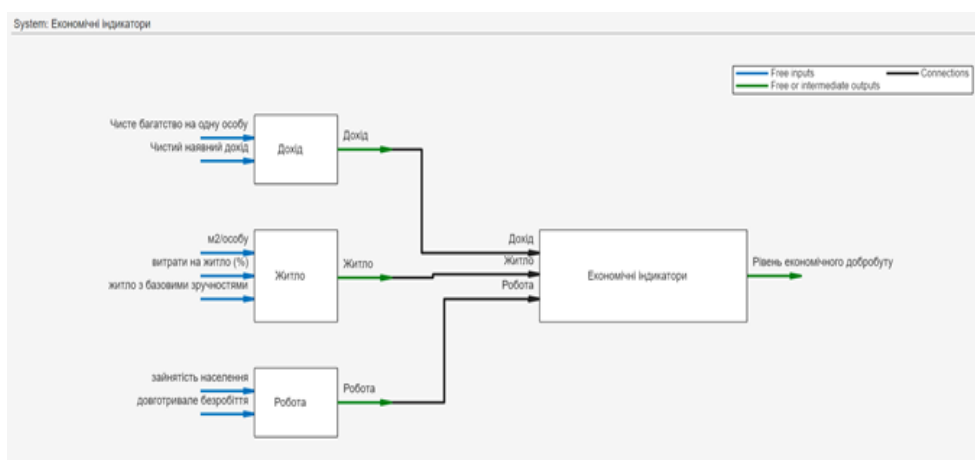


Рис. 6. FIS-дерево для економічних індикаторів.

**5. Висновки.** Проведене дослідження покращує наше розуміння складної системи оцінки стану соціологічних результатів. Нечітке моделювання, що використовується в дослідженнях, дозволяє точніше охопити притаманну складність цих процесів шляхом включення елементів невизначеності та неточності. Майбутні шляхи розвитку цього дослідження охоплюють впровадження різноманітних форм функцій належності та дослідження того, як їхні параметри впливають на ефективність нечітких моделей у представленні невизначеностей, притаманних експериментальним даним.

**6. Подяка.** Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету “Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних” (номер державної реєстрації 0121U109279).

#### Список використаної літератури

1. Hoffman L. R., Stein R. L. The Hierarchical Model of Problemsolving Groups. In "Small Group and Social Interaction: London, 1983. P. 173–192.
2. Офіційний сайт: Організація економічного співробітництва та розвитку [Електронний

- ресурс] Режим Доступу. URL: <https://www.oecdbetterlifeindex.org/#/50525555555> (дата звернення: 06.03.2024).
3. Маляр М. М., Доровці А. Ф., Половко І. І. Аналіз індикаторів впливу на рівень добробуту населення України. *Наукові перспективи*. 2024. Вип. 2, № 44. С. 784–796. DOI: [https://doi.org/10.52058/2708-7530-2024-2\(44\)-784-796](https://doi.org/10.52058/2708-7530-2024-2(44)-784-796)
  4. Zadeh L. A. Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* 100 Supplements. 1999. P. 9–34.
  5. Вдовин М. Л., Зомчак Л. М., Міщук Т. В. Аналітика сучасного стану добробуту населення України. *Економіка та суспільство*. 2022. 39. DOI: <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2022-39-77>  
[Електронний ресурс] Режим Доступу. URL: <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/1419/1366> (дата звернення: 09.03.2024).
  6. Вдовин М. Л., Міщук Т. В. Рейтингування регіонів України за показниками добробуту населення. *Серія «Економіка і менеджмент»*. 2022. Вип. 1, № 91. DOI: <https://doi.org/10.32782/bsnau.2022.1.1>  
[Електронний ресурс] Режим Доступу. URL: <https://snaujournal.com.ua/index.php/journal/article/view/251/162> (дата звернення: 09.03.2024).
  7. Палига Є. М., Панчишин Т. В. Рівень добробуту населення України у статистичному вимірі. *Наукові записки*. 2007. Вип. 2, № 12. [Електронний ресурс] Режим Доступу. URL: <https://nz.uad.lviv.ua/static/media/2-12/17.pdf> (дата звернення: 11.03.2024).

### Sharkadi M. M., Dorovtsi A. F. Fuzzy models' use in sociological researches.

In the modern world, we are increasingly faced with uncertainty, both in real life and in science. These uncertainties also occur in sociological researches. The article considers how fuzzy models can be applied in sociological research. We propose a method of applying fuzzy logic as an example of a study of the well-being of the population. Since human well-being is a multifaceted and complex subject, we first build a hierarchical system to make it more understandable and easier to model. Thus, human well-being can be divided into three main categories: economic, environmental and social. In this paper, we will pay more attention to the study of economic well-being by building its mathematical model using fuzzy sets.

**Keywords:** sociological research, fuzzy sets, population well-being, modelling, economic well-being.

### References

1. Hoffman, L. R., & Stein, R. L. (1983). *The Hierarchical Model of Problemsolving Groups*. In "Small Group and Social Interaction: London.
2. Official website: Organization for Economic Cooperation and Development. Retrieved from <https://www.oecdbetterlifeindex.org/#/50525555555>
3. Malyar, M. M., Dorovtsi, A. F., & Polovko, I. I. (2024). Analysis of indicators that affect the level of well-being of the population of Ukraine. *Naukovi perspektivi*, 2(44), 784–796. [https://doi.org/10.52058/2708-7530-2024-2\(44\)-784-796](https://doi.org/10.52058/2708-7530-2024-2(44)-784-796) [in Ukrainian].
4. Zadeh, L. A. (1999). *Fuzzy sets as a basis for theory of possibility*. *Fuzzy Sets and Systems* 100 Supplements.
5. Vdovin, M. L., Zomchak, L. M., & Mishhuk, T. V. (2022). Analysis of the current state of well-being of the population of Ukraine. *Economy and Society*, 39. <https://doi.org/10.32782/2524-0072/2022-39-77>  
Retrieved from <https://economyandsociety.in.ua/index.php/journal/article/view/1419/1366> [in Ukrainian].
6. Vdovin, M. L., & Mishhuk, T. V. (2022). Ranking of the regions of Ukraine according to indicators of population well-being. *Economics and Management Series*, 1(91). <https://doi.org/10.32782/bsnau.2022.1.1>  
Retrieved from <https://snaujournal.com.ua/index.php/journal/article/view/251/162> [in Ukrainian].

7. Paliga, Ye. M., & Panchishin, T. V. (2007). The level of well-being of the population of Ukraine in a statistical dimension. *Scientific notes*, 2(12). Retrieved from <https://nz.uad.lviv.ua/static/media/2-12/17.pdf> [in Ukrainian].

Одержано 30.04.2024

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.  
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за алфавітом) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).  
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

## Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

## References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

## INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.  
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

### References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

#### **Список використаної літератури**

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
  2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
  3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
  4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
  5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
  6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.
- 11) The manuscript should be carefully read.
- 12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

**Збірник наукових праць**

**НАУКОВИЙ ВІСНИК  
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

**серія**

**МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА**

*Том 44 №1*

**2024**

**РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),  
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний  
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,  
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,  
В. В. Маринець, К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса,  
В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,  
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,  
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського  
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: [visnyk-math@uzhnu.edu.ua](mailto:visnyk-math@uzhnu.edu.ua)