

НАУКОВИЙ ВІСНИК

Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 46 № 1

2025

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 46 № 1

Ужгород 2025

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2025. Т. 46, № 1. 318 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н., доц. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (США), Мулеса П. П. — д.пед.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., проф. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.ekon.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою радою ДВНЗ

"УжНУ"(протокол № 5 від 29 травня 2025 р.), Вченою радою ДВНЗ

"УжНУ"(протокол № 6 від 03 червня 2025 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2023 = 83.50.

Реєстрація суб'єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 2178 від 27.06.2024 року

Ідентифікатор медіа R30-04771

Засновник і видавець — ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2025

© Ужгородський національний університет,
2025

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 46 No 1

Uzhhorod 2025

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2025. Vol. 46, No 1. 318 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (USA), P. Mulesa, Dr. Sci. (Ped.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 5 of May 29, 2025) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 6 of June 03, 2025)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2023 = 83.50.

Registration of an entity in the field of print media: Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 2178 dated June 27, 2024 Media Identifier R30-04771

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. Бондаренко В. М., Орловська Ю. М., Стойка М. В. Про комбінаторні властивості частково впорядкованих множин надсуперкритичного ММ-типу (2,3,3)	9
2. Бондаренко Є. В. Проблема породження для оборотних автоматів Мілі . . .	13
3. Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про єдиність розв'язку задачі Діріхле у куті на площині для диференціального рівняння з неоднорідним операторним символом	18
4. Кравець А. Ю., Васирик О. І. Оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику	26
5. Курченко О. О., Синявська О. О., Шестаковська І. В. Узагальнення нерівності Фейєра для функцій двох змінних	35
6. Маловічко Т. В., Панченко Б. В. Властивості вінерового процесу зі змінним фазовим простором	44
7. Мельник І. О., Андрушко А. І. Напівмодуль диференціювань напівкільця . .	62
8. Порохнавець І. М., Шапочка І. В. Про описання деякого класу черніковських 3-груп, що є розширеннями повної абелевої 3-групи за допомогою циклічної групи порядку 27	72
9. Раєвська І. Ю. Про прямі добутки неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи локальних майже-кільць	79
10. Раєвська М. Ю. Про локальні майже-кільця з нільпотентною мультиплікативною групою	89
11. Рего В. Л., Варга Я. В. Побудова інтегровних комбінацій для нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами . .	93
12. Сливка-Тилищак Г. І., Маді М. В., Тилищак М. О. Побудова вибірки з множини міри нуль та її характеристики	104
13. Турчин Є. В. Узагальнення “G-піднесеної до ступеня” сім’ї розподілів із застосуваннями до розподілу Берра та розподілу Джонсона S_U	109
14. Хаць Р. В., Ярмошик В. П. Двочленна асимптотика цілих функцій з покращеним розподілом нулів на промені	119
15. Ярова О. А., Єлейко Я. І. Побудова ймовірнісного простору для випадкової еволюції	133

Розділ 2: Інформатика, комп’ютерні науки та прикладна математика

1. Богдюк М. О. Аналіз процесу завантаження комп’ютерних систем на базі архітектури x86-64 на предмет вразливостей та визначення механізмів його захисту	138
2. Бойко Н. Графові алгоритми кластеризації: виділення зв’язкових компонент та оптимізація методів групування	149
3. Васько О. Ю., Брила А. Ю. Адаптивна нормалізація CNNMVN	166
4. Ічанська Н. В., Лисенко М. В., Чурікова В. О. Математичне моделювання динаміки музейної активності	178
5. Кондрук Н. Е., Турпак О. В. Моделювання багатокритеріального вибору в задачі підбору персоналу методом аналізу ієрархій	188
6. Лубенець Д. Є. Оптимізація обчислень в алгоритмах мультиплексного розбиття континуальних множин	195

7. Кузка О. І., Корник І. В., Дуран В. М. Обслуговування запитів одним приладом	209
8. Лях І. М., Дудник В. В., Ціпіньо Ю. М., Ціпіньо А. Ю. Прогнозування залученості користувачів освітніх вебплатформ за допомогою алгоритмів машинного навчання	218
9. Маляр М. М., Кондрук Н. Е., Кондрук Є. Б., Нерода В. А. Розробка інтелектуальної системи прийняття рішень для діагностування діабету	226
10. Паничок О. С., Ящук Ю. О. Чисельне моделювання поширення сейсмічних хвиль у пористих середовищах з умовами ідеального контакту	234
11. Повідайчик М. М., Шаркаді М. М., Кацала Р. А., Годя Р. М., Янчій І. В. Розроблення оболонки інформаційної системи «Комп'ютерний тренажер з фінансової математики»	247
12. Половко І. І., Шаркаді М. М. Використання математичних моделей в екологічних дослідженнях	256
13. Самусь В. М., Самусь Є. І. Формалізація ознак ЕКГ-сигналів для побудови моделей машинного навчання	262
14. Симонов Д. І. Ідентифікація та контроль хаотичних процесів у складних технічних системах	273
15. Тарнавський П. В., Білецький В. М. Використання великих сторінок пам'яті для поліпшення роботи сучасних операційних систем	285
16. Циганок В. В., Хроленко Я. О. Метод послідовного аналізу варіантів із застосуванням спеціалізованих GPT-моделей для автоматизованої перевірки конкурсних наукових робіт	294
17. Капустян О. А., Касімова Н. В. Наближене оптимальне керування для нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреними неавтономними коефіцієнтами	305

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. Bondarenko V. M., Orlovskaja Yu. M., Stoika M. V. On combinatorial properties of the posets of oversupercritical MM -type (2,3,3).....	9
2. Bondarenko I. V. The generation problem for invertible Mealy automata.....	13
3. Kyrychenko V. V., Lesina E. V. On the solution uniqueness of the Dirichle problem in an angle on the plane for a differential equation with a non-homogeneous operator symbol.....	18
4. Kravets A. Yu., Vasylyk O. I. Estimation of ruin probability for binomially- φ -sub-Gaussian risk model.....	26
5. Kurchenko O. O., Syniavska O. O., Shestakovska I. V. Generalization of Feier's inequality for functions of two variables.....	35
6. Malovichko T. V., Panchenko B. V. Properties of the Wiener Process with a Variable Phase Space.....	44
7. Melnyk I. O., Andrushko A. I. Semimodule of semiring derivations.....	62
8. Porokhnavets I. M., Shapochka I. V. On the description of a certain class of Chernikov 3-groups, which are extensions of the complete Abelian 3-group by means of a cyclic group of order 27.....	72
9. Raievska I. Iu. On direct products of non-metacyclic Miller–Moreno p -groups and cyclic p -groups as additive groups of local nearrings.....	79
10. Raievska M. Iu. On local nearrings with nilpotent multiplicative group.....	89
11. Reho V. L., Varga I. V. Construction of integrable combinations for normal linear systems of differential equations with constant coefficients.....	93
12. Slyvka-Tylyshchak G. I., Madi M. V., Tylyshchak M. O. Construction of a sample from a set of measure zero and its characteristics.....	104
13. Turchyn I. V. A generalization of the exponentiated G distribution family with applications to the Burr distribution and the Johnson S_U distribution.....	109
14. Khats' R. V., Yarmoshyk V. P. A two-term asymptotics of entire functions with improved distribution of zeros on a ray.....	119
15. Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Construction of a Probability Space for Random Evolution.....	133

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. Bogdiuk M. O. Analysis of the Boot Process of Computer Systems Based on the x86-64 Architecture for Vulnerabilities and Identification of Measures to Protect Against Them.....	138
2. Boyko N. Graph-Based Clustering Algorithms: Connected Component Detection and Optimization of Grouping Methods.....	149
3. Vasko A. Y., Bryla A. Y. Adaptive learning rate for CNNMVN.....	166
4. Ichanska N. V., Lysenko M. V., Churikova V. O. Mathematical Modeling of Museum Activity Dynamics.....	178
5. Kondruk N. E., Tyrpak O. V. Modeling Multi-Criteria Selection In Personnel Recruitment Using The Analytic Hierarchy Process.....	188
6. Lubenets D. Y. Optimization of computations in multiplex partitioning algorithms for continuous sets.....	195
7. Kuzka O. I., Kornyk I. V., Duran V. M. Service requests with one device.....	209

8. <i>Liakh I. M., Dudnyk V. V., Tsipino Y. M., Tsipino A. Y.</i> Forecasting user engagement in educational web platforms using machine learning algorithms.....	218
9. <i>Malyar M. M., Kondruk N. E., Kondruk E. B., Neroda V. A.</i> Development of an Intelligent Decision Support System for Diabetes Diagnosis.....	226
10. <i>Panychok O. S., Yashchuk Yu. O.</i> Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Porous Media with Ideal Contact Conditions.....	234
11. <i>Povidaichyk M. M., Sharkadi M. M., Katsala R. A., Hodia R. M., Yanchii I. V.</i> Development of the Information System Shell "Computer-Based Trainer in Financial Mathematics"	247
12. <i>Polovko I. I., Sharkadi M. M.</i> Use of mathematical models in environmental research.....	256
13. <i>Samus V. M., Samus Ye. I.</i> Formalization of ECG-Signal Features for Building Machine-Learning Models	262
14. <i>Symonov D. I.</i> Identification and control of chaotic processes in complex technical systems	273
15. <i>Tarnavskyy P. V., Biletskyi V. M.</i> Using Large Pages to Improve the Performance of Modern Operating Systems.....	285
16. <i>Tsyganok V. V., Khrolenko Ya. O.</i> Method of sequential variant analysis using specialized gpt models for automated evaluation of competitive scientific works.....	294
17. <i>Kapustian O. A., Kasimova N. V.</i> Approximate optimal control for a nonlinear hyperbolic equation with perturbed non-autonomous coefficients.....	305

УДК 512.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).9-12](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).9-12)**В. М. Бондаренко¹, Ю. М. Орловська², М. В. Стойка³**

¹ Інститут математики НАН України,
 провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
 доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² 190 навчальний центр, м. Житомир,
 в.о. заступника начальника школи базової загальної середньої освіти,
 кандидат фізико-математичних наук
Orlovskaja.juli5@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7396-5271>

³ Закарпатський угорський інститут імені Ференца Ракоці II,
 доцент кафедри математики і інформатики,
 кандидат фізико-математичних наук
stoyka_m@yahoo.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0840-1496>

ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН НАДСУПЕРКРИТИЧНОГО ММ-ТИПУ (2,3,3)

М. М. Клейнер довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$, $(N, 4)$, а Л. А. Назарова довела, що ч. в. множина S є ручною тоді і лише тоді, коли вона не містить ч. в. підмножин вигляду $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$, $(N, 5)$. Ці ч. в. множини називаються відповідно критичними і суперкритичними.

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних в тій самій мірі, що суперкритичні відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. У цій статті ми вивчаємо деякі комбінаторні властивості ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичній ч. в. множині $(2, 3, 3)$.

Ключові слова: критичні, суперкритичні та надсуперкритичні ч. в. множини, мінімаксний ізоморфізм, граф Хассе, 0-довжина ланцюга.

1. Вступ. М. М. Клейнер [6] довів, що частково впорядкована (скорочено ч. в.) множина S має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$ і $(N, 4)$, які називаються критичними множинами; (P, Q) позначає ч. в. множину, яка є прямою сумою ч. в. множин P і Q , а $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ — ч. в. множину, яка є прямою сумою ланцюжків довжини $i_1, i_2, \dots, i_p$. У [2] доведено, що ч. в. множина є критичною відносно додатності квадратичної форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна (чи, формально, більш точно — мінімаксно ізоморфна) критичній множині (поняття мінімаксної еквівалентності введено в [1]); в [2] всі такі ч. в. множини повністю описано.

Подібну ситуацію маємо і з ручними ч. в. множинами. Л. А. Назарова [7] довела, що ч. в. множина S ручна тоді і лише тоді, коли вона не містить підмножин вигляду $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$ і $(N, 5)$; ці ч. в. множини називають надкритичними. У [3] доведено, що ч. в. множина є критичною

відносно невід'ємності форми Тітса тоді і лише тоді, коли вона мінімаксно еквівалентна суперкритичній ч. в. множині; всі такі критичні ч. в. множини описані в [4].

Ч. в. множини, які відрізняються від суперкритичних ч. в. множин у спосіб, яким суперкритичні ч. в. множини відрізняються від критичних, називаються надсуперкритичними. Точніше (див. [5]), це такі ч. в. множини:

- 1) (1, 1, 1, 1, 1, 1), 2) (1, 1, 1, 1, 2), 3) (1, 1, 2, 2), 4) (1, 1, 1, 3), 5) (2, 3, 3),
6) (2, 2, 4), 7) (1, 4, 4), 8) (1, 3, 5), 9) (1, 2, 7), 10) (6, I).

У цій статті вивчаються комбінаторні властивості ч. в. множин S , які мінімаксно еквівалентні надсуперкритичній ч. в. множині $E_0 = (2, 3, 3)$. В цьому випадку кажуть, що S має MM -тип E_0 . Іншими (більш загальними словами), в цій статті ми вивчаємо властивості ч. в. множин надсуперкритичного MM -типу $(2, 3, 3)$.

Перший автор підтриманий грантом the Simons Foundation (1290607, V.M.B.).

2. Формулювання основних результатів. Нехай S скінченна ч. в. множина. Її діаграмою Хассе називається орієнтований граф $H(S)$ з вершинами $x \in S$ і стрілками (x, y) , $x, y \in S$, де y накриває x (тобто, $x < y$ і не існує z такого, що $x < z < y$). Ми називаємо 0-довжиною орієнтованого шляху графа Хассе $H(S)$ число його вершин і позначаємо через $l_{min}(S)$ (відповідно $l_{max}(S)$) 0-довжину найбільш короткого (відповідно довгого) орієнтованого шляху графа $H(S)$. Зауважимо, що шляхи довжини 1 також розглядаються. Ми позначаємо через $[S]^\sim$ множину всіх ч. в. множин мінімаксно еквівалентних ч. в. множині S (див. [1]) і покладаємо

$$L_{min}(S) = \min_{X \in [S]^\sim} l_{min}(X), \quad L_{max}(S) = \max_{X \in [S]^\sim} l_{max}(X).$$

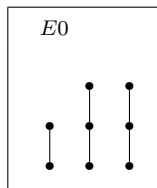
Число максимальних орієнтованих шляхів ч. в. множини X (тобто таких, що не належать орієнтованим шляхам більшої 0-довжини) позначається через $n(X)$.

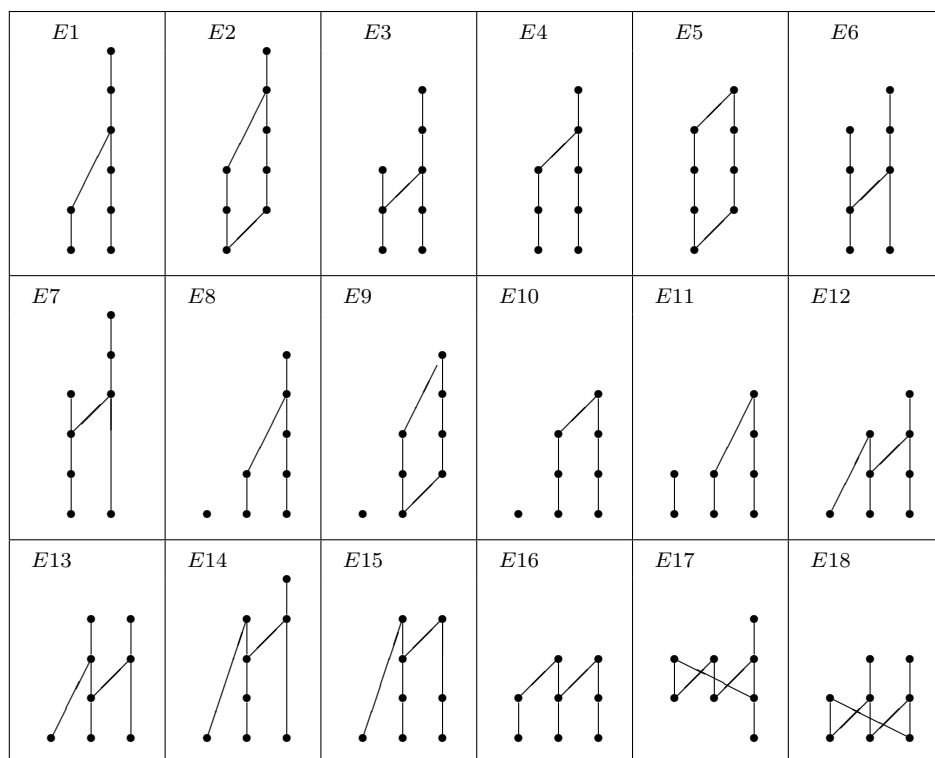
Теорема 1. Нехай $S \in \{E_0\}$. Тоді

- (1) $L_{min}(S) = 1$ і $L_{max}(S) = 4$;
(2) для довільного $X \in [S]^\sim$ виконуються нерівності
 $1 \leq l_{min}(X) \leq 5$, $1 \leq l_{max}(X) \leq 6$, $1 \leq n(X) \leq 6$.

3. Доведення теореми 1. З формальних міркувань (пов'язаних з нумерацією малюнків в таблицях) ми пишемо $E0$ замість E_0 .

Ч. в. множини, мінімаксно еквівалентні надсуперкритичним ч. в. множині E_0 (або, іншими словами, ч. в. множині, що має надсуперкритичний MM -тип $(2, 3, 3)$), описані в [8]. Вони задаються з точністю до ізоморфізму та антиізоморфізму) наступною таблицею.





Ми маємо таку теорему.

Теорема 2. Для ч. в. множин E_i виконується наступне:

N	l_{min}	l_{max}	n
E_0	2	3	3

N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n	N	l_{min}	l_{max}	n
E_1	5	6	2	E_7	4	6	3	E_{13}	3	4	4
E_2	5	6	1	E_8	1	5	3	E_{14}	2	5	4
E_3	3	5	3	E_9	1	5	2	E_{15}	2	4	4
E_4	5	5	2	E_{10}	1	4	3	E_{16}	2	3	4
E_5	5	5	1	E_{11}	2	4	3	E_{17}	2	4	6
E_6	4	5	3	E_{12}	2	4	4	E_{18}	2	3	6

Теорема 2 доводиться за допомогою безпосередніх обчислень.

Теорема 1 впливає із теореми 2.

4. Висновки. У статті описуються комбінаторні властивості ч. в. множин, які мінімаксно ізоморфні надсуперкритичній ч. в. множині $(2,3,3)$. Результати та методи їх доведення можуть бути застосовані для інших класів ч. в. множин.

Список використаної літератури

1. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*. 2005. № 1. P. 24–25.
2. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.

3. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2008. Вып. 60, № 9. С. 1157–1167.
4. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса. *Укр. мат. журнал*. 2009. Вып. 61, № 5. С. 734–746.
5. Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков І. В. 1-надсуперкритичні частково впорядковані множини з тривіальною групою автоморфізмів і min-еквівалентність. І. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика*. Вип. 22, № 2. С. 17–25.
6. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1972. Вып. 28. С. 32–41.
7. Назарова Л. А. Частично упорядоченные множества бесконечного типа. *Изв. АН СССР*. 1975. Вып. 39, № 5. С. 963–991.
8. Styopochkina M. V. The coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to the non-primitive supercritical poset. *Applied problems of mechanics and mathematics*. 2023. Vol. 21. pp. 17–20.

Bondarenko V. M., Orlovskaja Yu. M., Stoika M. V. On combinatorial properties of the posets of oversupercritical MM -type $(2,3,3)$.

M. M. Kleiner proved that a poset S has finite representation type if and only if it does not contain subposets of the form $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 2, 5)$, $(N, 4)$, and L. A. Nazarova proved that a poset S is tame if and only if it does not contain subsets of the form $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 2, 6)$, $(N, 5)$. These posets are called, respectively, critical and supercritical.

The posets which differ from the supercritical posets in the same degree as the supercritical posets differ from the critical ones, are called oversupercritical. In this paper, we study some combinatorial properties of the posets that are minimax isomorphic to the oversupercritical poset $(2,3,3)$.

Keywords: critical, supercritical and oversupercritical posets, minimax isomorphism, Hasse graph, 0-length of a chain.

References

1. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*, (1), 24–25 [in Russian].
2. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form, *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. Problems of Analysis and Algebra. Kyiv: Institute of Mathematics of NAN of Ukraine*, 2(3). 18–58 [in Russian].
3. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2008). (Min, max)-equivalency of posets and nonnegative Tits forms *Ukrainian Math. J.*, 60(9), 1349–1359.
4. Bondarenko, V. M., & Stepochkina, M. V. (2009). Description of posets critical with respect to the nonnegativity of the quadratic Tits form. *Ukrainian Math. J.*, 61(5), 734–746.
5. Bondarenko, V. V., Bondarenko, V. M., Stepochkina, M. V., & Chervyakov, I. V. (2011). 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms and min-equivalence. I. *Nauk. Visn. Uzhgorod. Univ., Ser. Mat.*, 22(2), 17–25 [in Russian].
6. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauch. Semin. LOMI*, 28, 32–41 [in Russian].
7. Nazarova, L. A. (1975). Partially ordered sets of infinite type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(5), 963–991 [in Russian].
8. Styopochkina, M. V. (2023). The coefficients of transitiveness of the posets minimax isomorphic to the non-primitive supercritical poset. *Applied problems of mechanics and mathematics*, 21, 17–20.

Одержано 09.04.2025

UDC 512

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).13-17](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).13-17)**I. Bondarenko**

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Professor of the Department of Algebra and Computer Mathematics,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences
ievgbond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9491-211X>

**THE GENERATION PROBLEM FOR
INVERTIBLE MEALY AUTOMATA**

An invertible Mealy automaton A over an input-output alphabet X generates a group $G(A)$ through its action on words over X . We prove that the following problem is algorithmically undecidable: given two invertible Mealy automata, decide whether they generate the same automaton group. Moreover, we construct an invertible Mealy automaton A for which the following problem is undecidable: given an invertible Mealy automaton B , decide whether B generates $G(A)$ or not. We also show that the automaton subgroup problem and the intersection triviality problem are undecidable.

Keywords: Mealy automaton, automaton group, generation problem, subgroup problem, undecidable problem.

1. Introduction. Decision problems in group theory address various computational aspects of groups. Among the classical group-theoretic decision problems are the word problem, the conjugacy problem, the isomorphism problem, the membership problem, and the generation problem. Although all of these problems are undecidable for finitely presented groups, positive results are known for various classes of groups (see, for example, the survey [5]).

In this paper, we consider groups associated with Mealy automata, known as automaton groups. An invertible Mealy automaton A (henceforth, simply an automaton) over the same input-output alphabet X generates a group $G(A)$ via its action on the set of words over X . Decision problems for automaton groups have been intensively studied. The word problem in every automaton group is decidable. In [7], an automaton group with an undecidable conjugacy problem was constructed. Using the same approach, the undecidability of the isomorphism problem for automaton groups can be shown. In [4], the undecidability of the order problem for automaton groups was proved. Furthermore, the group $F_2 \times F_2$, which can be realized by an automaton, has undecidable generation and membership problems (see [5]). Several problems are known to be decidable for the class of bounded automata (see [1, 2]).

In contrast to classical group-theoretic decision problems, where the input is typically a word over group generators, for automaton groups the input can be given by automata. Specifically, we consider the uniform automaton generation problem: Given two automata A and B , decide whether $G(A) = G(B)$ or not. For a fixed automaton A , we also consider *the automaton generation problem for A* : Given an automaton B , decide whether B generates $G(A)$ or not. We prove that these problems are undecidable.

Theorem 1. *There exists an invertible Mealy automaton with undecidable automaton generation problem.*

The proof of Theorem 1 is constructive; we exhibit the automaton A that generates the group $\mathbb{Z}^4 \rtimes (F_2 \times F_2)$, using the construction given in [3, 7], and show that it satisfies the theorem.

Another problem we consider is *the automaton subgroup problem for A* : Given an automaton B , decide whether $G(B)$ is a subgroup of $G(A)$ or not.

Theorem 2. *There exists an invertible Mealy automaton with undecidable automaton subgroup problem.*

The triviality problem — given an automaton A , decide whether $G(A)$ is trivial or not — is decidable via automata minimization. Next, we address *the automaton intersection triviality problem*: Given two automata A and B , decide whether $G(A) \cap G(B)$ is trivial or not.

Theorem 3. *The automaton intersection triviality problem is undecidable.*

2. Mealy automata and groups. Let X be a finite alphabet, and X^* be the free monoid generated by X . The elements of X^* are words over X . The length of a word w is the number of letters in it.

An automaton over X is a tuple $A = (S, X, \pi : S \times X \rightarrow X \times S)$, where S is a finite set of states and π is the transition-output function. We can represent A as the directed labeled graph whose vertices are the states, and the edges are determined by the transition-output function as follows:

$$s \xrightarrow{x/y} t \text{ whenever } \pi(s, x) = (y, t).$$

An automaton A is called invertible if, for every state $s \in S$ and output $y \in X$, there exist an input $x \in X$ and a state $t \in S$ such that $\pi(s, x) = (y, t)$.

Let A be an automaton and s be its state. The automaton A initialized at s processes an input word $x_1 x_2 \dots x_n \in X^*$ and produces an output word $y_1 y_2 \dots y_n \in X^*$ of the same length. This defines a transformation $T_s : X^* \rightarrow X^*$ such that $T_s(x_1 x_2 \dots x_n) = y_1 y_2 \dots y_n$ if there exists a directed path in A of the form

$$s = s_1 \xrightarrow{x_1/y_1} s_2 \xrightarrow{x_2/y_2} s_3 \xrightarrow{x_3/y_3} \dots \xrightarrow{x_n/y_n} s_{n+1} = t.$$

Let $A = (S, X, \pi)$ be an invertible automaton. Then, for every $s \in S$, the transformation $T_s : X^* \rightarrow X^*$ is invertible. The group generated by the transformations T_s for $s \in S$ under composition is called the automaton group $G(A)$ generated by A . By construction, an automaton group is a subgroup of the symmetric group $\text{Sym}(X^*)$.

3. The proofs. Our strategy is to reduce the problems to the following known undecidable problems in the direct product of two free groups of rank two.

Theorem 4 (Miller [5]). 1) *The generation problem in the group $F_2 \times F_2$ is undecidable.*

2) *The group $F_2 \times F_2$ contains a finitely generated subgroup H such that the generalized word problem for H in $F_2 \times F_2$ — given a word w over the generators of $F_2 \times F_2$, decide whether $w \in H$ or not — is undecidable.*

3) *The intersection triviality problem in the group $F_2 \times F_2$ is undecidable.*

The group $F_2 \times F_2$ can be generated by an automaton (see [6, Sect. 1.10.4]), but this does not immediately yield a proof. The difficulty lies in the fact that the states of a given automaton represent a specific set of group elements. Decidability might hold for such specific sets; for instance, every initial automaton representing a nontrivial group element might contain states for all group generators.

Instead, we will use the automaton realization of the affine group $\text{Aff}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n \rtimes GL_n(\mathbb{Z})$ constructed in [3] (see also [7]). The elements of $\text{Aff}(\mathbb{Z}^n)$ are pairs (v, M) for $v \in \mathbb{Z}^n$ and $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, and the operation is

$$(v, M) \cdot (u, N) = (v + Mu, MN), \text{ where } v, u \in \mathbb{Z}^n \text{ and } M, N \in GL_n(\mathbb{Z}).$$

The group $\text{Aff}(\mathbb{Z}^n)$ acts on $\mathbb{Z}^n$ by affine transformations $(v, M) : x \mapsto v + Mx$, $x \in \mathbb{Z}^n$. For $l \geq 0$, taking modulo 2^l induces an action on $\mathbb{Z}^n/2^l\mathbb{Z}^n$. The elements of $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ are uniquely represented as binary words of length l , and thus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ can be identified with $\{0, 1\}^l$. Similarly, elements of $\mathbb{Z}^n/2^l\mathbb{Z}^n$ are represented by words of length l over $X = \{0, 1\}^n$, and thus $\mathbb{Z}^n/2^l\mathbb{Z}^n$ can be identified with X^l . In this way, we get an action of $\text{Aff}(\mathbb{Z}^n)$ on the space X^* . (Equivalently, we may consider an affine action on $\mathbb{Z}_2^n$, the set of n -tuples of dyadic integers, and use the dyadic representation of its elements.)

It was proved in [3, 7] that the action $(\text{Aff}(\mathbb{Z}^n), X^*)$ can be realized by automata. For $v \in \mathbb{Z}^n$, let $\text{Mod}(v) \in X$ and $\text{Div}(v) \in \mathbb{Z}^n$ denote its remainder and quotient, respectively, when divided by two, here $v = \text{Mod}(v) + 2\text{Div}(v)$. Let $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ and $v \in \mathbb{Z}^n$. We construct an automaton $A_{(v, M)}$ representing the action of (v, M) on X^* . The states are of the form (u, M) , where u ranges over a finite subset of $\mathbb{Z}^n$. We begin with the state (v, M) and iteratively construct new states and arrows by the following rule:

$$(v, M) \xrightarrow{x/y} (u, M), \text{ where } y = \text{Mod}(v + Mx) \text{ and } u = \text{Div}(v + Mx).$$

The resulting automaton $A_{(v, M)}$ has at most $2(a+b)^n$ states, where a is the maximal absolute row sum of M and b is the maximal absolute entry in v . The automaton transformation of X^* induced by a state (u, M) is exactly the transformation induced by the element $(u, M) \in \text{Aff}(\mathbb{Z}^n)$. In particular, the group generated by the automaton $A_{(v, M)}$ coincides with the group generated by the affine transformation (u, M) , where (u, M) ranges over the states. The crucial property of $A_{(v, M)}$ that we will exploit is that all states share the same linear part M . When v is the zero vector, we write A_M instead of $A_{(0, M)}$.

We are ready to prove our results.

Proof of Theorem 1. The free group F_2 can be generated by matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

By using two diagonal embeddings into $GL_4(\mathbb{Z})$, we obtain the set of four matrices $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ generating $F_2 \times F_2$. Define the automaton A as the union of the automata A_M for $M \in S$. The automaton A essentially consists of four copies of the automaton described in Figure 1, where each copy corresponds to a specific embedding of $\{0, 1\}^2$ into $X = \{0, 1\}^4$, with a trivial extension to the remaining

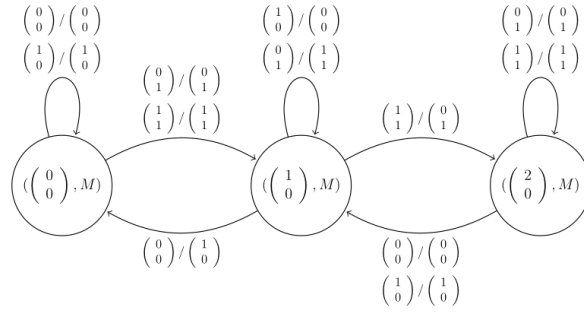


Figure 1. The automaton A_M for $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

elements of X . Notice that the group $G(A)$ generated by A contains standard basis vectors of $\mathbb{Z}^4$. Then, by construction, $G(A) = \mathbb{Z}^4 \rtimes (F_2 \times F_2)$.

We show that the automaton A fulfills the requirement of the theorem. Given words $w_1, \dots, w_n$ over the generators S of $F_2 \times F_2$, consider the corresponding automata $A_{w_1}, \dots, A_{w_n}$. Note that the linear part of every state of A_{w_i} is w_i . Let the automaton B be the union of these automata together with automata $A_{(v,E)}$ for the standard basis vectors v of $\mathbb{Z}^4$. Then the automaton B generates the group $G(B) = \mathbb{Z}^4 \rtimes \langle w_1, \dots, w_n \rangle$. Therefore, $w_1, \dots, w_n$ generate $F_2 \times F_2$ if and only if B generates $G(A)$. Since the first problem is undecidable by Theorem 4, the automaton generation problem for A is undecidable.

Proof of Theorem 2. Let H be a finitely generated subgroup of $F_2 \times F_2$ with an undecidable generalized word problem in $F_2 \times F_2$. Let A be an automaton generating the group $G(A) = \mathbb{Z}^4 \rtimes H$. Given a word w over the generators of $F_2 \times F_2$, construct the automaton A_w as above. Let B_w be the union of A_w and automata $A_{(v,E)}$ for the standard basis vectors v of $\mathbb{Z}^4$. Note that the linear part of every state of B_w is either w or trivial. Then B_w generates the group $G(B_w) = \mathbb{Z}^4 \rtimes \langle w \rangle$. Therefore, $G(B_w)$ is a subgroup of $G(A)$ if and only if $w \in H$. The result follows.

Proof of Theorem 3 follows a similar argument.

4. Conclusions and prospects for further research. We established the undecidability of several fundamental problems for groups generated by invertible Mealy automata. While these problems are undecidable in general, they may be solvable for certain classes of Mealy automata. Notably, the generation problem is decidable for the automaton generating the famous Grigorchuk group and for any automaton generating a contracting regular branch group. An interesting open question remains whether the generation problem is decidable for every bounded automaton.

References

1. Bondarenko, I. V., Bondarenko, N. V., Sidki, S. N., & Zapata, F. R. (2013). On the conjugacy problem for finite-state automorphisms of regular rooted trees. *Groups Geom. Dyn.*, 7(2), 323–355. <https://doi.org/10.4171/ggd/184>
2. Bondarenko, I. V., & Wächter, J. P. (2021). On orbits and the finiteness of bounded automaton groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 31(6), 1177–1190. <https://doi.org/10.1142/S0218196721400087>

3. Brunner, A. M., & Sidki, S. N. (1998). The generation of $GL(n, \mathbf{Z})$ by finite state automata. *Internat. J. Algebra Comput.*, 8(1), 127–139. <https://doi.org/10.1142/s0218196798000077>
4. Gillibert, P. (2018). An automaton group with undecidable order and Engel problems. *J. Algebra*, 497, 363–392. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.049>
5. Miller, C. F. III. (1972). *On group theoretic decision problems and their classification*. Princeton, NJ: Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9781400881789>
6. Nekrashevych, V. V. (2005). *Self-similar groups*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. <https://doi.org/10.1090/surv/117>
7. Šunić, Z., & Ventura, E. (2012). The conjugacy problem in automaton groups is not solvable. *J. Algebra*, 364, 148–154. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.04.014>

Бондаренко Є. В. Проблема породження для оборотних автоматів Мілі.

Оборотний автомат Мілі A над алфавітом входів-виходів X породжує групу $G(A)$ своєю дією на словах над X . Ми доводимо, що наступна проблема алгоритмічно нерозв'язна: за заданими двома оборотними автоматами Мілі, визначити, чи породжують вони одну й ту ж автоматну групу. Крім того, ми будуємо оборотний автомат Мілі A , для якого наступна проблема є нерозв'язною: за заданим оборотним автоматом Мілі B , визначити, чи породжує B групу $G(A)$. Ми також доводимо, що проблема автоматної підгрупи та проблема тривіальності перетину є нерозв'язними.

Ключові слова: автомат Мілі, автоматна група, проблема породження, проблема підгрупи, нерозв'язна проблема.

Список використаної літератури

1. Bondarenko I. V., Bondarenko N. V., Sidki S. N., Zapata F. R. On the conjugacy problem for finite-state automorphisms of regular rooted trees. *Groups Geom. Dyn.* 2013. Vol. 7, No. 2. pp. 323–355. DOI: <https://doi.org/10.4171/ggd/184>
2. Bondarenko I. V., Wächter J. P. On orbits and the finiteness of bounded automaton groups. *Internat. J. Algebra Comput.* 2021. Vol. 31, No. 6. pp. 1177–1190. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218196721400087>
3. Brunner A. M., Sidki S. N. The generation of $GL(n, \mathbf{Z})$ by finite state automata. *Internat. J. Algebra Comput.* 1998. Vol. 8, No. 1. pp. 127–139. DOI: <https://doi.org/10.1142/s0218196798000077>
4. Gillibert P. An automaton group with undecidable order and Engel problems. *J. Algebra*. 2018. Vol. 497. pp. 363–392. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.049>
5. Miller C. F. III. On group theoretic decision problems and their classification. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1972. DOI: <https://doi.org/10.1515/9781400881789>
6. Nekrashevych V. V. Self-similar groups. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005. DOI: <https://doi.org/10.1090/surv/117>
7. Šunić Z., Ventura E. The conjugacy problem in automaton groups is not solvable. *J. Algebra*. 2012. Vol. 364, pp. 148–154. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.04.014>

Received 15.02.2025

УДК 517.95

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).18-25](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).18-25)**В. В. Кириченко¹, Є. В. Лесіна²**

¹ Національний університет біоресурсів і природокористування України,
доцент кафедри комп'ютерних наук, доцент,
кандидат фізико-математичних наук
v.kyrychenko@nubip.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2387-2261>

² Донецький національний технічний університет,
доцент кафедри вищої математики і фізики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
eugenia.lesina@donntu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9803-6727>**ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КУТІ НА
ПЛОЩИНІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З
НЕОДНОРІДНИМ ОПЕРАТОРНИМ СИМВОЛОМ**

В роботі розглядається перша крайова задача для диференціального рівняння другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами та неоднорідним операторним символом у куті на площині. Отримано необхідну та достатню умову єдиності розв'язку зазначеної задачі у просторі C^2 з поліноміальним зростанням на нескінченності.

Ключові слова: безтипне рівняння, кутова точка, диференціальний оператор, неоднорідний символ, простір Шварца.

1. Вступ. Крайові задачі з кутовими точками є об'єктом дослідження багатьох фахівців понад півстоліття. В роботі [1], яка є фундаментальною у даному напрямку, вивчається загальна крайова задача для еліптичного рівняння в області зі скінченною кількістю кінцевих точок на межі. Випадок першої крайової задачі розглядався в публікаціях [2], [3], [4], [5], [6], де теж отримано результати, важливі для аналізу задач з кутовими та кінцевими точками.

Серед питань, що постають при обговоренні коректності певної крайової задачі, істотним є питання порушення єдиності її розв'язку. Водночас на окрему увагу заслуговують задачі для безтипних рівнянь з частинними похідними. Принцип двоїстості рівняння-область [7], покладений в основу доведення критерію існування нетривіального розв'язку, застосовувався попередньо одним із авторів при дослідженні задачі Діріхле у крузі для безтипного диференціального рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами [8]. Необхідну і достатню умову було записано у вигляді рівності нулю визначника, що залежав від коефіцієнтів рівняння. Подібний ефект спостерігається в статті [9], де сформульовано критерій однозначної розв'язності однорідної крайової задачі з однією умовою для безтипного диференціального рівняння в багатокутнику.

Дану роботу присвячено вивченню питання єдиності розв'язку задачі Діріхле у куті для також безтипного рівняння другого порядку з неоднорідним символом та комплексними коефіцієнтами. Отримано необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку у просторах функцій помірному зростання для деякого класу диференціальних рівнянь, пов'язаного із заданим кутом. Метод дослідження полягає в тому, що, зсуваючи початковий символ на деякий вектор,

що належить трубчастій області у $\mathbb{C}^2$, яка залежить від кута, ми приходимо до диференціального оператора з однорідним символом і до отриманої в такий спосіб граничної задачі застосовуємо метод двоїстості рівняння-область ([7]). Цим зсувом ми долаємо труднощі, пов'язані з відсутністю локальної аналітичності перетворення Фур'є продовження нулем розв'язку задачі на всю площину.

2. Постановка задачі. Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

для рівняння другого порядку

$$\tilde{L}u = L\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)u = (a^1 \cdot (\nabla + \lambda))(a^2 \cdot (\nabla + \lambda))u = 0, \quad (2)$$

в куті Ω (див. рис. 1), де $a^1, a^2, \lambda \in \mathbb{C}^2$ — сталі комплексні вектори, причому вектори a^1, a^2 — довільні, а вибір $\lambda \in T^C \in \mathbb{C}^2$ визначається множиною T^C , яка залежить від кута. Нехай прямі, що обмежують даний кут і проходять через початок координат, описуються рівняннями $(b^1 \cdot x) = 0$, $(b^2 \cdot x) = 0$ відповідно, де $b^1 = (b_1^1, b_2^1)$, $b^2 = (b_1^2, b_2^2)$ — нормальні вектори до прямих, а $\tilde{b}^1 = (-b_2^1, b_1^1)$, $\tilde{b}^2 = (-b_2^2, b_1^2)$ — твірні.

Зазначимо, що умови на нескінченності ми обираємо належністю розв'язку простору Шварца S' [10] і що неоднорідний символ $\tilde{l}(\xi)$ диференціального оператора $\tilde{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ стає однорідним після зсуву на вектор λ :

$$\tilde{l}(\xi - \lambda) = l(\eta) = a\eta_1^2 + b\eta_1\eta_2 + c\eta_2^2.$$

Можна вважати, що a, b, c — довільні комплексні числа. Отриманий однорідний символ $l(\eta)$ відповідає диференціальному оператору

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla).$$

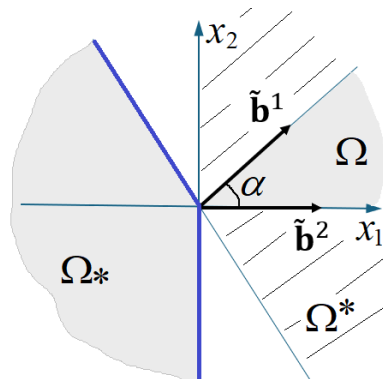


Рис. 1

Зупинимось докладніше на виборі вектору λ . Кут Ω є окремим випадком опуклого гострого конуса з вершиною в нулі. Будемо розглядати також спряжений

конус Ω^* , твірними якого є перпендикуляри, проведені до твірних вихідного конуса Ω . Ω^* — замкнутий опуклий конус з вершиною в нулі. Нехай $\Omega_* = -\Omega^*$ та $C = \text{int } \Omega_*$, $C \neq \emptyset$, — відкритий опуклий конус. Через T^C позначимо трубчасту область в $\mathbb{C}^2$ з основою C :

$$T^C = \mathbb{R}^2 + iC = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}^2, y \in C\}.$$

Зауважимо: якщо

$$\lambda = (\mu_1, \nu_1) + i(\mu_2, \nu_2), \quad \text{де } (\mu_1, \nu_1) \in \mathbb{R}^2, (\mu_2, \nu_2) \in C,$$

то, виходячи з обраного нами кута Ω і побудованих за ним конусів Ω^* і Ω_* , робимо висновок, що компоненти μ_1, ν_1 довільні, а μ_2, ν_2 мають бути такими, щоб кут $\arctg \frac{\nu_2}{\mu_2}$ пробігав сектор Ω_* (див. рис. 1).

3. Основний результат. Наведена нижче теорема дає відповідь на питання, за яких умов порушується єдиність розв'язку задачі Діріхле (1), (2).

Теорема 1. *Для того, щоб задача (1), (2) мала нетривіальний розв'язок $u(x)$ у просторі $C^2(\overline{\Omega})$ з поліноміальним зростанням на нескінченності, необхідно і достатньо, щоб при деякому натуральному n виконувалась рівність*

$$\Delta_n = \left| \begin{pmatrix} \tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \\ \tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \\ \tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \end{pmatrix}^n \right| = 0. \quad (3)$$

Доведення. Необхідність. Нехай $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap S'_\Omega$ — деякий нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), де $S'_\Omega = \{\omega \in S' | \text{supp } \omega \in \overline{\Omega}\}$, $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap S'$ — будь-яке його продовження на весь простір $\mathbb{R}^2$. Помічаючи, що символ

$$\tilde{l}(\xi) = l(\eta + \lambda) = l(\eta) + (2a\lambda_1 + b\lambda_2)\eta_1 + (b\lambda_1 + 2c\lambda_2)\eta_2 + l(\lambda),$$

представимо оператор $\tilde{L}$ у вигляді суми $\tilde{L} = L + L_{(1)} + L_{(0)}$ трьох операторів, перший з яких збігається з однорідним диференціальним оператором L , другий $L_{(1)}$ містить лише перші похідні за змінними x_1 і x_2 , а останній $L_{(0)}$ — константа. Тепер подіємо оператором $\tilde{L}$ на добуток $\tilde{u} \cdot \theta_\Omega$, де θ_Ω — характеристична функція кута:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) &= \\ &= (L + L_{(1)} + L_{(0)})(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = L(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) + (L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + \\ &+ (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = (L\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + (L_{(1)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \\ &+ \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) + (L_{(0)}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega = [(L + L_{(1)} + L_{(0)})\tilde{u}] \cdot \theta_\Omega + \\ &+ \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega) = \\ &= (\tilde{L}\tilde{u}) \cdot \theta_\Omega + \mathcal{L}_1\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega} + l(\nu) \cdot (\delta_{\partial\Omega})'_\nu \cdot \tilde{u} + \tilde{u} \cdot (L_{(1)}\theta_\Omega). \end{aligned}$$

Тут $\delta_{\partial\Omega}$ — міра, зосереджена на межі кута, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\tau} = 0$, $\frac{\partial\theta_\Omega}{\partial\nu} = -\delta_{\partial\Omega}$. Відмітимо, що оскільки $\tilde{L}\tilde{u} = 0$ всередині кута Ω , то перший доданок у сумі анулюється. Що стосується третього і четвертого доданків, то обидва вони зводяться до форми,

подібної виду другого доданку (це випливає з формули $\psi\delta' = -\psi'\delta$ за умови, що $\psi(0) = 0$). Таким чином, маємо:

$$\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = M_{(1)}\tilde{u} \cdot \delta_{\partial\Omega}, \quad (4)$$

де $M_{(1)}$ — диференціальний оператор першого порядку.

Помножимо отриману рівність (4) на добуток поліномів, що стоять у лівих частинах рівнянь прямих, які обмежують кут Ω :

$$(b^1 \cdot x)(b^2 \cdot x)\tilde{L}(\tilde{u} \cdot \theta_\Omega) = 0. \quad (5)$$

Застосуємо до рівності (5) перетворення Фур'є:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi) \left[\tilde{l}(\xi) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi) \right) \right] = 0. \quad (6)$$

Оскільки функція $\tilde{u}\theta_\Omega(x)$ має носій у куті Ω , то в нулі її перетворення Фур'є $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi)$ не буде аналітичною функцією. Однак, здійснивши зсув в рівності (6) на вектор λ , вибір якого описаний вище, ми потрапляємо в трубчасту область T^C , де перетворення Фур'є $\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda)$ є функцією, аналітичною в околі нуля (див. [6]). Таким чином, матимемо:

$$(b^1 \cdot \nabla_\xi)(b^2 \cdot \nabla_\xi) \left[\tilde{l}(\xi - \lambda) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\xi - \lambda) \right) \right] = 0,$$

звідки, з урахуванням того, що $\xi - \lambda = \eta$, отримаємо:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) \left[l(\eta) \left(\widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta) \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Символ $l(\eta)$ у виразі (7) є однорідним, а аналітичну за змінною η в T^C функцію $v(\eta) = \widehat{\tilde{u} \cdot \theta_\Omega}(\eta)$ можна розкласти у збіжний ряд в околі нуля:

$$v(\eta) = v_0(\eta) + v_1(\eta) + v_2(\eta) + \dots + v_n(\eta) + \dots$$

При цьому, виходячи з виразу (7), робимо висновок, що для однорідної молодшої частини $v_N(\eta)$ степеня N у зазначеному розкладі справедлива рівність:

$$(b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) [l(\eta)v_N(\eta)] = 0. \quad (8)$$

Позначимо через $w_n(\eta) = l(\eta)v_N(\eta)$ однорідний поліном степеня $n = N + 2$. Оскільки оператори $(b^1 \cdot \nabla_\eta)$ і $(b^2 \cdot \nabla_\eta)$ комутуючі, розв'язок рівняння (8) представимо у вигляді суми двох функцій:

$$w_n(\eta) = w_n^1(\tilde{b}^1 \cdot \eta) + w_n^2(\tilde{b}^2 \cdot \eta) = \alpha_n(\tilde{b}^1 \cdot \eta)^n + \beta_n(\tilde{b}^2 \cdot \eta)^n$$

з деякими коефіцієнтами α_n , β_n , причому функції w_n^1 і w_n^2 обираються таким чином, щоб задовольнити рівняння (8).

Враховуючи, що $w_n(\eta) = l(\eta)v_N(\eta)$, отримуємо очевидне співвідношення:

$$w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0,$$

яке відображає рівність нулю функції w_n на множині нулів символу. Оскільки однорідний символ $l(\eta) = (a^1 \cdot \eta)(a^2 \cdot \eta)$, то, по чергово надаючи змінній η значення $\tilde{a}^1$ і $\tilde{a}^2$ і використовуючи ортогональність векторів a^j і $\tilde{a}^j$, одержимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих α_n, β_n

$$\begin{cases} \alpha_n \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n = 0, \\ \alpha_n \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

з визначником

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n & \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1 \right)^n \\ \left(\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n & \left(\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2 \right)^n \end{vmatrix}.$$

В силу двоїстості рівняння-область (під якою розуміється відповідність між крайовою задачею (1), (2) і рівнянням (8), доведену у книзі [6]) та нашого припущення про існування нетривіального розв'язку $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap S'$ вихідної задачі, робимо висновок, що існує нетривіальний розв'язок двоїстої задачі

$$\begin{cases} (b^1 \cdot \nabla_\eta)(b^2 \cdot \nabla_\eta) w_n(\eta) = 0, \\ w_n(\eta)|_{l(\eta)=0} = 0, \end{cases}$$

в класі однорідних поліномів степеня $n \geq 2$. Звідси випливає, що за такого значення n знайдеться ненульовий набір коефіцієнтів (α_n, β_n) , який є розв'язком системи (9), що тягне за собою виконання рівності $\Delta_n = 0$. Необхідність доведено.

Достатність. Побудуємо нетривіальний розв'язок задачі Діріхле (1), (2), припустивши виконання рівності (3) для деякого натурального n . Покладемо

$$u(x) = e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) = e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} \cdot v(x), \quad \text{де } \lambda \in T^C.$$

Легко переконатися, що

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(-\lambda_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \right) v \cdot e^{-(\lambda \cdot x)},$$

звідки

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i \right) u = \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}, \quad i = 1, 2.$$

Крім того,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\lambda_i^2 v(x) - 2\lambda_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right) \cdot e^{-(\lambda \cdot x)},$$

тому

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda_i \right)^2 \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \\ & = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2\lambda_i + \lambda_i^2 \right) \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}, \\ & \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_2 \right) \right] \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_1 \lambda_2 \right] \{ e^{-(\lambda \cdot x)} \cdot v(x) \} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

З урахуванням проведених обчислень отримаємо:

$$\tilde{L}u = L \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda \right) u = L \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} = 0. \quad (10)$$

Наслідком рівності (10) є рівняння $Lv = 0$ з диференціальним оператором $L = (a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)$, якому відповідає однорідний символ $l(\eta) = (a^1 \cdot \eta)(a^2 \cdot \eta)$. Оскільки будь-який поліноміальний розв'язок рівняння $Lv = 0$ можна записати у вигляді

$$v(x) = v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) + v_2(\tilde{a}^2 \cdot x),$$

то, очевидно,

$$u(x) = [v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) + v_2(\tilde{a}^2 \cdot x)] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)}.$$

Доданки v_1 і v_2 необхідно підібрати таким чином, щоб функція u , окрім рівняння (2), задовольняла граничну умову Діріхле за деякого ненульового набору сталих величин (α_n, β_n) :

$$v_1(\tilde{a}^1 \cdot x) = \alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n; \quad v_2(\tilde{a}^2 \cdot x) = \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n.$$

Зауважимо, що отримана функція

$$u(x) = [\alpha_n \cdot (\tilde{a}_1 \cdot x)^n + \beta_n \cdot (\tilde{a}_2 \cdot x)^n] \cdot e^{-(\lambda \cdot x)} \quad (11)$$

буде задовольняти крайову умову (1), якщо $x = \tilde{b}^1$ або $x = \tilde{b}^2$ (це пов'язано з розташуванням сторін кута Ω на прямих $(b^1 \cdot x) = 0$ та $(b^2 \cdot x) = 0$). Підставляючи у вираз (11) замість x вказані значення, отримаємо систему:

$$\begin{cases} \left[\alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n \right] \cdot e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^1)} = 0, \\ \left[\alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n \right] \cdot e^{-(\lambda \cdot \tilde{b}^2)} = 0, \end{cases}$$

яка рівносильна наступній:

$$\begin{cases} \alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^1 \right)^n = 0, \\ \alpha_n \left(\tilde{a}^1 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n + \beta_n \left(\tilde{a}^2 \cdot \tilde{b}^2 \right)^n = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Оскільки визначник однорідної системи (12) дорівнює нулю за припущенням, ця система має нескінченну кількість ненульових розв'язків. Отже, набори констант (α_n, β_n) є нетривіальними, що означає нетривіальність побудованого розв'язку (11) задачі (1), (2). Достатність доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Роботу присвячено дослідженню питання порушення єдиності розв'язку першої крайової задачі у куті для безтипового диференціального рівняння другого порядку з неоднорідним символом та комплексними коефіцієнтами. Отримано критерій однозначної розв'язності задачі Діріхле у просторі функцій помірного зростання для певного класу рівнянь, пов'язаного із заданою кутовою областю.

Проблема, що постає, полягає у відсутності локальної аналітичності перетворення Фур'є продовження нулем розв'язку задачі на всю площину. За допомогою зсуву початкового символу на деякий вектор, який належить трубчастій області у $\mathbb{C}^2$, ми одержуємо диференціальний оператор з однорідним символом і до отриманої в такий спосіб граничної задачі застосовуємо метод двоїстості рівняння-область.

Список використаної літератури

1. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. *Тр. Московского мат. о-ва*. 1967. вып. 16. С. 209–292.
2. Фуфаев В. В. К задаче Дирихле для областей с углами. *Докл. АН СССР*. 1960. вып. 131, № 1. С. 37–39.
3. Волков Е. А. О решении краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике. *Докл. АН*. 1963. вып. 147, № 1. С. 13–16.
4. Джафаров Р. М. Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой. *Труды ИПММ НАН Украины* 1998. Т 2. С. 55–63.
5. Коваленко О. В. Априорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з кінечною точкою. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2005. Вип. 13. С. 25–29.
6. Романенко І. Розв'язність задачі Діріхле зі сталими коефіцієнтами в області з кутовою точкою. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2009. Вип. 21. С. 13–20.
7. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев : Наукова думка, 2002. 316 с.
8. Лесіна Є. В. Про задачу Діріхле для диференціального рівняння з комутуючими матричними коефіцієнтами. *Вісник КНУ. Математика. Механіка*. 2015. Вип. 33. С. 32–37.
9. Кириченко В. В., Лесіна Є. В. Про порушення єдиності розв'язку крайової задачі в багатокутнику. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 60–68.
10. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике Москва : Наука, 1979. 320 с.

Kyrychenko V. V., Lesina E. V. On the solution uniqueness of the Dirichle problem in an angle on the plane for a differential equation with a non-homogeneous operator symbol.

The paper considers the first boundary value problem for a second-order differential equation with constant complex coefficients and a non-homogeneous operator symbol in a corner on the plane. A necessary and sufficient condition for the uniqueness of the solution of the problem in the space C^2 with polynomial growth at infinity is obtained.

Keywords: typeless equation, corner point, differential operator, inhomogeneous symbol, Schwarz space.

References

1. Kondratiev, V. A. (1967). Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angle points. *Proceedings of the Moscow Mathematical Society*, 16, 209–292 [in Russian].
2. Fufayev, V. V. (1960). On the Dirichlet problem for domains with angles. *Reports of the Academy of Sciences*, 131(1), 37–39 [in Russian].
3. Volkov, E. A. (1963). On the solution of boundary value problems for the Poisson equation in a rectangle. *Reports of the Academy of Sciences*, 147(1), 13–16 [in Russian].
4. Dzhafarov, R. M. (1998). Weighted a priori estimates for the solution of the quasilinear Dirichlet problem in a domain with a conical point. *Proceedings of the IPMM NAS of Ukraine*, 2, 55–63 [in Russian].
5. Kovalenko, O. V. (2005). A priori estimate for the solution of a linear elliptic boundary value problem in a domain with an end point. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 13, 25–29 [in Ukrainian].

6. Romanenko, I. (2009). The relationship between the Dirichlet problem and the steel coefficients in the region with a cut-off point. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 21, 13–20 [in Ukrainian].
7. Burskii, V. P. (2002). *Methods for studying boundary value problems for general differential equations*. Kyiv: Naukova dumka [in Russian].
8. Lesina, E. V. (2015). On the Dirichlet problem for differential equation with commuting matrix coefficients. *News of KNU. Mathematics. Mechanics*, 33, 32–37 [in Ukrainian].
9. Kirichenko, V. V., & Lesina, E. V. (2022). On the uniqueness violation of boundary value problem in polygon. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series "Mathematics and Informatics"*, 40(1), 60–68 [in Ukrainian].
10. Vladymyrov, V. S. (1979). *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow: Nauka [in Russian].

Одержано 10.04.2025

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).26-34](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).26-34)**А. Ю. Кравець¹, О. І. Василик²**

¹ Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
студент фізико-математичного факультету
artemkravets13@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2218-7749>

² Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук, доцент
vasylyk@matan.kpi.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0880-3751>

**ОЦІНЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА ДЛЯ
БІНОМІАЛЬНО- φ -СУБГАУССОВОЇ МОДЕЛІ РИЗИКУ**

У роботі досліджується процес ризику, утворений сумою біноміально розподіленої кількості строго φ -субгауссових випадкових доданків, які описують окремі виплати, що здійснюються страховою компанією за деяким портфелем страхових полісів. Отримано оцінки ймовірності банкрутства для такої біноміально- φ -субгауссової моделі ризику для деяких часткових випадків функції φ та інтенсивності надходження премій, яка є монотонно зростаючою неперервною функцією часу.

Ключові слова: біноміальний розподіл, ймовірність банкрутства, процес ризику, φ -субгауссові випадкові величини, строго φ -субгауссові випадкові процеси.

1. Вступ. Актуальність дослідження полягає в тому, що в сучасних умовах розвитку фінансових ринків зростає необхідність у точних математичних методах для аналізу та прогнозування поведінки різних фінансових інструментів та процесів. Використання класичних підходів, таких як застосування гауссових випадкових процесів, часто є недостатнім для моделювання складних фінансових явищ, що мають нестандартні розподіли або вимагають врахування складних залежностей.

У зв'язку з цим, дослідження сучасних підходів до аналізу випадкових величин, які виходять за рамки традиційних гауссових моделей, стає критично важливим для фінансових аналітиків, банків, страхових компаній та інших учасників фінансового ринку. Впровадження нових методів дозволить не тільки покращити точність прогнозів, але й забезпечити більш ефективне управління ризиками, що є ключовим чинником стабільності у фінансовій сфері.

Наразі відомо, що у таких прикладних галузях як фінанси і страхування спостерігаються випадкові процеси, які не можна вважати гауссовими, звідки випливає пряма необхідність у розвитку та застосуванні теорії φ -субгауссових випадкових процесів як розширення відповідної теорії гауссових випадкових процесів.

Мета і завдання дослідження: оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику, представленого у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат, у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.

Наукова новизна дослідження полягає у виведенні оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику, який утворений біноміальною сумою строго φ -

субгауссових випадкових виплат у випадку певного більш загального виду функції φ .

Простори $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ -субгауссових випадкових величин, — це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами [1, 2]. Такі простори є підпросторами просторів Орліча експоненціального типу. Класи φ -субгауссових випадкових процесів, тобто, процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, є більш широкими, ніж класи гауссових та субгауссових випадкових процесів, тому дають можливість краще моделювати реальні випадкові процеси. В. Булдигін та Ю. Козаченко [1] досліджували властивості сум незалежних випадкових величин з таких просторів і деякі властивості випадкових процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, отримали умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом.

До класу φ -субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, які широко використовуються для моделювання випадкових явищ у фінансовій математиці, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ -субгауссових випадкових процесів теоретичні результати.

У роботі [3] теорію φ -субгауссових випадкових процесів застосовано для дослідження властивостей випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками, а в статті [4] — для оцінювання ймовірності банкрутства у моделі з узагальненим φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом. Подальший розвиток досліджень моделей ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат наведено у роботі [5], в якій отримано оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику, що описується сумою випадкового біноміально розподіленого числа доданків, які є φ -субгауссовими випадковими величинами позовів, а інтенсивність надходження премій є монотонно зростаючою неперервною функцією. Ми продовжуємо дослідження таких процесів ризику, а саме, на основі результатів роботи [5] виводимо оцінки ймовірності банкрутства у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) та у випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

2. Необхідні відомості. У цьому розділі наведені необхідні в подальшому означення та твердження з теорії φ -субгауссових випадкових величин та процесів [1, 2].

Означення 1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$. Можливо, що $c = +\infty$.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір.

Означення 2. [1, 2] Нехай φ — N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується

нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $\text{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$ називається субгауссовим.

Теорема 1. [1, 2] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda\xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}$ — обернена до φ функція, також для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}$, а також існує така стала $c_\varphi > 0$, що $(E\xi^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_\varphi\tau_\varphi(\xi)$.

Означення 3. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо він задовольняє такі умови при всіх $t \in T$:

$$X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega), \quad \sup_{t \in T} X(t) < +\infty.$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то випадковий процес $X(t)$ називається субгауссовим.

Означення 4. Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ . Простір строго φ -субгауссових випадкових величин позначають $\text{SSub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 5. Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X .

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ , $X = \{X(t), t \in T\}$ — сепарабельний φ -субгауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ така, що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (1)$$

Зауважимо, що таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ є неперервним у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B — компактна множина, причому $B \subset T$. Введемо $\beta > 0$ — деяке число таке, що $\beta \leq \sigma\left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t; s)\right)$. Надалі розглядаємо $B = [0, 1]$, яку інтерпретуємо як інтервал часу в один рік.

Означення 6. Якщо існує скінчене ε -покриття множини T , то $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$ означає кількість елементів в найменшому ε -покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного ε -покриття множини T , то покладемо $N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty$. Функцію $N_{(T,\rho)}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, будемо називати метричною масивністю множини T відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною масивністю.

Означення 7. Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною ентропією називається функція

$$H_{(T,\rho)}(u) := \begin{cases} \ln N_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty \\ +\infty, & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty \end{cases}$$

де $N_{(T,\rho)}(u)$ — метрична масивність множини T .

3. Біноміально- φ -субгауссова модель ризику. Як і в роботі [5], розглянемо портфель страхової компанії із n незалежних однорідних ризиків, кожен з яких може викликати не більше однієї страхової події. Зобразимо відповідну модель ризику в такому вигляді:

$$X(t) = u + (C - \alpha\mu)t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де u — початковий капітал страхової компанії, $C > 0$ — інтенсивність надходження страхових внесків, α — середній розмір страхової виплати, $c = C - \alpha\mu > 0$ та

- 1) N_t — випадковий процес, що описує кількість страхових подій, які сталися на інтервалі від 0 до t відповідно до біноміального розподілу

$$P(N_t = k) = \binom{n}{k} \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k},$$

де $0 \leq k \leq n$, $\theta(t)$ — неперервна функція, що описує ймовірність настання страхової події протягом часу $[0, t]$, тобто $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 1$, $\theta(t_1) \leq \theta(t_2)$ для довільних $t_1 < t_2$. Нехай також ймовірність події $\theta(t)$ задовольняє припущення, що $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$. Крім того, вважатимемо, що кількості подій, які сталися на неперетинних часових інтервалах, є незалежними випадковими величинами,

- 2) Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $E(Y_i) = 0$,
- 3) N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ є незалежними,
- 4) випадкові величини Y_i належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Надалі розглядаються властивості сум

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (3)$$

для яких виконуються вищевказані умови 1)–4).

Наведемо деякі результати, отримані в роботі [5] для сум випадкової кількості φ -субгауссових виплат вигляду (14).

Лема 1. [5] Нехай $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Тоді для всіх $t, s > 0$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda S(t) \} \leq (\theta(t) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t))^n,$$

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda (S(t) - S(s)) \} \leq ((\theta(t) - \theta(s)) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t) + \theta(s))^n$$

та $\mathbb{D}(S(t) - S(s)) = n(\theta(t) - \theta(s)) \mathbb{E} Y_1^2$.

Зауваження 1. З леми 1 випливає, що випадковий процес $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$, задовольняє умову (1) з функцією $\sigma(h) = (nh \mathbb{E} Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $h > 0$.

Теорема 2. [5] Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in B \right\}$ — випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Нехай $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu |t - s|$ для деякого $\mu > 0$; та для деякої неперервної функції $f = \{f(t), t \geq 0\}$ маємо $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u; v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ — обмежена монотонно зростаюча функція, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ — така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, причому $s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$ є опуклою функцією. Тоді якщо

$$\int_0^\beta r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du < +\infty, \quad (4)$$

то для всіх $0 < \beta \leq \left(\frac{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ та $x > 0$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) > x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \inf_{t \in B} (S(t) - f(t)) < -x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in B} |S(t) - f(t)| > x \right\} &\leq 2Z_r(\beta; x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2(1-p)}{\mathbb{E} Y_1^2} \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{\nu} \ln (\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(u)) - \lambda f(u) \right] \right). \end{aligned}$$

4. Оцінювання ймовірності банкрутства. У даному розділі знайдено оцінку ймовірності банкрутства для моделі ризику зі сталою інтенсивністю надходження премій, у якій процес ризику задано у вигляді біноміальної суми з субгауссовими розмірами виплат та φ -субгауссовими виплатами з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

Теорема 3. Нехай $\left\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1]\right\}$ — випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0$, $x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P\left\{\sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x\right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P\left\{\inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x\right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P\left\{\sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x\right\} &\leq 2Z_1(\beta; x), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} Z_1(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E}Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $f(t) = ct$, $c = C - \alpha\mu$, $\delta(t) = t$, $r(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, 1)$, $\rho(t; s) = |t - s|$, $t, s \in [0; 1]$, $C_\Delta = 1$, $\theta(u) = u$, $u \in [0, 1]$, $\theta(u) = 1$, $u \in (1, +\infty)$, $\mu = 1$, $\sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}$, $h > 0$, $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

При таких умовах матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n\mathbb{E}Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n\mathbb{E}Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2}; \\ \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{1-p} \right)^2 \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k+1} = \frac{1}{2} (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 \cdot \left(\frac{p}{1-p} \right)^3; \\ N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{u^2}; \end{aligned}$$

$$r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) \leq n \mathbb{E} Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}};$$

$$H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) = H_{[0,1]} (\sigma^{(-1)}(\beta p)) = \ln (N_B (\sigma^{(-1)}(\beta p))) \leq \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right).$$

Отже,

$$Z_r(\beta; x) \leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2 \mathbb{E} Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_1(\beta; x),$$

$$W(\lambda; p; \beta) = \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right).$$

Теорема 4. Нехай $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1] \right\}$ — випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}, x \in \mathbb{R}, 1 < \omega \leq 2$ та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0, x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} \leq Z_2(\beta; x), \quad (6)$$

$$P \left\{ \inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} \leq Z_2(\beta; x),$$

$$P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} \leq 2Z_2(\beta; x),$$

де

$$Z_2(\beta; x) = \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times$$

$$\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E} Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\},$$

$$W(\lambda; p; \beta) = \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right).$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $f(t) = ct$, $\delta(t) = t$, $r(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, 1)$, $\rho(t; s) = |t - s|$, $t, s \in [0; 1]$ $C_\Delta = 1$, $\theta(u) = u$, $u \in [0, 1]$, $\theta(u) = 1$, $u \in (1, +\infty)$, $\mu = 1$, $\sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}$, $h > 0$, $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

При таких умовах матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \delta\left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n \mathbb{E}Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n \mathbb{E}Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2)n \mathbb{E}Y_1^2}; \\ \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi\left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|}{1-p}\right)^\omega \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1-\omega(k-1)} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|}{1-p}\right)^\omega \frac{p^{5-\omega}}{1-p^{3-\omega}}; \\ N_B\left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{u^2}; \\ r^{(-1)}\left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r\left(N_B\left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right)\right) du\right) &\leq n \mathbb{E}Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}; \\ H_B\left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2}\right) &= H_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(\beta p)) = \ln(N_B(\sigma^{(-1)}(\beta p))) \leq \ln\left(\frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E}Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n \mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_2(\beta, x), \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Нерівності (15) та (16), доведені у цих теоремах, дають оцінки ймовірності банкрутства для відповідної біноміально- φ -субгауссової моделі ризику при початковому капіталі $x > 0$.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі наведено результати оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in R$) та у

випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$, при цьому потік премій є монотонно зростаючою неперервною функцією. Напрямки подальших досліджень таких моделей включають як виведення оцінок ймовірності банкрутства для інших N -функцій Орліча φ , так і конкретизацію оцінок для певних заданих значень параметрів моделі. Результати дослідження можуть бути використані актуаріями та фінансовими аналітиками для оцінювання ризиків та забезпечення платоспроможності страхових компаній.

Список використаної літератури

1. Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society : Providence RI, 2000.
2. Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси. Монографія. Київ : ВПЦ «Київський університет», 2008. 232 с. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf (дата звернення: 25.03.2025).
3. Ямненко Р. Є., Василик О. І. Деякі властивості випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками. *Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика*. 2007. Вип. 1, № 1. С. 133–148.
4. Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion. *Theory of Stochastic Processes*. 2006. Т. 12(28), № 3–4. С. 261–275.
5. Yamnenko R., Lamin A. Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. № 2. Р. 20–27. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>

Kravets A. Yu., Vasylyk O. I. Estimation of ruin probability for binomially- φ -sub-Gaussian risk model.

In the paper, we investigate the risk process formed by the sum of a binomially distributed number of strictly φ -sub-Gaussian random terms that describe individual payments made by an insurance company under a certain portfolio of insurance policies. Estimates of ruin probability for such a binomially- φ -sub-Gaussian risk model are obtained for some partial cases of the function φ and the premium flow, which is a monotonically increasing continuous function of time.

Keywords: binomial distribution, ruin probability, risk process, φ -sub-Gaussian random variables, strictly φ -sub-Gaussian random processes.

References

1. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. American Mathematical Society: Providence RI.
2. Vasylyk, O. I., Kozachenko, Yu. V., & Yamnenko, R. E. (2008). *φ -sub-Gaussian random processes*. Kyiv: VPC "Kyivskyi Universytet". Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf [in Ukrainian].
3. Yamnenko, R., & Vasylyk, O. (2007). Some properties of random Poisson sums with φ -sub-Gaussian terms. *Prykl. Stat., Aktuarna Finans. Mat.*, 1(1), 133–148 [in Ukrainian].
4. Yamnenko, R. (2006). Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion. *Theory of Stochastic Processes*, 12(28(3–4)), 261–275.
5. Yamnenko, R., & Lamin, A. (2022). Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, (2), 20–27. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>

Одержано 31.03.2025

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).35-43](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).35-43)О. О. Курченко¹, О. О. Синявська², І. В. Шестаковська³

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, доцент
olkurchenko@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0417-5970>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
olga.syniavska@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

³ Приватний загальноосвітній навчальний заклад «МІДГАРД»,
вчитель математики
i.v.shestakovskaya@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5654-3653>

УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ФЕЙЄРА ДЛЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

У статті узагальнено нерівність Фейєра для покоординатно опуклих функцій двох змінних. За допомогою нерівності Ерміта–Адамара для покоординатно опуклих функцій двох змінних отримані інтервальні оцінки подвійних інтегралів по прямокутнику.

Ключові слова: нерівність Фейєра, нерівність Ерміта–Адамара, опукла функція, неперервна функція, інтегровна за Ріманом функція.

1. Вступ. У 1906 р. угорський математик Л. Фейєр [1], відомий своїми дослідженнями у теорії рядів Фур'є, отримав оцінку інтеграла від деякої опуклої функції. Цю нерівність пізніше було названо на його честь.

Наведемо нерівність Фейєра у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. [1] *Нехай функції $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови:*

- 1) *функція f опукла вниз на відрізку $[a, b]$;*
- 2) *функція g неперервна і невід'ємна на відрізку $[a, b]$;*
- 3) *$\forall t \in [0, \frac{b-a}{2}] : g(a+t) = g(b-t)$.*

Тоді

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

Подвійна нерівність (1) називається нерівністю Фейєра. У випадку $g(x) = 1$ ця нерівність переходить у відому нерівність Ерміта–Адамара оцінки середнього значення на відрізку опуклої функції. Так для опуклої вниз на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$, $x \in [a, b]$ виконується нерівність Ерміта–Адамара [6]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Така нерівність є першим фундаментальним результатом для опуклих функцій, визначених на інтервалі дійсних чисел із природною геометричною інтерпретацією та значною кількістю застосувань для окремих нерівностей [2].

Узагальнення та застосування нерівності Фейєра, а також нерівності Ерміта–Адамара для побудови різних оцінок для інтегралів від опуклих функцій досліджувались багатьма авторами. Так, у монографії [2] подано основні факти, пов'язані з нерівностями Ерміта–Адамара для опуклих функцій, велику кількість результатів для спеціальних середніх, а також нерівності для інших понять опуклостей. У статті [3] автори встановили деякі нові нерівності типу Фейєра для опуклих функцій. Нерівності Ерміта–Адамара, Фейєра та подібні нерівності для s -опуклих функцій у другому сенсі було отримано у статтях [4], [5]. У 2022 році в роботі З. Екен [6] отримано нерівність Фейєра для s -опуклих функцій у четвертому значенні, а також приклади застосування цих нерівностей для оцінки функції похибки Гаусса, різниці між двома неповними гамма-функціями та інтеграла Френеля. У статті Р. Делавар [7] були також одержані узагальнення та уточнення нерівності Фейєра з деякими новими застосуваннями, зокрема пов'язані з функціями Ейлера.

Зауважимо, що якщо функція f опукла вгору на відрізку $[a, b]$, то знак нерівності в (1) змінюється на протилежний. Опукла вниз на відрізку $[a, b]$ функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на інтервалі (a, b) [8]. На кінцях відрізка ця функція має скінченні границі, причому границя справа у точці $a : f(a+0) \leq f(a)$, границя зліва у точці $b : f(b-0) \leq f(b)$ [8]. Тому підінтегральні функції у нерівності (1) інтегровні за Ріманом.

2. Нерівність Фейєра для функцій двох змінних. Нехай $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямокутник у $\mathbb{R}^2$, $h = h(x, y), (x, y) \in \Delta$ — дійсна функція двох змінних.

Означення 1. Функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ називається *покоординатно опуклою вниз* на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, якщо:

- 1) $\forall x \in [a_1, b_1]$ функція $h(x, \cdot) : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ опукла вниз на відрізку $[a_2, b_2]$;
- 2) $\forall y \in [a_2, b_2]$ функція $h(\cdot, y) : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ опукла вниз на відрізку $[a_1, b_1]$.

Аналогічно визначають *покоординатну опуклість вгору* функції на прямокутнику.

Опукла на прямокутнику функція є *покоординатно опуклою*, але не навпаки. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 1. Функція $h(x, y) = -x \cdot y, x, y \in \Delta = [-1, 1]^2$ є *покоординатно опуклою вниз*. Дійсно, для довільного фіксованого $x \in [-1, 1]$ функція $h = -x \cdot y, y \in \Delta = [-1, 1]$ опукла вниз на відрізку $[-1, 1]$. Аналогічно, для довільного фіксованого $y \in [-1, 1]$ функція $h = -x \cdot y, x \in \Delta = [-1, 1]$ опукла вниз на відрізку $[-1, 1]$.

Але ця функція не є *опуклою вниз* на квадраті Δ як функція двох змінних. Дійсно, для точок $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ маємо: $(0, 0) = \frac{(1, 1) + (-1, -1)}{2}$, але

$$h(0, 0) = 0 > \frac{1}{2} (h(1, 1) + h(-1, -1)) = -1.$$

Теорема 2. Нехай функції $h, g : \Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють умови:

- 1) функція h опукла вниз на прямокутнику Δ ;
- 2) функція g неперервна і невід'ємна на прямокутнику Δ ;
- 3) $\forall y \in [a_2, b_2] : g(a_1 + t, y) = g(b_1 - t, y), t \in [0, \frac{b_1 - a_1}{2}]$;
 $\forall x \in [a_1, b_1] : g(x, a_2 + s) = g(x, b_2 - s), s \in [0, \frac{b_2 - a_2}{2}]$.

Тоді

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \\ & \leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Зауваження 1. Геометрична інтерпретація умови 3) теореми (2) полягає у тому, що поверхня $z = g(x, y), (x, y) \in \Delta$ симетрична відносно кожної з площин $x = \frac{a_1 + b_1}{2}, y = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Доведення. Доведемо теорему (2). Зафіксуємо $x \in [a_1, b_1]$ і покладемо

$$h_1(y) = h(x, y), y \in [a_2, b_2],$$

$$g_1(y) = g(x, y), y \in [a_2, b_2].$$

Функція h_1 опукла вниз на відрізку $[a_2, b_2]$. Функція $g_1 \in C([a_2, b_2])$ і невід'ємна на відрізку $[a_2, b_2]$. Крім того,

$$g_1(a_2 + s) = g(x, a_2 + s) = g(x, b_2 - s) = g_1(b_2 - s), s \in \left[0, \frac{b_2 - a_2}{2}\right].$$

Внаслідок нерівності Фейєра для функцій h_1, g_1 на відрізку $[a_2, b_2]$,

$$\begin{aligned} & h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ & \leq \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Далі, функції $h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right), h(x, a_2), h(x, b_2), x \in [a_1, b_1]$ опуклі вниз на відрізку $[a_1, b_1]$. Функція $\bar{g}(x) = \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy, x \in [a_1, b_1]$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a_1, b_1]$. Внаслідок умови 3),

$$\bar{g}(a_1 + t) = \int_{a_2}^{b_2} g(a_1 + t, y) dy = \int_{a_2}^{b_2} g(b_1 - t, y) dy = \bar{g}(b_1 - t), t \in \left[0, \frac{b_1 - a_1}{2}\right].$$

Внаслідок нерівності Фейєра для функцій $h(\cdot, \frac{a_2 + b_2}{2}), \bar{g}(\cdot)$ на відрізку $[a_1, b_1]$ маємо:

$$\begin{aligned} & h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy = \\ & = h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} \bar{g}(x) dx \leq \end{aligned} \quad (4)$$

$$\leq \int_{a_1}^{b_1} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \bar{g}(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) g(x, y) dy.$$

Подвійну нерівність (3) почленно проінтегруємо на відрізку $[a_1, b_1]$ за змінною x і отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h\left(x, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) g(x, y) dy &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy \leq \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Із нерівностей (4) та (5) слідує

$$h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy \leq \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy. \quad (6)$$

Тепер застосуємо нерівність Фейєра для функцій $\frac{h(\cdot, a_2) + h(\cdot, b_2)}{2}$, $\bar{g}(\cdot)$ на відрізку $[a_1, b_1]$:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} \frac{h(x, a_2) + h(x, b_2)}{2} \bar{g}(x) dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} \bar{g}(x) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Із нерівностей (5) та (7) слідує нерівність:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) g(x, y) dy &\leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right) \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} g(x, y) dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Нерівність (2) еквівалентна нерівностям (6) і (8). Теорема доведена.

Нерівність (2) будемо називати нерівністю Фейєра для функцій двох змінних. Якщо функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ покоординатно опукла вгору на прямокутнику Δ , то знаки нерівності у подвійній нерівності (2) потрібно замінити на протилежні.

Приклад 2. За допомогою нерівності Фейєра оцінимо інтеграл

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy.$$

Позначимо:

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}}, (x, y) \in [-1, 1]^2;$$

$$g(x, y) = x^2 y^4, (x, y) \in [-1, 1]^2.$$

Функція g задовольняє умови 2)-3) теореми (2). Доведемо, що функція $h(x, y)$ покоординатно опукла вгору на квадраті $[-1, 1]^2$. Функція h симетрична відносно змінних x, y . Тому достатньо довести, що $\forall y \in [-1, 1]$ функція $h(x, y)$, $x \in [-1, 1]$ опукла як функція змінної x . Маємо:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{2} (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x^3 = -2x^3 (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -6x^2(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{3}{2}} + 3x^3(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} \cdot 4x^3 = \\
&= (9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} \left(12x^6 - 6x^2(9 + x^4 + y^4) \right) = \\
&= 6x^2(9 + x^4 + y^4)^{-\frac{5}{2}} (2x^4 - 9 - x^4 - y^4) = \\
&= -6x^2 \frac{9 - x^4 + y^4}{(9 + x^4 + y^4)^{\frac{5}{2}}} < 0, x \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Тому $\forall y \in [-1, 1]$ функція $h(x, y)$, $x \in [-1, 1]$ опукла вгору. Внаслідок нерівності Фейєра

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 x^2 y^4 dy &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \\
&\geq \frac{1}{4} \frac{4}{\sqrt{11}} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 x^2 y^4 dy,
\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \frac{4}{\sqrt{11}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}, \\
\frac{4}{45} &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq \frac{4}{20\sqrt{11}}, \\
0,0(8) &\geq \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 \frac{x^2 y^4}{\sqrt{9 + x^4 + y^4}} dy \geq 0,0603.
\end{aligned}$$

У випадку $g(x, y) = 1$, $(x, y) \in \Delta$ нерівність Фейєра (2) для функцій двох змінних переходить у нерівність Ерміта–Адамара [8] для функцій двох змінних. Сформулюємо відповідну теорему.

Теорема 3. Нехай $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, функція $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ покоординатно опукла вниз на прямокутнику Δ . Тоді

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} h(x, y) dy \leq \\
&\leq \frac{1}{4} \left(h(a_1, a_2) + h(a_1, b_2) + h(b_1, a_2) + h(b_1, b_2) \right). \tag{9}
\end{aligned}$$

Зазначимо, що таке узагальнення міститься у монографії [2, с. 316].

3. Інтервальні оцінки подвійних інтегралів покоординатно опуклих функцій. Наведені у цьому підрозділі результати отримані у третьому розділі магістерської роботи [9].

Нехай $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна і покоординатно опукла на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ функція.

Для натурального числа n розглянемо розбиття прямокутника Δ на n^2 прямокутників Q_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$:

$$\lambda_n = \{Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid i, j = 1, \dots, n\},$$

де

$$x_k = a_1 + kh_{1n}, h_{1n} = \frac{b_1 - a_1}{n}, 0 \leq k \leq n;$$

$$y_k = a_2 + kh_{2n}, h_{2n} = \frac{b_2 - a_2}{n}, 0 \leq k \leq n.$$

Застосуємо нерівність Ерміта–Адамара на кожному прямокутнику Q_{ij} :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) &\leq \frac{1}{h_{1n}h_{2n}} \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right). \end{aligned}$$

Помножимо цю подвійну нерівність на $h_{1n}h_{2n}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n} &\leq \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \end{aligned}$$

Підсумуємо ці нерівності по $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n} &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy \leq \tag{10} \\ &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \end{aligned}$$

Внаслідок адитивності подвійного інтеграла Рімана,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{Q_{ij}} f(x, y) dx dy = \int_{\Delta} f(x, y) dx dy. \tag{11}$$

Покладемо

$$A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n}h_{2n}, \tag{12}$$

$$B_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n}h_{2n}. \tag{13}$$

Теорема 4. Нехай функція $f : \Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови:

- 1) $f \in C([a_1, b_1] \times [a_2, b_2])$;
- 2) функція f по координатно опукла вниз на прямокутнику Δ .

Тоді

$$1) \quad \forall n \geq 1 : A_n \leq \int_{\Delta} f(x, y) dx dy \leq B_n; \tag{14}$$

2) $B_n - A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, де A_n, B_n визначені рівностями (12), (13).

Доведення. Зауважимо, що дрібність розбиття $d(\lambda_n) = \sqrt{h_{1n}^2 + h_{2n}^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Суми

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n} h_{2n}, \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{i-1}, y_{j-1}) h_{1n} h_{2n}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_{i-1}, y_j) h_{1n} h_{2n}, \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_{j-1}) h_{1n} h_{2n}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) h_{1n} h_{2n} \end{aligned}$$

містяться у подвійній нерівності (10) і є інтегральними сумами для функції f , розбиття λ_n і відповідних наборів проміжних точок. Отже, кожна з цих сум прямує до $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ при $n \rightarrow \infty$. Із рівностей (11), (12) слідує, що $A_n \rightarrow \int_{\Delta} f(x, y) dx dy, n \rightarrow \infty$ і $B_n \rightarrow \int_{\Delta} f(x, y) dx dy, n \rightarrow \infty$. Тому $B_n - A_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Нерівність (14) з урахуванням позначень (13), (12) та рівності (11) безпосередньо слідує з нерівності (10). Теорема доведена.

Зауваження 2. Якщо умову покоординатної опуклості вниз замінити на умову покоординатної опуклості вгору, то нерівність (14) запишеться у вигляді:

$$\forall n \geq 1 : A_n \geq \int_{\Delta} f(x, y) dx dy \geq B_n; \quad (15)$$

Алгоритм обчислення подвійного інтеграла опуклої функції із заданою точністю $\varepsilon > 0$. Нехай функція $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна і покоординатно опукла вниз на прямокутнику $\Delta = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Нехай, далі $\lambda_n^{(1)} = \{a_1 = x_0, x_1, \dots, x_n = b_1\}$ — рівномірне розбиття відрізка $[a_1, b_1]$ з кроком $h_{1n} = \frac{b_1 - a_1}{n}$ і $\lambda_n^{(2)} = \{a_2 = y_0, y_1, \dots, y_n = b_2\}$ — рівномірне розбиття $[a_2, b_2]$ з кроком $h_{2n} = \frac{b_2 - a_2}{n}$. Зауважимо, що

$$x_k = a_1 + k h_{1n}, 0 \leq k \leq n, \quad y_k = a_2 + k h_{2n}, 0 \leq k \leq n.$$

Послідовно обчислюємо

$$A_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{j-1} + y_j}{2}\right) h_{1n} h_{2n}, n \geq 1,$$

$$B_n = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f(x_{i-1}, y_{j-1}) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j-1}) + f(x_i, y_j) \right) h_{1n} h_{2n}, n \geq 1.$$

Нехай m — натуральне число, при якому $B_m - A_m < 2\varepsilon$. Тоді $\frac{A_m + B_m}{2}$ наближене значення подвійного інтеграла $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ з точністю до ε .

Якщо на n -тому кроці $B_n - A_n > 2\varepsilon$, то продовжуємо обчислення. Якщо $B_n - A_n \leq 2\varepsilon$, то $\frac{A_n + B_n}{2}$ — наближене значення подвійного інтеграла $\int_{\Delta} f(x, y) dx dy$ з точністю до $\varepsilon > 0$.

Приклад 3. Обчислимо з точністю до однієї тисячної інтеграл

$$\int_{[0,1]^2} e^{xy} \cdot xy dx dy.$$

Функція $f(x, y) = e^{xy} \cdot xy$, $(x, y) \in [0, 1]^2$ неперервна на $[0, 1]^2$. Ця функція симетрична відносно змінних x, y . Тому для доведення покоординатної опуклості вниз достатньо $\forall y \in [0, 1]$ дослідити опуклість функції $f(x, y) = e^{xy} \cdot xy$ відносно змінної x на відрізку $[0, 1]$.

Маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 x e^{xy} + y e^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^3 x e^{xy} + y^2 e^{xy} + y^2 e^{xy} \geq 0, x \in [0, 1].$$

Отже, функція f опукла вниз відносно змінної x на відрізку $[0, 1]$. У нашому випадку

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{n^2} \right) \cdot \frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{n^2}, n \geq 1, \\ B_n &= \frac{1}{4n^2} \left(\sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i-1)(j-1)}{n^2} \right) \cdot \frac{(i-1)(j-1)}{n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \exp \left(\frac{(i-1)j}{n^2} \right) \cdot \frac{(i-1)j}{n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \left(\exp \left(\frac{i(j-1)}{n^2} \right) \cdot \frac{i(j-1)}{n^2} + \exp \left(\frac{i \cdot j}{n^2} \right) \cdot \frac{i \cdot j}{n^2} \right) \right), n \geq 1. \end{aligned}$$

Наведемо результати обчислень:

n	A_n	B_n
10	0,399366	0,402418
15	0,399928	0,401283

$B_{15} - A_{15} < 0,002$, $\frac{A_{15}+B_{15}}{2} = 0,400$ — наближене значення інтеграла $\int_{[0,1]^2} e^{xy} \cdot xy dx dy$ з точністю до однієї тисячної.

4. Висновки. У цій статті нерівність Фейєра узагальнена для функцій двох змінних на прямокутнику. Нерівність Ерміта–Адамара для функцій двох змінних застосовано для побудови інтервальних оцінок подвійних інтегралів по прямокутнику.

Список використаної літератури

1. Fejer L. Über die Fourierreihen, II, *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.* 1906. No. 24 pp. 369–390.
2. Dragomir S., Pearce C. Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications. Science Direct Working Paper No S1574-0358(04)70845-X, 2003. 355 p. URL: <https://ssrn.com/abstract=3158351> (дата звернення: 18.03.2025).
3. Tseng KL., Hwang SR., Dragomir S. Fejér–Type Inequalities (I). *J Inequal Appl.* Vol. 2010, No. 531976 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1155/2010/531976>

4. Yildiz C. Some new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for s -convex functions, *Konuralp Journal of Mathematics*. 2016. Vol. 4, No. 2. pp. 70–78.
5. Sarıkaya M. Z., Ertuğral F., Yildırım F. On the Hermite–Hadamard–Fejér type integral inequality for s -convex function. *Konuralp Journal of Mathematics*. 2018. Vol. 6, No. 1. pp. 35–41.
6. Eken Z. Fejer inequality for s -convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*. 2022. Vol. 40, No. 1. pp. 19–34. DOI: <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-02>
7. Delavar R. M. On Fejér's inequality: generalizations and applications. *J Inequal Appl*. 2023, No. 42. pp. 1–28. DOI: <https://doi.org/10.1186/s13660-023-02949-7>
8. Бридун А. М., Бродяк О. Я., Васильків Я. В. Опуклі, гармонійні та субгармонійні функції. Задачі і теореми: навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівського університету ім. І. Франка, 2011. 107 с.
9. Шестаковська І. В. Узагальнення нерівності Ерміта-Адамара: Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня магістра математики / КНУ ім. Т. Шевченка. Київ, 2024. 40 с.

Kurchenko O. O., Syniavska O. O., Shestakovska I. V. Generalization of Fejer's inequality for functions of two variables.

The article generalizes Feuer's inequality for coordinate convex functions of two variables. Using the Hermite-Hadamard inequality for coordinate convex functions of two variables, interval estimates of double integrals over a rectangle are obtained.

Keywords: Feuer's inequality, Hermite-Hadamard inequality, convex function, continuous function, Riemann integrable function.

References

1. Fejer, L. (1906). Über die Fourierreihen. *Math. Naturwiss. Anz. Ungar. Akad. Wiss.*, (24), 369–390 [in Hungarian].
2. Dragomir, S., & Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite–Hadamard Inequalities and applications. *Science Direct Working Paper No S1574-0358(04)70845-X*. Retrieved from https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3158351
3. Tseng, KL., Hwang, SR., & Dragomir, S. (2010). Fejér–Type Inequalities (I). *Journal of Inequalities and Applications*, 2010(531976(1)). <https://doi.org/10.1155/2010/531976>
4. Yildiz, C. (2016) Some new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for s -convex functions. *Konuralp Journal of Mathematics*, 4(2), 70–78.
5. Sarıkaya, M. Z., Ertuğral, F., & Yildırım, F. (2018). On the Hermite–Hadamard–Fejér type integral inequality for s -convex function. *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1), 35–41.
6. Eken, Z. (2022). Fejer inequality for s -convex functions in the fourth sense. *Journal of Mathematical Inequalities*, 40(1), 19–34. <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-02>
7. Delavar, R. M. (2023). On Fejér's inequality: generalizations and applications. *J Inequal Appl*, 42. 1–28. <https://doi.org/10.1186/s13660-023-02949-7>
8. Brydun, A. M., Brodyak, O. Ya., & Vasyukiv, Ya. V. (2011). *Convex, harmonic and subharmonic functions. Problems and theorems: Textbook*. Lviv: Publishing House of the Ivan Franko University of Lviv [in Ukrainian].
9. Shestakovska, I. V. (2024). *Generalization of the Hermite-Hadamard inequality*: (Thesis for a MA degree in Education). T. Shechenko National University of Kyiv, Kyiv [in Ukrainian].

Одержано 01.03.2025

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).44-61](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).44-61)**Т. В. Маловічко¹, Б. В. Панченко²**

¹ Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
tatianamt@protonmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9075-4356>

² АБ «УКРГАЗБАНК»,
головний фахівець
bodik_panchenko@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-3119-9769>

ВЛАСТИВОСТІ ВІНЕРОВОГО ПРОЦЕСУ ЗІ ЗМІННИМ ФАЗОВИМ ПРОСТОРОМ

Для вінерового процесу зі змінним фазовим простором досліджено існування початкового розподілу із заданими фінальними ймовірностями, зосередженого в одній точці, для випадку чотирьох точок A_1, A_2, A_3, A_4 на межі області. Для дифузійного процесу зі змінним фазовим простором досліджено існування початкового розподілу із заданими фінальними ймовірностями.

Ключові слова: вінерів процес, вінерів процес з поглинанням, початковий розподіл.

1. Вступ. Вивчення стохастичних потоків починалось від ідеї розглядати сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь як функції від початкової точки. З розвитком математичних моделей виникла трактовка потоку як сукупності марківських процесів, що певним чином взаємодіють між собою. В тому числі, почали розглядати й потоки зі склеюванням, тобто потоки, траєкторії частинок в яких після зустрічі склеюються в одну.

Такі потоки з'являються як при описі турбулентних явищ, моделей протікання для річкових систем тощо.

Класичним прикладом стохастичного потоку зі склеюванням є потік Арраття [1], який може бути описаний на інтуїтивному рівні як сукупність частинок, що стартують з кожної точки числової прямої, здійснюють броунівський рух та рухаються незалежно до моменту зустрічі, а при зустрічі склеюються та продовжують броунівський рух разом.

Також прикладами стохастичних потоків зі склеюванням можуть бути потоки Харріса у випадку наявності склеювання [2].

Для стохастичного потоку зі склеюванням n -точковий рух є n -вимірним випадковим процесом, координати якого після зустрічі залишаються рівними.

Випадковий процес, що описує рух броунівських частинок, які при зустрічі склеюються, проте не уповільнюються, досліджував А. А. Дороговцев [3, 4].

Метою цієї роботи є дослідження властивостей схожого процесу, який ми будемо називати вінеровим процесом зі змінним фазовим простором, а також його аналогу. Вінерів процес зі змінним фазовим простором починає свій рух в однозв'язній області, на межі якої вибрано скінченну кількість точок $A_1, A_2, \dots, A_n$, що розбивають межу цієї області на n дуг. Він поводить як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу, а потім як одновимірний вінерів процес на відповідній дузі з поглинанням на кінцях.

В роботі [5] досліджувались початкові розподіли, за яких вінерів процес зі змінним фазовим простором зупинявся у точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з наперед заданими ймовірностями.

У цій статті доповнюються та узагальнюються результати роботи [5].

2. Вінерів процес зі змінним фазовим простором. Нехай задана обмежена однозв'язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість точок різних $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

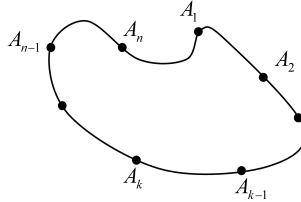


Рис. 1

Будемо розглядати процес $Y_{(x_0, y_0)}(\cdot)$, що стартує з точки $(x_0, y_0) \in Q$ та поводитьься як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу області Q . У цей момент процес Y потрапляє на одну з дуг $\widehat{A_{k-1}A_k}$, а потім поводитьься, як одновимірний вінерів процес на дузі $\widehat{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях.

Цей процес, який ми будемо називати вінеровим процесом зі змінним фазовим простором, можна задати таким чином:

$$Y_{(x_0, y_0)}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w_{(x_0, y_0)}(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\left\{w(\tau) \in \widehat{A_{k-1}A_k}\right\}} \cdot w_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де $w_{(x_0, y_0)}(\cdot)$ — двовимірний вінерів процес, що стартує з точки (x_0, y_0) в області Q , τ — момент першого виходу процесу $w_{(x_0, y_0)}$ на межу цієї області, тобто

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : w_{(x_0, y_0)}(t) \in \partial Q\},$$

$w_{(x_k, y_k)}^{(k)}, k = \overline{1, n}$, — незалежні в сукупності та незалежні від $w_{(x_0, y_0)}$ вінерові процеси на дугах $\widehat{A_{k-1}A_k}$ з поглинанням на кінцях, що стартують з точок $(x_k, y_k) \in \widehat{A_{k-1}A_k}$.

В роботі [5] було доведено, що процес Y є марківським, а також існування початкового розподілу процесу Y , при якому він зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, за умови, що Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею.

Нагадаємо, що точка $a \in \partial Q$ називається регулярною, якщо

$$\forall h > 0 \quad P_x \{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0.$$

При цьому відомо, що для того, щоб точка $a \in \partial Q$ була регулярною, достатньо, щоб зовні області Q існував трикутник з вершиною в точці a .

Також у статті [5] розглядалось питання, чи можливо вказати таку точку в області Q , щоб процес Y , що стартує з неї, зупинявся в точках $A_1, A_2, \dots, A_n \in \partial Q$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Відповідь на це питання для випадку трьох точок на межі A_1, A_2, A_3 була позитивною. Також був наведений приклад для випадку п'яти точок на межі, коли вказана стартова точка не існує. Питання про існування відповідної точки для чотирьох точок на межі області лишалося відкритим.

Ми наведемо приклад для випадку чотирьох точок на межі області, коли вказана стартова точка не існує.

Приклад 1. Нехай область Q є внутрішністю правильного трикутника, точки A_1, A_2, A_3 є вершинами цього трикутника, а точка A_4 є серединою сторони A_1A_3 .

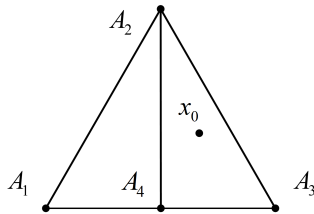


Рис. 2

Позначимо через $\psi_k(x)$ ймовірність того, що процес Y при початковому положенні в точці x зупиниться в точці A_k . Ми покажемо, що точки $x_0, y_0 \in Q$, для яких

$$\psi_1(x_0) = \psi_3(x_0) = \frac{1}{4}, \quad \psi_2(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \psi_4(x_0) = \frac{1}{6},$$

$$\psi_1(y_0) = \psi_3(y_0) = \frac{5}{24}, \quad \psi_2(y_0) = \frac{1}{3}, \quad \psi_4(y_0) = \frac{1}{4},$$

одночасно існувати не можуть, а тому вказати таку точку в області Q , щоб процес Y , що стартує з неї, зупинявся в точках A_1, A_2, A_3, A_4 , можливо не для всіх наперед заданих додатних імовірностей.

Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони A_3A_2 менше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_2 .

Позначимо

$$B_1(y) = \{x \in A_1A_2 : 0 \leq \rho(x, A_1) < y\},$$

$$B_2(y) = \{x \in A_3A_2 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\}.$$

Для довільної точки $x \in A_2A_4$ з симетрії вінерового процесу впливає рівність

$$P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} = P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} &= \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y) \text{ через } A_2 A_4\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\},
 \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_2\} &= \\
 &= \int_{|A_1 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_1 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} = \\
 &= \int_{|A_3 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\} < \\
 &< \int_{|A_3 A_2|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_2|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_2\}.
 \end{aligned}$$

Позначимо

$$C_1(y) = \{x \in A_1 A_3 : 0 \leq \rho(x, A_1) < y\},$$

$$C_2(y) = \{x \in A_1 A_3 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\}.$$

Для довільної точки $x \in A_2 A_4$ з симетрії вінерового процесу впливає рівність

$$P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} = P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned}
 P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} &= \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= \int_{A_2 A_4} P_x \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\} dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 x\} = \\
 &= P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y) \text{ через } A_2 A_4\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\},
 \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned}
& P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_4\} = \\
& = \int_{|A_1 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_1 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} = \\
& = \int_{|A_3 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\} < \\
& < \int_{|A_3 A_4|} \left(1 - \frac{y}{|A_3 A_4|}\right) dP_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\} = \\
& = P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_4\}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\psi_1(x_0) < \psi_3(x_0).$$

Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони $A_3 A_2$ більше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$, то

$$\psi_1(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_1(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_1(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_2 A_4$.

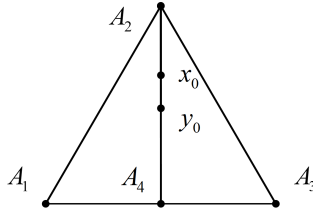


Рис. 3

Разом із процесом

$$Y(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^4 \mathbb{I}_{\{w(\tau) \in A_{k-1} A_k\}} \cdot w_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau)$$

розглянемо процес

$$\tilde{Y}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^3 \mathbb{I}_{\{w(\tau) \in \tilde{A}_{k-1} \tilde{A}_k\}} \cdot \tilde{w}_{w(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де точки $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ є точками A_1, A_2, A_3 відповідно, $\tilde{A}_0$ є точкою A_3 ,

$$\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)} = w_{w(\tau)}^{(2)}, \quad \tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)} = w_{w(\tau)}^{(3)},$$

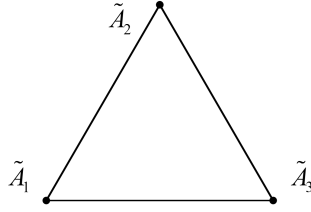


Рис. 4

$\tilde{w}_x^{(1)}$ — незалежний від $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)}$ та $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)}$ вінерів процес на відрізку $\tilde{A}_3\tilde{A}_1$ з поглинанням на кінцях, що стартує з точки $x \in \tilde{A}_3\tilde{A}_1$.

Позначимо через $\tilde{\psi}_k(x)$ ймовірність того, що процес $\tilde{Y}$ при початковому положенні в точці x зупиниться в точці $\tilde{A}_k$,

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \frac{|A_1 y|}{|A_1 A_2|}, & y \in A_1 A_2, \\ \frac{|y A_3|}{|A_2 A_3|}, & y \in A_3 A_2, \\ 0, & y \in A_3 A_1. \end{cases}$$

Тоді

$$\tilde{\psi}_2(x) = E_x \varphi_2(w(\tau)) = \psi_2(x).$$

А тому

$$\tilde{\psi}_2(x_0) = \psi_2(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\psi}_2(y_0) = \psi_2(y_0) = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $x_0, y_0 \in A_2 A_4$, то з симетрії вінерових процесів випливає, що

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{\psi}_2(x_0) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{2} \left(1 - \tilde{\psi}_2(y_0) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_2(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{3},$$

$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_2(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{3}.$$

Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_3$.

Тоді аналогічно до того, як було показано, що

$$P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_2\} < P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_2\},$$

за припущення, що відстань від точки x_0 до сторони $A_3 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$, доводиться, що

$$P_{x_0} \left\{ \tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_1 A_3 \right\} < P_{x_0} \left\{ \tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_1 A_2 \right\}.$$

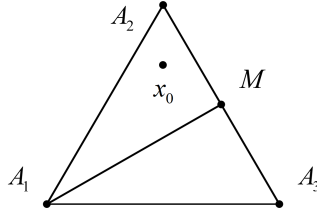


Рис. 5

Позначимо для $y \in (0, \frac{1}{2} |A_2A_3|)$

$$D_1(y) = \{x \in A_2A_3 : 0 \leq \rho(x, A_2) < y\},$$

$$D_2(y) = \{x \in A_2A_3 : 0 \leq \rho(x, A_3) < y\},$$

Для довільної точки x медіани A_1M з симетрії вінерового процесу випливає рівність

$$P_x \{w(\tau) \in D_1(y)\} = P_x \{w(\tau) \in D_2(y)\}.$$

Тому

$$\begin{aligned} P_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} &= \int_{A_1M} P_x \{w(\tau) \in D_2(y)\} dP_{x_0} \{w \text{ потрапляє у } A_1x\} = \\ &= \int_{A_1M} P_x \{w(\tau) \in D_1(y)\} dP_{x_0} \{w \text{ потрапляє у } A_1x\} = \\ &= P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y), \text{ причому } w \text{ перетнув } A_1M\} < P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\}, \end{aligned}$$

а отже,

$$\begin{aligned} P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_2A_3\} - P_{x_0} \{Y \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_2A_3\} &= \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} + \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \frac{y}{|A_2A_3|} dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} - \\ &- \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \frac{y}{|A_2A_3|} dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - \\ &- \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) dP_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\} = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|} \left(1 - \frac{2y}{|A_2A_3|}\right) d(P_{x_0} \{w(\tau) \in D_2(y)\} - P_{x_0} \{w(\tau) \in D_1(y)\}) > 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\psi_2(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони A_1A_2 більше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_3 , то

$$\psi_2(x_0) < \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_2(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_2(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_1A_4$.

З цього випливає, що точки x_0 та y_0 лежать в точці перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$, а отже, співпадають. Це протирічить тому, що

$$\frac{1}{6} = \psi_4(x_0) \neq \psi_4(y_0) = \frac{1}{4}. \quad \square$$

3. Дифузійний процес зі змінним фазовим простором. Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = a(\xi_1(t))dt + b(\xi_1(t))dw_1(t), \\ d\xi_2(t) = a(\xi_2(t))dt + b(\xi_2(t))dw_2(t), \end{cases}$$

де $w_1(t), w_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси.

Нехай функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , тобто

$$\begin{aligned} \exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |a(x_1) - a(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad |b(x_1) - b(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Тоді для довільної точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ вказана система має єдиний сильний розв'язок $\xi_{(x_0, y_0)}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ з початковою умовою $\xi(0) = (x_0, y_0)$, причому

$$\forall T \geq 0 \quad E \max_{t \in [0, T]} (\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)) < +\infty.$$

Нехай задана обмежена однозв'язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість різних точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

Розглянемо також сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\xi_{x_k}^{(k)}(t) = a(\xi_{x_k}^{(k)}(t))dt + b(\xi_{x_k}^{(k)}(t))dw^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, n},$$

з початковими умовами $\xi_{x_k}^{(k)}(0) = x_k$, де $w^{(k)}(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси, причому процеси $w_1(t), w_2(t), w^{(1)}(t), w^{(2)}(t), \dots, w^{(n)}(t)$ незалежні в сукупності.

Позначимо

$$\bar{\xi}_{x_k}^{(k)}(t) = \begin{cases} h_k^{-1} \left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(t) \right), & t < \tau_k, \\ h_k^{-1} \left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(\tau_k) \right), & t \geq \tau_k, \end{cases}$$

де відображення h_k^{-1} є оберненим до відображення h_k , що ставить у відповідність кожній точці M дуги $\widehat{A_{k-1}A_k}$ довжину дуги $\widehat{A_{k-1}M}$, τ_k — момент першого виходу процесу $\xi_{h(x_k)}^{(k)}$ з інтервалу $(0, |A_{k-1}A_k|)$, тобто

$$\tau_k = \inf \left\{ t \geq 0 : \xi_{h(x_k)}^{(k)}(t) \in \{A_{k-1}, A_k\} \right\}.$$

Будемо розглядати процес

$$X_{(x_0, y_0)}(t) = \mathbb{I}_{\{t < \tau\}} \cdot \xi_{(x_0, y_0)}(t) + \mathbb{I}_{\{t \geq \tau\}} \cdot \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\left\{ \xi(\tau) \in \widehat{A_{k-1}A_k} \right\}} \cdot \bar{\xi}_{\xi(\tau)}^{(k)}(t - \tau),$$

де τ — момент першого виходу процесу $\xi_{(x_0, y_0)}$ на межу області Q , тобто

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : \xi_{(x_0, y_0)}(t) \in \partial Q \right\}.$$

Процес X ми будемо називати дифузійним процесом зі змінним фазовим простором.

Нашою метою є узагальнити результати, одержані у роботі [5] для вінерового процесом зі змінним фазовим простором, для процесу X .

Теорема 1. *Процес $X_{(x_0, y_0)}(t)$ є марківським.*

Доведення. Позначимо через $\hat{\xi}_{X(t)}$ розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\hat{\xi}_1(s) = a\left(\hat{\xi}_1(s)\right)ds + b\left(\hat{\xi}_1(s)\right)d\hat{w}_1(s), \\ d\hat{\xi}_2(s) = a\left(\hat{\xi}_2(s)\right)ds + b\left(\hat{\xi}_2(s)\right)d\hat{w}_2(s), \\ \hat{\xi}_1(0) = \hat{\xi}_2(0) = X(t), \end{cases}$$

де $\hat{w}_1(t)$, $\hat{w}_2(t)$ — незалежні одновимірні вінерові процеси, а

$$\tau_{X(t)} = \inf \left\{ s \geq 0 : \hat{\xi}_{X(t)}(s) \in \partial Q \right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \forall t \geq 0 \quad \forall s \geq t \quad \forall B \in \mathcal{B}(\bar{Q}) \\ & P\{X(s) \in B \mid X(r), r \leq t\} = \\ & = P\left\{X(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t\right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n P\left\{X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t\right\} = \\ & = P\left\{s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t\right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n P\left\{t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t\right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = P \left\{ s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} > s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \mid X(r), r \leq t \right\} + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \cdot \\
& \cdot P \left\{ \tau_{X(t)} \leq s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)}) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \right. \\
& \left. \bar{\xi}_{\hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)})}^{(k)}(s-t-\tau_{X(t)}) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(r), r \leq t \right\} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} > s-t, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_{X(t)} \leq s-t, \right. \\
& \left. \hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)}) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{\hat{\xi}_{X(t)}(\tau_{X(t)})}^{(k)}(s-t-\tau_{X(t)}) \in B \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(t) \right\} = \\
& = P \left\{ s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ t < \tau \leq s, X(s) \in B \cap \widehat{A_{k-1}A_k} \mid X(t) \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n P \left\{ \tau \leq t, X(t) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{X(t)}^{(k)}(s-t) \in B \mid X(t) \right\} = \\
& = P \left\{ X(s) \in B \mid X(t) \right\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Оскільки події $\{\tau_x > t\}$, $\{\xi_x(t) \in B\}$, $\{\bar{\xi}_x^{(k)}(t) \in B\} \in \mathcal{F}$, то функція

$$\begin{aligned}
P(x, t, s, B) & = P \{ X(s) \in B \mid X(t) = x \} = \\
& = \mathbb{I}_{\{\tau_x > t\}} P \left\{ \tau_x > s-t, \xi_x(t-s) \in B \cap Q \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P \left\{ \tau_x \leq s-t, \xi_x(\tau_x) \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \bar{\xi}_{\xi_x(\tau_x)}^{(k)}(s-t-\tau_x) \in B \right\} +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \mathbb{I} \left\{ x \in \overbrace{A_{k-1} A_k} \right\} P \{ \bar{\xi}_x^{(k)}(s-t) \in B \}, \quad 0 \leq t \leq s, \quad B \in \mathcal{B}(\bar{Q}),$$

є вимірною, тобто процес X має регулярну ймовірність переходу. Звідси випливає, що

$$P \{ X_x(t_1) \in B_1, \dots, X_x(t_m) \in B_m \} = \int_{B_1} P(x, 0, t_1, dy_1) \cdots \int_{B_m} P(y_{m-1}, t_{m-1}, t_m, dy_m)$$

є вимірною функцією від x .

Нехай μ — ймовірнісна міра на Q . Покладемо тоді

$$P \{ X_\mu(t_1) \in B_1, \dots, X_\mu(t_m) \in B_m \} = \int_Q P \{ X_x(t_1) \in B_1, \dots, X_x(t_m) \in B_m \} d\mu(x).$$

Оскільки ці скінченновимірні розподіли узгоджені, то вони задають випадковий процес, який будемо позначати X_μ та будемо називати процесом X з початковим розподілом μ .

Дослідимо, чи існує початковий розподіл процесу X , при якому він зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Лема 1. *Нехай Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що*

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

функція v неперервна на ∂Q , а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , тобто

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |a(x_1) - a(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|, \quad |b(x_1) - b(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \neq 0,$$

а функція θ задається формулою

$$\forall x \in Q \quad \theta(x) = E_x v(\xi(\tau)).$$

Тоді

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta(x) = v(c).$$

Доведення. Для довільної точки $c \in \partial Q$ та довільного $r > 0$ позначимо

$$\Gamma_r = \{ y \in \partial Q : \rho(y, c) < 2r \}$$

та доведемо, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} P_x \{ \xi(\tau) \in \Gamma_r \} = 1.$$

Позначимо для $h > 0$

$$z(h) = \max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\|.$$

$$\begin{aligned} Ez^2(h) &= E \left(\max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\| \right)^2 = E \max_{0 \leq t \leq h} \|\xi(t) - \xi(0)\|^2 = \\ &= E \max_{0 \leq t \leq h} \sum_{k=1}^2 \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds + \int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \leq \\ &\leq 2E \max_{0 \leq t \leq h} \sum_{k=1}^2 \left(\left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 + \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^2 \left(E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 + E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 &\leq E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t ds \cdot \int_0^t a^2(\xi_k(s)) ds \right) = \\ &= E \max_{0 \leq t \leq h} \left(t \int_0^t a^2(\xi_k(s)) ds \right) = E \left(h \int_0^h a^2(\xi_k(s)) ds \right). \end{aligned}$$

З умови Ліпшиця для функції $a(x)$ випливає, що

$$\begin{aligned} a^2(\xi_k(s)) &\leq (|a(\xi_k(s)) - a(0)| + |a(0)|)^2 \leq 2(a(\xi_k(s)) - a(0))^2 + 2a^2(0) \leq \\ &\leq 2L^2 |\xi_k(s) - 0|^2 + 2a^2(0) = 2L^2 \xi^2(s) + 2a^2(0). \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s)) ds \right)^2 &\leq hE \int_0^h (2L^2 \xi^2(s) + 2a^2(0)) ds \leq \\ &\leq h^2 E \left(2L^2 \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2a^2(0) \right) = h^2 \left(2L^2 E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2a^2(0) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

оскільки за умов леми

$$E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) < +\infty.$$

За нерівністю Дуба при $p = 2$

$$E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 \leq 4E \left(\int_0^h b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 = 4E \int_0^h b^2(\xi_k(s)) d(s).$$

З умови Ліпшиця для функції $b(x)$ випливає, що

$$b^2(\xi_k(s)) \leq 2L^2 \xi^2(s) + 2b^2(0).$$

Тому

$$\begin{aligned} E \max_{0 \leq t \leq h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s)) dw_k(s) \right)^2 &\leq 4E \int_0^h (2L^2 \xi^2(s) + 2b^2(0)) d(s) \leq \\ &\leq 4hE \left(2L^2 \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2b^2(0) \right) = 4h \left(2L^2 E \max_{0 \leq s \leq h} \xi^2(s) + 2b^2(0) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$E z^2(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

тобто $z(h)$ збігається до 0 у середньому квадратичному, звідки випливає і збіжність за ймовірністю, тобто

$$\forall r > 0 \quad P\{|z(h)| \geq r\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

тобто

$$\forall r > 0 \quad P\{z(h) < r\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $h > 0$, що

$$P\{z(h) < r\} > 1 - \varepsilon.$$

Оскільки за умовою леми

$$P_x\{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

то існує таке $\delta \in (0, r)$, що

$$\forall x \in \{y \in Q : \rho(y, a) < \delta\} \quad P_x\{\tau < h\} > 1 - \varepsilon.$$

Якщо $z(h) < r$ та $\tau < h$, то процес ξ за час h встигає вийти на межу області Q , відхилившись від стартової точки на відстань меншу, ніж r . Тому

$$\xi(\tau) \in \Gamma_r.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} P\{\xi(\tau) \in \Gamma_r\} &\geq P_x\{z(h) < r, \tau < h\} = 1 - P_x\left(\{z(h) \geq r\} \cup \{\tau \geq h\}\right) \geq \\ &\geq 1 - P_x\{z(h) \geq r\} - P_x\{\tau \geq h\} = P_x\{z(h) < r\} + P_x\{\tau < h\} - 1 > 1 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in Q}} P_x\{\xi(\tau) \in \Gamma_r\} = 1.$$

Для $x \in Q$ позначимо через μ_x розподіл $\xi(\tau)$ за умови, що $\xi(0) = x$, тобто

$$\forall A \in \mathcal{B}(\partial Q) \quad \mu_x(A) = P_x\{\xi(\tau) \in A\}.$$

Тоді

$$\theta(x) = E_x v(\xi(\tau)) = \int_{\partial Q} v(y) d\mu_x(y).$$

Оскільки функція v неперервна на ∂Q , то для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної точки $c \in \partial Q$ існує таке число $r > 0$, що

$$\forall y \in \Gamma_r \quad |v(y) - v(c)| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \theta(x) - v(c) &= \int_{\partial Q} v(y) d\mu_x(y) - v(c) \int_{\partial Q} d\mu_x(y) = \\ &= \int_{\Gamma_r} (v(y) - v(c)) d\mu_x(y) + \int_{\partial Q \setminus \Gamma_r} (v(y) - v(c)) d\mu_x(y) \leq \\ &\leq \varepsilon \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| \mu_x(\partial Q \setminus \Gamma_r) = \varepsilon \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| (1 - \mu_x(\Gamma_r)). \end{aligned}$$

Як зазначалось вище, існує таке $\delta \in (0, r)$, що

$$\forall x \in \{y \in Q : \rho(y, a) < \delta\} \quad \mu_x(\Gamma_r) > 1 - 2\varepsilon.$$

Для таких точок x

$$\theta(x) - v(c) < \varepsilon + 2 \max_{y \in \partial Q} |v(y)| \cdot 2\varepsilon = \left(1 + 4 \max_{y \in \partial Q} |v(y)|\right) \varepsilon,$$

тобто

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta(x) = v(c). \quad \square$$

Зауваження 1. Якщо функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця, Q — обмежена замкнена множина з межею ∂Q та існує така функція $u \in C^2(G)$, що

$$\begin{cases} Lu(x) = -1, & x \in Q, \\ u(x) = 0, & x \in \partial Q, \end{cases}$$

де

$$Lu = \sum_{k=1}^2 a(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 b^2(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

то

$$\forall x \in Q \quad E_x \tau = u(x),$$

а з нерівності Чебишова випливає, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{\tau > h\} \leq \frac{E_x \tau}{h} = \frac{u(x)}{h} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0.$$

Теорема 2. Нехай Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow a} 0,$$

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \partial Q$, а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x , причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \neq 0.$$

Тоді існує початковий розподіл процесу X , при якому X зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Доведення. Для $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через $\theta_k(x)$ ймовірність того, що процес $X_x(t)$ зупиниться в точці A_k . Будемо шукати шуканий розподіл у вигляді

$$\mu = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k},$$

де $x_k \in Q$, $k = \overline{1, n}$.

Для того, щоб така міра μ задовольняла умови теореми, необхідно та достатньо, щоб

$$\begin{aligned} P \{ X_\mu \text{ зупиняється в точці } A_j \} &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_Q P \{ X_x \text{ зупиняється в точці } A_j \} d\mu(x) &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n P \{ X_{x_i} \text{ зупиняється в точці } A_j \} c_i &= p_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \theta_j(x_i) c_i &= p_j, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Для довільної точки $x \in G$

$$\theta_k(x) = E_x v_k(\xi(\tau)),$$

де $v_k(y)$ — це ймовірність, що процес X_y , що стартує з точки $y \in \partial G$, зупиниться в точці A_k . Відомо, що

$$v_k(y) = \begin{cases} 0, & y \in \widehat{A_{k-1}A_k} \cup \widehat{A_kA_{k+1}}, \\ \frac{g(h_{k-1}(y)) - g(0)}{g\left(\left|\widehat{A_{k-1}A_k}\right|\right) - g(0)}, & y \in \widehat{A_{k-1}A_k}, \\ \frac{g\left(\left|\widehat{A_kA_{k+1}}\right|\right) - g(y)}{g\left(\left|\widehat{A_kA_{k+1}}\right|\right) - g(0)}, & y \in \widehat{A_kA_{k+1}}, \end{cases}$$

де функція $g(x)$ не є сталою, причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a(x) g'(x) + \frac{1}{2} b^2(x) g''(x) = 0,$$

тобто функцію $g(x)$ можна вибрати у вигляді

$$g(x) = \int_0^x \exp \left\{ - \int_0^y \frac{2a(z)}{b^2(z)} dz \right\} dy.$$

З умови

$$\forall c \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x \{ \tau > h \} \xrightarrow[x \in Q]{x \rightarrow c} 0$$

та з неперервності v_k на межі області Q за лемою випливає, що

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ x \in Q}} \theta_k(x) = v_k(c), \quad k = \overline{1, n},$$

для всіх точок $c \in \partial Q$.

Розглянемо n послідовностей $\left\{ x_i^{(k)} \right\}_{k=1}^n$, $i = \overline{1, n}$, таких, що

$$x_i^{(k)} \in Q, \quad i = \overline{1, n}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = A_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) = v_k(A_i) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Визначник системи

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} c_i = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Позначимо $\Delta^{(k)}$ визначник системи

$$\sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = p_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^{(k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \det \left(\theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right)_{i,j=1}^n = \\ &= \det \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right)_{i,j=1}^n = \det (\delta_{ij})_{i,j=1}^n = \Delta = 1. \end{aligned}$$

А отже, починаючи з деякого номера K , система

$$\sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = p_j, \quad j = \overline{1, n},$$

має єдиний розв'язок $\left(c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)} \right) \in \mathbb{R}^n$.

За формулами Крамера

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_i^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки всі ймовірності p_i додатні, то для достатньо великих номерів k всі числа $c_i^{(k)}$ також додатні. Їх сума дорівнює одиниці, оскільки

$$\sum_{i=1}^n c_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n p_j = 1.$$

Таким чином, для достатньо великих номерів k міра

$$\mu = \sum_{i=1}^n c_i^{(k)} \delta_{x_i^{(k)}}$$

задовольняє всі умови теореми. $\square$

4. Висновки. Для вінерового процесу зі змінним фазовим простором, було досліджено існування початкової точки, стартуючи з якої, процес зупинявся б в точках в чотирьох точках A_1, A_2, A_3, A_4 на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями. Було наведено приклад, коли такої точки не існує.

Також був побудований дифузійний процес зі змінним фазовим простором. Для нього було доведено марківську властивість та теорему про існування початкового розподілу, при якому цей процес зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Список використаної літератури

1. Arratia R. A. Coalescing Brownian motions on the line. PhD thesis / The University of Wisconsin. Madison, Ann Arbor, MI. 1979. P. 134.
2. Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 . *Stochastic Processes and their Applications*. 1984. Vol. 17, No. 2. pp. 187–210. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0304-4149(84)90001-2)
3. Dorogovtsev A. A. Some remarks on a Wiener flow with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. Vol. 57, No. 10. pp. 1550–1558. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0013-9>
4. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. *Theory of Stochastic Processes*. 2004. Vol. 10(26), No. 3–4. pp. 21–25. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0611750>
5. Malovichko T. V. Properties of a wiener process with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, No. 4. pp. 551–572. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0084-7>

Malovichko T. V., Panchenko B. V. Properties of the Wiener Process with a Variable Phase Space.

The existence of an initial distribution with given final probabilities, concentrated at a single point, has been studied for the Wiener process with a variable phase space in

the case of four points A_1, A_2, A_3, A_4 on the boundary of the region. The existence of an initial distribution with given final probabilities has also been investigated for the diffusion process with a variable phase space.

Keywords: Wiener process, Wiener process with absorption, initial distribution.

References

1. Arratia, R. A. (1979). *Coalescing Brownian motions on the line*. (Extended abstract of candidate's thesis). The University of Wisconsin. Madison, Ann Arbor, MI.
2. Harris, T. E. (1984). Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R_1 . *Stochastic Processes and their Applications*, 17(2), 187–210. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0304-4149(84)90001-2)
3. Dorogovtsev, A. A. (2005). Some remarks on a Wiener flow with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57(10), 1550–1558. <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0013-9>
4. Dorogovtsev, A. A. (2004). One Brownian stochastic flow. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26(3–4)), 21–25. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0611750>
5. Malovichko, T. V. (2006). Properties of a wiener process with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*, 58(4), 551–572. <https://doi.org/10.1007/s11253-006-0084-7>

Одержано 19.11.2024

UDC 512.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).62-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).62-71)**I. O. Melnyk¹, A. I. Andrushko²**

¹ Ivan Franko National University of Lviv,
Associate Professor of the Department of Algebra, Topology and Fundamentals of Mathematics,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
ivannamelnyk@yahoo.com, ivanna.melnyk@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7650-5190>

² Ivan Franko National University of Lviv,
Ph.D. student, Department of Algebra, Topology and Fundamentals of Mathematic
andrii.andrushko@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9265-8549>

SEMIMODULE OF SEMIRING DERIVATIONS

We study derivations of **semirings**, **differential semirings** and the set of all derivations on a semiring. The notion of a **semiring derivation** is traditionally defined as an additive map satisfying the Leibnitz rule. In the paper, we give new examples of semiring derivations, prove some of their properties. We also prove that the set of all derivations on a semiring forms a **semimodule** over its center. We show that the commutator of any two derivations is contained in a **subsemimodule** $V(M)$ of elements of M having additive inverse.

Keywords: semiring derivation, semimodule, semiring, subsemimodule, differential semiring.

1. Introduction and preliminaries. Throughout the paper $\mathbb{N}$ denotes the set of positive integers and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ the set of non-negative integers.

The notion of a semiring derivation is defined in [3] as an additive map satisfying the Leibnitz rule. In [2] the authors investigated some simple properties of semiring derivations. The objective of this paper is to give new examples of semiring derivations, further explore their properties and investigate the semimodule of the semiring derivations.

Let R be a nonempty set and let $+$ and $\cdot$ be binary operations on R named addition and multiplication respectively. $(R, +, \cdot)$ is called a *semiring* if the following conditions hold:

- 1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ for all $a, b, c \in R$;
- 2) $(ab)c = a(bc)$ for all $a, b, c \in R$;
- 3) $(a + b)c = ac + bc$ and $a(b + c) = ab + ac$ for all $a, b, c \in R$.

A semiring which is not a ring is called a *proper semiring*. A subset of R closed under addition and multiplication is called a *subsemiring* of R .

The *centre* of a semiring R is a set $Z(R) = \{r \in R \mid rs = sr \ \forall s \in R\}$. It is a subsemiring of R . An element $r \in Z(R)$ is called *central*.

If not stated otherwise R denotes a semiring. A semiring $(R, +, \cdot)$ is called *additively commutative* if $+$ is a commutative binary operation on R . A semiring $(R, +, \cdot)$ is said to be *multiplicatively commutative* if $\cdot$ is commutative on R . It is said to be *commutative* if both $+$ and $\cdot$ are commutative.

An element $0 \in R$ is called *zero* if $a + 0 = 0 + a = a$ for all $a \in R$. An element $1 \in R$ is called *identity* if $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for all $a \in R$. Suppose $1 \neq 0$, otherwise

$R = \{0\}$. Zero $0 \in R$ is called (*multiplicatively*) *absorbing* if $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ for all $a \in R$. Note that a multiplicatively absorbing zero $0 \in R$ cannot be additively absorbing unless R contains just one element.

An element $a \in R$ is called a unit if there exists $b \in R$ such that $ab = ba = 1$. The set of all units of R is denoted by $U(R)$. $1 \in U(R)$ and $0 \notin U(R)$.

Many authors define a semiring as additively commutative semirings in the above sense. Moreover, Golan considers additively commutative semirings with zero.

An element $a \in R$ is called *left additively cancellable* if $a + b = a + c$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. An element $a \in R$ is called *right additively cancellable* if $b + a = c + a$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. An element $a \in R$ is called *additively cancellable* if it is both left and right additively cancellable. Denote by $K^+(R)$ the set of all additively cancellable elements of R . A semiring R is called (*left, resp. right*) *additively cancellative* if every element of R is (left, resp. right) additively cancellable.

Similarly we can define multiplicatively (left, right) cancellable elements and multiplicatively (left, right) cancellative semirings. An element $a \in R$ is called *left multiplicatively cancellable* if $a \cdot b = a \cdot c$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. An element $a \in R$ is called *right multiplicatively cancellable* if $b \cdot a = c \cdot a$ follows $b = c$ for all $b, c \in R$. An element $a \in R$ is called *multiplicatively cancellable* if it is both left and right multiplicatively cancellable. Denote by $K^\times(R)$ the set of all multiplicatively cancellable elements of R . Clearly any unit of R is multiplicatively cancellable and $1 \in U(R) \subset K^\times(R)$. Moreover, $0 \notin K^\times(R)$ and no multiplicatively cancellable element of R is a zero divisor. A semiring R is called (*left, resp. right*) *multiplicatively cancellative* if every element of R is (left, resp. right) multiplicatively cancellable. $K^\times(R)$ is a submonoid of $(R, \cdot)$.

An element $a \in R$ is called *additively idempotent* if $a + a = a$. Denote by $I^+(R)$ the set of all additively idempotent elements of R . Remind that $K^+(R) \cap I^+(R) = \{0\}$. An element $a \in R$ is called *multiplicatively idempotent* if $a \cdot a = a$. A semiring R is called *additively (multiplicatively) idempotent* if every element of R is additively (multiplicatively) idempotent.

Let R be an additively commutative semiring with absorbing zero 0_R . A left semimodule over a semiring R is a commutative additive monoid $(M, +)$ with additive identity 0_M together with a scalar multiplication $R \times M \rightarrow M$ (sending (r, m) to rm) such that $(rs)m = r(sm)$, $(r + s)m = rm + sm$, $r(m + n) = rm + rn$ and $0_R \cdot m = r \cdot 0_M = 0_M$ for all $r, s \in R$ and $m, n \in M$.

Additively idempotent semirings are of great interest due to their applications. They are widely known as idempotent semirings. For more information on semirings, semimodules, including those with derivations we refer the reader to [3–8].

2. Differential semirings and semiring derivations. Let R be a semiring. A map $\delta: R \rightarrow R$ is called a *derivation on R* if for any $a, b \in R$ the following conditions hold

- 1) $\delta(a + b) = \delta(a) + \delta(b)$;
- 2) $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$.

The definition of a derivation on an additively commutative semiring with absorbing zero was given by Golan in [3], and generalized for semirings without these conditions by M. Chandramouleeswaran and V. Thiruvani [2]. A semiring R equipped

with a derivation δ is called *differential* with respect to the derivation δ , or δ -*semiring*, and denoted by (R, δ) [2]. Denote the set of all derivations on R by $\text{Der } R$.

Example 1. Let R be a semiring. Consider the following subsemiring $S \subseteq M_3(R)$ with respect to ordinary matrix addition and multiplication

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}.$$

A map $\delta: S \rightarrow S$, defined by

$$\delta \left(\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

is a derivation on S . Thus (S, δ) is a differential semiring.

Proposition 1. *If (R, δ) is a differential semiring then the matrix semiring $M_n(R)$ is a differential semiring.*

Proof Define a map $\Delta: M_n(R) \rightarrow M_n(R)$ elementwise. For a matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ define $\Delta(A) = (\delta(a_{ij}))_{i,j=\overline{1,n}}$. Prove that Δ is a derivation on $M_n(R)$.

Let $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ and $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Then $\Delta(A + B) = (\delta(a_{ij} + b_{ij}))_{i,j=\overline{1,n}} = (\delta(a_{ij}) + \delta(b_{ij}))_{i,j=\overline{1,n}} = (\delta(a_{ij}))_{i,j=\overline{1,n}} + (\delta(b_{ij}))_{i,j=\overline{1,n}} = \Delta(A) + \Delta(B)$. Similarly $\Delta(A \cdot B) = \Delta(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})_{i,j=\overline{1,n}} = (\sum_{k=1}^n \delta(a_{ik}b_{kj}))_{i,j=\overline{1,n}} = (\sum_{k=1}^n (\delta(a_{ik})b_{kj} + a_{ik}\delta(b_{kj})))_{i,j=\overline{1,n}} = (\sum_{k=1}^n \delta(a_{ik})b_{kj})_{i,j=\overline{1,n}} + (\sum_{k=1}^n a_{ik}\delta(b_{kj}))_{i,j=\overline{1,n}} = \Delta(A) \cdot B + A \cdot \Delta(B)$.

Example 2. Consider the following example [1] of a two-element semiring $S_2 = \{0, 1\}$ under addition and multiplication defined by the following tables

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Semiring S_2 is additively commutative, additively idempotent but not additively cancellative, and zero is not absorbing. It is easily seen that the identity map $\delta_1 = id_R$ ($id_R(a) = a$ for all $a \in R$) and the map $\delta_2: S_2 \rightarrow S_2$, given by $\delta_2(a) = 1$ for all $a \in S_2$, are derivations on S_2 . Here $\text{Der } S_2 = \{\delta_1, \delta_2\}$. Hence it is not generally true that $\delta(0) = \delta(1) = 0$ in a semiring. Note that the zero map is not a derivation on S_2 . This motivates the following easy-to-check proposition

Proposition 2. *If R contains absorbing (left and right) zero then the zero map $0: R \rightarrow R$ (i. e. $0(r) = 0$ for all $r \in R$) is a derivation on R .*

If a zero map $0: R \rightarrow R$ is a derivation on R it is called a *trivial derivation*. Every semiring with absorbing zero is differential with respect to trivial derivation. Obviously, every ring is differential as a semiring with respect to trivial derivation.

Proposition 3. *The identity map $id_R: R \rightarrow R$ is a derivation on R in each of the following cases:*

- 1) R is additively cancellative and $R^2 = (0)$;
- 2) R is an additively idempotent semiring.

Proof. The identity map is obviously additive. Let $a, b \in R$. The equality $id_R(ab) = id_R(a) \cdot b + a \cdot id_R(b)$ holds if and only if $ab = ab + ab$. The second part is shown by Golan [3] for semirings in his sense.

Clearly, for an additively idempotent semiring R with $1 \neq 0$ there exists a derivation δ on R such that $\delta(1) = 1$. This does not agree (contradicts) to a well-known fact for differential rings with $1 \neq 0$ that 1 is constant with respect to any ring derivation.

Proposition 4. *Let R be a semiring with absorbing zero. For any semiring derivation $\delta: R \rightarrow R$ we have $\delta(0) = 0$.*

Proof. It follows from $\delta(0) = \delta(0 \cdot 0) = \delta(0) \cdot 0 + 0 \cdot \delta(0) = 0 + 0 = 0$.

Proposition 5. *If R is additively cancellative semiring, $\delta: R \rightarrow R$ is a derivation then $\delta(1) = 0$ and $\delta(0) = 0$.*

Proof. Since R is additively cancellative, it follows from $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$. By the sum rule $\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0) = 2\delta(0)$. If R is a semiring such that $\forall a \in R \ 2a = 0$, then $\delta(1) = 0$ and $\delta(0) = 0$.

Proposition 6. *If $\delta: R \rightarrow R$ is a semiring derivation R such that $\forall a \in R \ 2a = 0$, then $\delta(1) = 0$ and $\delta(0) = 0$.*

Proof. By the product rule, $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) \cdot 1 + 1 \cdot \delta(1) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$. By the sum rule $\delta(0) = \delta(0 + 0) = \delta(0) + \delta(0) = 2\delta(0)$. If R is a semiring such that $\forall a \in R \ 2a = 0$, then $\delta(1) = 0$ and $\delta(0) = 0$.

Definition. Call a semiring (with absorbing zero) *differentially trivial* if $Der(R) = \{0\}$.

Example 3. Find all derivations on the semiring $\mathbb{N}_0$. Let δ be any derivation on R . Since a proper semiring $\mathbb{N}_0$ is additively cancellative (see [3], p. 49) for all $n \in \mathbb{N}$ we have $\delta(n) = \delta(\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n) = n \cdot \delta(1) = 0$. Hence, $\mathbb{N}_0$ is a differentially trivial semiring.

Example 4. The semiring $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, +, \cdot)$ obtained from $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ by adjoining a doubly absorbing element ∞ is not differentially trivial. The map

$$\delta(a) = \begin{cases} \infty, & a = \infty; \\ 0, & a \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

is a nontrivial derivation on $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Note that it is not additively cancellative.

Definition. An element $r \in R$ is called *constant* under the derivation δ if $\delta(r) = 0$.

Clearly, 0 and 1 are constants in any additively cancellative semiring containing these elements. Any natural number is a constant under the trivial derivation.

Example 5. In a semiring $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$ with respect to ordinary addition and multiplication under the derivation $d: S \rightarrow S$ given by $d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ for each $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ $d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hence, each diagonal matrix of S is constant.

Example 6. Matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ are constant under the derivation in the Example 1.

Proposition 7. *Let R be additively cancellative semiring. Then every additively idempotent element $a \in R$ is a constant with respect to any derivation δ on R .*

Proof. Since R is additively cancellative $\delta(a) = \delta(a + a) = \delta(a) + \delta(a)$ follows $\delta(a) = 0$.

A derivation $\delta: R \rightarrow R$ is said to be *commuting* $r \cdot \delta(r) = \delta(r) \cdot r$ for all $r \in R$.

Proposition 8. *Let R be additively cancellative entire semiring. Then every multiplicatively idempotent element $a \in R$ is a constant with respect to any commuting derivation δ .*

Proof. Let $a \in R$ be any multiplicatively idempotent element. Suppose $a \neq 0$; otherwise clear. Taking the derivative $\delta(a) = \delta(a \cdot a) = \delta(a) \cdot a + a \cdot \delta(a)$. Multiplying by a on the left $a \cdot \delta(a) = a \cdot \delta(a) \cdot a + a^2 \cdot \delta(a)$. By idempotency and additive cancelativeness we get $a \cdot \delta(a) = a \cdot \delta(a) \cdot a + a \cdot \delta(a)$ and $a \cdot \delta(a) \cdot a = 0$. By commutativity and idempotency we have $a \cdot \delta(a) = 0$. Since R contains no zero divisors and $a \neq 0$, then $\delta(a) = 0$.

Note that in the additively cancellative semiring the only additively idempotent element is 0. It is clearly constant.

A subsemiring S of a differential semiring (R, δ) is called *differential* if $\delta(S) \subseteq S$.

Proposition 9. *Let (R, δ) be an additively cancellative additively commutative differential semiring with the center $Z(R)$. Then $Z(R)$ is a differential subsemiring of R .*

Proof. Let $a \in Z(R)$, $b \in R$. We have $\delta(ab) = \delta(ba)$. Then $\delta(ab) = \delta(a) \cdot b + a \cdot \delta(b) = \delta(a) \cdot b + \delta(b) \cdot a$. On the other hand $\delta(ba) = \delta(b) \cdot a + b \cdot \delta(a)$. Since R is additively cancellative and additively commutative we have $\delta(a) \cdot b = b \cdot \delta(a)$. Hence, $\delta(a) \in Z(R)$.

Proposition 10. *The set $C^\delta(R) = \{a \in R \mid \delta(a) = 0\}$ of all constants of R with respect to the derivation δ forms a differential subsemiring of R .*

Proof. It is shown in [2] that $C^\delta(R)$ is a subsemiring of R . If $a \in C^\delta(R)$ then $\delta(a) = 0 \in C^\delta(R)$. Hence, $C^\delta(R)$ is closed under δ .

Corollary 1. *The set $I^+(R)$ of additively idempotent elements of the additively cancellative semiring R is a differential semiring.*

Example 7. For a semiring S_2 from Example 2 $C^{\delta_1}(S_2) = (0)$, but $C^{\delta_2}(S_2) = \emptyset$. Also $C^\delta(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}) = \mathbb{N}_0$.

Proposition 11. *If F is a δ -semifield then the semiring of constants C^δ is a δ -semifield.*

Proof. Let $a \in C^\delta(R)$, $a \neq 0$. Then $\delta(a) = 0$ and $a \in F$ follows $a^{-1} \in F$ and $a \cdot a^{-1} = 1$. Then $0 = \delta(1) = \delta(a \cdot a^{-1}) = \delta(a) \cdot a^{-1} + a \cdot \delta(a^{-1}) = a \cdot \delta(a^{-1})$. Thus $a \cdot \delta(a^{-1}) = 0$. Hence $\delta(a^{-1}) = 0$ and $a^{-1} \in C^\delta(R)$.

The following properties follow from the definition of a derivation.

Proposition 12. *If $\delta : R \rightarrow R$ is a semiring derivation and $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ then*

$$\delta \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{i=1}^n \delta(a_i).$$

$$\delta \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{k=1}^n a_1 \cdot a_2 \cdots a_{k-1} \cdot \delta(a_k) \cdot a_{k+1} \cdots a_n.$$

Proof. 1 is obvious. Prove 2 by induction on n . The case $n = 2$ is obvious. Suppose the equality holds for $n - 1$. Then for n we have

$$\begin{aligned} \delta \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) &= \delta \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot a_n + \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot \delta(a_n) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_1 \cdots a_{k-1} \cdot \delta(a_k) \cdot a_{k+1} \cdots a_{n-1} \right) \cdot a_n + \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i \right) \cdot \delta(a_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_1 \cdots a_{k-1} \cdot \delta(a_k) \cdot a_{k+1} \cdots a_n. \end{aligned}$$

Corollary 2. *If R is a multiplicatively commutative δ -semiring and $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ then*

$$\delta \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) = \sum_{k=1}^n \delta(a_k) \cdot \prod_{i \neq k} a_i.$$

Define $\delta^2(a) = \delta(\delta(a))$, $\delta^3(a) = \delta(\delta^2(a))$, $\dots$. By induction we can prove

Proposition 13. *If $\delta : R \rightarrow R$ is a semiring derivation then $\delta^n : R \rightarrow R$ is also a semiring derivation for any $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 14. *If $c \in C^\delta(R)$ then $\delta^{(n)}(cr) = c\delta^{(n)}(r)$ for any $r \in R$ and $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. By induction on n . For $n = 1$ we have $\delta(cr) = \delta(c)r + c\delta(r) = c\delta(r)$. The rest is obvious.

Theorem 1. *If (R, δ) is a differential semiring then for any $a, b \in R$ and $n \in \mathbb{N}$ it holds*

$$\delta^n(ab) = \sum_{k=0}^n C_n^k \delta^{n-k}(a) \delta^k(b).$$

Proof. By induction on n . The case $n = 1$ is obvious. Suppose the equality holds for $n - 1$ and prove it for n .

$$\delta^n(ab) = \delta \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \delta^{n-k-1}(a) \delta^k(b) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot \delta(\delta^{n-k-1}(a) \delta^k(b)) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot (\delta^{n-k}(a) \delta^k(b) + \delta^{n-k-1}(a) \delta^{k+1}(b)) = \\
&= \delta^n(a) \cdot b + \delta^{n-1}(a) \cdot \delta(b) + (n-1) \delta^{n-1}(a) \cdot \delta(b) + (n-1) \delta^{n-2}(a) \cdot \delta^2(b) + \\
&\quad + \dots + C_{n-1}^{k-1} \cdot \delta^{n-k+1}(a) \cdot \delta^{k-1}(b) + C_{n-1}^{k-1} \cdot \delta^{n-k}(a) \cdot \delta^k(b) + \\
&+ C_{n-1}^k \cdot \delta^{n-k}(a) \cdot \delta^k(b) + C_{n-1}^k \cdot \delta^{n-k-1}(a) \cdot \delta^{k+1}(b) + \dots + \delta(a) \cdot \delta^{n-1}(b) + a \cdot \delta^n(b) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \delta^{n-k}(a) \delta^k(b).
\end{aligned}$$

3. Semimodule of semiring derivations. In what follows let R be a additively commutative semiring with absorbing zero. Denote the set of all derivations on R by $\text{Der } R$. In this case $\text{Der } R \neq \emptyset$. Let $\delta_1: R \rightarrow R$ and $\delta_2: R \rightarrow R$ be derivations. The sum of derivations δ_1 and δ_2 on R is a map $\delta_1 + \delta_2: R \rightarrow R$ defined by $(\delta_1 + \delta_2)(r) =_{\text{df}} \delta_1(r) + \delta_2(r)$ for all $r \in R$.

In [3] it is shown that the sum of two arbitrary semiring derivations is a semiring derivation. The set $\text{Der } R$ forms a monoid under addition where the neutral element is a trivial derivation. This implies, by induction

Lemma 1. Let $\delta_i: R \rightarrow R$ be semiring derivations, $i = 1, 2, \dots, n$. Then $\sum_{i=1}^n \delta_i$ is a derivation on R .

Lemma 2. Let $\delta: R \rightarrow R$ be a derivation on R , $a \in Z(R)$. Then the map $a\delta: R \rightarrow R$ given by $(a\delta)(r) =_{\text{df}} a \cdot \delta(r)$ for all $r \in R$ is a derivation on R .

Proof. It is trivially checked that $a\delta$ is additive. Let $r, s \in R$ be arbitrary elements. We have $(a\delta)(r \cdot s) = (a\delta(r))s + (ar)\delta(s) = (a\delta(r)) \cdot s + r(a\delta(s))$.

Corollary 3. Let R be a semiring, $\delta_i: R \rightarrow R$ a derivation on R , $\lambda_i \in Z(R)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Then the map $\sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i: R \rightarrow R$ is a derivation on R .

Corollary 4. If $\delta: R \rightarrow R$ is a derivation of a semiring, then $\alpha_0 \delta^n + \alpha_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \delta + \alpha_n \varepsilon$ for all $\alpha_i \in R$, is a semiring derivation.

Theorem 2. The set $M = \text{Der } R$ of derivations on a semiring R is a semimodule over the center $Z(R)$ of the semiring R .

Proof. The associativity and commutativity of addition on $\text{Der } R$ follows from the associativity and commutativity of addition on R respectively. The trivial derivation is clearly a neutral element under addition on $\text{Der } R$.

All the other conditions are checked trivially. Let $a \in R$, $\lambda_1, \lambda_2 \in Z(R)$, and $\delta \in \text{Der}(R)$ be arbitrary elements. Then $((\lambda_1 \lambda_2) \delta)(a) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot \delta(a) = \lambda_1 (\lambda_2 \cdot \delta(a)) = \lambda_1 ((\lambda_2 \delta)(a)) = (\lambda_1 (\lambda_2 \delta))(a)$ follows associativity $((\lambda_1 \lambda_2) \delta) = (\lambda_1 (\lambda_2 \delta))$. Similarly check distributivity $((\lambda_1 + \lambda_2) \delta)(a) = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \delta(a) = \lambda_1 \cdot \delta(a) + \lambda_2 \cdot \delta(a) = (\lambda_1 \delta)(a) + (\lambda_2 \delta)(a)$, so $((\lambda_1 + \lambda_2) \delta) = (\lambda_1 \delta) + (\lambda_2 \delta)$.

Let $a \in R$, $\lambda \in Z(R)$, and $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}(R)$ be arbitrary elements. Then $(\lambda(\delta_1 + \delta_2))(a) = \lambda \cdot (\delta_1 + \delta_2)(a) = \lambda \cdot (\delta_1(a) + \delta_2(a)) = \lambda \cdot \delta_1(a) + \lambda \cdot \delta_2(a) = (\lambda \delta_1)(a) + (\lambda \delta_2)(a)$ follows $\lambda(\delta_1 + \delta_2) = (\lambda \delta_1) + (\lambda \delta_2)$.

Let $a \in R$ and $\delta \in \text{Der}(R)$ be arbitrary elements. Then $(1 \cdot \delta)(a) = 1 \cdot \delta(a) = \delta(a)$ follows $1_R \cdot \delta = \delta$.

Let $a \in R$, $\lambda \in Z(R)$ and $\delta \in \text{Der}(R)$ be arbitrary elements. Then $(\lambda \cdot 0_M)(a) = \lambda \cdot 0_M(a) = \lambda \cdot 0_R = 0_R = 0_M(a)$, similarly $(0_R \cdot \delta)(a) = 0_R \cdot \delta(a) = 0_R = 0_M(a)$. It follows $\lambda \cdot 0_M = 0_M$ and $0_R \cdot \delta = 0_M$.

Hence, $\text{Der}(R)$ is a $Z(R)$ -semimodule.

Corollary 5. *The set $\text{Der}(R)$ of derivations of a multiplicatively commutative semiring R is a R -semimodule.*

Theorem 3. *Let $\delta_1: R \rightarrow R$, $\delta_2: R \rightarrow R$ be derivations of an additively cancellative semiring R . Then $\delta_1\delta_2$ is a derivation on R if and only if $\delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) = 0$ for all $r, s \in R$.*

Proof. ($\Rightarrow$) Let $r, s \in R$ be arbitrary elements. Since $\delta_1\delta_2$ is a derivation we have $(\delta_1\delta_2)(rs) = (\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s)$. On the other hand $(\delta_1\delta_2)(rs) = \delta_1(\delta_2(rs)) = \delta_1(\delta_2(r) \cdot s + r \cdot \delta_2(s)) = (\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + \delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s)$. It follows

$$(\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s) = (\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + \delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s).$$

From additive cancellativeness of R it follows the equality to be proved, i. e.

$$\delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) = 0.$$

($\Leftarrow$) Let $r, s \in R$ be arbitrary elements. Then additivity of $\delta_1\delta_2$ follows from the additivity of δ_1 and δ_2 $(\delta_1 \cdot \delta_2)(r+s) = \delta_1(\delta_2(r) + \delta_2(s)) = (\delta_1 \cdot \delta_2)(r) + (\delta_1 \cdot \delta_2)(s)$.

If $\delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) = 0$ then $(\delta_1\delta_2)(rs) = \delta_1(\delta_2(r) \cdot s + r \cdot \delta_2(s)) = (\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + \delta_2(r) \cdot \delta_1(s) + \delta_1(r) \cdot \delta_2(s) + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s) = (\delta_1\delta_2)(r) \cdot s + r \cdot (\delta_1\delta_2)(s)$.

Hence $\delta_1\delta_2$ is a derivation on R .

Corollary 6. *Let $\delta_1: R \rightarrow R$, $\delta_2: R \rightarrow R$ be derivations of an additively commutative semiring R . Then $\delta_1\delta_2$ is a derivation on R if and only if $\delta_2\delta_1$ is a derivation on R .*

Denote by $\{\delta_1, \delta_2\}$ the *anti-commutator* of the derivations δ_1 and δ_2 on R , i. e. $\{\delta_1, \delta_2\} = \delta_1 \cdot \delta_2 + \delta_2 \cdot \delta_1$.

Corollary 7. *If $\delta_1\delta_2$ is a derivation on R then $\{\delta_1, \delta_2\}$ is a derivation on R .*

Theorem 4. *If R is a 2-torsion-free semiring, $\delta: R \rightarrow R$ is a derivation, $\{\delta(r), \delta(s)\} = \{r, s\}$ for all $r, s \in R$, then there exists $a \in Z(R)$ such that $a^2 = 1$.*

Proof. From $\{\delta(r), \delta(s)\} = \{r, s\}$ we obtain that $\delta(r) \cdot \delta(s) + \delta(s) \cdot \delta(r) = rs + sr$ for all $r, s \in R$. In particular, $\delta(1) \cdot \delta(1) + \delta(1) \cdot \delta(1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$, which implies $2(\delta(1))^2 = 2$. Since R is 2-torsion-free, then $(\delta(1))^2 = 1$. Hence, $a^2 = 1$, $a \in Z(R)$, where $a = \delta(1)$.

Example. Let R be any semiring, $S \subseteq M_3(R)$ be a subsemiring of $M_3(R)$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

under ordinary matrix addition and multiplication. The maps $\delta_1 : S \rightarrow S$ and $\delta_2 : S \rightarrow S$ defined by the following rules are both derivations on S .

$$\delta_1 \left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \delta_2 \left(\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

It is easy to check that the product of δ_1 and δ_2 is also a derivation on S . Moreover, these derivations commute, i. e. $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$.

Let $V(M)$ be a set of all elements of the semimodule M over a semiring R having additive inverse. The set $V(M)$ is a subsemimodule of the R -semimodule M . $\square$

Denote by $[\delta_1, \delta_2]$ the *commutator* of the derivations δ_1 and δ_2 , i. e. a map $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$.

Theorem 5. For all $\delta_1, \delta_2 \in V(Der(R))$, $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1 \in V(Der(R))$.

Proof. Let $a, b \in R$. Consider $[\delta_1, \delta_2](a + b) = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(a + b) = \delta_1(\delta_2(a + b)) - \delta_2(\delta_1(a + b)) = \delta_1(\delta_2(a)) + \delta_1(\delta_2(b)) - \delta_2(\delta_1(a)) - \delta_2(\delta_1(b)) = ((\delta_1\delta_2)(a) - (\delta_2\delta_1)(a)) + ((\delta_1\delta_2)(b) - (\delta_2\delta_1)(b)) = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(a) + (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(b) = [\delta_1, \delta_2](a) + [\delta_1, \delta_2](b)$.

Check the second condition $[\delta_1, \delta_2](ab) = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(ab) = \delta_1(\delta_2(ab)) - \delta_2(\delta_1(ab)) = \delta_1(\delta_2(a)b + a\delta_2(b)) - \delta_2(\delta_1(a)b + a\delta_1(b)) = (\delta_1\delta_2)(a)b + \delta_2(a)\delta_1(b) + \delta_1(a)\delta_2(b) + a(\delta_1\delta_2)(b) - (\delta_2\delta_1)(a)b - \delta_1(a)\delta_2(b) - \delta_2(a)\delta_1(b) - a(\delta_2\delta_1)(b) = ((\delta_1\delta_2)(a) - (\delta_2\delta_1)(a))b + a((\delta_1\delta_2)(b) - (\delta_2\delta_1)(b)) = (\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(a)b + a(\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1)(b) = [\delta_1, \delta_2](a)b + a[\delta_1, \delta_2](b)$.

4. Conclusions and prospects for further research. In this article we study derivations of semirings and their sets. Namely, we give new examples of such derivations, prove some of their properties. We also prove that the set of all derivations on a semiring forms a semimodule over its center. The obtained results can be used in further research in differential algebra, in a study semirings and semimodules with derivations.

References

1. Bourne, S., & Zassenhaus, H. (1958). On the semiradical of a ring. *Proc. Nath. Acad. Sci. USA*, 44, 907–914.
2. Chandramouleeswaran, M., & Thiruvani, V. (2010). On derivations of semirings. *Advances in Algebra*, 1, 123–131.
3. Golan, J. S. (1999). *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers.
4. Hebisch, U., & Weinert, H. J. (1998). *Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science*. World Scientific.
5. Melnyk, I. (2008). Sdm-systems, differentially prime and differentially primary modules. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat.*, 1(16), 110–118.
6. Melnyk, I. (2021). On differentially prime subsemimodules. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*, 97(3), 30–35.
7. Melnyk, I., Kolyada, R., & Melnyk, O. (2021). Some properties of differential, quasi-prime and differentially prime subsemimodules. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat.*, 39(2), 60–67.
8. Melnyk, I. (2022). On quasi-prime subsemimodules. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.*, 93, 66–73.

Мельник І. О., Андрушко А. І. Напівмодуль диференціювань напівкільця.

Вивчаються диференціювання напівкільця, диференціальні напівкільця та множина диференціювань напівкільця. Поняття диференціального напівкільця традиційно означають як адитивне відображення, що задовольняє правило Лейбніца. У статті наведено нові приклади диференціювань напівкільця, доведено деякі їх властивості. Також доведено, що множина всіх диференціювань напівкільця утворює напівмодуль над своїм центром. Показано, що комутатор будь-яких двох диференціювань міститься в піднапівмодулі $V(M)$ елементів M , які мають адитивні обернені.

Ключові слова: диференціювання напівкільця, напівмодуль, напівкільце, піднапівмодуль, диференціальне напівкільце.

Список використаної літератури

1. Bourne S., Zassenhaus H. On the semiradical of a ring. *Proc. Nath. Acad. Sci. USA*. 1958. Vol. 44. P. 907–914.
2. Chandramouleeswaran M., Thiruvani V. *On derivations of semirings. Advances in Algebra*. 2010. Vol. 1. P. 123–131.
3. Golan J. S. *Semirings and their Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
4. Hebisch U., Weinert H. J. *Semirings: Algebraic Theory and Applications in Computer Science. World Scientific*. 1998.
5. Мельник І. *Sdm-системи, диференціально первинні та диференціально примарні модулі. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2008. Т. 1, № 16. С. 110–118.
6. Melnyk I. On differentially prime subsemimodules. *Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica*. 2021. Vol. 97, No. 3. P. 30–35.
7. Melnyk I., Kolyada R., Melnyk O. Some properties of differential, quasi-prime and differentially prime subsemimodules. *Nauk. visnyk Uzhgorod. Univ. Ser. Math. and informat.* 2021. Vol. 39, No. 2. P. 60–67.
8. Melnyk, I. On quasi-prime subsemimodules. *Visnyk of the Lviv. Univ. Series Mech. Math.* 2022. Vol. 93. P. 66–73.

Recived 08.04.2025

УДК 512.544

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).72-78](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).72-78)**І. М. Порохнавець¹, І. В. Шапочка²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
ivan.porokhnavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.shapochka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0904-7879>

ПРО ОПИСАННЯ ДЕЯКОГО КЛАСУ ЧЕРНІКОВСЬКИХ 3-ГРУП, ЩО Є РОЗШИРЕННЯМИ ПОВНОЇ АБЕЛЕВОЇ 3-ГРУПИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ ПОРЯДКУ 27

В даній роботі описуються з точністю до ізоморфізму, деякі черніковські 3-групи, що є розширеннями повних абелевих 3-груп з умовою мінімальності. Зокрема описуються всі такі розширення прямої суми 26-ти екземплярів адитивної, квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, за допомогою циклічної групи H порядку 27, і які визначаються зображенням Γ , де Γ пробігає наступну множину матричних $\mathbb{Z}_3$ -зображень $\{\Gamma_h^{(1)}, \Gamma_h^{(2)}, \Gamma_h^{(3)}, \Gamma_h^{(4)}\}$, що містять точно 3 незвідні $\mathbb{Z}_3$ -компоненти [2].

Підкреслимо, що в [2], описано всі неізоморфні черніковські p -групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p^d , де $d \leq 2$.

Ключові слова: черніковська група, матричне зображення групи, незвідна компонента зображення.

1. Вступ. Нехай $H = \langle h \rangle$ — циклічна група 27-го порядку, η, ξ, ε — первісні корені з 1 відповідно 27-го, 9-го та 3-го степенів. $\mathbb{Z}_3$ — кільце цілих 3-адичних чисел.

Розглянемо матричне $\mathbb{Z}_3$ -зображення групи H вигляду:

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h(0, u^n, t^m) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & 0 & \langle t^m \rangle \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u^n \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $t = \eta - 1$, $u = \xi - 1$, $n = 0, 1, \dots, 5$, $m = 0, 1, \dots, 17$.

$$\tilde{\eta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

— незвідні над $\mathbb{Z}_3$ матриці, порядків 18×18 , 6×6 та 2×2 відповідно. $\langle \delta \rangle_{18 \times 2}$ — матриця, що відповідає оператору множення на первісний корінь η в $\mathbb{Z}_3$ -базисі

$1, \eta, \dots, \eta^{17}$ кільця $\mathbb{Z}_3[\eta]$, $\langle u \rangle_{6 \times 2}$ — матриця, що відповідає оператору множення на первісний корінь ξ в $\mathbb{Z}_3$ -базисі $1, \xi, \dots, \xi^5$ кільця $\mathbb{Z}_3[\xi]$.

Надалі, всюди через $a_0, a_1, a_2, \dots$ будемо позначати твірні елементи квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, які задовольняють умовам $3a_0 = 0, 3a_i = a_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots$). Якщо u — елемент квазіциклічної 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, то для довільного натурального числа k через $u^{(k)}$ будемо позначати елемент групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^k$ вигляду

$$\underbrace{(u, u, \dots, u)}_{k \text{ раз}}.$$

В розширенні $G(\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}, H, \Gamma, m)$ розглянемо підгрупу $A(\Gamma)$, усіх систем факторів, якими визначаються розширення групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^n$ за допомогою групи H , що відповідають $\mathbb{Z}_3$ -зображенню Γ ; утворюють групу відносно операції додавання системи факторів. $A(\Gamma)$ визначається наступним чином

$$A(\Gamma) = \{m \mid \Gamma(m) = m\}. \quad (2)$$

Також нехай $m = m(x, y, z)$, де $x = (x_1, x_2, \dots, x_{18}) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^{18}$, $x_1, x_2, \dots, x_{18} \in \mathbb{C}_{3^\infty}$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_6) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^6$, $y_1, y_2, \dots, y_6 \in \mathbb{C}_{3^\infty}$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_{3^\infty}^2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}_{3^\infty}$.

2. Основний результат. Опишемо всі не ізоморфні розширення групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$, що є розширенням прямої суми 26-ти екземплярів 3-групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, за допомогою групи H , і які визначаються зображенням Γ , де $\Gamma \in \{\Gamma_h^{(1)}, \Gamma_h^{(2)}, \Gamma_h^{(3)}, \Gamma_h^{(4)}\}$. Із [1, 3] слідує, що кожне таке розширення цілком визначається елементом m групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, що задовольняє умові $\Gamma(m) = m$.

Для матричного $\mathbb{Z}_3$ -зображення Γ , яке пробігає множину $\{\Gamma_h^{(1)}, \Gamma_h^{(2)}, \Gamma_h^{(3)}, \Gamma_h^{(4)}\}$, де

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h^{(1)} = \Gamma_h(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & 0 & \langle 1 \rangle_{18 \times 2} \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle 1 \rangle_{6 \times 2} \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h^{(2)} = \Gamma_h(0, u, 1) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & 0 & \langle 1 \rangle_{18 \times 2} \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle_{6 \times 2} \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h^{(3)} = \Gamma_h(0, 1, t) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & 0 & \langle t \rangle_{18 \times 2} \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle 1 \rangle_{6 \times 2} \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma : h \rightarrow \Gamma_h^{(4)} = \Gamma_h(0, u, t) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta} & 0 & \langle t \rangle_{18 \times 2} \\ 0 & \tilde{\xi} & \langle u \rangle_{6 \times 2} \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай*

$$m_1(i, j, k) = \left((k \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(9)}, (ka_0 - ia_1)^{(9)}, (j \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(3)}, \right. \\ \left. (ja_0 - ia_1)^{(3)}, ia_0, -ia_0 \right),$$

$$m_2(i, j, k) = \left((k \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(9)}, (ka_0 - ia_1)^{(9)}, j \cdot 2a_0 + ia_0, \right. \\ \left. (j \cdot 2a_0)^{(2)}, (ja_0)^{(3)}, ia_0, -ia_0 \right),$$

$$m_3(i, j, k) = \left(ia_0 - ka_0, (k \cdot 2a_0)^{(8)}, (ka_0)^{(9)} (j \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(3)}, \right. \\ \left. (ja_0 - ia_1)^{(3)}, ia_0, -ia_0 \right),$$

$$m_4(i, j, k) = \left(ia_0 - ka_0, (k \cdot 2a_0)^{(8)}, (ka_0)^{(9)} ia_0 - ja_0, \right. \\ \left. (j \cdot 2a_0)^{(2)}, (ja_0)^{(3)}, ia_0, -ia_0 \right),$$

де $i, j, k \in \{0; 1; 2\}$.

Тоді

$$A \left(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma_h^{(s)} \right) = \{m_s(i, j, k) \mid i, j, k = 0, 1, 2\}, \quad s = 1, 2, 3, 4.$$

Доведення. Проведемо доведення лише для $\mathbb{Z}_3$ -зображення $\Gamma_h^{(1)}$. Доведення інших випадків розглядається аналогічно.

За означенням групи (14), ця група складається з усіх таких елементів $m_1 \in \mathbb{C}_{3\infty}^{26}$, що виконується

$$\Gamma_h^{(1)}(m_1) = m_1.$$

Тоді із (14) слідує

$$\begin{cases} \tilde{\eta}x^T + \langle 1 \rangle_{18 \times 2} \cdot z^T = x^T, \\ \tilde{\xi}y^T + \langle 1 \rangle_{6 \times 2} \cdot z^T = y^T, \\ \tilde{\varepsilon}z^T = z^T, \end{cases} \quad (3)$$

де x^T, y^T, z^T — вектор-стовпці, отримані транспонуванням відповідно вектор-рядків x, y, z .

Із третього рівняння системи (3) маємо

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -z_2 = z_1, \\ z_1 - z_2 = z_2. \end{cases}$$

Звідси $z = (ia_0, -ia_0)$, де $i \in \{0, 1, 2\}$.

Аналогічно, із другого рівняння системи (3) отримуємо

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ia_0 \\ -ia_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -y_6 - ia_0 = y_1, \\ y_1 = y_2, \\ y_2 = y_3, \\ y_3 - y_6 = y_4, \\ y_4 = y_5, \\ y_5 = y_6. \end{cases}$$

Звідси $y = ((j \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(3)}, (ja_0 - ia_1)^{(3)})$, де $j \in \{0, 1, 2\}$.

На кінець із першого рівняння системи (3) отримуємо

$$\begin{cases} -x_{18} - ia_0 = x_1, \\ x_1 = x_2, \\ \vdots \\ x_8 = x_9, \\ x_9 - x_{18} = x_{10}, \\ x_{10} = x_{11}, \\ \vdots \\ x_{17} = x_{18}. \end{cases}$$

Звідси $x = ((k \cdot 2a_0 - i \cdot 2a_1)^{(9)}, (ka_0 - ia_1)^{(9)})$, де $k \in \{0, 1, 2\}$. Теорему доведено.

Оскільки одна із незвідних компонент $\mathbb{Z}_3$ -зображень $\Gamma_h^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, 4$ дорівнює 0, то підгрупа

$$B(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma) = \left\{ \left(E + \Gamma_h^{(s)} + \dots + \left(\Gamma_h^{(s)} \right)^{26} \right) (m_s) \mid m_s \in \mathbb{C}_{3\infty}^{26} \right\},$$

групи $A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma)$ є нульовою підгрупою.

А отже, існує рівно 27 нееквівалентних розширень групи $\mathbb{C}_{3\infty}^{26}$ за допомогою циклічної групи H , порядку 27, що визначаються матричним $\mathbb{Z}_3$ -зображенням $\Gamma_h^{(s)}$. Оскільки $|A(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma)| = 27$.

Теорема 2. *Всі неізоморфні розширення групи $\mathbb{C}_{3\infty}^{26}$ за допомогою групи H , що визначаються зображенням $\Gamma_h^{(s)}$, де $s = 1, 2, 3, 4$ вичерпуються наступними групами:*

$$\begin{aligned} &G\left(\Gamma_h^{(s)}, m_s(0, 0, 0)\right), \quad G\left(\Gamma_h^{(s)}, m_s(1, 0, 0)\right), \\ &G\left(\Gamma_h^{(s)}, m_s(0, 1, 0)\right), \quad G\left(\Gamma_h^{(s)}, m_s(0, 0, 1)\right). \end{aligned}$$

Доведення. Нехай виконуються умови теореми. Розглянемо спочатку $\mathbb{Z}_3$ -зображення $\Gamma_h^{(1)}$ та покажемо, що серед груп $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(0, 0, 0)\right)$, $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(1, 0, 0)\right)$, $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(0, 1, 0)\right)$, $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(0, 0, 1)\right)$ немає попарно ізоморфних.

Для доведення ізоморфності будь-яких двох, різних груп $G(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma, m)$ та $G(\mathbb{C}_{3\infty}^{26}, H, \Gamma, m')$, що визначаються елементами m та m' відповідно, використаємо [2, див. лема 4], яка у нашому випадку переписється у вигляді

$$C(m) = r \cdot m',$$

де r — деяке натуральне число, таке що не ділиться на 3, а матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix},$$

тут C_{11}, C_{22}, C_{33} — оборотні матриці над $\mathbb{Z}_3$ порядків 18, 6 та 2 відповідно, а C_{12}, C_{13}, C_{23} — довільні над $\mathbb{Z}_3$ матриці порядків 18×6 , 18×2 та 6×2 відповідно.

Припустимо протилежне, нехай $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(0, 0, 1)\right) \cong G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(1, 0, 0)\right)$ тоді існує така оборотна матриця над $\mathbb{Z}_3$, і таке натуральне число r , що не ділиться на 3, що

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a_0^{(9)} \\ a_0^{(9)} \\ 0^{(3)} \\ 0^{(3)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 7a_1^{(9)} \\ 8a_1^{(9)} \\ 7a_1^{(3)} \\ 8a_1^{(3)} \\ 3a_1 \\ 6a_1 \end{pmatrix}.$$

Із якого маємо наступні рівності

$$C_{11} \cdot \begin{pmatrix} 2a_0^{(9)} \\ a_0^{(9)} \end{pmatrix} + C_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0^{(3)} \\ 0^{(3)} \end{pmatrix} + C_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 7a_1^{(9)} \\ 8a_1^{(9)} \end{pmatrix},$$

$$C_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0^{(3)} \\ 0^{(3)} \end{pmatrix} + C_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 7a_1^{(3)} \\ 8a_1^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$C_{33} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 6a_1 \end{pmatrix},$$

де друге та третє рівняння є неможливими, при будь-якому натуральному r , яке не ділиться на 3.

Тому, звідси $G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(0, 0, 1)\right) \not\cong G\left(\Gamma_h^{(1)}, m_1(1, 0, 0)\right)$. Інші випадки розглядаються аналогічно.

Тепер покажемо, що всі інші групи, які є розширенням групи $\mathbb{C}_{3^\infty}^{26}$ за допомогою групи H , що визначаються матричним зображенням $\Gamma_h^{(1)}$, крім тих що фігурують в теоремі попарно ізоморфні.

Нехай надалі, всюди, якщо не сказано протилежне: E_n — одинична, квадратна над $\mathbb{Z}_3$, матриця порядку n , де $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо наступні матриці:

$$C_1 = \begin{pmatrix} E_{18} & U_1 & 0 \\ 0 & E_6 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} E_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 2E_6 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} E_{18} & 0 & 0 \\ 0 & E_6 & U_2 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} E_{18} & 0 & 0 \\ 0 & E_6 & U_3 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} E_{18} & 0 & U_4 \\ 0 & E_6 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad U_1 = \begin{pmatrix} E_3 & 0 \\ 0 & 2E_3 \\ E_3 & 0 \\ 0 & E_3 \\ 2E_3 & 0 \\ 0 & E_3 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де матриці V_1 та V_2 мають порядок 9×2 , та матрицю E_{26} .

За допомогою цих матриць, безпосередньою перевіркою, можна показати, що:

$$\begin{aligned} E_{26}(m_1(0, 0, 1)) &= 2m_1(0, 0, 2), & E_{26}(m_1(1, 0, 2)) &= 4m_1(1, 1, 0), \\ E_{26}(m_1(1, 1, 2)) &= 4m_1(1, 2, 0), & E_{26}(m_1(1, 2, 2)) &= 2m_1(2, 0, 0), \\ E_{26}(m_1(2, 0, 2)) &= 7m_1(2, 1, 0), & C_1(m_1(0, 1, 0)) &= m_1(0, 1, 1), \\ C_1(m_1(0, 1, 2)) &= 2m_1(0, 2, 0), & C_1(m_1(0, 2, 0)) &= 2m_1(0, 2, 1), \\ C_2(m_1(0, 2, 1)) &= m_1(0, 2, 2), & C_2(m_1(0, 1, 1)) &= 2m_1(0, 1, 2), \\ C_4(m_1(1, 0, 0)) &= 4m_1(1, 0, 1), & C_4(m_1(1, 0, 1)) &= 4m_1(1, 0, 2), \\ C_5(m_1(1, 1, 0)) &= 4m_1(1, 1, 1), & C_5(m_1(1, 1, 1)) &= 4m_1(1, 1, 2), \\ C_5(m_1(1, 2, 0)) &= 4m_1(1, 2, 1), & C_5(m_1(1, 2, 1)) &= 4m_1(1, 2, 2), \\ C_6(m_1(2, 0, 0)) &= m_1(2, 0, 1), & C_6(m_1(2, 0, 1)) &= m_1(2, 0, 2), \\ C_6(m_1(2, 1, 0)) &= m_1(2, 1, 1), & C_6(m_1(2, 1, 1)) &= m_1(2, 1, 2). \end{aligned}$$

А отже, відповідні групи, які містять дані елементи будуть ізоморфними.

$$\begin{aligned} G(\Gamma, m_1(0, 0, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 0, 2)), & G(\Gamma, m_1(1, 0, 2)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 1, 0)), \\ G(\Gamma, m_1(1, 1, 2)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 2, 0)), & G(\Gamma, m_1(1, 2, 2)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 0, 0)), \\ G(\Gamma, m_1(2, 0, 2)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 1, 0)), & G(\Gamma, m_1(0, 1, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 1, 1)), \\ G(\Gamma, m_1(0, 1, 2)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 2, 0)), & G(\Gamma, m_1(0, 2, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 2, 1)), \\ G(\Gamma, m_1(0, 2, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 2, 2)), & G(\Gamma, m_1(0, 1, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(0, 1, 2)), \\ G(\Gamma, m_1(1, 0, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 0, 1)), & G(\Gamma, m_1(1, 0, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 0, 2)), \\ G(\Gamma, m_1(1, 1, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 1, 1)), & G(\Gamma, m_1(1, 1, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 1, 2)), \\ G(\Gamma, m_1(1, 2, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 2, 1)), & G(\Gamma, m_1(1, 2, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(1, 2, 2)), \\ G(\Gamma, m_1(2, 0, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 0, 1)), & G(\Gamma, m_1(2, 0, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 0, 2)), \\ G(\Gamma, m_1(2, 1, 0)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 1, 1)), & G(\Gamma, m_1(2, 1, 1)) &\cong G(\Gamma, m_1(2, 1, 2)). \end{aligned}$$

Розгляд випадків для інших $\mathbb{Z}_3$ -зображень $\Gamma_h^{(2)}$, $\Gamma_h^{(3)}$, $\Gamma_h^{(4)}$, проводиться аналогічно даному $\mathbb{Z}_3$ -зображенню $\Gamma_h^{(1)}$. Теорема доведена.

3. Висновки. Отримано описання всіх неізоморфних черніковських 3-груп, що є розширеннями прямої суми 26-ти екземплярів квазициклічної групи $\mathbb{C}_{3^\infty}$, за допомогою циклічної групи H , що визначаються зображенням $\Gamma \in \{\Gamma_h^{(1)}, \Gamma_h^{(2)}, \Gamma_h^{(3)}, \Gamma_h^{(4)}\}$.

Список використаної літератури

1. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753.
2. Гудивок П. М., Шапочка И. В. О черниковских p -группах. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 3. С. 291–304.
3. Гудивок П. М., Рудько В. П. Про p -адичні цілочислові зображення циклічної p -групи. *Допов. АН УРСР.* 1966. № 9. С. 1111–1113.

Porokhnaveets I. M., Shapochka I. V. On the description of a certain class of Chernikov 3-groups, which are extensions of the complete Abelian 3-group by means of a cyclic group of order 27.

In this paper, we describe, up to isomorphism, some Chernnikov 3-groups that are extensions of complete Abelian 3-groups with the minimality condition. In particular, we describe all such extensions of the direct sum of 26 instances of the additive, quasicyclic 3-group $\mathbb{C}_{3^\infty}$, using the cyclic group H of order 27, and which are defined by the image Γ , where Γ spans the following set of matrix $\mathbb{Z}_3$ -images $\{\Gamma_h^{(1)}, \Gamma_h^{(2)}, \Gamma_h^{(3)}, \Gamma_h^{(4)}\}$, which contain exactly 3 irreducible $\mathbb{Z}_3$ -components [2].

Let us emphasize that in [2], all non-isomorphic Chernikov p -groups are described, the factor group of which is a cyclic group of order p^d under the maximal complete Abelian subgroup, where $d \leq 2$.

Keywords: Chernikov group, matrix representation of group, irreducible component of representation.

References

1. Gudivok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Mat. J.*, 44(6), 742–753.
2. Gudivok, P. M., & Shapochka, I. V. (1999). On the Chernikov p -groups. *Ukr. Mat. J.*, 51(3), 291–304.
3. Gudivok, P. M., & Rud'ko, V. P. (1966). On p -adic integral representations of the cyclic p -group. *Dopovidi Akad. Nauk URSR*, 9, 1111–1113.

Одержано 03.04.2025

УДК 512.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).79-88](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).79-88)**І. Ю. Раєвська**

Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник, відділ алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук

raeirina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6764-480X>**ПРО ПРЯМІ ДОБУТКИ НЕМЕТАЦИКЛІЧНИХ p -ГРУП
МІЛЛЕРА–МОРЕНО ТА ЦИКЛІЧНИХ p -ГРУП ЯК АДИТИВНІ
ГРУПИ ЛОКАЛЬНИХ МАЙЖЕ-КІЛЕЦЬ**

В статті розглядається питання, які неабелеві p -груп можуть бути адитивними групами локальних майже-кілець. А саме, доведено, що **прямі добутки** неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп є **адитивними групами локальних майже-кілець**. Наведено приклади локальних майже-кілець на таких групах.

Ключові слова: p -група, група Міллера–Морено, локальні майже-кільця, адитивна група, прямий добуток.

1. Вступ. Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Один з перших результатів в цьому напрямку був отриманий Клейом і Малоне [3], які показали, що з точністю до ізоморфізму існує єдине майже-кілець з одиницею, адитивна група якого циклічна, і яке фактично є комутативним кільцем. В статті [10] описано всі можливі типи груп Міллера–Морено, які можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею.

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном [2] у 1968 році, який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кілець повинна бути p -групою. В роботах [13] та [14] вивчались локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено.

Очевидно, що прямим добутком майже-кілець з одиницею є майже-кілець з одиницею. Водночас прямий добуток двох довільних локальних майже-кілець не є локальним майже-кілєм.

В статті досліджуються прямі добутки неметациклічних p -груп Міллера–Морено та циклічних p -груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею і, зокрема, локальних майже-кілець.

2. Попередні результати. Наведемо основні означення (див., [3], [7], [2], [4], [12]).

Означення 1. *Непорожня множина R з двома бінарними операціями «+» та « $\cdot$ » називається майже-кілєм, якщо:*

- 1) $(R, +)$ — група з нейтральним елементом 0,
- 2) $(R, \cdot)$ — напівгрупа,
- 3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ для всіх $x, y, z \in R$.

Таке майже-кілець називається лівим майже-кілєм. Якщо ж аксіому 3) замінити аксіомою $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ для всіх $x, y, z \in R$, то отримаємо праве майже-кілець.

Група $(R, +)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R . З аксіоми 3 випливає, що $r \cdot 0 = r \cdot (0 + 0) = r \cdot 0 + r \cdot 0$, звідки отримуємо $r \cdot 0 = 0$. З цієї ж аксіоми витікає, що $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кільцем з одиницею i* , якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i . Група всіх оборотних елементів моноїда $(R, \cdot)$ називається *мультиплікативною групою в R* та позначається через R^* .

Нагадаємо, що *експонентою групи* є найменше спільне кратне порядків її елементів. Зокрема, експонентою скінченної p -групи є максимальний порядок її елементів.

Наступна лема визначає експоненту адитивної групи скінченного майже-кільця з одиницею [3, Theorem 3].

Лема 1. *Експонента адитивної групи скінченного майже-кільця R з одиницею i дорівнює адитивному порядку елемента i , який співпадає з адитивним порядком кожного оборотного елемента в майже-кільці R .*

Означення 2. *Майже-кільце R з одиницею називається локальним, якщо множина L всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+ .*

Наступна лема, яка випливає з [1] (леми 3.2, 3.5, 3.9 та наслідок 3.8), характеризує основні властивості скінчених локальних майже-кільць.

Лема 2. *Нехай R — скінченне локальне майже-кільце з одиницею i та L — підгрупа в R^+ всіх необоротних елементів із R . Тоді R^+ — p -група для деякого простого p , експонента якої збігається з порядком елемента i в R^+ , та виконуються наступні твердження:*

- 1) L — ідеал в R та (R, R) -підгрупа в R^+ ;
- 2) кожна власна R^* -інваріантна підгрупа із R^+ міститься в L ;
- 3) множина $i + L$ утворює нормальну силовську p -підгрупу мультиплікативної групи R^* .

Нагадаємо, що скінченна група називається мінімальною неабелевою групою або групою Міллера–Морено, якщо вона неабелева, а всі її власні підгрупи є абелевими. Ці групи вперше вивчалися Міллером та Мореном в 1903 році [8]. Будова таких груп добре відома і повністю описується в [11].

Лема 3. *Неметациклічні p -групи Міллера–Морено ізоморфні групі $G = ((\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle)$ порядку p^{m+n+1} (p — просте число) з $|a| = p^m$, $|b| = p^n$, $|c| = p$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.*

Розглянемо прямий добуток неметациклічної p -групи Міллера–Морено та циклічної p -групи. Як безпосередній наслідок леми 3, маємо наступну лему.

Лема 4. *Нехай G прямий добуток неметациклічної p -групи Міллера–Морено та циклічної p -групи. Тоді G є групою наступного типу: група $G = ((\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \rtimes \langle b \rangle) \times \langle d \rangle$ порядку $p^{m+n+k+1}$ з $a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = d^{p^k} = 1$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, $d^{-1}ad = a$, $d^{-1}bd = b$, $d^{-1}cd = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.*

Позначимо через $F(p^m, p^n, p, p^k)$ адитивно записану групу з леми 4 з такими твірними a, b, c та d порядків p^m, p^n, p та p^k , відповідно, що $-b + a + b = a + c$,

$-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.

Лема 5. Для довільних цілих чисел r та s в групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ виконуються співвідношення:

$$-ar - bs + ar + bs = crs, bs + ar = -crs + ar + bs.$$

Доведення. Оскільки $-b + a + b = a + c$, то $-bs + a + bs = a + cs$. Тоді $-bs + ar + bs = (a + cs)r = ar + crs$. Звідси $bs + ar = -crs + ar + bs$.

Лема 6. Для будь-яких натуральних чисел r, t, s в групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ справедливе співвідношення:

$$(ar + bs)t = art + bst - crs \binom{t}{2}. \quad (1)$$

Доведення. Доведення проведемо індукцією по t . При $t = 1$ рівність вірна. Нехай при t виконується рівність, тобто

$$(ar + bs)t = art + bst - crs \binom{t}{2}.$$

Покажемо справедливість рівності при $t + 1$:

$$\begin{aligned} (ar + bs)(t + 1) &= art + bst + ar + bs - crs \binom{t}{2} = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crst - crs \binom{t}{2} = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crs \left(t + \binom{t}{2} \right) = \\ &= ar(t + 1) + bs(t + 1) - crs \binom{t + 1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, рівність (1) справедлива при будь-якому t .

Лема 7. Якщо $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $m > 1$ при $p = 2$, то експонента групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$ дорівнює p^m .

Доведення. Дійсно, для кожного $x \in F(p^m, p^n, p, p^k)$ існують такі цілі числа $\alpha, \beta, \gamma, \phi$, що $x = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\phi$.

$$\begin{aligned} x^{p^m} &= (a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\phi)^{p^m} = \\ &= (a^\alpha b^\beta)^{p^m} c^{\gamma p^m} d^{\phi p^m} = \\ &= a^{\alpha p^m} b^{\beta p^m} c^{-\alpha \beta \binom{p^m}{2}} = \\ &= a^{\alpha p^m} b^{\beta p^m} c^{-\alpha \beta \frac{p^m(p^m-1)}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Оскільки $|a| = p^m$ та $m \geq n \geq 1$ з $m > 1$ при $p = 2$, то p^m експонента групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

3. Майже-кільця з одиницею на групах $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Нехай адитивною групою майже-кільця R з одиницею є прямий добуток деяких неметациклічних p -груп Міллера–Морено та деяких циклічних p -груп. А отже, ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

В цій статті розглянемо групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$ з $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $n > 1$, при $p = 2$.

Лема 8. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i , адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ з $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $n > 1$ при $p = 2$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ з елементами a, b, c та d , що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = dp^k = 0$, $-b + a + b = a + c$, $-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$. Причому $a = i$ та кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m$, $0 \leq x_2 < p^n$, $0 \leq x_3 < p$ та $0 \leq x_4 < p^k$.*

Доведення. Оскільки за лемою 1 одиниця i є елементом максимального порядку в групі R^+ , то твірний елемент a цієї групи можна вибрати так, щоб він співпадав з i . Решта впливає з означення групи $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Лему доведено.

Зокрема, з леми 8 випливає, що для кожного $x \in R$ виконується рівність $xa = ax = x$ та існують однозначно визначені відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ для яких

$$xb = a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x), \quad (2)$$

та

$$xd = a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x). \quad (3)$$

Теорема 1. *Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ — довільні елементи із R , то*

$$\begin{aligned} xy = & a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \\ & + c(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_2\alpha_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \\ & - x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2} - \\ & - x_2\alpha_b(x)y_1y_2 - x_2\alpha_d(x)y_1y_2 - \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2) + \\ & + d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4), \end{aligned} \quad (4)$$

причому для відображень $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ виконуються наступні твердження:

- 1) $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;
- 2) $\alpha_b(xy) \equiv x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^m}$;
- 3) $\beta_b(xy) \equiv x_2\alpha_b(y) + \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^n}$;

- 4) $\gamma_b(xy) \equiv x_3\alpha_b(y) + \gamma_b(x)\beta_b(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_b(y) +$
 $+ \gamma_d(x)\phi_b(y) - x_1x_2\binom{\alpha_b(y)}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_b(y)}{2} -$
 $- \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_b(y)}{2} - x_2\alpha_b(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) -$
 $- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_b(y)^2 \pmod{p};$
- 5) $\phi_b(xy) \equiv x_4\alpha_b(y) + \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^k};$
- 6) $\alpha_d(xy) \equiv x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^m};$
- 7) $\beta_d(xy) \equiv x_2\alpha_d(y) + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^n};$
- 8) $\gamma_d(xy) \equiv x_3\alpha_d(y) + \gamma_b(x)\beta_d(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_d(y) +$
 $+ \gamma_d(x)\phi_d(y) - x_1x_2\binom{\alpha_d(y)}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_d(y)}{2} -$
 $- \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_d(y)}{2} - x_2\alpha_b(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) -$
 $- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_d(y)^2 \pmod{p};$
- 9) $\phi_d(xy) \equiv x_4\alpha_d(y) + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^k}.$

Доведення. Якщо майже-кільце R є нуль-симетричним, то

$$0 = 0 \cdot b = a\alpha_b(0) + b\beta_b(0) + c\gamma_b(0) + d\phi_b(0),$$

та

$$0 = 0 \cdot d = a\alpha_d(0) + b\beta_d(0) + c\gamma_d(0) + d\phi_d(0).$$

Звідси $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Навпаки, якщо мають місце вказані конгруентності, то $0 \cdot b = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$. Також $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$, оскільки a — мультиплікативна одиниця в R . Крім того, з рівності $c = -a - b + a + b$ та лівої дистрибутивності множення випливає $0 \cdot c = -0 \cdot a - 0 \cdot b + 0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$, звідки

$$0 \cdot x = 0 \cdot (ax_1 + bx_2 + cx_3d + x_4) = (0 \cdot a)x_1 + (0 \cdot b)x_2 + (0 \cdot c)x_3 + (0 \cdot d)x_4 = 0.$$

Отже, майже-кільце R є нуль-симетричним, що доводить твердження (0).

Далі, враховуючи (2) та лему 5, маємо

$$\begin{aligned} xc &= -xa - xb + xa + xb = -cx_3 - bx_2 - ax_1 - c\gamma_b(x) - b\beta_b(x) - a\alpha_b(x) + \\ &+ ax_1 + bx_2 + cx_3 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) = \\ &- bx_2 - ax_1 - b\beta_b(x) - a\alpha_b(x) + ax_1 + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &- bx_2 + cx_1\beta_b(x) - b\beta_b(x) - ax_1 - a(\alpha_b(x) - x_1) + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &= cx_1\beta_b(x) - b(x_2 + \beta_b(x)) - a\alpha_b(x) + bx_2 + a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) = \\ &= cx_1\beta_b(x) - b(x_2 + \beta_b(x)) - a\alpha_b(x) - cx_2\alpha_b(x) + a\alpha_b(x) + bx_2 + b\beta_b(x) = \\ &= c(x_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x)) - b(x_2 + \beta_b(x)) + bx_2 + b\beta_b(x) = c(x_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x)). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} xy &= (ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4)y_1 + (a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x))y_2 + \\ &+ (cx_1\beta_b(x) - x_2\alpha_b(x))y_3 + (a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x))y_4. \end{aligned}$$

За лемою 6, отримуємо

$$1) (ax_1 + bx_2)y_1 = ax_1y_1 + bx_2y_1 - cx_1x_2\binom{y_1}{2};$$

- 2) $(a\alpha_b(x) + b\beta_b(x))y_2 = a\alpha_b(x)y_2 + b\beta_b(x)y_2 - c\alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2}$;
 3) $(a\alpha_d(x) + b\beta_d(x))y_4 = a\alpha_d(x)y_4 + b\beta_d(x)y_4 - c\alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2}$;
 4) $bx_2y_1 + a\alpha_b(x)y_2 = a\alpha_b(x)y_2 + bx_2y_1 - cx_2\alpha_b(x)y_1y_2$;
 5) $b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) + a\alpha_d(x)y_4 = a\alpha_d(x)y_2 + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) -$
 $-c\alpha_d(x)y_2(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) = a\alpha_d(x)y_2 + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) -$
 $-c(x_2\alpha_d(x)y_1y_2 + \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2)$.

Звідси, враховуючи ліву дистрибутивність, одержуємо

$$\begin{aligned} xy &= a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \\ &+ c(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_2\alpha_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \\ &- x_1x_2\binom{y_1}{2} - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{y_2}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{y_4}{2} - \\ &- x_2\alpha_b(x)y_1y_2 - x_2\alpha_d(x)y_1y_2 - \alpha_d(x)\beta_b(x)y_2^2) + \\ &+ d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4). \end{aligned}$$

Крім того, в силу закону асоціативності, для всіх $x, y \in R$ справедливі рівності

$$(xy)b = x(yb), \quad (5)$$

та

$$(xy)d = x(yd). \quad (6)$$

Згідно з (2), маємо

$$(xy)b = a\alpha_b(xy) + b\beta_b(xy) + c\gamma_b(xy) + d\phi_b(xy), \quad (7)$$

та $yb = a\alpha_b(y) + b\beta_b(y) + c\gamma_b(y) + d\phi_b(y)$. Підставивши останній вираз в праву частину рівності (5), виводимо

$$\begin{aligned} x(yb) &= a(x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y)) + b(x_2\alpha_b(y) + \\ &+ \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y)) + c(x_3\alpha_b(y) + \gamma_b(x)\beta_b(y) + \\ &+ x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_b(y) + \gamma_d(x)\phi_b(y) - x_1x_2\binom{\alpha_b(y)}{2} - \\ &- \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_b(y)}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_b(y)}{2} - \\ &- x_2\alpha_b(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_b(y)\beta_b(y) - \\ &- \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_b(y)^2) + d(x_4\alpha_b(y) + \\ &+ \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Оскільки з рівності (5) випливає конгруентність відповідних коефіцієнтів в формулах (7) та (8), то звідси отримуємо твердження (1)–(4). Згідно з (3) маємо:

$$(xy)d = a\alpha_d(xy) + b\beta_d(xy) + c\gamma_d(xy) + d\phi_d(xy) \quad (9)$$

та $yd = a\alpha_d(y) + b\beta_d(y) + c\gamma_d(y) + d\phi_d(y)$. Підставимо отриманий вираз в праву частину рівності (6), отримаємо

$$\begin{aligned} x(yd) = & a(x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y)) + b(x_2\alpha_b(y) + \\ & + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y)) + c(x_3\alpha_d(y) + \gamma_b(x)\beta_d(y) + \\ & + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) - x_2\alpha_b(x)\gamma_d(y) + \gamma_d(x)\phi_d(y) - x_1x_2\binom{\alpha_d(y)}{2} - \\ & - \alpha_b(x)\beta_b(x)\binom{\beta_d(y)}{2} - \alpha_d(x)\beta_d(x)\binom{\phi_d(y)}{2} - \\ & - x_2\alpha_b(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - x_2\alpha_d(x)\alpha_d(y)\beta_d(y) - \\ & - \alpha_d(x)\beta_b(x)\beta_d(y)^2) + d(x_4\alpha_d(y) + \\ & + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y)). \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки з рівності (6) випливає конгруентність відповідних коефіцієнтів в формулах (9) та (10), то звідси маємо твердження 5)–8). Лему доведено.

4. Локальні майже-кільця на групах $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Нехай адитивною групою локального майже-кільця R є прямий добуток деякої неметациклічної p -групи Міллера–Морено та деякої циклічної p -групи. А отже, R^+ ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$. Тоді $R^+ = \langle a \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ з елементами a, b, c та d , що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = dp^k = 0$, $-b + a + b = a + c$, $-b + c + b = c$, $-d + a + d = a$, $-d + b + d = b$, $-d + c + d = c$. Причому a є одиничним елементом в R та кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m$, $0 \leq x_2 < p^n$, $0 \leq x_3 < p$ та $0 \leq x_4 < p^k$. Зокрема, для кожного $x \in R$ виконується рівність $xa = ax = x$ та існують однозначно визначені відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$, для яких виконуються рівності (2) та (3).

Нехай далі множина L всіх необоротних елементів майже-кільця R є підгрупою індексу p в R^+ .

Лема 9. Якщо $|R : L| = p$ та a — одиниця в R , то мають місце наступні твердження:

- 1) $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$;
- 2) елемент $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ є оборотним тоді і тільки тоді, коли $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Доведення. Оскільки $a \notin L$ та $ap \in L$, то $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$. З того, що $R^* = R \setminus L$ випливає, що $R^* = \{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 | x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}\}$.

Застосовуючи твердження 1) леми 9 до теореми 1, отримуємо наступну формулу для добутку xy довільних елементів $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ локального майже-кільця R .

Наслідок 1. Якщо $x, y \in R$, $|R : L| = p$, $xb = a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x)$ та $xd = a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x)$, то

$$xy = a(x_1y_1 + \alpha_b(x)y_2 + \alpha_d(x)y_4) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2 + \beta_d(x)y_4) + \quad (11)$$

$$+c\left(x_3y_1 + \gamma_b(x)y_2 + x_1\beta_b(x)y_3 + \gamma_d(x)y_4 - \right. \\ \left. -x_1x_2\binom{y_1}{2}\right) + d(x_4y_1 + \phi_b(x)y_2 + \phi_d(x)y_4),$$

причому для відображень $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ виконуються наступні твердження:

0) $\alpha_b(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_b(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_b(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_b(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(0) \equiv 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(0) \equiv 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi_d(0) \equiv 0 \pmod{p^k}$ тоді і тільки тоді, коли майже-кільце R є нуль-симетричним;

1) $\alpha_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$;

2) якщо $\beta_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$;

3) $\alpha_b(xy) \equiv x_1\alpha_b(y) + \alpha_b(x)\beta_b(y) + \alpha_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^m}$;

4) $\beta_b(xy) \equiv x_2\alpha_b(y) + \beta_b(x)\beta_b(y) + \beta_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^n}$;

5) $\gamma_b(xy) \equiv \gamma_b(x)\beta_b(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_b(y) + \gamma_d(x)\phi_b(y) \pmod{p}$;

6) $\phi_b(xy) \equiv x_4\alpha_b(y) + \phi_b(x)\beta_b(y) + \phi_d(x)\phi_b(y) \pmod{p^k}$;

7) $\alpha_d(xy) \equiv x_1\alpha_d(y) + \alpha_b(x)\beta_d(y) + \alpha_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^m}$;

8) $\beta_d(xy) \equiv x_2\alpha_d(y) + \beta_b(x)\beta_d(y) + \beta_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^n}$;

9) $\gamma_d(xy) \equiv \gamma_b(x)\beta_d(y) + x_1\beta_b(x)\gamma_d(y) + \gamma_d(x)\phi_d(y) \pmod{p}$;

10) $\phi_d(xy) \equiv x_4\alpha_d(y) + \phi_b(x)\beta_d(y) + \phi_d(x)\phi_d(y) \pmod{p^k}$.

Доведення. Дійсно, твердження 0), 3), 4), 6)–8), 10) повторюють твердження 0)–2), 4)–6), 8) теореми 1. Оскільки $L = \langle a \cdot p \rangle + \langle b \rangle + \langle c \rangle + \langle d \rangle$ за твердженням 1) леми 9 та $L \in (R, R)$ -підгрупою в R^+ за твердженням 1) леми 2, то $xb \in L$ та $xd \in L$, звідки $a\alpha_b(x) \in L$ та $a\alpha_d(x) \in L$ для кожного $x \in R$. Отже, $\alpha_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$ та $\alpha_d(x) \equiv 0 \pmod{p}$, що доводить твердження 1). Підставляючи отримане значення $a\alpha_b(x)$ та $a\alpha_d(x)$ в конгруентності 1)–8) теореми 1, одержуємо твердження 3)–10) наслідку та формулу множення (11). Поклавши в формулі (11) $y = c$, отримаємо $xc = c(x_1\beta_b(x))$. Отже, якщо $\beta_b(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то $xc = 0$, і тому $x \in L$. За твердженням 2) леми 9 випливає, що $x_1 \equiv 0 \pmod{p}$ та доводить твердження 2).

Покажемо тепер, що для довільного простого числа p та натуральних чисел $m \geq n$ та $m \geq k$ з $m > 1$ при $p = 2$ існує локальне майже-кільце R , адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$.

Лема 10. Нехай R — локальне майже-кільце, адитивна група якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$, $|R : L| = p$, $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $m > 1$ при $p = 2$. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ — довільні елементи із R , то відображення $\alpha_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ та $\alpha_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$, $\phi_d : R \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k}$ можуть бути наступними:

$\alpha_b(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\gamma_b(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_b(x) = 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(x) = 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_d(x) = 1 \pmod{p^k}$,

$$\beta_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}; \\ 0, & \text{if } x_1 \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Нехай $[n, i]$ є i -ою групою порядку n в бібліотеці SmallGroups системи комп'ютерної алгебри GAP [5].

Приклад 1. Нехай $G \cong ((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \times C_5$ [625, 12]. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in G$ та $(G, +, \cdot)$ є локальним майже-кільцем, то « $\cdot$ » може бути наступним:

$$x \cdot y = a(x_1y_1) + b(x_2y_1 + \beta_b(x)y_2) + c(x_3y_1 + x_1\beta_b(x)y_3 - x_1x_2 \binom{y_1}{2}) + d(x_4y_1 + y_4),$$

де

$$\beta_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_1 \not\equiv 0 \pmod{5}; \\ 0, & \text{if } x_1 \equiv 0 \pmod{5}. \end{cases}$$

Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.Yu.R.).

Список використаної літератури

1. Amberg B., Hubert P., Sysak Ya. Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*. 2004. Vol. 273. pp. 700–717. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.10.007>
2. Clay J. R. Nearrings. Geneses and Applications. New York : Clarendon Press, Oxford University Press, 1992.
3. Clay J. R., Malone Jr. The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand*. 1966. Vol. 19. pp. 146–150. URL: <https://www.msccand.dk/article/view/10803/8824> (date of access: 13.04.2025).
4. Ferrero C. C. Nearrings. Some developments linked to semigroups and groups. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. 609 p.
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; 2024. URL: <https://www.gap-system.org> (date of access: 13.04.2025).
6. Maxon C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. Vol. 106, pp. 197–205. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
7. Meldrum J. D. P. Near-rings and their links with groups. London : Pitman Publishing Limited, 1985. 273 p.
8. Miller G. A., Moreno H. Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1903. Vol. 4, pp. 398–404
9. Pilz G. Near-rings. The theory and its applications. North Holland : Amsterdam, 1977.
10. Raievska I. Yu., Raievska M. Yu. Finite nearrings with identity on Miller–Moreno p -groups. *Mat. Stud.* 2014. Vol. 42, No. 1. pp. 15–20. URL: http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf (date of access: 13.04.2025).
11. Redei L. Das “schiefe Produkt” in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören. *Comment. Math. Helv.* 1947. Vol. 20, S. 225–264.
12. Sysak Ya. P. Products of groups and local nearrings. *Note di Mat.* 2008. Vol. 28, No. 2. pp. 179–213. URL: <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>
13. Раєвська І. Ю. (2011). Локальні майже-кільця на неметациклічній p -групі Міллера–Морено. *Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка*. Т. 25. С. 43–45. URL: http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=VKNU_Mat_2011_25_16 (дата звернення: 13.04.2025).
14. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю., Сисак Я. П. Локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено. *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки*. 2012.

Т. 3. С. 39–46. URL: https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/33/2012_3 (дата звернення: 13.04.2025).

Raievska I. Iu. On direct products of non-metacyclic Miller–Moreno p -groups and cyclic p -groups as additive groups of local nearrings.

The question of which non-abelian p -groups can be additive groups of local nearrings is considered. Namely, it is proved that direct products of non-metacyclic Miller–Moreno p -groups and cyclic p -groups are additive groups of local nearrings. Examples of local nearrings on such groups are given.

Keywords: p -group, Millera–Moreno group, local nearring, additive group, direct product.

References

1. Amberg, B., Hubert, P., & Sysak, Ya. (2004). Local near-rings with dihedral multiplicative group. *J. Algebra*, 273, 700–717. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2003.10.007>
2. Clay, J. R. (1992). *Nearrings. Geneses and Applications*. New York: Clarendon Press, Oxford University Press.
3. Clay, J. R., & Malone, Jr. (1966). The near-rings with identities on certain finite groups. *Math. Scand.*, 19, 146–150. Retrieved from <https://www.msand.dk/article/view/10803/8824>.
4. Ferrero, C. C. (2002). *Nearrings. Some developments linked to semigroups and groups*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 609 p.
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; (2024). Retrieved from <https://www.gap-system.org>
6. Maxon, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197–205. <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
7. Meldrum, J. D. P. (1985). *Near-rings and their links with groups*. London: Pitman Publishing Limited.
8. Miller, G. A., & Moreno, H. (1903). Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4, 398–404
9. Pilz, G. (1977). *Near-rings. The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
10. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2014). Finite nearrings with identity on Miller–Moreno p -groups. *Mat. Stud.*, 42(1), 15–20. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2014/42_1/15-20.pdf
11. Redei L. (1947). Das “schiefe Produkt” in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen mit lauter kommutativen echten Untergruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören. *Comment. Math. Helv.*, 20, 225–264 [in German].
12. Sysak, Ya. P. (2008). Products of groups and local nearrings. *Note di Mat.*, 28(2), 179–213. Retrieved from <http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>
13. Raievska, I. Yu. (2011). Local nearrings on Miller–Moreno p -group. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics*, 25, 43–45. Retrieved from http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=VKNU_Mat_2011_25_16 [in Ukrainian].
14. Raievska, I. Yu., Raievska, M. Yu., & Sysak, Ya. P. (2012). Local nearrings on non-metacyclic Miller–Moreno groups. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, 3, 39–46. Retrieved from https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/33/2012_3 [in Ukrainian].

Одержано 15.03.2025

УДК 512.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).89-92](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).89-92)**М. Ю. Раєвська**

Інститут математики НАН України,
старший науковий співробітник, відділ алгебри і топології,
кандидат фізико-математичних наук
raemarina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6135-7818>

ПРО ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ З НІЛЬПОТЕНТНОЮ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ГРУПОЮ

Важливим питанням є встановлення взаємозв'язків між локальним майже-кілцем та його мультиплікативною групою. В статті досліджуються локальні майже-кілця з нільпотентною мультиплікативною групою. Зокрема, при певних обмеженнях описано адитивну групу та підгрупу необоротних елементів таких майже-кілець.

Ключові слова: локальне майже-кілце, мультиплікативна група, адитивна група, підгрупа необоротних елементів, нільпотентна мультиплікативна група.

1. Попередні відомості.

Майже-кілце R — це непорожня множина з двома бінарними операціями, додаванням “+” і множенням “ $\cdot$ ”, яка відрізняється від кілця тим, що комутативність першої операції та один із дистрибутивних законів (у нашому випадку, правий) не обов'язково виконуються (див., наприклад, [3]).

Група $(R, +)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кілця R . Майже-кілце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кілцем з одиницею* i , якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i . Група всіх оборотних елементів моноїда $(R, \cdot)$ називається *мультиплікативною групою* в R та позначається через R^* .

Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном [2], який встановив, зокрема, що адитивна група скінченного локального майже-кілця повинна бути p -групою.

Майже-кілце R з одиницею називається *локальним*, якщо множина $L = R \setminus R^*$ всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+ , та *майже-полем*, коли $L = 0$.

Актуальним є питання встановлення взаємозв'язків між локальним майже-кілцем та його мультиплікативною групою. Городником [1] вивчалися локальні майже-кілця, мультиплікативні групи яких є абелевими, і які не є кілцями. А саме, доведено, що множина всіх необоротних елементів такого майже-кілця утворює абелеву підгрупу індексу 2 в його адитивній групі. Зокрема, він описав локальні майже-кілця з циклічними групами одиниць, тобто, якщо мультиплікативна група локального майже-кілця є циклічною, то адитивна група є або групою типу $(2, 2, 2)$, або $(2, 4)$.

Дослідження локальних майже-кілець, мультиплікативні групи яких є в певному сенсі близькими до абелевих, зокрема, мінімальними неабелевими або, в іншій термінології, *групами Міллера–Морено* є природним узагальненням. В

статтях [4], [6], [7] описано локальні майже-кільця та майже-поля з мультиплікативними групами Міллера–Морено.

Наведемо означення нільпотентної групи (див., наприклад, [8]).

Нехай G — група. Нормальний ряд

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_n = G,$$

групи G називається *центральним*, якщо при $i = 0, 1, \dots, n-1$ фактор-група G_{i+1}/G_i міститься в центрі фактор-групи G/G_i . Група G , що має хоча б один центральний ряд, називається *нільпотентною*.

Нагадаємо, що *групою Шмідта* або *мінімальною ненільпотентною* називається скінченна ненільпотентна група, будь-яка власна підгрупа якої нільпотентна.

В статті [9] описується будова груп Шмідта. Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Шмідта вивчені в [5].

В статті досліджуються локальні майже-кільця, мультиплікативні групи яких є в певному сенсі близькими до абелевих, зокрема, нільпотентними.

2. Локальні майже-кільця з нільпотентною мультиплікативною групою.

В наступній теоремі встановлений зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з нільпотентною мультиплікативною групою R^* . Якщо $p > 2$ або $p = 2$ та $-i \in Z(R^*)$, то мають місце такі твердження:*

- 1) Адитивна група R^+ — абелева.
- 2) L — абелева та має індекс 2 в R^+ .

Зокрема, R/L є поле.

Доведення. Очевидно, що $-i \in Z(R^*)$ при $p > 2$.

Нехай $r, s, r + s \in R^*$. Маємо

$$\begin{aligned} (-i)(r + s) &= (-i)r + (-i)s = r(-i) + s(-i) = \\ &= -r - s = (r + s)(-i) = (-i)(s + r). \end{aligned}$$

Звідки,

$$(*) \quad r + s = s + r.$$

Далі, нехай $r \in R^*$ та $l \in L$. Тоді

$$\begin{aligned} (l + r)(-i) &= -(l + r) = -r - l = r(-i) - l = (-i)r - l = \\ &= (-i)(r - l(-i)) = (r - l(-i))(-i). \end{aligned}$$

Домножуючи справа на $(-i)$, отримаємо

$$(**) \quad -r + l + r = -l(-i).$$

Для будь-яких $r \in R^*$ маємо

$$(r')' = (-i)(-((-i)(-r))) = (-i)(-i)r = r.$$

Отже,

$$(***) \quad (r')' = r.$$

Нехай $l, s \in L$. Застосовуючи (***) двічі, отримаємо

$$(i + l) + s = s' + (i + l) = (i + s - i) + i + l = i + s + l.$$

Отже, підгрупа L — абелева.

Розглянемо два випадки, тобто коли $|R^+ : L^+| = 2$ та $|R^+ : L^+| > 2$.

Очевидно, якщо $|R^+ : L^+| = 2$, то R^+ — абелева.

Нехай тепер $|R^+ : L^+| > 2$. В групі R^* існують такі r та s , що $r + s \in R^*$. Застосовуючи (**) та (***),

$$l' = -(r + s) + l + (r + s) = -s + (-r + l + r) + s = (l')' = l,$$

для кожного $l \in L$. Це означає, що $L^+ \leq Z(R^+)$.

Нехай $r, s \in R^*$. Якщо $r + s \in R^*$, то $r + s = s + r$ за (*). Зараз припустимо, що $r + s \in L$. Тоді існує такий елемент $t \in R^*$, що $r + t \in R^*$. За (*), $r + t = t + r$. Отже,

$$(1) \quad r + t + s = t + (r + s) = (r + s) + t,$$

за припущенням. Звідки, t та s комутують. Елемент $t + (r + s) \in R^*$. Знову за (*), отримаємо

$$(2) \quad (t + r) + s = s + (t + r)s + r + t.$$

Комбінуючи (1) та (2), маємо $r + s = s + r$. Звідки, R^+ — абелева.

Отже, адитивна група R^+ є абелевою чи $|R^+ : L^+| = 2$.

Ця робота була підтримана грантом від Фонду Саймонса (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.Yu.R.).

Список використаної літератури

1. Gorodnik A. Local near-rings with commutative groups of units. *Houston J. Math.* 1999. Vol. 25. pp. 223–234.
2. Maxon C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. Vol. 106, pp. 197–205. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
3. Pilz G. Near-rings. The theory and its applications. North Holland : Amsterdam, 1977. 470 p.
4. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Майже-поля з неабелевою спадковими мультиплікативними групами. *Мат. студії.* 2010. Т. 34, № 1, С. 38–43. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/34_1/38-43.pdf (дата звернення: 12.04.2025).
5. Раєвська І. Ю., Раєвська М. Ю. Локальні майже-кілля з мультиплікативною групою Шмідта. *Укр. мат. журн.*, переклад. 2020. Т. 71, № 10. С. 1435–1440. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6>
6. Раєвська М. Ю. Локальні майже-кілля з мультиплікативною групою Міллера–Морено. *Вісн. Київ. Ун-ту. Математика. Механіка.* 2011. Т. 25. С. 45–48.
7. Раєвська М. Ю., Сисак Я. П. Про локальні майже-кілля з мультиплікативною групою Міллера–Морено. *Укр. мат. журн.* Переклад. 2012. Т. 64, № 6. С. 811–818. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0688-z>

8. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Москва : Наука, 1967. 648 с.
9. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные. *Мат. сб.* 1924. Вып. 31, С. 366–372.

Raievska M. Iu. On local nearrings with nilpotent multiplicative group.

An important issue is establishing the relationships between a **local nearring** and its **multiplicative group**. In the paper, local nearrings with **nilpotent multiplicative group** are studied. In particular, under certain restrictions, the **additive groups** and the **subgroups of non-invertible elements** of such nearrings are described.

Keywords: local nearring, multiplicative group, additive group, subgroup of non-invertible elements, nilpotent multiplicative group.

References

1. Gorodnik, A. (1999). Local near-rings with commutative groups of units. *Houston J. Math.*, 25, 223–234.
2. Maxon, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197–205. <https://doi.org/10.1007/BF01110133>
3. Pilz, G. (1977). *Near-rings. The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
4. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2010). Finite nearfields with hereditary non-abelian groups. *Mat. Stud.*, 34(1), 38–43. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2010/34_1/38-43.pdf [in Ukrainian].
5. Raievska, I. Yu., & Raievska, M. Yu. (2019). Local nearrings with multiplicative Shmidt group. *Ukr. Mat. Zh.*, translated, 71(10), 1435–1440. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01737-6> [in Ukrainian].
6. Raievska, M. Yu. (2011). Local nearrings with Miller-Moreno multiplicative group. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics*, 25, 45–48 [in Ukrainian].
7. Raievska, M. Yu., & Sysak, Ya. P. (2012). On local nearrings with Miller-Moreno multiplicative group. *Ukr. Mat. Zh.*, translated, 64(6), 811–818. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0688-z> [in Ukrainian].
8. Kurosh, A. G. (1967). *Course of higher algebra*. Moscow: Nauka [in Russian].
9. Shmidt, O. Iu. (1924). Groups, all subgroups of which are special. *Math. col.*, 31, 366–372 [in Russian].

Одержано 15.03.2025

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).93-103](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).93-103)**В. Л. Реґо¹, Я. В. Варґа²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
vasyl.reho@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4995-2577>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
iana.varga@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7842-248X>

ПОБУДОВА ІНТЕГРОВНИХ КОМБІНАЦІЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Метод інтегровних комбінацій є одним із ефективних методів інтегрування систем диференціальних рівнянь. Зокрема, у випадку лінійних систем зі сталими коефіцієнтами він за певних умов дозволяє звести систему диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, що значно спрощує розв'язання. Однак побудова інтегровних комбінацій часто викликає складнощі, оскільки визначити їх підбором доволі непросто. Метою даної роботи є дослідження питань існування й побудови інтегровних комбінацій для нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а також ілюстрація практичного застосування отриманих результатів.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, лінійна однорідна система диференціальних рівнянь, лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь, інтегровні комбінації, задача Копі.

1. Вступ. Розглянемо нормальну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (1)$$

де $\mathbf{X} = \text{col}(x_1(t) \dots x_n(t))$ — вектор-стовпець із невідомих функцій, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ — матриця розмірності $n \times n$ зі сталими елементами. Задля кращої наочності подальшого викладу запишемо (1) у вигляді

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

2. Дійсні інтегровні комбінації. Нехай $k_i, i = \overline{1, n}$ — деякі дійсні числа, не всі рівні нулю. Складемо лінійну комбінацію рівнянь системи (2):

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j. \quad (3)$$

Нагадаємо, що інтегровою комбінацією (ІК) для системи диференціальних рівнянь (СДР) називається [1] будь-яке звичайне диференціальне рівняння, яке

є наслідком системи й легко інтегрується. Із рівності (3) очевидно випливає, що дійсна ІК отримується за виконання умови

$$\sum_{i=1}^n k_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i,$$

тобто

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ji} k_j x_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (4)$$

де α — деяке дійсне число. Рівність (4) справджується за будь-якого значення t , якщо будуть рівними коефіцієнти, при однакових шуканих функціях у лівій і правій частинах. Ця вимога дає алгебраїчну систему відносно коефіцієнтів k_i :

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} k_j = \alpha k_i, \quad i = \overline{1, n},$$

яку можна записати в матричному вигляді

$$(\mathbf{A}^T - \alpha \mathbf{E}) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

де $\mathbf{E}$ — одинична матриця розмірності $n \times n$, $\mathbf{k} = \text{col}(k_1 \dots k_n)$. За припущенням вектор-стовпець $\mathbf{k}$ є ненульовим, а отже, враховуючи рівність (5), його можна інтерпретувати як власний вектор транспонованої матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає дійсному власному значенню α (як відомо з курсу алгебри [2], матриці $\mathbf{A}^T$ є подібними, тож їх власні значення співпадають).

Таким чином, нами доведена

Теорема 1 (про існування дійсних інтегровних комбінацій для СДР (1)). *Якщо матриця СДР (1) має дійсне власне значення $\lambda = \alpha$, то для цієї системи існує дійсна інтегровна комбінація*

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i, \quad (6)$$

де k_i , $i = \overline{1, n}$ — елементи власного вектора матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає власному значенню $\lambda = \alpha$.

Шляхом відокремлення змінних із диференціального рівняння (6) отримуємо загальний інтеграл

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = C e^{\alpha t}, \quad (7)$$

де C — довільна дійсна стала. Звідси випливає

Наслідок 1 (застосування методу інтегровних комбінацій у випадку дійсних власних значень матриці системи). *Якщо матриця СДР n -го порядку (1) має n дійсних попарно різних власних значень $\lambda_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, тоді СДР (1) зводиться до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій.*

Справді, згідно з доведеною теоремою для кожного власного значення можна побудувати ІК вигляду (6). Ці ІК будуть лінійно незалежними, оскільки власні значення є попарно різними. А сукупність їх загальних інтегралів вигляду (7) утворить систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, із якої можна знайти загальний розв'язок СДР (1). Утворена лінійна неоднорідна система завжди розв'язна, адже її визначник, рядками якого є власні вектори матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідають різним власним значенням (а отже є лінійно незалежними), відмінний від нуля.

Зауваження 1. Описаний вище алгоритм методу інтегровних комбінацій застосовний також для відповідної до (1) неоднорідної СДР вигляду

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{F}(t), \quad (8)$$

де $\mathbf{F} = \text{col}(f_1(t) \dots f_n(t))$ — вектор-стовпець вільних членів. Однак у цьому випадку замість (6) отримуємо ІК

$$\sum_{i=1}^n k_i \dot{x}_i = \alpha \sum_{i=1}^n k_i x_i + \sum_{i=1}^n k_i f_i(t),$$

що являє собою лінійне диференціальне рівняння першого порядку, загальний інтеграл якого знаходиться за формулою

$$\sum_{i=1}^n k_i x_i = e^{\alpha t} \left(C + \int e^{-\alpha t} \cdot \sum_{i=1}^n k_i f_i(t) dt \right). \quad (9)$$

Приклад 1. Зінтегрувати лінійну однорідну СДР методом інтегровних комбінацій:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases} \quad (10)$$

Розв'язання. Система третього порядку (10) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ — отже, згідно з Наслідком 1 СДР (10) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{z} = (2x - y + z) - (x - y + 2z) = x - z \Rightarrow x - z = C_1 e^t.$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} - \dot{z} &= (2x - y + z) + (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 2(x + y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + y - z = C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\dot{y} - \dot{z} = (x + 2y - z) - (x - y + 2z) = 3(y - z) \Rightarrow y - z = C_3 e^{3t}.$$

Загальний розв'язок СДР (10) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами:

$$\begin{cases} x - z = C_1 e^t, \\ x + y - z = C_2 e^{2t}, \\ y - z = C_3 e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t}, \\ y = C_2 e^{2t} - C_1 e^t, \\ z = C_2 e^{2t} - C_3 e^{3t} - C_1 e^t. \end{cases}$$

Приклад 2. За допомогою методу інтегровних комбінацій знайти розв'язок задачі Коші для лінійної однорідної СДР:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z, \end{cases} \quad (11)$$

$$x(0) = 3, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \quad (12)$$

Розв'язання. Система третього порядку (11) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ — отже, згідно з Наслідком 1 СДР (11) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} - 2\dot{y} - \dot{z} &= (x - 2y - z) - 2(-x + y + z) - (x - z) = 2(x - 2y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - 2y - z = C_1 e^{2t}, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_1 = x(0) - 2y(0) - z(0) = 3 - 2 = 1.$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + 2\dot{y} + \dot{z} &= (x - 2y - z) + 2(-x + y + z) + (x - z) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 2y + z = C_2, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_2 = x(0) + 2y(0) + z(0) = 3 + 2 = 5.$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\begin{aligned} \dot{x} + \dot{y} - \dot{z} &= (x - 2y - z) + (-x + y + z) - (x - z) = -(x + y - z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + y - z = C_3 e^{-t}, \end{aligned}$$

а згідно з початковими умовами (12) при $t = 0$ маємо

$$C_3 = x(0) + y(0) - z(0) = 3 + 1 = 4.$$

Розв'язок задачі Коші (11), (12) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами при розрахованих значеннях сталих:

$$\begin{cases} x - 2y - z = e^{2t}, \\ x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 4e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{e^{2t} + 5}{2}, \\ y = \frac{4e^{-t} - e^{2t}}{3}, \\ z = \frac{e^{2t} - 16e^{-t} + 15}{6}. \end{cases}$$

Приклад 3. Застосувати метод інтегровних комбінацій до лінійної неоднорідної СДР:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z - t, \\ \dot{y} = x - z + 2t, \\ \dot{z} = 3x - y - 2z + t. \end{cases} \quad (13)$$

Розв'язання. Система третього порядку (13) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

яка має три дійсні попарно різні власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ — отже, згідно з зауваженням 1 СДР (13) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови ІК знайдемо відповідні власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{y} = (2x - y - z - t) - (x - z + 2t) = x - y - 3t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = e^t \left(C_1 - \int 3te^{-t} dt \right) = C_1 e^t + 3(t + 1).$$

$$2)(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, другою ІК буде

$$\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = (2x - y - z - t) + (x - z + 2t) - (3x - y - 2z + t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y - z = C_2.$$

$$3)(\mathbf{A}^T - \lambda_3 \mathbf{E})\mathbf{k}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{31} \\ k_{32} \\ k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, третьою ІК буде

$$\dot{x} - \dot{z} = (2x - y - z - t) - (3x - y - 2z + t) = -(x - z) - 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - z = e^{-t} \left(C_3 - \int 2te^t dt \right) = C_3 e^{-t} - 2(t - 1).$$

Загальний розв'язок СДР (13) визначаємо з системи алгебраїчних рівнянь, утвореної трьома знайденими інтегралами:

$$\begin{cases} x - y = C_1 e^t + 3(t + 1), \\ x + y - z = C_2, \\ x - z = C_3 e^{-t} - 2(t - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 - C_3 e^{-t} + 5t + 1, \\ y = C_2 - C_3 e^{-t} + 2(t - 1), \\ z = C_1 e^t + C_2 - 2C_3 e^{-t} + 7t - 1. \end{cases}$$

3. Комплексні інтегровні комбінації. Нехай $k_i, i = \overline{1, n}$ — деякі комплексні числа, не всі рівні нулю. Повторюючи міркування з доведення Теорема 1, складемо лінійну комбінацію (3), звідки очевидно випливає, що ІК отримується за виконання умови (4) у вигляді

$$\sum_{p,q=1}^n a_{qp} k_q x_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p, \quad (14)$$

де α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$. Рівність (14) аналогічно до (4) справджується за будь-якого значення t при виконанні умови

$$[\mathbf{A}^T - (\alpha + \beta i)\mathbf{E}]\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

де $\mathbf{E}$ — одинична матриця розмірності $n \times n$, $\mathbf{k} = \text{col}(k_1 \dots k_n)$. За припущенням вектор-стовпець $\mathbf{k}$ є ненульовим, а отже, враховуючи рівність (15), його можна інтерпретувати як власний вектор транспонованої матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає комплексному власному значенню $\alpha + \beta i$.

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 2 (про існування комплексних інтегровних комбінацій для СДР (1)). *Якщо матриця СДР (1) має комплексне власне значення $\lambda = \alpha + \beta i$ (α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$), то для цієї системи існує комплексна інтегровна комбінація*

$$\sum_{p=1}^n k_p \dot{x}_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p, \quad (16)$$

де $k_p, p = \overline{1, n}$ — загалом комплекснозначні елементи власного вектора матриці $\mathbf{A}^T$, що відповідає власному значенню $\lambda = \alpha + \beta i$.

Шляхом відокремлення змінних із диференціального рівняння (16) отримуємо загальний інтеграл

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = C e^{(\alpha + \beta i)t},$$

де C — довільна комплексна стала. Запишемо останню рівність в еквівалентному вигляді

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = (C_1 + C_2 i) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad (17)$$

де C_1, C_2 дійсні сталі. Тоді зі співвідношення (17) шляхом прирівнювання дійсних і уявних частин отримуємо дві незалежні дійсні рівності, що пов'язують дійснозначні шукані функції СДР (1):

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n x_p \operatorname{Re}(k_p) &= e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t - C_2 \sin \beta t), \\ \sum_{p=1}^n x_p \operatorname{Im}(k_p) &= e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t). \end{aligned} \quad (18)$$

Звідси випливає

Наслідок 2 (застосування методу інтегровних комбінацій у випадку комплексних власних значень матриці системи). *Якщо матриця $\mathbf{A}$ СДР (1) має комплексне власне значення $\lambda = \alpha + \beta i$ (α, β — деякі дійсні числа, причому $\beta \neq 0$), тоді для шуканих функцій СДР (1) справджуються співвідношення (18), де $k_p, p = \overline{1, n}$ визначаються згідно з Теоремою 2.*

Зауваження 2. *Описаний вище алгоритм побудови комплексних інтегровних комбінацій застосовний також для відповідної до (1) неоднорідної СДР вигляду (8). Однак у цьому випадку замість (16) отримуємо ІК*

$$\sum_{p=1}^n k_p \dot{x}_p = (\alpha + \beta i) \sum_{p=1}^n k_p x_p + \sum_{p=1}^n k_p f_p(t),$$

загальний інтеграл якої знаходиться за аналогічною до (9) формулою

$$\sum_{p=1}^n k_p x_p = e^{(\alpha + \beta i)t} \left(C_1 + C_2 i + \int e^{-(\alpha + \beta i)t} \cdot \sum_{p=1}^n k_p f_p(t) dt \right).$$

Прирівнявши в останньому співвідношенні дійсні та уявні частини, отримаємо дві незалежні дійсні рівності, що пов'язують дійснозначні шукані функції СДР (8).

Приклад 4. *Застосувати метод інтегровних комбінацій до лінійної однорідної СДР другого порядку:*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases} \quad (19)$$

Розв'язання. Система другого порядку (19) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

яка має два комплексно спряжені власні значення $\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$. Побудуємо інтегровну комбінацію для одного з них, наприклад, λ_1 . Для цього потрібно знайти відповідний власний вектор транспонованої матриці

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} : \\ (\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{k}_1 &= \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i. \end{aligned}$$

Отже, комплексною ІК буде

$$\dot{x} + i\dot{y} = (2x - y) + i(x + 2y) = (2 + i)(x + iy),$$

а відповідна їй система (18) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = e^{2t}(C_1 \cos t - C_2 \sin t), \\ y = e^{2t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t), \end{cases}$$

що безпосередньо визначає загальний розв'язок вихідної СДР (19).

4. Узагальнення результатів дослідження. Виходячи з наведених вище міркувань, можемо стверджувати, що справедлива

Теорема 3 (зведення системи диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь). *Якщо матриця $\mathbf{A}$ СДР n -го порядку (1) має n попарно різних власних значень, тоді СДР (1) зводиться до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій, у якій кожному дійсному власному значенню відповідає співвідношення вигляду (7), яке будується згідно з Теоремою 1 та Наслідком 1, а кожній парі комплексно спряжених власних значень — пара рівностей вигляду (18), які будуються згідно з Теоремою 2 та Наслідком 2.*

Додатково зазначимо, що аналогічну теорему можна сформулювати також для неоднорідної СДР (8), з урахуванням Зауважень 1 і 2.

Приклад 5. *Шляхом зведення до системи алгебраїчних рівнянь розв'язати СДР:*

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases} \quad (20)$$

Розв'язання. Система третього порядку (20) задана матрицею

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

яка має три попарно різні власні значення: одне дійсне $\lambda_1 = 2$, і два комплексно спряжені $\lambda_2 = -5 + 2i$, $\lambda_3 = -5 - 2i$ — отже, згідно з Теоремою 3 СДР (20) зводиться до системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій методом інтегровних комбінацій. Для побудови рівнянь алгебраїчної системи потрібно знайти власні вектори транспонованої матриці

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

що відповідають дійсному та одному з комплексних власних значень.

$$1)(\mathbf{A}^T - \lambda_1 \mathbf{E})\mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, першою (дійсною) ІК буде

$$-2\dot{y} + 3\dot{z} = -2(3x - 4y - 3z) + 3(2x - 4y) = 2(-2y + 3z) \Rightarrow -2y + 3z = C_1 e^{2t}.$$

2) Для $\lambda_2 = -5 + 2i$ маємо:

$$(\mathbf{A}^T - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-2i & 3 & 2 \\ -1 & 1-2i & -4 \\ -1 & -3 & 5-2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ k_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} -2-7i \\ 4+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Отже, комплексною ІК буде

$$(-2-7i)\dot{x} + (4+i)\dot{y} + 2\dot{z} = (-2-7i)(-4x-y-z) +$$

$$+(4+i)(3x-4y-3z) + 2(2x-4y) = (-5+2i) \cdot [(-2-7i)x + (4+i)y + 2z],$$

а відповідна їй система дійсних співвідношень (18) запишеться як

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = e^{-5t}(C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t), \\ -7x + y = e^{-5t}(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t). \end{cases}$$

Далі розв'язуємо отриману систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих функцій:

$$\begin{cases} -2y + 3z = C_1 e^{2t}, \\ -2x + 4y + 2z = e^{-5t}(C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t), \\ -7x + y = e^{-5t}(C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t), \end{cases}$$

звідки визначаємо загальний розв'язок СДР (20) у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{e^{-5t}[(3C_2 - 16C_3) \cos 2t - (3C_3 + 16C_2) \sin 2t] - 2C_1 e^{-t}}{106}, \\ y = \frac{3e^{-5t}[(7C_2 - 2C_3) \cos 2t - (7C_3 + 2C_2) \sin 2t] - 14C_1 e^{-t}}{106}, \\ z = \frac{e^{-5t}[(7C_2 - 2C_3) \cos 2t - (7C_3 + 2C_2) \sin 2t] + 13C_1 e^{-t}}{53}. \end{cases}$$

Ввівши задля спрощення нові довільні сталі за формулами $\bar{C}_1 = -\frac{C_1}{53}$, $\bar{C}_2 = \frac{7C_2 - 2C_3}{106}$, $\bar{C}_3 = -\frac{7C_3 + 2C_2}{106}$, маємо остаточно

$$\begin{cases} x = e^{-5t}[(\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3) \cos 2t + (\bar{C}_3 - 2\bar{C}_2) \sin 2t] + \bar{C}_1 e^{-t}, \\ y = 3e^{-5t}(\bar{C}_2 \cos 2t + \bar{C}_3 \sin 2t) + 7\bar{C}_1 e^{-t}, \\ z = 2e^{-5t}(\bar{C}_2 \cos 2t + \bar{C}_3 \sin 2t) - 13\bar{C}_1 e^{-t}. \end{cases}$$

Список використаної літератури

1. Реге В. Л., Варга Я. В., Король І. І. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку: навчальний посібник з курсу «Диференціальні рівняння». Частина II. Ужгород : ДВНЗ «УжНУ», 2022. 124 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/44854> (дата звернення: 17.01.2025).
2. Шапочка І. В. Лінійна алгебра. Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2022. 233 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/52013> (дата звернення: 17.01.2025).

3. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ : Вища школа, 1994. 454 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/dif_prukl_zad.pdf (дата звернення: 19.01.2025).
4. Rontó M., Raisz P. Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal. Miskolci egyetemi kiadó, 2004. 324 о.

Reho V. L., Varga I. V. Construction of integrable combinations for normal linear systems of differential equations with constant coefficients.

The method of integrable combinations is one of effective methods for integrating systems of differential equations. In particular, in the case of linear systems with constant coefficients, it enables, under certain conditions, to reduce the system of differential equations to a system of algebraic equations with respect to the desired functions, which greatly simplifies the solution. However, the construction of integrable combinations often causes difficulties, since it is quite complicated to determine them by selection. The purpose of this work is to study the issues of the existence and construction of integrable combinations for normal linear systems of differential equations with constant coefficients, as well as to illustrate the practical application of the results obtained.

Keywords: system of differential equations with constant coefficients, linear homogeneous system of differential equations, linear inhomogeneous system of differential equations, integrable combinations, Cauchy problem.

References

1. Reho, V. L., Varga, Ya. V., & Korol, I. I. (2022). *Higher-order differential equations. Systems of ordinary first-order differential equations: a textbook for the course "Differential equations". Part II*. Uzhhorod: State Higher Educational Institution «UzhNU». Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/44854> [in Ukrainian].
2. Shapochka, I. V. (2022). *Linear algebra. Textbook*. Uzhhorod: Publishing house of UzhNU "Hoverla". Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/52013> [in Ukrainian].
3. Samoilenko, A. M., Kryvosheya, S. A., & Perestyuk, M. O. (1994). *Differential equations in examples and problems*. Kyiv: Higher School. Retrieved from https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2018/03/dif_prukl_zad.pdf [in Ukrainian].
4. Rontó, M., & Raisz, P. (2004). *Differenciálegyenletek műszakiaknak. Elméleti összefoglaló 300 kidolgozott feladattal*. Miskolci egyetemi kiadó. [in Hungarian].

Одержано 30.03.2025

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).104-108](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).104-108)**Г. І. Сливка-Тилищак¹, М. В. Маді², М. О. Тилищак³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
mykhailo.madi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9356-3408>

³ Ужгородський науковий ліцей,
здобувач
marichkatlk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4379-1423>

ПОБУДОВА ВИБІРКИ З МНОЖИНИ МІРИ НУЛЬ ТА ЇЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок з множин, що мають міру нуль. Розглянуто два способи побудови вибірок з множини Кантора та проаналізовано їх числові характеристики, зроблено висновки про принципову подібність чи відмінність отриманих вибірок.

Отримано, що вибіркове середнє у всіх вибірках обох серій для множини Кантора практично не відрізняються, а послідовність середньоквадратичних відхилень вибірок першої серії (ітераційної) стабілізується на другому кроці і прямує до середньоквадратичних відхилень усіх вибірок другої серії.

Ключові слова: множини міри нуль, множина Кантора, числові характеристики вибірки.

1. Вступ. Поняття міри є узагальненням таких числових характеристик множин як довжина, площа, об'єм. Ці характеристики застосовуються в різних просторах, для різних класів множин, але їх значення мають спільні риси: вони невід'ємні, і для об'єднання двох множин, що не перетинаються, дорівнюють сумі значень цих двох множин. Як це часто робиться в математиці, замість окремого вивчення довжини, площі, об'єму тощо, ми досліджуємо загальну числову функцію множин — міру, що визначена на певному абстрактному наборі множин і задовольняє дві вказані властивості. Можна побудувати багато цікавих множин, які не мають міри, тобто міра яких рівна нулю. Робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок з множин, що мають міру нуль. Дана тема є актуальною тим, що вона допомагає уявити, що таке множина міри нуль. Методи побудови вибірок із складно сконструйованих математичних множин є слабо досліджені.

2. Основний результат. Множина Кантора — підмножина відрізка $[0, 1]$, яку вперше ввів німецький математик Георг Кантор. Множина утвориться з відрізка, якщо послідовно вилучити такі інтервали: спочатку на кроці $n = 1$ вилучаємо інтервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (тобто центральну третину відрізка). Отже залишиться $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Далі на кроці $n = 2$ вилучаємо відрізки $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ та $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$

(тобто центральні третини тих двох відрізків $[0, \frac{1}{3}]$ та $[\frac{2}{3}, 1]$, які залишилися. Отже залишиться $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, і так далі. Множина K , яка залишилася, називається множиною Кантора [1]. Таким чином $K = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Для описання множин дійсних чисел скористаємось інтуїтивним поняттям міри. Цікаво, що міра відрізків, які залишаються на кожному кроці формування множини Кантора зменшується. Оскільки на кожному кроці відкидаються центральні третини тих відрізків, які залишилися, то після кожного кроку залишається $\frac{2}{3}$ від попередньої міри. Таким чином при $n = 1$ це $\frac{2}{3}$, при $n = 2$ це $\frac{4}{9}$, а для довільного n — $(\frac{2}{3})^n$. Якщо n спрямувати до нескінченності, то міра відрізків, які залишаються, прямує до 0. Таким чином міра множини Кантора рівна 0.

2.1. Генерація вибірки з множини Кантора методом хаоса. Для унаочнення множини Кантора K , скористаємось рівномірно розподіленою випадковою величиною над якою проводимо деякі обчислення та відповідними вибірками. Нехай x — рівномірно розподілена на множині $[0; 1]$ випадкова величина, тобто ймовірність попадання у підмножину цієї множини рівна її мірі, бо довжина відрізка $[0; 1] \in 1$. Перемістимо x втричі ближче до 0 або втричі ближче до 1. Тобто для дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини δ , що приймає значення 0 або 1, кожне з однаковою ймовірністю $\frac{1}{2}$, розглянемо

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{якщо } \delta = 0 \\ \frac{x+2}{3}, & \text{якщо } \delta = 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що y є рівномірно розподіленою випадковою величиною на множині $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, якщо при кожному зверненні до $f(x)$ незалежно генерується δ , що приймає значення 0 або 1, кожне з однаковою ймовірністю $\frac{1}{2}$. Якщо б x була рівномірно розподіленою випадковою величиною на множині A_1 , то y була б рівномірно розподіленою випадковою величиною на множині $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. І так далі.

Побудуємо в деякому наближенні вибірку з множини Кантора. Використаємо метод хаосу. Скористаємось вибіркою $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k}$ випадкової величини x_0 рівномірно розподіленої на множині $[0; 1]$. Вона буде ілюструвати множину $A_0 = [0, 1]$ при зображенні. Далі будемо випадкові величини $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$ та їх вибірки $x_{i+1,j} = f(x_{i,j})$ ($j = 1, \dots, k$). Зрозуміло, що $x_{1j} = f(x_{0j})$ для кожного j обчислюється за однією з формул $x_{1j} = \frac{x_{0j}}{3}$, або $x_{1j} = \frac{x_{0j}+2}{3}$. Оскільки $x_{0j} \in [0; 1]$, то в першому випадку $x_{1j} \in [0, \frac{1}{3}]$, в другому випадку $x_{1j} \in [\frac{2}{3}, 1]$, тоді $x_{1j} \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] = A_1$. Продовжуючи далі, з умови $x_{1j} \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ та того, що $x_{2j} = f(x_{1j})$ для кожного j обчислюється за однією з формул $x_{2j} = \frac{x_{1j}}{3}$, або $x_{2j} = \frac{x_{1j}+2}{3}$. Оскільки в першому випадку $x_{2j} \in [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, в другому випадку $x_{2j} \in [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, тоді $x_{2j} \in [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] = A_2$. І так далі. Кожна з вибірок $x_{i,j}$, ($j = 1, \dots, k$) ілюструватиме множину A_i , до якої, очевидно, належать всі її елементи.

Оскільки, кожна множина A_i симетрична відносно 0.5, то середнє значення

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ik}}{k}$$

має наближатися до 0,5 при зростанні k . Середньоквадратичне відхилення бу-

демо обчислювати за формулою:

$$D_i = \sqrt{(x_i - \bar{x}_i)^2} = \sqrt{\frac{(x_{i1} - \bar{x}_i)^2 + (x_{i2} - \bar{x}_i)^2 + \dots + (x_{ik} - \bar{x}_i)^2}{k}}.$$

Запуск коду, що починає з вибірки в $k = 1000$ елементів рівномірно розподіленої випадкової величини на проміжку $[0; 1]$, генерує вибірки поданих характеристик та зображує кожну вибірку точками на одному горизонтальному відрізку, а різні вибірки на різних горизонтальних відрізках.

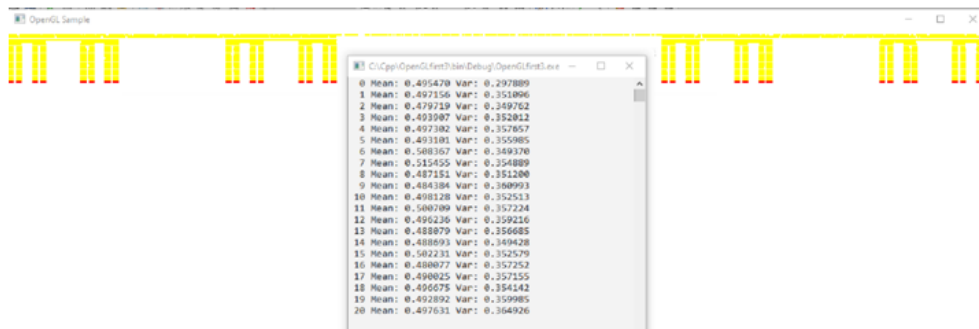


Рис. 1

Таблиця 1

i	Вибіркове середнє	Середньо квадратичне відхилення	i	Вибіркове середнє	Середньо квадратичне відхилення
0	0.504464	0.287646	10	0.508515	0.360488
1	0.491488	0.344500	11	0.509505	0.355088
2	0.511163	0.347142	12	0.513835	0.350003
3	0.509721	0.350557	13	0.504612	0.354932
4	0.503241	0.350744	14	0.522204	0.350737
5	0.501080	0.360044	15	0.520735	0.351285
6	0.495694	0.354741	16	0.529579	0.348256
7	0.487898	0.349755	17	0.483859	0.348135
8	0.496632	0.345271	18	0.494620	0.348737
9	0.487544	0.351190	19	0.483540	0.352806

Аналіз таблиці показує, що вибіркове середнє, дійсно знаходиться завжди біля 0.5, відрізняється від нього не більше ніж на 0.03, а середньо квадратичне відхилення, крім першого значення, знаходиться завжди біля 0.35 і відрізняється від нього не більше ніж на 0.011.

2.2. Генерація вибірки з множини Кантора методом перетворення цифр. Зменшимо множину Кантору, послідовно вилучаючи такі інтервали: спочатку на кроці $n = 1$ вилучаємо інтервал $[1/3, 2/3]$ разом з лівою межею. Подаватимемо числа в цифровому записі в 3-вій системі числення, вигляду

$0, a_1 a_2 a_3 a_4, \dots (a_i \in \{0, 1, 2\})$. Очевидно, $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_i 22 \dots = 0, a_1 a_2 a_3 \dots (a_i + 1)00 \dots$, якщо $a_i < 2$. Тому, далі відмовляємося від представлення, які не закінчуються послідовністю 2-йок. Тобто $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \dots$. Тоді на першому кроці вилучають числа, в описаному цифровому записі якого $a_1 = 1$. Отже залишаться $A_1 = [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$. Тобто на першому кроці залишаються числа, в описаному цифровому записі якого $a_1 = 0$ або $a_1 = 2$. Далі, на кроці $n = 2$ вилучаємо відрізки $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ та $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Тоді на другому кроці вилучаються ще числа, в описаному цифровому записі якого $a_2 = 1$. Отже, залишаться $A_2 = [0, \frac{1}{9}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}) \cup [\frac{8}{9}, 1)$. Отже на другому кроці залишаються числа, в описаному цифровому записі якого $a_1, a_2 \in \{0, 2\}$. Таким чином, побудована підмножина Ω множини Кантора складається з чисел в цифровому записі в 3-вій системі числення, вигляду $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots, (a_i \in \{0, 2\})$. Оскільки, відкидання чи приєднання межевої точки довільного інтервалу, ніяк не впливає на характеристики вибірки рівномірно розподіленої величини з цього інтервалу, то ми можемо знехтувати неможливістю розгляду чисел, що є лівою межею відкидуваних інтервалів. Очевидно ліва межа відкидуваних проміжків є числа вигляду $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_i 1100 \dots$. Тобто для кожного фіксованого i множина чисел такого вигляду скінчена. Таким чином для довільного i множина чисел такого вигляду зліченна. Натомість, множина Ω незліченна, бо вона еквівалентна множині чисел вигляду $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots, (a_i \in \{0, 2\})$, які не закінчуються послідовністю 2-йок в 3-й системі числення. Або множині чисел вигляду $0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots, (a_i \in \{0, 1\})$, які не закінчуються послідовністю 1-чок в 2-й системі числення. Тобто Ω еквівалентна інтервалу $[0, 1)$ і є незліченною.

З описаного вище, можна запропонувати наступний алгоритм побудови вибірки з множини Кантора:

- 1) Генеруємо рівномірно розподілену випадкову величину з проміжку $[0, 1)$.
- 2) Кожне число вибірки записуємо в двійковій системі числення, щоб запис не закінчувався послідовністю 1-чок.
- 3) Міняємо запис замінюючи цифри 1 на 2.
- 4) Одержаний запис трактуємо в трійковій системі числення, що подасть число з підмножини Ω множини Кантора.

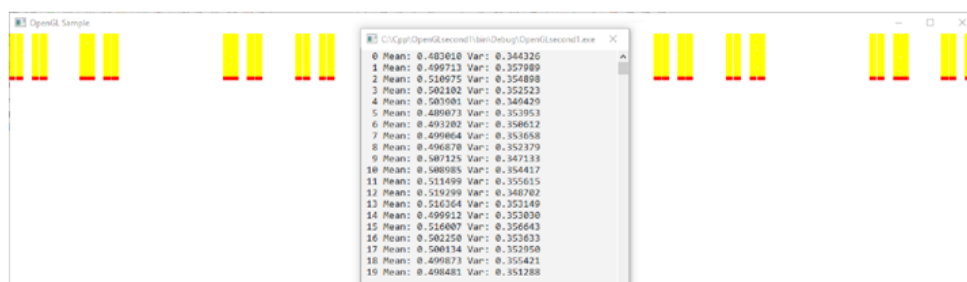


Рис. 2

Аналіз таблиці показує, що вибіркове середнє, дійсно наближено до 0.5 відрізняється від нього не більше ніж на 0.02, а середньо квадратичне відхилення знаходиться завжди біля 0.35 і відрізняється від нього не більше ніж на 0.001. Ці характеристики є кращими ніж аналогіні у вибірок згенерованих методом

Таблиця 2

i	Вибіркове середнє	Середньо квадратичне відхилення	i	Вибіркове середнє	Середньо квадратичне відхилення
0	0.483010	0.344326	10	0.511499	0.355615
1	0.499713	0.357989	11	0.519299	0.348702
2	0.510975	0.354898	12	0.516364	0.353149
3	0.502102	0.352523	13	0.499912	0.353030
4	0.503901	0.349429	14	0.516007	0.356643
5	0.489073	0.353953	15	0.502250	0.353633
6	0.493202	0.350612	16	0.500134	0.352950
7	0.499064	0.353658	17	0.499873	0.355421
8	0.496870	0.352379	18	0.498481	0.351288
9	0.507125	0.347133	19	0.511499	0.355615

хаоса, хоча середні значення отримуваних вибірових середніх та середньоквадратичних відхилень практично не відрізняються.

Список використаної літератури

1. G. Cantor. On the Power of Perfect Sets of Points (De la puissance des ensembles parfait de points). *Acta Mathematica*. 1884. Vol. 4. P. 381–392.
2. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017. 292 с.
3. Бевз В. Г. Історія математики. Харків : Основа, 2006. 144 с.

Slyvka-Tylyshchak G. I., Madi M. V., Tylyshchak M. O. Construction of a sample from a set of measure zero and its characteristics.

This work is devoted to the study of methods for constructing samples from sets of measure zero. Two methods of constructing samples from the Cantor set are considered and their numerical characteristics are analyzed. Conclusions are drawn regarding the fundamental similarity or difference between the obtained samples.

It was found that the sample means in all samples from both series for the Cantor set are practically identical, and the sequence of sample standard deviations in the first (iterative) series stabilizes at the second step and converges to the standard deviations of all samples in the second series.

Keywords: sets of measure zero, the Cantor set, statistical characteristics of the sample.

References

1. Cantor, G. (1884). On the Power of Perfect Sets of Points (De la puissance des ensembles parfait de points). *Acta Mathematica*, 4, 381–392.
2. Ohirko, O. I., & Halaiko, N. V. (2017). *Probability Theory and Mathematical Statistics: A Textbook*. Lviv: Lviv State University of Internal Affairs [in Ukrainian].
3. Bevez, V. H. (2006). *History of Mathematics*. Kharkiv: Osnova [in Ukrainian].

Одержано 01.04.2025

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).109-118](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).109-118)**I. V. Turchyn**

Oles Honchar Dnipro National University,
Associate Professor, Department of Statistics and Probability Theory,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
evgturchyn@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8947-1359>

A GENERALIZATION OF THE EXPONENTIATED G DISTRIBUTION FAMILY WITH APPLICATIONS TO THE BURR DISTRIBUTION AND THE JOHNSON S_U DISTRIBUTION

A new general approach for building the distribution families is proposed. This approach is quite simple but it allows to create a very extensive range of distributions (a so-called MET-G family). Two particular cases, the monotone exponent transformation Burr XII and the monotone exponent transformation Johnson S_U are studied in detail. Flexibility of the new distributions is demonstrated by fitting them to real data.

Keywords: exponentiated G family, Burr distribution, Johnson family of distributions, maximum likelihood estimation, goodness of fit.

1. Introduction. Creation of new distribution families has attracted considerable attention during recent years. One well-known family is the exponentiated G family (see [1]). This family and its various extensions and generalizations were often used for extension of existing distributions (such new distributions usually exhibit improved flexibility and allow to describe real data more precisely). Models based on the exponentiated G family or the exponentiation of a distribution function include, in particular, the exponentiated generalized G distributions (see [2]), the weighted exponentiated family of distributions by Ahmad et al. (see [3]), the exponentiated generalized alpha power G family (see [4]), the exponentiated generalized Marshall–Olkin family (see [5]), the generalized exponentiated class of distributions by Rezaei et al. (see [6]), the transmuted exponentiated generalized-G family (see [7]), the Marshall–Olkin exponentiated generalized G family (see [8]), to mention but a few.

We propose a new wide-ranging extension of the exponentiated G family, the monotone exponent transformation G (MET-G) family. We study theoretical properties of the MET-G family for two concrete G distributions (the Burr XII distribution and the Johnson S_U distribution) and illustrate the usefulness of the two corresponding MET-G subfamilies by fitting them to real data.

2. The MET-G family. Let G be a distribution which is concentrated on an interval $I \subset \mathbb{R}^1$. Denote its cdf and pdf by $G(x)$ and $g(x)$ correspondingly.

Definition 1. Suppose that $a(x)$ is a non-increasing differentiable function on I , $a(x) > 0$. The cdf of the MET-G distribution is defined by

$$F(x) = G(x)^{a(x)}. \quad (1)$$

Remark 1. If $a(x) = a$ then the MET-G family coincides with the exponentiated G family.

Remark 2. *It is worth noting that due to very mild restrictions on $a(x)$ the MET-G family is extremely diverse for a fixed G .*

It follows immediately from Definition 1 that the pdf of the MET-G distribution is

$$f(x) = G(x)^{a(x)} \left(a'(x) \ln G(x) + a(x) \frac{g(x)}{G(x)} \right). \quad (2)$$

The quantile function is not available in closed form in general case.

The n th moment of the MET-G distribution can be expressed as

$$\mu'_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n G(x)^{a(x)} \left(a'(x) \ln G(x) + a(x) \frac{g(x)}{G(x)} \right) dx.$$

Let us acquire the densities of order statistics of the MP-G distribution. Using the formula for the pdf of the k -th order statistic (see e.g. [9]), we obtain that the density of the k -th order statistic of MP-G can be expressed as

$$f_{k:n}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} G(x)^{k \cdot a(x)} (1 - G(x)^{a(x)})^{n-k} \left(a'(x) \ln G(x) + a(x) \frac{g(x)}{G(x)} \right).$$

3. Monotone exponent transformation Burr XII (METB). Let us investigate the case when the base distribution G is the Burr XII distribution.

The three-parameter Burr XII distribution has the cdf

$$G(x; \alpha, \theta, \gamma) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha}, \quad x > 0 \quad (3)$$

and the density

$$g(x; \alpha, \theta, \gamma) = \alpha \gamma \theta^{-\gamma} x^{\gamma-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha-1}, \quad x > 0. \quad (4)$$

We will use the Burr XII distribution in conjunction with $a(x) = \sigma \exp\{-x^\lambda\}$ in order to create the monotone exponent transformation Burr XII (METB) distribution. The cdf of the METB distribution is obtained by plugging $G(x)$ from (3) into (1), it equals

$$F(x; \sigma, \lambda, \alpha, \theta, \gamma) = \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha} \right)^{\sigma \exp\{-x^\lambda\}}, \quad x > 0. \quad (5)$$

The pdf of the METB distribution is

$$\begin{aligned} f(x; \sigma, \lambda, \alpha, \theta, \gamma) &= \sigma \exp\{-x^\lambda\} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha} \right)^{\sigma \exp\{-x^\lambda\}} \\ &\quad \cdot \left(-\lambda x^{\lambda-1} \ln \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \gamma \theta^{-\gamma} x^{\gamma-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha-1} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta} \right)^\gamma \right)^{-\alpha} \right)^{-1} \right), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

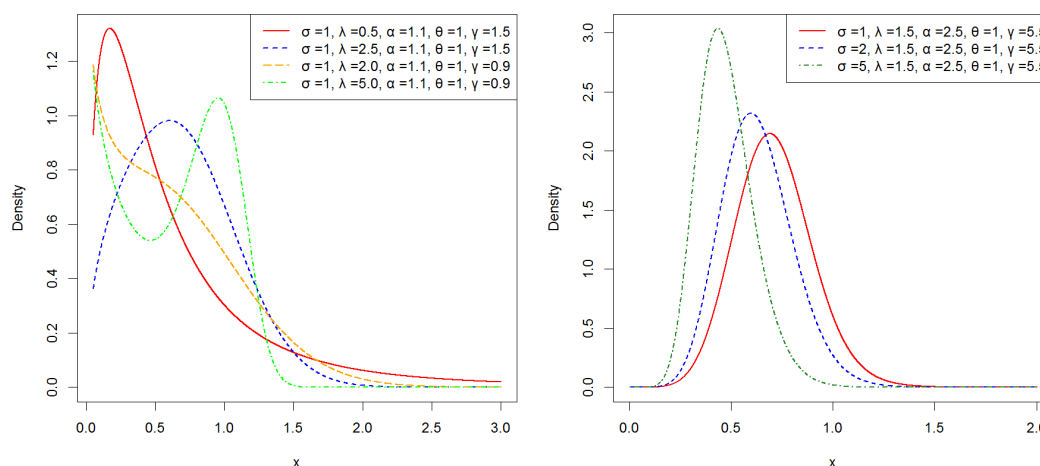


Figure 1. Density plots of the METB distribution.

We will use notations $F(x)$ and $f(x)$ for the left-hand sides of (5) and (6) correspondingly when this is unambiguous.

Fig. 1 displays plots of the pdf of the METB distribution for selected parameter values.

There exists no closed form for the quantile function $Q(u; \sigma, \lambda, \alpha, \theta, \gamma)$ of the METB distribution. However, it can be obtained approximately by numerical inversion of the cdf using a package like Mathematica, MATLAB or R.

The quantile function allows to determine such shape measures as the Bowley's skewness and the Moors' kurtosis. Namely, the Bowley's skewness

$$S_B = \frac{Q(3/4) - 2Q(1/2) + Q(1/4)}{Q(3/4) - Q(1/4)},$$

the Moors' kurtosis

$$K_M = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}.$$

The plots of the Bowley's skewness and Moors' kurtosis of the METB distribution are displayed in Fig. 2 (on the left-hand side and on the right-hand side, respectively).

It is evident that the influence of the values of λ and σ on the skewness and the kurtosis is significant.

The n th moment of a random variable X which has the METB distribution can be obtained as

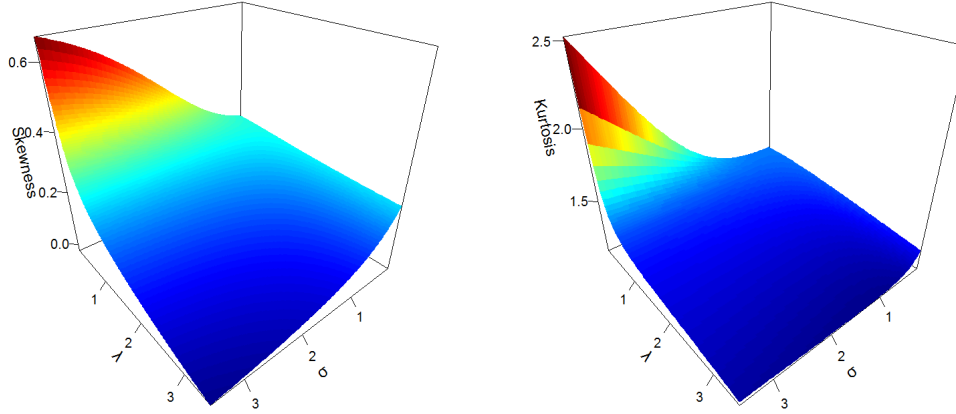


Figure 2. Plots of Bowley's skewness and Moors' kurtosis, METB distribution.

$$\begin{aligned} \mu'_n = EX^n &= \sigma \int_0^\infty x^n \exp\{-x^\lambda\} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right)^{-\alpha}\right)^{\sigma \exp\{-x^\lambda\}} \\ &\cdot \left(-\lambda x^{\lambda-1} \ln \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right)^{-\alpha}\right)\right. \\ &\left.+ \alpha \gamma \theta^{-\gamma} x^{\gamma-1} \left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right)^{-\alpha-1} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\gamma\right)^{-\alpha}\right)^{-1}\right) dx. \end{aligned}$$

The n th moment can not be expressed in closed form but it is possible to calculate it using numerical methods.

Let us illustrate the flexibility of the METB distribution using real data. We will consider the data set which consists of the values which resulted from the algorithm SC16 for estimating unit capacity factors, see [10].

The fit of the METB model will be compared to those of the following alternative distributions: the Burr XII distribution, the beta Burr XII distribution (see [11]), the exponentiated Burr XII distribution, and the Gamma-Uniform Burr XII distribution (see [12]).

The values of the MLEs of the METB parameters are given in Table 1. The R software was used for obtaining the estimates numerically.

Table 1.

Maximum likelihood estimates of the METB model

Parameter	σ	λ	α	θ	γ
Estimate	29.5884	17.9115	0.2024	0.0151	1.8425

Table 2 provides the log-likelihood and several information criteria.

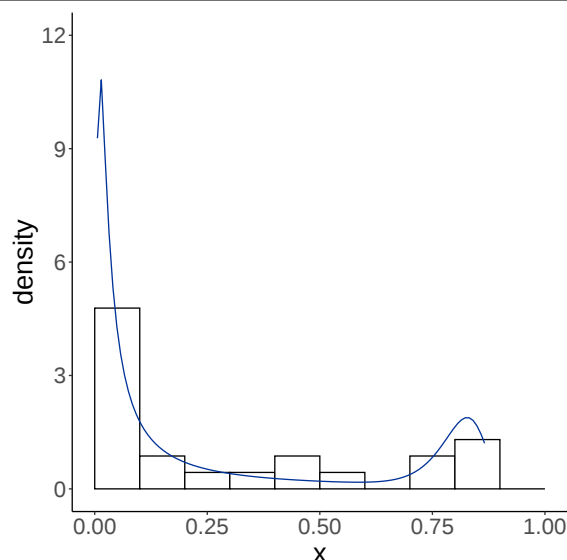


Figure 3. Plot of the estimated pdf for the values obtained by the algorithm SC16 dataset.

Table 2.

Goodness of fit criteria of the considered models, values obtained by the algorithm SC16 dataset

Distribution	Log-likelihood	AIC	BIC	HQIC
METB	14.945	-19.889	-14.212	-18.461
Burr XII	7.265	-8.530	-5.123	-7.673
Beta-Burr XII	7.753	-5.506	0.172	-4.078
Exponentiated Burr XII	9.296	-10.591	-6.049	-9.449
Gamma uniform Burr XII	9.731	-11.461	-6.919	-10.319

Obviously the results indicate that the METB model corresponds to the better fit since it has the lowest values of the AIC, BIC and HQIC statistics (and the log-likelihood is the highest).

The histogram and the fitted pdf of the METB distribution are depicted in Fig. 3.

4. Monotone exponent transformation Johnson S_U (METJSu). The second special model is the monotone exponent transformation Johnson S_U distribution (METJSu). The base family for this case is the Johnson S_U system, its cdf and pdf are

$$G(x; \gamma, \delta, \xi, \lambda) = \Phi \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right) \quad (7)$$

and

$$g(x; \gamma, \delta, \xi, \lambda) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi} \sqrt{(x - \xi)^2 + \lambda^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right)^2 \right\} \quad (8)$$

correspondingly, where $\delta, \lambda \in (0; \infty)$ and $\Phi(x)$ is the cdf of $N(0; 1)$ distribution. We will use the function $a(x) = \exp\{-bx\}$, where $b \in (0; \infty)$. Then the cdf and the pdf

of the METJSu model are given by

$$F(x; b, \gamma, \delta, \xi, \lambda) = \left(\Phi \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right) \right)^{\exp\{-bx\}} \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned} f(x; b, \gamma, \delta, \xi, \lambda) = & e^{-bx} \left(\Phi \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right) \right)^{\exp\{-bx\}} \\ & \cdot \left(-b \ln \Phi \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right)^2 \right\}}{\sqrt{(x - \xi)^2 + \lambda^2} \Phi \left(\gamma + \delta \operatorname{arsinh} \left(\frac{x - \xi}{\lambda} \right) \right)} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Plots of the density function of the METJSu distribution for selected parameter values are displayed in Fig.4.

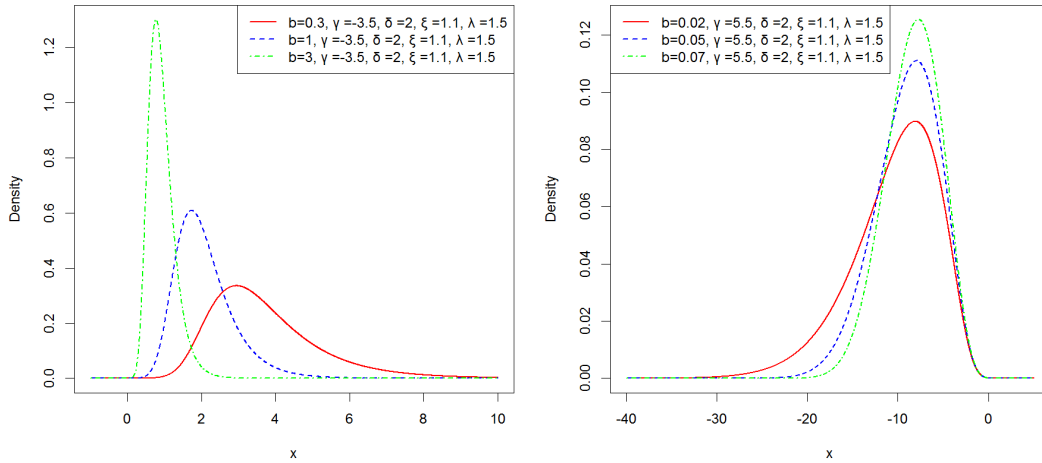


Figure 4. Density plots of the METJSu distribution.

The quantile function of the METJSu distribution can be obtained only numerically. The same is true for the quantile measures, i.e. the Bowley's skewness and the Moors' kurtosis.

We plot the measures S_B and K_M for selected parameter values of the METJSu distribution in Fig. 5 (the upper and the lower figure, respectively).

We fitted the METJSu model to the data set of COP (ConocoPhillips) stock returns from January 13, 1986 till April 4, 1986 (see [13]). The results were compared with the Johnson S_U distribution (JSu), the beta Johnson S_U distribution (BJSu), the exponentiated generalized Johnson S_U distribution (EGJSu), and the generalized hyperbolic distribution (GH).

The histogram and the fitted pdf of the METJSu distribution are shown in Fig. 6.

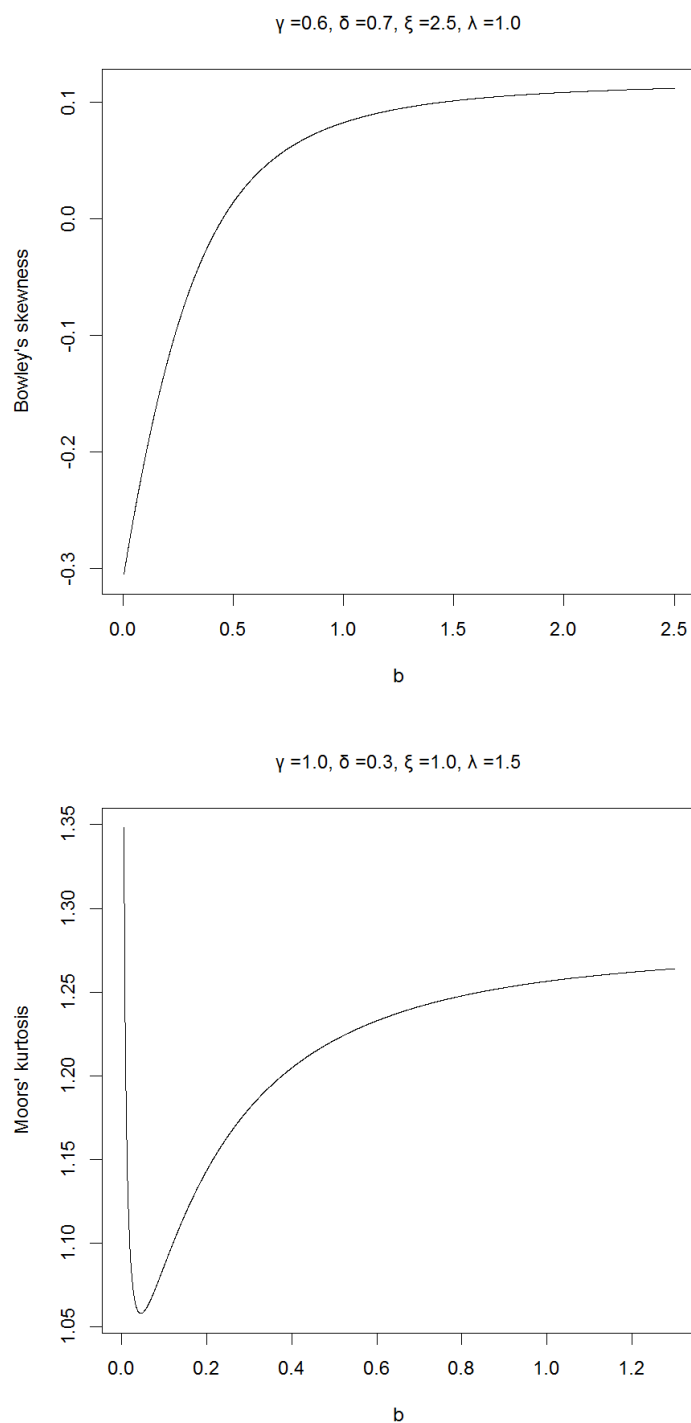


Figure 5. Plots of Bowley's skewness and Moors' kurtosis, METJSu distribution.

Table 3.

Maximum likelihood estimates of the METJSu model

Parameter	b	γ	δ	ξ	λ
Estimate	6.2363	0.4429	0.1207	0.0479	0.0030

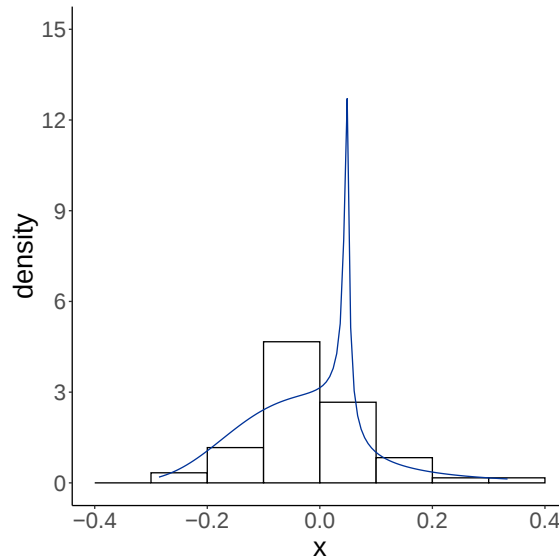


Figure 6. Plot of the estimated pdf for the stock returns dataset

The values of the MLEs of the METJSu parameters are provided in Table 3.

Several goodness of fit statistics are shown in Table 4. The values clearly show that the METJSu distribution is preferable to the competing models.

Table 4.

Goodness of fit criteria of the considered models, the stock returns dataset

Distribution	Log-likelihood	AIC	BIC	HQIC
METJSu	56.139	-102.278	-91.806	-98.182
JSu	45.373	-82.746	-74.369	-79.469
BJSu	44.987	-77.973	-65.407	-73.058
EGJSu	45.014	-78.027	-65.461	-73.112
GH	45.471	-80.942	-70.470	-76.845

5. Conclusions. A new distribution family (monotone exponent transformation G family or MET-G), which extends the exponentiated G family, is proposed. The new family encompasses a very wide range of distributions. A detailed analysis of two representatives of the MET-G model, the monotone exponent transformation Burr XII (METB) distribution and the monotone exponent transformation Johnson S_U (METJSu) distribution, is given. Various theoretical properties are studied, in particular, the moments, the Bowley's skewness and the Moors' kurtosis. Two applications to real data prove usefulness and potentiality of the proposed family.

Further studies in this area can include, for instance, generalizations of the monotone exponent transformation G family by including additional parameters and extra transforms.

References

1. Nadarajah, S., & Kotz, S. (2006). The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematicae*, 92, 97–111. <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9055-0>
2. Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & da Cunha, D. C. (2013). The exponen-

- tiated generalized class of distributions. *Journal of Data Science*, 11(1), 1–27. [https://doi.org/10.6339/JDS.2013.11\(1\).1086](https://doi.org/10.6339/JDS.2013.11(1).1086)
3. Ahmad, Z., Hamedani, G., & Elgarhy, M. (2022). The weighted exponentiated family of distributions: properties, applications and characterizations. *Journal of the Iranian Statistical Society*, 19(1), 209–228. https://jirss.irstat.ir/article_253797.html
 4. ElSherpieny, E. A., & Almetwally, E. M. (2022). The exponentiated generalized alpha power exponential distribution: properties and applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 18(2), 349–367. <https://doi.org/10.18187/pjsor.v18i2.3515>
 5. Handique, L., Chakraborty, S. & de Andrade, T. A. N. (2019). The exponentiated generalized Marshall–Olkin family of distribution: its properties and applications. *Annals of Data Science*, 6, 391–411. <https://doi.org/10.1007/s40745-018-0166-z>
 6. Rezaei, S., Marvasty, A. K., Nadarajah, S., & Alizadeh, M. (2017). A new exponentiated class of distributions: properties and applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 46(12), 6054–6073. <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1116579>
 7. Yousof, H. M., Afify, A. Z., Alizadeh, M., Butt, N. S., Hamedani, G. G., & Ali, M. M. (2015). The transmuted exponentiated generalized-G family of distributions. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 11(4), 441–464. <https://doi.org/10.18187/pjsor.v11i4.1164>
 8. Yousof, H. M., Rasekhi, M., Alizadeh, M., & Hamedani, G. (2020). The Marshall–Olkin exponentiated generalized G family of distributions: properties, applications, and characterizations. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 13(1), 34–52. <http://doi.org/10.22436/jnsa.013.01.04>
 9. Ahsanullah, M., Nevzorov, V. B., & Shakil, M. (2013). *An Introduction to Order Statistics*. Atlantis Press. <https://doi.org/10.2991/978-94-91216-83-1>
 10. Mazumdar, M., & Gaver, D. P. (1984). On the computation of power-generating system reliability indexes. *Technometrics*, 26(2), 173–185. <https://doi.org/10.1080/00401706.1984.10487942>
 11. Eugene, N., Lee, C., & Famoye, F. (2002). Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*, 31(4), 497–512. <https://doi.org/10.1081/STA-120003130>
 12. Torabi, H., & Hedesh, N. M. (2012). The gamma-uniform distribution and its applications. *Kybernetika*, 48(1), 16–30. Retrieved from <http://eudml.org/doc/246973>
 13. ConocoPhillips (COP) Stock Historical Prices & Data — Yahoo Finance. Retrieved from <https://finance.yahoo.com/quote/COP/history/>

Турчин Є. В. Узагальнення “G-піднесеної до ступеня” сім’ї розподілів із застосуваннями до розподілу Берра та розподілу Джонсона S_U .

Запропоновано новий підхід до побудови сімей імовірнісних розподілів. Хоча цей підхід є досить простим, він дозволяє утворити дуже широкий клас розподілів (так звану сім’ю MET-G розподілів). Детально вивчаються два окремі випадки з цієї сім’ї — монотонно показниково перетворений розподіл Берра HP та монотонно показниково перетворений розподіл Джонсона S_U . Гнучкість нових розподілів підтверджено їх підгонкою до реальних наборів даних.

Ключові слова: “піднесена до ступеня” сім’я G розподілів, розподіл Берра, сім’я розподілів Джонсона, оцінки максимальної правдоподібності, адекватність моделі.

Список використаної літератури

1. Nadarajah, S. Kotz S. The exponentiated type distributions. *Acta Applicandae Mathematicae*. 2006. Vol. 92. pp. 97–111. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10440-006-9055-0> (date of access: 27.02.2025).
2. Cordeiro G. M., Ortega E. M. M., da Cunha D. C. C. The exponentiated generalized class of distributions. *Journal of Data Science*. 2013. Vol. 11, No. 1. pp. 1–27. URL: <https://jds-online.org/journal/JDS/article/1165/info> (date of access: 13.01.2025).

3. Ahmad Z., Hamedani G., Elgarhy M. The weighted exponentiated family of distributions: Properties, applications and characterizations. *Journal of the Iranian Statistical Society*. 2022. Vol. 19, No. 1. pp. 209–228. URL: https://jirss.irstat.ir/article_253797.html (date of access: 27.02.2025).
4. ElSherpieny E. S. A., Almetwally E. M. The exponentiated generalized alpha exponential distribution: properties and applications. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*. 2022. Vol. 18, No. 2. pp. 349–367. DOI: <https://doi.org/10.18187/pjsor.v18i2.3515>
5. Handique L., Chakraborty S., de Andrade T. A. N. The exponentiated generalized Marshall–Olkin family of distribution: its properties and applications. *Annals of Data Science*. 2019. Vol. 6. P. 391–411. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40745-018-0166-z>
6. Rezaei S., Marvasty A. K., Nadarajah S., Alizadeh M. A new exponentiated class of distributions: properties and applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*. 2017. Vol. 46, No. 12. pp. 6054–6073. DOI: <https://doi.org/10.1080/03610926.2015.1116579>
7. Yousof H. M., Afify A. Z., Alizadeh M., Butt N. S., Hamedani G. G., Ali M. M. The transmuted exponentiated generalized-G family of distributions. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*. 2015. Vol. 11, No. 4. pp. 441–464. DOI: <https://doi.org/10.18187/pjsor.v11i4.1164>
8. Yousof H. M., Rasekhi M., Alizadeh M., Hamedani G. The Marshall–Olkin exponentiated generalized G family of distributions: properties, applications, and characterizations. *Journal of Nonlinear Sciences and Application*. 2020. Vol. 13, No. 1. P. 34–52. DOI: [https://doi.org/10.6339/JDS.2013.11\(1\).1086](https://doi.org/10.6339/JDS.2013.11(1).1086)
9. Ahsanullah M., Nevzorov V. B., Shakil M. An Introduction to Order Statistics. Paris : Atlantis Press, 2013. 244 p. DOI: <https://doi.org/10.2991/978-94-91216-83-1>
10. Mazumdar M., Gaver D. P. On the computation of power-generating system reliability indexes. *Technometrics*. 1984. Vol. 26, No. 2. pp. 173–185. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1984.10487942>
11. Eugene N., Lee C., Famoye F. Beta-normal distribution and its applications. *Communications in Statistics — Theory and Methods*. 2002. Vol. 4, No. 31. P. 497–512. DOI: <https://doi.org/10.1081/STA-120003130>
12. Torabi H., Hedesh N. M. The gamma-uniform distribution and its applications. *Kybernetika*. 2012. Vol. 48, No. 1. P. 16–30. URL: <http://eudml.org/doc/246973> (date of access: 17.01.2025).
13. ConocoPhillips (COP) Stock Historical Prices & Data — Yahoo Finance. URL: <https://finance.yahoo.com/quote/COP/history/> (date of access: 28.01.2025).

Recived 26.03.2025

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).119-132](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).119-132)**Р. В. Хаць¹, В. П. Ярмошик²**

¹ Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
khats@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

² Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
аспірант кафедри математики та економіки
valentyn.yarmoshyk@dspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7851-0863>

ДВОЧЛЕННА АСИМПТОТИКА ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ З ПОКРАЩЕНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ НА ПРОМЕНІ

Досліджено двочленну асимптотику цілих функцій скінченного порядку за умови умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції їх нулів на промені. Зокрема, встановлено зв'язок між покращеним регулярним зростанням логарифма (логарифма модуля) цілої функції скінченного порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочлених асимптотик. Отримано нові двочленні асимптотичні рівності для лічильних функцій послідовностей нулів цілих функцій скінченного порядку.

Ключові слова: ціла функція скінченного порядку, лічильна функція нулів, двочленна асимптотика, покращене регулярне зростання, покращений розподіл нулів, виняткова множина.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_n \nearrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$, $n(t) := \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ і $N(r) := \int_0^r t^{-1} n(t) dt$, $r > 0$, — лічильна і усереднена лічильна функції ([1: 14], [2: 10]) послідовності $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, відповідно, та ([1: 24], [2: 26])

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; p\right), \quad f(0) = 1, \quad (1)$$

— ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$, де $Q(z) = \sum_{k=1}^{\nu} Q_k z^k$ — поліном степеня

$\nu \leq \rho$, $p \leq \rho$ — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p-1} < +\infty$ і

$E(w; p) = (1-w) \exp(w + w^2/2 + \dots + w^p/p)$ — первинний множник Вейєрштрасса роду p . Функцію $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$, $\log f(0) = 0$, вважатимемо визначеною за формулою [10]

$$\log f(z) = \int_0^z \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1; +\infty).$$

Однією з центральних задач теорії цілих функцій є вивчення зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. Цей зв'язок для спеціальних класів цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1–3] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [4–22],

виражається в термінах одночленної асимптотики. Зокрема, [2: 81], якщо $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \Delta \in [0; +\infty), \quad (2)$$

то для цілої функції (1) нецілого порядку ρ , $p = [\rho] < \rho < p + 1$ (тут $[\rho]$ – ціла частина числа $\rho > 0$), асимптотичне співвідношення

$$\left| \log f(re^{i\varphi}) - \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho \right| \sin \frac{\varphi}{2} = o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

виконується рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$. Крім цього, (див. [1: 64], [2: 91], [3: 69]), для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$ співвідношення

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

виконується тоді й тільки тоді, коли виконується рівність (2). Якщо умова (2) виконується з натуральним ρ , то для цілої функції (1) порядку $\rho \in \mathbb{N}$ (див. [1: 66], [3: 78–82])

$$\log f(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$, де

$$\Lambda(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^\rho e^{i\rho\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + Q_\rho \right) - \Delta \left(\frac{1}{\rho} - i(\varphi - \pi) \right) e^{i\rho\varphi} r^\rho, & p = \rho, \\ Q_\rho r^\rho \cos \rho\varphi, & p = \rho - 1. \end{cases} \quad (6)$$

В багатьох працях (див., наприклад, [4–32]) вивчалися точніші, ніж (2)–(5) асимптотики цілої функції (1) та лічильної функції $n(t)$ її нулів. Зокрема, якщо для деякого $\rho_5 \in (0; \rho)$ виконується умова

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_5}), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \Delta \in [0; +\infty), \quad (7)$$

то [10] для цілої функції (1) порядку $\rho \in (0; +\infty)$ при $r \rightarrow +\infty$ виконуються співвідношення

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{o(r^{\rho_5})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad \rho_5 \in ([\rho]; \rho), \quad (8)$$

$$\log f(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_5})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad \rho_5 \in (\rho - 1; \rho), \quad (9)$$

рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$, де функція $\Lambda(re^{i\varphi})$ визначена формулою (6). Крім того [5], для того щоб для цілої функції (1) нецілого порядку $\rho \in (0; +\infty)$ за деякого $\rho_6 \in (0; \rho)$ існувала послідовність (r_k) така, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_6})$, $k \rightarrow +\infty$, і рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$ виконувалось

$$\log |f(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_6}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

необхідно й достатньо, щоб для деякого $\rho_5 \in (0; \rho)$ виконувалась умова (7).

У багатьох застосуваннях виникає потреба у дослідженні поведінки основних характеристик цілих функцій в термінах точніших багаточленних асимптотик [23–32]. Зокрема, в [23, 24] встановлено, що за умови

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + \varphi(t), \quad t \rightarrow +\infty,$$

де $\Delta \in [0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $\rho_1 \in ([\rho]; \rho)$ і

$$\int_T^{2T} |\varphi(t)|^q dt = o(T^{\rho_1 q + 1}), \quad T \rightarrow +\infty, \quad q \in [1; +\infty),$$

для цілої функції (1) порядку ρ правильна двочленна асимптотична формула

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1} + \psi(re^{i\varphi}), \quad (11)$$

причому $\psi(re^{i\varphi}) = o(r^{\rho_1})$, $r \rightarrow +\infty$, зовні деякої малої виняткової множини $E = E_f$, яка містить нулі f . Для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку аналогічні двочленні асимптотичні рівності отримано в [31, 32]. З огляду на сказане вище, актуальним є встановлення, подібних до (8)–(11), двочленних асимптотичних формул для цілих функцій покращеного регулярного зростання.

Метою статті є дослідження двочленної асимптотики цілих функцій скінченного порядку з покращеним розподілом нулів на промені (див. нижче умову (12)), що передбачає розв'язання таких задач: отримання нових рівномірних (та зовні деякої малої виняткової множини) асимптотичних оцінок логарифма цілої функції (1) в термінах двочленних співвідношень; встановлення нових двочленних асимптотичних рівностей для лічильних функцій послідовностей нулів; вивчення зв'язку між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифма модуля цілої функції (1) нецілого порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочленних асимптотик.

2. Основні результати. Основними результатами даної статті є наступні твердження.

Теорема 1. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p + 1$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Тоді для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ виконується

$$\left| \log f(re^{i\varphi}) - \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho - \frac{\pi\Delta_1}{\sin \pi\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1} \right| \sin \frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що у зображенні (1) $Q(z) \equiv 0$. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in (0; 2\pi)$. Оскільки (див. [1: 64], [2: 81], [3: 67], [5, 10])

$$\log f(re^{i\varphi}) = -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)} dt,$$

ТО

$$\begin{aligned}
S &:= \log f(re^{i\varphi}) + r^{p+1} e^{i\varphi(p+1)} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t - re^{i\varphi})} dt = \\
&= -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t - z)} dt.
\end{aligned} \tag{14}$$

Враховуючи (12), для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ і всіх $N > N(\varepsilon)$ отримуємо

$$\begin{aligned}
|S| &\leq r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |t - re^{i\varphi}|} dt < r^{p+1} \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |t - re^{i\varphi}|} dt + \\
&+ \varepsilon r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2-p-1}}{|t - re^{i\varphi}|} dt := J_1(r, \varphi) + J_2(r, \varphi).
\end{aligned} \tag{15}$$

Тоді [2: 82]

$$J_1(r, \varphi) = r^{p+1} \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |t - re^{i\varphi}|} dt = O(r^p) = o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty, \tag{16}$$

рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$. Нехай $t = ur$. Використовуючи нерівність [5, 10] $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (u^2 + 1) \min \{1 - \cos \varphi; 1\}$, подібно як в [10], одержимо

$$\begin{aligned}
J_2(r, \varphi) &= \varepsilon r^{\rho_2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{|u - e^{i\varphi}|} du = \varepsilon r^{\rho_2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}} du \leq \\
&\leq \varepsilon r^{\rho_2} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{\sqrt{(u^2 + 1) \min \{1 - \cos \varphi; 1\}}} du < \varepsilon c(\rho_2) \frac{r^{\rho_2}}{\sin(\varphi/2)},
\end{aligned} \tag{17}$$

де $c(\rho_2)$ — стала, яка залежить від ρ_2 . Окрім того, за формулою (5.2₁) з [3: 69] (див. також [2: 82], [4, 5]), матимемо

$$\begin{aligned}
r^{p+1} e^{i\varphi(p+1)} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(t - re^{i\varphi})} dt &= \Delta r^\rho e^{i\varphi(p+1)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{u - e^{i\varphi}} du + \\
&+ \Delta_1 r^{\rho_1} e^{i\varphi(p+1)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p-1}}{u - e^{i\varphi}} du = -\frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho - \frac{\pi \Delta_1}{\sin \pi \rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Отож, з (14)–(18) випливає (13). Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. За умов теореми 1, рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ маємо

$$\log |f(re^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi \Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} \cos \rho_1(\varphi - \pi) + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

$$\arg f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \sin \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi \Delta_1 r^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} \sin \rho_1(\varphi - \pi) + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

і для кожного $\gamma \in (0; \rho_1 - \rho_2)$

$$\log f(re^{i\varphi}) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{\pi \Delta_1}{\sin \pi \rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2+\gamma}), \quad E_\gamma \not\ni z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty,$$

де $E_\gamma = \{z = re^{i\varphi} : |\varphi| < r^{-\gamma}\}$ і $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Теорема 2. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho - 1 < \rho_2 < \rho_1 < \rho$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (12). Тоді для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ виконується

$$\left| \log f(re^{i\varphi}) - \tilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) \right| \sin \frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (19)$$

де

$$\tilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^\rho e^{i\rho\varphi} \left(\frac{1}{\rho} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + Q_\rho \right) + \Delta \left(-\frac{1}{\rho} + i(\varphi - \pi) \right) r^\rho e^{i\rho\varphi} + \frac{\pi \Delta_1 r^{\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}}{\sin \pi \rho_1} + \\ + \frac{\Delta_1 \rho_1 r^{\rho_1}}{\rho(\rho-\rho_1)} e^{i\rho\varphi}, \quad p = \rho, \\ Q_\rho r^\rho e^{i\rho\varphi} + \frac{\pi \Delta_1 r^{\rho_1} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}}{\sin \pi \rho_1}, \quad p = \rho - 1. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$ і $p = \rho$. Позаяк ([1: 67], [3: 79], [6, 10])

$$\log f(re^{i\varphi}) = Q(z) + \frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - z^\rho \int_0^r \frac{n(t)dt}{t^\rho(t-z)} - \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) - z^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)},$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{S} &:= \log f(re^{i\varphi}) - Q_\rho r^\rho e^{i\rho\varphi} - \frac{r^\rho e^{i\rho\varphi}}{\rho} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + \frac{e^{i\rho\varphi}}{\rho} (\Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1}) + \\ &+ r^\rho e^{i\rho\varphi} \int_0^r \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^\rho(t - re^{i\varphi})} dt + r^{\rho+1} e^{i(\rho+1)\varphi} \int_r^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{\rho+1}(t - re^{i\varphi})} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\rho-1} Q_k z^k - \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} (n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}) - \\ &- z^\rho \int_0^r \frac{n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^\rho(t-z)} dt - z^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{\rho+1}(t-z)} dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Враховуючи (12), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\begin{aligned} |\tilde{S}| &\leq \varepsilon r^{\rho_2} + \frac{1}{\rho} |n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}| + \\ &+ r^\rho \int_0^r \frac{|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^\rho |t - re^{i\varphi}|} dt + r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{\rho+1} |t - re^{i\varphi}|} dt < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& < \varepsilon r^{\rho_2} + \frac{\varepsilon}{\rho} r^{\rho_2} + \varepsilon r^{\rho} \int_0^r \frac{t^{\rho_2-\rho}}{|t - re^{i\varphi}|} dt + \varepsilon r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{t^{\rho_2-\rho-1}}{|t - re^{i\varphi}|} dt < \\
& < o(r^{\rho_2}) + \varepsilon r^{\rho_2} \int_0^1 \frac{u^{\rho_2-\rho}}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}} du + \varepsilon r^{\rho_2} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-\rho-1}}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}} du < \\
& < o(r^{\rho_2}) + \varepsilon r^{\rho_2} \int_0^1 \frac{u^{\rho_2-\rho}}{\sqrt{(u^2 + 1) \min \{1 - \cos \varphi; 1\}}} du + \\
& + \varepsilon r^{\rho_2} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-\rho-1}}{\sqrt{(u^2 + 1) \min \{1 - \cos \varphi; 1\}}} du \leq \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Окрім того, ([1: 67], [6, 10])

$$\Delta e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \int_0^r \frac{dt}{t - re^{i\varphi}} + \Delta e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t(t - re^{i\varphi})} = -\Delta i(\varphi - \pi) e^{i\rho\varphi} r^{\rho}, \quad (22)$$

і, згідно з [3: 69] (див. також [2: 82], [5, 6]), одержимо

$$\begin{aligned}
& \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \int_0^r \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t - re^{i\varphi}} dt + \Delta_1 e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-\rho-1}}{t - re^{i\varphi}} dt = \\
& = \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \left(\int_0^r \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t - re^{i\varphi}} dt - \int_r^{+\infty} t^{\rho_1-\rho} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t - re^{i\varphi}} \right) dt \right) = \\
& = \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-\rho}}{t - re^{i\varphi}} dt - \int_r^{+\infty} t^{\rho_1-\rho-1} dt \right) = \\
& = \Delta_1 e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-\rho}}{u - e^{i\varphi}} du + \frac{\Delta_1}{\rho_1 - \rho} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} = \Delta_1 r^{\rho_1} \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \rho_1}} e^{i\varphi \rho_1} + \frac{\Delta_1}{\rho_1 - \rho} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1} = \\
& = -\Delta_1 r^{\rho_1} \frac{\pi e^{-\pi i \rho_1}}{\sin \pi \rho_1} e^{i\varphi \rho_1} - \frac{\Delta_1}{\rho - \rho_1} e^{i\rho\varphi} r^{\rho_1}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Таким чином, з (20)–(23) отримуємо (19). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді ([1: 67], [3: 81], [6, 10])

$$\begin{aligned}
\log f(re^{i\varphi}) = & Q_{\rho} z^{\rho} - \frac{z^{\rho}}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} - z^{\rho} \int_0^r \frac{n(t) dt}{t^{\rho}(t - z)} - \frac{z^{\rho}}{\rho r^{\rho}} n(r) - \\
& - z^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^{\rho+1}(t - z)} + o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Оскільки в даному випадку $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho} < +\infty$, то ([3: 80], [6, 10]) $n(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2})$, $t \rightarrow +\infty$. Тому

$$\begin{aligned} -\frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} &= -\frac{z^\rho}{\rho} \int_r^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} = -\frac{z^\rho}{\rho} \left(t^{-\rho} n(t) \Big|_r^{+\infty} + \rho \int_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt \right) = \\ &= z^\rho \frac{n(r)}{\rho r^\rho} - z^\rho \int_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt = \frac{z^\rho}{\rho} (\Delta_1 r^{\rho_1-\rho} + o(r^{\rho_2-\rho})) - \\ &- z^\rho \int_r^{+\infty} (\Delta_1 t^{\rho_1-\rho-1} + o(t^{\rho_2-\rho-1})) dt = -\frac{\Delta_1 \rho_1}{\rho(\rho - \rho_1)} r^{\rho_1} e^{i\rho\varphi} + \frac{o(r^{\rho_2})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, як і вище виконується (19). Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Теорему 1–2 можна узагальнити на випадок цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів.

Теорема 3. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $\rho_1 \in (\rho/2; \rho)$ і за деякого $\rho_3 \in (0; 2\rho_1 - \rho)$ для цілої функції (1) існує така послідовність (r_k) , $0 < r_k \uparrow +\infty$, що

$$r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_3}), \quad r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1} = o(r_k^{\rho_3}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

і рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$\log |f(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi \Delta_1}{\sin \pi \rho_1} r_k^{\rho_1} \cos \rho_1(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_3}), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Тоді для деякого $\rho_2 \in (0; \rho_1)$ виконується (12).

Доведення. Позаяк $f(0) = 1$, то за формулою Єнсена ([1: 14], [2: 10])

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

маємо

$$\begin{aligned} N(r_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{\pi \Delta_1}{\sin \pi \rho_1} r_k^{\rho_1} \cos \rho_1(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_3}) \right) d\varphi = \\ &= \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \leq r < r_{k+1}$. Оскільки $N(r)$ є неспадною функцією, то за умовою (24), отримуємо

$$N(r) \leq N(r_{k+1}) = \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_3}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta}{\rho} (r_{k+1}^\rho - r_k^\rho) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} (r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1}) + \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^{\rho_3} r_k^{\rho_3}\right) = \\
&= \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}) \leq \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

З іншого боку, за умови (24), одержимо

$$\begin{aligned}
N(r) &\geq N(r_k) = \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_3}) = \\
&= \frac{\Delta}{\rho} (r_k^\rho - r_{k+1}^\rho) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} (r_k^{\rho_1} - r_{k+1}^{\rho_1}) + \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)^{\rho_3} r_{k+1}^{\rho_3}\right) = \\
&\geq \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_3}) \geq \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

З обох останніх нерівностей випливає співвідношення

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} + o(r^{\rho_3}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Далі, оскільки [4, 5]

$$n(r) \log \frac{R}{r} \leq N(R) - N(r) = \int_r^R \frac{n(t)}{t} dt \leq n(R) \log \frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty, \quad (25)$$

то, взявши $R = re^{\frac{1}{r^\alpha + r^{\alpha_1}}}$, де $\rho - \rho_1 < \alpha < \rho_1 - \rho_3$, $0 < \alpha_1 < \alpha$, $\max\{\rho - \alpha; \rho_3 + \alpha\} < \rho_2 < \rho_1$, у лівій нерівності (25), використовуючи формулу $e^x = 1 + x + O(x^2)$, $x \rightarrow 0$, отримуємо

$$\begin{aligned}
n(r) &\leq \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(e^{\frac{\rho}{r^\alpha + r^{\alpha_1}}} - 1\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} \left(e^{\frac{\rho_1}{r^\alpha + r^{\alpha_1}}} - 1\right) + o(r^{\rho_3})}{\frac{1}{r^\alpha + r^{\alpha_1}}} = \\
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\frac{\rho}{r^\alpha + r^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(r^\alpha + r^{\alpha_1})^2}\right)\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} r^{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{r^\alpha + r^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(r^\alpha + r^{\alpha_1})^2}\right)\right) + o(r^{\rho_3})}{\frac{1}{r^\alpha + r^{\alpha_1}}} = \\
&= \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + O\left(\frac{r^{\rho-\alpha}}{1 + r^{\alpha_1-\alpha}}\right) + O\left(\frac{r^{\rho_1-\alpha}}{1 + r^{\alpha_1-\alpha}}\right) + o(r^{\rho_3+\alpha}(1 + r^{\alpha_1-\alpha})) = \\
&= \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + O(r^{\rho-\alpha}(1 - r^{\alpha_1-\alpha} + O(r^{2(\alpha_1-\alpha)}))) + \\
&\quad + O(r^{\rho_1-\alpha}(1 - r^{\alpha_1-\alpha} + O(r^{2(\alpha_1-\alpha)}))) + o(r^{\rho_3+\alpha}) = \\
&= \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + O(r^{\rho-\alpha}) + O(r^{\rho_1-\alpha}) + o(r^{\rho_3+\alpha}) = \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

З іншого боку, взявши $r = Re^{-\frac{1}{R^\alpha + R^{\alpha_1}}}$ у правій нерівності (25), аналогічно одержимо

$$n(R) \geq \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho \left(1 - e^{-\frac{\rho}{R^\alpha + R^{\alpha_1}}}\right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} R^{\rho_1} \left(1 - e^{-\frac{\rho_1}{R^\alpha + R^{\alpha_1}}}\right) + o(R^{\rho_3})}{\frac{1}{R^\alpha + R^{\alpha_1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho \left(\frac{\rho}{R^\alpha + R^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(R^\alpha + R^{\alpha_1})^2}\right) \right) + \frac{\Delta_1}{\rho_1} R^{\rho_1} \left(\frac{\rho_1}{R^\alpha + R^{\alpha_1}} + O\left(\frac{1}{(R^\alpha + R^{\alpha_1})^2}\right) \right) + o(R^{\rho_3})}{\frac{1}{R^\alpha + R^{\alpha_1}}} = \\
&= \Delta R^\rho + \Delta_1 R^{\rho_1} + O\left(\frac{R^{\rho-\alpha}}{1 + R^{\alpha_1-\alpha}}\right) + O\left(\frac{R^{\rho_1-\alpha}}{1 + R^{\alpha_1-\alpha}}\right) + o(R^{\rho_3+\alpha}(1 + R^{\alpha_1-\alpha})) = \\
&= \Delta R^\rho + \Delta_1 R^{\rho_1} + O(R^{\rho-\alpha}) + O(R^{\rho_1-\alpha}) + o(R^{\rho_3+\alpha}) = \Delta R^\rho + \Delta_1 R^{\rho_1} + o(R^{\rho_2}), \quad R \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

З обох останніх нерівностей, для деякого $\rho_2 \in (0; \rho_1)$ отримаємо (12). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $\rho_4 \in (0; \rho)$ і для цілої функції (1) існує послідовність (r_k) така, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_4})$, $k \rightarrow +\infty$, і рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$

$$\log |f(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_4}), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Тоді

$$n(t) = \Delta t^\rho + O\left(t^{\frac{\rho+\rho_4}{2}}\right), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (26)$$

Доведення. За умов теореми, аналогічно, як у доведенні теореми 3, отримуємо (див. також [5: 142, лема 2])

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_4}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Взявши $R = r \left(1 + r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)$ у лівій нерівності (25), одержимо

$$\begin{aligned}
n(r) &\leq \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\left(1 + r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^\rho - 1 \right) + o(r^{\rho_4})}{\log \left(1 + r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\left(1 + r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^\rho - 1 \right) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} = \\
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \left(\rho r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho}) \right) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} = \frac{\Delta r^{\frac{\rho+\rho_4}{2}} + O(r^{\rho_4}) + o(r^{\rho_4})}{r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(r^{\rho_4-\rho})} = \\
&= \frac{\Delta r^\rho + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)}{1 + O\left(r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} = \left(\Delta r^\rho + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right) \right) \left(1 + O\left(r^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right) \right) = \\
&= \Delta r^\rho + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right) + O(r^{\rho_4}) = \Delta r^\rho + O\left(r^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right), \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

З іншого боку, взявши $r = R \left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)$ у правій нерівності (25), маємо

$$\begin{aligned}
n(R) &\geq \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho \left(1 - \left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)^\rho \right) + o(R^{\rho_4})}{-\log \left(1 - R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} = \\
&= \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho \left(\rho R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(R^{\rho_4-\rho}) \right) + o(R^{\rho_4})}{R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}} + O(R^{\rho_4-\rho})} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho \left(\rho + O\left(R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right) \right) + O\left(R^{\frac{\rho_4+\rho}{2}}\right)}{1 + O\left(R^{\frac{\rho_4-\rho}{2}}\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \left(\Delta R^\rho + O\left(R^{\frac{\rho_4 + \rho}{2}}\right) \right) \left(1 + O\left(R^{\frac{\rho_4 - \rho}{2}}\right) \right) = \Delta R^\rho + O\left(R^{\frac{\rho_4 + \rho}{2}}\right), \quad R \rightarrow +\infty.$$

З обох останніх нерівностей випливає (26). Теорему 4 доведено.

Зауваження 2. *Теорема 4 уточнює необхідність теореми 1 з [5: 141].*

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті досліджено двочленну асимптотику логарифмів цілих функцій скінченного порядку за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції їх нулів на промені (див. теореми 1, 2 та наслідок 1). Встановлено зв'язок між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифма модуля цілої функції нецілого порядку та покращеним розподілом її нулів на промені в термінах двочленних асимптотик (теорема 3). Уточнено такий взаємозв'язок у випадку одночленної асимптотики логарифма модуля цілої функції нецілого порядку (теорема 4). При цьому, отримано нові двочленні асимптотичні співвідношення для лічильних функцій послідовностей нулів цілих функцій нецілого порядку (теорема 3).

Отримані результати доповнюють результати робіт [4–32]. Вони можуть бути використані в теорії зростання цілих та субгармонійних функцій, при дослідженні базисів і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач [1–3].

Список використаної літератури

1. Levin B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 5: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 1964. 523 p.
2. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monogr. V. 150: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 1996. 248 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/150>
3. Gol'dberg A. A., Ostrovskii I. V. Value Distributions of Meromorphic Functions. Transl. Math. Monogr. V. 236: Amer. Math. Soc., Providence : R.I., 2008. 485 p. DOI: <https://doi.org/10.1090/mmono/236>
4. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one. *Мат. студ.* 2003. Т. 19, № 1. С. 97–105. URL: http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 2. С. 140–150. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/21_2/21_2_140_150.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
6. Хаць Р. В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку. *Мат. студ.* 2004. Т. 22, № 1. С. 105–110. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/22_1/22_1_105_110.pdf (дата звернення: 12.01.2025).
7. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів. *Мат. студ.* 2005. Т. 24, № 1. С. 31–38. URL: http://matstud.org.ua/texts/2005/24_1/24_1_031_038.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
8. Khabibullin B. N. Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions. *Мат. студ.* 2004. Т. 21, № 1. С. 47–63. URL: http://matstud.org.ua/texts/2004/21_1/21_1_047_063.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
9. Khats' R. V. On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Мат. студ.* 2006. Т. 26, № 1. С. 17–24. URL: http://matstud.org.ua/texts/2006/26_1/26_1_017_024.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
10. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені. *Мат. студії.* 2010. Т. 33, № 2. С. 215–219. URL: http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/215-219.pdf (дата звернення: 11.01.2025).
11. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. On asymptotic properties of entire functions, similar to the

- entire functions of completely regular growth. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки»*. 2011. Вип. 718, № 718. С. 5–9. URL: <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12811> (дата звернення: 11.01.2025).
12. Khats' R. V. Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія «Фізико-математичні науки»*. 2011. Вип. 718, № 718. С. 10–14. URL: <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12813> (дата звернення: 11.01.2025).
13. Хаць Р. В. Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання. *Укр. мат. журн.* 2011. Т. 63, № 12. С. 1717–1723. URL: <http://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/2837> (дата звернення: 11.01.2025).
14. Khats' R. V. Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 1. С. 129–133. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133>
15. Khats' R. V. Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Карпатські матем. публ.* 2013. Т. 5, № 2. С. 341–344. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344>
16. Khats' R. V. Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Буковин. матем. журн.* 2019. Т. 7, № 1. С. 114–120. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114>
17. Khats' R. V. Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Карпатські матем. публ.* 2020. Т. 12, № 1. С. 46–54. DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54>
18. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^q[0; 2\pi]$ -метриці. *Укр. мат. журн.* 2020. Т. 72, № 4. С. 557–564. DOI: <https://doi.org/10.37863/umzh.v72i4.500>
19. Khats' R. V. Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Буковин. матем. журн.* 2021. Т. 9, № 1. С. 49–55. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04>
20. Хаць Р. В. Асимптотична поведінка спеціального канонічного добутку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 82–93. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).82-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93)
21. Гірник М. О. Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання. *Доп. НАН України*. 2009, № 4. С. 13–18. URL: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/8444> (дата звернення: 12.01.2025).
22. Chyzhykov I. E. Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth. *Мат. студії*. 2017. Т. 47, № 2. С. 169–178. DOI: <https://doi.org/10.15330/ms.47.2.169-178>
23. Логвиненко В. Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. I. *Теория функций, функц. анализ и их прилож.* Харьков. 1972. Вып. 16. С. 154–158. URL: <https://ekhnur.karazin.ua/handle/123456789/2155> (дата звернення: 13.01.2025).
24. Логвиненко В. Н. О целых функциях с нулями на полупрямой. II. *Теория функций, функц. анализ и их прилож.* Харьков. 1973. Вып. 17. С. 84–99. URL: <https://ekhnur.karazin.ua/handle/123456789/2179> (дата звернення: 13.01.2025).
25. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Analog of the Valiron-Titchmarsh theorem for two-term asymptotics of subharmonic functions with masses on a finite system of rays. *Sib. Math. J.* 1985. Vol. 26, № 5. P. 629–642. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00969021>
26. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Polynomial asymptotic representation of subharmonic functions in the plane. *Sib. Math. J.* 1991. Vol. 32, № 1. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00970153>
27. Agranovich P. Z., Logvinenko V. N. Exceptional sets for entire functions. *Мат. студії*. 2000. Т. 13, № 2. С. 149–156. URL: http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf (date of access: 11.01.2025).
28. Agranovich P. Z. Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Мат. студії*. 2005. Т. 23, № 2. С. 169–178. URL: http://matstud.org.ua/texts/2005/23_2/23_2_169-178.pdf (date of access: 11.01.2025).
29. Azarin V. S. On the polynomial asymptotics of subharmonic functions of finite order and

- their mass distributions. *J. Math. Phys. Anal., Geom.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 5–12. URL: <https://jmag.ilt.kharkiv.ua/index.php/jmag/article/view/jm03-0005e/506> (date of access: 13.01.2025).
30. Borova O. I., Zabolots'kyi M. V. Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.* 2003. Vol. 55, № 6. P. 873–884. DOI: <https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f>
 31. Sheremeta M. M., Tarasyuk R. I., Zabolotskii M. V. On asymptotics of entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1996. Vol. 3, № 1/2. P. 146–163. URL: <http://mag.ilt.kharkiv.ua/index.php/mag/article/view/m03-0146e/146> (date of access: 12.01.2025).
 32. Тарасюк Р. І. Теорема типу Валірона-Тітчмарша для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку. *Мат. студ.* 1995. Т. 5. С. 31–38. http://matstud.org.ua/texts/1995/5/5_031-038.pdf (дата звернення: 12.01.2025).

Khats' R. V., Yarmoshyk V. P. A two-term asymptotics of entire functions with improved distribution of zeros on a ray.

The two-term asymptotics of entire functions of finite order under the condition of improved two-term asymptotics of the counting function of their zeros on a ray is studied. In particular, the connection between the improved regular growth of the logarithm (logarithm of the modulus) of entire function of finite order and the improved distribution of its zeros on a ray in terms of a two-term asymptotics is established. New two-term asymptotic equalities for the counting functions of the sequences of zeros of entire functions of finite order are obtained.

Keywords: entire function of finite order, counting function of zeros, two-term asymptotics, improved regular growth, improved distribution of zeros, exceptional set.

References

1. Levin, B. Ja. (1964). *Distribution of Zeros of Entire Functions*. Transl. Math. Monogr. V. 5: Amer. Math. Soc., Providence: R.I.
2. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on Entire Functions*. Transl. Math. Monogr. V. 150: Amer. Math. Soc., Providence: R.I. <https://doi.org/10.1090/mmono/150>
3. Gol'dberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (2008). *Value Distributions of Meromorphic Functions*. Transl. Math. Monogr. V. 236: Amer. Math. Soc., Providence: R.I. <https://doi.org/10.1090/mmono/236>
4. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud.*, 19(1), 97–105. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf
5. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud.*, 21(2), 140–150. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/21_2/21_2_140_150.pdf [in Ukrainian].
6. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud.*, 22(1), 105–110. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/22_1/22_1_105_110.pdf [in Ukrainian].
7. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 24(1), 31–38. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2005/24_1/24_1_031_038.pdf [in Ukrainian].
8. Khabibullin, B. N. (2004). Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions. *Mat. Stud.*, 21(1), 47–63. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2004/21_1/21_1_047_063.pdf
9. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 26(1), 17–24. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2006/26_1/26_1_017_024.pdf
10. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud.*, 33(2), 215–219. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2010/33_2/215-219.pdf [in Ukrainian].

11. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2011). On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky*, 718(718), 5–9. Retrieved from <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12811>
12. Khats', R. V. (2011). Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky*, 718(718), 10–14. Retrieved from <https://ena.lpnu.ua/handle/ntb/12813>
13. Khats', R. V. (2012). Regularity of growth of Fourier coefficients of entire functions of improved regular growth. *Ukr. Math. J.*, 63(12), 1953–1960. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0624-2>
14. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ.*, 5(1), 129–133. <https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133>
15. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Carpathian Math. Publ.*, 5(1), 341–344. <https://doi.org/10.15330/cmp.5.2.341-344>
16. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J.*, 7(1), 114–120. <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114>
17. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ.*, 12(1), 46–54. <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54>
18. Khats', R. V. (2020). Asymptotic behavior of the logarithms of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Ukr. Math. J.*, 72(4), 642–650. <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01805-x>
19. Khats', R. V. (2021). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0; 2\pi]$. *Bukovinian Math. J.*, 9(1), 49–55. <https://doi.org/10.31861/bmj2021.01.04>
20. Khats', R. V. (2022). Asymptotic behavior of a special canonical product. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 82–93. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).82-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93) [in Ukrainian].
21. Hirnyk, M. O. (2009). Subharmonic functions of improved regular growth. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (4), 13–18. Retrieved from <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/8444> [in Ukrainian].
22. Chyzhykov, I. E. (2017). Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth. *Mat. Stud.*, 47(2), 169–178. <https://doi.org/10.15330/ms.47.2.169-178>
23. Logvinenko, V. N. (1972). On entire functions with zeros on the half-line. I. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 16, 154–158. Retrieved from <https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2155> [in Russian].
24. Logvinenko, V. N. (1973). On entire functions with zeros on the half-line. II. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 17, 84–99. Retrieved from <https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2179> [in Russian].
25. Agranovich, P. Z., & Logvinenko, V. N. (1985). Analog of the Valiron-Titchmarsh theorem for two-term asymptotics of subharmonic functions with masses on a finite system of rays. *Sib. Math. J.*, 26(5), 629–642. <https://doi.org/10.1007/BF00969021>
26. Agranovich, P. Z., & Logvinenko, V. N. (1991). Polynomial asymptotic representation of subharmonic functions in the plane. *Sib. Math. J.*, 32(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/BF00970153>
27. Agranovich, P. Z., & Logvinenko, V. N. (2000). Exceptional sets for entire functions. *Mat. Stud.*, 13(2), 149–156. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf
28. Agranovich, P. Z. (2005). Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Mat. Stud.*, 23(2), 169–178. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2005/23_2/23_2_169_178.pdf
29. Azarin, V. S. (2007). On the polynomial asymptotics of subharmonic functions of finite order and their mass distributions. *J. Math. Phys. Anal., Geom.*, 3(1), 5–12. Retrieved from <https://jmag.ilt.kharkiv.ua/index.php/jmag/article/view/jm03-0005e/506>

30. Borova, O. I., & Zabolots'kyi, M. V. (2003). Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.*, 55(6), 873–884. <https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f>
31. Sheremeta, M. M., Tarasyuk, R. I., & Zabolotskii, M. V. (1996). On asymptotics of entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, 3(1/2), 146–163. Retrieved from <http://mag.ilt.kharkiv.ua/index.php/mag/article/view/m03-0146e/146>
32. Tarasyuk, R. I. (1995). Valiron-Titchmarsh type theorem for entire functions of finite logarithmic order. *Mat. Stud.*, 5, 31–38. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/1995/5/5_031-038.pdf [in Ukrainian].

Одержано 04.03.2025

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).133-137](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).133-137)О. А. Ярова¹, Я. І. Єлейко²

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oksana.yarova@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6284-1193>

² Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2200-8447>

ПОБУДОВА ЙМОВІРНІСНОГО ПРОСТОРУ ДЛЯ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Дана стаття присвячена побудові ймовірнісних просторів для випадкових еволюцій. Розглядається випадковий процес з впливом зовнішнього середовища. Досліджуються випадки залежних та незалежних просторів. Побудовано ймовірнісний простір та розглянуто приклад використання ймовірнісного простору для випадкової еволюції.

Ключові слова: випадковий процес, випадкове середовище, ймовірнісний простір, випадкова еволюція, ймовірнісна міра.

1. Вступ. В сучасному світі дуже багато процесів описується випадковими процесами та математичними моделями, побудованими на їх основі. Але на процеси, які відбуваються, має великий вплив зовнішнє середовище. При чому, можливі й такі випадки, коли й на випадкове середовище впливає інше випадкове середовище, і їх може бути як завгодно багато. Тоді виникає потреба в побудові випадкової еволюції, яка залежить від випадкових середовищ, які впливають на випадковий процес. Зазвичай випадкові процеси та випадкові середовища знаходяться в різних ймовірнісних просторах, тому потрібно розширювати простір для випадкової еволюції або ж побудувати новий ймовірнісний простір. Мета даної роботи полягає в побудові ймовірнісних просторів для випадкових еволюцій у випадку залежних та незалежних випадкових середовищ.

2. Основний результат. Розглянемо випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , де Ω — простір елементарних подій, F — σ -алгебра, P — ймовірнісна міра. Нехай на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) .

Задамо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкового середовища $X_1(t)$. Тоді $\zeta(t) = \xi(X_1(t))$. Але $\xi(t)$ та $X_1(t)$ задані на різних ймовірнісних просторах, тому потрібно розширити ймовірнісний простір так, щоб він узгоджувався з ймовірнісними просторами (Ω, F, P) та (Ω_1, F_1, P_1) .

Для початку побудуємо простір елементарних подій. Нехай ω — елементарна подія з простору елементарних подій Ω , а ω_1 — з простору Ω_1 , тобто $\omega \in \Omega$, $\omega_1 \in \Omega_1$. Тоді задамо простір елементарних подій $\tilde{\Omega}_1 = \{\omega, \omega_1\}$.

Далі побудуємо σ -алгебру. Нехай подія $A \in F$, а подія $A_1 \in F_1$. Тоді σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена подіями A та A_1 , тобто $\tilde{F}_1 = \sigma(A, A_1)$.

Тепер перейдемо до ймовірнісних мір. Тут потрібно розглянути два випадки, оскільки $\xi(t)$ та $X_1(t)$ можуть бути, як незалежними, так і залежними. У випадку незалежності

$$P(A \times A_1) = P(A) \cdot P(A_1). \quad (1)$$

Якщо ж $\xi(t)$ та $X_1(t)$ — залежні, то задаємо ймовірнісну міру наступним чином

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x\} \cdot P\{X_1(t) = x\}. \quad (2)$$

Таким чином, ймовірнісний простір для випадкової еволюції можна задати наступною трійкою

$$(\tilde{\Omega}_1, \tilde{F}_1, \tilde{P}_1),$$

де ймовірнісна міра $\tilde{P}_1$ визначається формулою (1) для незалежних просторів та формулою (2) для залежних.

Даний ймовірнісний простір побудовано для випадкової еволюції, у якій випадкове середовище $X_1(t)$ впливає на випадковий процес $\xi(t)$. Але ж на випадкове середовище $X_1(t)$ може впливати ще одне випадкове середовище, позначимо його $X_2(t)$. В такому випадку ймовірнісний простір знову зміниться.

Нехай випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) , а на це випадкове середовище впливає випадкове середовище $X_2(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_2, F_2, P_2) .

Задамо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкових середовищ $X_1(t)$ та $X_2(t)$. Тоді $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(t)))$. Побудуємо новий ймовірнісний простір.

Почнемо з простору елементарних подій. Нехай ω — елементарна подія з простору елементарних подій Ω , ω_1 — з простору Ω_1 , а ω_2 — з простору Ω_2 , тоді простір елементарних подій $\tilde{\Omega}_2 = \{\omega, \omega_1, \omega_2\}$.

Далі побудуємо σ -алгебру. Нехай подія $A \in F$, подія $A_1 \in F_1$, а подія $A_2 \in F_2$. Тоді σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена цими подіями, тобто $\tilde{F}_2 = \sigma(A, A_1, A_2)$.

Перейдемо до ймовірнісних мір. Нехай $\xi(t)$, $X_1(t)$ та $X_2(t)$ — незалежні, тоді

$$P(A \times A_1 \times A_2) = P(A) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2) \quad (3)$$

Якщо ж $\xi(t)$ та $X_1(t)$, а також $X_1(t)$ та $X_2(t)$ — залежні, то задаємо ймовірнісну міру наступним чином

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2\}. \quad (4)$$

Тоді, ймовірнісний простір для випадкової еволюції можна задати наступною трійкою

$$(\tilde{\Omega}_2, \tilde{F}_2, \tilde{P}_2),$$

де ймовірнісна міра $\tilde{P}_2$ визначається формулою (3) для незалежних просторів та формулою (4) для залежних.

Аналогічним чином визначаються ймовірнісні простори для більшої кількості випадкових середовищ. Розглянемо випадок з впливом n випадкових середовищ.

Нехай випадковий процес $\xi(t)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) , на даний процес впливає деяке випадкове середовище $X_1(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_1, F_1, P_1) , на це випадкове середовище впливає випадкове середовище $X_2(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_2, F_2, P_2) , на це випадкове середовище має вплив випадкове середовище $X_3(t)$, задане на ймовірнісному просторі (Ω_3, F_3, P_3) і так далі до випадкового середовища $X_n(t)$, заданого на ймовірнісному просторі (Ω_n, F_n, P_n) .

Тоді задаємо випадкову еволюцію $\zeta(t)$ для випадкового процесу $\xi(t)$ з впливом випадкових середовищ $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. Таким чином $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(\dots X_n(t))))$.

Ймовірнісний простір задаємо трійкою

$$(\tilde{\Omega}_n, \tilde{F}_n, \tilde{P}_n),$$

де простір елементарних подій

$$\tilde{\Omega}_n = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

σ -алгебра

$$\tilde{F}_n = \sigma(A, A_1, A_2, \dots, A_n),$$

ймовірнісна міра у випадку незалежності випадкового процесу $\xi(t)$ та випадкових середовищ $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$

$$P(A \times A_1 \times A_2) = P(A) \cdot P(A_1) \cdot P(A_2),$$

а у випадку залежності

$$P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2 | X_3(t) = x_3\} \cdot \dots \cdot P\{X_n(t) = x_n\}.$$

Сформулюємо отримані результати у вигляді теореми.

Теорема 1. *Нехай $\xi(t)$ — випадковий процес, заданий на (Ω, F, P) , на який впливають випадкові середовища $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, задані на (Ω_i, F_i, P_i) , $i = 1, \dots, n$. Тоді випадкова еволюція $\zeta(t) = \xi(X_1(X_2(\dots X_n(t))))$ задається на ймовірнісному просторі $(\tilde{\Omega}_n, \tilde{F}_n, \tilde{P}_n)$, де $\tilde{\Omega}_n = \{\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ — простір елементарних подій, $\tilde{F}_n = \sigma(A, A_1, A_2, \dots, A_n)$ — σ -алгебра, $\tilde{P}_n = P\{\xi(t) \in A | X_1(t) = x_1\} \cdot P\{X_1(t) = x_1 | X_2(t) = x_2\} \cdot P\{X_2(t) = x_2 | X_3(t) = x_3\} \cdot \dots \cdot P\{X_n(t) = x_n\}$ — ймовірнісна міра.*

Розглянемо приклад використання ймовірнісних просторів.

Нехай $\xi(t)$ — випадковий процес, який описує щоденну зміну ціни акцій, а $X(t)$ — випадкове середовище, яке впливає на даний випадковий процес, тобто загальний стан ринку. Опишемо ймовірнісні простори для $\xi(t)$, $X(t)$ та випадкової еволюції.

Почнемо з випадкового середовища. Загальний стан ринку складається з трьох станів: зростання, спадання та стабільність. Нехай ймовірності цих станів дорівнюють 0.3, 0.3 та 0.4.

Тоді $\Omega_1 = \{\text{зростання, спадання, стабільність}\}$, $P\{\text{зростання}\} = 0.3$, $P\{\text{спадання}\} = 0.3$ та $P\{\text{стабільність}\} = 0.4$.

Перейдемо до випадкового процесу $\xi(t)$. В даному випадку

$$\Omega = \{\xi(t) : t = 1, 2, \dots, 365, \xi(t) \in \mathbb{R}\}.$$

Розподіл випадкового процесу буде відрізнятись, в залежності від того, в якому стані буде знаходитись фінансовий ринок. Розглянемо наступні випадки:

1. При умові зростання цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = 0.2$ та $\sigma^2 = 0.01$;
2. При умові спадання цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = -0.2$ та $\sigma^2 = 0.01$;
3. При умові стабільності цін акцій на ринку $\xi(t)$ — нормально розподілений з параметрами $a = 0$ та $\sigma^2 = 0.01$;

Тоді ймовірнісний простір для еволюції задаємо трійкою $(\tilde{\Omega}_1, \tilde{F}_1, \tilde{P}_1)$, де $\tilde{\Omega}_1 = \{\omega, \omega_1\}$, $\omega \in \Omega$, $\omega_1 \in \Omega_1$. σ -алгебра випадкової еволюції буде породжена подіями A та A_1 , тобто $\tilde{F}_1 = \sigma(A, A_1)$. Ймовірнісна міра задається формулою $\tilde{P}_1 = P\{\xi(t) \in A | X(t) = x\} \cdot P\{X(t) = x\}$.

Розглянемо подію A , яка полягає в тому, що ціна на акцію в перший день зросла більше, ніж на 0.3 та знайдемо ймовірність даної події. Почнемо з умовних ймовірностей

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{зростання}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3 - 0.2}{0.1}\right) = 0.1587,$$

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{спадання}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3 + 0.2}{0.1}\right) = 0.000001,$$

$$P\{\xi(1) > 0.3 | \text{стабільність}\} = 1 - \Phi\left(\frac{0.3}{0.1}\right) = 0.00135.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P(A) &= P\{\xi(1) > 0.3 | \text{зростання}\} \cdot P\{\text{зростання}\} + \\ &+ P\{\xi(1) > 0.3 | \text{спадання}\} \cdot P\{\text{спадання}\} + \\ &+ P\{\xi(1) > 0.3 | \text{стабільність}\} \cdot P\{\text{стабільність}\}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$P(A) = 0.1587 \cdot 0.3 + 0.000001 \cdot 0.3 + 0.00135 \cdot 0.4 = 0.048153$$

Тобто, ймовірність зростання ціни більше, ніж на 0.3 дорівнює 0.048153.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В результаті проведеного дослідження, побудовано ймовірнісний простір для випадкової еволюції з урахуванням впливу зовнішнього середовища. Розглянуто залежні та незалежні випадкові середовища.

В подальшому дослідженні виникає потреба в побудові ймовірнісних просторів з урахуванням гіпотез про розподіли або параметри розподілів, якими визначається випадковий процес. На основі цього, і вже проведеного аналізу, можна буде побудувати ймовірнісні простори та розглянути суміші розподілів для випадкових еволюцій.

Список використаної літератури

1. Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Mixture of distributions based on the Markov Chain. *Cybernetics and System Analysis*. 2022. Vol. 58, No. 5. P. 754–757. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00508-4>
2. Скороход А. В. Лекції з теорії випадкових процесів.: Навч. посібник. Львів: Либідь, 1990. 168 с. URL: https://probability.knu.ua/userfiles/myus/Skorohod_Lekcii_z_teorii_vypadkovykh_procesiv.pdf (дата звернення 25.11.2024).
3. Korolov L. B., Sinai Y. G. Theory of Probability and Random Processes. 2nd edition. Berlin : Springer-Verlag, 2007. 358 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-68829-7>
4. Єлейко Я. І., Базилевич І. Б. Лекції з теорії Випадкових процесів. Видавництво Львівського університету. 2016, 160 с.
5. Турчин В. М. Математична статистика в прикладах і задачах. Київ : НМК ВО, 1993. 164 с.

Yarova O. A., Yeleyko Ya. I. Construction of a Probability Space for Random Evolution.

This article is devoted to the construction of probability spaces for random evolutions. A random process with the influence of the external environment are considered. The cases of dependent and independent spaces are studied. A probability space is constructed and an example of using a probability space for random evolution are considered.

Keywords: random process, random environment, probability space, random evolution, probability measure.

References

1. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2022). Mixture of distributions based on the Markov Chain. *Cybernetics and System Analysis*. 58(5), 754–757. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00508-4>
2. Skorohod, A. V. (1990). *Lectures on the theory of random processes: Textbook*. Lviv: Lybid. Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/myus/Skorohod_Lekcii_z_teorii_vypadkovykh_procesiv.pdf [in Ukrainian].
3. Korolov, L. B., & Sinai, Y. G. (2007). *Theory of Probability and Random Processes. 2nd edition*. Berlin: Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-68829-7>
4. Yeleyko, Ya. I., & Bazilevych, I. B. (2016). *Lectures on the theory of random processes*. Lviv University Publishing House [in Ukrainian].
5. Turchyn, V. M. (1993). *Mathematical statistics in examples and problems*. Kyiv: NMK VO [in Ukrainian].

Одержано 31.01.2025

УДК 004.45

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).138-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).138-148)**М. О. Богдюк**

Національний університет біоресурсів і природокористування України,
аспірант кафедри комп'ютерних систем, мереж та кібербезпеки

m.bogdiuk@nubip.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4743-4023>

АНАЛІЗ ПРОЦЕСУ ЗАВАНТАЖЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ НА БАЗІ АРХІТЕКТУРИ X86-64 НА ПРЕДМЕТ ВРАЗЛИВОСТЕЙ ТА ВИЗНАЧЕННЯ МЕХАНІЗМІВ ЙОГО ЗАХИСТУ

У статті проведено систематичний аналіз механізмів завантаження сучасної комп'ютерної системи архітектури x86-64 та потенційних загроз, що виникають у процесі її ініціалізації. Розглянуто методи компрометації прошивки, низькорівневих режимів виконання та засобів перевірки цілісності завантаження. Особливу увагу приділено атакам, що спрямовані на обхід захисних технологій зазначених систем. На основі аналізу наукових публікацій визначено потенційні вразливості компонентів комп'ютерної системи, які використовуються при її ініціалізації, та які необхідно ізолювати від потенційних загроз (зокрема небезпечних програм), а також визначені напрями подальших наукових досліджень.

Ключові слова: завантаження, компрометація прошивки, вразливості, обхід захисних технологій, ізолювання.

1. Вступ. В умовах цифрової трансформації всіх сфер діяльності суспільства, дедалі більше компаній та державних установ залежить від ефективного та безпечного функціонування інформаційних, електронних комунікаційних, та відповідно комп'ютерних систем. Ці системи використовуються зокрема для керування банківськими транзакціями, медичною інформацією, енергетичними мережами, військовою технікою та озброєнням. Вразливості в їхньому операційному середовищі можуть призвести не лише до значних фінансових втрат, але й становити загрозу безпеці держави, життю та здоров'ю людей.

Паралельно з розвитком засобів захисту інформації, методи кібератак також еволюціонують. Зловмисники застосовують все більш складні техніки, зокрема вбудовують шкідливе програмне забезпечення (ПЗ) в прошивку чипсета чи вбудованих пристроїв (Advanced Persistent Threats, APT). З огляду на це, дослідження вразливостей завантажувального ланцюга комп'ютерних систем та ефективних методів їх нейтралізації є вкрай важливим для забезпечення безпеки сучасних інформаційних систем.

Програмне забезпечення, що виконується на системному рівні, характеризується високою складністю, інтеграцією апаратних засобів та численними взаємозв'язками між компонентами, що створює ідеальне середовище для появи нових вразливостей. Завантаження операційної системи є критично важливим етапом, оскільки саме в цей момент відбувається ініціалізація апаратних компонентів, виконання прошивки та перевірка цілісності завантажуваних компонентів.

У цій статті розглядаються ключові етапи завантаження систем на основі x86-64, їх потенційні вразливості та сучасні методи захисту.

Основні вектори атак під час завантаження включають компрометацію прошивки (UEFI, SMM), обходи механізмів Secure Boot, підміну завантажувачів та атаки на рівні гіпервізора та ядра операційної системи.

Метою статті є системний аналіз процесу ініціалізації комп'ютерної системи та потенційних вразливостей для подальшої розробки засобів попередження та захисту від атак.

Об'єктом дослідження є процес ініціалізації комп'ютерної системи.

Предметом дослідження є методи атак на компоненти комп'ютерної системи, які використовуються при її ініціалізації, та методи захисту від них.

Методи дослідження: аналіз та синтез. Для кожного етапу ініціалізації комп'ютерної системи розглядаються наступні критерії:

- Поверхня атаки.
- Відомі вразливості.
- Засоби протидії.

На основі них шляхом порівняльного аналізу ці критерії узагальнюються на весь процес ініціалізації.

2. Зміст дослідження. Архітектура x86-64 обрана через високий рівень її використання в державних та комерційних інформаційних та електронних комунікаційних системах. Вона досі лишається домінантною та актуальною серед десктопних та ноутбучних систем. Це відрізняє її від ARM64, яка має фрагментовану екосистему, що включає різні вендорські реалізації без єдиного стандарту прошивки та механізмів безпеки. Точних даних про поширеність архітектур немає через комерційну таємницю, однак згідно [1] поширеність Windows становить 70%, а це в основному x86 + x86-64 платформа, системи Windows-on-ARM з достатньою продуктивністю почали випускатись лише у 2024 році.

На рис. 1 зображений процес запуску x86-64 системи. Зліва блоки TPM (Trusted Platform Module) та TEE (Trusted Execution Environment) є компонентами, що можуть бути використані будь-яким іншим компонентом, що розміщений нижче на діаграмі, стрілки до них не зображені задля кращого сприйняття діаграми. Зеленим кружечком позначено умовне «кілець привілеїв процесора» від -3 до 3. Це розширення принципу кілець привілеїв, сформульованого в [2], де рівень привілеїв міг бути від 0 до 3, однак практично архітектура x86-64 передбачає рівні привілеїв, нижчі за рівень ядра ОС, для прикладу на -1 рівні виконується гіпервізор, який має повний контроль над ядром (рівень 0).

Завантаження системи на базі x86-64 починається з запуску *Intel ME / AMD Secure Technology* (колись PSP). Це міні операційна система, яка керує процесором. Зокрема, вона перевіряє цілісність UEFI. Водночас, вона має небезпечні аспекти функціонування, а саме: має необмежений доступ до пам'яті та периферійних пристроїв, і працює, коли комп'ютер вимкнений, але має живлення. З однієї сторони це дозволяє адміністратору керувати всіма комп'ютерами мережі (ME), з іншої є потенційною точкою атаки. Зокрема, згідно дослідження [3], у процесорів Intel 2017 року ME базувалась на пропрієтарній версії Minix із численними вразливостями та відкритими мережевими портами. Особливо небезпечним є те, що експлойти можуть записатись у Flash-пам'ять, таким чином уникаючи стирання при перезапуску. Єдиним дієвим розв'язанням цієї проблеми автори вважають застосування апаратних компонентів, які мають повністю

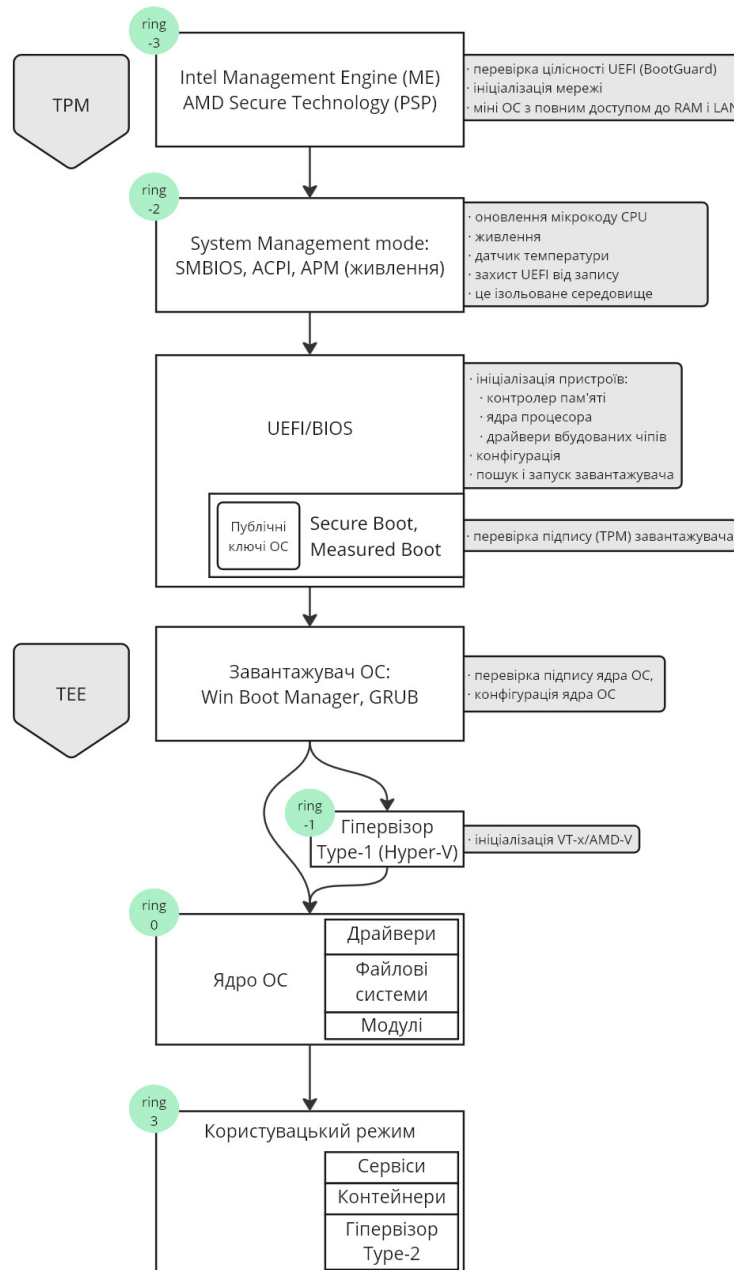


Рис. 1. Процес запуску операційної системи.

відкритий вихідний код прошивок для всієї системи, включно з процесором і чипсетом.

У статті [4], Intel стверджує, що використовує лише порти 623, 664, 5900 та 16992-16995 — їх можна заблокувати зовнішнім файрволом. В системах виробництва AMD мережеві порти не відкриті, тому вразливості обмежуються передачею спеціальних команд через SPI [5], [6], зокрема через драйвер чипсета amdpsp.sys [7], що реєструє пристрій \Device\amdpsp.

TPM — це апаратний криптографічний модуль, інтегрований у платформу (материнську плату чи процесорний модуль), який забезпечує основні довірені функції, пов'язані з безпекою обчислювальної системи. Серед ключових завдань

TPM виокремлюють зберігання та захист криптографічних ключів, виконання операцій шифрування/розшифрування та верифікацію цілісності апаратних і програмних компонентів.

Згідно зі специфікацією Trusted Computing Group (2003), TPM має незалежну апаратну реалізацію, що включає криптографічні співпроцесори, механізм генерації випадкових чисел (RNG) та захищену пам'ять для зберігання ключів. Завдяки цьому TPM може: генерувати криптографічні ключі у захищеному середовищі, недоступному для решти процесів системи; зберігати їх та використовувати для шифрування і підпису. Також TPM дозволяє перевіряти цілісність операційної системи шляхом перевірки контрольних сум.

Хоча є кілька досліджень, де ключ з TPM можна дістати апаратно, прослуховуючи шини SPI, I2C, LPC [8] [9], та Moghimi et al. [10] знайшли вразливості в fTPM та STMicroelectronics TPM, що дозволяють добути приватні ключі еліптичних алгоритмів ECDSA, та ECSchnorr шляхом аналізу побічного каналу (а саме, часу обробки), причому віддалено, без безпосереднього доступу до пристрою.

Після ME/PSP починає ініціалізацію *System Management Mode* (SMM) — спеціальний режим роботи процесора, який використовується для управління енергоспоживанням, апаратного моніторингу, оновлення мікрокоду процесора, емуляції апаратури та початкової ініціалізації UEFI, зокрема захищає секцію коду UEFI від запису. Код SMM виконується в ізольованій області пам'яті (SMRAM), що робить його недоступним для операційної системи та інших привілейованих компонентів. Після запуску системи, SMM зупиняється і продовжується лише у випадку генерації System Management Interrupt (SMI) — високопріоритетного немаскованого апаратного переривання. Згенерувати його можна:

- Апаратно: подати сигнал на пін SMI [11].
- Читання або запис в спеціальний I/O порт (залежить від материнської плати, деколи 0xB2) [12].
- Через APIC (Advanced Programmable Interrupt Controller) [13].
- Спеціальна команда, доступна з UEFI/BIOS.

Коли відбувається подія, що генерує SMI, процесор зберігає свій поточний стан і переходить у SMM, виконуючи код, розташований у SMRAM. Після завершення обробки процесор відновлює свій попередній стан і повертається до нормальної роботи.

Після перевірки цілісності і захисту від запису, починає виконуватись *Unified Extensible Firmware Interface*. UEFI виконує початкову ініціалізацію апаратного забезпечення та драйверів критично важливих пристроїв (мережа, NVME, AHCI), перевіряє його справність та знаходить завантажувальні пристрої. Стандарт не прив'язаний до архітектури, тому може бути реалізований на ARM пристроях, однак для економії виробники обходяться мінімальною нестандартною реалізацією.

Згідно дослідження [14], кількість атак на UEFI різко зросла у 2016-2017 і продовжує зростати. Детальніше вразливості UEFI узагальнені в [15], де описані механізми атак і засоби протидії, а також додатково підкреслюється важливість регулярного оновлення прошивки та контролю її цілісності.

Оскільки виробники випускають оновлення лише кілька років після випуску материнської плати, вразливості у UEFI часто залишаються назавжди. Однією з таких вразливостей є група LogoFAIL, знайдена Binarly Research Team [16]. Суть в тому, що користувач може завантажити будь-який рисунок екрану завантаження (наприклад, в EFI:\EFI\OEM\Logo.jpg). Для простоти користування, його цифровий підпис не перевіряється, адже він може бути згенерований користувачем. Це створює лазівку для завантаження непідписаного коду в чип SPI. Таким чином, достатньо лише знайти вразливість модуля, що зчитує зображення, і не думати як завантажити непідписаний код.

UEFI має механізм *Secure Boot*, який забезпечує перевірку цифрового підпису всіх завантажувальних компонентів ядра ОС (включаючи драйвери та модулі), тим самим обмежує виконання несанкціонованого коду на ранніх етапах завантаження.

Secure Boot також може створювати труднощі для користувачів операційних систем, відмінних від Windows. В своїй презентації Intel [17] розглядає виклики, з якими стикаються користувачі Linux при використанні Secure Boot. Зокрема, обговорюється проблема сумісності, коли Secure Boot може блокувати завантаження непідписаних або самостійно підписаних завантажувачів, що ускладнює встановлення та використання Linux-дистрибутивів. Для вирішення цієї проблеми було запропоновано використання завантажувача "shim який підписується довіреним сертифікатом і дозволяє завантажувати підписані ядра Linux. Крім того, у звіті обговорюється концепція Machine Owner Key (МОК), яка надає користувачам можливість додавати власні ключі для підпису завантажувачів та модулів ядра, забезпечуючи більшу гнучкість та контроль над процесом завантаження. Хоча деякі дистрибутиви Linux отримали підписані завантажувачі для сумісності з Secure Boot, процес налаштування все ще може бути складним для пересічних користувачів. А деякі виробники апаратного забезпечення взагалі не надають зручних інтерфейсів для керування налаштуваннями Secure Boot, що ускладнює процес його вимкнення або налаштування для підтримки альтернативних операційних систем.

UEFI вважається довіреним середовищем, оскільки код є підписаним. Компоненти, що завантажуються після нього, вважаються не довіреними, однак є випадки, коли користувацький код мусить обробити конфіденційні дані. Без спеціальної апаратної підтримки, будь-які дані, доступні користувацькому режиму, доступні і ядру системи. Для ізоляції таких даних і обчислень існує середовище захищеного виконання (*Trusted Execution Environment*, TEE), або захищений анклав – це апаратно-програмна концепція, яка створює «острівок довіри» всередині загальної обчислювальної платформи. Завдяки ізоляції, шифруванню та механізмам віддаленої атестації, анклав гарантує безпечне виконання коду та збереження конфіденційності критичних даних навіть тоді, коли сама операційна система частково скомпрометована. Це спеціалізоване обчислювальне середовище, у якому код і дані можуть бути ізольовані від решти системи й оброблятися у безпечній зоні. Основна ідея полягає в тому, щоб важлива логіка та конфіденційна інформація (наприклад, криптографічні ключі, паролі тощо) були недоступні для решти операційної системи або потенційно скомпрометованих процесів. Анклави мають власну адресу пам'яті, захищену шифруванням на апаратному рівні. Це унеможливорює прочитання або втру-

чання у вміст анклаву навіть з боку операційної системи чи гіпервізора. Код і дані, які необхідно захистити, завантажуються у пам'ять анклаву у зашифрованому вигляді, і апаратні засоби процесора розшифровують дані лише під час виконання, зберігаючи їх ізольованими від решти пам'яті. У випадку витоку пам'яті або фізичного доступу до неї, зловмисник не зможе прочитати інформацію анклаву, оскільки ключі шифрування зберігаються на рівні процесора, недоступному назовні. Під час виконання інструкції анклаву, доступ до пам'яті за межами анклаву обмежений, а самій операційній системі заборонено втручатися у процеси всередині анклаву. Результати обчислень або службова інформація, які виходять за межі анклаву, можуть бути додатково перевірені або зашифровані. Доступна також можливість верифікації цілісності коду, для унеможливлення модифікації коду зловмисником [18].

ТЕЕ досі обмежені в використанні через складність. Raju et al. [19] дослідили анклавів і дійшли висновку, що усі доступні фреймворки для реалізації довірених контейнерів ("tcon") потребують суттєвого переписування наявного коду, а практична їхня імплементація є складнішою, ніж задекларовано виробниками SDK. Крім того, у більшості публікацій основна увага зосереджена на Intel SGX та Arm TrustZone, унаслідок чого програмного забезпечення для менш поширених платформ AMD SEV, RISC-V та графічних ТЕЕ значно менше. Zhao et al. [20] запропонували мінімалістичну архітектуру ядра ОС, орієнтовану на середовище довіреного виконання. Їх реалізація повністю вміщується в ТЕЕ, займаючи всього 100кБ. Ця архітектура спрямована на протидію атакам на рівні фізичного доступу до плати (board-level physical attacks). Зокрема, вони демонструють, як можна істотно скоротити поверхню атаки за рахунок зменшення коду та кількості компонентів усередині довіреного середовища. Такий підхід дає змогу ускладнити несанкціоноване втручання в роботу ТЕЕ та підвищити загальний рівень безпеки системи, водночас зберігаючи основні функціональні можливості для захищеного виконання.

Зворотною стороною ТЕЕ є те, що анклави є чудовим середовищем для виконання самих шкідливих програм: він невидимий для антивірусів і не дозволяє приєднання відлагоджувальника, таким чином унеможливаючи аналіз [21]. З огляду на це, провайдери хмарних сервісів можуть цілком вимикати SGX на рівні UEFI для уникнення позовів щодо розкриття приватних даних.

Самі анклавів теж можуть бути скомпрометовані, як показано в [22]: Schwarz et al. розробили програмне забезпечення, здатне непомітно проникнути у захищений SGX анклави іншої програми. Поки що не існує засобів протидіяти таким атакам, оскільки це доволі нова технологія, плюс антивіруси не мають можливості аналізувати вміст анклавів.

Після успішної ініціалізації апаратного забезпечення керування передається завантажувачу (*bootloader*): UEFI шукає на жорсткому диску спеціальний розділ і починає виконання завантажувача. Якщо увімкнений CSM, UEFI емулює BIOS і пробує завантажитись зі спеціального Boot розділу жорсткого диску. Якщо увімкнений Secure Boot (чи аналог), спершу перевіряється підпис завантажувача, щоб впевнитись в цілісності. Проте, якщо Secure Boot вимкнено або неправильно налаштовано, зловмисник може замінити завантажувач на шкідливий, отримавши повний контроль над системою. А оскільки розділом UEFI на диску є незашифрований FAT32, записати туди може будь-хто з фізичним

доступом.

Найпоширенішими завантажувачами є Bootmgr (Windows), GRUB (Linux), systemd-boot (Linux) та U-Boot (ARM).

Реальним прикладом застосування вразливості Bootmgr є BlackLotus, досліджений ESET Research [23]. Це UEFI-bootkit, який експлуатує вразливість CVE-2022-21894 [24], що дає змогу підписаному, але вразливому завантажувачу Windows обходити Secure Boot, що в свою чергу робить можливим виконання довільного коду на ранніх етапах завантаження системи. Це досягається завдяки параметру “truncatememory” у конфігурації завантаження (BCD): він дозволяє видалити з карти пам’яті області, що містять політику Secure Boot. Це призводить до того, дозволяється активація небезпечних параметрів, таких як “bootdebug”, “testsigning” та “no integrity checks”, які порушують цілісність процесу завантаження, але корисні для відлагодження ядра. Після успішного впровадження BlackLotus модифікує завантажувальний процес, уникаючи засобів виявлення, а також розгортає постійний бекдор, що забезпечує подальше виконання шкідливого коду навіть після перезавантаження.

Завантажувач завантажує ядро операційної системи в оперативну пам’ять та передає йому керування. Ядро ініціалізує необхідні драйвери, налаштовує апаратні ресурси та запускає системні процеси, завершуючи процес завантаження. Використання підписаних модулів ядра та механізмів контролю цілісності допомагає запобігти виконанню несанкціонованого коду. Основною небезпекою монолітних ядер є повний доступ всіх до всіх, будь-який драйвер може прочитати будь-яку область пам’яті. На помилках коду модулів ядра якраз і ґрунтуються вразливості.

Щоб дотримуватись принципу мінімального доступу, McKee et al. [25] розробили засіб Hardware-Assisted Kernel Compartmentalization (НАКС): код та дані модулів у ядрі операційної системи розділяються в окремі секції, кожна з яких має власну політику доступу, що унеможливорює несанкціоноване зчитування або модифікацію з боку інших складових системи. У разі, коли потрібно передати керування за межі секції, право «власності» на ці дані тимчасово переходить до цільової секції, а після повернення виклику відновлюється початковий власник. Така схема дає змогу ізолювати код і дані всередині ядра без залучення додаткових елементів довіри (Trusted Computing Base) під час виконання ізолюваного коду. Для мінімізації надлишкових обчислень, система НАКС покладається на апаратні механізми безпеки для дотримання визначених політик доступу. Це дозволяє посилити загальну безпеку системи, дотримуючись принципів найменших привілеїв та сегментування, за якого кожна партиція має лише ті права, які необхідні їй для реалізації покладених на неї функцій. Автори виміряли, що програми з активним НАКС сповільнюються на 1.6%–24%, при цьому захищаючи від багатьох CVE, пов’язаних з модулями ядра, або роблячи завдання зловмисника тяжче, оскільки зона доступної пам’яті значно менша.

3. Підсумок. У табл. 1 наведено визначені поверхні атак для кожного етапу ініціалізації комп’ютерної системи на основі архітектури x86-64.

Таблиця 1.

Поверхні атаки компонентів комп'ютерної системи на основі x86-64

Компонент	Поверхня атаки
Intel ME	Відкриті Ethernet порти: 623, 664, 5900 та 16992-16995 [4]. Шина SPI, MMIO (memory-mapped I/O).
AMD PSP	Шина SPI, MMIO [5], зокрема через драйвер \Device\amdpnp [7].
TPM	Фізичне прослуховування шин SPI, I2C, LPC [8, 9], Атаки шляхом аналізу часу обробки [10] (timing attack).
SMM	Апаратний SMI пін [11]. Спеціальний порт I/O (часто 0xB2) [12]. APIC [13]. Команда UEFI/BIOS.
UEFI	Запис модифікованої прошивки в SPI чип [15], часто з драйвером. Підміна завантажувача [15]. Підміна ресурсів завантажувача [16].
TEE	Може бути середовищем неконтрольованого виконання [21]. Можливе проникнення в чужі анклав.
Завантажувач	Підміна завантажувача [23, 24].
Ядро ОС	Системні виклики (syscall). Підміна ядра. Підміна модулів чи драйверів [25].

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У процесі аналізу поверхонь атаки на різні компоненти, визначено наступні методи захисту:

- налаштування зовнішнього фаєрволу для заборони портів 623, 664, 5900 та 16992-16995;
- фільтрація запитів до шин SPI, I2C, LPC;
- фільтрація запитів до I/O портів та APIC;
- визначення критичних областей віддзеркаленої пам'яті MMIO та фільтрація доступу до неї;
- рандомізація часу доступу до функцій TPM шляхом додавання випадкових затримок;
- заборона запису в розділ EFI;
- заборона або вимкнення TEE, або вимога явного дозволу на використання кожного конкретного випадку.

Такі методи захисту, як фільтрація, є досить складними для реалізації, на сьогодні єдиних підходів не сформовано, тому їх ефективна реалізація є предметом подальших наукових досліджень.

Список використаної літератури

1. Desktop Operating System Market Share Worldwide (2025). URL: <https://gs.statcounter.com/os-market-share/desktop/worldwide> (date of access: 28.03.2025)
2. Tanenbaum A. S., and Bos H. Modern operating systems (4th ed.). Pearson Education, 2014. 1136 p.
3. Minnich R., Shun Lim G., O'Leary R., Koch C., and Chen X. Replace your exploit-ridden firmware with a Linux kernel. 2017. URL: https://www.mikrocontroller.net/attachment/353216/Linuxcon_2017_NERF.pdf
<https://www.youtube.com/watch?v=iffTJ1vPCSo> (date of access: 20.03.2025).

4. Intel® Active Management Technology: Privacy Statement. 2023. URL: <https://www.intel.com/content/www/us/en/privacy/intel-active-technology-vpro.html> (date of access: 20.03.2025).
5. AMD Processor Vulnerabilities. AMD Security Bulletin AMD-SB-7009, 2023. URL: <https://www.amd.com/en/resources/product-security/bulletin/amd-sb-7009.html> (date of access: 20.03.2025).
6. AMD Embedded Processors Vulnerabilities — February 2024. AMD Security Bulletin AMD-SB-5001, 2024. URL: <https://www.amd.com/en/resources/product-security/bulletin/amd-sb-5001.html> (date of access: 20.03.2025).
7. Economou K. Vulnerability Report. AMD, 08/04/2021. URL: https://dl.packetstormsecurity.net/2109-Advisories/AMD_PSP_Vulnerability_Report.pdf (date of access: 20.03.2025).
8. TPM Sniffing, 2021. URL: <https://blog.scr.ch/2021/11/15/tpm-sniffing> (date of access: 21.02.2025).
9. Stealing the BitLocker Key from a TPM. URL: <https://astralvx.com/stealing-the-bit-locker-key-from-a-tpm> (date of access: 21.02.2025).
10. Moghimi, D., Sunar, B., Eisenbarth, T., & Heninger, N. TPM-FAIL: TPM meets Timing and Lattice Attacks. 2019. ArXiv. abs/1911.05673.
11. Robert R. Collins, Intel's System Management Mode. Dr. Dobb's Journal. 1997. URL: <https://www.rcollins.org/ddj/Jan97/Jan97.html> (date of access: 21.02.2025).
12. Masayo Y., Hiroyuki T., Computer system for reading/writing system configuration using I/O instruction. 1999. URL: <https://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=US&NR=5963738> (date of access: 01.03.2025).
13. 82093AA I/O Advanced Programmable Interrupt Controller (IOAPIC). URL: <https://web.archive.org/web/20161130153145/http://download.intel.com/design/chipsets/datashts/29056601.pdf> (date of access: 01.03.2025).
14. Warfield N. Know Your Enemy and Yourself: A Deep Dive on CISA KEV. 2022. URL: <https://eclipsium.com/blog/know-your-enemy-and-yourself-a-deep-dive-on-cisa-kev> (date of access: 01.03.2025).
15. Surve, P.P., Brodt, O., Yampolskiy, M., Elovici, Y., and Shabtai, A. SoK: Security Below the OS — A Security Analysis of UEFI. 2023. ArXiv. abs/2311.03809.
16. Finding LogoFAIL: The Dangers of Image Parsing During System Boot. 2023. URL: <https://www.binarly.io/blog/finding-logofail-the-dangers-of-image-parsing-during-system-boot> (date of access: 05.03.2025).
17. UEFI Secure Boot in Linux. Intel Developer Zone. 2013. URL: <https://www.intel.com/content/dam/develop/external/us/en/documents/sf13-stts002-100p-820238.pdf> (date of access: 05.03.2025).
18. Costan V., and Devadas S. Intel SGX explained. IACR Cryptology ePrint Archive. 2016. 086.
19. Paj A., Javed M. O., Nurmi J., Savimäki J., McGillion B., and Brumley B. B. SoK: A Systematic Review of TEE Usage for Developing Trusted Applications. *Proceedings of the 18th International Conference on Availability, Reliability and Security*. 2023. pp. 1–15.
20. Zhao S., Zhang Q., Qin Y., Feng W., and Feng D. Minimal kernel: an operating system architecture for TEE to resist board level physical attacks. *22nd International Symposium on Research in Attacks, Intrusions and Defenses (RAID 2019)*. 2019. pp. 105–120.
21. Zhang Z., Zhang X., Li Q., Sun K., Zhang Y., Liu S., Liu Y., and Li X. See through Walls: Detecting Malware in SGX Enclaves with SGX-Bouncer. *Proceedings of the 2021 ACM Asia Conference on Computer and Communications Security*. 2021.
22. Schwarz M., Weiser S., and Gruss D. Practical Enclave Malware with Intel SGX. *International Conference on Detection of intrusions and malware, and vulnerability assessment*. 2019.
23. BlackLotus UEFI bootkit: Myth confirmed. ESET. 2023. URL: <https://www.welivesecurity.com/2023/03/01/blacklotus-uefi-bootkit-myth-confirmed> (date of access: 07.03.2025).
24. CVE-2022-21894: Bypassing Windows Secure Boot with BCD settings. 2022. URL: <https://github.com/Wack0/CVE-2022-21894> (date of access: 07.03.2025).
25. McKee D., Giannaris Y., Ortega C., Shrobe H., Payer M., Okhravi H., and Burow N. Preventing Kernel Hacks with HAKC. *NDSS Symposium*. 2022.

Bogdiuk M. O. Analysis of the Boot Process of Computer Systems Based on the x86-64 Architecture for Vulnerabilities and Identification of Measures to Protect Against Them.

The article presents a systematic analysis of the boot process of modern x86-64 computer systems, with a focus on identifying potential vulnerabilities that may emerge during its initialization. It explores methods of firmware modification, low-level execution modes, and weaknesses in integrity verification procedures. Particularly, most attention is devoted to attack vectors designed to circumvent built-in security. Based on a comprehensive review of recent scientific literature, the study identifies potential vulnerabilities of the components of the boot sequence and suggests ways to isolate them from potential threats (e.g. dangerous applications). The study outlines directions for future research in the domain of secure system boot processes.

Keywords: boot process, firmware modification, vulnerability, bypass built-in security, isolation.

References

1. Desktop Operating System Market Share Worldwide (2025). Retrieved from <https://gs.statcounter.com/os-market-share/desktop/worldwide>
2. Tanenbaum, A. S., & Bos, H. (2014). *Modern operating systems (4th ed.)*. Pearson Education.
3. Minnich, R., Shun Lim, G., O'Leary, R., Koch, C., & Chen, X. (2017). Replace your exploit-ridden firmware with a Linux kernel. Retrieved from https://www.mikrocontroller.net/attachment/353216/Linuxcon_2017_NERF.pdf
<https://www.youtube.com/watch?v=iffTJ1vPCSo>
4. Intel® Active Management Technology: Privacy Statement. (2023). Retrieved from <https://www.intel.com/content/www/us/en/privacy/intel-active-technology-vpro.html>
5. AMD Processor Vulnerabilities. (2023). AMD Security Bulletin AMD-SB-7009. Retrieved from <https://www.amd.com/en/resources/product-security/bulletin/amd-sb-7009.html>
6. AMD Embedded Processors Vulnerabilities — February 2024. AMD Security Bulletin AMD-SB-5001. Retrieved from <https://www.amd.com/en/resources/product-security/bulletin/amd-sb-5001.html>
7. Economou, K. (2021). Vulnerability Report. AMD, 08/04/2021. Retrieved from https://dl.packetstormsecurity.net/2109-Advisories/AMD_PSP_Vulnerability_Report.pdf
8. TPM Sniffing. (2021). Retrieved from <https://blog.scr.t.ch/2021/11/15/tpm-sniffing>
9. Stealing the BitLocker Key from a TPM. Retrieved from <https://astralvx.com/stealing-the-bitlocker-key-from-a-tpm>
10. Moghimi, D., Sunar, B., Eisenbarth, T., & Heninger, N. (2019). TPM-FAIL: TPM meets Timing and Lattice Attacks. ArXiv, abs/1911.05673.
11. Robert R. Collins. (1997). Intel's System Management Mode. *Dr. Dobb's Journal*. Retrieved from <https://www.rcollins.org/ddj/Jan97/Jan97.html>
12. Masayo, Y., Hiroyuki, T. (1999). Computer system for reading/writing system configuration using I/O instruction. Retrieved from <https://worldwide.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=US&NR=5963738>
13. Intel Corporation. 82093AA I/O Advanced Programmable Interrupt Controller (IOAPIC). Retrieved from <https://web.archive.org/web/20161130153145/http://download.intel.com/design/chipsets/datashts/29056601.pdf>
14. Warfield, N. (2022). Know Your Enemy and Yourself: A Deep Dive on CISA KEV. Retrieved from <https://eclipsium.com/blog/know-your-enemy-and-yourself-a-deep-dive-on-cisa-kev>
15. Surve, P. P., Brodt, O., Yampolskiy, M., Elovici, Y., & Shabtai, A. (2023). SoK: Security Below the OS — A Security Analysis of UEFI. ArXiv, abs/2311.03809.
16. Binarly Research Team. (2023). Finding LogoFAIL: The Dangers of Image Parsing During System Boot. Retrieved from <https://www.binarly.io/blog/finding-logofail-the-dangers-of-image-parsing-during-system-boot>
17. Intel Corporation. UEFI Secure Boot in Linux. Intel Developer Zone (2013). Retrieved from

- <https://www.intel.com/content/dam/develop/external/us/en/documents/sf13-stts002-100p-820238.pdf>
18. Costan, V., & Devadas, S. (2016). Intel SGX explained. IACR Cryptology ePrint Archive, 2016, 086.
 19. Paju, A., Javed, M. O., Nurmi, J., Savimäki, J., McGillion, B., & Brumley, B. B. (2023). SoK: A Systematic Review of TEE Usage for Developing Trusted Applications. In *Proceedings of the 18th International Conference on Availability, Reliability and Security*.
 20. Zhao, S., Zhang, Q., Qin, Y., Feng, W., & Feng, D. (2019). Minimal kernel: an operating system architecture for TEE to resist board level physical attacks. In *22nd International Symposium on Research in Attacks, Intrusions and Defenses (RAID 2019)*.
 21. Zhang, Z., Zhang, X., Li, Q., Sun, K., Zhang, Y., Liu, S., Liu, Y., & Li, X. (2021). See through Walls: Detecting Malware in SGX Enclaves with SGX-Bouncer. In *Proceedings of the 2021 ACM Asia Conference on Computer and Communications Security*.
 22. Schwarz, M., Weiser, S., & Gruss, D. (2019) Practical Enclave Malware with Intel SGX. In *International Conference on Detection of intrusions and malware, and vulnerability assessment*.
 23. ESET Research. (2023). BlackLotus UEFI bootkit: Myth confirmed. ESET. Retrieved from <https://www.welivesecurity.com/2023/03/01/blacklotus-uefi-bootkit-myth-confirmed>
 24. CVE-2022-21894: Bypassing Windows Secure Boot with BCD settings. (2022). Retrieved from <https://github.com/Wack0/CVE-2022-21894>
 25. McKee, D., Giannaris, Y., Ortega, C., Shrobe, H., Payer, M., Okhravi, H., & Burow, N. (2022). Preventing Kernel Hacks with HAKC. *NDSS Symposium*.

Одержано 10.04.2025

УДК 004.04

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).149-165](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).149-165)**Н. Бойко**

Національний університет «Львівська політехніка»,

доцент кафедри системи штучного інтелекту,

канд екон. наук

nataliya.i.boyko@lpnu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6962-9363>

ГРАФОВІ АЛГОРИТМИ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ: ВИДІЛЕННЯ ЗВ'ЯЗКОВИХ КОМПОНЕНТ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ГРУПУВАННЯ

У даній роботі досліджено методи кластеризації даних, зокрема алгоритм BFS (обхід у ширину) та його оптимізацію для підвищення ефективності. Кластеризація є важливим етапом аналізу великих обсягів інформації, що використовується у різних сферах, зокрема у медичних дослідженнях, аналізі ринкових тенденцій та машинному навчанні. Метою дослідження було виявлення сильних і слабких сторін BFS у задачах групування даних, а також розробка методів його покращення. Для цього було проаналізовано особливості різних підходів до кластеризації, визначено їхні переваги та недоліки, а також проведено порівняння BFS із іншими методами, такими як KNN (метод k найближчих сусідів). Результати дослідження показали, що BFS є ефективним для групування даних, особливо у випадках, коли об'єкти мають природну кластерну структуру. Основними перевагами алгоритму є його здатність працювати з розрідженими даними, обробляти аномальні значення (викиди) та легко адаптуватися до різних порогових значень. Однак основним недоліком залишається його обмежена масштабованість при обробці великих наборів даних. Проаналізовано що BFS у модифікованій формі є потужним інструментом для кластеризації, який може бути застосований у різних сферах аналізу даних. Однак подальші дослідження необхідні для розширення його можливостей, зокрема шляхом впровадження механізмів автоматичного налаштування параметрів, а також адаптації алгоритму для роботи з великими даними за допомогою розподілених обчислень.

Ключові слова: кластеризація, BFS, машинне навчання, оптимізація алгоритму, аналіз даних, викиди, порогове значення.

1. Вступ. У сучасну епоху цифрових технологій автоматизація процесів відіграє ключову роль у різних сферах діяльності. Від найпростіших математичних обчислень у калькуляторах до складних алгоритмів, що імітують людське мислення, кожне завдання вимагає чіткої програмної реалізації. Людина приймає рішення, спираючись на багаторічний досвід та сформовані нейронні зв'язки. Для того щоб навчити машину виконувати подібні дії, необхідно розробляти алгоритми, які дозволяють розбивати складні завдання на підзадачі [1, 4].

Один із поширених підходів до автоматизації — це класифікація та кластеризація даних. Ці методи широко застосовуються у різних галузях, зокрема в медицині, де необхідно групувати препарати, аналізи та дослідження. Особливо актуальним є аналіз даних, пов'язаних із пандемією COVID-19, що охопила весь світ і спричинила серйозні соціальні та медичні наслідки.

У даній роботі розглядається можливість застосування алгоритмів кластеризації для аналізу даних про перебіг хвороби. Дослідження ґрунтується на наборі даних, що містить інформацію про ускладнення, які перенесли пацієнти

з COVID-19. Основне завдання – здійснити кластеризацію пацієнтів за ступенем тяжкості перебігу захворювання з використанням графових алгоритмів. Особливу увагу буде приділено алгоритму пошуку в ширину (BFS) та його ефективності для даного типу задач [1, 14].

Метою роботи є експериментальне визначення ефективності використання алгоритму BFS для кластеризації записів у датасеті, що містить дані про перебіг COVID-19.

Для досягнення поставленої цілі в роботі розглядаються певні завдання дослідження:

1. Ознайомитися з існуючими методами кластеризації та їх застосуванням у медичній сфері.
2. Дослідити графові алгоритми кластеризації та оцінити їх переваги.
3. Проаналізувати можливості використання алгоритму BFS для групування даних.
4. Виконати експериментальне дослідження кластеризації пацієнтів за складністю перебігу COVID-19.
5. Оцінити результати кластеризації та зробити висновки щодо доцільності використання BFS у таких задачах.

2. Аналіз літературних джерел. Основні концепції кластеризації розглянуті Володимиром Естівіл-Кастро у своїх дослідженнях. Автор зазначає, що різноманітність алгоритмів кластеризації пояснюється неоднозначністю самого поняття «кластер». Оскільки очікуваний результат кластеризації залежить від конкретної задачі, існує багато моделей і підходів, які можуть бути ефективними для одних випадків, але не працювати в інших [4, 6].

Еніл Джейн сформулював загальноприйняті вимоги до кластеризації, згідно з якими:

1. Об'єкти всередині одного кластера повинні бути максимально схожими.
2. Об'єкти різних кластерів повинні суттєво відрізнятися.
3. Вимірювання подібності має бути чітким і практично обґрунтованим.

Дослідники Руй Ксу та Дональд Вунш описують стандартний процес кластеризації, який складається з наступних етапів [5]:

1. Витяг і вибір найбільш репрезентативних ознак.
2. Розробка алгоритму кластеризації відповідно до специфіки задачі.
3. Оцінка отриманих результатів і перевірка коректності алгоритму.
4. Інтерпретація кластеризації для отримання практичних висновків.

Окремий напрям у кластеризації становлять графові алгоритми. Вперше ідея випадкових графів була запропонована Гілбертом у 1959 році. Він розглядав процес генерації рівномірного випадкового графа з n вершинами, у якому кожне можливе ребро додається з імовірністю p . У таких графах розподіл ступенів підпорядковується пуассонівському закону, а утворення щільних кластерів малоімовірне через рівномірний розподіл зв'язків [2, 3].

У подальших дослідженнях з'явилися узагальнення моделі Гілберта, такі як l -розподіл. У цій моделі граф формується з $n = l * k$ вершинами, розбитими на l груп по k елементів. Імовірність існування зв'язку між вершинами в межах однієї групи є вищою (p), ніж між вершинами з різних груп (q). Такі моделі використовуються для знаходження природних кластерів у графах [7].

МакШеррі розглядає графову кластеризацію також у контексті розфарбовування графів, що є важливим для вирішення проблеми розподілу ресурсів [8].

За словами Калупапаті, головною перевагою графових алгоритмів кластеризації є можливість ефективного моделювання взаємозв'язків між об'єктами. Графові методи кластеризації належать до методів навчання без учителя, оскільки вони не потребують заздалегідь відомих міток класів. Вони дозволяють виявляти природні структури в даних на основі певних міри подібності [9, 11].

Таким чином, літературний аналіз показує, що графові методи кластеризації є ефективними для групування даних у різних сферах, включаючи медицину. Вони можуть бути застосовані для аналізу перебігу захворювань, зокрема COVID-19, що робить їх перспективним інструментом для медичної аналітики.

3. Методи та засоби дослідження. Основний принцип кластеризації полягає в тому, що об'єкти всередині одного кластера мають бути максимально схожими між собою, тоді як об'єкти з різних кластерів повинні суттєво відрізнятися. Головною відмінністю цього методу від класифікації є те, що кількість груп не задається наперед, а формується в ході виконання алгоритму [12].

Процес кластеризації передбачає кілька ключових етапів:

- Вибір вибірки — визначення набору об'єктів, які підлягають кластеризації.
- Визначення характеристик — встановлення змінних, за якими оцінюються об'єкти, а за потреби — нормалізація їх значень.
- Обчислення схожості — визначення міри подібності між об'єктами.
- Застосування методу кластеризації — поділ об'єктів на групи відповідно до обраного алгоритму.
- Інтерпретація результатів — аналіз отриманих кластерів та їх візуалізація.

Після проведення первинного аналізу результати можуть бути уточнені шляхом зміни метрики або методу кластеризації для досягнення оптимального результату.

Щоб об'єднати об'єкти в групи, необхідно спочатку оцінити ступінь їх подібності. Для цього кожному об'єкту задається вектор характеристик, який може містити як числові, так і категорійні ознаки. У багатьох випадках перед обчисленням відстаней проводиться нормалізація значень, що дозволяє всі характеристики мати однаковий вплив на результати кластеризації [13].

Окремий напрямок у кластеризації базується на теорії графів. У таких методах множина об'єктів представляється у вигляді графа, де вершини відповідають об'єктам, а ребра — зв'язкам між ними, вага яких відповідає мірам подібності. Графові методи дозволяють зручно візуалізувати структуру даних та мають високу гнучкість для роботи з різними типами об'єктів.

Суть таких алгоритмів у тому, що вибірка об'єктів представляється як графа $G = (V, E)$, вершинам якого відповідають об'єкти, а ребра мають вагу, рівний «відстанню» між об'єктами. Перевагою графових алгоритмів кластеризації є наочність, відносна простота реалізації та можливість внесення різних удосконалень, що ґрунтуються на геометричних міркуваннях. Основними алгоритмами є алгоритм виділення зв'язкових компонентів, алгоритм побудови мінімального покриваючого (остовного) дерева та алгоритм пошарової кластеризації [14].

Серед основних графових алгоритмів виділяють метод виділення зв'язкових компонентів — видаляє ребра, які перевищують певний поріг відстані, залишаючи тільки найближчі зв'язки. Внаслідок цього утворюються окремі компоненти, які й визначають кластери. Вибір відповідного порогу здійснюється на основі аналізу розподілу відстаней між об'єктами [15].

В алгоритмі виділення зв'язкових компонент задається вхідний параметр R і в графі видаляються всі ребра, для яких відстань більше R . Сполученими залишаються лише найближчі пари об'єктів. "Сенс алгоритму у тому, щоб підібрати таке значення R , яке буде у діапазоні всіх «відстаней», при яких граф «розвалиться» на кілька зв'язкових компонент". Отримані компоненти є кластери.

Для вибору параметра R зазвичай будується гістограма розподілів попарних відстаней. У завданнях з добре вираженою кластерною структурою даних на гістограмі буде два піки — один відповідає внутрішньо кластерним відстаням, другий — міжкластерним відстані. Параметр R підбирається із зони мінімуму між цими піками. У цьому керувати кількістю кластерів з допомогою порога відстані досить складно [10, 16].

Метод мінімального покриваючого дерева — на початковому етапі створюється мінімальне дерево, що охоплює всі вершини, після чого поступово видаляються найбільш довгі зв'язки, що дозволяє виокремити окремі групи. Наприклад, на графі, що містить дев'ять об'єктів, після побудови мінімального покриваючого дерева можна видалити зв'язок між двома найбільш віддаленими вершинами, що приведе до розбиття графа на два окремих кластери. Надалі цей процес можна продовжувати, поділяючи отримані групи на дрібніші.

Нехай задано множину об'єктів X , що складається з n елементів: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де кожен об'єкт x_i описується множиною характеристик, представлених у вигляді вектора у d -вимірному просторі: $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id}) \in R^d$.

Завдання кластеризації полягає у знаходженні такого розбиття множини X на k підмножин (кластерів) C : $C = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, де $C_i \subset X$ та виконуються наступні умови:

1. Повне покриття: $\bigcup_{i=1}^k C_i = X$, тобто кожен об'єкт має бути віднесений до якогось кластера.
2. Взаємна виключність (для чіткої кластеризації): $C_i \cap C_j = \emptyset, \forall i \neq j$, тобто кожен об'єкт належить лише одному кластеру (у випадку нечіткої кластеризації ця умова не виконується).
3. Оптимальність кластеризації: необхідно мінімізувати певну функцію вартості (критерій кластеризації), яка залежить від відстаней між об'єктами всередині кластерів.

У випадку використання графового підходу кластеризації, множину об'єктів X можна представити у вигляді неорієнтованого зваженого графа: $G = (V, E, W)$, де: $V = X$ — множина вершин (об'єкти), E — множина ребер між об'єктами, $W: E \rightarrow R^+$ — функція ваги, яка визначає міру подібності між об'єктами.

Завдання кластеризації у цьому випадку полягає у розбитті графа на підграфи $G_1, G_2, \dots, G_k$, такі що:

1. Об'єкти всередині одного кластера мають бути тісно зв'язані (мінімальна

внутрішньокластерна відстань): $\sum_{e \in E(C_i)} W(e)$ — максимальна, де $E(C_i)$ — множина ребер всередині кластера C_i .

- Об'єкти з різних кластерів мають бути слабо зв'язані (максимальна між-кластерна відстань): $\sum_{e \in E(C_i, C_j)} W(e)$ — мінімальна, для $i \neq j$, де $E(C_i, C_j)$ — множина ребер між кластерами C_i та C_j .

Одним з варіантів алгоритму є кластеризація за допомогою мінімального остовного дерева (MST), яка передбачає:

- Побудову мінімального покриваючого дерева T для графа G .
- Видалення найбільш довгих ребер у MST, що призводить до утворення підграфів, які стають кластерами.

Іншим підходом є кластеризація на основі зв'язності компонентів, де:

- вибирається поріг R ,
- видаляються всі ребра з вагою $W(e) > R$,
- отримані зв'язні компоненти визначають кластери.

Таким чином, задача кластеризації може бути сформульована як оптимізаційна задача розбиття множини об'єктів на підмножини з урахуванням міри подібності та обраного критерію якості. Використання графових методів дозволяє ефективно враховувати структуру даних, що є особливо корисним для аналізу складних взаємопов'язаних об'єктів.

Реалізація графового алгоритму для вирішення задачі передбачає побудову окремих компонент зв'язності за таким алгоритмом, що наступний об'єкт потраплятиме в інший кластер, якщо деяка відстань до усіх об'єктів поточного кластеру переходить межу порогу. Тож задачу можна сформулювати наступним чином: побудуємо повний зв'язний граф для усіх вершин, а далі видалимо усі ребра, чия вага перевищує порогове значення. Таким чином наш повний граф розколеться на окремі компоненти зв'язності та кожна компонента являтиме собою окремий кластер.

Задача проста у реалізації, доки не постає питання ресурсозатратності. Такі операції потребують значних витрат як часу, так і пам'яті. Тому варто розглянути можливі варіанти оптимізації.

Перший крок — відмова від побудови повного графа, замінивши цей процес динамічним підходом. Замість створення всієї структури наперед, ми будемо працювати безпосередньо з датасетом, оновлюючи лише списки переглянутих і непереглянутих об'єктів. Це дозволить суттєво зменшити витрати ресурсів [9, 13].

Розглянемо, як працює цей алгоритм на прикладі вибірки даних A :

- Обираємо будь-який елемент a з $A[0]$ для перевірки.
- Визначаємо множину його сусідів і перевіряємо, чи відповідають вони заданому пороговому значенню.
- Додаємо знайдених сусідів у список для подальшої перевірки.
- Позначаємо поточний об'єкт як перевірений.
- Оновлюємо список ідентифікаторів, видаляючи всі елементи, які вже були відвідані або поставлені в чергу на перевірку.
- Обираємо наступний елемент для аналізу і повторюємо кроки 1–4.

Такий підхід реалізує алгоритм обходу графа в ширину, але без явного формування графової структури з визначеним набором ребер.

Попри те, що алгоритм уже виглядає оптимізованим, він усе ще має недоліки, які впливають на швидкість роботи. Основні проблеми виникають у двох випадках:

1. Коли спостерігається велике скупчення об'єктів у невеликій області.
2. Коли в датасеті є поодинокі викиди — значення, що значно відрізняються від інших.

Для подальшої оптимізації алгоритму впровадимо два додаткові кроки:

- Нормалізація даних — приведення значень до єдиної шкали для коректного аналізу.
- Фільтрація за процентилям — вибір тільки тих значень, які перевищують певний поріг.

Запускаючи алгоритм на модифікованому наборі даних, відфільтруємо два типи об'єктів: ті, що вже належать до кластеризованих груп та викиди, які значно відрізняються від загальної вибірки. У кожному з цих випадків алгоритм відноситиме об'єкт до найближчого кластера.

Для перевірки коректності роботи алгоритму використаємо візуалізацію результатів на графіку.

Процес тестування складався з таких етапів:

- Візуалізація початкового набору даних (було використано кілька груп елементів, щоб оцінити, чи алгоритм правильно відтворить їхнє групування).
- Об'єднання всіх даних у єдиний датасет.
- Відображення сформованого датасету.
- Запуск основного алгоритму.
- Візуалізація отриманого результату.

Розглянемо три приклади тестування.

У першому з них створимо чотири набори точок у тривимірному просторі, які утворюватимуть сферичні групи.

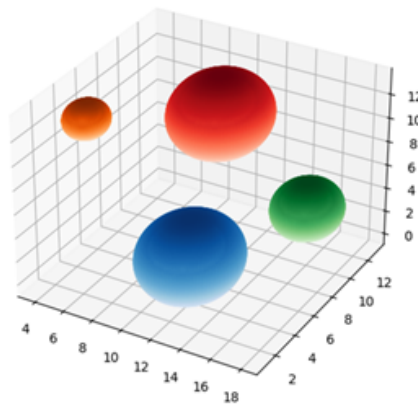


Рис. 1. Візуалізація вхідного датасету.

Кожна сфера налічує близько 10 000 тис. точок. Тож величина цілого датасету становить $\sim 40\,000$ тис. елементів, що не є малим числом. У випадку формування повного графу, було отримано $\frac{n(n-1)}{2} = \sim 799\,980\,000 = \sim 10^9$ ребер. Тож тепер проробені кроки оптимізації доводять необхідність своєї присутності.

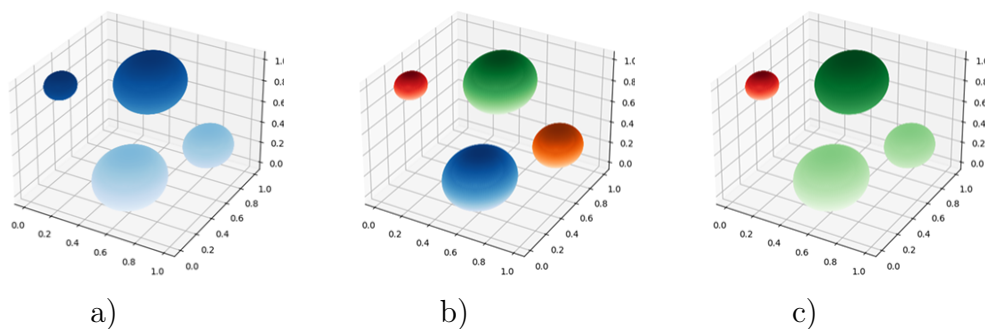


Рис. 2. а) Візуалізація всього датасету; б) Візуалізація результату кластеризації датасету: з пороговим значенням рівним 1; с) — з пороговим значенням рівним 10.

На Рис. 2 можна спостерігати вплив заданого порогового значення на результат кластеризації. Можна стверджувати наступне, що зі зменшенням порогового значення кількість кластерів зростатиме.

У другому прикладі спробуємо протестувати цікавіший приклад, візьмемо ті ж сфери, проте помістимо одну всередину іншої.

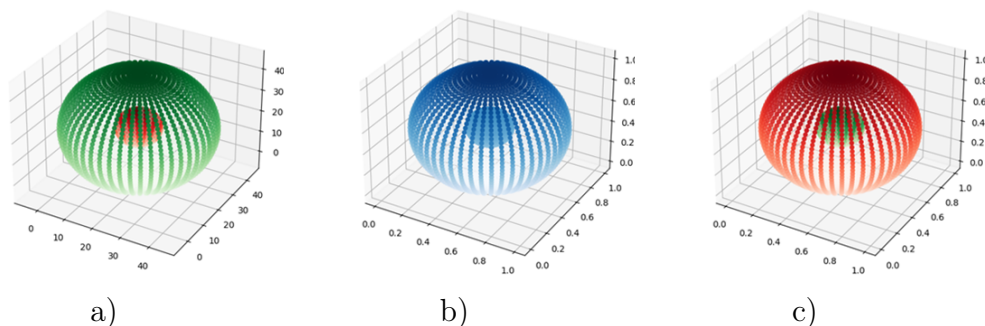


Рис. 3. а) Візуалізація вхідного датасету; б) Візуалізація цільного датасету; с) Візуалізація результату кластеризації датасету.

Як можна побачити, алгоритм успішно виконує поставлену задачу. Оскільки основним критерієм групування є відстань між точками, вибране порогове значення відіграє ключову роль. У нашому випадку воно достатньо мале, щоб сформувати суцільну поверхню сфери як єдиний кластер, але водночас недостатньо велике, щоб об'єднати внутрішню і зовнішню сфери в один загальний кластер.

Останнім прикладом розглянемо випадок з кількома нетиповими елементами для датасету.

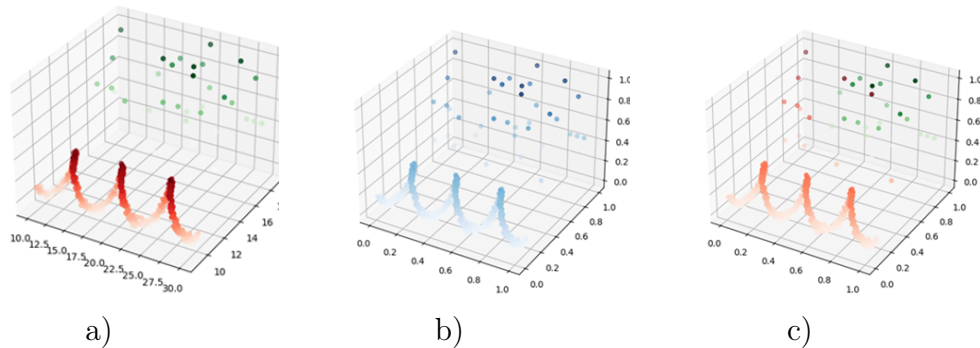


Рис. 4. а) Візуалізація вхідного датасету; б) Візуалізація цільного датасету; в) Візуалізація результату кластеризації датасету.

Можна стверджувати, що алгоритм виправдав очікування.

4. Експерименти. Приступимо до покрокового виконання завдання, де для виконання задачі, було обрано датасет “Covid_19.xlsx” з онлайн ресурсу kaggle.com. Дослідимо даний набір даних на Рис. 5.

```
df.info()
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
DatetimeIndex: 3308 entries, 2020-09-20 11:23:15 to 2021-04-05 03:18:16
Data columns (total 13 columns):
 #   Column                                Non-Null Count  Dtype
---  -
 0   Age                                  3303 non-null   object
 1   Gender                              3297 non-null   object
 2   Region                              3286 non-null   object
 3   Do you smoke?                       3269 non-null   object
 4   Have you had Covid`19 this year?    3305 non-null   object
 5   IgM level                           3232 non-null   object
 6   IgG level                           3248 non-null   object
 7   Blood group                         3252 non-null   float64
 8   Do you vaccinated influenza?        3294 non-null   object
 9   Do you vaccinated tuberculosis?     3303 non-null   object
10   Have you had influenza this year?   3299 non-null   object
11   Have you had tuberculosis this year? 3299 non-null   object
12   Maximum body temperature           1533 non-null   float64
dtypes: float64(2), object(11)
```

Рис. 5. Інформація про датасет.

Як видно на Рис. 5 в наборі даних наявні поля, що містять інформацію про стать людини, її вік, максимальну температуру тіла, результат тесту на ковід антигени тощо. Більшість даних збережені у типі «object».

	Age	Gender	Region	Do you smoke?	Have you had Covid`19 this year?	IgM level	IgG level	Blood group	Do you vaccinated influenza?	Do you vaccinated tuberculosis?	Have you had influenza this year?	Have you had tuberculosis this year?	Maximum body temperature
2020-09-20 11:23:15	40-65	Female (Жінка)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Maybe (можливо)	<0.9 (negative/негативний)	0.9-1.1 (indefinable/невизначений)	2.0	Yes	Yes	No	No	38.1
2020-09-20 11:23:15	23-40	Female (Жінка)	Ukraine, Chernivtsi	No	Yes	>1.1 (positive/позитивний)	0.9-1.1 (indefinable/невизначений)	2.0	No	Yes	No	No	37.0
2020-09-20 11:23:15	23-40	Female (Жінка)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Maybe (можливо)	<0.9 (negative/негативний)	<0.9 (negative/негативний)	2.0	No	Yes	Yes	No	37.8
2020-09-20 11:23:15	40-65	Male (Чоловік)	Ukraine, Chernivtsi	No	No	<0.9 (negative/негативний)	<0.9 (negative/негативний)	2.0	No	Yes	No	No	NaN

Рис. 6. Візуалізація перших рядків датасету.

Для того аби перейти до етапу кластеризації, для кожного пацієнта потрібно обчислити деяку величину, що визначатиме числове значення складності протікання коронавірусу. Реалізуємо алгоритм перетворення значень рядків в числові еквіваленти та виведемо перші декілька екземплярів на Рис. 7:

<pre> <Pupil> Info: • 48-65 • female • not smoking • IgM - 0.9 • IgG - 1 • hadn't influenza • hadn't tuberculosis • max temperature - 36.6 • SEQUEL'S LEVEL - 12.870000000000003 • cluster - (-1) <Pupil> Info: • 23-48 • female • not smoking • IgM - 1.1 • IgG - 1 • hadn't influenza • hadn't tuberculosis • max temperature - 36.6 • SEQUEL'S LEVEL - 9.680000000000001 • cluster - (-1) </pre>	<pre> <Pupil> Info: • 23-48 • female • not smoking • IgM - 0.9 • IgG - 0.9 • had influenza • hadn't tuberculosis • max temperature - 36.6 • SEQUEL'S LEVEL - 17.820000000000004 • cluster - (-1) <Pupil> Info: • 48-65 • male • not smoking • IgM - 0.9 • IgG - 0.9 • hadn't influenza • hadn't tuberculosis • max temperature - 36.6 • SEQUEL'S LEVEL - 0.0 • cluster - (-1) </pre>
--	---

Рис. 7. Візуалізація опрацьованих записів датасету.

Тепер, маючи датасет із визначеними числовими рівнями захворюваності, можемо перейти до процесу кластеризації. На Рис. 7 представлено результати програмного аналізу записів датасету. Усі поля отримують певне числове значення, яке використовується у формулі для розрахунку SEQUEL's LEVEL — змінної, що визначає рівень тяжкості захворювання.

На початковому етапі всім екземплярам присвоюється кластер (-1) , а в процесі кластеризації цей показник оновлюється відповідно до актуального кластерного номера. Запустимо алгоритм, представлений вище, на наборі даних для кластеризації записів (Рис. 8).

<pre> Processed 4.55% ids 1 clusters found Processed 16.67% ids 2 clusters found Processed 22.73% ids 3 clusters found Processed 31.82% ids 4 clusters found Processed 43.94% ids 5 clusters found Processed 50.00% ids 6 clusters found Processed 53.03% ids </pre>	<pre> 7 clusters found Processed 57.58% ids 8 clusters found Processed 63.64% ids 9 clusters found Processed 69.70% ids 10 clusters found Processed 78.79% ids 11 clusters found Processed 81.82% ids 12 clusters found Processed 87.88% ids 13 clusters found </pre>
--	---

Рис. 8. Візуалізація консольного виводу результату кластеризації.

Як зображено на Рис. 8 з поточними вхідними параметрами порогового значення отримали 13 кластерів. Після виконання кластеризації формується новий датасет з двома додатковими колонками: рівнем складності захворювання та номером кластера приналежності. Виведемо оновлений датасет для огляду результату (Рис. 9).

Для дослідження роботи алгоритму використаємо різні вхідні порогові значення. При вхідних параметрах D , $tolerance$, $threshold = 1000, 3, 1$ в результаті

```
df_processed = pd.read_csv('clustered_covid.csv')
```

df_processed.head(20)

	Date time	Age	Gender	Region	Do you smoke?	Have you had Covid-19 this year?	IgM level	IgG level	Blood group	Do you vaccinated influenza?	Do you vaccinated tuberculosis?	Have you had influenza this year?	Have you had tuberculosis this year?	Maximum body temperature	SEQUEL'S LEVEL	Cluster
0	2020-09-20 11:23:15	40-65	Female (Жінка)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Maybe (можливо)	<0.9 (negative/ негативний)	0.9-1.1 (indefinable/ невизначений)	2.0	Yes	Yes	No	No	38.1	12.8700	4
1	2020-09-20 11:23:15	23-40	Female (Жінка)	Ukraine, Chernivtsi	No	Yes	>1.1 (positive/ позитивний)	0.9-1.1 (indefinable/ невизначений)	2.0	No	Yes	No	No	37.0	9.6800	2
2	2020-09-20 11:23:15	23-40	Female (Жінка)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Maybe (можливо)	<0.9 (negative/ негативний)	<0.9 (negative/ негативний)	2.0	No	Yes	Yes	No	37.8	17.8200	5
3	2020-09-20 11:23:15	40-65	Male (Чоловік)	Ukraine, Chernivtsi	No	No	<0.9 (negative/ негативний)	<0.9 (negative/ негативний)	2.0	No	Yes	No	No	NaN	0.0000	1
4	2020-09-20 11:23:15	16-22	Male (Чоловік)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Yes	>1.1 (positive/ позитивний)	<0.9 (negative/ негативний)	1.0	No	Yes	Yes	No	37.4	14.8500	4
5	2020-09-20 11:23:15	16-22	Male (Чоловік)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	No	<0.9 (negative/ негативний)	<0.9 (negative/ негативний)	2.0	Yes	Yes	No	No	NaN	0.0000	1
6	2020-09-20 11:23:15	16-22	Male (Чоловік)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	No	<0.9 (negative/ негативний)	<0.9 (negative/ негативний)	1.0	No	No	No	No	NaN	0.0000	1
7	2020-09-20 11:23:15	23-40	Female (Жінка)	Ukraine, Lviv (Львів)	No	Maybe	<0.9 (negative/ негативний)	0.9-1.1 (indefinable/ невизначений)	1.0	No	Yes	Maybe (можливо)	No	38.3	19.8000	6

Рис. 9. Візуалізація перших рядків кластеризованого датасету.

одержали 14 кластерів. Спробуємо змінити їх на D , $tolerance$, $threshold = 100, 3, 1$.

```
Processed 68.18% ids
1 clusters found
Processed 77.27% ids
2 clusters found
Processed 86.36% ids
3 clusters found
```

Рис. 10. Візуалізація консольного виводу результату кластеризації.

Тепер змінимо наступним чином: D , $tolerance, threshold = 1000, 3, 3$.

```
Processed 6.06% ids
1 clusters found
Processed 50.00% ids
2 clusters found
Processed 53.03% ids
3 clusters found
Processed 57.58% ids
4 clusters found
Processed 65.15% ids

5 clusters found
Processed 71.21% ids
6 clusters found
Processed 78.79% ids
7 clusters found
Processed 81.82% ids
8 clusters found
Processed 87.88% ids
9 clusters found
```

Рис. 11. Візуалізація консольного виводу результату кластеризації.

При першій зміні отримали 3 кластери, при наступній 9. Як видно на Рис. 11, кластеризація відбувається поступово. Відсоток опрацьованих записів датасету збільшується, охоплюючи все більшу кількість рядків. Також прослідковується

наступна тенденція поділу: при збільшенні порогового значення, кількість кластерів зменшується.

Проаналізуємо результати прискорення, яких вдалося досягти за допомогою оптимізації, описаної в частині програмної реалізації. На етапі графової кластеризації будуть брати участь лише та частина записів, які після нормалізації даних є представниками скупчення максимально подібних екземплярів.

Даний алгоритм графової кластеризації має оцінку таку ж як і алгоритм BFS. Складність стандартного обходу в ширину — $O(n + m)$, де n — кількість вершин (еквівалент кількості записів), m — кількість ребер у графі. З урахуванням того що звичайний датасет на початку формує повний граф, то m можна прирівняти до $\frac{n(n-1)}{2}$. А отже загальну складність графової кластеризації доцільно представити у вигляді — $O(n^2)$.

Тож, давайте виведемо наступну інформацію у термінал: кількість вхідних записів, кількість записів, що братимуть участь в етапі графової кластеризації.

```
Record`s number: 3308
Records for clustering: 66
```

Рис. 12. Скрін-фіксація кількості записів для опрацювання/кластеризації.

Як видно на Рис. 12 на вхід було отримано набір даних розмірністю в 3308 рядків, проте на етап кластеризації потрапило лише 66. Порівняємо обчислювальну складність, передбачалось $O(n^2) = 3308^2 \sim 10\,942\,864 \sim 10^7$, а в результаті оптимізації отримали $O(n^2) = 66^2 \sim 4\,356 \sim 10^3$.

Ефективність пророблених кроків є очевидною і при таких даних, проте для більш об'єктивної оцінки згенеруємо штучний датасет розмірністю 100 000 та зафіксуємо результати (Рис. 13).

1 clusters found Processed 45.45% ids	6 clusters found Processed 58.29% ids	11 clusters found Processed 68.45% ids	16 clusters found Processed 78.07% ids
2 clusters found Processed 49.20% ids	7 clusters found Processed 60.43% ids	12 clusters found Processed 70.05% ids	17 clusters found Processed 80.75% ids
3 clusters found Processed 53.48% ids	8 clusters found Processed 62.03% ids	13 clusters found Processed 72.19% ids	18 clusters found Processed 83.42% ids
4 clusters found Processed 55.61% ids	9 clusters found Processed 64.17% ids	14 clusters found Processed 74.33% ids	19 clusters found Processed 87.70% ids
5 clusters found Processed 57.22% ids	10 clusters found Processed 65.78% ids	15 clusters found Processed 75.94% ids	20 clusters found

Рис. 13. Візуалізація консольного виводу результату кластеризації.

Як зображено на Рис. 13 наведену кількість даних кластеризувало на 20 окремих кластерів. Перейдемо до складності:

```
Record`s number: 100000
Records for clustering: 187
```

Рис. 14. Скрін-фіксація кількості записів для опрацювання/кластеризації.

Тож як зафіксовано на Рис. 14 з 100000 записів до алгоритму перейшло лиш 187. Оцінимо складність, передбачалось $O(n^2) = 100\,000^2 \sim 10^{10}$, а в результаті

оптимізації було отримали $O(n^2) = 187^2 \sim 34\,969 \sim 10^5$. Отримані результати явно свідчать про доцільність застосування реалізованої оптимізації.

5. Результати. Проаналізуємо результати експериментів загальних методів кластеризації наведених вище.

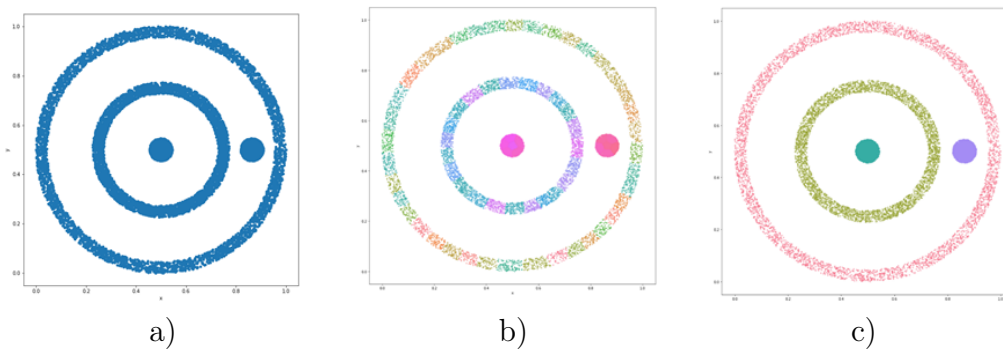


Рис. 15. а) Візуалізація вхідних даних, конкатенованих в суцільний датасет; б) Результат кластеризації Affinity Propagation; c) Результат кластеризації на BFS.

На Рис. 15 представлено вхідні дані для застосування алгоритму, як приклад один з методів кластеризації та безпосередньо кластеризація на BFS.

Усі застосовані алгоритми дали різні результати, це цілком пояснюється тим, що кожен з них при створенні був спрямований на вирішення якоїсь конкретної моделі. Деякі алгоритми застосовуються для посереднього групування, на вхід потребують початкові дані наповнення кластерів та використовують їх для подальших кроків, деяким потрібно задати вхідну кількість кластерів тощо.

Можна зробити висновок, що в ході постановки конкретної задачі, можна визначити тип очікуваного результату, та, відштовхуючись від нього, підбирати алгоритм.

У даному випадку, коли задачею є групування в окремі кластера екземплярів з мінімальною відстанню між собою та відсутністю будь-якого вхідного розподілу, ідеально вписується використання алгоритму графової кластеризації. Так як саме цей алгоритм надає можливість оптимально розподілити об'єкти на групи по наближенню їх числового значення.

Аналізуючи результати отримані при проведенні експериментів, в першу чергу хочеться зазначити, що алгоритм таки справився з поставленою задачею. Проаналізуємо вплив вхідних параметрів на результат (Табл. 1).

Як можна спостерігати в Табл. 1, в залежності від вхідних параметрів, а саме величини порогового значення, одержували різні результати. Чим менше порогове значення надавалось, тим дрібніший поділ на кластера був отриманий. Можна стверджувати, що параметр порогового значення є прямим об'єктом впливу на подрібнення результату кластеризації.

Якщо говорити про ефективність проведеної оптимізації, щодо даного алгоритму, то було досягнуто високої швидкодії виконання (Табл. 2).

Тож за отриманими результатами в Табл. 2, можна відстежити значне пришвидшення роботи алгоритму, а при опрацюванні наборів даних великих масштабів — це є важливим критерієм.

Варто зазначити й те, що даний алгоритм підлягає удосконаленню. А саме,

Таблиця 1.

Таблиця залежності результату від вхідних параметрів

К-ть записів	Вхідні параметри			Отриманий результат
N	D	Tolerance	threshold	Кількість кластерів
3308	1000	3	1	14
3308	1000	3	4	3
3308	1000	3	3	9
100 000	1000	3	3	20
100 000	1000	3	1	34

Таблиця 2.

Порівняння алгоритмів по складності по часу виконання

К-ть записів	Очікувана складність звичайної BFS кластеризації	Складність оптимізованого алгоритму
3308	10^7	10^3
100 000	10^{10}	10^5
100 000 000	10^{16}	10^8

його можна імплементувати до алгоритму оптимального підбору порогового значення, що зробить цей алгоритм абсолютно самостійним. Тобто на вхід даватиметься лише набір деяких екземплярів для кластеризації, а вже алгоритм групуватиме їх за різними пороговими значеннями та оцінювати результат поточного значення. В залежності від того, порогове значення змінюватиметься, та буде відбуватися його оцінка, і так до моменту отримання оптимального результату.

Обговорення результатів. У процесі дослідження було проведено детальний аналіз алгоритмів кластеризації та їх застосування в задачах групування даних. Основний акцент був зроблений на використанні BFS як базового алгоритму кластеризації, зокрема його модифікації для підвищення ефективності. Однією з ключових знахідок стало застосування додаткової оптимізації за допомогою алгоритму KNN, що дозволило покращити точність і швидкодію.

Отримані результати підтвердили, що BFS добре справляється із завданнями групування, особливо у випадках, коли дані мають чітко виражені кластери. Водночас, алгоритм демонструє певні обмеження при роботі з високорозмірними даними або з нерівномірним розподілом кластерів.

Важливою перевагою представленого підходу є його здатність ефективно працювати з поодинокими точками-викидами, що є суттєвою проблемою для багатьох методів кластеризації. Використання додаткового етапу нормалізації та фільтрації даних сприяло точнішій ідентифікації таких об'єктів та їх коректній класифікації.

Оптимізація BFS дозволила зменшити часові витрати на виконання кластеризації, однак залишаються випадки, коли алгоритм може втрачати ефективність, зокрема при роботі з великими наборами даних. Використання адаптивного порогового значення могло б додатково покращити продуктивність.

Результати дослідження відкривають кілька напрямів для подальшого вдосконалення методу:

1. Розширення алгоритму для роботи з великими обсягами даних. Незважаючи на оптимізацію, BFS все ще має певні обмеження в масштабованості. Дослідження можливостей паралельної обробки або використання розподілених обчислень може значно підвищити продуктивність.
2. Інтеграція з іншими методами машинного навчання. Поєднання алгоритмів кластеризації з нейронними мережами або методами глибокого навчання може покращити якість аналізу даних та їхню адаптивність до складних структур.
3. Автоматичний підбір порогового значення. Наразі вибір порогового значення залишається евристичним. Розробка методу для автоматичного визначення оптимального порогу дозволила б значно покращити точність кластеризації та її універсальність.
4. Аналіз ефективності на реальних даних. Використання алгоритму для кластеризації медичних або соціальних даних може допомогти оцінити його практичну цінність та адаптувати методику до реальних сценаріїв.

Загалом, дослідження підтвердило ефективність модифікованого алгоритму BFS у задачах кластеризації. Оптимізація дозволила покращити швидкість роботи та якість кластеризації, проте залишаються відкриті питання щодо його масштабованості та автоматичного налаштування параметрів. Подальші дослідження у цьому напрямі можуть зробити метод ще більш гнучким та ефективним у широкому спектрі застосувань.

6. Висновки. В ході дослідження обраної теми було проаналізовано різні алгоритми кластеризації. На основі даних досліджень можна зробити наступні висновки.

По-перше, в жодному випадку не можна виділити один найкращий алгоритм. Кожен з існуючих варіантів уваги і знаходить своє застосування виходячи з поставлених вимог та обмежень.

Для детального розбору та аналізу був обраний алгоритм кластеризації BFS. Як було описано детально в програмній реалізації самого алгоритму, було частково модифіковано основний алгоритм, в першу чергу для загальної оптимізації швидкодії кластеризації. До того ж друга частина оптимізації звертається до алгоритму кластеризації KNN. Це доводить про тісний взаємозв'язок між алгоритмами.

Якщо ж аналізувати даний спосіб реалізації, то було отримано швидкий та якісний алгоритм, який знає як справлятися з викидами та легко абстрагується до різних порогових значень. Тож якщо коротко, то:

- Графовий алгоритм кластеризації оптимально справляється з групуванням записів в наборі даних.
- З використанням оптимізації методу, можна досягти високої швидкодії алгоритму.
- Можлива оптимізація кластеризації на BFS — імплементація алгоритму для оптимального підбору вхідного порогового значення.

Отже, проведене дослідження підтверджує ефективність запропонованого методу, а також демонструє можливості його адаптації до різних типів задач

кластеризації. Отже, проведене дослідження підтверджує ефективність запропонованого методу, а також демонструє можливості його адаптації до різних типів задач кластеризації.

Подяка. Дослідження створено в рамках проекту, що фінансується Національним фондом досліджень України, зареєстрованим № 2021.01/0103 «Методи та засоби дослідження маркерів старіння та їх впливу на постковідні ефекти для подовження працездатного періоду», який виконується на кафедрі систем штучного інтелекту Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій Національного університету «Львівська політехніка».

Список використаної літератури

1. Sarker A., Shamim S. M., Shahiduz Zama Dr. Md., Mustafizur Rahman Md. Employee's performance analysis and prediction using K-means clustering & decision tree algorithm. *Global Journal of Computer Science and Technology*. 2018. Vol. 18. pp 1–4.
2. Saxena A., Prasad M., Gupta A., Bharill N., Patel O. P., Tiwari A., and Lin C. T. A review of clustering techniques and developments. *Neurocomputing*. 2017. Vol. 26. pp. 664–681.
3. Hossain M. Z., Akhtar M. N., Ahmad R. B., and Rahman M. A dynamic K-means clustering for data mining. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*. 2016. Vol. 13, No. 2. pp. 521–526. DOI: <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i2.pp521-526>
4. Yim O., Ramdeen K. T. Hierarchical Cluster Analysis: Comparison of Three Linkage Measures and Application to Psychological Data. *The Quantitative Methods for Psychology*. 2015. Vol. 11, No. 1. pp. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.20982/tqmp.11.1.p008>
5. Sneath P., Sokal R. Hierarchical Cluster Analysis: Comparison of Three Linkage Measures and Application to Psychological Data. *The Quantitative Methods for Psychology*. 2015. Vol. 11, No. 1. pp. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.20982/tqmp.11.1.p008>
6. Fraley C., Raftery A. E. How Many Clusters? Which Clustering Method? Answers Via Model-Based Cluster Analysis. *Technical Report. Department of Statistics University of Washington*. 1998. Vol. 41, No. 8. pp. 578–588. DOI: <https://doi.org/10.1093/comjnl/41.8.578>
7. Murtagh F. A survey of recent advances in hierarchical clustering algorithms which use cluster centers. *Computer Journal*. 2020. Vol. 26, No. 4, pp. 354–359.
8. Ptitsyn A., Hulver M., Cefalu W., York D., and Smith S. R. Unsupervised clustering of gene expression data points at hypoxia as possible trigger for metabolic syndrome. *BMC Genomics*. 2016. Vol. 7, No. 1. 318. DOI: <https://doi.org/10.1186/1471-2164-7-318>
9. Tung A. K., Hou J., Han J. Spatial clustering in the presence of obstacles. *Proceedings 17th International Conference on Data Engineering : IEEE. Heidelberg : Germany, 02–06 April, 2001*. pp. 359–367. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICDE.2001.914848>
10. Boehm C., Kailing K., Kriegel H., Kroeger P. Density connected clustering with local subspace preferences. *Fourth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'04) : IEEE. Brighton : UK, 01–04 November, 2004*. pp. 27–34. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICDM.2004.10087>
11. Boyko N., Hetman S., Kots I. Comparison of Clustering Algorithms for Revenue and Cost Analysis. *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2021)*. Lviv : Ukraine. 2021. Vol. 1. pp. 1866–1877. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2870/paper136.pdf> (date of access: 09.12.2024).
12. Procopiuc C. M., Jones M., Agarwal P. K., Murali T. M. A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering. *ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data*. Madison, Wisconsin : USA, 4–6 June, 2002. pp. 418–427.
13. Boyko N. Application of mathematical models for improvement of “cloud” data processes organization. *Mathematical Modeling and Computing*. 2016. Vol. 3, No. 2. pp. 111–119. DOI: <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.111>
14. Slamet C., Rahman A., Ramdhani M. A., and Darmalaksana W. Clustering the verses of the Holy Qur'an using K-means algorithm. *Asian Journal of Information Technology*. 2016. Vol. 15, No. 24. pp. 5159–5162. DOI: <http://doi.org/10.3923/ajit.2016.5159.5162>
15. Boyko N., Kmetyk-Podubinska K., Andrusiak I. Application of Ensemble Methods of Strengthening in Search of Legal Information. *Lecture Notes on Data Engi-*

- neering and Communications Technologies*. 2021. Vol. 77. pp. 188–200. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_13
16. Bekiros S., Nguyen D. K., Sandoval J. L., and Uddin G. S. Information diffusion, cluster formation and entropy-based network dynamics in equity and commodity markets. *European Journal of Operational Research*. 2017. Vol. 256, No. 3. pp. 945–961. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.052>

Boyko N. Graph-Based Clustering Algorithms: Connected Component Detection and Optimization of Grouping Methods.

This paper explores data clustering methods, focusing on the BFS (Breadth-First Search) algorithm and its optimization to enhance efficiency. Clustering is a crucial step in analyzing large volumes of data and is widely used in various fields, including medical research, market trend analysis, and machine learning. The main objective of the study was to identify the strengths and weaknesses of BFS in data grouping tasks and develop methods for its improvement. To achieve this, different clustering approaches were analyzed, their advantages and disadvantages were identified, and BFS was compared with other methods, such as KNN (k-Nearest Neighbors). The research results demonstrate that BFS is effective for data grouping, especially when objects exhibit a natural cluster structure. The key advantages of the algorithm include its ability to work with sparse data, handle outliers, and easily adapt to different threshold values. However, its primary limitation is its scalability when processing large datasets. The analysis confirms that the modified BFS is a powerful clustering tool applicable in various data analysis domains. However, further research is required to expand its capabilities, particularly by developing mechanisms for automatic parameter tuning and adapting the algorithm for large-scale data processing through distributed computing.

Keywords: clustering, BFS, machine learning, algorithm optimization, data analysis, outliers, threshold value.

References

1. Sarker, A., Shamim, S. M., Shahiduz Zama, Dr. Md., & Mustafizur Rahman Md. (2018). Employee's performance analysis and prediction using K-means clustering & decision tree algorithm. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 18, 1–4.
2. Saxena, A., Prasad, M., Gupta, A., Bharill, N., Patel, O. P., Tiwari, A., & Lin, C. T. (2017). A review of clustering techniques and developments. *Neurocomputing*, 26. 664–681.
3. Hossain, M. Z., Akhtar, M. N., Ahmad, R. B., & Rahman, M. (2016). A dynamic K-means clustering for data mining. *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, 13(2), 521–526. <https://doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i2.pp521-526>
4. Yim, O., & Ramdeen, K. T. (2015). Hierarchical Cluster Analysis: Comparison of Three Linkage Measures and Application to Psychological Data. *The Quantitative Methods for Psychology*, 11(1), 8–21. <https://doi.org/10.20982/tqmp.11.1.p008>
5. Sneath, P., & Sokal, R. (2015). Hierarchical Cluster Analysis: Comparison of Three Linkage Measures and Application to Psychological Data. *The Quantitative Methods for Psychology*. 11(1), 8–21. <https://doi.org/10.20982/tqmp.11.1.p008>
6. Fraley, C., & Raftery, A. E. (1998). How Many Clusters? Which Clustering Method? Answers Via Model-Based Cluster Analysis. *Technical Report. Department of Statistics University of Washington*, 41(8), 578–588. <https://doi.org/10.1093/comjnl/41.8.578>
7. Murtagh, F. (2020). A survey of recent advances in hierarchical clustering algorithms which use cluster centers. *Computer Journal*, 26(4), 354–359.
8. Ptitsyn, A., Hulver, M., Cefalu, W., York, D., & Smith, S. R. (2016). Unsupervised clustering of gene expression data points at hypoxia as possible trigger for metabolic syndrome. *BMC Genomics*, 7(1), 318. <https://doi.org/10.1186/1471-2164-7-318>
9. Tung, A. K., Hou, J., & Han, J. (02–06 April, 2001). Spatial clustering in the presence of obstacles. In *Proceedings 17th International Conference on Data Engineering*. Heidelberg: Germany. <https://doi.org/10.1109/ICDE.2001.914848>

10. Boehm, C., Kailing, K., Kriegel, H., & Kroeger, P. (01–04 November, 2004). Density connected clustering with local subspace preferences. In *Fourth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'04)*. Brighton: UK. <https://doi.org/10.1109/ICDM.2004.10087>
11. Boyko, N., Hetman, S., & Kots, I. (2021). Comparison of Clustering Algorithms for Revenue and Cost Analysis. In *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Systems (COLINS 2021)*. Lviv: Ukraine. Retrieved from <https://ceur-ws.org/Vol-2870/paper136.pdf>
12. Procopiuc, C. M., Jones, M., Agarwal, P. K., & Murali, T. M. (4–6 June, 2002). A Monte Carlo algorithm for fast projective clustering. In *ACM SIGMOD Intern. conf. on management of data*. Madison, Wisconsin: USA.
13. Boyko, N. (2016). Application of mathematical models for improvement of “cloud” data processes organization. *Mathematical Modeling and Computing*, 3(2), 111–119. <https://doi.org/10.23939/mmc2016.02.111>
14. Slamet, C., Rahman, A., Ramdhani, M. A., & Darmalaksana, W. (2016). Clustering the verses of the Holy Qur'an using K-means algorithm. *Asian Journal of Information Technology*, 15(24), 5159–5162. <http://doi.org/10.3923/ajit.2016.5159.5162>
15. Boyko, N., Kmetyk-Podubinska, K., & Andrusiak, I. (2021). Application of Ensemble Methods of Strengthening in Search of Legal Information. *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*, 77, 188–200. https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_13
16. Bekiros, S., Nguyen, D. K., Sandoval, J. L., & Uddin, G. S. (2017). Information diffusion, cluster formation and entropy-based network dynamics in equity and commodity markets. *European Journal of Operational Research*, 256(3), 945–961. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.06.052>

Одержано 14.02.2025

UDC 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).166-177](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).166-177)**A. Y. Vasko¹, A. Y. Bryla²**

¹ Uzhhorod National University,
 PhD student of Systems Analysis and Optimization Theory
oleksandr.vasko@uzhnu.edu.ua
 ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-1527-505X>

² Uzhhorod National University,
 Associate Professor of Systems Analysis and Optimization Theory,
 Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

ADAPTIVE LEARNING RATE FOR CNNMVN

Adaptive learning rate techniques are widely used to enhance the training efficiency of neural networks by improving convergence speed and accuracy while decreasing the risk of getting stuck in local minima or saddle points. In this paper, we introduce adaptive learning rate approaches for the Complex-Valued Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neurons (CNNMVN), a fully complex-valued neural network that processes complex inputs using complex weights and complex-valued activation functions. Unlike traditional real-valued neural networks, CNNMVN employs an error-sharing principle rather than gradient-based optimization, eliminating the local minima problem and allowing for more flexible adjustments in the learning rate.

We propose two adaptive learning rate (ALR) strategies tailored for CNNMVN. The first approach modifies the learning rate coefficients in the error-correction formulas, while the second one adjusts the normalization parameters in the error-backpropagation and error-correction processes. Both methods dynamically adapt the learning rate based on validation accuracy.

Results indicate that adaptive learning rate significantly improves convergence speed and accuracy, particularly when combined with a self-adaptive learning rate. Furthermore, our study highlights the impact of normalization factors on learning dynamics and explores training scenarios where normalization is minimized or removed entirely.

Our findings demonstrate that ALR methods enhance CNNMVN training performance, providing a robust framework for optimizing learning rates in complex-valued neural networks.

Keywords: convolutional neural networks, complex-valued networks, multivalued neurons, CNNMVN, MLMVN, image recognition, frequency domain.

1. Introduction. Deep learning has experienced significant progress with the development of advanced neural network architectures and training methodologies. One of such architectures is the Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neuron (CNNMVN). It was first introduced in [1], its modified learning algorithm was presented in [2] and its further deep analysis was presented in [3]. CNNMVN retains the traditional CNN topology while being capable of directly processing complex-valued data, making it particularly useful for applications requiring the handling of magnitude and phase relationships, such as signal processing, radar imaging, and medical diagnostics.

An essential factor influencing the performance of CNNMVN is the choice of the learning rate, which directly impacts convergence speed and generalization capability. In real-valued neural networks various adaptive learning rate techniques

have been proposed to improve training efficiency, such as AdaGrad [4], RMSprop [5], Adam [6], and AdaBelief [7]. These algorithms dynamically adjust the learning rate based on past gradient information. There also is adaptive learning rate techniques based on model complexity [8] and training loss [9]. Similarly, in the domain of complex-valued neural networks, adaptive learning rate techniques have been explored, including complex-valued extensions of Adam

Recent advancements in adaptive learning rate techniques for complex-valued neural networks have introduced several novel approaches aimed at improving convergence efficiency and stability. One such approach is the complex-valued extension of the Adam optimization algorithm [10], which adapts the well-established Adam method to the complex domain, allowing for more effective gradient-based learning in complex-valued neural networks. Another significant contribution is the Adaptive Orthogonal Gradient Descent (AOGD) algorithm [11], specifically designed for fully complex-valued neural networks. The Complex-Valued Adaptive Learning Rate Tuning (CALRT) algorithm [12] has also been proposed to dynamically determine the optimal complex-valued step size (or learning rate) at each iteration of the training process. Additionally, a training algorithm with a selectable search direction for complex-valued feedforward neural networks has been introduced [13]. This method allows for adaptive modifications in the search direction, improving learning efficiency and reducing the risk of stagnation during training.

CNNMVN is a fully complex-valued neural network: its inputs, weights, and activation functions are all complex-valued. Unlike traditional gradient-based methods, CNNMVN learning algorithm is based on the error-sharing principle. This fundamental distinction allows CNNMVN to avoid issues related to local minima, which are commonly encountered in traditional complex-valued gradient descent approaches. As a result, adaptive learning rate algorithms designed for real-valued neural networks (RVNNs) are not suitable for CNNMVN. In this paper, we present several approaches for adaptive learning rates that enhance accuracy and improve convergence speed.

This paper is structured as follows. In Section 2 and 3, we recall some fundamentals related to the error-backpropagation and error-correction algorithms adapted for CNNMVN. Section 4 explores various adaptive learning rate approaches for CNNMVN. In Section 5, we evaluate the effectiveness of these approaches through experimental results on benchmark datasets, demonstrating improvements in convergence speed and model performance. Finally, Section 6 provides conclusions and outlines potential directions for future research in adaptive learning strategies for CNNMVN.

2. CNNMVN error backpropagation process. As it was said before, the learning algorithm in CNNMVN is based on the error-sharing principle [14]. It means that the error produced by each neuron should be proportionally distributed among the neurons connected to it.

Let us briefly recall some fundamentals about CNNMVN error backpropagation [2].

Let us have CNNMVN with G convolutional layers, $M - 1$ hidden layers and one output layer. Let each convolutional layer consists of H_g kernels $g = \overline{1, G}$. Let the input image x (or a feature map in the case of convolutional layers from the 2^{nd} one to the G^{th} one) be of size $a_g \times b_g \times d_g$. Then the kernel size in g^{th} convolutional

layer is of size $r_g \times r_g \times d_g$ ($r_g < \min(a_g, b_g)$). The m^{th} hidden layer in the fully connected part contains N_m neurons ($m = \overline{1, M-1}$), and the output layer contains N_M neurons.

Now the global errors of the network δ_{nM}^* should be calculated as

$$\delta_{nM}^* = D_{nM} - Y_{nM}, \quad n = \overline{1, N_M}. \quad (1)$$

The global error then should be shared among all neurons that participate in its formation. Thus, the errors of the output layer neurons are

$$\delta_{nM} = \frac{1}{N_{M-1} + 1} \delta_{nM}^*, \quad n = \overline{1, N_M}. \quad (2)$$

To backpropagate the output neurons errors for the neurons in hidden layers we should use the following rule:

$$\delta_{im} = \frac{1}{q_{m-1}} \sum_{n=1}^{N_{m+1}} \delta_{n,m+1} (w_i^{n,m+1})^{-1}, \quad i = \overline{1, N_m}, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (3)$$

where δ_{im} is the error of the i^{th} neuron in the m^{th} layer and the normalization factor $q_{m-1} = N_{m-1} + 1$ ($m = \overline{2, M-1}$) is the number of all neurons in the $m-1^{st}$ layer plus one (note that for the first layer ($m = 1$) we use $q_1 = 1$ because there are no preceding layers and no neurons to share the error with). The errors of the first hidden layer neurons are

$$\delta_{i1} = \frac{1}{F} \sum_{n=1}^{N_2} \delta_{n,2} (w_i^{n,2})^{-1}, \quad i = \overline{1, N_1}, \quad (4)$$

where F stands for the number of inputs which is equal to the length of flattened feature maps.

Then the errors of the neurons in the first hidden layer should be backpropagated to the last convolutional layer kernels as

$$\delta_{ij}^{hG} = \frac{1}{Q_G} \sum_{n=1}^{N_1} \delta_{n,1} (w_{ijh}^{n,1})^{-1}, \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, a_G - r_G + 1, \\ j &= 1, \dots, b_G - r_G + 1, \\ Q_G &= r_G \cdot r_G \cdot c_G, \end{aligned} \quad (5)$$

where δ_{ij}^{hG} is the error of the feature map pixel with coordinates i, j , produced by the h^{th} kernel of the last (G^{th}) convolutional layer; $\delta_{n,1}$ are the errors of the first hidden layer neurons and $w_{ijh}^{n,1}$ are these neurons' weights that are responsible for processing the ijh^{th} input; Q_G is the normalization factor which should be equal to the size of the kernel in the last convolutional layer.

Now the errors of the kernels in the $g-1^{st}$ convolutional layer are:

$$\delta_{ij}^{l,g-1} = \frac{1}{Q_{g-1}} \sum_{h=1}^{H_g} \sum_{t=1}^{T_g} \delta^{h,g,t} (w_t^{h,g})^{-1}, \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, a_g - r_g + 1, \\ j &= 1, \dots, b_g - r_g + 1, \\ Q_g &= r_g \cdot r_g \cdot c_g, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\delta_{ij}^{l,g-1}$ are the errors of the feature map obtained by the l^{th} kernel in the $g-1^{st}$ convolutional layer ($l = \overline{1, H_{g-1}}$); $\delta^{h,g,t}$ and $w_t^{h,g}$ are the errors of the output and the

weights of the h^{th} kernel in the g^{th} convolutional layer that process the ij^{th} pixel in the t^{th} convolution respectively; Q_{g-1} is a normalization factor which is equal to the size of the kernel in the $g-1^{th}$ layer (note that $Q_2 = 1$ as there is no further error backpropagation from the first convolutional layer).

In [3] were also introduced the error backpropagation rules for convolutional layers with self-adaptive learning rate. Hence, the feature map errors of the last convolutional layer (5) with additional normalization can be found as follows:

$$\delta_{ij}^{hG} = \frac{1}{Q_G |c_{ij}^{h,G}|} \sum_{n=1}^{N_1} \delta_{n,1} (w_{ijh}^{n,1})^{-1}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, a_g - r_g + 1, \\ j = 1, \dots, b_g - r_g + 1, \\ Q_G = r_G \cdot r_G \cdot c_G, \end{array} \quad (7)$$

and the errors of the feature maps in preceding convolutional layers (6) with additional normalization factor are

$$\delta_{ij}^{l,g-1} = \frac{1}{Q_{g-1} |c_{ij}^{h,g-1}|} \sum_{h=1}^{H_g} \sum_{t=1}^{T_g} \delta^{h,g,t} (w_t^{h,g})^{-1}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, a_g - r_g + 1, \\ j = 1, \dots, b_g - r_g + 1, \\ Q_g = r_g \cdot r_g \cdot c_g, \end{array} \quad (8)$$

where $|c_{ij}^{h,g}|$ is the absolute value of the convolved pixel with coordinates i, j in the h^{th} kernel in the g^{th} convolutional layer ($h = \overline{1, H_g}, g = \overline{2, G}$).

3. CNNMVN Error correction. The error correction in CNNMVN should be done in the same manner as suggested in [1] and [3]. The error correction for convolutional layer kernels implies the same idea of the batch LLS-based learning algorithm [15] for MLMVN and the error correction for fully-connected layers is identical to the error correction rule in MLMVN.

Let us have an $a \times b \times d$ input image and a kernel whose size is $r \times r \times d$ ($r < \min(a, b)$). Let K be the number of the convolutional windows in an image through which a convolutional kernel is sliding. Thus $K = (a - r + 1) \times (b - r + 1)$. Each convolutional window can be flattened and represented as an input vector to a kernel. Then, using a matrix-vector notation the convolutional operation can be represented as

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,1,1} \\ \vdots \\ w_{r,r,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_K \end{bmatrix} \quad (9)$$

where x_i is the flattened input vector ($i = \overline{1, K}$); w are the kernel weights and z_i are the convolved pixels. According to a batch algorithm and as it was shown in [1], after calculating the errors for all z_i we can represent adjustments, which should be added to the weights to correct them and obtain the following

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w_{1,1,1} \\ \vdots \\ \Delta w_{r,r,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_K \end{bmatrix} \quad (10)$$

where $\Delta w_{u,v,j}$ are the adjustments terms for kernel weights ($u, v = \overline{1, r}$ and $j = \overline{1, d}$) and δ_i are the respective errors to be corrected ($i = \overline{1, K}$). We can rewrite (8) as

$$X \cdot \Delta w = \delta, \quad (11)$$

where X consists of K flattened inputs. Thus, system of equations (8) (or (9), which is the same) for unknowns $(\Delta w_{1,1,1}, \dots, \Delta w_{r,r,d})$ which is typically overdetermined ($K \gg r \cdot r \cdot d$) can be solved in a similar way

$$\Delta w = X^\dagger \cdot \delta, \quad (12)$$

where $X^\dagger$ is the Moore-Penrose inversion of X , that is a pseudoinverse matrix of X . Finally, the adjusted weights of the kernel are

$$\tilde{W} = W + C \cdot \Delta w, \quad (13)$$

where W and $\tilde{W}$ are the weighting vectors before and after correction, «+» is a component-wise addition, and C stands for learning rate.

When the wights of the kernels in convolutional layers are adjusted, we should to adjust the errors in the fully-connected layers. It should be done as follows:

$$\tilde{W} = W + \frac{C}{p+1} \delta X^*. \quad (14)$$

And the rule with a self-adaptive learning rate is

$$\tilde{W} = W + \frac{C}{(p+1)|z|} \delta X^*, \quad (15)$$

where W and $\tilde{W}$ are the weighting vectors before and after correction, «+» denotes component-wise addition, C is the learning rate (in general it should be a complex number, but in all practical applications it is usually equal to 1), X^* is the vector of reciprocal inputs, p is the number of inputs, and $|z|$ stands for the absolute value of the weighted sum before adjustment (this is a self-adaptive part of the learning rate, and it is significant in MLMVN learning [14, 16]).

4. Adaptive learning rate. Adaptive learning rate (ALR) techniques play a crucial role in real-valued neural networks (RVNNs) by dynamically adjusting the learning rate during training. The primary objectives of ALR in RVNNs include increasing the learning rate to accelerate convergence, reducing training time, and mitigating issues related to local minima and saddle points. By optimizing the learning rate, these networks enhance their training efficiency and overall performance.

However, unlike RVNNs, the learning rule in CNNMVN is not formulated as an optimization problem. Instead, it follows a unique "error-sharing principle," which distributes the error among connected neurons rather than relying on gradient-based updates. As a result, CNNMVN does not depend on traditional gradient descent methods for weight adjustments, making standard ALR techniques designed for RVNNs unsuitable.

A key advantage of CNNMVN's learning rule is that it inherently avoids the problems of local minima and saddle points. Since the learning process does not involve an optimization-based approach, there are no constraints on increasing the learning rate because there is no risk of overshooting or jumping over the minima of an optimization function. This flexibility allows CNNMVN to achieve faster convergence without the risk of getting trapped in undesirable minima, a common issue in gradient-based learning frameworks.

Despite this advantage, the error-sharing principle introduces a challenge when backpropagating through layers with a large number of neurons or inputs. In such cases, the distributed errors become significantly smaller as they propagate through the network. This reduction in error magnitude leads to very small weight adjustment terms, ultimately slowing down the learning process in deeper or more complex network structures.

To address this issue, an adaptive learning rate mechanism can be incorporated into CNNMVN to accelerate training in layers where error values are particularly small. By dynamically increasing the learning rate in these layers, the network can counteract the decreasing weight updates and maintain a more efficient training process. This approach ensures that CNNMVN benefits from faster convergence while preserving the advantages of its non-gradient-based learning rule.

We have designed two adaptive learning rate rules for CNNMVN to enhance training efficiency. The algorithm for both ALR approaches follows these steps. Initially, the learning rate is set to 1. After every K learning samples, we perform a model validation step. Based on the validation accuracy, the learning rate is adjusted accordingly.

The first ALR rule focuses on reducing the normalization factors in the error-backpropagation (2)–(6) and the error-correction formulas (11)–(13). Similar to the first approach, this method maintains a uniform learning rate across all layers but specifically targets the normalization factors as an additional multiplier C in the denominator. In such a case decreasing the learning rate C leads to decrease of the normalization factors. Hence, the network effectively amplifies weight adjustments in layers where the error values are significantly small, thereby accelerating the learning process. The adaptive learning rate coefficients for this approach are determined as

$$C = 4^{\left(\frac{\# \text{ of Mismatched samples}}{\# \text{ of All samples}} - 1\right)}. \quad (16)$$

The second approach involves adjusting the learning rate coefficient within the error-correction formulas (12), (13), and (14). In this method, the learning rate remains consistent across all layers, ensuring a uniform update mechanism throughout the network. The learning rate coefficient can vary within a pre-determined range $[1, A]$ and can be adjusted as follows

$$C = A + 1 - A \cdot 4^{\left(\frac{\# \text{ of Mismatched samples}}{\# \text{ of All samples}} - 1\right)}. \quad (17)$$

Both approaches aim to reduce the slowdown caused by the error-sharing principle, ensuring that CNNMVN achieves faster convergence while maintaining its unique learning framework.

5. Simulation results. To evaluate the effectiveness of the proposed adaptive learning rate methods, we performed experiments using the MNIST dataset of handwritten digits [17]. The dataset consists of 60 000 training and 10 000 testing samples 28×28 pixels each. The network architecture consisted of a simple topology with one convolutional layer containing 16 kernels of size 5×5 , followed by a hidden layer with 256 neurons and an output layer with 10 neurons. The soft margins border was equal to $\pi/8$. The training process lasted for 10 epochs. All experiments were performed with the same random seed to compare the dynamic of the learning process.

During training, validation was performed every 1 000 training samples, and the learning rate was adjusted accordingly based on validation accuracy. This ensured that the learning rate dynamically adapted to improve training efficiency.

We provide graphical results demonstrating the testing accuracy for different configurations. Figure 1 presents the learning process with default learning rates and normalization factors as defined by (1)–(6), alongside the same learning process with the self-adaptive (ABS) normalization in the convolutional layers determined by (7) and (8). The results indicate that ABS normalization for the convolutional layer does not significantly impact learning accuracy or convergence time.

To evaluate the first type of adaptive learning rate, we analyzed the default normalization factors of the neural network and identified two key normalization factors that influence the learning process. Based on the model topology and input image size, the convolutional layer produces 16 feature maps of size 24×24 , which are subsequently flattened into a vector of size 1×9216 and passed to the fully connected part of the network. During error backpropagation, the error of the first fully connected layer neurons is distributed among all inputs and, consequently, divided by 9216. Additionally, in the error-correction process, the obtained error is further divided by 9216 to distribute it among all weights. This process leads to a significant reduction in the adjustment terms, thereby slowing down the overall learning speed.

To resolve this issue, we applied ALR (15) to the error-backpropagation process while setting the normalization factor in the error-correction process in (13) to 1. Figure 2 illustrates the learning rates for the first type of normalization compared to the default learning process. This approach was tested with and without ABS normalization. The results demonstrate that learning accuracy increases significantly from the beginning of the first epoch in both cases. However, while the model without ABS normalization experiences instability and divergence, the model with ABS normalization maintains stable learning throughout the training process.

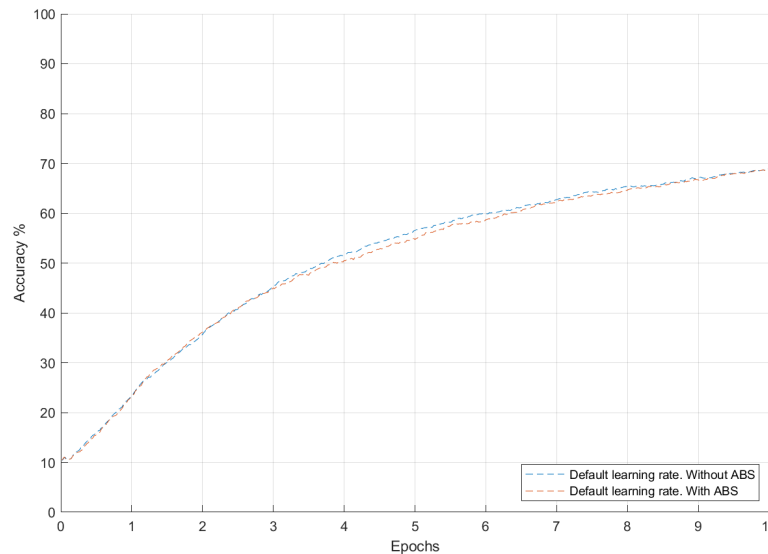


Figure 1. Accuracy of the model with default normalization factors and learning rates.

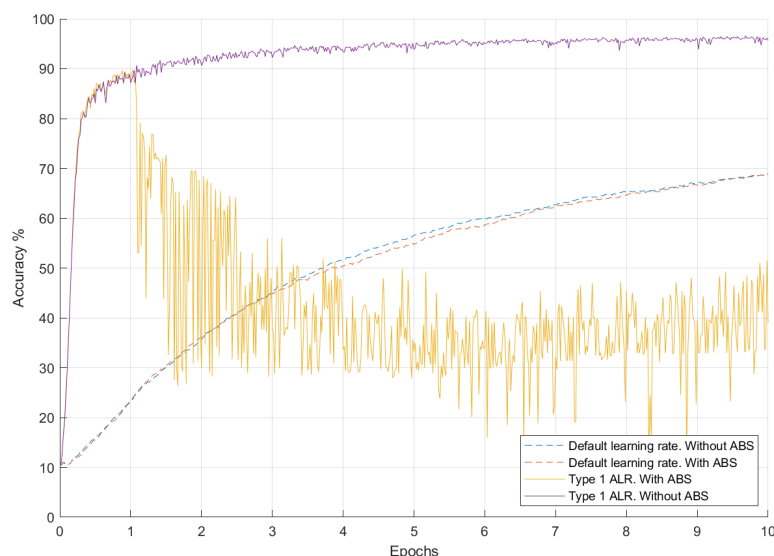


Figure 2. Accuracy of the model with the first ALR type.

Figure 3 presents the second ALR approach in comparison to the default learning process. This approach was also tested with and without ABS normalization. The results indicate that the second type of ALR also improves learning accuracy and accelerates model convergence. Furthermore, the figure illustrates different ALR rates and their respective impacts on model performance.

Based on the findings above, we were also interested in testing the model without normalization factors entirely. Two types of tests were conducted: one where the normalization factors in the first hidden layer were set to 1 and another where all normalization factors were set to 1. Both configurations were tested with and without ABS normalization. Figure 4 presents the accuracy rates of these models in comparison to the default learning process, providing further insights into the role of normalization in CNNMVN training.

It is important to highlight that, as observed in both ALR rules and the models without normalization, the application of ABS normalization played a crucial role in ensuring the convergence of the learning algorithm.

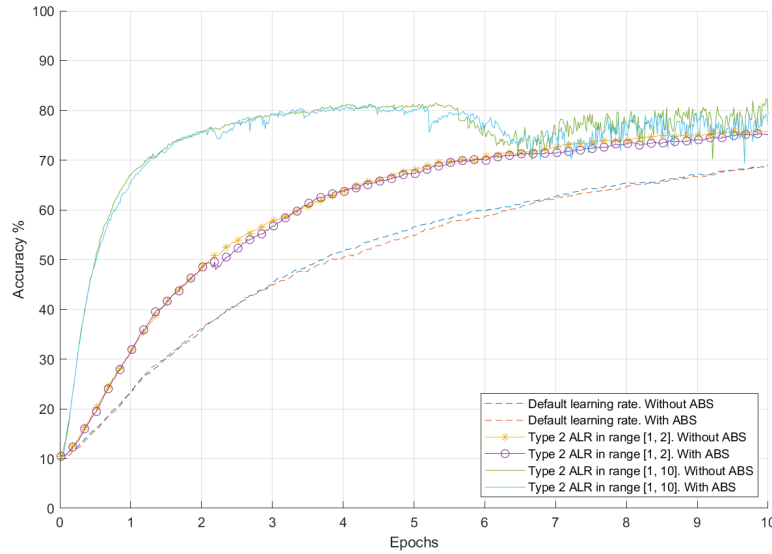


Figure 3. Accuracy of the model with the second ALR type.

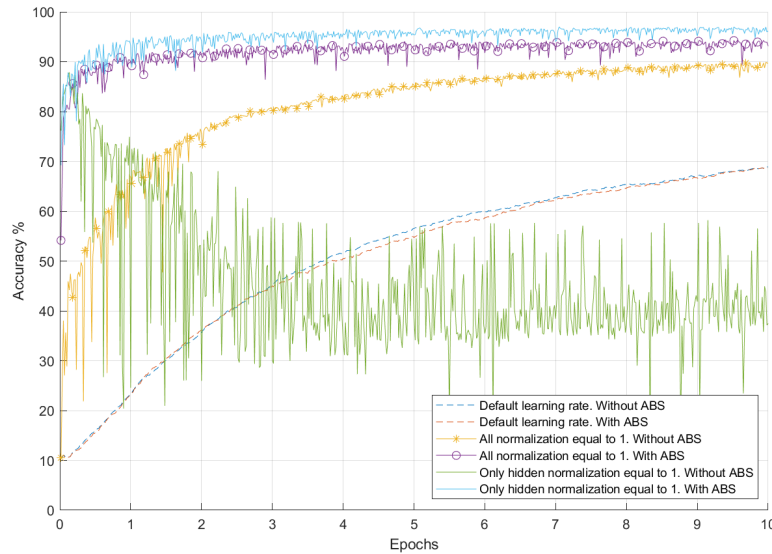


Figure 4. Accuracy of the model with only hidden fully-connected layer normalization set to 1 and model with all normalization factors set to 1.

6. Conclusion. In this paper we introduced adaptive learning rate (ALR) techniques for CNNMVN to improve training efficiency and convergence speed. Unlike traditional real-valued neural networks, CNNMVN follows an error-sharing principle instead of an optimization-based learning rule, allowing an unrestricted learning rate adjustments without the risk of overshooting local minima.

We developed two ALR strategies: one modifying learning rate coefficients in the error-correction formulas and another adjusting normalization factors in the error-backpropagation and error-correction formulas. Our experimental results on the MNIST dataset demonstrate that both approaches effectively accelerate learning and enhance model performance. Furthermore, our investigation of self-adaptive

normalization revealed that it plays a crucial role in stabilizing the learning process, particularly in preventing divergence when applying ALR techniques.

Overall, our findings highlight the potential of ALR in CNNMVN, offering a significant improvement in training efficiency while maintaining model stability. Future work may explore further refinements to ALR strategies, including adaptive adjustments tailored to specific network layers or tasks.

References

1. Aizenberg, I., & Vasko, A. (21–25 August, 2020). Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neurons. In *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. Lviv: Ukraine. <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204076>
2. Aizenberg, I., Herman, J., & Vasko, A. (26–29 October, 2022). A Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neurons: A Modified Learning Algorithm and Analysis of Performance. In *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. New York: USA. <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965659>
3. Aizenberg, I., & Vasko, A. (2024). Frequency-Domain and Spatial-Domain MLMVN-Based Convolutional Neural Networks. *Algorithms*, 17(8), 361. <https://doi.org/10.3390/a17080361>
4. Duchi, J., Hazan, E. & Singer, Y. (2011). Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 12, 2121–2159. Retrieved from <https://web.stanford.edu/~jduchi/projects/DuchiHaSi11.pdf>
5. Hinton, G., Srivastava, N., & Swersky, K. (2012). Neural networks for machine learning. Lecture 6a Overview of mini-batch gradient descent. Retrieved from https://www.cs.toronto.edu/~tijmen/csc321/slides/lecture_slides_lec6.pdf
6. Kingma, D. P., & Ba, J. (2017). Adam: A Method for Stochastic Optimization. *Machine Learning*, arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>
7. Huang, J., Tang, T., Ding, Y., Tatikonda, S., Dvornek, N., Papademetris, X., & Duncan, J. S. (2020). AdaBelief Optimizer: Adapting Stepsizes by the Belief in Observed Gradients *Machine Learning*, arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.07468>
8. Cheng, W., Pu, R., & Wang, B. (2025). AMC: Adaptive Learning Rate Adjustment Based on Model Complexity. *Mathematics*, 13(4), 650. <https://doi.org/10.3390/math13040650>
9. Takase, T., Oyama, S., & Kurihara, M. (2018). Effective neural network training with adaptive learning rate based on training loss. *Neural Networks: The Official Journal of the International Neural Network Society*, 101, 68–78. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2018.01.016>
10. Li, Q., Wang, B., Zhu, Y., Lioma, C., & Liu, Q. (2023). Adapting Pre-trained Language Models for Quantum Natural Language Processing. *Quantum Physics*, arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.13812>
11. Zhao, W., & Huang, H. (2023). Adaptive orthogonal gradient descent algorithm for fully complex-valued neural networks. *Neurocomputing*, 546, 126358. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2023.126358>
12. Zhang, Y., & Huang, H. (2020). Adaptive complex-valued stepsize based fast learning of complex-valued neural networks. *Neural Networks*, 124, 233–242. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2020.01.011>
13. Dong, Z., & Huang, H. (2021). A training algorithm with selectable search direction for complex-valued feedforward neural networks. *Neural Networks*, 137, 75–84. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.01.014>
14. Aizenberg, I., & Moraga, C. (2007). Multilayer Feedforward Neural Network Based on Multi-valued Neurons (MLMVN) and a Backpropagation Learning Algorithm. *Soft Computing*, 11(2), 169–183. <https://doi.org/10.1007/s00500-006-0075-5>
15. Aizenberg, E., & Aizenberg, I. (09–12 December, 2014). Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins. In *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining (CIDM)*. Orlando, FL: USA. <https://doi.org/10.1109/CIDM.2014.7008147>
16. Aizenberg, I. (2011). Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons. *Studies in Computational Intelligence*. (Vol. 353). Springer, Berlin Heidelberg.

- <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20353-4>
17. LeCun, Y., Cortes, C., & Burges, C. J. C. (August 9, 2024). The MNIST Database of handwritten digits. [Dataset]. Retrieved from <https://www.kaggle.com/datasets/zalando-research/fashionmnist>

Васько О. Ю., Брила А. Ю. Адаптивна нормалізація CNNMVN.

Адаптивні методи зміни швидкості навчання широко використовуються для підвищення ефективності навчання нейронних мереж, оскільки вони покращують швидкість та точність збіжності та зменшують ризик застрягання в локальних мінімумах або сідлоподібних точках. У цій статті ми представляємо підходи до адаптивної швидкості навчання для згорткової нейронної мережі з багатозначними нейронами (CNNMVN), яка є повністю комплекснозначною нейронною мережею, що оперує комплексними вхідними даними, комплексними вагами та комплекснозначними активаційними функціями.

На відміну від традиційних дійснозначних нейронних мереж, CNNMVN використовує принцип поділу помилки замість градієнтної оптимізації, що усуває проблему локальних мінімумів і дозволяє більш гнучко коригувати швидкість навчання. Ми пропонуємо дві стратегії адаптивної швидкості навчання (ALR), спеціально розроблені для CNNMVN. Перша стратегія модифікує коефіцієнти швидкості навчання у формулах корекції похибки, тоді як друга регулює параметри нормалізації у процесах зворотного поширення похибки та її корекції. Обидва методи динамічно адаптують швидкість навчання на основі точності на валідаційній вибірці.

Результати показують, що адаптивна швидкість навчання суттєво покращує швидкість збіжності та точність, особливо при поєднанні з самоналаштовуваною швидкістю навчання. Крім того, наше дослідження підкреслює вплив нормалізації на динаміку навчання та розглядає сценарії, у яких нормалізацію мінімізовано або повністю виключено.

Наші результати демонструють, що методи ALR покращують ефективність навчання CNNMVN, забезпечуючи надійну основу для оптимізації швидкості навчання в комплекснозначних нейронних мережах.

Ключові слова: згорткові нейромережі, комплекснозначні мережі, багатозначні нейрони, CNNMVN, MLMVN, розпізнавання зображень, частотна область.

Список використаної літератури

1. Aizenberg I., Vasko A. Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neurons. *2020 IEEE Third International Conference on Data Stream Mining & Processing (DSMP)*. Lviv : Ukraine, 21–25 August, 2020. pp. 72–77. DOI: <https://doi.org/10.1109/DSMP47368.2020.9204076>
2. Aizenberg I., Herman J., Vasko A. A Convolutional Neural Network with Multi-Valued Neurons: A Modified Learning Algorithm and Analysis of Performance. *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. New York : USA, 26–29 October, 2022. pp. 0585–0591. DOI: <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965659>
3. Aizenberg I., Vasko A. Frequency-Domain and Spatial-Domain MLMVN-Based Convolutional Neural Networks. *Algorithms*. 2024. Vol. 17, No. 8. 361. DOI: <https://doi.org/10.3390/a17080361>
4. Duchi J., Hazan E., Singer Y. Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization. *Journal of Machine Learning Research*. 2011. Vol. 12. pp. 2121–2159. URL: <https://web.stanford.edu/~jduchi/projects/DuchiHaSi11.pdf> (date of access: 15.02.2025).
5. Hinton G., Srivastava N., and Swersky K. Neural networks for machine learning. Lecture 6a Overview of mini-batch gradient descent. 2012. URL: https://www.cs.toronto.edu/~tijmen/csc321/slides/lecture_slides_lec6.pdf (date of access: 16.02.2025).
6. Kingma D. P., and Ba J. Adam: A Method for Stochastic Optimization. *Machine Learning*. 2017. arXiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980>

7. Huang J., Tang T., Ding Y., Tatikonda S., Dvornek N., Papademetris X., Duncan J. S. AdaBelief Optimizer: Adapting Stepsizes by the Belief in Observed Gradients *Machine Learning*. 2020. arXiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.07468>
8. Cheng W., Pu R., and Wang B. AMC: Adaptive Learning Rate Adjustment Based on Model Complexity. *Mathematics*. 2025. Vol. 13, No. 4. 650. DOI: <https://doi.org/10.3390/math13040650>
9. Takase T., Oyama S., Kurihara M. Effective neural network training with adaptive learning rate based on training loss. *Neural Networks: The Official Journal of the International Neural Network Society*. 2018. Vol. 101. pp. 68–78. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2018.01.016>
10. Li Q., Wang B., Zhu Y., Lioma C., and Liu Q. Adapting Pre-trained Language Models for Quantum Natural Language Processing. *Quantum Physics*. 2023. arXiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.13812>
11. Zhao W., Huang H. Adaptive orthogonal gradient descent algorithm for fully complex-valued neural networks. *Neurocomputing*. 2023. Vol. 546. 126358. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2023.126358>
12. Zhang Y., Huang H. Adaptive complex-valued stepsize based fast learning of complex-valued neural networks. *Neural Networks*. 2020. Vol. 124. pp. 233–242. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2020.01.011>
13. Dong Z., Huang H. A training algorithm with selectable search direction for complex-valued feedforward neural networks. *Neural Networks*. 2021. Vol. 137. pp. 75–84. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.01.014>
14. Aizenberg I., Moraga C. Multilayer Feedforward Neural Network Based on Multi-valued Neurons (MLMVN) and a Backpropagation Learning Algorithm. *Soft Computing*. 2007. Vol. 11, No. 2. pp. 169–183. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-006-0075-5>
15. Aizenberg E., Aizenberg I. Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins. *2014 IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining (CIDM)*. Orlando, FL: USA, 09–12 December, 2014. pp. 48–55. DOI: <https://doi.org/10.1109/CIDM.2014.7008147>
16. Aizenberg I. Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons. *Studies in Computational Intelligence*. Vol. 353. Springer, Berlin Heidelberg, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20353-4>
17. LeCun Y., Cortes C., Burges C. J. C. The MNIST Database of handwritten digits. August 9, 2024. [Dataset]. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/zalando-research/fashionmnist> (date of access: 19.02.2025).

Recived 27.02.2025

УДК 519.24:069.62 –047.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).178-187](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).178-187)**Н. В. Ічанська¹, М. В. Лисенко², В. О. Чурікова³**

¹ Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
itm.ichanska@nuppp.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5963-9288>

² Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри комп'ютерних технологій та інформаційних систем,
кандидат фізико-математичних наук
lysenkop1@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0995-2991>

³ Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»,
студентка 301 – пФД
valeriacurikova5@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6364-9751>

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ МУЗЕЙНОЇ АКТИВНОСТІ

У статті розглядаються аспекти математичного моделювання динаміки музейної активності. Музейна активність є важливим показником культурного та соціального розвитку міста, її ефективність може бути оцінена за допомогою кількісних методів, зокрема інтегральної оцінки. Метою дослідження є аналіз тенденцій музейної діяльності та розробка математичної моделі для прогнозування її динаміки.

У роботі побудовано кількісні моделі для оцінки ефективності музейної діяльності. Для цього застосовані математичні підходи, включаючи елементи теорії ймовірностей і статистичного аналізу, апарат лінійної алгебри, методику комплексного інтегрального оцінювання.

Авторами визначено інтегральну оцінку музейної активності на прикладі міста Львова. Для знаходження коефіцієнтів даної оцінки застосовано метод, заснований на використанні коваріаційної матриці, її власних значень та власних векторів. Перевагами цього методу є його об'єктивність та врахування в оцінці реально існуючих зв'язків між використаними статистичними показниками.

Авторами розроблено методику для інтегрального оцінювання музейної активності, що дозволяє здійснити комплексний аналіз і сформулювати прогнози щодо її подальшого розвитку. Прогнозування ефективності музейної діяльності на основі кількісних оцінок є важливим для планування та оптимізації ресурсів, зокрема для визначення найбільш ефективних стратегій роботи музеїв у різні періоди року, прийняття та реалізації науково-обґрунтованих управлінських рішень у даній галузі.

Результати дослідження можуть бути використані для подальших розробок в області математичного моделювання культурних процесів, що сприятиме точнішій оцінці музейної діяльності. Дана методика може бути використана для вдосконалення стратегій розвитку музеїв та їх адаптації до змін у соціально-економічному середовищі.

Ключові слова: моделювання, музейна активність, оцінка, показники, прогнозування.

1. Вступ. Музеї, як основні осередки культурної спадщини, відіграють важливу роль у розвитку суспільства, зокрема в аспектах освіти, збереження історії та культурної пам'яті. Сучасні музеї є не лише сховищами культурної спадщини, але й активними учасниками соціального та освітнього життя суспільства.

Визначення ефективності їхньої роботи є актуальною задачею, яка дозволяє оцінити внесок музеїв у культурний розвиток міста. Кількісні методи аналізу, зокрема інтегральна оцінка, дають можливість об'єктивно порівняти діяльність музеїв за низкою критеріїв.

Музейна активність є значущим показником культурного та соціального розвитку міста, тому дослідження її динаміки має особливе значення для розуміння еволюції місцевої ідентичності та традицій.

Музейна активність — це комплекс заходів і процесів, пов'язаних з функціонуванням музеїв, що включає відвідуваність музеїв, проведення виставок, екскурсій, освітніх програм, культурних подій, а також соціальну взаємодію, яка відбувається між музеєм і його відвідувачами.

Метою цієї роботи є застосування математичних методів для моделювання динаміки музейної активності, аналізу тенденцій і розробки інтегральної оцінки ефективності роботи музеїв, на прикладі міста Львова.

Актуальність теми обумовлена необхідністю більш точного розуміння та оцінки факторів, що впливають на розвиток музейної діяльності, а також пошуком шляхів для ефективного використання ресурсів музеїв і покращення їх соціальної та культурної функції.

2. Огляд літератури. Застосування математичних моделей для аналізу музейної активності є перспективним напрямом сучасних досліджень у галузі культурної аналітики. Одним із ключових інструментів є моделі прогнозування відвідуваності культурних установ, що базуються на регресійному аналізі та аналізі часових рядів.

У роботі [8] автори наголошують на важливості використання технологій відстеження й аналізу поведінки відвідувачів у туристичному та культурному секторах. Це дозволяє отримувати точні дані для подальшого моделювання та прогнозування.

У [10] запропоновано методологію для оцінки внеску туризму в економічне зростання, що корисно для аналізу впливу культурних заходів на розвиток міста.

Інтеграція цифрових технологій у музейну сферу детально розглядається у монографії [2], де автори акцентують увагу на нових формах представлення культурної спадщини через мультимедійні й віртуальні засоби. Це значно змінює динаміку взаємодії музеїв з аудиторією.

У дослідженні [15] використано методи багатовимірної аналізу для вивчення мотивацій і частоти відвідування музеїв у Китаї, що дозволяє глибше зрозуміти поведінкові аспекти культурної участі.

У роботі [7] проаналізовано ефективність культурних установ в Іспанії з регіональної точки зору, використовуючи моделі Data Envelopment Analysis (DEA) та усічені регресії для оцінки зовнішніх впливів. Авторами показано, що ефективність культурних установ залежить більше від рівня освіти та демографічної структури регіону, ніж від економічного добробуту.

Значну увагу в сучасних дослідженнях приділяється управлінню потоками відвідувачів у музеях, що є важливою складовою ефективної організації музейної діяльності так у роботі [13] розглянуто математичні моделі вимірювання та оптимізації потоків відвідувачів, зокрема використання методів обчислювальної науки для аналізу руху в музеях. Авторами запропоновано підходи до збору та

обробки даних про переміщення людей у просторі музею, моделювання щільності натовпу та виявлення вузьких місць.

Ключовим чинником розвитку музейної активності є ефективні маркетингові стратегії. У роботі [12] авторами доведено, що впровадження цілісної маркетингової стратегії може істотно змінити рівень відвідуваності та фінансову стійкість музею.

Документи OECD (2009) та UNESCO Institute for Statistics (2012) [14] є ключовими в розвитку стандартизованих підходів до кількісного вимірювання культурної активності. OECD у звіті підкреслює важливість впровадження уніфікованих методів збору та аналізу даних, що дають змогу оцінити соціально-економічний вплив культури. Ці методи включають кількісні показники участі населення у культурному житті, які є основою для математичного моделювання музейної активності. Аналогічно, UNESCO Institute for Statistics пропонує системний підхід до класифікації та оцінки культурної участі, що охоплює як традиційні, так і сучасні форми культурних практик.

Використання таких стандартизованих даних відкриває можливості для застосування математичних методів, зокрема багатофакторного аналізу, регресійного моделювання та аналізу часових рядів. Це сприяє більш точній оцінці ефективності культурної політики, виявленню ключових факторів, що впливають на динаміку музейної активності, та прогнозуванню її розвитку в різних соціально-економічних умовах. Таким чином, стандарти OECD та UNESCO створюють фундамент для наукового підходу до дослідження та моделювання культурних процесів, що є важливим для сучасної музейної справи.

3. Методи математичного моделювання динаміки музейної активності. Математичне моделювання є перспективним напрямком сучасних досліджень, яке знаходить широке застосування в різних галузях: наука, техніка, економіка, соціологія та інші (див., наприклад, [9], [11]).

Для моделювання динаміки музейної активності можна застосовувати різні математичні методи, що дозволяють оцінити вплив різноманітних факторів на відвідуваність музеїв та інші аспекти їх діяльності.

Лінійна регресія є найпростішим методом для встановлення залежностей між відвідуваністю музеїв і окремими змінними, такими як кількість проведених виставок або екскурсій. Цей метод дозволяє визначити, які фактори мають найбільший вплив на відвідуваність [1], [9].

Множинна регресія дозволяє враховувати кілька факторів одночасно, що особливо корисно для оцінки взаємодії між різними аспектами музейної активності. Наприклад, можна вивчити, як поєднання сезонних змін і проведених заходів впливає на відвідуваність [3], [6].

Аналіз часових рядів дозволяє вивчати зміну музейної активності за часом, виявляти циклічні та трендові компоненти. Це дозволяє виявити сезонні коливання або довгострокові тенденції, що характерні для музейної діяльності в конкретному місті [2], [5].

Статистичні моделі використовуються для обробки великих обсягів даних, що дає можливість прогнозувати музейну активність з високою точністю. Вони можуть включати моделі на основі варіацій, коефіцієнтів кореляції, тестування гіпотез [7–8].

Для кращого аналізу і більш складних взаємозв'язків між факторними змін-

ними також використовуються методи машинного навчання, такі як нейронні мережі, які дозволяють обробляти великий обсяг даних та шукати складніші закономірності в музейній діяльності.

4. Аналіз тенденцій музейної активності. Аналіз тенденцій відвідуваності музеїв є ключовим етапом у дослідженні динаміки музейної активності.

Ключовими факторами, що впливають на музейну активність, є:

Сезонність: певні періоди року можуть залучати більше відвідувачів, особливо в туристичні сезони. Наприклад, літні місяці або святкові періоди, такі як новорічні свята чи день міста, можуть збільшувати кількість відвідувань.

Культурні події: спеціальні події, такі як відкриття нових виставок, фестивалі, наукові конференції та майстер-класи, значно підвищують інтерес до музеїв. Крім того, зміна культурних тенденцій може створювати нові можливості для музеїв.

Економічні чинники: рівень доходів населення, економічна стабільність або криза можуть впливати на можливості відвідування музеїв. У періоди економічного спаду деякі категорії населення можуть зменшити витрати на культурні заходи.

Туризм: активність туристів також є важливим чинником. Музеї, які розташовані в туристичних зонах, можуть зазнавати значного зростання відвідуваності, пов'язаного з міжнародними або внутрішніми туристами.

Порівняння цих тенденцій дозволяє зрозуміти, як різні підходи до організації музейної діяльності можуть впливати на їхню популярність серед населення.

5. Інтегральна оцінка музейної активності. Інтегральна оцінка музейної активності передбачає комплексний підхід, що дозволяє оцінити не тільки кількість відвідувачів, але й інші важливі аспекти діяльності музеїв. Для цього використовуються різноманітні показники, які зводяться в єдиний інтегральний показник.

Основні компоненти інтегральної оцінки включають:

Відвідуваність музеїв: кількість відвідувачів за певний період. Це може бути розрахунок за місяць, квартал або рік, залежно від наявних даних.

Кількість виставок: виявлення кількості та різноманітності виставок, проведених музеєм. Чим більше виставок, тим більша ймовірність залучення відвідувачів.

Екскурсії та освітні програми: кількість проведених екскурсій, лекцій та інших освітніх заходів, що сприяють підвищенню інтересу до музею.

Методика інтегральної оцінки передбачає створення спеціальної формули, яка об'єднує ці показники в єдину метрику. Для цього кожен з цих показників може бути оцінений за допомогою спеціальних вагових коефіцієнтів, що відображають їх важливість для загальної активності музею. Це дозволяє створити комплексну картину стану музейної діяльності.

Для оцінювання роботи музеїв обираємо наступні показники:

- 1) x_1 — кількість виставок в музеях протягом року;
- 2) x_2 — кількість відвідувачів музеїв за рік;
- 3) x_3 — кількість проведених екскурсій в музеї протягом року.

Для дослідження динаміки даних показників вибираємо ретроспективний період тривалістю T . Значення показника x_i в t -тий рік ретроспективного періоду позначимо через $x_i(t)$. Інтегральна оцінка ефективності роботи музеїв визначається рівністю

$$W(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{x_i(t) - x_i^{\min}}{x_i^{\max} - x_i^{\min}},$$

де $x_i^{\max}$ та $x_i^{\min}$ — відповідно, максимальне та мінімальне значення показника x_i , а α_i — вагові коефіцієнти показників.

Коефіцієнти α_i повинні відображати існуючі статистичні взаємозв'язки між показниками x_i . Для цього визначимо коефіцієнти коваріації

$$r_{ij} = \text{cov} \left(\frac{x_i - x_i^{\min}}{x_i^{\max} - x_i^{\min}}, \frac{x_j - x_j^{\min}}{x_j^{\max} - x_j^{\min}} \right).$$

Ці коефіцієнти утворюють коваріаційну матрицю $R = (r_{ij})_{i,j=1}^3$

Якщо вибрати вагові коефіцієнти α_i пропорційними квадратам компонент власного вектора цієї матриці, який відповідає її максимальному власному значенню, то одержана інтегральна оцінка найкраще відображатиме динаміку показників x_i .

На основі описаної методики визначимо інтегральну оцінку ефективності роботи музеїв міста Львова. В місті діють 4 музеї: музично-меморіальний музей Соломії Крушельницької, музей народної архітектури та побуту ім. К. Шептицького, меморіальний музей тоталітарних режимів «Територія Терору» та меморіальний музей Гідності.

Таблиця 1.

Дані про діяльність музеїв міста Львова

Роки	Кількість виставок	Кількість відвідувачів	Кількість екскурсій
2010	37	362100	1642
2011	39	376600	1677
2012	38	382000	1586
2013	45	392100	1498
2014	36	413200	1354
2015	43	413500	1398
2016	24	235000	1057
2017	29	236900	1279
2018	39	251366	1152
2019	55	219486	930
2020	32	55035	238
2021	32	93107	534
2022	23	117831	487
2023	32	140143	600
2024	39	166088	647

Загальні дані про кількість виставок, екскурсій та відвідувачів цих музеїв протягом ретроспективного періоду 2010–2024 рр. наведено в таблиці 1 [4].

Коваріаційна матриця $R = (r_{ij})_{i,j=1}^3$ має такий вигляд

$$R = \begin{vmatrix} 0.0626 & 0.0344 & 0.0302 \\ 0.0344 & 0.1068 & 0.0953 \\ 0.0302 & 0.0953 & 0.0966 \end{vmatrix}.$$

Для визначення власних значень даної матриці розв'яжемо рівняння

$$\begin{vmatrix} 0.0626 - \lambda & 0.0344 & 0.0302 \\ 0.0344 & 0.1068 - \lambda & 0.0953 \\ 0.0302 & 0.0953 & 0.0966 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 0.2112$, $\lambda_2 = 0.0486$, $\lambda_3 = 0.0062$

Отже, максимальне власне значення коваріаційної матриці є 0.2112. Цьому значенню відповідає власний вектор $\{0.294, 0.6955, 0.6556\}$. Вибираючи вагові коефіцієнти α_i в інтегральній оцінці рівними квадратам компонент даного вектора, одержимо таку формулу для інтегрального оцінювання ефективності діяльності музеїв

$$W(t) = 0.0864 \frac{x_1(t) - x_1^{\min}}{x_1^{\max} - x_1^{\min}} + 0.4837 \frac{x_2(t) - x_2^{\min}}{x_2^{\max} - x_2^{\min}} + 0.4298 \frac{x_3(t) - x_3^{\min}}{x_3^{\max} - x_3^{\min}}.$$

Визначені за допомогою даної формули інтегральні оцінки ефективності діяльності музеїв Львова за 2010–2024 рр. наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Інтегральні оцінки ефективності діяльності музеїв Львова

Роки	Інтегральна оцінка
2010	0.871533
2011	0.906956
2012	0.884361
2013	0.890614
2014	0.851765
2015	0.884220
2016	0.490175
2017	0.572553
2018	0.581152
2019	0.515041
2020	0.024310
2021	0.164097
2022	0.159111
2023	0.247282
2024	0.315238

Для одержання прогнозів динаміки даної оцінки використаємо метод експоненційного вирівнювання. Апроксимація інтегральної оцінки виконується за допомогою квадратичної функції $Q(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \frac{t^2}{2!}$. Коефіцієнти α_0 , α_1 ,

α_2 вибираємо такими, щоб сума квадратів відхилень фактичних значень $W(t)$ інтегральної оцінки від апроксимованих значень $Q(t)$ стала мінімальною. На основі цих коефіцієнтів визначаємо вирівняні значення інтегральної оцінки

$$\begin{aligned} W_1(1) &= \alpha_0 - \frac{1-\gamma}{\gamma}\alpha_1 + \frac{(1-\gamma)(2-\gamma)}{2\gamma^2}\alpha_2, \\ W_2(1) &= \alpha_0 - \frac{2(1-\gamma)}{\gamma}\alpha_1 + \frac{2(1-\gamma)(3-2\gamma)}{2\gamma^2}\alpha_2, \\ W_3(1) &= \alpha_0 - \frac{3(1-\gamma)}{\gamma}\alpha_1 + \frac{3(1-\gamma)(4-3\gamma)}{2\gamma^2}\alpha_2, \end{aligned}$$

де γ — коефіцієнт, який відображає перевагу, що надається в процесі прогнозування недавнім значенням оцінки.

Для кожного року ретроспективного періоду, починаючи із другого, визначаємо величини $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$ за формулами

$$\begin{cases} W_1(t) = (1-\gamma)W_1(t-1) + \gamma W(t), \\ W_2(t) = (1-\gamma)W_2(t-1) + \gamma W_1(t), \\ W_3(t) = (1-\gamma)W_3(t-1) + \gamma W_2(t). \end{cases}$$

Коефіцієнти α_0 , α_1 , α_2 теж змінюються при переході до кожного наступного року і визначаються за допомогою рівностей:

$$\begin{cases} \alpha_0(t) = 3W_1(t) - 3W_2(t) + W_3(t), \\ \alpha_1(t) = \frac{\gamma}{2(1-\gamma)^2} [(6-5\gamma)W_1(t) - 2(5-4\gamma)W_2(t) + (4-3\gamma)W_3(t)], \\ \alpha_2(t) = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} (W_1(t) - 2W_2(t) + W_3(t)). \end{cases}$$

Отримані для 2024 року коефіцієнти α_0 , α_1 , α_2 , використовуються для прогнозування інтегральної оцінки ефективності діяльності музеїв на 2025 рік. Для цього скористаємося рівністю

$$W(T+\theta) = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\frac{\theta^2}{2!}.$$

Для оцінювання точності прогнозу для кожного року ретроспективного періоду, починаючи із другого, визначаємо абсолютне відхилення прогнозу на один період за формулою

$$\Delta(t) = W(t) - \alpha_0(t) - \alpha_1(t)\theta - \frac{\alpha_2(t)\theta^2}{2},$$

та відповідне відносне відхилення, яка є відношенням квадрату абсолютного відхилення до квадрату одержаного на цей період прогнозного значення

$$\delta(t) = \frac{\Delta^2(t)}{(\alpha_0 + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2})^2}.$$

Середнє відхилення за весь ретроспективний період визначається як середнє геометричне відносних відхилень за всі роки ретроспективного періоду, починаючи із другого:

$$\delta = \left(\prod_{t=2}^T \delta(t) \right)^{\frac{1}{T-1}}.$$

Точність прогнозу вважається рівною $1 - \delta$. Ця точність істотно залежить від вибраного коефіцієнта γ . Величина цього коефіцієнта визначається емпірично таким чином, щоб точність $1 - \delta$ стала найвищою. Для прогнозування інтегральної оцінки ефективності діяльності музеїв Львова нами вибрано значення $\gamma = 0.6$, що забезпечить точність $1 - \delta = 97.9\%$.

В результаті одержано прогнозоване значення інтегральної оцінки на 2025 рік $W = 0.399$, тобто очікується певне зростання даної оцінки порівняно із 2024 роком.

6. Висновки. Математичне моделювання динаміки музейної активності має значний потенціал для оптимізації роботи музеїв. Використання таких моделей дозволяє: здійснювати планування ресурсів музеїв, зокрема персоналу та матеріалів для виставок і екскурсій; підвищувати ефективність проведення культурних подій, прогножуючи їхній вплив на відвідуваність; оптимізувати маркетингові стратегії, орієнтуючи їх на прогнозовані пік відвідуваності; розробляти нові стратегії залучення відвідувачів, враховуючи всі значущі фактори.

Математичне моделювання є потужним інструментом для аналізу та оптимізації роботи музеїв, допомагаючи їм ефективно реагувати на змінювані умови та забезпечувати сталий розвиток в майбутньому.

Список використаної літератури

1. Горик А. В., Піскунов В. Г., Серов М. І. та ін. Аналітичне розв'язання задачі згину композитної балки на основі вдосконаленої моделі деформації. *Strength of Materials*. 1999. Vol. 31. P. 85–98. <https://doi.org/10.1007/BF02509745>
2. Кемерон Ф., Кендердайн С. (ред.) Теоретизація цифрової культурної спадщини: критичний дискурс. Кембридж, Массачусетс : MIT Press, 2007. Онлайн-видання : MIT Press Scholarship Online, 22 серпня 2013. <https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262033534.001.0001>
3. Музеї. URL: <https://opendata.city-adm.lviv.ua/dataset/zaklady-kultury-statystyka/resource/5f5099a8-d8c3-44a8-b0bc-15fe3bb5a7aa> (дата звернення: 19.03.2025).
4. Основні показники сфери культури і мистецтва. Відкриті дані Львова. Сайт Львівської міської ради. URL: <https://opendata.city-adm.lviv.ua/dataset/osnovni-pokaznyky-sfery-kultury-i-mystetstva> (дата звернення 19.05.2025).
5. Онищенко В., Ічанська Н., Скриль В., Фурманчук О. Економіко-математичне моделювання інноваційного розвитку підприємств будівельної галузі. Онищенко В., Мамедова Г., Сівицька С., Гасимов А. (ред.). *Матеріали 3-ї Міжнародної конференції з будівельних інновацій. ICBI 2020* : Конспект лекцій з цивільного будівництва. Cham: Springer, 2022. T. 181. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
6. Centorrino P., Corbetta A., Cristiani E., Onofri E. Managing crowded museums: Visitors flow measurement, analysis, modeling, and optimization. *Journal of Computational Science*. 2021. Vol. 53. Article 101357. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2021.101357>
7. Del Barrio-Tellado M. J., Gómez-Vega M., Herrero-Prieto L. C. Performance of cultural heritage institutions: A regional perspective. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2023. Vol. 87. Article 101593. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101593>
8. Gordon J., Beilby-Orrin H. International measurement of the economic and social importance of culture. *OECD Statistics Working Papers*. Paris : OECD Publishing, 2007. No. 2007/03. <https://doi.org/10.1787/5k92zxn7sc30-en>

9. Gorik A. V., Piskunov V. G., Serov N. I. et al. The analytical solution of the bending problem for an inhomogeneous noncircular cylindrical body. *International Applied Mechanics*. 2002. Vol. 38. P. 1261–1271. <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>
10. Ivanov S., Webster C. Measuring the impact of tourism on economic growth. *Tourism Economics*. 2007. Vol. 13, No. 3. P. 379–388. URL: <https://econpapers.repec.org/RePEc:eco:journ1:2017-02-18> (date of access: 19.03.2025).
11. Johnson M., Lee S. Mathematical modeling in cultural heritage: MACH2021. Springer INdAM Series. Vol. 45. Cham : Springer, 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-58077-3>
12. Kotler N., Kotler P., Kotler W. I. Museum marketing and strategy: Designing missions, building audiences, generating revenue and resources. 2nd ed. San Francisco : Jossey-Bass, 2008.
13. Shoval N., Ahas R. The use of tracking technologies in tourism research: The first decade. *Tourism Geographies*. 2016. Vol. 18, No. 5. P. 587–606. <https://doi.org/10.1080/14616688.2016.1214977>
14. UNESCO Institute for Statistics. *Measuring cultural participation*. UNESCO, 2012. URL: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000219213> (date of access: 19.03.2025).
15. Zhang Y., Li X. The behavioral pattern of Chinese public cultural participation in museums. *Sustainability*. 2020. Vol. 12, No. 7. Article 2890. <https://doi.org/10.3390/su12072890>

Ichanska N. V., Lysenko M. V., Churikova V. O. Mathematical Modeling of Museum Activity Dynamics.

The article examines the theoretical and practical aspects of mathematical modeling of the dynamics of museum activity. Museum activity is a significant indicator of a city's cultural and social development, and its effectiveness can be evaluated using quantitative methods, particularly through integral assessment. The purpose of this study is to analyze trends in museum operations and to develop a mathematical model for forecasting their dynamics.

The paper presents quantitative models for assessing the effectiveness of museum performance. Various mathematical approaches were applied, including elements of probability theory, statistical analysis, linear algebra, and a methodology for comprehensive integral evaluation.

The authors propose an integral assessment of museum activity, using the case of the city of Lviv as an example. To determine the coefficients for this assessment, a method based on the use of the covariance matrix, its eigenvalues, and eigenvectors was applied. The advantages of this approach lie in its objectivity and its ability to reflect the actual interdependencies between the statistical indicators involved in the evaluation process.

Furthermore, the authors developed a methodology for integral assessment that enables comprehensive analysis and the formulation of forecasts regarding the further development of museum activity. Forecasting the effectiveness of museum operations based on quantitative evaluations is crucial for resource planning and optimization. In particular, it allows for the identification of the most effective strategies for museum management across different seasons and supports the adoption and implementation of scientifically grounded managerial decisions in the field of cultural development.

The results of this study may serve as a foundation for further research in the field of mathematical modeling of cultural processes, facilitating more accurate evaluation of museum activities. The proposed methodology can be applied to enhance museum development strategies and to adapt their operations to changes in the socio-economic environment.

Keywords: modeling, museum activity, evaluation, indicators, forecasting.

References

1. Horyk, A. V., Piskunov, V. H., Serov, M. I., & et al. (1999). Analytic solution of the problem of bending of a composite beam on the basis of an improved model of deformation. *Strength of Materials*, 31, 85–98. <https://doi.org/10.1007/BF02509745>

2. Kemerón, F., & Kenderdain, S. (Ed.). (2007. August 22, 2013.). *Theorizing digital cultural heritage: a critical discourse*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press. Online edition: MIT Press Scholarship Online. <https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262033534.001.0001>
3. Museums. Retrieved from <https://opendata.city-adm.lviv.ua/dataset/zaklady-kultury-statystyka/resource/5f5099a8-d8c3-44a8-b0bc-15fe3bb5a7aa> [in Ukrainian].
4. Main indicators of the sphere of culture and art. Open data of Lviv. Website of the Lviv City Council. Retrieved from <https://opendata.city-adm.lviv.ua/dataset/osnovni-pokaznyky-sfery-kultury-i-mystetstva> [in Ukrainian].
5. Onyshchenko, V., Ichanska, N., Skryl, V., & Furmanchuk, O. (2022). Economic and mathematical modeling of innovative development of enterprises in the construction industry. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations (ICBI 2020)*. Lecture Notes in Civil Engineering. 181. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
6. Centorrino, P., Corbetta, A., Cristiani, E., & Onofri, E. (2021). Managing crowded museums: Visitors flow measurement, analysis, modeling, and optimization. *Journal of Computational Science*, 53, 101357. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2021.101357>
7. Del Barrio-Tellado, M. J., Gómez-Vega, M., & Herrero-Prieto, L. C. (2023). Performance of cultural heritage institutions: A regional perspective. *Socio-Economic Planning Sciences*, 87, 101593. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101593>
8. Gordon, J., & Beilby-Orrin, H. (2007). International measurement of the economic and social importance of culture. *OECD Statistics Working Papers*, (2007/03). Paris: OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5k92znx7sc30-en>
9. Gorik, A. V., Piskunov, V. G., Serov, N. I., & et al. (2002). The analytical solution of the bending problem for an inhomogeneous noncircular cylindrical body. *International Applied Mechanics*, 38, 1261–1271. <https://doi.org/10.1023/A:1022218731489>
10. Ivanov, S., & Webster, C. (2007). Measuring the impact of tourism on economic growth. *Tourism Economics*, 13(3), 379–388. Retrieved from <https://econpapers.repec.org/RePEc:eco:journ1:2017-02-18>
11. Johnson, M., & Lee, S. (2021). *Mathematical modeling in cultural heritage: MACH2021*. Springer INdAM Series. (Vol. 45). Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-58077-3>
12. Kotler, N., Kotler, P., & Kotler, W. I. (2008). *Museum marketing and strategy: Designing missions, building audiences, generating revenue and resources (2nd ed.)*. San Francisco: Jossey-Bass.
13. Shoval, N., & Ahas, R. (2016). The use of tracking technologies in tourism research: The first decade. *Tourism Geographies*, 18(5), 587–606. <https://doi.org/10.1080/14616688.2016.1214977>
14. UNESCO Institute for Statistics. (2012). *Measuring cultural participation*. Retrieved from <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000219213>
15. Zhang, Y., & Li, X. (2020). The behavioral pattern of Chinese public cultural participation in museums. *Sustainability*, 12(7), 2890. <https://doi.org/10.3390/su12072890>

Одержано 14.04.2025

УДК 005.95/.96:519.816

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).188-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).188-194)**Н. Е. Кондрук¹, О. В. Тирпак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант спеціальності прикладна математика
oleksandr.tyrbak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1149-8152>

**МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ВИБОРУ В
ЗАДАЧІ ПІДБОРУ ПЕРСОНАЛУ МЕТОДОМ АНАЛІЗУ
ІЄРАРХІЙ**

Розглянуто застосування методу аналізу ієрархій (АНР) до задачі багатокритеріального підбору персоналу адаптованої для мережі роздрібної торгівлі регіонального рівня. Побудовано трирівневу ієрархічну модель, що включає ціль, сім критеріїв оцінювання кандидатів та три альтернативи. У межах моделювання враховано як кількісні, так і якісні показники. Застосовано програмне забезпечення SuperDecisions, за допомогою якого виконано обчислення локальних і глобальних пріоритетів альтернатив та проведено сенситивний аналіз. Результати дослідження показали, що найбільший вплив на прийняття рішення мають інвертні критерії віку, частоти зміни роботи, тоді як соціальні характеристики мають дещо обмежений вплив. Визначено найоптимальнішого кандидата на посаду на основі сукупної інтегральної оцінки. Отримані результати можуть бути використані для автоматизації та обґрунтування рішень у сфері управління персоналом.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій, АНР, підбір персоналу, багатокритеріальний вибір, прийняття рішень, сенситивний аналіз.

1. Вступ. В умовах сучасного ринку праці ефективність кадрової політики значною мірою залежить від здатності організацій приймати швидкі й обґрунтовані рішення щодо підбору персоналу. Зростання вимог до кваліфікаційного, психологічного та соціального профілю кандидатів ускладнює процедуру прийняття рішень, перетворюючи її на багатокритеріальну задачу. Традиційні методи оцінювання персоналу часто є суб'єктивними та не враховують усіх аспектів складного вибору. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває застосування математичних методів підтримки прийняття рішень. Впровадження таких моделей у практику HR-департаментів сприяє підвищенню якості та об'єктивності відбору кандидатів.

Одним із найбільш ефективних інструментів багатокритеріального аналізу є метод аналізу ієрархій (АНР), розроблений Т. Сааті. Він дозволяє структурувати складні задачі, здійснювати попарне порівняння альтернатив і критеріїв, розраховувати ваги на основі експертних оцінок і визначати найбільш пріоритетну альтернативу. Метод АНР успішно застосовується в різних сферах управлінської діяльності, включаючи логістику, проєктний менеджмент, енергетику та медицину. Однак, саме в галузі управління людськими ресурсами застосування цього підходу набуває особливого значення, оскільки забезпечує прозорість, системність та відтворюваність прийняття рішень.

Метою дослідження є розроблення математичної моделі багатокритеріального відбору персоналу адаптованої для мережі роздрібної торгівлі на основі методу АНР, що забезпечує формалізацію процесу прийняття рішень, врахування різнотипних (якісних і кількісних) критеріїв та оцінювання альтернатив із подальшим визначенням найпріоритетнішого кандидата та проведенням сенситивного аналізу для оцінки стійкості моделі до змін вагових коефіцієнтів критеріїв.

2. Огляд літератури. Фундаментальна праця Сааті [1] вводить концепцію АНР, засновану на парному порівнянні критеріїв і альтернатив для визначення їхньої відносної ваги, пропонуючи математичну основу для структурування складних рішень. Подальший розвиток методології, представлений Сааті та Варгасом [2], розширює АНР через інтеграцію з аналітичним мережевим процесом (ANP) і демонструє його застосування в управлінні та інженерії. Для практичного використання автори [3] надають спрощені інструкції, акцентуючи на доступності АНР для вирішення управлінських завдань.

Інтеграція АНР з нечіткою логікою, розглянута в [4], дозволяє враховувати невизначеність у суб'єктивних оцінках, зокрема при відборі персоналу. Огляд [5] систематизує застосування АНР у логістиці, освіті та охороні здоров'я, підкреслюючи його універсальність і обмеження. В [6] аналізують еволюцію АНР і ANP за 2000–2019 роки, порівнюючи їх з іншими методами та відзначаючи адаптацію до сучасних викликів.

Сучасні дослідження демонструють інноваційні підходи до АНР. В [7] поєднано АНР з машинним навчанням для оцінки екологічно стійких тракторів, демонструючи потенціал гібридних методів. В [8] застосовано АНР для оцінки психологічного розширення прав і можливостей працівників, підкреслюючи його роль у соціальних дослідженнях. У сфері розумних медичних систем в [9] використовують АНР для ранжування критеріїв управління здоров'ям, а в [10] адаптують метод для оцінки компетенцій у секторі освітніх технологій.

Отже, аналіз літературних джерел свідчить про високу релевантність та універсальність методу АНР у сфері управління персоналом. Існуючі підходи демонструють як класичні, так і гібридні форми реалізації цього методу, що дозволяє адаптувати його до специфіки конкретного підприємства, умов ринку та профілю вакансій.

На відміну від загальних підходів до застосування АНР, дане дослідження інтегрує кількісні та якісні показники у модель підбору персоналу для мережі магазинів роздрібної торгівлі регіонального рівня, що дозволить отримати модель більш адаптивну до реальних умов ринку праці та детальнішу картину компетентності кандидатів.

3. Моделі і методи.

3.1. Формалізація задачі. Ієрархічна модель прийняття рішення побудована на основі відомостей отриманих від особи, що приймає рішення (ОПР) та включає три рівні.

Рівень 1 (Мета). Вибір найкращого кандидата.

Рівень 2 (Критерії):

- зовнішній вигляд (Physical Appearance);
- мовлення (Verbal Communication Skills);
- локація проживання (Place of Residence);

- обмеженість з релігійних причин (Religious Constraints);
- вік кандидата (Age);
- наявність дітей до 12 років (Presence of Young Children);
- частота зміни місця роботи (Job Turnover Rate).

Рівень 3 (Альтернативи): три кандидати на посаду.

3.2. Побудова матриці попарних порівнянь. Для визначення ваг критеріїв було сформовано матрицю попарних порівнянь з урахуванням шкали Сааті [1, 2], яка передбачає оцінювання відносної важливості кожного критерію по відношенню до інших. Значення елементів матриці можуть набувати величин від 1 до 9 або обернених до них ($1/2, 1/3, \dots, 1/9$), що відображає перевагу одного критерію над іншим.

Таблиця 1.

Матриця попарних порівнянь критеріїв за методом аналізу ієрархій

Критерії	PA	VCS	PR	RC	Age	PYC	JTR
PA	1	3	1/7	6	1/5	1/4	1/9
VCS	1/3	1	1/9	6	1/9	1/5	1/7
PR	7	9	1	1/2	2	1/3	1/3
RC	1/6	1/6	2	1	1/9	1/9	1/9
Age	5	9	1/2	9	1	3	1
PYC	4	5	3	9	1/3	1	1/4
JTR	9	7	3	9	1	4	1

Отриману матрицю було використано для обчислення локальних ваг $w = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$ критеріїв за допомогою методу нормалізації або обчислення власного вектора.

3.3. Перевірка узгодженості [1, 2]. Для визначення рівня узгодженості експертних оцінок розраховується індекс узгодженості (CI) та коефіцієнт узгодженості (CR):

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

де $\lambda_{\max}$ — найбільше власне значення матриці попарних порівнянь, яке можна наближено обчислити за формулою:

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j^* \right) / w_i^*,$$

де a_{ij} — елемент матриці попарного порівняння (відношення важливості критерію i до критерію j), n — кількість критеріїв, w_i^* — нормалізована вага критерію i у векторі w^* .

Коефіцієнт узгодженості:

$$CR = \frac{CI}{RI},$$

де RI — середнє значення індексу випадкової узгодженості для матриці порядку n . Так як, $CR = 0.094 < 0.1$, то матриця вважається узгодженою, а міркування ОПР непротирічливими.

4. Експерименти. Для перевірки ефективності запропонованого підходу було проведено експериментальне дослідження з використанням програмного забезпечення SuperDecisions [11], яке реалізує метод аналізу ієрархій (АНР).

4.1. Побудова моделі у SuperDecisions. Ієрархічна структура задачі, яка включає ціль, сім критеріїв і три альтернативи (Person 1, Person 2, Person 3), була повністю реалізована у середовищі SuperDecisions. Інтерфейс програми дозволив візуально представити модель, створити необхідні вузли та кластери цілі, критеріїв та альтернатив, реалізувати зв'язки між ними відповідно до заданої структури.

4.2. Порівняння альтернатив. На основі експертних суджень були проведені парні порівняння альтернатив за кожним критерієм. Для суб'єктивних критеріїв (зовнішній вигляд, мовлення, локація проживання) використовувалась шкала Сааті та думка ОНР. Для кількісних показників (вік, кількість дітей, частота зміни місця роботи) порівняння здійснювалося прямим способом введення фактичних значень. Оцінювання виконувалося наступним чином:

- за критерієм зовнішнього вигляду експертні оцінки засвідчили перевагу кандидата 1 над іншими;
- за мовленням найвищу оцінку отримав кандидат 2;
- за локацією проживання перевага була віддана кандидатам 1 і 2;
- за кількісними критеріями (вік, діти, зміна роботи) значення було введено безпосередньо у відповідні порівняльні таблиці та автоматично нормалізовано системою.

Усі оцінки вводилися до відповідних локальних матриць у SuperDecisions, після чого система виконувала обчислення локальних пріоритетів для кожної альтернативи.

5. Результати. На завершальному етапі моделювання було отримано глобальні пріоритети кандидатів, що базуються на об'єднанні локальних пріоритетів альтернатив за кожним критерієм з відповідними вагами критеріїв. Результати розрахунку були згенеровані у вигляді матриці обмежень (Limit Matrix), яка відображає остаточні впливи всіх критеріїв на альтернативи з урахуванням ієрархічної структури моделі.

5.1. Ваги критеріїв. Інтегральні ваги критеріїв визначено за допомогою парних порівнянь та представлено у таблиці 2.

Таблиця 2.

Ваги критеріїв

Критерій	PA	VCS	PR	RC	Age	PYC	JTR
Вага	0.0268	0.0177	0.0997	0.0084	0.1323	0.0518	0.1640
Відсоткова вага	5%	4%	19%	2%	26%	11%	32%

5.2. Глобальні пріоритети кандидатів. Глобальні ваги альтернатив сформовано у результаті автоматичної агрегації у SuperDecisions. Підсумкові значення пріоритетів наведено у таблиці 3.

6. Обговорення. Використання програмного забезпечення SuperDecisions дало змогу не лише отримати інтегральні оцінки кандидатів, але й провести

Таблиця 3.

Глобальні пріоритети кандидатів

Альтернатива	Person 1	Person 2	Person 3
Глобальний пріоритет	28%	31%	41%

повноцінний сенситивний аналіз для оцінки впливу ваг окремих критеріїв на остаточне ранжування альтернатив.

6.1. Інтерпретація глобальних оцінок. Аналіз показав, що найвищу глобальну оцінку отримала альтернатива «Person 3» (41%), що зумовлено його перевагами за такими «впливовими» критеріями, як вік, частота зміни місця роботи та наявність дітей. Значення пріоритетів кандидатів відображає не лише їхні абсолютні характеристики, а й відносну важливість кожного критерію в контексті ухвалення рішення (табл. 2).

6.2. Сенситивний аналіз. Сенситивний аналіз, дозволив оцінити, наскільки стабільною є модель щодо зміни ваг окремих критеріїв. На рис.1 представлено графіки залежності нормалізованих пріоритетів кандидатів від ваг критеріїв. Основні висновки з аналізу наступні.

- Критерії зовнішнього вигляду та наявності малолітніх дітей є найчутливішими, вони мають по три точки зміни рангів. Також кожен з них має точки зміни пріоритетів для обраної альтернативи 3. З іншого боку ці точки лежать не в околі ваги критерію (пунктирної лінії).
- Критерій частоти зміни роботи також має точки зміни рангів, але не для фаворитної альтернативи.
- Інші критерії мають обмежений вплив: їх зміна не призводить до перетину ліній пріоритетів, отже, не змінює ранжування. Це вказує на стійкість моделі до зміни ваг другорядних характеристик, що демонструє слабку диференціюючу здатність цих критеріїв у контексті даної вибірки кандидатів.

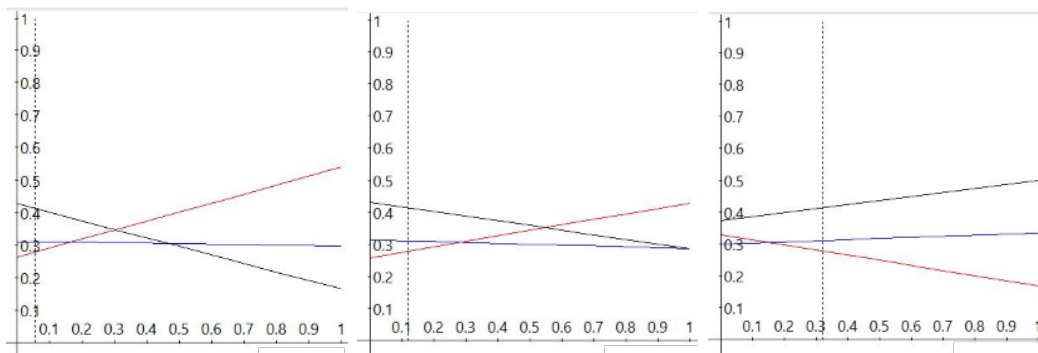


Рис. 1. Фрагмент сенситивного аналізу критеріїв а) РА, б) РYC, в) JTR.

6.3. Узагальнений аналіз. Отримані результати дозволяють стверджувати, що модель є загалом стійкою, однак її чутливість до змін ваг критеріїв, пов'язаних із зовнішнім виглядом та наявністю малолітніх дітей, вимагає особливої

уваги під час прийняття остаточного рішення. Таким чином, сенситивний аналіз виступає важливим етапом перевірки надійності моделі та виявлення критичних факторів, які найбільше впливають на результат.

7. Висновки. У рамках дослідження запропоновано і реалізовано модель багатокритеріального підбору персоналу на основі методу аналізу ієрархій (АНР), адаптовану до умов мережі магазинів роздрібної торгівлі на регіональному рівні. Розроблена ієрархічна структура, яка охоплює як об'єктивні кількісні, так і суб'єктивні якісні критерії, дозволила здійснити комплексну оцінку кандидатів з урахуванням реалій сучасного ринку праці.

Наукова новизна дослідження полягає у: розробці моделі, що поєднує кількісні та якісні показники у контексті підбору персоналу для галузі роздрібної торгівлі; проведенні сенситивного аналізу, який дозволив оцінити високу стабільність прийнятого рішення.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що: модель може бути використана у відділах кадрів роздрібних компаній для систематизації процесу найму; результат моделювання дозволяє зменшити суб'єктивність у процесі добору та зробити вибір максимально прозорим і логічно обґрунтованим; підхід може бути масштабований або адаптований до інших галузей та типів вакансій.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на автоматизацію введення даних, інтеграцію з CRM-системами або використання гібридних моделей, що поєднують АНР із методами машинного навчання.

Список використаної літератури

1. Saaty T. L. The analytic hierarchy process: Planning, priority setting, and resource allocation. New York : McGraw-Hill, 1980. 287 p.
2. Saaty T. L., Vargas L. G. Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process. Boston, MA : Springer US, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3597-6>
3. Mu E., Pereyra-Rojas M. Practical decision making using the analytic hierarchy process. Cham : Springer, 2017. 200 p.
4. Güngör Z., Serhadlıoğlu G., Kesen S. E. A fuzzy AHP approach to personnel selection problem. *Applied Soft Computing*. 2009. Vol. 9, No. 2. P. 641–646. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2008.09.003>
5. Vaidya O. S., Kumar S. Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*. 2006. Vol. 169, No. 1. P. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.04.028>
6. Khan A. U., Ali Y. ANALYTICAL HIERARCHY PROCESS (AHP) AND ANALYTIC NETWORK PROCESS METHODS AND THEIR APPLICATIONS: A TWENTY YEAR REVIEW FROM 2000-2019. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*. 2020. Vol. 12, No. 3. P. 369–459. DOI: <https://doi.org/10.13033/ijahp.v12i3.822>
7. Machine learning and analytic hierarchy process integration for selecting a sustainable tractor / H. A. A. Sayed et al. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14, No. 1. P. 1–16. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-024-78023-z>
8. The Use of the Analytic Hierarchy Process in Improving Psychological Empowerment and Employee Performance / Q. Gao et al. *Journal of Organizational and End User Computing*. 2023. Vol. 35, No. 3. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.4018/joeuc.321171>
9. AHP-based multi-criteria decision-making approach for monitoring health management practices in smart healthcare system / S. Pant et al. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*. 2023. P. 1444–1455. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13198-023-01904-5>
10. Sarangi P., Mishra R., Padhi A. Balancing skills and expectations: AHP analysis of competency-based recruitment in the EdTech sector. *Future Business Journal*. 2025. Vol. 11, No. 1. P. 1–14. DOI: <https://doi.org/10.1186/s43093-025-00483-0>

11. Creative Decisions Foundation. Super Decisions. URL: <https://www.superdecisions.com> (дата звернення: 10.04.2025).

Kondruk N. E., Tyrpak O. V. Modeling Multi-Criteria Selection In Personnel Recruitment Using The Analytic Hierarchy Process.

The article examines the application of the Analytic Hierarchy Process (AHP) to the task of multi-criteria personnel recruitment, adapted for a regional-level retail network. A three-level hierarchical model was developed, including the goal, seven evaluation criteria for candidates, and three alternatives. The modeling process incorporated both quantitative and qualitative indicators. The SuperDecisions software was used to perform calculations of local and global priorities of alternatives and to conduct a sensitivity analysis. The research results showed that the inverted criteria of age and job change frequency have the greatest impact on decision-making, whereas social characteristics have a somewhat limited influence. The most optimal candidate for the position was identified based on the overall integrated evaluation. The obtained results can be utilized for the automation and justification of decision-making in the field of human resource management.

Keywords: Analytic Hierarchy Process, AHP, personnel recruitment, multi-criteria selection, decision-making, sensitivity analysis.

References

1. Saaty, T. L. (1980). *The analytic hierarchy process: Planning, priority setting, and resource allocation*. New York: McGraw-Hill.
2. Saaty, T. L., & Vargas, L. G. (2012). *Models, methods, concepts & applications of the analytic hierarchy process*. Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3597-6>
3. Mu, E., & Pereyra-Rojas, M. (2017). *Practical decision making using the analytic hierarchy process*. Cham: Springer.
4. Güngör, Z., Serhadlıoğlu, G., & Kesen, S. E. (2009). A fuzzy AHP approach to personnel selection problem. *Applied Soft Computing*, 9(2), 641–646. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2008.09.003>
5. Vaidya, O. S., & Kumar, S. (2006). Analytic hierarchy process: An overview of applications. *European Journal of Operational Research*, 169(1), 1–29. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.04.028>
6. Khan, A. U., & Ali, Y. (2020). Analytical hierarchy process (AHP) and analytic network process methods and their applications: A twenty year review from 2000–2019. *International Journal of the Analytic Hierarchy Process*, 12(3), 369–459. <https://doi.org/10.13033/ijahp.v12i3.822>
7. Sayed, H. A. A., El-Sayed, M., Abdel-Magied, R., & El-Khateeb, A. (2024). Machine learning and analytic hierarchy process integration for selecting a sustainable tractor. *Scientific Reports*, 14(1), 1–16. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-78023-z>
8. Gao, Q., Liu, Y., Zhang, X., & Wang, L. (2023). The use of the analytic hierarchy process in improving psychological empowerment and employee performance. *Journal of Organizational and End User Computing*, 35(3), 1–22. <https://doi.org/10.4018/joeuc.321171>
9. Pant, S., Kumar, A., Ram, M., & Kumar, A. (2023). AHP-based multi-criteria decision-making approach for monitoring health management practices in smart healthcare system. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, 1444–1455. <https://doi.org/10.1007/s13198-023-01904-5>
10. Sarangi, P., Mishra, R., & Padhi, A. (2025). Balancing skills and expectations: AHP analysis of competency-based recruitment in the EdTech sector. *Future Business Journal*, 11(1), 1–14. <https://doi.org/10.1186/s43093-025-00483-0>
11. Creative Decisions Foundation. (n.d.). *Super Decisions*. (April 20, 2025). Retrieved from <https://www.superdecisions.com>

Одержано 21.03.2025

УДК 519.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).195-208](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).195-208)**Д. Є. Лубенець**

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,

аспірант кафедри системного аналізу та управління

lubenets.d.y@nmu.one

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8563-3760>

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЕНЬ В АЛГОРИТМАХ МУЛЬТИПЛЕКСНОГО РОЗБИТТЯ КОНТИНУАЛЬНИХ МНОЖИН

У роботі представлено розробку та оптимізацію алгоритмів для розв'язання задач мультиплексного розбиття множин із використанням методів векторизації обчислень. Здійснено порівняння базового ітеративного підходу із векторизованим методом, що також передбачає попереднє обчислення тензора відстаней між точками та центрами. Використання одиночних потоків команд з множинними потоками даних дозволило значно скоротити час виконання обчислень та підвищити продуктивність алгоритму. Результати підтверджують ефективність застосованих методів для задач із великими обсягами даних.

Ключові слова: мультиплексне розбиття, оптимізація, мемоізація, векторизація, SIMD-інструкції.

1. Вступ. Проблеми ефективного зонування територій, розміщення сервісних центрів і раціонального розподілу між ними ресурсів є об'єктом досліджень сучасної оптимізаційної теорії і набувають особливої актуальності у контексті гуманітарної логістики, де необхідно швидко та ефективно реагувати на надзвичайні ситуації.

У статті [1] представлено моделі та методи оптимального розбиття території на зони обслуговування сервісними центрами, що враховують можливість забезпечення послугою будь-яким з кількох найближчих центрів. У цих моделях передбачається мінімізація відстані або часу надання послуг. Їх узагальненням є задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями на потужності (ємності) центрів, описані в [2].

У роботах [1, 2] автори акцентують увагу на чисельній реалізації і коректності роботи запропонованих алгоритмів оптимального мультиплексного розбиття множин. По-перше, порівнюють з відомими результати розв'язання задач розбиття на монополії, які є окремим випадком задач оптимального мультиплексного розбиття множин (ОМРМ) при $k = 1$. По-друге, модельні приклади автори складають за таких вихідних даних, аби результати розміщення-розбиття були заздалегідь передбачуваними. Питання оптимізації самої програмної реалізації розроблених алгоритмів мультиплексного розбиття задля прискорення їх роботи не розглядалися. Зменшення обсягу задіяних обчислювальних ресурсів і часу виконання алгоритмів ОМРМ є суттєвим аспектом при подальшій їх інтеграції з сучасними ГІС, що робить актуальним дане дослідження.

Взагалі, задачі оптимального мультиплексного розбиття мають широкий спектр застосувань, зокрема побудову діаграм Вороного вищого порядку, визначення зон впливу центрів із врахуванням їхньої потужності. Результати чисельних експериментів, наведених в роботах [2, 3] демонструють ефективність

запропонованих методів, зокрема в задачах розподілу ресурсів у реальних умовах. Останні розв'язуються із залученням геоінформаційних систем. При цьому важливим є використання сучасних алгоритмів, які дозволяють швидко отримувати оптимальні розв'язки навіть для великих множин.

Метою роботи є скорочення часу виконання алгоритму мультиплексного розбиття континуальних множин шляхом використання сучасного програмного інструментарію, зокрема, методів векторизації обчислень, бібліотек для числових розрахунків (наприклад, NumPy), а також апаратних можливостей, таких як підтримка SIMD-інструкцій (Single Instruction Multiple Data) і оптимізація під сучасну архітектуру процесорів.

2. Огляд літератури. Задачі розміщення-розподілу є фундаментальними в аналізі логістичних процесів і зонуванні територій, зокрема в умовах гуманітарної логістики та кризових ситуацій. У дослідженні [4] подано систематичний огляд літератури зі 105 статей, пов'язаних з математичним моделюванням розподільчих процесів, розробкою підходів щодо планування та виконання заходів з матеріально-технічного забезпечення гуманітарної допомоги. У контексті конкурентного середовища задачі розміщення сервісних об'єктів вимагають врахування багатьох факторів, таких як частка ринку, яку можуть зайняти об'єкти, їхня привабливість для клієнтів та реакції конкурентів.

Для вирішення проблеми розміщення-розподілу в роботі [5] використано стратегію, пов'язану з кластеризацією, визначаючи місця для об'єктів парку за допомогою C-Means і нечіткого алгоритму кластеризації.

У роботі [6] представлено огляд моделей конкурентного розташування для оцінювання ринкової частки об'єктів залежно від відстані до них та рівня їхньої привабливості. Значний внесок у розвиток цих підходів зробила Tammy Drezner, запропонувавши інноваційні методи для визначення найкращих локацій конкурентних об'єктів [6, 7].

У дискретних та неперервних моделях розташування об'єктів важливим є врахування варіативності потенційних місць розміщення. У роботі [7] розглянуто неперервні задачі оптимального розміщення об'єктів, де розташування може бути визначене в будь-якій точці площини або обмеженому регіоні. Це відрізняє такі моделі від дискретних, де набір місць розташування є фіксованим. У завданнях, пов'язаних із розміщенням складів чи медичних центрів, основною метою є мінімізація сукупних витрат на доставку, що включає відстань та обсяги поставок. Такі моделі забезпечують вищу гнучкість у прийнятті рішень і дозволяють враховувати безліч можливих конфігурацій мережі.

Існує низка наукових робіт, у яких вивчаються проблеми розміщення розподілу з урахуванням динаміки зміни певних параметрів. Так, дослідження [8] зосереджено на оптимізації розміщення динамічного об'єкта мережі технічного обслуговування сільськогосподарської техніки з метою швидкої та надійної реакції на її несправність під час збору врожаю. Проблема полягає у визначенні місця розміщення тимчасових станцій технічного обслуговування та кількості містких сервісних об'єктів для кожної з них, аби задовольнити потреби в технічному обслуговуванні. Математичною моделлю є змішана цілочисельна задача лінійного програмування.

Особливої уваги заслуговують багатоетапні моделі, що поєднують елементи дискретної та неперервної оптимізації. У роботі [9] запропоновано математи-

чну модель для задачі двоетапного розміщення-активації об'єктів, яка враховує три рівні центрів: регіональний, субрегіональний та розподільчий. Автори пропонують два підходи: перший передбачає поділ процесу на два окремі етапи (визначення координат розподільчих центрів та подальше розміщення субрегіональних), другий використовує комбінований підхід, інтегруючи обидва етапи. Обидва методи враховують витрати на операції, доставку, розміщення та активацію об'єктів, дозволяючи мінімізувати сукупні витрати.

У роботах [10, 11] розглянуто частково-двоетапні процеси розподілу матеріальних потоків, що включають моделювання зв'язків між виробничими підприємствами, розподільчими центрами та кінцевими споживачами. Автори пропонують математичні моделі, які дозволяють визначати кількість, місткість і координати розподільчих центрів, оптимізуючи транспортні витрати та раціоналізуючи логістичні процеси. Високий рівень деталізації моделей забезпечує їхню застосовність до стратегічного планування в соціальних, економічних та виробничих сферах.

Задачі розміщення-розподілу в умовах невизначеності також є важливим напрямком сучасних досліджень. У роботі [12] розглядається розподільно-робастна модель для задачі багатоперіодного розміщення-розподілу з урахуванням множинних ресурсів і рівнів потужності. Автори акцентують увагу на врахуванні невизначеного попиту та часу виконання логістичних операцій. Представлений алгоритм розгалужень та відсікань із додатковими удосконаленнями, такими як нормалізація двійстих змінних та генерування відсікань Benders, демонструє високу ефективність у вирішенні задач великих розмірів.

У задачах медичної логістики одним із ключових аспектів є забезпечення якості постачання та задоволення потреб споживачів. У [13] представлено трирівневу модель постачання крові, яка включає якісні критерії, такі як свіжість продукту, співвідношення “попит-пропозиція” та надійність обладнання. Враховуючи невизначеність попиту на кров, модель інтегрує методологію Interval Evidential Reasoning (IER), що дозволяє оптимізувати розподіл у реальних умовах.

Реалізація розроблених методів ОМРМ передбачає виконання численних однакових операцій над масивами даних. Для підвищення обчислювальної ефективності таких алгоритмів доцільним є використання техніки векторизації [14, 15]. Як показано в [14], така оптимізація суттєво зменшує час виконання при обробці просторових множин великого обсягу. Аналогічні висновки наведено в [15], де векторизовані процедури продемонстрували вищу продуктивність порівняно з класичними ітераційними підходами.

Отже, сучасні дослідження в галузі розміщення-розподілу акцентують увагу на інтеграції дискретної та неперервної оптимізації, врахуванні невизначеностей та використанні професійного програмного забезпечення. Це дозволяє вирішувати широкий спектр задач, від стратегічного планування логістичних мереж до управління ресурсами в кризових ситуаціях.

3. Постановка завдання. Основною задачею є оптимізація процесу мультиплексного розвитку множин з урахуванням обмежених потужностей сервісних центрів. При цьому передбачається, що попит на певну послугу неперервно розподілений у заданому регіоні. Необхідно розподілити клієнтів (споживачів послуги) таким чином, щоб мінімізувати витрати на їх обслуговування, врахо-

вуючи кількість і місця розташування сервісних центрів, а також їх потужності.

Ітеративний підхід реалізації алгоритму розв'язання задачі оптимального мультиплексного розбиття множин, який розроблено в [1, 2] і застосовано, зокрема, в [3, 10], характеризується високими обчислювальними витратами.

Потрібно розробити та впровадити в алгоритми мультиплексного розбиття множин оптимізовані методи обчислення, зокрема векторизацію та процедуру попереднього розрахунку відстаней між точками. Це дозволить значно скоротити час виконання алгоритмів і підвищити ефективність розв'язання задач для великих множин і для будь-якого числа центрів, що розміщуються.

4. Матеріали і методи. Представимо математичну модель задачі. Для цього введемо наступні позначення: Ω — обмежена, замкнена множина у просторі E_2 , $\tau_i \in \Omega$, $i = 1, 2, \dots, N$, — центри обслуговування (можуть бути зафіксованими або такими, розташування яких необхідно визначити в рамках моделі). Функція $\rho(x)$ є невід'ємною, описує попит на послугу в точці $x \in \Omega$. Вартість обслуговування клієнта в точці x центром τ_i задається виразом $c(x, \tau_i) / w_i$, де $c(x, \tau_i)$ — це функція витрат, а w_i — ваговий коефіцієнт. Значення a_i відповідає вартості створення нового центру або модернізації існуючого τ_i , а також враховує фіксовані організаційні витрати, розраховані на одиницю попиту. Параметри $b_1, b_2, \dots, b_N$ визначають максимальну кількість послуг, яку може забезпечити кожен центр.

Необхідно розділити регіон Ω на підмножини Ω_{σ_l} , $l = \overline{1, L}$, кожна з яких охоплює клієнтів, які обслуговуються однаковим набором із k -найближчих сервісних центрів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, де $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ — набір індексів центрів, які асоціюються з підмножиною Ω_{σ_l} . При цьому розподіл потрібно виконати з урахуванням обмежень потужності кожного j -го центру.

Для опису задачі також вводяться такі позначення: $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ — множина індексів усіх центрів; $M(\mathbf{N}, k)$ — множина всіх можливих k -елементних підмножин множини $\mathbf{N}$, де $|M(\mathbf{N}, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$, $l = \overline{1, L}$ — елементи множини $M(\mathbf{N}, k)$.

Означення 1. Система підмножин $\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$, яка утворює $\Omega \subset E^2$ називається розбиттям k -го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, якщо виконуються такі умови

$$\bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega,$$

$$\text{mes} \left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j} \right) = 0; \quad \sigma_i, \sigma_j \in M(\mathbf{N}, k), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, L},$$

де $\text{mes}(\cdot)$ — міра множини. Підмножини Ω_{σ_j} називаються підмножинами k -го порядку множини Ω .

Позначимо через $\Sigma_{\Omega}^{N,k}$ — множину всіх можливих розбиттів k -го порядку множини Ω на підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, тобто:

$$\Sigma_{\Omega}^{N,k} = \left\{ \bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\} : \bigcup_{l=1}^L \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \right. \\ \left. \text{mes} \left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j} \right) = 0, \quad \sigma_l, \sigma_j \in M(\mathbf{N}, k), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, L} \right\}.$$

Задача А. Задача знаходження оптимального розбиття континуальної множини Ω порядку k за умови врахування розміщення центрів при обмеженнях:

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \rightarrow \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_{\Omega}^{N,k}; \tau^N \in \hat{\Omega}^N},$$

де функціонал F визначається як:

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \gamma_i^l \rho(x) dx.$$

Умови задачі (обмеження на потужності центрів):

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: i \in \sigma_l}}^L \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \quad (2)$$

Тут $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$, — функція вартості, визначена на $\Omega \times \Omega$. Функція $\rho(x)$ — обмежена та невід'ємна на Ω ; $w_i > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $i = \overline{1, N}$, — задані числа. Коефіцієнти γ_i^l визначають частку обслуговування, яку центр τ_i надає зоні Ω_{σ_l} , враховуючи, що $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$. Ці коефіцієнти задовольняють умови:

$$0 \leq \gamma_j^l \leq 1, \quad \sum_{i \in \sigma_l} \gamma_i^l = 1. \quad (3)$$

Попит на послуги у межах області Ω може розподілятися пропорційно або рівномірно. У першому випадку для кожного $l = 1, \dots, L$ та $j = 1, \dots, N$, де $j \in \sigma_l$: $\gamma_j^l = b_j / \sum_{q: q \in \sigma_l} b_q$; у другому — $\gamma_j^l = \frac{1}{k}$, для всіх j та l .

Умовою розв'язності сформульованої задачі є наступне твердження (див. [2]): нехай в задачі А величина $S = \int_{\Omega} \rho(x) dx$, і виконуються наступні умови:

$$0 \leq b_i \leq S, \quad i = 1, \dots, N; \quad \sum_{i=1}^p b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^N b_i.$$

Тоді для будь-якого фіксованого вектора $\tau^N \in \Omega^N$ існує хоча б одне допустиме розбиття, яке задовольняє обмеження (1) та (2).

Метод вирішення задачі А ґрунтується на поданні її в термінах характеристичних вектор-функцій, які описують розбиття Ω порядку k .

Означення 2. Характеристична вектор-функція розбиття $\bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$ множини Ω порядку k — це вектор-функція $\chi(\cdot) = (\chi_1(\cdot), \dots, \chi_L(\cdot), \dots, \chi_L(\cdot))$, визначена на Ω , де кожна компонента є характеристичною функцією підмножини Ω_{σ_l} . Вона задається формулою: м. в. для $x \in \Omega$

$$\chi_l(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{\sigma_l}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{\sigma_l}, \end{cases} \quad l = \overline{1, L}.$$

Це визначення дає можливість однозначно асоціювати кожну точку множини Ω із відповідною підмножиною Ω_{σ_l} . Для кожного $l = \overline{1, L}$ введемо вектор $\lambda^l = (\lambda_1^l, \dots, \lambda_N^l)$ індикаторів індексів центрів, які входять до набору $\sigma_l \subset N$:

$$\lambda_i^l = \begin{cases} 1, & i \in \sigma_l, \\ 0, & i \in N \setminus \sigma_l, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N.$$

Задача A може бути переписана у наступному еквівалентному вигляді.

Задача В.

$$\min_{(\chi(\cdot), \tau^N) \in \Gamma^k \times \hat{\Omega}^N} I(\chi(\cdot), \tau^N),$$

де функціонал $I(\chi(\cdot), \tau^N)$ має вигляд:

$$I(\chi(\cdot), \tau^N) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \left(\sum_{i=1}^N (c(x, \tau_i) / w_i + a_i) \gamma_i^l \lambda_i^l \right) \rho(x) \chi_l(x) dx,$$

Обмеження:

$$\Gamma^k = \left\{ \chi(\cdot) : \chi(\cdot) \in \Gamma_0^k, \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l \rho(x) \chi_l(x) dx = b_i, \quad i = 1, \dots, p, \right.$$

$$\left. \int_{\Omega} \sum_{l=1}^L \gamma_i^l \lambda_i^l \rho(x) \chi_l(x) dx \leq b_i, \quad i = p+1, \dots, N \right\};$$

$$\Gamma_0^k = \left\{ \chi(\cdot) = (\chi_1(\cdot), \dots, \chi_L(\cdot)) : \chi_l(x) = \{0, 1\}, \quad l = 1, \dots, L, \right. \\ \left. \sum_{l=1}^L \chi_l(x) = 1, \quad \forall x \in \Omega \right\}.$$

Оптимальне розв'язання задачі B визначається за такими формулами [1, 2]: для усіх $l = 1, \dots, L$, майже всюди для $x \in \Omega$

$$\hat{\chi}_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \sum_{i=1}^N \left(\frac{c(x, \hat{\tau}_i)}{w_i} + a_i + \hat{\psi}_i \right) \gamma_i^l \lambda_i^l = \min_{s=1, L} \sum_{i=1}^N \left(\frac{c(x, \hat{\tau}_i)}{w_i} + a_i + \hat{\psi}_i \right) \gamma_i^s \lambda_i^s, \\ 0, & \text{в іншому випадку } \forall l = \overline{1, L}; \end{cases} \quad (4)$$

де $\hat{\tau}_1, \dots, \hat{\tau}_N, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_N$ є розв'язком задачі скінченновимірної умовної оптимізації:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \hat{\Omega}^N} G_1(\tau, \psi) \rightarrow \max \quad (5)$$

за умов

$$\psi_i \geq 0, \quad i = p+1, \dots, N, \quad (6)$$

де

$$G_1(\tau^N, \psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N_s, k) \\ l=1, \dots, L}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i) / w_i + a_i + \psi_i] \gamma_i^l \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

Отже, задача B зводиться до задачі скінченновимірної умовної оптимізації (4)–(6).

5. Базовий ітеративний підхід. Урахування умов невід’ємності на додаткові змінні (6) в отриманій задачі (4)–(6) відбувається шляхом введення функції зовнішнього штрафу. Якщо множина $\hat{\Omega}^N$ є замкненою, опуклою, то для задоволення умов належності $\tau^N \in \hat{\Omega}^N$ (у випадку розв’язання задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з розміщенням центрів) введено оператор проєктування точки на множину $\hat{\Omega}^N$. Якщо остання має складну форму, то для її опису використовуються R-функції Рвачова і тоді відстеження умов належності розташовуваних центрів множині здійснюється за допомогою функцій штрафу. Розв’язання задачі оптимального мультиплексного розбиття множини Ω виконується шляхом пошуку одночасно мінімуму за τ^N та максимуму за ψ цільової функції $G_1(\tau^N, \psi)$.

Оптимізація цільової функції, розширеної функціями штрафу, досягається за допомогою ітераційного процесу, який реалізує г-алгоритм Шора, що має перевагу над градієнтним спуском завдяки своїй здатності ефективніше працювати з негладкими функціями, які містять багато локальних мінімумів або мають складний рельєф. Градієнтний спуск, хоча й широко використовується, може демонструвати уповільнення або застрягати в локальних екстремумах, тоді як г-алгоритм Шора забезпечує більш стійкий пошук глобального мінімуму завдяки адаптивному вибору кроків і додатковим механізмам стабілізації.

На кожному кроці обчислюється (аналітично або за допомогою апарату скінченних різниць) псевдоградієнт функції $G_1(\tau^N, \psi)$, що дозволяє оновлювати значення параметрів ψ в напрямку збільшення, а вектор τ — в напрямку зменшення цільової функції. Процес завершується, коли виконуються критерії зупинки, такі як мала норма псевдоградієнта або незначна зміна значень цільової функції між ітераціями.

Якщо центри є фіксованими, то в задачі (5)–(6) немає потреби мінімізувати функцію $G_1(\tau^N, \psi)$ за змінною τ^N . Тобто розмірність задачі (5)–(6) у цьому випадку скорочується на $2N$ одиниць. В більшості практичних задач τ фіксовані, або вибираються з набору доступних. Тому оптимізацію алгоритмів розбиття будемо проводити на прикладі задач ОМРМ без розміщення центрів. До того ж збільшення вимірності простору змінних не впливає суттєво на основну мету даного дослідження.

Розглянемо основні етапи (5)–(6) за умови фіксованих центрів.

Етапи реалізації:

1. Ініціалізація. Визначаються розміри області Ω та масштаб обчислень. Здаються початкові координати центрів, початкові значення ψ , а також потужності центрів. Формуються початкові умови для запуску г-алгоритму.
2. Обчислення градієнта. Для кожної точки $x \in \Omega$ обчислюються відстані до всіх центрів. Визначається оптимальний розподіл точок між центрами за формулами (4). Обчислюється градієнт, який показує, як змінити значення ψ , щоб збільшити цільову функцію.
3. Оновлення параметрів. На основі обчисленого градієнта та правил г-алгоритму визначаються нові значення параметрів ψ .
4. Критерії завершення. Процес завершується, коли норма градієнта стає меншою за встановлений поріг, або зміни в значеннях цільової функції між

ітераціями стають незначними.

5. Фінальний розподіл. Після завершення ітераційного процесу визначається, до якого центру належить кожна точка області Ω , і обчислюється максимальне значення цільової функції.

Для візуалізації роботи алгоритму було виконано розбиття області Ω на зони обслуговування при кратності розбиття $k = 2$ для випадків без обмежень на потужності центрів та з обмеженнями потужності (по 5 одиниць для 1-го і 9-го центрів). Загальний попит у регіоні складає 100 одиниць ресурсу, рівномірно розподіленого по всій області.

У випадку необмежених потужностей кожна точка регіону асоціюється із двома найближчими центрами, тоді як випадку з обмеженнями розподіл точок між центрами враховує як відстані, так і задані обмеження.

На рисунку 1 видно, що у випадку з обмеженнями потужності 1-й та 9-й центри обслуговують меншу кількість точок, що збільшує відстані до інших центрів та, відповідно, загальні витрати.

Описаний алгоритм потребує значних обчислювальних ресурсів, оскільки на кожній ітерації γ -алгоритму для кожної точки області Ω обчислюються відстані до кожного центру, а також аналізуються можливі розподіли. Цей процес є обчислювально інтенсивним, особливо для великих областей та великої кількості центрів.

6. Оптимізований підхід з векторизацією. Цей підхід відрізняється від базового шляхом наступних удосконалень. По-перше, всі обчислення евклідових відстаней від точок x області Ω до центрів τ виконуються до початку основного циклу γ -алгоритма.

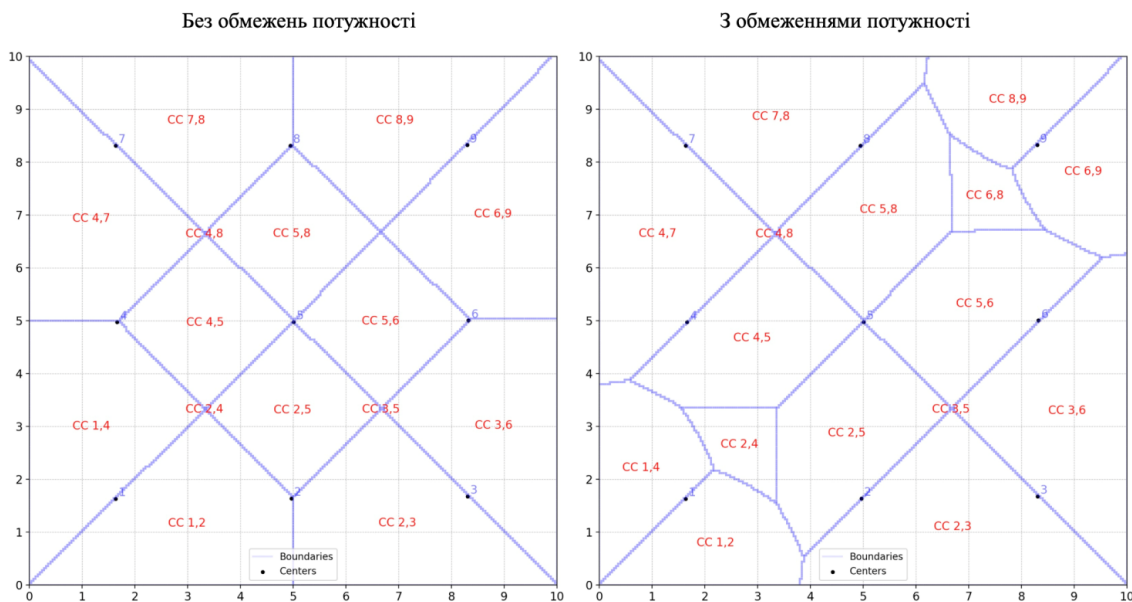


Рис. 1. Розподіл ресурсу між центрами.

Це є можливим завдяки тому, що всі центри є статичними, тобто їх координати не змінюються у процесі ітерацій. Замість повторного обчислення відстаней

на кожному кроці g -алгоритма, створюється попередньо розрахований тензор відстаней. Це значно скорочує обчислювальні витрати, майже в чотири рази.

По-друге, використовується векторизація з підтримкою сучасних процесорних SIMD-інструкцій, таких як AVX (Advanced Vector Extensions), які дозволяють паралельно обробляти великі масиви даних. Завдяки цьому досягається висока продуктивність і значно скорочується час виконання алгоритму (десятки разів).

Опис запропонованих модифікацій:

1. Перед виконанням основного алгоритму обчислюється тензор відстаней між усіма точками x області Ω і центрами τ , та зберігається у пам'яті для подальшого використання у функції градієнта.
2. Обчислення градієнта. Використовуючи векторизовані операції з тензорами, до попередньо обчисленого тензора відстаней додаються поточні значення ψ , потім для кожної точки області виконується пошук найменшої вартості обслуговування. Всі операції з масивами реалізовані у вигляді матричних множень і трансформацій, що дозволяє використовувати апаратну підтримку сучасних процесорів. Інструкції SIMD забезпечують паралельну обробку даних, що знижує кількість ітераційних обчислень у циклах.

Фрагменти програмної реалізації алгоритму обчислення відстаней від кожної точки до найближчого центру з використанням ітеративного (базового) та векторизованого підходів представлені на рисунках 2 та 3 відповідно. Ітеративний підхід базується на використанні вкладених циклів, в яких вираховується відстань від кожної точки сітки до кожного центру, що є обчислювально затратним, особливо для великих Ω і значної кількості центрів.

```
def iterative_min_distance(width, height, centers):
    """
    Ітеративний підхід для пошуку мінімальної відстані від кожної точки до центру.
    """
    # Поле для зберігання мінімальних відстаней
    field = [[0 for _ in range(width)] for _ in range(height)]
    grid_size = 1.0 # Розмір сітки

    for i in range(width):
        for j in range(height):
            min_distance = float("inf")
            for center in centers:
                # Обчислюємо відстань від точки до центру
                distance = (
                    (i * grid_size - center[0]) ** 2 + (j * grid_size - center[1]) ** 2
                ) ** 0.5
                if distance < min_distance:
                    min_distance = distance
            field[i][j] = min_distance # Зберігаємо мінімальну відстань

    return field
```

Рис. 2. Пошук мінімальних відстаней ітеративним підходом.

```
def vectorized_min_distance(width, height, centers):
    """
    Векторизований підхід для пошуку мінімальної відстані від кожної точки до центру.
    """
    x = np.arange(0, width)[: , np.newaxis] # Координати по осі X
    y = np.arange(0, height)[np.newaxis, :] # Координати по осі Y

    # Створюємо сітку координат
    grid_x, grid_y = np.meshgrid(x, y, indexing="ij")

    # Перетворюємо сітку в масив координат
    grid_coords = np.stack([grid_x, grid_y], axis=-1) # Розмірність (width, height, 2)

    # Розширюємо масиви для коректного віднімання
    grid_coords_expanded = grid_coords[..., np.newaxis, :] # (width, height, 1, 2)
    centers_expanded = centers[np.newaxis, np.newaxis, :, :] # (1, 1, num_centers, 2)

    # Обчислюємо відстань від кожної точки до усіх центрів
    distances = np.sqrt(
        np.sum((grid_coords_expanded - centers_expanded) ** 2, axis=-1)
    ) # (width, height, num_centers)

    # Знаходимо мінімальні відстані до всіх центрів
    min_distances = np.min(distances, axis=-1)

    return min_distances
```

Рис. 3. Пошук мінімальних відстаней з використанням векторизації.

Натомість векторизований підхід замінює ці цикли масовими операціями з використанням бібліотеки NumPy. Основною перевагою оптимізованого підходу є швидкість обчислень за рахунок векторизації, яка значно скорочує кількість ітерацій у функції обчислення градієнта. Одночасно обробляється велика кількість даних, що дозволяє максимально ефективно використовувати апаратне забезпечення. Також за рахунок попереднього обчислення тензора відстаней зменшується обчислювальна складність, позаяк немає необхідності виконувати повторювані обчислення відстаней на кожній ітерації.

7. Експеримент. Експеримент проводився для порівняння продуктивності двох підходів до обчислення градієнта: циклічного та векторизованого. Область дослідження розміром 10×10 , крок дискретизації 0.04, що генерує 62,500 дискретних точок. Для кожної з цих точок у функції обчислення градієнта потрібно визначити евклідові відстані до заданих центрів, провести обчислення для всіх можливих комбінацій цих центрів, аби знайти найменше значення узагальнених витрат (див. формулу (4)).

Експеримент виконувався на обладнанні, оснащеному процесором Apple M3 Max з 10 ядрами CPU та 16 ядрами GPU, а також 32 ГБ уніфікованої пам'яті. Використовувалася операційна система macOS Sequoia 15.2, Python версії 3.12.8 та бібліотека NumPy з підтримкою SIMD-інструкцій, зокрема NEON, ASIMD та інших.

В таблиці 1 наведений час обчислення градієнта для обох підходів за різних кількості центрів (N) і значень порядку розбиття (k). Результати демонструють значне скорочення часу обчислень при використанні векторизованого підходу у порівнянні з базовим. Для всіх протестованих конфігурацій N і k час виконання

Таблиця 1.

Результати експерименту

Кількість центрів τ	Порядок розбиття (k)	Час при базовому підході, с	Час при векторизованому підході, с	Прискорення, разів
4	2	2.953	0.013	227
4	3	2.032	0.009	225
5	2	5.503	0.021	262
5	3	5.355	0.021	255
6	2	9.078	0.032	284
6	3	12.128	0.041	296
7	2	14.031	0.046	305
7	3	23.416	0.073	321
8	2	20.745	0.051	407
8	3	40.349	0.095	425
9	2	28.588	0.071	403
9	3	67.145	0.173	388

векторизованого підходу був у сотні разів меншим. Зокрема, максимальне прискорення склало 425 разів для конфігурації з 8 центрами та порядком розбиття 3. Отже, використання векторизації та SIMD-інструкцій для задач із великими обсягами даних є ефективним.

У випадку розв'язання задач OPRM з розміщенням центрів прискорення алгоритму здійснюється лише за рахунок векторизації. Цей спосіб оптимізації обчислень компенсує і збільшення розмірності задачі (5)–(6), і необхідність розрахунку відстаней між точками сітки та центрами на кожній ітерації.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній роботі було досліджено ефективність оптимізації алгоритмів для задач мультиплексного розбиття множин шляхом впровадження векторизації та попереднього обчислення тензора відстаней. Представлено порівняння результатів роботи алгоритмів OPRM без та з використанням технік векторизації. Векторизований підхід дозволив суттєво зменшити час виконання алгоритму за рахунок використання сучасних SIMD-інструкцій, таких як AVX та NEON, а також уникнення повторних розрахунків відстаней. Отримані результати підтвердили, що запропоновані процедури оптимізації є особливо ефективними для великих множин точок та великої кількості сервісних центрів. Подальші дослідження пов'язані з адаптацією цих методів для їх використання в геоінформаційних системах (GIS). Крім того, перспективним є застосування оптимізованих алгоритмів для багатостадійних задач, які потребують комплексного підходу до зонування території і управління ресурсами.

Роботу виконано в рамках держбюджетної теми «Математичне і комп'ютерне моделювання раціонального розподілу матеріальних ресурсів у багаторівневих транспортно-логістичних системах» (державний реєстраційний номер 0125U00 0080).

Список використаної літератури

1. Коряшкіна Л. С., Лубенець Д. Є. Математичні моделі та методи мультиплексного роз-

- биття і багатократного покриття множин для задач розміщення-розподілу. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*. 2023. № 4. С. 20–31. DOI: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-4-3>
2. Коряшкіна Л. С., Череватенко А. П. Неперервні лінійні задачі оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2015. Вип. 28. С. 77–91.
 3. Коряшкіна Л. С., Череватенко А. П., Коряшкіна Е. О. Інтеграція ГІС-технологій і методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин. *Системні дослідження та інформаційні технології*. Київ. 2017. № 4. С. 97–108. DOI: <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.08>
 4. Rodríguez-Espíndola O., Ahmadi H., Gastélum-Chavira D., Ahumada-Valenzuela O., Chowdhury S., Dey P. K., and Albores P. Humanitarian logistics optimization models: An investigation of decision-maker involvement and directions to promote implementation. *Socio-Economic Planning Sciences*. 2023. 89, Article 101669. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101669>
 5. Pooja Kumar R., Viriyasitavat W., Yadav K., Dhiman G. Analysis of Clustering Algorithms for Facility Location Allocation Problems : Proceedings of Third International Conference on Advances in Computer Engineering and Communication Systems. Lecture Notes in Networks and Systems. Vol. 612. Springer : Singapore, 2023. pp. 597–605 https://doi.org/10.1007/978-981-19-9228-5_51
 6. Drezner Z., Eiselt H. A. Competitive location models: A review. *European Journal of Operational Research*. 2024. Vol. 316, No. 1. pp. 5–18. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.10.030>
 7. Drezner Z. Continuous Facility Location Problems. The Palgrave Handbook of Operations Research. Palgrave Macmillan : Cham, 2022. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-96935-6_9
 8. Han J., Zhang J., Zeng B., and Mao M. Optimizing dynamic facility location-allocation for agricultural machinery maintenance using Benders decomposition. *Omega*. 2021. Vol. 105. 102498. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102498>
 9. Сергєєв О. С., Ус. С. А. Дослідження двох підходів до розв'язання двоетапної задачі розміщення-активації. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2024. Вип. 45, № 2. С. 249–258. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).249-258](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).249-258)
 10. Коряшкіна Л. С., Лубенець Д. Є. Системний аналіз та математичне моделювання частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних потоків. *Системні технології*. 2024. Вип. 1, № 150. С. 86–99. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-150-2024-08>
 11. Дзюба С. В., Коряшкіна Л. С., Станіна О. Д., Лубенець Д. Є. Математичні моделі оптимізаційних задач частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням регіону. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*. 2023. № 3. С. 13–21. DOI: <https://doi.org/10.32782/IT/2023-3-2>
 12. Yang Y., Yin Y. , Wang D., Ignatius J., Dhamotharan L. Distributionally robust multi-period location-allocation with multiple resources and capacity levels in humanitarian logistics. *European Journal of Operational Research*. 2023. Volume 305, Issue 3. Pages 1042–1062. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.047>
 13. Moslemi S., Pasandideh S. H. R. A location-allocation model for quality-based blood supply chain under IER uncertainty. *RAIRO — Operations Research*. 2021. Vol. 55, pp. 967–998. DOI: <https://doi.org/10.1051/ro/2020035>
 14. Земляний О., Байбуз О. Векторизація обчислень для оптимізації коду на мові програмування Python. *Challenges and Issues of Modern Science*. 2024. Vol 3. С. 145–149. URL: <https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/215> (дата звернення: 03.02.2025).
 15. Arora I. Improving Performance of Data Science Applications in Python. *Indian Journal of Science and Technology*. 2024. Vol. 17, No. 24. pp. 2499–2507. DOI: <https://doi.org/10.17485/IJST/v17i24.914>

Lubenets D. Y. Optimization of computations in multiplex partitioning algorithms for continuous sets.

The paper presents the development and optimization of algorithms for solving multiplex allocation problems using computation vectorization methods. A comparison is made between the basic iterative approach and a new optimized method that incorporates the pre-computation of a distance tensor between points and centers. The use of SIMD instructions significantly reduced computation time and improved algorithm performance. The results confirm the effectiveness of the proposed methods for problems involving large datasets.

Keywords: multiplex allocation, optimization, memoization, vectorization, SIMD instructions.

References

1. Koriashkina, L. S., & Lubenets, D. Y. (2023). Mathematical models of multiplex partitioning and multiple coverage of sets for the location-allocation problems. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 4, 20–31. <https://doi.org/10.32782/IT/2023-4-3> [in Ukrainian].
2. Koryashkina, L. S., & Cherevatenko, A. P. (2015). Continuous linear problems of optimal multiplex partitioning of sets with constraints. *Bulletin of the V. N. Karazin Kharkiv National University, Series "Math. modeling. Information technologies. Automated control systems"*, 28, 77–91 [in Russian].
3. Koriashkina, L. S., Cherevatenko, A. P., & Koriashkina, E. O. (2017). Integration of GIS technologies and methods of solving continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets. *System research and information technologies*, (4), 97–108. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2017.4.08> [in Russian].
4. Rodríguez-Espíndola, O., Ahmadi, H., Gastélum-Chavira, D., Ahumada-Valenzuela, O., Chowdhury, S., Dey, P. K., & Albores, P. (2023). Humanitarian logistics optimization models: An investigation of decision-maker involvement and directions to promote implementation. *Socio-Economic Planning Sciences*, 89, Article 101669. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2023.101669>
5. Pooja Kumar, R., Viriyasitavat, W., Yadav, K., & Dhiman, G. (2023). Analysis of Clustering Algorithms for Facility Location Allocation Problems. In: Reddy, A. B., Nagini, S., Balas, V. E., & Raju, K. S. (eds). *Proceedings of Third International Conference on Advances in Computer Engineering and Communication Systems*. Lecture Notes in Networks and Systems. (Vol. 612). Springer: Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-9228-5_51
6. Drezner, Z., & Eiselt, H. A. (2024). Competitive location models: A review. *European Journal of Operational Research*, 316(1), 5–18. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.10.030>
7. Drezner, Z. (2022). *Continuous Facility Location Problems. The Palgrave Handbook of Operations Research*. Palgrave Macmillan: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-96935-6_9
8. Han, J., Zhang, J., Zeng, B., & Mao, M. (2021). Optimizing dynamic facility location-allocation for agricultural machinery maintenance using Benders decomposition. *Omega*, 105, 102498. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102498>
9. Sergeiev, O. S., & Us, S. A. (2024). Exploring Two Solution Methods for the Two-Stage Location-Activation Problem. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 45(2), 249–258. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).249-258](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).249-258) [in Ukrainian].
10. Koriashkina, L. S., & Lubenets, D. Y. (2024). Systems analysis and mathematical modeling of partially two-stage processes of material flow distribution. *System technologies*, 1, 86–99. <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-150-2024-08> [in Ukrainian].
11. Dziuba, S. V., Koriashkina, L. S., Stanina, O. D., & Lubenets, D. Y. (2023). Mathematical models of optimization problems of partially two-stage population evacuation with territory segmentation. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 3, 13–21. <https://doi.org/10.32782/IT/2023-3-2> [in Ukrainian].
12. Yang, Y., Yin, Y., Wang, D., Ignatius, J., & Dhamotharan, L. (2023). Distribution-

- ally robust multi-period location-allocation with multiple resources and capacity levels in humanitarian logistics. *European Journal of Operational Research*, 305(3), 1042–1062. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.06.047>
13. Moslemi, S., & Pasandideh, S. H. R. (2021). A location-allocation model for quality-based blood supply chain under IER uncertainty. *RAIRO — Operations Research*, 55, 967–998. <https://doi.org/10.1051/ro/2020035>
 14. Zemlianyi, O., & Baibuz, O. (2024). Vectorization of calculations for code optimization in the Python programming language. *Challenges and Issues of Modern Science*, 3, 145–149. <https://cims.fti.dp.ua/j/article/view/215> [in Ukrainian].
 15. Arora, I. (2024). Improving Performance of Data Science Applications in Python. *Indian Journal of Science and Technology*, 17(24), 2499–2507. <https://doi.org/10.17485/IJST/v17i24.914>

Одержано 28.01.2025

УДК 519.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).209-217](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).209-217)**О. І. Кузка¹, І. В. Корник², В. М. Дуран³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7556-3057>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
ivan.kornyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8679-1630>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
valentya.duran@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6409-3061>

ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАПИТІВ ОДНИМ ПРИЛАДОМ

Розглядається один клас детермінованих задач теорії розкладів, а саме, задача впорядкування процесу обслуговування запитів, які не одночасно надходять в систему. Структура системи обслуговування дозволяє сформулювати допоміжну симетричну задачу. Доведено теореми, на основі яких побудовано ітеративний алгоритм, що по чергово аналізує пару симетричних задач та дозволяє зафіксувати послідовність обслуговування частини вимог і зменшити розмірність початкової задачі.

Ключові слова: теорія розкладів, оптимізація обслуговування, симетричні задачі, запит(вимога), активний розклад, перестановочний розклад, список пріоритетів.

1. Вступ. Розглянемо багато стадійну задачу обслуговування, яка містить «вузьке місце», організація обслуговування на якому і визначає ефективність всієї системи. В такому випадку процес виконання запитів (вимог) в системі обслуговування умовно можна розділити на три етапи: підготовчий, основний і заключний, причому на підготовчому і заключному етапах виконуються певні фіксовані операції, які мають фіксовану тривалість, не пов'язані з залученням до їх виконання основних виконавців і тому не можуть бути використані для оптимізації обслуговування. Прикладом таких систем можуть бути системи, де запити на обслуговування надходять не одночасно, а після обслуговування необхідна певна затримка до моменту, коли замовлення вважатиметься виконаним остаточно (тестування якості роботи, висихання після фарбування, доставка замовнику тощо).

В літературі по теорії розкладів задачі оптимізації обслуговування в одностадійних системах досліджуються, як правило, при одночасному надходженні запитів [1–7], а при неодночасному надходженні запитів вивчені недостатньо. Критерії оптимізації пов'язані з директивними строками чи їх порушенням [3,7], або мінімізують час завершення роботи основних приладів і, в основному, не враховують затримку після завершення основного етапу [3–6].

2. Модель задачі. Будемо вважати, що в розглядуваній тут задачі запити незалежні між собою і відомі всі часові параметри пов'язані з обслуговуванням

запитів, на основному етапі («вузьке місце» системи) обслуговування здійснюється одним приладом S . Отже розглядається детермінована задача оптимізації обслуговування скінченної кількості незалежних запитів одним приладом S .

Запити повністю характеризуються наступними параметрами:

$p_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час надходження i -го запиту до пристрою S (далі вважаємо, що запити пронумеровані за порядком, а n — загальна кількість запитів);

$t_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час обробки i -го запиту приладом S ;

$q_i, i = 1, 2, \dots, n$ — час додаткового обслуговування i -го запиту в системі після обслуговування приладом S .

В системі одночасно може обслуговуватися довільна кількість запитів, але тільки один запит може обслуговуватися пристроєм S в кожен момент часу. При цьому перерви в обслуговуванні будь-якого запиту пристроєм S не допускаються. Вважається, що пристрої системи обслуговування не виходять з ладу, а перехід від обслуговування одного запиту до іншого відбувається миттєво.

При складанні розкладу обслуговування запитів необхідно мінімізувати час завершення обслуговування всіх запитів у системі, тобто мінімізувати функцію:

$$F(X) = \max \left\{ x_i + t_i + q_i \mid i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (1)$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а x_i — час початку обробки i -го запиту приладом S . Вектор X надалі називатимемо розкладом обслуговування запитів.

Означення 1. *Активним називається розклад, в якому неможливо прискорити виконання жодного запиту і не збільшити, при цьому, час завершення обслуговування інших запитів.*

Зауваження 1. *Очевидно, що оптимальні по критерію (1) розклади можна шукати на множині активних розкладів.*

Означення 2. *Перестановочним називається розклад, в якому послідовність обслуговування запитів визначається перестановкою індексів робіт.*

Зауваження 2. ([1–3]) *Існує оптимальний по критерію (1) розклад, який належить до класу активних перестановочних розкладів.*

Таким чином, для кожної перестановки $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ час початку обслуговування запитів пристроєм S визначається відповідним активним перестановочним розкладом $X^\tau = (x_1^\tau, x_2^\tau, \dots, x_n^\tau)$ [3], де

$$x_{\tau_i}^\tau = \begin{cases} p_{\tau_1}, & i = 1 \\ \max(p_{\tau_i}, p_{\tau_{i-1}} + t_{\tau_{i-1}}), & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Визначимо моменти завершення обслуговування запитів пристроєм S :

$$\bar{x}_i^\tau = x_i^\tau + t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

і в системі:

$$\bar{\bar{x}}_i^\tau = \bar{x}_i^\tau + q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Враховавши рекурсивність формул (2), час завершення обслуговування запитів у системі можна записати у вигляді:

$$\bar{\bar{x}}_{\tau_i}^\tau = \max \left\{ p_{\tau_j} + \sum_{k=j}^i t_{\tau_k} + q_{\tau_i} \mid j = 1, 2, \dots, i \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

3. Симетричні задачі. Сформульовану вище задачу позначимо як $Z_n(p, t, q)$. Поряд з задачею $Z_n(p, t, q)$ розглянемо задачу $Z_n(q, t, p)$ тобто задачу, в якій запити надходять у моменти часу q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, а час додаткового обслуговування i -го запиту в системі після обслуговування приладом S визначається величинами p_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Задачі $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$ будемо називати симетричними.

Теорема 1. Нехай $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, а $\theta = (\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1)$. Якщо X^τ та Y^θ — розклади обслуговування запитів симетричних задач $Z_n(p, t, q)$ та $Z_n(q, t, p)$ відповідно, то моменти часу завершення обслуговування запитів (1) у розкладах X^τ та Y^θ співпадають.

Доведення. Розглянемо розклад X^τ обслуговування запитів для задачі $Z_n(p, t, q)$, де $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$.

Визначимо значення критерію (1) для розкладу X^τ з врахуванням (2)–(5):

$$\begin{aligned} F(X^\tau) &= \max \left\{ x_{\tau_i} + t_{\tau_i} + q_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \max \left\{ \bar{x}_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \max \left\{ p_{\tau_j} + \sum_{k=j}^i t_{\tau_k} + q_{\tau_i} \mid j \leq i, \quad j, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Розглянемо розклад Y^θ обслуговування запитів у задачі $Z_n(q, t, p)$ та обчислимо

$$F(Y^\theta) = \max \left\{ q_{\tau_j} + \sum_{k=i}^j t_{\tau_k} + p_{\tau_i} \mid j \geq i, \quad j, i = n, n-1, \dots, 1 \right\}. \quad (7)$$

Очевидно, що значення критеріїв (6) та (7) співпадають, тобто для будь якого розкладу X^τ (в тому числі і оптимального) задачі $Z_n(p, t, q)$ існує розклад обслуговування запитів Y^θ для симетричної задачі $Z_n(q, t, p)$ такий, що $F(X^\tau) = F(Y^\theta)$. Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо розклад X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, є оптимальним для задачі $Z_n(p, t, q)$ то розклад Y^θ , $\theta = (\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_1)$ буде оптимальним для задачі $Z_n(q, t, p)$.

4. Розклад, побудований за допомогою списку пріоритетів [3]. Нехай для вимог певним чином визначені пріоритети. Побудуємо перестановку індексів вимог $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ в порядку не зростання пріоритетів, яку надалі будемо називати списком пріоритетів σ .

Розклад X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ за допомогою списку σ будується наступним чином:

1. Готуємо впорядкований список пріоритетів $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ та множину не обслугованих вимог $N^1 = \{1, 2, \dots, n\}$. Покладаємо $k = 1$;
2. Визначаємо момент часу початку обслуговування k -ої по порядку вимоги τ_k приладом S : $\rho^k = \min \left\{ p_i \mid i \in N^k \right\}$;
3. Обираємо для обслуговування зі списку σ першу (найбільш пріоритетну) не обслуговану вимогу ν , для якої $p_\nu \leq \rho^k$, тобто, готову до обслуговування;

4. Включаємо ν наступним елементом в перестановку τ , тобто $\tau_k = \nu$, визначаємо моменти часу:

- $x_\nu = \rho^k$ — початку обслуговування вимоги ν приладом S ;
- $\bar{x}_\nu = x_\nu + t_\nu$ — завершення обслуговування вимоги ν приладом S ;

та $N^{k+1} = N^k \setminus \{\nu\}$ — виключаємо вимогу ν з множини не обслугованих вимог приладом S ;

5. Якщо $N^{k+1} = \emptyset$ то побудова розкладу X^τ завершена, інакше визначаємо $\rho^{k+1} = \max(\bar{x}_\nu, \min\{p_i \mid i \in N^{k+1}\})$ — момент часу початку обслуговування наступної вимоги приладом S , збільшуємо k на 1 та переходимо до виконання пункту 3 для продовження побудови розкладу X^τ .

Нехай пріоритет вимоги з індексом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ співпадає з відповідним значенням q_i . Тоді список пріоритетів $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ задовільняє умову

$$q_{\sigma_i} \geq q_{\sigma_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

Теорема 2. Якщо для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ виконуються умови (8) і

$$p_{\sigma_i} \leq p_{\sigma_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (9)$$

то розклад, побудований за допомогою списку σ — оптимальний по критерію (1).

Доведення. Якщо виконується (9), то для розкладу X^τ , побудованого за допомогою списку σ виконується $\tau = \sigma$, тобто $X^\tau = X^\sigma$. Нехай X^π — оптимальний розклад і $\pi \neq \sigma$. Визначимо найменше $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, для якого $\pi_i \neq \sigma_i$, та $j \in \{i+1, i+2, \dots, n\}$, для якого $\pi_j = \sigma_i$. Розглянемо перестановку

$$\mu = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}, \pi_j, \pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n),$$

в якій, на відміну від π прискорено обслуговування вимоги π_j , а взаємна послідовність інших вимог не змінюється. Тоді, якщо мають місце (8) і (9), то

$$q_{\pi_j} = \max \left\{ q_{\pi_k} \mid k = i+1, i+2, \dots, n \right\}, \quad (10)$$

$$p_{\pi_j} = \min \left\{ p_{\pi_k} \mid k = i+1, i+2, \dots, n \right\}. \quad (11)$$

З (1), (3), (4) для перестановочних розкладів маємо

$$F(X^\tau) = \max \left(F_1^\tau, F_2^\tau, \bar{x}_{\pi_j}^\tau + q_{\pi_j}, F_3^\tau \right), \quad (12)$$

де

$$F_1^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau \mid k = 1, 2, \dots, i-1 \right\},$$

$$F_2^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau + q_{\pi_k} \mid k = i, i+1, \dots, j-1 \right\},$$

$$F_3^\tau = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\tau + q_{\pi_k} \mid k = j+1, j+2, \dots, n \right\}.$$

Порівняємо значення критерію (1) для X^π і X^μ . З (12) отримаємо

$$\begin{aligned} F(X^\pi) &= \max \left(F_1^\pi, F_2^\pi, \bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j}, F_3^\pi \right), \\ F(X^\mu) &= \max \left(F_1^\mu, \bar{x}_{\pi_j}^\mu + q_{\pi_j}, F_2^\mu, F_3^\mu \right), \end{aligned} \quad (13)$$

при чому $F_1^\pi = F_1^\mu$, $\bar{x}_{\pi_j}^\pi > \bar{x}_{\pi_j}^\mu$. З (11) видно, що обслуговування вимог $\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}$ в розкладі X^μ сповільниться відносно часу їх обслуговування в розкладі X^π на величину t_{π_j} , якщо прилад S в розкладі X^π на проміжку $[x_{\pi_{i-1}}^\pi, x_{\pi_j}^\pi]$ працює без простоїв. Якщо ж на цьому проміжку мають місце простой приладу S в розкладі X^π , то сповільнення часу обслуговування деяких вимог з $\{\pi_i, \pi_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}\}$ в розкладі X^μ буде меншим величини t_{π_j} відносно розкладу X^π (або взагалі відсутнім), а обслуговування вимог $\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n$ в розкладі X^μ , для яких $x_{\pi_k}^\pi > p_{\pi_k}$, $k = j+1, j+2, \dots, n$, буде прискорено. Отже

$$\bar{x}_{\pi_j}^\pi = x_{\pi_j}^\pi + t_{\pi_j} \geq \bar{x}_{\pi_k}^\pi + t_{\pi_j} \geq \bar{x}_{\pi_k}^\mu, \quad k = i, i+1, \dots, j-1, \quad (14)$$

і $F_3^\pi \geq F_3^\mu$. З (10), (12)–(14) отримаємо

$$\bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j} \geq F_2^\pi + t_{\pi_j} = \max \left\{ \bar{x}_{\pi_k}^\pi + q_{\pi_k} \mid k = i, i+1, \dots, j-1 \right\} + t_{\pi_j} \geq F_2^\mu.$$

Тоді

$$F(X^\pi) = \max \left(F_1^\pi, F_2^\pi, \bar{x}_{\pi_j}^\pi + q_{\pi_j}, F_3^\pi \right) \geq \max \left(F_1^\mu, \bar{x}_{\pi_j}^\mu + q_{\pi_j}, F_2^\mu, F_3^\mu \right) = F(X^\mu),$$

а так як X^π оптимальний розклад, то $F(X^\pi) = F(X^\mu)$ і розклад X^μ теж оптимальний. Якщо $\mu \neq \sigma$, то зміну порядку обслуговування можна повторити необхідну кількість разів, поки не буде отримано розклад X^σ , який теж буде оптимальним. Теорема доведена.

Зауваження 3. Якщо запити на обслуговування надходять одночасно ($p_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$), то оптимальною за критерієм (1) буде послідовність σ , яка визначається умовою (8).

5. Зменшення розмірності задачі. Нехай F_n — нижня межа значень цільової функції (1).

Теорема 3. Якщо існує розклад $X^\tau, \tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, в якому для деякого $j > 1$ виконуються умови:

$$x_{\tau_j}^\tau = p_{\tau_j} \geq \bar{x}_{j-1}^\tau, \quad (15)$$

$$p_n \geq p_{\tau_j}, \quad l = j+1, j+2, \dots, n, \quad (16)$$

$$\max \left\{ x_{\tau_i} + t_{\tau_i} + q_{\tau_i} \mid i = 1, 2, \dots, j-1 \right\} \leq F_n, \quad (17)$$

то існує оптимальний розклад $X^\pi, \pi = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$, для якого послідовність обслуговування перших $j-1$ запитів приладом S співпадає з розкладом X^τ .

Доведення. Нехай X^μ , $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, оптимальний розклад. Якщо виконується:

$$\mu_i = \tau_i, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad (18)$$

то теорема справедлива. Якщо (18) не виконується, то розглянемо розклад, X^π , $\pi = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, \pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$, де перестановка $(\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$ така, що для всіх $l = j+1, j+2, \dots, n$, елемент π_{l-1} в перестановці μ розташований лівіше елемента π_l .

З (2), (15), (16) слідує, що

$$x_{\pi_j}^\pi = p_{\pi_j} \leq x_{\pi_j}^\mu, \quad (19)$$

а з (2), (17), (19) і з того, що відносна послідовність обслуговування запитів $(\pi_j, \pi_{j+1}, \dots, \pi_n)$ в розкладах X^μ та X^π співпадають, слідує, що

$$\begin{aligned} F(X^\mu) &= \max \left\{ x_{\mu_i}^\mu + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = 1, 2, \dots, n \right\} = \\ &= \max \left\{ x_{\mu_i}^\mu + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = j, j+1, \dots, n \right\} \geq \\ &\geq \max \left\{ x_{\mu_i}^\pi + t_{\mu_i} + q_{\mu_i} \mid i = j, j+1, \dots, n \right\} = F(X^\pi). \end{aligned} \quad (20)$$

Але X^μ — оптимальний розклад, тому з (20) слідує, що $F(X^\mu) = F(X^\pi)$, тобто X^π — оптимальний розклад. Теорема доведена.

Наслідок 2. Якщо в розкладі X^τ , побудованому за допомогою списку τ , після обслуговування запитів $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$, $j \leq n$, існує простий пристрою S (виконується (15)) і час завершення обслуговування запитів $\bar{x}_{\tau_i}^\tau$, $i = 1, 2, \dots, j-1$ не перевищує F_n , то виконується (16), а отже існує оптимальний розклад X^* , такий що $x_{\tau_i}^* = x_{\tau_i}^\tau$, $i = 1, 2, \dots, j-1$.

Примітка. Якщо виконуються умови $x_{\tau_j}^\tau = p_{\tau_j} = \bar{x}_{j-1}^\tau$ та (16), то маємо простий пристрою S нульової довжини.

Якщо для розкладу X^τ , $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, виконуються мови (15)–(17), то час обслуговування вимог $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}$ можна зафіксувати і розмірність задачі зменшується на $j-1$. Отже для розв'язання задачі необхідно впорядкувати обслуговування $n-j+1$ вимог $\tau_j, \tau_{j+1}, \dots, \tau_n$.

6. Застосування властивості симетричності задач $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$ для зменшення розмірності задачі. Як було показано вище, застосування теореми 3 дозволяє зафіксувати терміни обслуговування частини вимог. Наведений нижче алгоритм, за рахунок симетричності задач $Z_n(p, t, q)$ і $Z_n(q, t, p)$, може збільшити кількість зафіксованих вимог оптимальної перестановки.

Алгоритм. Початковий етап. Нехай

- F_n — нижня межа значень цільової функції (1);
- m^k — кількість вимог, які необхідно обслужити на k -му кроці ($m^1 = n$);
- I^k — множина не обслужених вимог на k -му кроці ($I^1 = \{1, 2, \dots, n\}$). Позначимо елементи множини I^1 через $i_1^1, i_2^1, \dots, i_{m^1}^1$;
- p^k, t^k, q^k — часові параметри вимог, впорядкування яких розглядається на k -му кроці в задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$.

Покладемо:

$$p^1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_{m^1}^1) = (p_{i_1^1}, p_{i_2^1}, \dots, p_{i_n^1}),$$

$$t^1 = (t_1^1, t_2^1, \dots, t_{m^1}^1) = (t_{i_1^1}, t_{i_2^1}, \dots, t_{i_n^1}),$$

$$q^1 = (q_1^1, q_2^1, \dots, q_{m^1}^1) = (q_{i_1^1}, q_{i_2^1}, \dots, q_{i_n^1}).$$

Перейдемо до виконання 1-го кроку алгоритму.

k -й крок ($k = 1, 2, \dots$). Розглянемо задачу: $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$.

1. Нехай $\sigma(I^k)$ список елементів множини I^k , розташованих в порядку не зростання величин q_i^k , $i = 1, 2, \dots, m^k$. За допомогою списку пріоритетів $\sigma(I^k)$ побудуємо розклад X^{π^k} , $\pi^k = (\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{m^k}^k)$.
2. Якщо $F(X^{\pi^k}) = F_n$, то розклад X^{π^k} — оптимальний для задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$. Покладемо: $j^k = m^k$. Визначимо перестановку

$$\theta^k = \begin{cases} (\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k), & \text{якщо } k \text{ — не парне,} \\ (\pi_{j^k}^k, \pi_{j^k-1}^k, \dots, \pi_1^k), & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases} \quad (21)$$

і перейдемо до виконання заключного кроку.

3. Визначимо j^k як максимальне з таких $j \in \{\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{m^k}^k\}$, що для X^{π^k} виконуються умови (15)–(17) або 0, якщо такого j не існує.
4. Якщо $j^k = 0$ та $k = 1$, то покладемо $I^{k+1} = I^k$ і перейдемо до пункту 7 k -го кроку алгоритму.
5. Якщо $j^k = 0$ та $k > 1$, то перейдемо до виконання заключного етапу алгоритму.
6. Якщо $j^k > 0$, то виконуються умови наслідку 2 теореми 2, а значить існує оптимальний розклад $\bar{X}_k$ задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$, для якого послідовність обслуговування перших j^k вимог співпадає з послідовністю $(\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k)$. Тому визначимо θ^k з (21), а з множини I^k не обслужених вимог видалимо індекси вимог послідовності θ^k , тобто $I^{k+1} = I^k \setminus \{\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k\}$.
7. Позначимо елементи множини I^{k+1} через $i_1^{k+1}, i_2^{k+1}, \dots, i_{m^{k+1}}^{k+1}$, де $m^{k+1} = m^k - j^k$, та визначимо

$$p^{k+1} = (p_1^{k+1}, p_2^{k+1}, \dots, p_{m^{k+1}}^{k+1}) = (q_{i_1^{k+1}}^k, q_{i_2^{k+1}}^k, \dots, q_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k),$$

$$t^{k+1} = (t_1^{k+1}, t_2^{k+1}, \dots, t_{m^{k+1}}^{k+1}) = (t_{i_1^{k+1}}^k, t_{i_2^{k+1}}^k, \dots, t_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k),$$

$$q^{k+1} = (q_1^{k+1}, q_2^{k+1}, \dots, q_{m^{k+1}}^{k+1}) = (p_{i_1^{k+1}}^k, p_{i_2^{k+1}}^k, \dots, p_{i_{m^{k+1}}^{k+1}}^k).$$

Очевидно, що значення цільової функції (1) для оптимальних розв'язків задач $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ та $Z_{m^{k+1}}(p^{k+1}, t^{k+1}, q^{k+1})$ співпадають.

Дійсно, якщо $j^k > 0$, то запити $\pi_1^k, \pi_2^k, \dots, \pi_{j^k}^k$ у задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ можуть обслуговуватися пристроєм S до надходження інших запитів на цей пристрій, не впливаючи на обслуговування останніх та на значення цільової функції.

Якщо ж $j^k = 0$, то задачі $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ та $Z_{m^{k+1}}(q^{k+1}, t^{k+1}, p^{k+1})$ співпадають з точністю до нумерації запитів.

Враховуючи теорему 1 та її наслідок, задачу $Z_{m^{k+1}}(q^{k+1}, t^{k+1}, p^{k+1})$ можна замінити задачею $Z_{m^{k+1}}(p^{k+1}, t^{k+1}, q^{k+1})$.

Перейдемо до виконання $k + 1$ -го кроку алгоритму.

Заключний етап. Зауважимо, що при не парному k досліджується задача $Z_n(p, t, q)$, і фіксується послідовність $\bar{\theta}$ обслуговування перших $\bar{n}$ вимог, а при парному k — симетрична їй задача $Z_n(q, t, p)$, і фіксується послідовність $\bar{\bar{\theta}}$ обслуговування останніх $\bar{\bar{n}}$ вимог, де

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= (\theta^1, \theta^3, \dots, \theta^{\bar{m}}) = (\pi_1^1, \pi_2^1, \dots, \pi_{j^1}^1, \pi_1^3, \pi_2^3, \dots, \pi_{j^3}^3, \dots, \pi_1^{\bar{m}}, \pi_2^{\bar{m}}, \dots, \pi_{j^{\bar{m}}}^{\bar{m}}), \\ \bar{\bar{\theta}} &= (\theta^{\bar{m}}, \theta^{\bar{m}-2}, \dots, \theta^2) = \\ &= (\pi_{j^{\bar{m}}}^{\bar{m}}, \pi_{j^{\bar{m}-1}}^{\bar{m}}, \dots, \pi_1^{\bar{m}}, \pi_{j^{\bar{m}-2}}^{\bar{m}-2}, \pi_{j^{\bar{m}-2}-1}^{\bar{m}-2}, \dots, \pi_1^2, \pi_{j^2}^2, \pi_{j^2-1}^2, \dots, \pi_1^2), \\ \bar{m} &= \begin{cases} k-1, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \\ k, & \text{якщо } k \text{ — непарне,} \end{cases} \\ \bar{\bar{m}} &= \begin{cases} k-1, & \text{якщо } k \text{ — непарне,} \\ k, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases} \\ \bar{n} &= j^1 + j^3 + \dots + j^{\bar{m}}, \\ \bar{\bar{n}} &= j^{\bar{m}} + j^{\bar{m}-2} + \dots + j^2.\end{aligned}$$

Як впливає з теореми 1, її наслідку та побудови векторів $\bar{\theta}$ та $\bar{\bar{\theta}}$, існує оптимальний розв'язок задачі $Z_n(p, t, q)$, в якому першими обслуговуються $\bar{n}$ запитів послідовності $\bar{\theta}$, а останніми $\bar{\bar{n}}$ запитів послідовності $\bar{\bar{\theta}}$ у вказаному порядку.

Кінець алгоритму.

Таким чином, наведений алгоритм дозволяє знайти оптимальну послідовність обслуговування запитів пристроєм S (якщо $n = \bar{n} + \bar{\bar{n}}$, то оптимальною послідовністю обслуговування буде послідовність $(\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}})$), або зменшити розмірність задачі (якщо $n > \bar{n} + \bar{\bar{n}}$, то для побудови оптимальної послідовності достатньо упорядкувати $m^k = n - \bar{n} - \bar{\bar{n}}$ запитів множини I^k , тобто розв'язати задачу $Z_{m^k}(p^k, t^k, q^k)$ або $Z_{m^k}(q^k, t^k, p^k)$).

7. Висновки. У роботі розглянуто одну детерміновану задачу теорії розкладів. Запити надходять на обслуговування в різні моменти часу, а після обслуговування вимагають виконання певних завершальних операцій, що впливають на ефективність розкладу. Для знаходження розв'язків таких задач, як правило, застосовуються комбінаторні алгоритми, що мають експоненціальну складність. Тому важливим є попередній аналіз, який часто дозволяє зменшити розмірність задачі. Запропоновано підхід, заснований на використанні властивості симетричності та аналізі початкових даних, який дає можливість зафіксувати послідовність обслуговування частини вимог, що і дозволяє зменшити розмірність задачі.

Список використаної літератури

1. Joseph Y.-T. Leung (Ed.) *Handbook of Scheduling. Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Boca Raton, FL, USA : Chapman & Hall / CRC, 2004. 1216 p.
2. Michael L. Pinedo *Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*. 6 Edition. New York, USA : Springer Science, 2022. 698 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05921-6>
3. Ващук Ф. Г. Теорія розкладів : навч. посіб. / Ф. Г. Ващук, О. Г. Лавер, Н. Я. Шумило. Ужгород : Вид-во "Два кольори 2003. 136 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/4685> (дата звернення: 03.03.2025).
4. Шпенник Т. Б. Алгоритм пошуку оптимального по кількості приладів розв'язку однієї задачі теорії розкладів / Т. Б. Шпенник. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Фізика*. 2013. Вип. 33. С. 91–95. <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/2192> (дата звернення: 03.03.2025).
5. Кузка О. І. Оптимізація структури системи виконання робіт в багатостадійних задачах. *Праці VIII міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень»*. Ужгород : Ужгородський нац. ун-т, 26 вересня – 1 жовтня, 2016. 154 с.
6. Кузка О. І., Шпенник Т. Б. Мінімізація кількості приладів при виконанні робіт в системах ідентичних паралельних приладів. *Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Серія математика*. 1998. Вип. 3. С. 147–150.
7. Кузка А. И., Шпенник Т. Б. Алгоритм последовательного анализа вариантов для минимизации числа приборов в задаче составления расписания, удовлетворяющего директивным срокам. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 5. С. 118–123.

Kuzka O. I., Korniyk I. V., Duran V. M. Service requests with one device.

One class of deterministic problems of scheduling theory is considered, namely, the problem of ordering the process of servicing requests that do not arrive at the system simultaneously. The structure of the service system allows us to formulate an auxiliary symmetric problem. Theorems are proved, on the basis of which an iterative algorithm is built that analyzes a pair of symmetric problems in turn and allows us to fix the sequence of servicing part of the requirements and reduce the dimensionality of the initial problem.

Keywords: scheduling theory, service optimization, symmetric problems, request (requirement), active schedule, permutation schedule, priority list.

References

1. Joseph, Y.-T. (2004). Leung (Ed.) *Handbook of Scheduling. Algorithms, Models, and Performance Analysis*. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall / CRC.
2. Michael, L. (2022). *Pinedo Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems*. 6 Edition. New York, USA: Springer Science. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-05921-6>
3. Vashchuk, F. G. (2003). *Scheduling Theory: Textbook*. Uzhgorod: Publishing House "Two Colors". Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/4685> [in Ukrainian].
4. Shpenik, T. B. (2013). Algorithm for searching for the optimal number of devices solution of one problem of scheduling theory. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University: Series: Physics*, 33, 91–95. Retrieved from <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/2192> [in Ukrainian].
5. Kuzka, O. I. (September 26 – October 1, 2016). Optimization of the structure of the work execution system in multi-stage problems. *Proceedings of the VIII International School-Seminar "Decision Making Theory"* [in Ukrainian].
6. Kuzka, O. I., & Shpenyk, T. B. (1998). Minimization of the number of devices when performing work in systems of identical parallel devices. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Mathematics Series*, 3, 147–150 [in Ukrainian].
7. Kuzka, A. I., & Shpenik, T. B. (2000). Algorithm for sequential analysis of variants to minimize the number of devices in the task of compiling a schedule that meets the directive terms. *Cybernetics and System Analysis*, (5), 118–123 [in Russian].

Одержано 01.04.2025

УДК 004.8:37.018.43

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).218-225](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).218-225)**І. М. Лях¹, В. В. Дудник², Ю. М. Ціпінью³, А. Ю. Ціпінью⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін,
доктор технічних наук, доцент
igor.lyah@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5417-9403>

² Полтавський державний аграрний університет,
доцент кафедри механічної та електричної інженерії,
кандидат технічних наук, доцент
volodymyr.dudnyk@pdau.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6553-2951>

³ Викладач-методист закарпатського політехнічного фахового коледжу,
бакалавр кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін
yuratsipino@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5494-8418>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
студент 4-ого курсу спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології»
tsipino.artemii@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1704-2732>

ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАЛУЧЕНОСТІ КОРИСТУВАЧІВ ОСВІТНІХ ВЕБПЛАТФОРМ ЗА ДОПОМОГОЮ АЛГОРИТМІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

У статті розглянуто технологічні підходи до реалізації навчальних онлайн-платформ із елементами гейміфікації. Сучасний розвиток цифрових технологій висуває нові вимоги до вебзастосунків, зокрема в контексті інтерактивного відображення складних даних і статистичних результатів у режимі реального часу. Це стає особливо важливим у сфері освіти, де актуальними є платформи для дистанційного навчання, які потребують не лише зручного інтерфейсу, а й ефективних інструментів для аналізу та візуалізації навчальних результатів. У статті було розглянуто використання різноманітних методів і алгоритмів для обробки даних, зокрема для прогнозування та аналізу поведінки користувачів онлайн-платформ.

У процесі дослідження проведено аналіз доступних інструментів для інтеграції моделей машинного навчання та аналітичних інструментів у вебзастосунки. Проведено порівняння кількох алгоритмів машинного навчання, зокрема таких як: Random Forest, KNN-регресії, гребеневої регресії та еластичної мережі, для аналізу залученості користувачів на платформі Prometheus. Для прогнозування активності користувачів використовувались реальні аналітичні дані, що дозволило побудувати моделі, які здатні враховувати змінні залежності та обробляти аномальні дані, пов'язані з пандемією COVID-19 та іншими соціально-економічними чинниками. Результати показують, що використання різних методів машинного навчання дозволяє здійснити точний прогноз щодо залученості користувачів, зокрема з урахуванням змін у соціально-демографічному контексті.

Дослідження показало, що інтеграція таких інструментів дозволяє значно покращити ефективність взаємодії користувачів з онлайн-платформами, а також створює умови для подальшої оптимізації навчальних процесів, зокрема через персоналізацію контенту та методів взаємодії.

Ключові слова: онлайн-платформи, машинне навчання, регресія, прогнозування, користувацька активність, цифрові технології.

1. Вступ. З розвитком цифрових технологій постає потреба не лише в створенні інтерактивних вебзастосунків, а й у забезпеченні їхньої здатності до обробки та візуального подання даних у режимі реального часу. Відображення складних статистичних залежностей, аналітичних висновків та поведінкових моделей у зручній формі є критичним для прийняття рішень як на рівні користувача, так і на рівні розробника.

У роботі особливу увагу приділено практичному аналізу даних за допомогою побудови інтерактивних графіків. Аналіз охоплював класифікацію даних, виявлення закономірностей і розглядалися інструменти для інтеграції аналітичних моделей у вебінтерфейси, що дозволяють користувачам без технічного бекграунду отримувати доступ до складної інформації у зручному форматі.

Практичний аспект включає реалізацію вебзастосунку, який надає можливість інтерактивної роботи з результатами класифікації, аналізу поведінки користувачів, а також динамічної побудови графіків відповідно до введених параметрів. Такий підхід дозволяє поєднати автоматизовану обробку даних із високим рівнем користувацької візуалізації.

2. Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідженням даного питання займалися вітчизняні дослідники, такі як: Савенко О. І., Божок К. Ю. [1, 2], а також зарубіжні дослідники, такі як: Б. Потер, Б. Божкая та інші [3].

Сучасні дослідження акцентують на важливості багаторівневої трансформації освітнього середовища, що включає інфраструктурні, організаційні, програмно-методичні та особистісні компоненти.

У дослідженнях також відзначено, що залучення користувача значною мірою залежить від якості інтерфейсу платформи, її доступності, зручності та рівня інтерактивності. Зокрема, наявність чату, форуму, вікторин, модулів для обговорення та інтерактивних вправ корелює з підвищенням частоти повернень до платформи, а також зі збільшенням середньої тривалості навчальної сесії. Статистично підтверджено, що рівень повторного входу користувачів на платформи з активними елементами взаємодії є на понад 30% вищим, а показники завершення курсів збільшуються при наявності персоналізованих навчальних маршрутів.

У низці публікацій подано порівняльний аналіз функціональностей популярних освітніх платформ, таких як: Khan Academy, Duolingo, Coursera, Edmodo. Виявлено, що найбільше позитивний ефект демонструють системи, які поєднують зовнішню мотивацію (наприклад, винагороди) із внутрішньою (наприклад, інтерес, саморозвиток), а також надають користувачеві свободу у виборі навчального маршруту.

Окрему увагу приділено віковим характеристикам користувачів: елементи мають найвищу ефективність серед користувачів віком 15–35 років, у той час як для старших вікових груп важливішими виявились простота інтерфейсу, стабільність платформи та наявність підтримки.

Вивчення механізмів залученості користувачів на онлайн-платформах є неможливим без урахування соціально-демографічного контексту, в якому функціонує цифрове середовище. Одним із ключових чинників, що впливає як на ефективність комунікації з користувачем, так і на вибір інструментів є вікова структура населення. Адже саме вік часто визначає цифрову компетентність, уподобання щодо форм подачі контенту та рівень адаптивності до нових техно-

логічних рішень.

З огляду на це, доцільним є звернення до актуальних демографічних даних, що дають змогу оцінити вікові особливості населення країни в динаміці. Статистичні дані останніх років дозволяють простежити стійкі тенденції до старіння населення, зменшення питомої ваги молодших вікових груп та скорочення загальної чисельності. Такий аналіз виступає підґрунтям для подальшого дослідження потенціалу інтерактивних вебзастосунків у контексті конкретних цільових аудиторій [4–6].

Для розгляду даних рішень цільової аудиторії, буде використано наступні методи, такі як:

- Random Forest.
- KNN-регресія.
- Гребенева регресія.
- “Еластична мережа”.

Random Forest є одним з найбільш гнучких та потужних ансамблевих методів машинного навчання, що демонструє високу ефективність у задачах регресії. Його суть полягає у побудові множини дерев рішень на випадкових підвбірках з навчальної вибірки, де для кожного дерева випадковим чином відбирається підмножина ознак для розбиття. Підсумковий прогноз формується шляхом усереднення результатів усіх дерев, що забезпечує підвищену стійкість моделі до шумів та перенавчання. Метод об’єднує кілька дерев рішень (ансамбль), де результат — це середнє всіх передбачень:

$$\hat{f} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^1 f_b(x'), \quad (1)$$

де $f_b(x')$ — передбачення b -го дерева;
 B — кількість дерев у лісі.

Серед переваг цього методу — здатність ефективно працювати з великою кількістю ознак, нечутливість до масштабування даних, а також можливість реалізації у багатопотоковому середовищі. Попри деякі обмеження, зокрема великий розмір створюваних моделей, Random Forest залишається одним із провідних підходів до побудови прогнозних моделей у контексті складних соціально-демографічних задач.

KNN-регресія (англ. *k*-nearest neighbors) є одним із найпростіших методів машинного навчання, який не потребує попереднього навчання моделі у традиційному розумінні. Алгоритм базується на припущенні, що схожі об’єкти розташовані близько один до одного у багатовимірному просторі ознак. У цьому методі вся навчальна вибірка зберігається безпосередньо, а для прогнозування значення цільової змінної нової точки обираються k найближчих точок із навчального набору відповідно до обраної метрики відстані.

$$\hat{y} = \frac{1}{k} \sum_{i \in N_k(x)} y_i, \quad (2)$$

де $N_k(x)$ — індекси k найближчих сусідів;
 y_i — реальне значення мітки (таргета) для i -того сусіда.

Прогноз формується як середнє значення цільової змінної знайдених сусідів, або у зваженій версії — з урахуванням ваг, що залежать від відстані. KNN залишається корисним у випадках, коли важлива локальна структура даних, а модель має бути максимально простою та інтерпретованою.

Гребенева регресія (англ. Ridge Regression) є варіацією лінійної регресії, призначеною для вирішення проблеми мультиколінеарності, яка виникає за наявності сильного кореляційного зв'язку між незалежними змінними. На відміну від звичайної лінійної регресії, гребенева регресія додає до цільової функції додатковий регуляризаційний член, який накладає штраф на величини коефіцієнтів. Це дозволяє зменшити їх дисперсію та уникнути переобучення моделі. Метод доцільно застосовувати, коли кількість предикторів велика, існує високий рівень колінеарності, а також у випадках, коли необхідно зменшити чутливість моделі до варіацій у навчальних даних, забезпечуючи при цьому більш стабільні та інтерпретовані результати.

“Еластична мережа” (Elastic Net) поєднує в собі сильні сторони методів Lasso та гребеневої регресії, застосовуючи як L1-, так і L2-регуляризацію. Такий підхід дозволяє моделі зберігати властивості обох методів: здатність Lasso зануляти деякі коефіцієнти і тим самим здійснювати вибір змінних, а також стабільність та контроль над мультиколінеарністю, притаманну гребеневій регресії. “Еластична мережа” є особливо ефективною у випадках, коли незалежні змінні мають високу кореляцію між собою. На відміну від останнього, Elastic Net не накладає жорстких обмежень на кількість обраних предикторів, що забезпечує більшу гнучкість та адаптивність моделі до різних типів даних [7, 8].

Після розгляду теоретичних аспектів моделей регресійного аналізу, було здійснено практичне застосування обраних методів для прогнозування рівня залученості користувачів освітньої платформи Prometheus. Враховуючи оприлюднені аналітичні дані щодо активності користувачів у 2023 та 2024 році, здійснено оцінку можливих сценаріїв розвитку залученості на 2025 рік [9].

Слід зазначити, що дані, починаючи з 2020 року, демонструють аномальні зміни у динаміці користувацької активності, що пов'язано із переходом на онлайн-формат навчання під час пандемії COVID-19. Показники після 2022 року мають окремі спотворення, зумовлені повномасштабною військовою агресією проти України, яка вплинула на доступ до інфраструктури і на поведінку користувачів у цифровому середовищі.

Першим було застосовано метод Random Forest, що дозволяє враховувати нелінійні залежності між змінними та є стійким до перенавчання. На графіку нижче представлено результат прогнозу, отриманого за допомогою цього методу.

На зображенні видно загальну динаміку зростання та реакцію моделі на зміни в історичних даних. Приріст нових користувачів 2024–2025 рр. у відсотковому співвідношенні складає 0.41%.

Наступним підходом стала KNN-регресія, яка враховує подібність між точками у просторі ознак і базується на прогнозуванні значення цільової змінної з урахуванням найближчих сусідів.

Далі було протестовано гребеневу регресію, яка додає до цільової функції штраф за L2-норму коефіцієнтів. Приріст нових користувачів 2024–2025 рр. у відсотковому співвідношенні складає близько 0.001%, що є не значним.

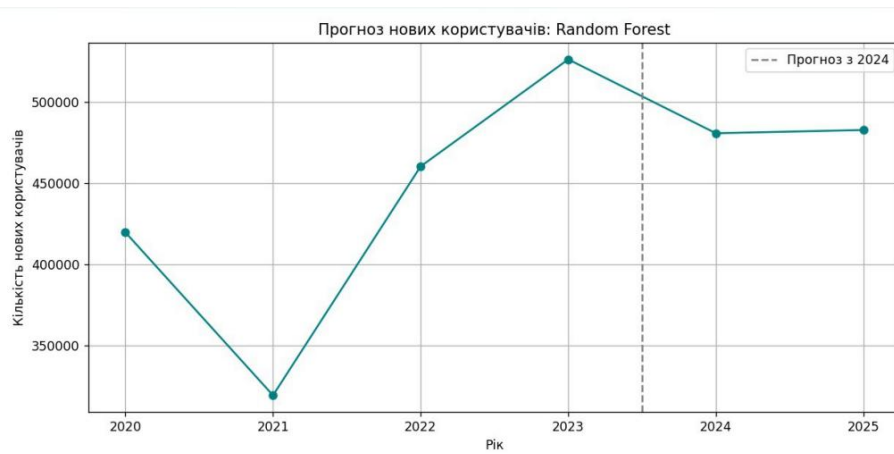


Рис. 1. Графік прогнозування нових користувачів за Random Forest.

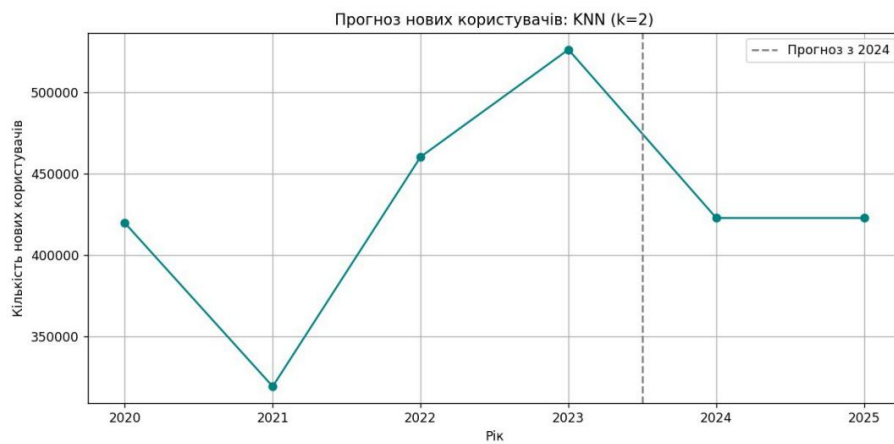


Рис. 2. Графік прогнозування нових користувачів за KNN-регресією.

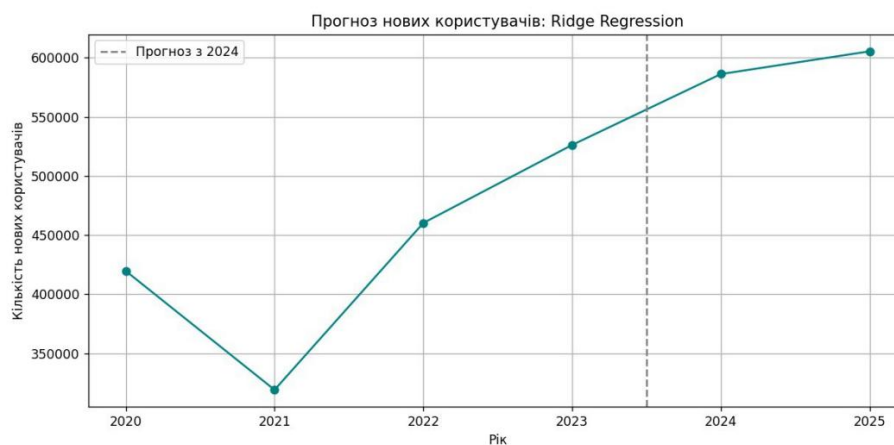


Рис. 3. Графік прогнозування нових користувачів за гребеневою регресією.

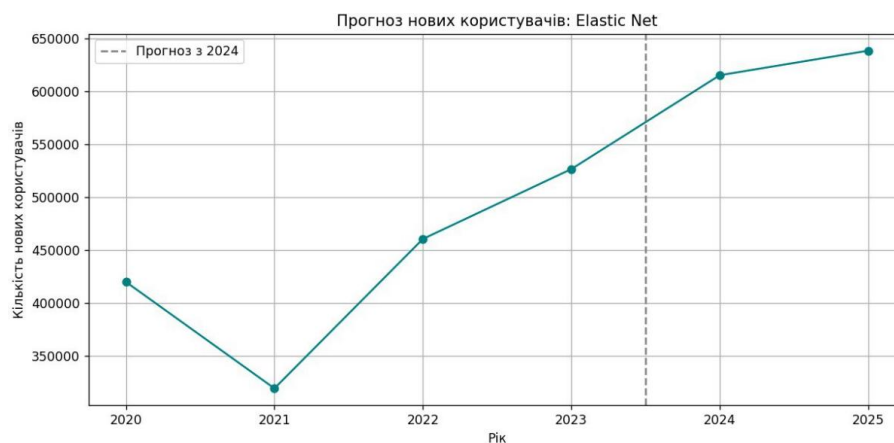


Рис. 4. Графік прогнозування нових користувачів за еластичною мережею.

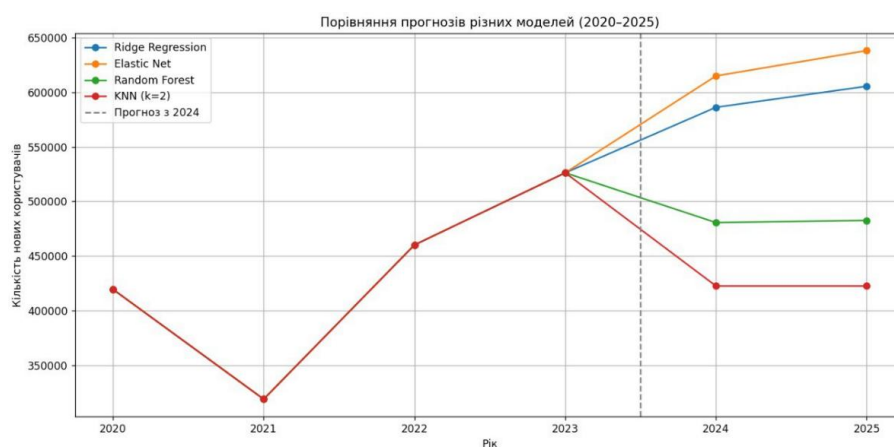


Рис. 5. Загальний графік прогнозування нових користувачів.

Графік демонструє згладжений тренд, модель менш чутлива до шуму, однак може недооцінювати пікові значення. Останнім методом стала еластична мережа, що об'єднує переваги L1 та L2 регуляризацій. Приріст нових користувачів 2024–2025 рр. у відсотковому співвідношенні складає близько 3.28%.

Для наочного порівняння результатів усіх методів нижче наведено підсумковий графік, на якому візуалізовано прогнози, отримані кожним із підходів.

Серед протестованих методів найбільш точним виявився Random Forest. Попри обмеженість і відносну вузькість доступного набору даних, ця модель продемонструвала високу стійкість до варіативності, зберігаючи здатність коректно виявляти приховані залежності між ознаками. Її ансамблева природа дозволила уникнути перенавчання, що особливо важливо в умовах обмеженої кількості спостережень, та забезпечити найбільш стабільний і достовірний прогноз.

3. Висновки. У ході дослідження було встановлено, що ефективність онлайн-платформ значною мірою залежить від рівня інтерактивності, персоналізації контенту та можливості адаптації до соціально-демографічних характеристик користувачів. Аналіз сучасних досліджень підтвердив актуальність

застосування моделей машинного навчання для прогнозування користувацької залученості, зокрема в умовах цифрових трансформацій та змін у структурі цільової аудиторії. Особливої уваги заслуговує метод Random Forest, який продемонстрував найвищу точність прогнозу завдяки своїй здатності ефективно обробляти великі обсяги даних із нелінійними залежностями.

Практичне застосування чотирьох методів регресійного аналізу — Random Forest, KNN-регресії, гребеневої регресії та еластичної мережі — засвідчило різний рівень ефективності кожного підходу щодо прогнозування динаміки користувачів освітньої платформи Prometheus. Найвищий приріст прогнозованої залученості у 2025 році показала модель еластичної мережі, однак з точки зору стабільності та стійкості до змін у структурі даних, найнадійнішими виявилися результати, отримані за допомогою Random Forest. Таким чином, подальші дослідження доцільно спрямовувати на вдосконалення гібридних моделей із урахуванням соціально-демографічного контексту та специфіки поведінки користувачів у динамічному цифровому середовищі.

Список використаної літератури

1. Лях І. М., Савенко О. І., Чобаль В. В., Гладкий К. І. Використання інтерактивних методів навчання: шлях до ефективної освіти. Актуальні проблеми економіки. 2025. Т. 286, № 4. С. 14–20.
2. Божок К. Ю. Огляд цифрових платформ для надання освітніх послуг з елементами гейміфікації. *Наукові барви* : Збірник тез доповідей учасників III Всеукраїнської наукової Інтернет-конференції. 8 листопада, 2024. Київ : КНЕУ, 2024. С. 26–28.
3. Porter B., Bozkaya B. Assessing the Effectiveness of Using Live Interactions and Feedback to Increase Engagement in Online Learning. 2020. arxiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.08241>
4. Статистичний збірник наявного населення 2022. URL: <http://db.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007> (дата звернення: 25.02.2025).
5. Національні демографічні прогнози. Національної академії наук України. URL: https://idss.org.ua/forecasts/nation_pop_proj (дата звернення: 23.02.2025).
6. Ланда В., Ревук М. Три важливі демографічні показники. 2023-го народилося найменше дітей за останні 300 років. 2024. URL: <https://texty.org.ua/articles/112194/try-vazhlyvi-demohrafichni-pokaznyky-2023-ho-narodylosya-najmenshe-ditej-za-ostanni-300-rokiv> (дата звернення: 25.02.2025).
7. Noi P. T., Kappas M. Comparison of Random Forest, k-Nearest Neighbor, and Support Vector Machine Classifiers for Land Cover Classification Using Sentinel-2 Imagery. *Multidisciplinary Digital Publishing Institute*. 2017. Vol. 18, No. 1. 18. DOI: <https://doi.org/10.3390/s18010018>
8. What is lasso regression? IBM URL: <https://www.ibm.com/think/topics/lasso-regression> (date of access: 24.02.2025).
9. Сабадишина Ю. Лише третина учасників завершує безплатні курси, найбільше слухачів — віком 30+. Prometheus про онлайн-навчання українців. 2024. DOU. URL: <https://dou.ua/lenta/news/prometheus-in-2023> (дата звернення: 25.02.2025).

Liakh I. M., Dudnyk V. V., Tsipino Y. M., Tsipino A. Y. Forecasting user engagement in educational web platforms using machine learning algorithms.

The article examines technological approaches to the implementation of educational online platforms incorporating gamification elements. The current development of digital technologies imposes new requirements on web applications, particularly in the context of interactive visualization of complex data and statistical results in real time. This is especially relevant in the field of education, where distance learning platforms must offer not only user-friendly interfaces but also effective tools for analyzing and visualizing learning outcomes. The article explores the use of various methods and algorithms for data

processing, specifically for predicting and analyzing user behavior on online platforms.

The study involved an analysis of available tools for integrating machine learning models and analytical instruments into web applications. Several machine learning algorithms, including Random Forest, KNN regression, Ridge regression, and Elastic Net, were compared in the context of analyzing user engagement on the Prometheus platform. Real analytical data were used to forecast user activity, enabling the development of models capable of accounting for variable dependencies and handling anomalous data caused by the COVID-19 pandemic and other socio-economic factors. The results demonstrate that the application of diverse machine learning methods enables accurate forecasting of user engagement, particularly when considering shifts in the socio-demographic landscape.

The research indicates that integrating such tools significantly enhances the effectiveness of user interaction with online platforms and establishes a foundation for further optimization of learning processes, particularly through content personalization and adaptive interaction methods.

Keywords: online platforms, machine learning, regression, forecasting, user activity, digital technologies.

References

1. Lyakh, I. M., Savenko, O. I., Chobal, V. V., & Gladky, K. I. (2025). Using interactive teaching methods: the way to effective education. *Current problems of economics*, 286(4), 14–20.
2. Bozhok, K. Yu. (November 8, 2024). Review of digital platforms for providing educational services with elements of gamification. In *Scientific colors: Collection of abstracts of reports of participants of the III All-Ukrainian Scientific Internet Conference*. Kyiv: KNEU, 26–28.
3. Porter, B., & Bozkaya, B. (2020). Assessing the Effectiveness of Using Live Interactions and Feedback to Increase Engagement in Online Learning. arxiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.08241>
4. Statistical collection of the current population. (2022). Retrieved from <http://db.ukrcensus.gov.ua/PXWEB2007>
5. National Demographic Forecasts. National Academy of Sciences of Ukraine. Retrieved from https://idss.org.ua/forecasts/nation_pop_proj
6. Landa, V., & Revuk, M. (2024). Three important demographic indicators. In 2023, the fewest children were born in the last 300 years. Retrieved from <https://texty.org.ua/articles/112194/try-vazhlyvi-demohrafichni-pokaznyky-2023-ho-narodylosya-najmenshe-ditej-za-ostanni-300-rokiv>
7. Noi, P. T., & Kappas, M. (2017). Comparison of Random Forest, k-Nearest Neighbor, and Support Vector Machine Classifiers for Land Cover Classification Using Sentinel-2 Imagery. *Multidisciplinary Digital Publishing Institute*, 18(1), 18. <https://doi.org/10.3390/s18010018>
8. What is lasso regression? IBM Retrieved from <https://www.ibm.com/think/topics/lasso-regression>
9. Sabadyshyna, Yu. (2024). Only a third of participants complete free courses, most of the students — aged 30+. Prometheus about online learning of Ukrainians. DOU. Retrieved from <https://dou.ua/lenta/news/prometheus-in-2023>

Одержано 18.03.2025

УДК 004.89:616.379-008.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).226-233](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).226-233)**М. М. Мальяр¹, Н. Е. Кондрук², Є. Б. Кондрук³, В. А. Нерода⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук
mykola.malyar@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцентка кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
yevhen.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8555-3351>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
vladyslav.neroda@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-2037-6631>

РОЗРОБКА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ДЛЯ ДІАГНОСТУВАННЯ ДІАБЕТУ

У статті представлено результати розробки інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень для діагностики цукрового діабету з використанням методів машинного навчання. На основі відкритого медичного датасету було побудовано та проаналізовано низку класифікаційних моделей, зокрема логістичну регресію, Random Forest та XGBoost. З метою підвищення точності було застосовано метод стратифікації при виділенні валідаційних даних, масштабування ознак, крос-валідацію та оптимізацію гіперпараметрів моделей. Особливу увагу приділено аналізу матриць невідповідності та оцінці впливу ключових ознак. Найкраща кросвалідаційна точність досягнута моделлю Random Forest (94.43%), що свідчить про її здатність добре узагальнювати закономірності у незбалансованих даних. Найнижча кількість помилок другого роду ($FN = 16$) спостерігається в моделі XGBoost. Запропонований підхід може бути ефективно використаний для попереднього діагностування діабету.

Ключові слова: система прийняття рішень, класифікація, діагностування діабету, інтелектуальна система, машинне навчання.

1. Вступ. Проблема захворювання на діабет є однією з найбільш актуальних у сучасних умовах, оскільки вона має не тільки медичні, але й суттєві соціо-економічні наслідки. Зростання кількості випадків діабету призводить до збільшення витрат на медичне обслуговування, зниження продуктивності праці та погіршення якості життя населення.

Раннє виявлення ризику розвитку діабету є важливим завданням для системи охорони здоров'я, оскільки дозволяє своєчасно запроваджувати профілактичні заходи і ефективно розподіляти ресурси.

Одним із перспективних підходів до вирішення цієї задачі є розробка систем підтримки прийняття рішень (СППР), які базуються на методах прогнозування

та класифікації. Використання таких систем дозволяє автоматизувати процес діагностики, підвищити його точність та обґрунтованість.

Мета даної роботи полягає у розробці системи прийняття рішень для діагностування діабету з використанням методів класифікації. У рамках дослідження проведено аналіз ефективності різних класифікаторів, що дозволить обґрунтувати вибір найбільш оптимального підходу для практичного використання в соціо-економічних дослідженнях та медичних інформаційних системах.

2. Огляд літератури. Проблема розробки систем прийняття рішень для діагностики діабету набуває значної уваги в сучасних дослідженнях, зокрема завдяки застосуванню методів машинного навчання та штучного інтелекту. В останні роки багато авторів досліджували різні підходи до підвищення точності прогнозування та автоматизації аналізу медичних даних.

Одним із перспективних напрямків є застосування глибоких нейронних мереж для аналізу медичних записів та автоматичного діагностування діабету. У дослідженні [1] автори продемонстрували ефективність використання глибоких нейронних мереж у моделюванні та класифікації медичних даних. Вони порівняли різні архітектури мереж та показали, що комбіновані моделі можуть значно покращити точність діагностики.

Машинне навчання широко застосовується для покращення точності прогнозування діабету. Автори у праці [2] розглядають ключові алгоритми, що використовуються в сучасних клінічних системах підтримки прийняття рішень. Автори аналізують різні моделі машинного навчання, їх переваги та недоліки, а також шляхи покращення продуктивності за рахунок вдосконалення методів обробки даних.

У дослідженні [3] розглядається застосування методів машинного навчання для прогнозування діабету, аналізуються різні алгоритми, включаючи моделі прихованих Марковських процесів (Hidden Markov Models, HMM), які використовуються для виявлення закономірностей у клінічних даних.

Порівняння квантового машинного навчання (QML) та глибокого навчання (DL) для прогнозування діабету на основі набору даних «PIMA Indian Diabetes» розглянуто у [4]. Автори аналізують їх продуктивність. Дослідження також підкреслює значення нормалізації даних і усунення аномалій для покращення діагностичних результатів.

3. Постановка проблеми. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

1. Підібрати набір даних про захворювання діабету та провести попередню обробку даних.
2. Побудувати та налаштувати моделі машинного навчання (логістична регресія, Random Forest, XGBoost) із налаштуванням гіперпараметрів.
3. Здійснити оцінку ефективності моделей за допомогою крос-валідації та побудови матриць невідповідності.
4. Дослідити вплив моделей на співвідношення помилок першого та другого роду.
5. Визначити найбільш інформативні ознаки для діагностики діабету на основі аналізу важливості у моделях Random Forest та XGBoost.

4. Методи дослідження. Серед найефективніших алгоритмів для вирішення задач класифікацій із незбалансованими класами є логістична регресія,

метод випадкового лісу та XGBoost.

Логістична регресія є одним із класичних статистичних методів, який добре працює у випадках, коли залежність між ознаками та цільовою змінною має лінійний характер. Вона використовується для моделювання ймовірності належності до певного класу та часто застосовується у медичних прогнозах. Дослідження останніх років показують, що дана модель залишається ефективною при аналізі великих медичних наборів даних, хоча її точність може бути нижчою порівняно з більш складними моделями машинного навчання. Зокрема, у дослідженні [5-7] розглядаються основні аспекти застосування логістичної регресії у прогнозуванні медичних станів та оцінку ефективності моделі у діагностиці захворювань.

Random Forest Classifier є ансамблевим методом, який використовує сукупність дерев рішень для підвищення точності класифікації та регресії. Його основна ідея полягає у побудові ряду дерев, кожне з яких навчається на випадковій підмножині даних, а потім агрегує їхні результати для отримання остаточного прогнозу. Завдяки цьому підходу алгоритм демонструє високу точність, стійкість до перенавчання та здатність ефективно працювати з великими наборами даних. Дослідження останніх років підтверджують ефективність даної моделі у медичних прогнозах. У [8] аналізуються різні підходи до вибору ознак у моделі Random Forest, що є важливим аспектом для підвищення точності прогнозування. Стаття [9] аналізує застосування Random Forest Classifier для прогнозування діабету.

XGBoost є одним із найпотужніших алгоритмів градієнтного бустингу, який широко використовується у задачах прогнозування. Його основна ідея полягає у побудові ансамблю дерев рішень, які поступово коригують помилки попередніх моделей, що дозволяє досягти високої точності прогнозування. Завдяки ефективному використанню пам'яті та оптимізованим обчисленням XGBoost демонструє високу продуктивність навіть на великих наборах даних. У [10] аналізуються різні варіанти градієнтного бустингу, а в [11] досліджується його застосування для класифікації незбалансованих даних. Автори аналізують проблему нерівномірного розподілу класів у наборах даних, що часто зустрічається у медичних діагностичних задачах, інформаційній безпеці та текстовому аналізі.

5. Експерименти. У межах експерименту було реалізовано інформаційно-аналітичну систему для діагностики цукрового діабету з використанням методів машинного навчання. Робота починалась із попереднього аналізу та обробки медичного датасету [12], який було зібрано відповідно до показників та стандартів ВООЗ, та містив 17 ознак, включно з демографічними, клінічними, біохімічними та поведінковими характеристиками 4303 пацієнтів. Цільова ознака відображає наявність або відсутність діабету. Аналіз частот показав наявність дисбалансу класів, що вимагало спеціальних налаштувань алгоритмів.

Масштабування числових ознак на основі стандартного нормалізатора (StandardScaler) дозволило вирівняти шкали показників і уникнути переважного впливу ознак з великими значеннями.

Після масштабування дані було розділено на тренувальну та тестову вибірки у співвідношенні 80/20 методом стратифікації. Це дозволило забезпечити об'єктивну оцінку якості моделей на прихованих даних. Було розглянуто три ал-

горитми класифікаторів: логістична регресія, Random Forest та XGBoost який розглядався на стиснених методом головних компонент та нестиснених даних. Для кожної з моделей було проведено тюнінг гіперпараметрів з використанням перехресної перевірки (GridSearchCV з 5-фолд крос-валідацією), а також досліджено вплив таких параметрів як регуляризація, кількість дерев, глибина дерева та ваги класів.

Для оцінки якості моделей використовувалась середня точність крос-валідації, а також матриці невідповідності, побудовані на тестовій вибірці. Особливу увагу було приділено аналізу помилок другого роду (FN), оскільки в контексті медичної діагностики вони можуть призвести до невчасного виявлення захворювання. Для логістичної регресії окремо було проаналізовано зміну класифікаційного порогу з 0.5 до 0.4, що дало змогу зменшити кількість хибно негативних рішень за рахунок прийняттого зростання хибно позитивних.

Окремо було реалізовано підхід зі зниженням розмірності за допомогою методу головних компонент (PCA), який описаний у [13], що могло б покращити ефективність моделі. Визначено кількість компонент, що зберігають не менше 95% дисперсії, після чого модель XGBoost було навчено на новому зменшеному просторі ознак.

6. Результати дослідження та обговорення. У процесі дослідження було реалізовано та протестовано моделі для задачі діагностики цукрового діабету, результати їх ефективності наведено у таблиці 1. Основну увагу приділено оцінці точності моделей за крос-валідацією та аналізу матриць невідповідності для тестових даних.

Таблиця 1.

Порівняльна таблиця результатів

Модель	Точність крос-валідації	TN	Помилка I роду, FP	Помилка II роду, FN	TP
Логістична регресія (поріг = 0.5)	0.9314	256	5	22	239
Логістична (поріг = 0.4)	0.9313	254	7	17	244
Random Forest	0.9443	253	8	17	244
XGBoost	0.9429	252	9	16	245
XGBoost + PCA	0.9319	256	5	24	237

У таблиці 1 позначено TP — істинно позитивні прогнози, TN — істинно негативні прогнози, FP — хибно позитивні прогнози (помилка I роду), FN — хибно негативні прогнози (помилка II роду).

Найкраща загальна точність досягнута моделлю Random Forest (94.43%), що свідчить про її здатність добре узагальнювати закономірності у незбалансованих даних. Найнижча кількість помилок другого роду (FN = 16) спостерігається в моделі XGBoost, що є суттєвим плюсом, оскільки помилка другого роду

в медичній сфері (невиявлення хворого пацієнта) має серйозні наслідки. Водночас ця модель має найвищу кількість FP (9). Логістична регресія із зниженим порогом (0.4) демонструє зменшення FN з 22 до 17 порівняно з класичним підходом (пори́г = 0.5), що дозволяє краще виявляти хворих пацієнтів, але ціною збільшення FP з 5 до 7. Такий компроміс часто є прийнятним у клінічних задачах, де важливіша чутливість (sensitivity), ніж специфічність (specificity).

Модель XGBoost з PCA показує зниження точності (93.19%) і зростання FN (24), що свідчить про те, що зниження розмірності через PCA у цьому випадку не покращує, а навіть трохи погіршує діагностичну здатність.

Також для моделей Random Forest та XGBoost було проаналізовано важливість ознак, що показано на рисунку 1. Визначено, що найбільший вплив на класифікаційні рішення мають такі ознаки, як рівень HDL (ліпопротеїни високої щільності), FPG (рівень глюкози в плазмі крові натщесерце), паління, вживання алкоголю, вік та рівень LDL (ліпопротеїни низької щільності). Це дозволяє не лише підвищити ефективність діагностики, а й сформулювати рекомендації щодо зменшення ризиків.

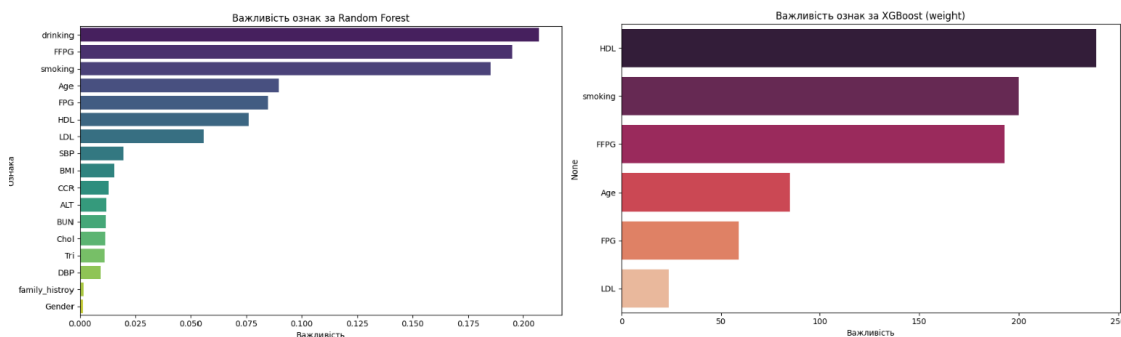


Рис. 1. Важливість ознак Random Forest та XGBoost.

У контексті медичної діагностики, мінімізація помилок другого роду (FN) є критичною. У цьому аспекті XGBoost та логістична регресія з порогом 0.4 виглядають найбільш релевантними. Якщо важливо забезпечити високий загальний баланс точності при обмеженні FP та FN — найкращим вибором є Random Forest. Логістична регресія із порогом 0.4 показала добрий компроміс і може бути рекомендована для впровадження як проста та інтерпретована модель. Метод PCA, хоча і популярний для зменшення розмірності, в даному випадку не дав позитивного ефекту, що свідчить про високу інформативність початкових ознак.

Аналіз важливості ознак виявив ключові фактори ризику розвитку діабету, зокрема рівні HDL, FFPG, паління та вживання алкоголю. Це узгоджується з медичними знаннями і демонструє, що моделі не лише здатні до класифікації, але й мають потенціал для інтерпретації і формування рекомендацій. Отримані результати підтверджують доцільність комплексного підходу, що включає збалансування класів, тюнінг моделей, оптимізацію порогу та інтерпретацію важливості ознак.

7. Висновки. У результаті проведеного дослідження було реалізовано підхід до побудови інтелектуальної системи прийняття рішень для діагностики

цукрового діабету на основі методів машинного навчання.

Найвищу точність крос-валідації (94.43%) продемонструвала модель Random Forest, однак за мінімальним рівнем помилок другого роду на тестових даних (що є важливим показником у медичній діагностиці) найкращих результатів досягнуто за допомогою XGBoost (FN = 16). З огляду на це, зазначені моделі є найбільш придатними для інтеграції в СППР.

Таким чином, результати дослідження засвідчують практичну ефективність застосування ансамблевих методів машинного навчання у задачах медичної діагностики, а також важливість гнучкого налаштування моделей з урахуванням специфіки предметної галузі. Розроблена система може слугувати ефективним допоміжним інструментом для медичних фахівців у процесі прийняття клінічних рішень щодо діагностики діабету.

Список використаної літератури

1. Rabie O., Alghazzawi D., Asghar J., Saddozai F. K., Asghar M. Z. A decision support system for diagnosing diabetes using deep neural network. *Frontiers in Public Health*. 2022. Vol. 10. DOI: <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.861062>
2. Tuppad A., Patil S. D. Machine learning for diabetes clinical decision support: a review. *Advances in Computational Intelligence*. 2022. Vol. 2, No. 2. P. 22. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43674-022-00034-y>
3. Omana J., Moorthi M. Predictive analysis and prognostic approach of diabetes prediction with machine learning techniques. *Wireless Personal Communications*. 2022. Vol. 127, No. 1. P. 465–478. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11277-021-08274-w>
4. Gupta H., Varshney H., Sharma T. K., Pachauri N., Verma O. P. Comparative performance analysis of quantum machine learning with deep learning for diabetes prediction. *Complex & Intelligent Systems*. 2022. Vol. 8, No. 4. P. 3073–3087. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40747-021-00398-7>
5. Olowe K. J., Edoh N. L., Zouo S. J. C., Olamijuwon J. Comprehensive review of logistic regression techniques in predicting health outcomes and trends. *World Journal of Advanced Pharmaceutical and Life Sciences*. 2024. Vol. 7, No. 2. P. 16–26. DOI: <https://doi.org/10.53346/wjapls.2024.7.2.0039>
6. Badawy M., Ramadan N., Hefny H. A. Healthcare predictive analytics using machine learning and deep learning techniques: a survey. *Journal of Electrical Systems and Information Technology*. 2023. Vol. 10, No. 1. Article No. 40. DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1885746/v2>
7. Sievering A. W. and others. Comparison of machine learning methods with logistic regression analysis in creating predictive models for risk of critical in-hospital events in COVID-19 patients on hospital admission. *BMC Medical Informatics and Decision Making*. 2022. Vol. 22, No. 1. Article No. 309. DOI: <https://doi.org/10.1186/s12911-022-02057-4>
8. Iranzad R., Liu X. A review of random forest-based feature selection methods for data science education and applications. *International Journal of Data Science and Analytics*. 2024. P. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41060-024-00509-w>
9. Palimkar P., Shaw R. N., Ghosh A. Machine learning technique to prognosis diabetes disease: Random forest classifier approach. *Advanced computing and intelligent technologies : proceedings of ICACIT 2021*. Singapore : Springer Singapore, 2021. P. 219–244. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-16-2164-2_19
10. Bentéjac C., Csörgő A., Martínez-Muñoz G. A comparative analysis of gradient boosting algorithms. *Artificial Intelligence Review*. 2021. Vol. 54. P. 1937–1967. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10462-020-09896-5>
11. Zhang P., Jia Y., Shang Y. Research and application of XGBoost in imbalanced data. *International Journal of Distributed Sensor Networks*. 2022. Vol. 18, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1177/1550132922110693>
12. Darabi P. K. Diabetes dataset with 18 features. 2023. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/pkdarabi/diabetes-dataset-with-18-features> (date of

access: 15.03.2025).

13. Кондрук Н. Е. Аналіз технік зменшення розмірності в машинному навчанні. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2023. Вип. 42, № 1. С. 181–187. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).181-187](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).181-187)

Malyar M. M., Kondruk N. E., Kondruk E. B., Neroda V. A. Development of an Intelligent Decision Support System for Diabetes Diagnosis.

The article presents the results of the development of an intelligent decision support system for the diagnosis of diabetes mellitus using machine learning methods. Based on an open medical dataset, a number of classification models were built and analyzed, including logistic regression, Random Forest, and XGBoost. In order to improve the accuracy, the stratification method was used to select validation data, feature scaling, cross-validation, and optimization of model hyperparameters. Particular attention was paid to analyzing the discrepancy matrices and assessing the impact of key features. The best cross-validation accuracy was achieved by the Random Forest model (94.43%), which indicates its ability to generalize patterns in unbalanced data well. The lowest number of errors of the second kind (FN = 16) is observed in the XGBoost model. The proposed approach can be effectively used for the preliminary diagnosis of diabetes.

Keywords: decision-making system, classification, diabetes diagnosis, intelligent system, machine learning.

References

1. Rabie, O., Alghazzawi, D., Asghar, J., Saddozai, F. K., & Asghar, M. Z. (2022). A decision support system for diagnosing diabetes using deep neural network. *Frontiers in Public Health*, 10, 861062. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.861062>
2. Tuppad, A., & Patil, S. D. (2022). Machine learning for diabetes clinical decision support: A review. *Advances in Computational Intelligence*, 2(2), 22. <https://doi.org/10.1007/s43674-022-00034-y>
3. Omana, J., & Moorthi, M. (2022). Predictive analysis and prognostic approach of diabetes prediction with machine learning techniques. *Wireless Personal Communications*, 127(1), 465–478. <https://doi.org/10.1007/s11277-021-08274-w>
4. Gupta, H., Varshney, H., Sharma, T. K., Pachauri, N., & Verma, O. P. (2022). Comparative performance analysis of quantum machine learning with deep learning for diabetes prediction. *Complex & Intelligent Systems*, 8(4), 3073–3087. <https://doi.org/10.1007/s40747-021-00398-7>
5. Olowe, K. J., Edoh, N. L., Zouo, S. J. C., & Olamijuwon, J. (2024). Comprehensive review of logistic regression techniques in predicting health outcomes and trends. *World Journal of Advanced Pharmaceutical and Life Sciences*, 7(2), 16–26. <https://doi.org/10.53346/wjapls.2024.7.2.0039>
6. Badawy, M., Ramadan, N., & Hefny, H. A. (2023). Healthcare predictive analytics using machine learning and deep learning techniques: A survey. *Journal of Electrical Systems and Information Technology*, 10(1), 40. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-1885746/v2>
7. Sievering, A. W., & others. (2022). Comparison of machine learning methods with logistic regression analysis in creating predictive models for risk of critical in-hospital events in COVID-19 patients on hospital admission. *BMC Medical Informatics and Decision Making*, 22(1), 309. <https://doi.org/10.1186/s12911-022-02057-4>
8. Iranzad, R., & Liu, X. (2024). A review of random forest-based feature selection methods for data science education and applications. *International Journal of Data Science and Analytics*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s41060-024-00509-w>
9. Palimkar, P., Shaw, R. N., & Ghosh, A. (2021). Machine learning technique to prognosis diabetes disease: Random forest classifier approach. In *Advanced computing and intelligent technologies: Proceedings of ICACIT 2021*. Springer: Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-2164-2_19
10. Bentéjac, C., Csörgő, A., & Martínez-Muñoz, G. (2021). A comparative analy-

- sis of gradient boosting algorithms. *Artificial Intelligence Review*, 54(3), 1937–1967. <https://doi.org/10.1007/s10462-020-09896-5>
11. Zhang, P., Jia, Y., & Shang, Y. (2022). Research and application of XGBoost in imbalanced data. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 18(6). <https://doi.org/10.1177/1550132922110693>
 12. Darabi, P. K. (2023). *Diabetes dataset with 18 features*. [Data set]. Kaggle. Retrieved from <https://www.kaggle.com/datasets/pkdarabi/diabetes-dataset-with-18-features>
 13. Kondruk, N. E. (2023). Analysis of dimensionality reduction techniques in machine learning. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, Series "Mathematics and Informatics"*, 42(1), 181–187. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).181-187](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).181-187)

Одержано 25.03.2025

УДК 539.12

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).234-246](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).234-246)**О. С. Паничок¹, Ю. О. Ящук²**

¹ Львівський національний Університет ім. І. Франка,
студентка спеціальності Прикладна математика
olena.panychok@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-5821-8616>

² Львівський національний Університет ім. І. Франка,
завідувач кафедри прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yuriy.yashchuk@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4935-497X>

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ СЕЙСМІЧНИХ ХВИЛЬ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УМОВАМИ ІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ

У цій статті розглядаються теоретичні та чисельні аспекти моделювання розповсюдження сейсмічних хвиль у насичених пористих середовищах за моделлю Біота. Представлено повний опис математичної моделі, що містить рівняння руху твердого скелету та рідини, умови збереження маси й напружень, а також чисельну реалізацію з використанням явної скінченно-різницевої схеми другого порядку. Детально проаналізовано умови інтерфейсного контакту між середовищами з різними швидкостями хвиль, умову CFL, норми L_2 та H^1 для оцінки похибок, а також порядок збіжності методу. Результати чисельних експериментів, підтверджені як статистичними даними, так і зображеннями (кадрами моделювання), демонструють високу точність моделювання. Стаття містить розгорнутий аналіз отриманих результатів і детально обговорює перспективи застосування розробленої методики.

Ключові слова: сейсмічні хвилі, пористе середовище, модель Біота, Ricker-імпульс, ідеальний контакт, математична модель, CFL, збіжність.

1. Вступ. Пружні хвилі у геологічних середовищах часто розповсюджуються в породах, насичених флюїдами (водою, нафтою, газом). Для опису їхнього поширення використовується теорія поропружності, зокрема модель Біота, яка враховує взаємодію між твердою пористою структурою та проникним флюїдом [1, 2]. Модель Біота дозволяє описати два типи поздовжніх (компресійних) хвиль — так звану швидку P -хвилю, в якій рух твердого скелету та флюїду відбувається в фазі, та повільну P -хвилю, де рухи флюїду відносно скелету протифазні і яка зазвичай сильно затухає. Також у середовищі існує одна поперечна (S) хвиля, що поширюється лише через деформації твердого скелета. Наявність двох P -хвиль є унікальною особливістю теорії Біота і підтверджена експериментально (повільна хвиля була вперше спостережена в лабораторії у 1980-х роках [3, 4]). Здатність повільної хвилі переносити енергію обмежена — на низьких частотах вона проявляється як дифузійний процес через в'язкий опір руху флюїду, а на високих частотах стає хвилею з помірним затуханням, яка все ж розсіює значну частину енергії на тепло через тертя флюїду об породи. Таким чином, модель Біота враховує дисипативні ефекти і дозволяє адекватно описати загасання сейсмічних сигналів у насичених флюїдом породах.

У цій статті математично формулюється задача поширення сейсмічних хвиль у двовимірному пористому середовищі з вертикальним інтерфейсом, що розді-

ляє два матеріали з різними властивостями. Розглянуто *умови контакту* на поверхні розділу, які відповідають моделі ідеального гідравлічного зв'язку між пористими середовищами (“відкриті пори” [5]). Це означає, що пористі каркаси механічно з'єднані, а флюїд може вільно перетікати через межу. У роботі виведено відповідні граничні умови для напружень, тиску та швидкостей, що забезпечують коректне математичне формулювання задачі [6].

На відміну від попередніх робіт, де моделювання обмежувалося однорідними або слабо неоднорідними середовищами [7, 8], у цій роботі поєднано кілька аспектів:

- теоретичне обґрунтування умов неперервності між пористими середовищами;
- чисельну реалізацію цих умов у скінченно-різницевій схемі другого порядку;
- оцінку точності методу в енергетичних нормах L_2 та H^1 ;
- аналіз хвильових ефектів на інтерфейсі при зміні жорсткості матеріалу.

У деяких дослідженнях [4, 9] модель обмежується лише твердим каркасом або не враховує ефекти повільної хвилі. Натомість у цьому дослідженні реалізовано згладжене врахування параметрів на межі, що дозволяє уникнути чисельних розривів і забезпечує фізично узгоджене моделювання переходу хвиль між середовищами.

Загалом, робота пропонує один із варіантів чисельного підходу до моделювання хвиль у пористих середовищах з урахуванням інтерфейсних умов і може бути корисною при вивченні подібних задач у геофізичному контексті.

2. Постановка задачі та основний результат.

Розглянемо пористе пружне середовище, насичене рідиною — суцільне тіло, що складається з твердого каркасу з коефіцієнтом пористості ϕ та пор, повністю заповнених рідиною. Фізичні властивості середовища визначаються наступними параметрами: параметри Ляме λ та μ для опису пружності каркасу; модуль стисливості рідини K_f ; густини ρ_s та ρ_f ; коефіцієнт проникності k та в'язкість η ; коефіцієнт Біота α та модуль Біота M , що враховують взаємодію між двома фазами [1].

Ефект взаємодії скелета з рідиною може також описуватись через ефективні параметри, які інтегрують вплив обох фаз на поведінку хвиль.

Для опису малих пружних деформацій насиченого пористого середовища використовуються змінні: вектор зміщень твердого скелета $\mathbf{u}(x, z, t)$ та тиск флюїду в порах $p(x, z, t)$ (або, еквівалентно, вектор відносного зміщення флюїду $\mathbf{u}_f$). Відповідно, повні напруження в скелеті σ_{ij} виражаються як

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha p \delta_{ij}, \quad (1)$$

де δ_{ij} — символ Кронекера, а α — коефіцієнт Біота (пористості та стисливості скелета). Для пружного скелета $\sigma'_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}$, де $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$ — тензор малих деформацій, $\theta = \varepsilon_{kk}$ — об'ємна деформація (дивергенція зміщення), а λ, G — параметри Ляме для скелета (модуль об'ємної пружності та модуль зсуву відповідно).

Насичуючий флюїд вважається ньютонівським, його рух відносно скелета описується узагальненим законом Дарсі [10]. Введемо вектор відносної швид-

кості флюїду $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$, де ϕ — пористість, $\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{U}}_f$ — швидкість флюїду, $\mathbf{v}_s = \dot{\mathbf{u}}$ — швидкість твердої фази (крапка означає похідну за часом). Тоді закон фільтрації запишеться як

$$\eta \mathbf{w} + m \dot{\mathbf{w}} = -\nabla p, \quad (2)$$

де η — динамічна в'язкість флюїду в порах, m — параметр дренаваності (що залежить від проникності та властивостей флюїду). У випадку гарної проникності і невисоких частот член з $\dot{\mathbf{w}}$ малий (фільтрація описується переважно стаціонарним режимом Дарсі). Навпаки, за високих частот рух флюїду інерційний і домінує член $m \dot{\mathbf{w}}$.

Рівняння руху (балансу імпульсу) для двокомпонентної пористої матеріалу формулюються окремо для скелета і флюїду. Для твердої фази:

$$(1 - \phi) \rho_s \ddot{u}_i + \phi \rho_f \ddot{w}_i = \nabla_j \sigma_{ij}, \quad (3)$$

а для флюїду (точніше, для відносного руху флюїду) — із врахуванням закону (2):

$$\phi \rho_f \ddot{u}_i + \phi \rho_f \ddot{w}_i = -\partial_i p, \quad (4)$$

де ρ_s і ρ_f — густини скелета і флюїду відповідно (припускається, що пори повністю насичені). Сума (3)+(4) дає загальне рівняння балансу сил для суміші:

$$((1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f) \ddot{u}_i + \phi\rho_f \ddot{w}_i = \nabla_j \sigma'_{ij} - \partial_i p,$$

що рівносильно

$$((1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f) \ddot{u}_i - \alpha \partial_i p = (\lambda + 2G) \partial_i \theta + G \nabla^2 u_i, \quad (5)$$

якщо підставити (1) та врахувати ізотропність пружного скелета. Друге незалежне рівняння отримуємо, виключивши $\ddot{w}_i$ між (3) і (4). Для цього продиференціюємо (2) по часу і підставимо в (3). Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\alpha \theta + \frac{1}{M} p - \frac{\rho_f}{m} \ddot{p} = 0, \quad (6)$$

де введено параметр M , що визначається стисливістю флюїду та скелета (його ще називають модулем Біота). Рівняння (5)–(6) разом утворюють систему рівнянь Біота [2,4] у диференціальній формі для невідомих $\mathbf{u}(x, z, t)$ і $p(x, z, t)$ [2,4].

З цієї системи випливають дві незалежні комбінації хвильових процесів. Перше — це поперечні (S) хвилі, що задовольняють спрощеному рівнянню $\rho_s \ddot{\mathbf{u}} = G \nabla^2 \mathbf{u}$ (в них відносний рух флюїду не збуджується, $p = 0$). Друге — поздовжні (P) хвилі, для яких змінні (θ, p) підлягають рівнянням типу хвильового рівняння з двома характерними швидкостями:

$$c_{P1,2}^2 = \frac{1}{2((1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f)} \left[(K_u + \frac{4}{3}G) \pm \sqrt{(K_u + \frac{4}{3}G - K_d)^2 + \left(\frac{\alpha}{M}\right)^{-1} K_d} \right],$$

де K_u і K_d — параметри пружності при невідведеному та відведеному дренажі відповідно (пов'язані з M , λ та α). Ці швидкості відповідають так званій швидкій ($P1$) хвилі та повільній ($P2$) хвилі у моделі Біота [1]. Величини c_{P1} і c_{P2} розрізняються на декілька порядків (повільна хвиля повільніша), причому

P_2 -хвиля зазвичай має великий коефіцієнт загасання через в'язкі втрати (члени з η в (2)). У межі $M \rightarrow \infty$ (незтисливий флюїд) повільна хвиля практично зникає, а швидка хвиля переходить у звичайну пружну P -хвилю в еквівалентному монолітному середовищі. Таким чином, рівняння Біота описують більш складну динаміку, ніж класичне хвильове рівняння, і для повного їх вирішення потрібен аналіз взаємодії двох хвильових режимів.

Ідеальні умови контакту двох пористих середовищ. Контактні умови на інтерфейсі — це умови, що забезпечують фізично коректне злиття двох пористих середовищ з різними властивостями. У нашому випадку для вертикального інтерфейсу $x = x_I$ (де, наприклад, $x_I = 0.5$) виконуються наступні умови:

- (I) **Неперервність зміщень:** $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$ на $x = x_I$;
- (II) **Неперервність напружень:** компоненти тензора напружень (зокрема, σ_{xx} та σ_{zx}) однакові з обох боків інтерфейсу;
- (III) **Неперервність порового тиску:** $p^{(1)} = p^{(2)}$ на $x = x_I$;
- (IV) **Неперервність нормальної компоненти фільтраційної швидкості:** $w_n^{(1)} = w_n^{(2)}$, де $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s)$.

Розглянемо плоску поверхню розділу, яка у нашій постановці є вертикальною лінією $x = x_I$. На цій межі зліва знаходиться перше пористе середовище з параметрами $(\rho_s^{(1)}, \rho_f^{(1)}, G^{(1)}, \lambda^{(1)}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}, M^{(1)}, \eta^{(1)}, \dots)$, а справа — друге середовище з власними параметрами $(\rho_s^{(2)}, \rho_f^{(2)}, \dots)$. Для коректного розв'язання задачі поширення хвиль необхідно задати фізично обґрунтовані граничні умови на межі $x = x_I$, що зв'язують поля $\mathbf{u}^{(1)}, p^{(1)}$ зліва та $\mathbf{u}^{(2)}, p^{(2)}$ справа. У випадку *ідеального контакту* (відсутність прослизання або зазору між твердими каркасами та вільного перетікання флюїду) виконуються умови суцільності [5, 6].

Зазначені умови (I)–(IV) є *граничними умовами суцільності* на інтерфейсі насичених пористих середовищ. В роботах Дерешевича і Скалака [6] було доведено, що існують лише дві фізично прийнятні альтернативи таких умов: або описаний вище випадок повного гідравлічного контакту, або випадок абсолютно непроникного контакту (коли умови (III) і (IV) замінюються на $w_n = 0$ і допускається розрив p згідно з певним коефіцієнтом стрибка). Саме ці дві ситуації забезпечують єдиність розв'язку задачі і узгодженість з основними рівняннями Біота на межі розділу. У даній роботі прийнято умови відкритого контакту (пори сполучені), оскільки вони найбільш відповідають фізичній моделі цільових геофізичних середовищ (наприклад, шаруватих водонасичених ґрунтів або тріщинуватих колекторів). Варто зауважити, що неперервність зміщень (I) фактично означає відсутність механічного розриву: обидва середовища деформуються як єдине ціле на межі, тому і напруження передаються безперешкодно (II). Одночасно неперервність тиску (III) та потоку (IV) гарантують відсутність неузгодженостей у балансі маси флюїду і виключають неграничні стрибки розв'язку. У чисельній схемі, представлений нижче, ці умови будуть враховані шляхом спеціальної побудови різницевих операторів на вузлах, що лежать поблизу інтерфейсу.

Чисельний метод розв'язання задачі: різницева схема та умова стійкості CFL.

Для наближеного розв'язання початково-крайової задачі, заданої рівняннями Біота (5)–(6) з граничними умовами суцільності на $x = x_I$, використовується двовимірний явна кінцево-різницева схема другого порядку точності [11]. Область моделювання розбивається на рівномірну сітку розміром $(N+1) \times (N+1)$ вузлів з кроком $\Delta x = \Delta z = h$. Для дискретизації за часом вводиться крок $\Delta t = \tau$. Позначимо $u_{i,j}^n$ — обчислене значення відповідної компоненти зміщення $\mathbf{u}$ у вузлі з індексами (i, j) на n -му кроці часу.

Центральна різницева схема другого порядку для просторових похідних використовує симетричні різниці значень функції в сусідніх точках, що забезпечує точність порядку $O(h^2)$. Друга похідна за часом апроксимується як

$$\ddot{u} \approx \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2},$$

а оператор Лапласа для поля зміщень обчислюється за допомогою двосторонніх різниць по координатах x та z . Особливістю є спосіб обчислення коефіцієнтів, що враховують різкі зміни швидкості хвилі c_{P1} на інтерфейсі. Щоб виконати умови (1)–(2) неперервності зміщень і напружень, використовуємо *симетричне усереднення* параметра c^2 на межі. Зокрема, різницева форма просторового оператора для рівняння (аналогічного до однорідного випадку (5) без повільної хвилі) будується так:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot c^2 \nabla u)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2} & \left[\bar{c}_{i+1/2,j}^2 (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - \bar{c}_{i-1/2,j}^2 (u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n) \right. \\ & \left. + \bar{c}_{i,j+1/2}^2 (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) - \bar{c}_{i,j-1/2}^2 (u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

де $\bar{c}_{i+1/2,j}^2 = \frac{c_{i+1,j}^2 + c_{i,j}^2}{2}$ — середнє значення параметра c^2 між сусідніми вузлами по горизонталі (аналогічно визначаються $\bar{c}_{i-1/2,j}^2$ та інші). Тут $c_{i,j}$ означає локальну швидкість поширення P -хвилі в даному елементі сітки. В нашій задачі:

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_1, & x_i < x_I, \\ c_2, & x_i \geq x_I, \end{cases}$$

тобто зліва від інтерфейсу значення c_1 (для першого середовища), а справа — c_2 (для другого). Тоді формули виду (7) автоматично забезпечують, що на межі $x = x_I$ враховується середнє значення $\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)$ при обчисленні потоку напружень між сусідніми вузлами з різних боків. Це еквівалентно вимозі неперервності напруження: стрибок σ_{xx} на інтерфейсі відсутній, оскільки контраст жорсткостей усереднюється. Одночасно зміщення на самій межі розраховуються для спільного вузла (сітка співпадає на $x = x_I$), що гарантує неперервність $\mathbf{u}$. Таким чином, різницева схема узгоджується з граничними умовами (1)–(2). Неперервність тиску і фільтрації (3)–(4) в поточній реалізації явно не моделюється, оскільки ми спрощуємо задачу, розглядаючи тільки одну компоненту поля (пружну хвилю, яка відповідає швидкій P -хвилі). Проте за потреби аналогічне усереднення можна застосувати і для параметрів, що входять в рівняння для повільної хвилі, або при постановці задачі, де одна зі складових w_n чи p мала б розрив — запровадити умови типу джерела (права частина, пропорційна стрибку) згідно з узагальненим підходом [5].

Повна різницева схема для поля $u(x, z, t)$ може бути записана як:

$$u_{i,j}^{n+1} = 2u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1} + \tau^2 (\nabla \cdot c^2 \nabla u)_{i,j}^n + \tau^2 F_{i,j}^n, \quad (8)$$

де $(\nabla \cdot c^2 \nabla u)_{i,j}^n$ обчислюється за формулою (7), а $F_{i,j}^n$ — зовнішня сила (джерело). У нашому випадку роль джерела відіграє короткий сейсмічний імпульс — в центральному вузлі $(i_{\text{src}}, j_{\text{src}})$ додається значення $F^n = s(t_n)$, де $s(t)$ має форму хвилі Рікера. Наприклад,

$$r(t) = (1 - 2\pi^2 f_0^2 t^2) e^{-\pi^2 f_0^2 t^2},$$

де f_0 — центральна частота. Такий імпульс має компактну часову підтримку та широкий спектр, збуджуючи як низько-, так і височастотні хвилі.

Як відомо [12], стійкість розв’язку забезпечується виконанням умови CFL (Курранта—Фрідрікса—Леві) — необхідного обмеження на часовий крок явної чисельної схеми. Для задачі поширення хвиль у двовимірному просторі ця умова має вигляд:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{\max} \sqrt{2}},$$

де $c_{\max} = \max(c_1, c_2)$ — максимальна швидкість поширення хвиль у досліджуваній області.

Саме цей вибір Δt використовувався при обчисленнях. Інтуїтивно умова CFL означає, що за один часовий крок інформація (хвиля) не повинна пройти більшу відстань, ніж один крок сітки, інакше дискретизація не встигне її “зловити”, що призведе до нестійкого, розбіжного розв’язку. У даній задачі критичною є область з більшою швидкістю (c_2), тому крок часу визначався саме за нею.

Оцінка збіжності методів. Запропонована різницева схема є другого порядку апроксимації як у просторі, так і в часі. Це означає, що за достатньо згущеної сітки похибка наближення і за часом, і за просторовими змінними пропорційна $O(\tau^2 + h^2)$ (для гладких рішень). Щоб оцінити цю похибку кількісно, вводять норми. Норма L_2 для функції $e(x, z)$ (різниця між чисельним та аналітичним рішенням) визначається як

$$\|e\|_{L_2} = \sqrt{\iint_{\Omega} |e(x, z)|^2 dx dz}, \quad (9)$$

тобто корінь квадратний з інтеграла квадрата похибки по всій області Ω . У дискретній реалізації інтеграл замінюється сумою по вузлах сітки. Таким чином, $\|e\|_{L_2}$ характеризує *середньоквадратичну* помилку рішення на всій області — це глобальна метрика точності, чутлива переважно до великих відхилень. Норма H^1 (енергетична) визначається як

$$\|e\|_{H^1} = \sqrt{\|e\|_{L_2}^2 + \|\nabla e\|_{L_2}^2}, \quad (10)$$

тобто крім самої функції враховує ще й її похідні (градієнт). Для нашої задачі H^1 -норма тісно пов’язана з повною *енергією* пружних коливань: енергія

включає кінетичну частину ($\sim |\dot{\mathbf{u}}|^2$) та потенційну (яка пропорційна квадрату градієнта зміщень, що відповідає деформаціям і напруженням). Таким чином, $\|\nabla e\|_{L^2}$ характеризує помилку в відтворенні пружних напружень. Збіжність рішення в нормі H^1 означає, що чисельно наближені як переміщення, так і напружено-деформований стан сходяться до точного розв'язку зі згущенням сітки.

Для запропонованої схеми можна сформулювати наступний результат збіжності.

Теорема 1. *Нехай розв'язок задачі Біота достатньо гладкий та схема інтегрування виконує умову стійкості CFL. Тоді чисельний розв'язок сходиться до аналітичного при $h, \tau \rightarrow 0$, причому існує стала C , що*

$$\|e(\tau, h)\|_{L_2} \leq C(h^2 + \tau^2), \quad \|e(\tau, h)\|_{H^1} \leq C'(h + \tau^2),$$

тобто в L_2 -нормі порядок збіжності дорівнює 2, а в H^1 -нормі — наближено 1 (через домінування похибки при диференціюванні).

Довести цю теорему [13] можна стандартними методами теорії різницевих схем. Вона випливає з комбінування умов *консистентності* (локальна похибка $\sim O(h^2, \tau^2)$) та *стабільності* (обмеженість росту похибки) згідно з принципом еквівалентності Лакса. Відзначимо, що енергетична стійкість схеми (8) також може бути показана через побудову дискретної енергії

$$E^n = \sum_{i,j} \left[\frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{2} c_{i,j}^2 ((D_x u)_{i,j}^n)^2 + \frac{1}{2} c_{i,j}^2 ((D_z u)_{i,j}^n)^2 \right],$$

де $D_x u, D_z u$ — дискретні похідні. Для однорідного середовища така енергія точно зберігається протягом часу при використанні центральної різницевої схеми. У випадку з інтерфейсом і усередненням c^2 енергія також залишається майже сталою, оскільки чисельне відбиття від неоднорідності мінімізоване. Чисельні експерименти показали, що повна енергія коливань (кінетична + потенційна) коливається в межах 0.1% протягом моделювання, що підтверджує як стійкість, так і точність алгоритму.

Аналіз отриманих результатів моделювання. Для демонстрації роботи описаної моделі та чисельної схеми проведено експерименти. Базовий сценарій: квадратна область розміром 1×1 м, що складається з двох половин — ліворуч пористе середовище А зі швидкістю пружної хвилі $c_1 = 1000$ м/с, праворуч середовище В з $c_2 = 2000$ м/с. Щільності та інші параметри обрано такими, що імпеданс ($Z = \rho c$) різниться між областями приблизно на 2 рази. На верхній, нижній і бічних межах області задано закріплені граничні умови (відсутність зміщення, аналог твердих відбиваючих стінок). У центрі області (на межі поділу $x = 0.5$ м, $z = 0.5$ м) розташоване точкове сейсмічне джерело, яке генерує хвилю Рікера з центральною частотою $f_0 = 4$ Гц. Схему області зображено на рис. 1. Час моделювання відповідає декільком періодам коливань джерела, достатнім для того, щоб хвилі досягли меж області і відбилися від них.

Результати моделювання представлені на рисунках 2, 3, 4, який показує поширення хвильового поля вертикального зміщення $u_z(x, z, t)$ у характерні моменти часу. На рисунках кольором відображено миттєве значення u_z : жовтий

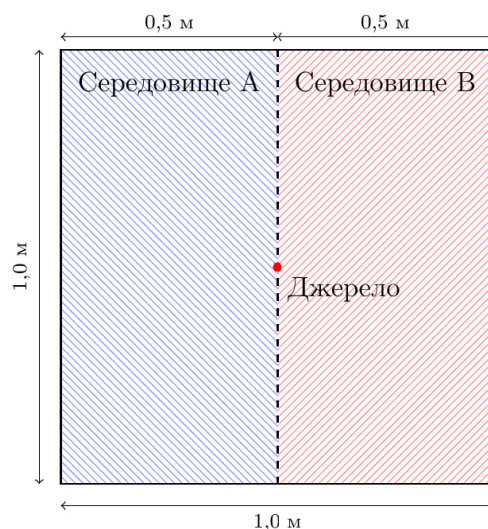


Рис. 1. Схема області моделювання: квадрат 1×1 м, розділений інтерфейсом $x = 0.5$ на неоднорідні пористі середовища А і В, джерело в центрі

відповідає позитивному відхиленню (вгору), синьо-фіолетовий — негативному (вниз), зелені тони — нульове зміщення. Видно, що на початковому етапі (рис. 2) від джерела на всі боки розходить фронт P -хвилі кулястої форми. Оскільки швидкість у правій частині удвічі більша, фронт у середовищі В (справа) випереджає фронт у середовищі А (зліва). Таким чином, вже через чверть періоду хвилі межа розділу стає добре помітною у формі асиметричного фронту: праворуч радіус хвилі більший. Водночас, незважаючи на контраст швидкостей, на самій межі не видно розривів чи відображених сигналів — це підтверджує правильність застосованих контактних умов і відсутність штучних чисельних відбиттів на інтерфейсі.

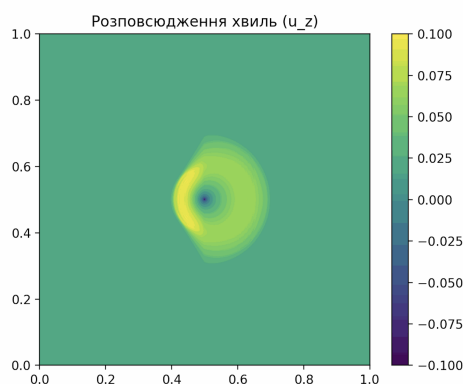
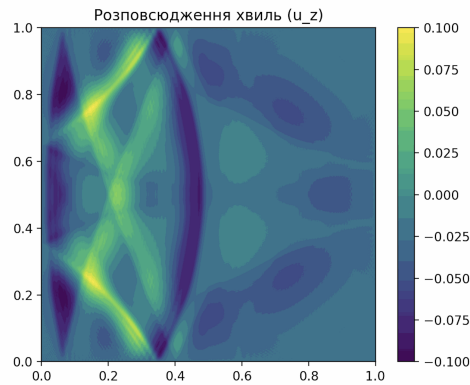
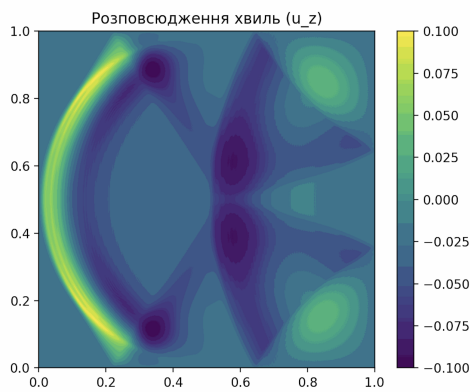


Рис. 2. Початок поширення хвилі ($t \approx 0.1$ с)

На рис. 3 показано стан поля у момент, коли первинні хвилі вже досягнули меж області. Оскільки на границях задано $\mathbf{u} = 0$, це еквівалентно абсолютно жорстким стінкам, від яких хвиля повністю відбивається з інверсією фази. У середовищі В (справа) фронт хвилі досяг бокової межі $x = 1$ раніше і відбився

Рис. 3. Відбиття від меж області ($t \approx 0.6$ с)Рис. 4. Множинні відбиття ($t \approx 1$ с)

назад у напрямку інтерфейсу. На рисунку видно цей відбитий фронт (вигнута жовта смуга у правій частині, що рухається вліво). Тим часом, у середовищі А (зліва) фронт лише-но досяг $x = 0$ і також почав відбиватися. Відбиття від горизонтальних меж $z = 0$ і $z = 1$ також створюють вторинні хвилі, які проявляються у вигляді менш яскравих кругових хвиль, що сходяться до середини знизу та зверху. Таким чином, на інтерфейсі $x = 0.5$ в цей момент відбувається складна взаємодія: з правого боку до межі підходить відбитий фронт із середовища В (швидка хвиля), а з лівого — фронт з середовища А (повільніша хвиля). На межі частина кожної хвилі транслюється в інше середовище, а частина відбивається. Помітно, що при переході з повільнішого середовища А в швидше В відбиття сильніше (значна частка енергії повертається назад у А), тоді як з В в А більша частина енергії передається через інтерфейс. Це узгоджується з фізичними законами відбиття: коефіцієнт відбиття R на межі двох середовищ визначається імпедансами $Z = \rho c$. Якщо хвиля йде з середовища А (менший Z) у середовище В (більший Z), R набуває від'ємного значення за модулем меншого 1 (тобто відбита хвиля інвертується за фазою, а за енергією слабша за падаючу). В протилежному напрямку R додатний і ближчий до 1, що означає сильне відбиття без інверсії фази. На рисунку це підтверджується: хвиля, що вийшла з лівої половини (А) на межу, створює у правій половині

відносно слабкий сигнал, тоді як хвиля з правої половини, дійшовши до межі, майже повністю повертається назад (сильні фіолетово-зелені плями у лівій частині після взаємодії).

На пізнішому етапі (рис. 4) спостерігається картина множинних перехідних процесів. Хвилі неодноразово відбиваються від меж області і багаторазово проходять через інтерфейс, поступово розсіюючи свою енергію. Видно, що після кількох циклів амплітуда коливань зменшується — це результат дисипації в моделі Біота (в'язкі втрати). Особливо затухає високочастотна складова, тому поле набуває більш гладкого просторового розподілу (різкі концентричні хвилі згладжуються). Енергія хвиль зрештою зосереджується у вигляді стоячих коливань в лівому, повільнішому середовищі, оскільки воно слугує своєрідною “пасткою” для хвиль: кожного разу, коли хвиля намагається покинути цю область, значна частина її енергії відбивається назад. У природних умовах таке накопичення енергії могло б призвести до локального підсилення рухів (ефект резонансу у м'яких шарах ґрунту), але врешті в'язкість флюїду розсіює енергію у тепло, і коливання згасають.

Таким чином, чисельний експеримент підтверджує коректність реалізованої моделі: хвилі адекватно заломлюються на інтерфейсі згідно із співвідношенням швидкостей, а розраховані коефіцієнти відбиття узгоджуються з теоретичними оцінками за імпедансом. Візуально відсутні нефізичні артефакти на межі, що свідчить про виконання граничних умов суцільності. Також видно реалізацію дисипативного ефекту — поступове затухання хвиль, особливо помітне для коротких довжин хвиль. Додатково, перевірка балансу енергії показала, що без врахування втрат (штучно поклавши $\eta = 0$) схема зберігає сумарну енергію з похибкою менше 0.1%, а з увімкненими втратами — енергія монотонно спадає, як і передбачено теорією. Отже, розроблений алгоритм може бути використаний для моделювання різноманітних сценаріїв взаємодії сейсмічних хвиль з неоднорідностями у насичених пористих середовищах.

Аналіз збіжності. Для перевірки точності розробленої чисельної схеми розв'язок задачі обчислюється на сітках різного розміру: 64×64 , 128×128 , 256×256 та 512×512 , а як еталон використовується розв'язок на сітці 1024×1024 . Оцінка похибок здійснюється за допомогою норм (9), (10).

Аналіз результатів демонструє, що при подвоєнні числа вузлів глобальна похибка зменшується приблизно у 4 рази (як в L_2 , так і в H^1 нормах), що свідчить про другий порядок точності чисельної схеми [13]. Результати узагальнено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Збіжність чисельного розв'язку: L_2 та H^1 похибки для різних сіток.

Розмір сітки	L_2 Error	H^1 Error
64×64	2.668×10^{-6}	7.744×10^{-5}
128×128	6.486×10^{-7}	2.162×10^{-5}
256×256	1.535×10^{-7}	5.649×10^{-6}
512×512	3.062×10^{-8}	1.299×10^{-6}

Практичні приклади застосування в геофізиці. Розглянута модель та чисельна методика мають низку важливих застосувань у прикладній геофізиці, де поширення хвиль у пористих середовищах є ключовим елементом аналізу.

Сейсморозвідка і пошук вуглеводнів. Модель Біота широко використовується для інтерпретації сейсмічних даних під час розвідки покладів нафти й газу. Вона дозволяє моделювати зміну амплітудно-частотних характеристик хвиль залежно від ступеня насичення флюїдом, а також пояснює ефекти, як от низькочастотні тіні або варіації коефіцієнтів відбиття при зміні імпедансу порід [9].

Геоакустика морського дна. У морській сейсмоакустиці рівняння Біота використовуються для розрахунку характеристик донних осадів, насичених водою. Це важливо для покращення точності гідролокаторів та акустичних моделей у прибережних зонах.

Сейсмологія та землетруси. У сейсмології модель поропружності застосовують для вивчення післясейсмічних деформацій земної кори, явищ ліквідації, а також локального підсилення хвиль у м'яких ґрунтах. Це сприяє точнішому оцінюванню сейсмічної небезпеки в урбанізованих регіонах [14].

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведений аналіз показав, що розроблена модель та чисельний метод моделювання розповсюдження сейсмічних хвиль у насичених пористих середовищах є ефективними з точки зору точності та стійкості. Основні висновки роботи можна сформулювати наступним чином:

- 1) Розроблено математичну модель, яка описує хвильові процеси в двох різних пористих середовищах, розділених вертикальним інтерфейсом. Використання моделі Біота дозволяє коректно врахувати взаємодію твердого каркасу і рідини.
- 2) Запровадження умов неперервності на інтерфейсі забезпечує адекватне поєднання розв'язків для середовищ з різними фізичними характеристиками ($c_1 = 1.0$ та $c_2 = 2.0$).
- 3) Чисельне розв'язання задачі здійснюється за допомогою явної скінченно-різницевої схеми другого порядку, точність якої підтверджено аналізом збіжності: при подвоєнні числа вузлів глобальна похибка у L_2 та H^1 нормах зменшується приблизно у 4 рази.
- 4) Розгорнутий аналіз умов CFL демонструє, що для стійкості схеми необхідно суворо дотримуватися обмеження $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_{\max} \sqrt{2}}$, що гарантує коректне розповсюдження інформації по обчислювальній сітці.
- 5) Отримані чисельні експерименти, що узагальнені у таблиці 1, а також ілюстрації (кадри моделювання), свідчать про високу точність запропонованого підходу.

Перспективи подальших досліджень включають розширення моделі на тривимірні задачі, інтеграцію додаткових фізичних ефектів (наприклад, в'язкопружності або нелінійних характеристик середовища), а також розробку адаптивних чисельних методів для оптимізації обчислювальних ресурсів. Подальший аналіз може бути спрямований на вивчення різних типів інтерфейсних контактів, що є ключовими для удосконалення методів геофізичної інверсії.

Список використаної літератури

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956a. Vol. 28, No. 2. pp. 168–178. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1908239>
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956b. Vol. 28, No. 2. pp. 179–191. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1908241>
3. Bourbié T., Coussy O., and Zinszner B. Acoustics of porous media. Gulf Publishing Company, 1987.
4. Carcione J. M. Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media (2nd ed.). Elsevier, 2007.
5. Gurevich B., Schoenberg M. Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1999. Vol. 105, No. 5. pp. 2585–2589.
6. Deresiewicz H. Skalak R. On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1963. Vol. 53, No. 4. pp. 783–788.
7. Stoll R. D., Bryan G. M. Wave attenuation in saturated sediments. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1970. Vol. 47, No. 5B. pp. 1440–1447. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1912054>
8. Dai N., Vafidis A., Kanasevich E. R. Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*. 1995. Vol. 60, No. 2. pp. 327–340. DOI: <https://doi.org/10.1190/1.1443769>
9. Korneev V., Goloshubin G., Daley T., Silin D. Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs. *Geophysics*. 2004. Vol. 69, No. 2, pp. 522–532.
10. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*. 1962. Vol. 33, No. 4. pp. 1482–1498. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1728759>
11. Strikwerda J. C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2nd ed.). SIAM, 2004.
12. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*. 1928. Vol. 100, S. 32–74.
13. Richtmyer R. D., Morton K. W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Wiley-Interscience, 1967.
14. Peltzer G., Rosen P., Rogez F., Hudnut K. Poroelastic rebound along the Landers 1992 earthquake surface rupture. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. 1998. Vol. 103, No. B12. pp. 30131–30145.

Panychok O. S., Yashchuk Yu. O. Numerical Simulation of Seismic Wave Propagation in Porous Media with Ideal Contact Conditions.

This paper deals with theoretical and numerical aspects of modeling seismic wave propagation in saturated porous media using the Biot model. A complete description of the mathematical model is presented, including the equations of motion of the solid skeleton and fluid, the conservation of mass and stress, and the numerical implementation using an explicit second-order finite-difference scheme. The conditions of interface contact between media with different wave velocities, the CFL condition, the L_2 and H^1 norms for error estimation, and the convergence order of the method are analyzed in detail. The results of numerical experiments, confirmed by both statistical data and images (simulation frames), demonstrate high accuracy of the modeling. The article contains a detailed analysis of the results obtained and discusses in detail the prospects for applying the developed methodology.

Keywords: seismic waves, porous medium, Biot's model, Ricker wavelet, ideal contact, mathematical model, CFL condition, convergence.

References

1. Biot, M. A. (1956a). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous

- solid. I. Low-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2), 168–178. <https://doi.org/10.1121/1.1908239>
2. Biot, M. A. (1956b). Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2), 179–191. <https://doi.org/10.1121/1.1908241>
3. Bourbié, T., Coussy, O., & Zinszner, B. (1987). *Acoustics of porous media*. Gulf Publishing Company.
4. Carcione, J. M. (2007). *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media (2nd ed.)*. Elsevier.
5. Gurevich, B., & Schoenberg, M. (1999). Interface conditions for Biot's equations of poroelasticity. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(5), 2585–2589. <https://doi.org/10.1121/1.426880>
6. Deresiewicz, H., & Skalak, R. (1963). On uniqueness in dynamic poroelasticity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 53(4), 783–788.
7. Stoll, R. D., & Bryan, G. M. (1970). Wave attenuation in saturated sediments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(5B), 1440–1447. <https://doi.org/10.1121/1.1912054>
8. Dai, N., Vafidis, A., & Kanasewich, E. R. (1995). Wave propagation in heterogeneous, porous media: A velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 60(2), 327–340. <https://doi.org/10.1190/1.1443769>
9. Korneev, V., Goloshubin, G., Daley, T., & Silin, D. (2004). Seismic low-frequency effects in monitoring of fluid-saturated reservoirs. *Geophysics*, 69(2), 522–532. <https://doi.org/10.1190/1.1707075>
10. Biot, M. A. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*, 33(4), 1482–1498. <https://doi.org/10.1063/1.1728759>
11. Strikwerda, J. C. (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations (2nd ed.)*. SIAM.
12. Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32–74. [in Germany].
13. Richtmyer, R. D., & Morton, K. W. (1967). *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Wiley-Interscience.
14. Peltzer, G., Rosen, P., Rogez, F., & Hudnut, K. (1998). Poroelastic rebound along the Landers 1992 earthquake surface rupture. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 103(B12), 30131–30145. <https://doi.org/10.1029/98JB02302>

Одержано 05.04.2025

УДК 004.9:378.147

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).247-255](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).247-255)

**М. М. Повідайчик¹, М. М. Шаркаді², Р. А. Кацала³, Р. М. Годя⁴,
І. В. Янчій⁵**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор педагогічних наук
mykhailo.povidaichyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1554-2067>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
roman.katsala@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4766-5235>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант 2-го року навчання
roman.hodia@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7546-5263>

⁵ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
студент 4-го курсу
yanchii.ivan@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-2280-7219>

РОЗРОБЛЕННЯ ОБОЛОНКИ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ «КОМП'ЮТЕРНИЙ ТРЕНАЖЕР З ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Описано розроблену оболонку інформаційної системи «Комп'ютерний тренажер з фінансової математики». Особливістю розробленої системи є орієнтація на бази знань, а не на бази даних, що дозволяє генерувати значну кількість рівнозначних тестових завдань. Відмітимо можливість відносно легко розширювати систему новими типами завдань з фінансової математики, а також переорієнтовувати оболонку для інших розділів математики чи інформатики. Розроблена система може використовуватися як для контролю знань, так і як інструмент для самонавчання.

Ключові слова: комп'ютерний тренажер, бази знань, фінансова математика, VBA.

1. Вступ. Однією із задач, яку вирішує викладач ЗВО, є об'єктивна перевірка знань здобувачів. Незважаючи на те, що за допомогою комп'ютерного тестування не можна перевірити комплексний рівень знань, тим не менше саме за допомогою тестів можна швидко здійснити його оцінку. Так, на сьогодні комп'ютерне тестування використовується:

- при проведенні поточного оцінювання знань здобувачів вищої освіти;
- при написанні модульних та залікових контрольних робіт;
- при складанні вступних іспитів до магістратури та ін.

Слід зазначити, що при цьому від викладача вимагається розроблення набору тестових завдань у різних форматах:

- із відкритою формою відповіді, де результатом розв'язання є число;
- із закритою формою відповіді, коли у тесті поряд із 1 правильною приводяться декілька неправильних відповідей;
- тестові завдання на встановлення відповідності між декількома запитаннями та переліком можливих відповідей.

Все це вимагає від викладача значних затрат на розроблення завдань, визначення правильності відповідей та ін. Тому актуальною є задача розроблення оболонки комп'ютерної системи генерації тестових завдань, яка буде вирішувати декілька завдань [1; 2]:

- слугувати інструментом для викладача при формуванні заданої кількості варіантів контрольної роботи;
- формувати файли заданого шаблону, наприклад, система Moodle дозволяє імпортувати тестові завдання, записані у спеціальних форматах AIKEN, GIFT та ін.;
- використовуватися у якості комп'ютерного тренажера для самопідготовки здобувачів вищої освіти.

У даній статті описується розроблена оболонка інформаційної системи «Комп'ютерний тренажер з фінансової математики». Особливостями розробленої оболонки є:

- відсутність баз даних, орієнтація на бази знань, що дозволяє генерувати значну кількість рівнозначних тестових завдань;
- можливість відносно легко розширювати систему новими типами завдань з фінансової математики, а також переорієнтовувати оболонку для інших розділів математики чи інформатики;
- у більшості випадків сформовані файли можуть безпосередньо використовуватися при тестуванні, але при потребі їх можна доопрацьовувати у текстових редакторах.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зазначені проблеми досліджують як вітчизняні, так і зарубіжні науковці. Так, задачу розроблення комп'ютерних систем тестування вивчають вчені З. Бондаренко, О. Радкевич, О. Музика, О. Шинкаренко, О. Басалкевич; розроблення комп'ютерних тренажерів описують А. Шурдук, В. Мандрика, Ю. Олексійчук, О. Ємець та ін. Проте, недостатньо дослідженою залишається проблема розроблення комп'ютерної оболонки, орієнтованої на роботу з базами знань.

3. Постановка задачі. Розробити оболонку інформаційної системи «Комп'ютерний тренажер з фінансової математики» на основі шаблонів MS Word з використанням середовища Visual Basic for Applications.

4. Розроблення оболонки інформаційної системи. При розробленні оболонки інформаційної системи «Комп'ютерний тренажер з фінансової математики» за основу було обрано шаблони MS Word, оскільки вони дозволяють формувати документи заданої структури, а вбудована мова програмування Visual Basic for Applications дозволяє ефективно керувати всіма об'єктами MS Word.

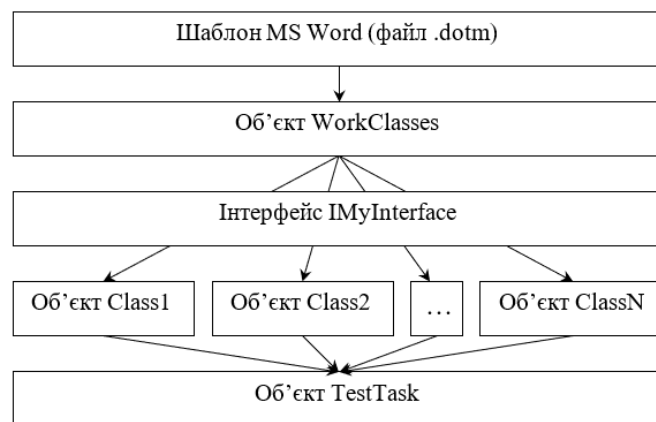


Рис. 1. Загальна структура системи.

Розглянемо загальну структуру системи (рис. 1).

Опишемо спрощену систему, яка буде демонструвати роботу основних модулів:

- запуск програми і налагодження діалогу з користувачем;
- створення об'єкта «WorkClasses», який на основі інтерфейсу «IMyInterface» надає доступ до класів, у яких описані завдання;
- створення колекції об'єктів Class1, Class2, на основі якої створюються варіанти завдань та таблиця з відповідями.

Отже, роботу системи розпочнемо із шаблону MS Word (файл «Фінансова математика.dotm»). У цьому файлі будуть описані демо варіанти об'єктів, приведених на рис. 1. Для створення нового документу на основі шаблону використовується обробник за домовленістю Document_New(). У цій процедурі отримуємо від користувача дані про кількість варіантів та тип завдання. У результаті виконання процедури буде створено новий файл з варіантами завдань та таблицею з відповідями до них.

Лістинг 1. Процедура Document_New().

```

1 Private Sub Document_New()
2   Dim numTaskVariants As Integer
3   Dim typeQuestion As Integer
4   Dim txt As String ' Текст завдань
5   Dim ans() As String ' Таблиця з відповідями
6   Dim tbl As Table
7   Dim rng As Range
8   Dim i As Integer
9   Dim j As Integer
10  numTaskVariants = InputBox("Введіть кількість варіантів:")
11  typeQuestion = InputBox("Введіть тип завдань (1-відкрита форма, 2-закрита форма, 3-встановлення відповідності):")
12  Dim ob As New WorkClasses
13  ob.Constructor numTaskVariants, typeQuestion
14  txt = ob.Text
15  ActiveDocument.Range.Text = txt
16  ans = ob.Table
17  ' Вставити таблицю в кінець документа
18  Set rng = ActiveDocument.Content
  
```

```

19 rng.Collapse Direction:=wdCollapseEnd
20 ' Створити таблицю
21 Set tbl = ActiveDocument.Tables.Add(Range:=rng, NumRows:=UBound(
    ans, 1), NumColumns:=UBound(ans, 2))
22 ' Заповнити таблицю даними з масиву
23 For i = 1 To UBound(ans, 1)
24     For j = 1 To UBound(ans, 2)
25         tbl.Cell(i, j).Range.Text = ans(i, j)
26     Next j
27 Next i
28 End Sub

```

На рис. 2 приведено створений файл «Документ1.docx» на основі шаблону «Фінансова математика.dotm», при заданих значеннях змінних

- numTaskVariants = 3 (3 варіанти);
- typeQuestion = 1 (завдання з відкритою формою).

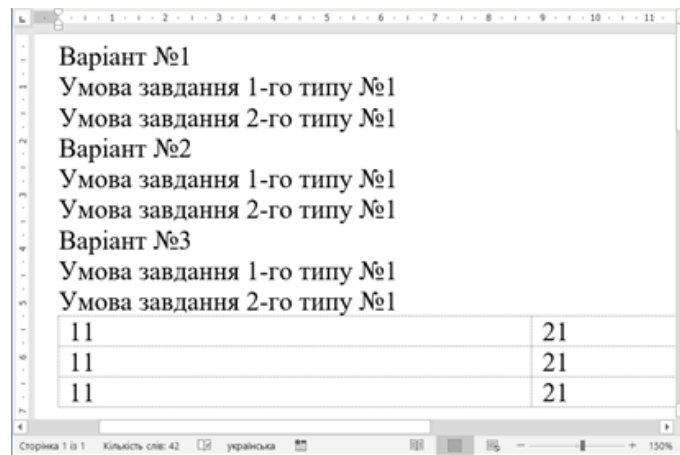


Рис. 2. Загальний вигляд створеного документу.

Фрагмент процедури Document_New() (див. лістинг 1)

```

1 Dim ob As New WorkClasses
2 ob.Constructor numTaskVariants, typeQuestion

```

створює об'єкт класу WorkClasses, який керує іншими об'єктами системи. Так, конструктор класу циклічно звертається до об'єктів середнього рівня на рис. 1 і, в залежності від вхідних параметрів, формує вказану кількість варіантів завдань вказаного типу.

Лістинг 2. Конструктор класу WorkClasses.

```

1 Public Sub Constructor(ByVal numVariants As Integer, ByVal
    typeQuestion As Integer)
2     ' Колекція завдань, які утворюють варіант
3     Dim colTasksVariant As Collection
4     ' Колекція однотипних завдань
5     Dim colTestTasks As Collection
6     Dim obj1 As IMyInterface
7     Dim obj2 As IMyInterface
8     Dim item As IMyInterface
9     Dim i As Integer

```

```

10 Dim j As Integer
11 pNumVariants = numVariants
12 pTypeQuestion = typeQuestion
13 pText = ""
14 ReDim pTable(1 To pNumVariants, 1 To m) As String
15 For i = 1 To pNumVariants
16     pText = pText & "Варіант №" & CStr(i) & vbCrLf
17     Set colTasksVariant = New Collection
18     Set obj1 = New Class1
19     Set obj2 = New Class2
20     colTasksVariant.Add obj1
21     colTasksVariant.Add obj2
22     j = 0
23     For Each item In colTasksVariant
24         Set colTestTasks = item.TestTasks
25         j = j + 1
26         Select Case pTypeQuestion
27             Case 1 ' Завдання відкритої форми
28                 pText = pText & colTestTasks.item(1).QuestionPrompt &
vbCrLf ' Умова першого завдання з
колекції
29                 pTable(i, j) = CStr(colTestTasks.item(1).NumericalAnswer)
' Відповідь до першого завдання з
колекції
30             Case 2 ' Завдання закритої форми
31                 ' Тут описується формування варіанту, якщо вибрані завдання закритої
форми
32             Case 3 ' Завдання на встановлення відповідності
33                 ' Тут описується формування варіанту, якщо вибрані завдання на
встановлення відповідності
34             End Select
35         Next item
36     Next i
37 End Sub

```

Зауважимо, що для циклічного звертання до властивостей об'єктів необхідно створити один інтерфейс для всіх класів середнього рівня (див. лістинг 3).

Лістинг 3. Створення інтерфейсу для доступу до властивостей об'єктів.

```

1 ' Клас IMyInterface
2 Public Property Get TestTasks() As Collection
3     ' Це опис, реалізація буде в інших класах
4 End Property

```

Залишилося цей інтерфейс імплементувати у класах, які відповідають за формування конкретного завдання. На рис. 1 це класи Class1, Class2, ..., ClassN. У лістингу 4 подано описання класу Class1, у якому імплементовано інтерфейс IMyInterface, приведено демо конструктор по домовленості Class_Initialize() та властивість IMyInterface_TestTasks(), яка повертає колекцію однотипних завдань, яка власне і використовується у класі вищого рівня WorkClasses (див. лістинг 2).

Лістинг 4. Демо версія класу Class1.

```

1 Implements IMyInterface
2 ' У класі Class1 описано N тестових завдань
3 Private Const N = 4 ' Кількість однотипних тестових завдань
4

```

```

5 ' Властивості
6 Private pTestTasks As New Collection
7
8 ' Конструктор класу
9 Private Sub Class_Initialize()
10 ' Тут сформується N завдань і N відповідей до них
11 Dim i As Integer
12 Dim t As TestTask
13 For i = 1 To N
14 Set t = New TestTask
15 ' Приклад завдання та відповіді до нього
16 t.QuestionPrompt = "Умова завдання 1-го типу №" & i
17 t.NumericalAnswer = 10 + i
18 pTestTasks.Add t
19 Next i
20 End Sub
21
22 ' Повернення колекції завдань
23 Private Property Get IMyInterface_TestTasks() As Collection
24 Set IMyInterface_TestTasks = pTestTasks
25 End Property

```

На кінець зауважимо, що для забезпечення цілісності умови завдання та відповіді до неї, а також можливості наповнення описаної оболонки новими методами та властивостями, кожний клас середнього рівня на рис. 1 звертається до класу найнижчого рівня TestTask.

Лістинг 5. Клас TestTask.

```

1 ' Властивості
2 Private pQuestionPrompt As String ' Умова тестового завдання
3 Private pNumericalAnswer As Double ' Числова відповідь
4
5 ' Методи встановлення значень
6 Public Property Let QuestionPrompt(Value As String)
7 pQuestionPrompt = Value
8 End Property
9 Public Property Get QuestionPrompt() As String
10 QuestionPrompt = pQuestionPrompt
11 End Property
12 Public Property Let NumericalAnswer(Value As Double)
13 pNumericalAnswer = Value
14 End Property
15 Public Property Get NumericalAnswer() As Double
16 NumericalAnswer = pNumericalAnswer
17 End Property

```

Власне колекція pTestTasks у лістингу 4 містить об'єкти класу TestTask.

5. Наповнення розробленої оболонки завданнями з фінансової математики. Для практичного використання системи необхідно розробити базу знань для певної прикладної області. Що стосується фінансової математики, то було розроблено алгоритми для таких тестових завдань:

1. За перший рік банк нарахував p_1 , а за другий p_2 складних відсотків. На скільки відсотків нарощена сума більша відносно початкової?
2. Суму a грн. розділено на два вклади: x грн. та y грн. під p_1 та p_2 річних відсотків відповідно. Знайдіть x , якщо відомо, що за рік початкова сума

- зросла на p_3 відсотків.
3. Два платежі (векселі) номіналом a грн. та b грн., які підлягають оплаті через n_1 та n_2 днів відповідно, сторони домовилися об'єднати в один зі стоком платежу через n_3 днів. Знайдіть суму консолідованого платежу, якщо застосовується проста річна ставка $p\%$ ($365/365$).
 4. Платіж (вексель) номіналом a грн. зі строком платежу через n_1 років сторони домовилися замінити таким чином: через n_2 роки виплатити b грн., а ще через n_3 роки погасити борг повністю. Знайдіть суму останнього платежу, якщо застосовується складна річна ставка $p\%$.
 5. Наявні дві альтернативи: вкласти a євро під p_1 простих річних відсотків на n_1 місяців ($360/360$), або конвертувати вказану суму у гривні (b_1 грн. за 1 євро), вкласти її під p_2 простих річних відсотків на той самий строк та знову конвертувати у євро (b_2 грн. за 1 євро). Яка із вказаних схем більш прибуткова?
 6. Знайдіть річний платіж скінченної річної ренти (постнумерандо), у якій сучасна величина складає a грн., а накопичена — b грн., якщо застосовується складна річна ставка $p\%$.
 7. «Вічна» рента з річним платежем a грн. замінена на n -річну (постнумерандо). Знайдіть річний платіж нової ренти, якщо застосовується складна річна ставка $p\%$.
 8. Кредит у розмірі a грн. видано на n років під p складних річних відсотків. Знайдіть розмір одного платежу, якщо за умовами договору погашення відбувається рівними щорічними виплатами.
 9. Інвестиційний процес заданий потоком платежів: $\{(a_1; 0), (a_2; 1), (a_3; 2), (a_4; 3)\}$. Знайдіть термін окупності проєкту, якщо складна річна ставка складає $p\%$.
 10. Проєкт характеризується початковими інвестиціями a грн. та наступним щорічним доходом b грн. протягом n років. Визначити індекс дохідності (рентабельність) інвестиційного процесу, якщо складна річна ставка складає $p\%$.

Ці тестові завдання реалізуються у класах середнього рівня на рис. 1. Власне після розроблення оболонки тільки ці класи і потрібно змінювати під конкретну прикладну область. Тут при розробленні завдань закритого типу із вибором однієї правильної відповіді або при встановленні відповідності між варіантами завдань та відповідями до них виникає ще одна підзадача: як забезпечити унікальність варіантів відповідей? У нашій системі це було реалізовано на основі таких підходів. По-перше, ми можемо генерувати n однотипних завдань, розв'язки яких потрапляють у діапазони, що не перетинаються. Тоді, наприклад, при виборі однієї відповіді будуть приведені 1 правильна та $n - 1$ неправильні, які не будуть співпадати. По-друге, можна об'єднувати у один клас завдання, які мають схожі умови, але їхнє розв'язання передбачає різні обчислювальні процедури, що забезпечує різницю у відповідях. Розглянемо другий підхід на прикладі обчислення характеристик ренти. Так, параметрами ренти є річний платіж R , річна процентна ставка i та її тривалість n років. Якщо платежі здійснюються у кінці року, то рента називається постнумерандо (звичайна), на початку — пренумерандо (авансова). Розглядають майбутню та поточну вартість ренти. Так, для звичайної ренти поточна вартість (PV) — це дисконтована

сума всіх платежів [3]:

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} = R \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} = R \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+i)^k} =$$

$$= R \cdot \frac{(1+i)^{-1} \cdot (1 - (1+i)^{-n})}{1 - (1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{(1+i)^{-1} \cdot (1 - (1+i)^{-n})}{1 - (1+i)^{-1}} = \frac{R \cdot (1 - (1+i)^{-n})}{i}.$$

Майбутню вартість (FV) отримуємо з PV :

$$FV = PV \cdot (1+i)^n = \frac{R \cdot ((1+i)^n - 1)}{i}.$$

Аналогічно отримуємо майбутню (FV_{due}) та поточну вартість (PV_{due}) авансової ренти, враховуючи зміщення платежів на 1 рік:

$$PV_{\text{due}} = PV \cdot (1+i);$$

$$FV_{\text{due}} = FV \cdot (1+i).$$

Отже, для $R > 0$, $i > 0$ та $n > 1$ у колекцію `pTestTasks` (див. лістинг 4) запишемо 4 «однорідні» тестові завдання:

- знайти поточну вартість звичайної ренти;
- знайти майбутню вартість звичайної ренти;
- знайти поточну вартість авансової ренти;
- знайти майбутню вартість авансової ренти.

Зважаючи на обчислювальні процедури, отримаємо різні числові відповіді для кожного завдання. Тому це використовуємо при формуванні завдання з вибором 1 правильної відповіді — вибираємо один з 4 елементів колекції, інші використовуються для формування набору неправильних відповідей. Аналогічний підхід використовується при формуванні тестових завдань на встановлення відповідності.

6. Висновки. Описану оболонку інформаційної системи можна використовувати при формуванні обчислювальних задач із довільних предметних областей. На нашу думку, перевагою такого підходу є орієнтація на бази знань, а не на бази даних. Це дозволяє викладачу швидко формувати довільну кількість варіантів завдань як для поточного чи контрольного оцінювання, так, наприклад, і для потреб приймальних комісій та ін. Ще однією із можливостей використання системи є формування завдань для різноманітних освітніх платформ, наприклад Moodle. Серед недоліків системи є певна обмеженість мови VBA, що ускладнює використання, наприклад, бібліотек.

У подальшому систему можна розвивати як інструмент для самонавчання студентів — це і розробка методів автоматичного розв'язування задач, побудова довідникової системи та ін.

Список використаної літератури

1. Повідайчик М. М., Кацала Р. А., Годя Р. М., Янчій І. В. Розроблення інформаційної системи з фінансової математики. *Актуальні проблеми сучасної науки та освіти* : матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції. Львів, 19–20 березня 2025 року. Львів : Львівський науковий форум, 2025. С. 59–60.

2. Повідайчик М. М., Повідайчик О. С., Герич М. С., Попович А. О. Розробка автоматизованих систем навчання та контролю знань учнів і студентів: навчальний посібник. Ужгород : Видавництво УжНУ «Говерла», 2022. 84 с.
3. Фінансова математика: підручник / О. В. Зайцев. Суми: СумДУ, 2022. 610 с.

Povidaichyk M. M., Sharkadi M. M., Katsala R. A., Hodia R. M., Yanchii I. V. Development of the Information System Shell "Computer-Based Trainer in Financial Mathematics".

The article describes the development of the information system shell "Computer-Based Trainer in Financial Mathematics". A key feature of the developed system is its focus on knowledge bases rather than databases, which enables the generation of a significant number of equivalent test tasks. The system allows for relatively easy expansion with new types of financial mathematics tasks and can be adapted for other branches of mathematics or computer science. The developed system can be used both for knowledge assessment and as a tool for self-learning.

Keywords: computer-based trainer, knowledge bases, financial mathematics, VBA.

References

1. Povidaychyk, M. M., Katsala, R. A., Hodia, R. M., & Yanchii, I. V. (March 19–20, 2025). Development of an Information System in Financial Mathematics. In *Actual Problems of Modern Science and Education*. Proceedings of the 14th International Scientific and Practical Conference. Lviv: Lviv Scientific Forum [in Ukrainian].
2. Povidaychyk, M. M., Povidaychyk, O. S., Herych, M. S., & Popovych, A. O. (2022). *Development of Automated Learning and Knowledge Control Systems for Pupils and Students: Textbook*. Uzhhorod: UzhNU "Hoverla" Publishing House [in Ukrainian].
3. Zaitsev, O. V. (2022). *Financial Mathematics: Textbook*. Sumy: Sumy State University [in Ukrainian].

Одержано 25.03.2025

УДК 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).256-261](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).256-261)**І. І. Половко¹, М. М. Шаркаді²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
polovko.ivan@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7128-4846>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
mariana.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У цій статті представлено ґрунтовний огляд ключових типів математичних моделей, що застосовуються в екології для аналізу, моделювання та прогнозування змін у природних і антропогенних системах. Розглянуто як традиційні аналітичні, так і сучасні комп'ютеризовані підходи до моделювання, включаючи стохастичні, динамічні, просторово-часові моделі, моделі на основі нечіткої логіки, машинного навчання й штучного інтелекту. Наведено численні приклади використання моделей для вирішення завдань управління водними ресурсами, контролю якості повітря, дослідження популяційних процесів, оцінки кліматичних змін та розрахунку екосистемних послуг. Підкреслено роль міждисциплінарного підходу та цифрових технологій в удосконаленні інструментів екологічного моделювання. Визначено перспективи інтеграції моделей у процеси планування природокористування, управління ризиками та формування екологічної політики.

Ключові слова: математичне моделювання, екологічні системи, стохастичні моделі, динамічні моделі, просторово-часові моделі, нечітка логіка, машинне навчання, прийняття рішень.

1. Вступ. У сучасному світі екологічні виклики набувають усе більшої актуальності та гостроти. Глобальні зміни клімату, інтенсивне забруднення довкілля, деградація земель, виснаження водних і біологічних ресурсів потребують впровадження комплексних рішень для моніторингу, оцінки та прогнозування екологічного стану навколишнього середовища. Одним із ключових інструментів, що дає змогу системно та ефективно аналізувати ці явища, є математичне моделювання. Воно дозволяє не лише кількісно описувати складні природні й антропогенні процеси, а й прогнозувати їх розвиток у різних сценаріях майбутнього.

Математичні моделі допомагають виявити приховані зв'язки між чинниками, оцінити потенційні наслідки втручань, обґрунтувати прийняття управлінських рішень на місцевому, регіональному та глобальному рівнях. Завдяки стрімкому розвитку цифрових технологій, збільшенню обчислювальної потужності та розширенню доступу до відкритих даних, моделювання стало доступним, гнучким та інтегрованим методом наукового дослідження в екології.

Метою математичного моделювання в проблемі охорони навколишнього середовища є оцінка впливу господарської діяльності людини на стан і зміни природного середовища, зокрема, аналіз і прогноз якості повітря, поверхневих

і підземних вод з точки зору відповідності концентрацій шкідливих речовин існуючим стандартам. Математичні моделі застосовуються з метою оцінки екологічного збитку в результаті забруднення навколишнього середовища і для обґрунтування заходів щодо запобігання або зниження рівня забруднення. Математичні моделі є складовою частиною моніторингу навколишнього середовища, який являє собою систему спостережень, оцінки і прогнозу. Моніторинг ведеться в приземному і примежовому шарах атмосфери, в гідросфері (у поверхневих і підземних водах), у ґрунтах. Вихідними даними для моделей є умови поширення забруднюючих речовин (характеристики течій у повітряному і водному середовищі), і параметри викидів. Результати моделювання звичайно представляються у вигляді розподілу концентрації шкідливих домішок і їхнього масопотоку на границях розділу різних середовищ (осадження на ґрунт, підземний стік у ріки і т. ін.).

Основною характеристикою в таких моделях є концентрація шкідливої домішки у воді (повітрі). Звичайно використовується масова концентрація, що виражається в кг/м^3 (г/м^3 , мг/л і т. п.). Для газоподібних забруднень може застосовуватися також об'ємна концентрація.

2. Основний результат. Математичні моделі в екології класифікуються за різними критеріями: детермінованість/стохастичність, динамічність, рівень просторової деталізації, використання даних, логіка побудови тощо. Кожен тип моделей має свою область ефективного застосування та особливості реалізації.

1. Детерміновані моделі засновані на суворо визначених математичних формулах, що описують процеси за умов відомих параметрів. Вони є основою для опису систем із передбачуваною поведінкою. Наприклад, моделі кругообігу води чи кругообігу вуглецю в ґрунтах можуть будуватися на основі детермінованих диференціальних рівнянь. Вони зручні для моделювання процесів у стабільних умовах, наприклад у стаціонарних екосистемах.
2. Стохастичні моделі використовуються тоді, коли важливо врахувати ймовірнісну природу явищ або невизначеність у вхідних параметрах. Такі моделі дозволяють враховувати випадковість впливу кліматичних чинників, флуктуації в розмірах популяцій або неочікувані зміни середовища. Часто використовуються в моделюванні міграції видів, прогнозах викидів забруднювачів, аналізі екологічних ризиків.
3. Динамічні моделі дозволяють відстежувати зміну системи з часом і будувати сценарії розвитку. Вони є основними при оцінці впливу антропогенних чинників на екосистеми, аналізі змін клімату або динаміки популяцій. Їхня перевага — можливість тестування сценаріїв «що, якщо» при зміні вхідних параметрів або впровадженні природоохоронних заходів.
4. Просторово-часові моделі. Поєднання просторової деталізації з часовою динамікою забезпечує надзвичайно гнучкий інструмент для аналізу поширення лісових пожеж, інвазійних видів, урбанізації, ерозії ґрунтів тощо. За допомогою ГІС та дистанційного зондування такі моделі дають змогу створювати точні карти ризиків, оцінювати вплив забудови або змін ландшафту на довкілля.
5. Нечіткі моделі на відміну від класичних моделей, нечіткі дозволяють оперувати суб'єктивними оцінками й термінами, що не мають чітких границь. Наприклад, «задовільна якість води» або «високий рівень загрози». Це ро-

бать нечіткі моделі надзвичайно корисними в аналізі даних громадського моніторингу або при ухваленні рішень в умовах невизначеності.

6. Моделі штучного інтелекту. Методи машинного навчання (ML) та глибокого навчання (DL) відкривають нові можливості для роботи з великими наборами даних. Нейронні мережі, дерева рішень, метод опорних векторів застосовуються для розпізнавання патернів, класифікації станів середовища, прогнозування змін клімату, оцінки ефективності екологічних програм.

Зазначимо математичні основи моделей. Математичні моделі в екології зазвичай базуються на диференціальних рівняннях, які описують зміну стану екосистеми з часом. Наприклад, для моделювання зростання популяцій застосовуються рівняння логістичного зростання:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

де N — чисельність популяції, r — максимальна швидкість зростання, K — місткість середовища [1].

У дослідженні динаміки двох видів часто використовують модель Лотки-Вольтерри:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP), \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d),$$

де $N(t)$ — популяція жертв, $P(t)$ — популяція хижаків в момент часу t , де a , b , c , d — додатні константи [2].

Для оцінки розповсюдження забруднювачів у воді чи повітрі використовують рівняння дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2},$$

де C — концентрація речовини, D — коефіцієнт дифузії [3].

Застосування таких математичних виразів дозволяє формалізувати екологічні процеси та забезпечити високу точність прогнозування, особливо при використанні чисельних методів їх розв'язання.

Математичні моделі в екології допомагають вивчати складні природні процеси, передбачати зміни в навколишньому середовищі та приймати обґрунтовані рішення для його збереження. Наведемо приклади їх застосування.

Управління водними ресурсами. Математичні моделі широко застосовуються для оцінки стану басейнів річок, прогнозування паводків, аналізу впливу змін клімату на гідрологічні цикли. Інструменти типу SWAT, WEAP, MIKE BASIN дозволяють враховувати різноманітні джерела забруднення, зміну водоспоживання та ефективність захисних заходів. У регіонах із густою мережею водних об'єктів (наприклад, Закарпаття) це критично важливо для забезпечення сталого водокористування.

Моніторинг і прогноз якості повітря. Моделі атмосферного розсіювання забруднень (AERMOD, CALPUFF) дозволяють оцінити вплив промислових викидів і транспорту, з урахуванням метеорологічних умов, рельєфу місцевості, рослинного покриву. Із використанням штучного інтелекту моделі здатні навчатися на історичних даних та генерувати сценарії майбутнього, включаючи аварійні ситуації.

Моделювання популяційних процесів. Багатоагентні системи дозволяють моделювати індивідуальну поведінку особин у межах популяції з урахуванням соціальних, поведінкових, середовищних чинників. Це особливо актуально для оцінки стійкості популяцій до зміни середовища, впливу хижацтва, конкуренції, паразитизму.

Кліматичне моделювання. Від глобальних моделей циркуляції атмосфери (GCM) до регіональних кліматичних моделей (RCM), інструменти дозволяють оцінити наслідки зміни клімату для біорізноманіття, сільського господарства, гідроресурсів. У Карпатах, зокрема, моделі допомагають передбачити ризики селевих потоків, паводків, ерозії ґрунтів.

Оцінка екосистемних послуг. Моделі InVEST, ARIES, LUCI інтегрують просторові, економічні й соціальні дані для оцінки послуг, які надають екосистеми: регулювання клімату, очищення води, запилення, рекреаційні функції. Вони використовуються для планування просторового розвитку та прийняття рішень на рівні громад.

Ці приклади свідчать, що математичні моделі є потужним інструментом у руках екологів, науковців і фахівців із природоохоронної діяльності.

Процес моделювання складається з кількох етапів: постановка завдання, збір даних, вибір типу моделі, калібрування, валідація, аналіз результатів. Для цього використовуються класичні чисельні методи (метод Ейлера, Рунге-Кутта), статистичний аналіз (регресія, кластеризація), а також інструменти штучного інтелекту.

Програмне забезпечення охоплює широкий спектр: від універсальних мов (R, Python, MATLAB) до спеціалізованих середовищ (Simile, AnyLogic, GAMA, NetLogo). ГІС-компоненти реалізуються в ArcGIS, QGIS, Google Earth Engine, що дозволяє інтегрувати просторові дані в моделі.

Для збору даних також можна використати нечітку логіку та математику. Якщо взяти до уваги водні ресурси, то одним із ключових завдань екологічного моніторингу є ідентифікація найважливіших індикаторів якості води, адже саме вони найкраще відображають основні джерела антропогенного забруднення. Проте застосування класичних методів аналізу часто ускладнюється через варіативність і нечіткість даних, що характерні для природних систем. У такому контексті особливо цінними є інструменти нечіткої логіки — зокрема, можемо розглянути нечітку ентропію (Fuzzy Entropy) [4] та метод нечіткої кластеризації (Fuzzy C-Means, FCM) [5]. Вони забезпечують гнучкий та надійний підхід до оцінки значущості окремих екологічних параметрів.

Нечітка ентропія дає змогу кількісно охарактеризувати рівень невизначеності в масиві екологічних даних і виокремити найвагоміші чинники, що впливають на стан водного середовища. Чим вище значення ентропії для певного показника, тим більший його внесок у загальну оцінку якості води. Це дає можливість класифікувати індикатори за ступенем їх екологічної значущості та впливу. Такий підхід є особливо корисним для аналізу складного і змішаного типу забруднення водних об'єктів.

Поєднання нечіткої ентропії та методу нечіткої кластеризації дозволяє не лише виявити домінантні чинники, що визначають якість водного середовища, але й упорядкувати їх за пріоритетністю. Застосування цих методів підвищує достовірність результатів аналізу, полегшує формування рекомендацій для еко-

логічного управління та сприяє обґрунтованому прийняттю рішень щодо захисту водних ресурсів.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Математичне моделювання є невід'ємною складовою сучасних екологічних досліджень, що дає змогу системно аналізувати складні природні та антропогенні процеси, прогнозувати їх динаміку та обґрунтовувати управлінські рішення. У статті розглянуто широкий спектр моделей — від детермінованих і стохастичних до просторово-часових, нечітких і штучного інтелекту — кожна з яких має свої переваги залежно від контексту застосування. Аналіз практичних прикладів показав високу ефективність моделей у таких напрямках, як управління водними ресурсами, оцінка якості повітря, моніторинг популяцій, прогноз кліматичних змін та моделювання екосистемних послуг.

Основні труднощі в екологічному моделюванні пов'язані з обмеженим доступом до якісних даних, невизначеністю параметрів, складністю калібрування моделей і потребою в мультидисциплінарному підході. Однак розвиток відкритих даних (Copernicus, GBIF, OpenStreetMap), зростання потужностей хмарних обчислень (Google Cloud, AWS), розвиток систем інтернету речей (IoT) відкривають нові горизонти.

У майбутньому очікується розширення гібридних підходів, поєднання моделей процесів і даних, створення цифрових двійників екосистем, інтеграція моделей у прийняття рішень через екологічні інформаційні системи, а також активізація участі громадськості в екологічному моделюванні через мобільні застосунки й краудсорсинг даних.

Математичне моделювання є ключовим інструментом у сучасній екології, що дозволяє системно вивчати природні процеси, прогнозувати наслідки змін і формувати науково обґрунтовану екологічну політику. Ефективне застосування моделей сприяє раціональному використанню природних ресурсів, мінімізації ризиків і збереженню довкілля. Подальший розвиток екологічного моделювання залежить від синергії науки, технологій і суспільства на шляху до сталого розвитку.

Список використаної літератури

1. Kot M. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press. 2001. P. 3–11.
2. Murray, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer, 2002. P. 79–83.
3. Crank J. *The Mathematics of Diffusion* (2nd ed.). Oxford University Press. 1975. P. 1–12.
4. De Luca A., and Termini S. A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. *Information and Control*. 1972. Vol. 20. P. 301–312.
5. Bezdek J. C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press. 1981. P. 65–80.

Polovko I. I., Sharkadi M. M. Use of mathematical models in environmental research.

This article provides a thorough overview of the key types of mathematical models used in ecology to analyze, model, and predict changes in natural and anthropogenic systems. Both traditional analytical and modern computerized modeling approaches are considered, including stochastic, dynamic, spatio-temporal, fuzzy logic, machine learning, and artificial intelligence models. Numerous examples of the use of models for solving problems of water resources management, air quality control, study of population processes, climate change assessment, and calculation of ecosystem services are given. The role of an interdisciplinary approach and digital technologies in improving environmental modeling tools

is emphasized. The prospects for integrating models into the processes of environmental planning, risk management and environmental policy formation are determined.

Keywords: mathematical modeling, ecological systems, stochastic models, dynamic models, spatio-temporal models, fuzzy logic, machine learning, decision making.

References

1. Kot, M. (2001). *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, 3–11.
2. Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction (3rd ed.)*. Springer, 79–83.
3. Crank, J. (1975). *The Mathematics of Diffusion (2nd ed.)*. Oxford University Press, 1–12.
4. De Luca, A., & Termini, S. (1972). A Definition of a Nonprobabilistic Entropy in the Setting of Fuzzy Sets Theory. *Information and Control*, 20(4), 301–312.
5. Bezdek, J. C. (1981). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, 65–80.

Одержано 09.03.2025

УДК 519.6:004.94

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).262-272](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).262-272)**В. М. Самусь¹, Є. І. Самусь²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
vasyl.samus@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1682-689X>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
ст. викладач кафедри комп'ютерних систем та мереж
yevgenija.samus@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-9601-289X>

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОЗНАК ЕКГ-СИГНАЛІВ ДЛЯ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

ЕКГ, або електрокардіограма, — це метод неінвазивного дослідження, який дозволяє зафіксувати електричну активність серця за допомогою спеціальних електродів, розташованих на шкірі. Цей метод використовується для оцінки ритму серця, виявлення порушень електричної провідності, а також для діагностики різноманітних серцевих патологій, таких як ішемія, інфаркт міокарда та аритмії. Завдяки своїй простоті та доступності, ЕКГ є одним із основних інструментів у кардіології для моніторингу стану пацієнта як у стаціонарних, так і в амбулаторних умовах.

Підготовка сигналу ЕКГ до машинного навчання — це комплекс процесів, що включає кілька ключових етапів для забезпечення високої якості даних і їх оптимальної придатності для аналізу. Спочатку проводиться попередня обробка сигналу, яка полягає у фільтрації для усунення шумів та артефактів, наприклад, базового дрейфу чи високочастотних перешкод. Далі виконується нормалізація, яка забезпечує однорідність даних, приводячи амплітуди сигналу до спільного масштабу та знижуючи вплив зовнішніх факторів.

Наступним етапом є сегментація, коли безперервний сигнал розбивається на окремі фрагменти навколо піків R, що дозволяє виділити окремі комплекси серцевих скорочень. Після цього проводиться виділення ознак: з кожного сегмента вилучаються ключові характеристики, такі як тривалість інтервалів, амплітуди окремих хвиль, а також часово-частотні параметри. Ці ознаки допомагають моделі розрізняти нормальні та патологічні стани серця. Завершальним кроком є перетворення обробленого сигналу у формат, зручний для подачі в алгоритми машинного навчання. Такий комплексний підхід дозволяє ефективно навчати моделі розпізнавати закономірності в роботі серця, що є основою для діагностики та прогнозування різних кардіологічних станів.

Дана стаття присвячена побудові алгоритмів для підготовки даних цифрової кардіограми до машинного навчання. Розроблений алгоритм дозволяє отримати статистичні характеристики цифрової кардіограми, що дає можливість використати їх в подальшому аналізі з використанням методів машинного навчання.

Ключові слова: електрична цифрова кардіограма, ектопічність, статистичні характеристики, машинне навчання, сегментація.

1. Вступ.

Постановка проблеми. Сигнал ЕКГ характеризується високим рівнем шумів, артефактів та природною варіабельністю між пацієнтами, що ускладнює його безпосереднє застосування в алгоритмах машинного навчання. Необхідно розробити комплексний підхід, який включає попередню обробку сигналу з метою видалення небажаних компонентів, нормалізацію для приведення даних до

єдиного масштабу, а також сегментацію сигналу на окремі комплекси для точного визначення ключових елементів, таких як піки R, комплекси QRS, QS, R та T хвилі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Пошук матеріалів для статті було здійснено за термінами «ECG», «ventricular», «supraventricular», «fibrillation» та «machine learning» у період з січня 2010 року по лютий 2025 року. Обрані дослідження зосереджені на визначенні та побудові базових принципів формування математичної моделі, що стосуються як окремих аспектів електрокардіографічних сигналів, так і можливостей застосування методів машинного навчання для їх аналізу [2, 5, 7]. Більшість публікацій мають вузьку спеціалізацію, розглядаючи частинні випадки, що дозволяє виокремити окремі характеристики, які можна інтегрувати у загальну базову модель. Проте практичні аспекти реалізації математичної моделі з використанням сучасних програмних засобів, зокрема при застосуванні машинного навчання для автоматизованого аналізу сигналів, залишаються відкритими і потребують подальшого дослідження.

Мета статті. Метою даної статті є дослідження практичних аспектів підготовки даних електрокардіографії (ЕКГ) для застосування алгоритмів машинного навчання. Особлива увага приділяється використанню відкритих наборів даних ЕКГ, які забезпечують доступ до великої кількості даних для тренування, тестування та валідації моделей.

2. Виклад основного матеріалу. З метою структурованого підходу до аналізу даних ЕКГ та побудови ефективних алгоритмів необхідно створити математичну модель процесу. Для її реалізації ми використовуватимемо мову програмування Python, що вирізняється широким спектром бібліотек для обробки даних, машинного навчання та аналізу сигналів. Крім того, інтеграція відкритих датасетів ЕКГ дозволить не лише розширити обсяг даних для тренування і валідації моделей, але й забезпечити більш глибокий аналіз та перевірку отриманих результатів.

В якості джерела відкритих датасетів було обрано набори MIT-BIH Database. Цей набір даних був розроблений у спільній роботі Массачусетського технологічного інституту (MIT) та Beth Israel Deaconess Medical Center [9] і широко використовується в медичних дослідженнях завдяки високій якості записів і різноманіттю патологічних випадків.

Для початку визначимо основні моделі для даних.

```
1 class PhysioNetDataset(str, Enum):
2     MIT_BIH_ARRHYTHMIA = "mitdb" # Аритмії
3     MIT_BIH_AFIB = "afdb" # Фібриляція передсердь
4     MIT_BIH_SUPRAVENTRICULAR = "svdb" # Надшлуночкові аритмії
5     MIT_BIH_NORMAL = "nsrdb" # Нормальний ритм
6     MIT_BIH_MALIGNANT_VENTRICULAR = "vfdb" # Шлуночкові аритмії
```

Цей клас описує набір датасетів з PhysioNet, які використовуються для аналізу екстрасистол. Наприклад, значення "mitdb" відповідає аритміям, "afdb" — фібриляції передсердь, "svdb" — надшлуночковим аритміям, "nsrdb" — нормальному ритму, а "vfdb" представляє набір даних, пов'язаний із шлуночковою фібриляцією. Використання такого підходу спрощує роботу з різними джерелами даних, забезпечує однозначну ідентифікацію кожного набору.

Датасет організовано за допомогою формату WFDB і складається з декіль-

кох типів файлів, що забезпечують як сам сигнал, так і супутню анотаційну інформацію. Основні компоненти структури даних:

Файл заголовків (.hea): містить метадані ЕКГ, зокрема кількість сигналів, частоту дискретизації, кількість семплів, параметри перетворення аналогового сигналу у цифровий (наприклад, коефіцієнти масштабування, базову лінію тощо).

Файл анотацій (.atr або .ann): містить інформацію про кардіологічні події, зокрема, позиції (номери семплів), де відбуваються окремі удари, а також їх класифікацію (наприклад, нормальний ритм, різні види аритмій тощо). Анотації дозволяють пов'язати конкретні фрагменти сигналу з подіями, що є ключовим для розробки та валідації алгоритмів автоматичного аналізу.

Файл даних (.dat): зберігає необроблені цифрові значення сигналів. Зазвичай дані представлені у вигляді 12- або 16-бітових чисел, що відображають амплітуду електрокардіографічного сигналу для кожного каналу. Як приклад, наведемо частину ЕКГ з датасету svdb #821, що зображено на рисунку 1:

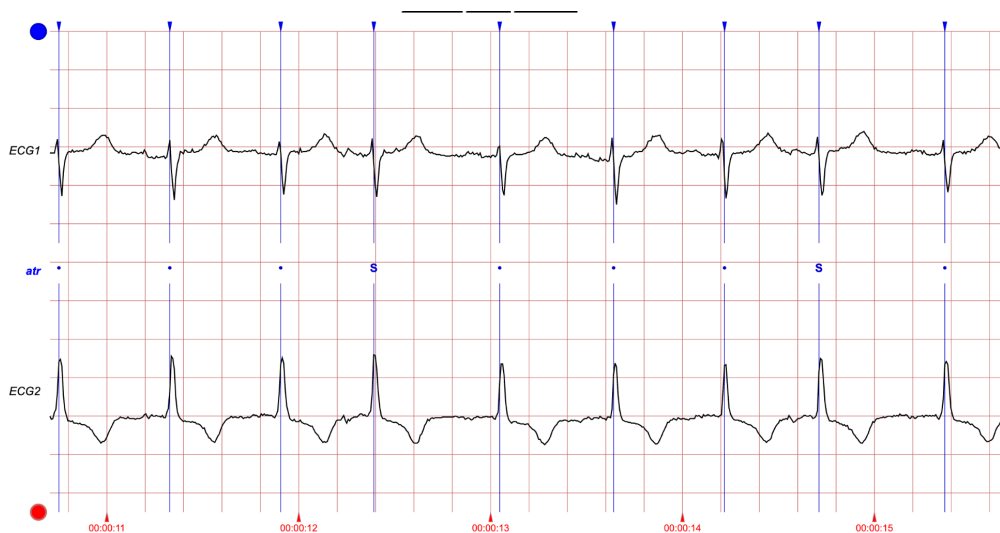


Рис. 1. Фрагмент ЕКГ.

На рисунку бачимо наявність сигналу у двох відведеннях - позначених відповідно ECG1 та ECG2[10]. Додатково нанесено анотацію для кожного удару. В даному випадку нормальний сегмент позначається крапкою, а вироджений відповідною літерою (s - supraventricular). Для роботи з типами серцевих скорочень створимо клас:

```

1 class BeatAnnotation(str, Enum):
2     # Normal & Bundle branch
3     NORMAL = "N" # Normal beat
4     LEFT_BBB = "L" # Left bundle branch block beat
5     RIGHT_BBB = "R" # Right bundle branch block beat
6     # Atrial
7     ATRIAL_PREMATURE = "A" # Atrial premature beat
8     ABERRATED_ATRIAL = "a" # Aberrated atrial premature beat
9     ATRIAL_ESCAPE = "e" # Atrial escape beat
10    # Supraventricular
11    SUPRAVENTRICULAR_PREMATURE = "S" # Supraventricular beat

```

```

12     # Ventricular
13     PVC = "V" # Premature ventricular contraction
14     V_ESCAPE = "E" # Ventricular escape beat
15     ...
16
17     @classmethod
18     def normal(cls):
19         return {cls.NORMAL, cls.LEFT_BBB, cls.RIGHT_BBB}
20
21     @classmethod
22     def atrial(cls):
23     return {cls.ATRIAL_PREMATURE, cls.ABERRATED_ATRIAL, cls.
        ATRIAL_ESCAPE}
24
25     @classmethod
26     def supraventricular(cls):
27         return {cls.SUPRAVENTRICULAR_PREMATURE}
28
29     @classmethod
30     def ventricular(cls):
31         return {cls.PVC, cls.V_ESCAPE}
32     ...

```

Кожен елемент переліку представляє конкретний тип удару, наприклад, "N" для нормального ритму, "L" та "R" для блокад лівої або правої гілки, "V" для шлуночкової екстрасистоли тощо. Крім того, клас включає методи, що групують окремі типи ударів за категоріями (normal, atrial, supraventricular, ventricular).

На наступному етапі створимо клас для завантаження сигналів із вказаних датасетів та їх локального кешування.

```

1 class PhysioNetLoader:
2     def __init__(self, dataset: PhysioNetDataset):
3         self._dataset = dataset.value
4         os.makedirs(f"{DATA_DIR}/{self._dataset}", exist_ok=True)
5
6     @property
7     def _data_path(self):
8         return os.path.join(DATA_DIR, self._dataset)
9
10    def get_local_record_list(self, only_dat=False):
11        dat_files = get_file_names_in_dir(self._data_path, ".dat")
12        if only_dat:
13            return dat_files
14        else:
15            atr_files = get_file_names_in_dir(self._data_path, ".atr
16            ")
17            hea_files = get_file_names_in_dir(self._data_path, ".hea
18            ")
19            return dat_files & atr_files & hea_files
20
21    def download_record(self, record_id):
22
23        try:
24            os.chdir(self._data_path)
25            wfdb.dl_files(

```

```

24         self._dataset,
25         dl_dir=".",
26         files=[
27             f"{record_id}.dat",
28             f"{record_id}.hea",
29             f"{record_id}.atr",
30         ], # noqa E501
31     )
32     print(f"Запис {record_id} завантажено!")
33     ")
34 except FileNotFoundError:
35     print(f"Запис {record_id} не знайдено")

```

Основними його можливостями є отримання запису або з локального кешу, або завантаження безпосередньо з PhysioNet.

Отримання списку записів: метод `get_local_record_list` дозволяє отримати список записів, що вже завантажені локально, за умови наявності файлів з розширеннями `.dat`, `.atr` і `.hea`. Метод `get_record_list` використовує функцію з бібліотеки `wfdb` для отримання списку всіх записів із вибраного датасету безпосередньо з PhysioNet.

Завантаження записів: метод `download_record` завантажує окремий запис за вказаним ідентифікатором. Метод `download_all_records` автоматизує завантаження всіх записів із датасету, перебираючи отриманий список записів. Метод `load_out_record` завантажує запис з PhysioNet, якщо його немає локально, а також зберігає його локально за потребою. Метод `load_record` перевіряє наявність запису локально та, залежно від цього, викликає відповідний метод завантаження.

Завантаження та збереження локальних записів: `load_local_record` завантажує запис, його анотації та заголовок із локальної директорії. `check_record_exists` перевіряє, чи існують у локальному сховищі всі необхідні файли для запису. Методи `save_record_local`, `save_annotations_local` та `save_headers_local` відповідають за збереження відповідних компонентів запису у локальну директорію.

Створивши інструмент для отримання записів, можна перейти до підготовки даних до навчання. Для навчання потрібно сформулювати два масиви - матрицю ознак та цільову змінну. Вони відповідно позначаються X та y . X представляється у вигляді матриці, де кожен рядок відповідає окремому зразку (спостереженню), а кожен стовпець — конкретній ознаці. Відповідно y є вектором, де кожне значення відповідає одному зразку в X . Ці позначення є стандартними, оскільки вони застосовуються як у випадку простих моделей, так і у більш складних глибоких нейронних мережах. В процесі дослідження розглядалися 3 способи побудови матриці ознак. Першим способом є передача на вхід цілого фрагменту ЕКГ, який відповідає конкретному серцевому удару. В такому випадку розмірність масиву X : $X.shape = (n_samples, n_features)$, де $n_features$ залежить від частоти сигналу та тривалості серцевого скорочення. Графічно це можна зобразити наступним чином (див. рисунок 2):

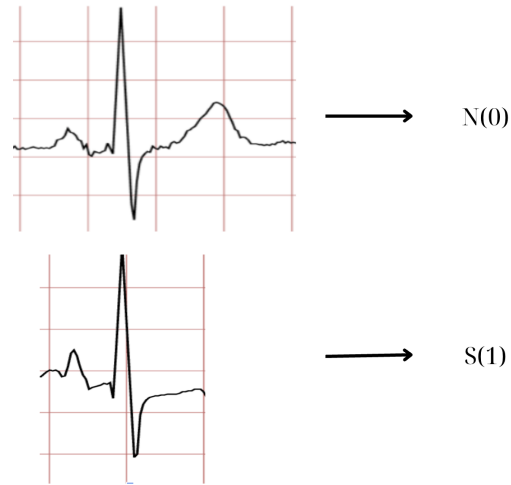


Рис. 2. Нормальне та ектопічне скорочення.

Визначимо клас, який буде описувати цю модель:

```

1 class PrepareECGToLearn:
2     def __init__(
3         self,
4         dataset: PhysioNetDataset,
5         beat_label_map: BeatAnnotationLabelMap,
6         samples=1,
7     ):
8         self._dataset = dataset
9         self._beat_label_map = beat_label_map
10        self._loader = PhysioNetLoader(self._dataset)
11        self._samples = samples
12        self._records = {}
13        self._annotations = {}
14        self._headers = {}
15
16    def _load_signals(self, rec_name):
17        record = self._records.get(rec_name)
18        annotation = self._annotations.get(rec_name)
19        header = self._headers.get(rec_name)
20        if not (record and annotation and header):
21            record, annotation, header = self._loader.load_record(
22                rec_name, save_locally=True
23            ) # noqa 501
24            self._records[rec_name] = record
25            self._annotations[rec_name] = annotation
26            self._headers[rec_name] = header
27        return record, annotation, header
28
29    @staticmethod
30    def get_segment_label(segment, ann_samples, ann_symbols):
31        start = segment["Index"].min()
32        end = segment["Index"].max()
33        indices = np.where((ann_samples >= start) & (ann_samples
34        <= end))[0]
35        if len(indices) > 0:
36            center = (start + end) // 2
37            closest_idx = indices[

```

```

37         np.argmin(np.abs(ann_samples[indices] - center))
38     ] # noqa 501
39     return ann_symbols[closest_idx]
40 else:
41     return None
42
43 def prepare_signal_to_learn(self, rec_name):
44     _segments = []
45     _labels = []
46     record, annotation, header = self._load_signals(rec_name)
47     signal = record.p_signal[:, 0] # одне відведення
48     sampling_rate = record.fs
49     ecg_signals, info = nk.ecg_process(signal, sampling_rate=
        sampling_rate)
50     r_peaks = info["ECG_R_Peaks"]
51     epochs = nk.epochs_create(
52         signal,
53         events=r_peaks,
54         sampling_rate=sampling_rate,
55         epochs_start=-0.3,
56         epochs_end=0.3,
57     )
58     annotation_samples = annotation.sample
59     annotation_symbols = annotation.symbol
60     for _, epoch in epochs.items():
61         segment_symbol = self.get_segment_label(
62             epoch, annotation_samples, annotation_symbols
63         ) # noqa 501
64         if not segment_symbol:
65             continue
66     segment_label = self._beat_label_map.beat_to_label(
        segment_symbol)
67         if segment_label < 0:
68             continue
69         _segments.append(epoch["Signal"])
70         _labels.append(segment_label)
71     return _segments, _labels
72
73 def prepare_epoch_data(self):
74     all_segments = []
75     all_labels = []
76     # Отримуємо список записів
77     records = self._loader.get_local_record_list()
78     for record in random.sample(list(records), self._samples):
79         segments_, labels_ = self.prepare_signal_to_learn(
            record)
80         all_segments.extend(segments_)
81         all_labels.extend(labels_)
82     _X = np.array(all_segments)
83     # Додавання виміру для каналу: (n_samples, segment_length, 1)
84     _X = _X[..., np.newaxis]
85     _y = np.array(all_labels)
86     return _X, _y
87
88 def prepare_stats_data(self, rec_name):
89     record, _annotation, _header = self._load_signals(rec_name)

```

```

90     signal = record.p_signal[:, 0]    # одне відведення
91     ecg = ECG(signal)
92     ecg.analyze()
93     return ecg

```

Розглянемо основні компоненти.

1) Ініціалізація та кешування даних;

При створенні об'єкта класу передаються вибраний датасет (типу `PhysioNetDataset`), мапа міток ударів (`BeatAnnotationLabelMap`) та кількість записів, які необхідно обробити. У конструкторі ініціалізується завантажувач даних та створюються словники для зберігання завантажених записів, анотацій та заголовків.

2) Завантаження сигналів;

Метод `_load_signals` перевіряє наявність запису, анотацій та заголовка в кеші. Якщо якихось компонентів немає, викликається завантаження запису за допомогою `PhysioNetLoader`, після чого отримані дані зберігаються в словниках для подальшого використання.

3) Виділення сегментів та визначення мітки;

Метод `prepare_signal_to_learn` отримує сигнал з одного відведення запису та обчислює інформацію про обробку ЕКГ за допомогою бібліотеки `NeuroKit2`. Далі використовуючи `nk.epochs_create` сигнал розбивається на сегменти (епохи) навколо кожного R-піку. Для кожного сегмента викликається статичний метод `get_segment_label`, який знаходить відповідну анотацію всередині сегмента і повертає відповідний символ. Цей символ перетворюється на числову мітку через мапу міток (`beat_label_map`), а сегмент та його мітка додаються до списків.

4) Підготовка кінцевих даних для навчання;

Метод `prepare_epoch_data` вибирає випадковим чином задану кількість записів із сховища, обробляє кожен з них, збираючи сегменти та відповідні мітки, після чого формує два масиви:

`_X` – масив сегментів сигналу;

`_y` – масив міток.

5) Обчислення статистичних характеристик;

Метод `prepare_stats_data` завантажує сигнал запису та передає його об'єкту класу `ECG`, після чого викликає аналіз сигналу через метод `analyze()`. Це дозволяє отримати статистичну інформацію, що буде використана для додаткової оцінки сигналу.

Згідно досліджень [1], [4], [6] нейромережа Long Short-Term Memory (LSTM) є хорошим вибором для навчання на даних у вигляді часових рядів. На наступному прикладі коду покажемо, як можна навчити модель розрізняти надшлуночкові екстрасистоли:

```

1  supraventricular_bynary_map = BeatAnnotationLabelMap(
2      {0: BeatAnnotation.normal(), 1: BeatAnnotation.supraventricular
3      })
4
5  mit_db_preparation = PrepareECGToLearn(
6      dataset=PhysioNetDataset.MIT_BIH_SUPRAVENTRICULAR,
7      beat_label_map=supraventricular_bynary_map,

```

```

8     samples=2,
9 )
10 X, y = mit_db_preparation.prepare_epoch_data()
11 X_train, X_test, y_train, y_test = train_test_split(
12     X, y, test_size=0.2, random_state=42, stratify=y
13 )
14 # Побудова моделі LSTM
15 model = Sequential()
16 model.add(LSTM(64, input_shape=(X.shape[1], 1)))
17 model.add(Dropout(0.2))
18 model.add(Dense(1, activation="sigmoid"))
19 model.compile(
20     optimizer=Adam(learning_rate=0.001),
21     loss="binary_crossentropy",
22     metrics=["accuracy"],
23 )
24 model.summary(print_fn=logging.info)
25 history = model.fit(
26     X_train,
27     y_train,
28     epochs=10,
29     batch_size=32,
30     validation_split=0.2,
31     callbacks=[LoggingCallback()],
32 ) # noqa 501
33 loss, accuracy = model.evaluate(X_test, y_test)

```

Результати навчання та модель зберігаються у файл в директорію `./data/saved_models`. Наведемо приклад виводу: INFO - Форма даних X: (4830, 77, 1)

```

1 INFO - Форма міток y: (4830,)
2 INFO - Model: "sequential"

```

Layer (type)	Output Sh	Param
lstm (LSTM)	(None, 64)	16896
dropout (Dropout)	(None, 64)	0
dense (Dense)	(None, 1)	65

```

1 Total params: 16,961 (66.25 KB)
2 Trainable params: 16,961 (66.25 KB)
3 Non-trainabl
4 e params: 0 (0.00 B)
5 Епоха 10: {'accuracy': 0.932, 'loss': 0.251, 'val\_accuracy': 0.932,
    'val\_loss': 0.246}

```

3. Висновки. Розроблена процедура автоматизує отримання, попередню обробку та зберігання ключових параметрів ЕКГ-сигналу. Це дає можливість швидко формувати готові вибірки для навчання моделей машинного навчання. За рахунок автоматизації рутинних процесів, можна здійснювати серії експериментів з різними наборами ознак, проводити їх порівняння та вивчати вплив на результат. Програмна реалізація відповідає основним принципам ООП, що забезпечує модульність та гнучкість у розширенні функціональності. Це дозволяє легко масштабувати рішення для роботи з різними наборами даних та адаптувати його під нові дані.

Список використаної літератури

1. Zhang Y., Wei S., Wang H. Arrhythmia classification of LSTM autoencoder based on time series clustering. *Computers in Biology and Medicine*. 2021. Vol. 139. P. 104944.
2. Liu F., Liu C. CLINet: A novel deep learning network for ECG signal classification. *Journal of Electrocardiology*. 2024. Vol. 82. pp. 37–44.
3. Lourenço A., Silva H., Leite P., Lourenço R., and Fred A. L. (2012). Real-time electrocardiogram segmentation for finger-based ECG biometrics. *In Biosignals*. pp. 49–54.
4. Wang, J., & Zhang, Y. An Arrhythmia Classification Model Based on a CNN-LSTM-SE Network. *Sensors*. 2024. Vol. 24, No. 19. P. 6306.
5. Chen T., Li X. A hybrid deep learning network for automatic diagnosis of cardiac arrhythmias. *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13. P. 17261.
6. Alamatsaz N., et al. A lightweight hybrid CNN-LSTM model for ECG-based arrhythmia detection. *arXiv preprint*. 2022. arXiv:2209.00988.
7. Kumar P., Kumar R. Cardiac arrhythmia detection using deep learning approach and Morse wavelet transform. *Frontiers in Physiology*. 2023. Vol. 14. P. 10588016.
8. McKinney W. Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and Jupyter (3rd ed.). O'Reilly Media, 2022.
9. PhysioNet. Open databases. URL: <https://physionet.org/about/database> (date of access: 01.04.2025).
10. Goldberger A., Amaral L., Glass L., Hausdorff J., Ivanov P. C., Mark R., . . . , and Stanley H. E. PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation [Online]*. 2000. Vol. 101, No. 23. pp. e215–e220.

Samus V. M., Samus Ye. I. Formalization of ECG-Signal Features for Building Machine-Learning Models.

An ECG, or electrocardiogram, is a non-invasive method that records the heart's electrical activity via electrodes placed on the skin. It is used to assess heart rhythm, detect conduction disorders, and diagnose a variety of cardiac pathologies such as ischemia, myocardial infarction, and arrhythmias. Because of its simplicity and availability, the ECG is one of the primary tools in cardiology for monitoring a patient's condition in both inpatient and outpatient settings.

Preparing an ECG signal for machine-learning analysis involves several key stages to ensure high-quality data and optimal suitability for modelling. The process starts with pre-processing, where filtering is applied to remove noise and artefacts, such as baseline wander or high-frequency interference. Normalization then brings signal amplitudes to a common scale, reducing the influence of external factors.

The next stage is segmentation, in which the continuous signal is divided into individual segments around the R peaks, allowing isolation of separate cardiac-cycle complexes. Feature extraction follows: each segment is analyzed to obtain key characteristics such as interval durations, wave amplitudes, and time-frequency parameters. These features enable the model to distinguish between normal and pathological heart conditions. The final step is to convert the processed signal into a format suitable for input to machine-learning algorithms.

This comprehensive approach facilitates effective model training to recognize cardiac patterns, forming the basis for diagnosis and prognosis of various cardiological conditions. The present article focuses on designing algorithms that prepare digital ECG data for machine learning. The proposed algorithm yields statistical characteristics of the digital ECG, which can subsequently be used in further analysis with machine-learning methods.

Keywords: digital electrocardiogram, ectopy, statistical features, machine learning, segmentation.

References

1. Zhang, Y., Wei, S., & Wang, H. (2021). Arrhythmia classification of LSTM autoencoder based on time series clustering. *Computers in Biology and Medicine*, 139, 104944.

2. Liu, F., & Liu, C. (2024). CLINet: A novel deep learning network for ECG signal classification. *Journal of Electrocardiology*, 82, 37–44.
3. Lourenço, A., Silva, H., Leite, P., Lourenço, R., & Fred, A. L. (2012). Real-time electrocardiogram segmentation for finger-based ECG biometrics. *In Biosignals*, 49–54.
4. Wang, J., & Zhang, Y. (2024). An Arrhythmia Classification Model Based on a CNN-LSTM-SE Network. *Sensors*, 24(19), 6306.
5. Chen, T., & Li, X. (2023). A hybrid deep learning network for automatic diagnosis of cardiac arrhythmias. *Scientific Reports*, 13, 17261.
6. Alamatsaz, N., & et al. (2022). A lightweight hybrid CNN-LSTM model for ECG-based arrhythmia detection. *arXiv preprint*, arXiv:2209.00988.
7. Kumar, P., & Kumar, R. (2023). Cardiac arrhythmia detection using deep learning approach and Morse wavelet transform. *Frontiers in Physiology*, 14, 10588016.
8. McKinney, W. (2022). *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and Jupyter (3rd ed.)*. O'Reilly Media.
9. PhysioNet. Open databases. Retrieved from <https://physionet.org/about/database>
10. Goldberger, A., Amaral, L., Glass, L., Hausdorff, J., Ivanov, P. C., Mark, R., ... & Stanley, H. E. (2000). PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet: Components of a new research resource for complex physiologic signals. *Circulation [Online]*, 101(23), e215–e220.

Одержано 12.04.2025

Д. І. Симонов

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України,
молодший науковий співробітник,
доктор філософії
denys.symonov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6648-4736>

**ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА КОНТРОЛЬ ХАОТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ У
СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ**

У статті представлено узагальнений математичний підхід до ідентифікації та адаптивного контролю хаотичних процесів у нелінійних технічних системах з випадковими параметрами. Досліджується проблема стабілізації систем, що характеризуються високою чутливістю до початкових умов і стохастичними впливами, яка є актуальною для сучасної прикладної математики та інженерії. Побудовано нелінійну стохастичну модель хаотичної динаміки, формалізовано вплив хаосу на показники надійності технічних систем і розроблено адаптивний метод контролю на основі зворотного зв'язку. Представлено алгоритмічну реалізацію запропонованого методу та виконано його апробацію на реальних даних газових сенсорних систем. Отримані результати свідчать про суттєве підвищення стабільності, прогнозованості та надійності роботи систем за умов складних динамічних режимів. Запропонований метод може бути ефективно застосований у робототехніці, сенсорних мережах, енергетиці та автоматизованих системах керування, забезпечуючи стабілізацію та контроль нелінійних режимів функціонування в умовах параметричних і стохастичних невизначеностей.

Ключові слова: хаотичні процеси, нелінійні системи, надійність систем, контроль хаосу, адаптивний закон керування.

1. Вступ. Проблема стабілізації хаотичних режимів у нелінійних динамічних системах є однією з ключових задач сучасної прикладної математики, фізики та інженерії [1]. Особливої актуальності вона набуває у випадку систем, поведінка яких визначається не тільки складною нелінійною динамікою, але й впливом стохастичних факторів на функціонування цих систем [2]. Хаос, що характеризується високою чутливістю до початкових умов, експоненціальним розходженням траєкторій і складністю фазових просторів, призводить до суттєвого зниження прогнозованості, керованості та надійності технічних систем [3]. Традиційні методи стабілізації та контролю здебільшого не враховують нелінійних та адаптивних особливостей таких систем, що робить їх малоефективними для боротьби з хаотичними режимами. Саме тому розвиток узагальнених математичних підходів до стабілізації хаосу в стохастичних нелінійних системах є важливим теоретичним і практичним завданням. Особливий інтерес становлять адаптивні методи, здатні компенсувати невизначеність параметрів та забезпечувати асимптотичну стабілізацію станів системи [4, 5].

У цій статті запропоновано узагальнений підхід до аналізу та стабілізації хаосу в нелінійних системах з випадковими параметрами. Послідовно викладено математичні основи нелінійних стохастичних систем, розглянуто фундаментальні взаємозв'язки між хаосом і стохастичними процесами, описано основні методи стабілізації хаотичних режимів, а також наведено математичну формалізацію узагальнених підходів до керування стохастичними параметрами.

Представлені у статті результати мають не тільки теоретичне значення, але й безпосередню практичну цінність, оскільки дозволяють створювати ефективні алгоритми керування нелінійними динамічними системами, які функціонують в умовах невизначеності та стохастичних впливів. Викладений у роботі матеріал може бути основою для подальших теоретичних досліджень та практичних впроваджень у різноманітних галузях, де важливим є забезпечення стабільності, прогнозованості та надійності функціонування складних динамічних об'єктів і систем.

2. Мета та завдання роботи. Метою роботи є розробка математичного методу адаптивного контролю хаотичної динаміки для підвищення надійності технічних систем, що функціонують у нелінійних нестійких режимах.

Для досягнення поставленої мети планується розв'язати такі завдання:

- побудувати математичну модель технічної системи з елементами хаотичної динаміки;
- формалізувати вплив хаосу на показники надійності;
- формалізувати задачу стабілізації та розробити адаптивний закон керування;
- провести тестування методу на реальному наборі даних та проаналізувати ефективність запропонованого підходу.

3. Математичне моделювання технічної системи з елементами хаотичної динаміки. Для аналізу технічних систем, що демонструють елементи хаотичної поведінки, необхідно побудувати математичну модель, яка адекватно відображає складні нелінійні процеси, що визначають динаміку їх поведінки.

Розглянемо загальний підхід до побудови такої моделі. Нехай розглядається технічна система, яка описується нелінійною системою диференціальних рівнянь наступного типу:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

де $x(t) = (x_i(t))_i^T$, $i = \overline{1, n}$ – вектор стану системи; $\mu(t) = (\mu_j(t))_j^T$, $j = \overline{1, m}$ – вектор параметрів системи; $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нелінійне гладке відображення, що визначає динаміку системи.

У системах з характерною ознакою хаотичної динаміки є чутливість до початкових умов. Для аналізу характеру поведінки розглянемо лініаризацію системи поблизу деякої точки фазового простору x^* , яка відповідає стаціонарному стану або рівновазі системи, що визначається умовою:

$$F(x^*, \mu) = 0. \quad (2)$$

Використовуючи лінійне наближення, ми отримуємо наступну систему лінеаризованих рівнянь:

$$\frac{dy}{dt} = J(x^*, \mu)y, \quad y = x - x^*, \quad (3)$$

де $J(x^*, \mu)$ – матриця Якобі відображення F , що визначається співвідношенням:

$$J(x^*, \mu) = \left. \frac{dF}{dt} \right|_{x=x^*, \mu}.$$

Суттєву інформацію про динаміку системи [6, 7] в околі точки рівноваги системи x^* несе спектр матриці Якобі. Якщо хоча б одне власне число матриці $J(x^*, \mu)$ має додатну дійсну частину, то система може демонструвати складні динамічні режими.

Розглянемо далі приклад побудови математичної моделі, типової для класу технічних систем, що характеризуються складною, потенційно хаотичною динамікою. Особливої актуальності проблема набуває в системах, що працюють з малими сигналами або в умовах низької концентрації інформаційного чи фізичного впливу, як-от у масивах газових сенсорів [8]. Для аналізу використаємо відкритий набір даних «Gas Sensor Array: Low-Concentration» з репозиторію UCI Machine Learning Repository, який містить дані щодо реакції сенсорних елементів на нелінійні, складні та чутливі до малих змін концентрації газові середовища [9].

Реакції сенсорів на низькі концентрації газів мають виражений нелінійний характер, що може бути описаний динамічною моделлю у вигляді нелінійної системи диференціальних рівнянь, подібних до системи Лоренца:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases} \quad (4)$$

де $x(t), y(t), z(t)$ – змінні, що відповідають узагальненим станам газочутливих елементів, що характеризують внутрішню динаміку реакції на зміну концентрації газів; $\sigma \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що визначає інтенсивність перенесення сигналу між сусідніми компонентами сенсорної системи, пов'язану із швидкістю реакції та тепловим або концентраційним переносом; $r \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що описує зовнішні умови експерименту, такі як концентрація газу та потенціал активації сенсорів (зі зростанням r система сенсорів переходить від простих, передбачуваних режимів до складних, нелінійних та потенційно хаотичних реакцій); $b \in \mathbb{R}_+$ – параметр системи, що характеризує геометричні чи конструктивні параметри самих сенсорів та їх взаєморозташування, що впливають на просторово-часову динаміку процесу.

Система (4) характерна для прикладних задач, які включають елементи нестабільності та нелінійних взаємодій. Для оцінки наявності хаотичних елементів у динаміці сенсорних реакцій, представлених у наборі даних, ефективним інструментом є аналіз показників Ляпунова [10, 11]. Обчислення цих показників дозволяє кількісно оцінити чутливість реакції сенсорів до початкових умов та визначити можливість існування режимів хаотичної динаміки:

$$|\delta x(t)| \approx |\delta x(0)| e^{\lambda t}.$$

Відповідно, формула, яка враховує чутливість сенсорної системи до початкових умов (реакції газових сенсорів), для визначення найбільшого показника Ляпунова λ має вигляд:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(t)\|}{\|\delta x(0)\|}, \quad (5)$$

де $\delta x(0)$ – початкове, мале збурення сенсорної системи в момент часу t_0 ; $\delta x(t)$ – еволюція цього збурення з плином часу t ; $\|\cdot\|$ – норма вектору у фазовому просторі станів системи.

Якщо $\lambda > 0$, то це свідчить про наявність хаотичної поведінки, що проявляється у високій чутливості сенсорної системи до мінімальних змін початкових умов.

4. Надійність технічних систем. Надійність технічних систем, у яких проявляється хаотична динаміка, визначається здатністю системи підтримувати задані функціональні характеристики в умовах нелінійних та потенційно нестійких режимів роботи [12, 13]. Хаотична динаміка безпосередньо впливає на надійність системи, спричиняючи непередбачувані зміни станів та суттєве погіршення прогнозованості поведінки.

Позначимо через $R(t)$ функцію надійності технічної системи, визначену ймовірністю того, що система не покине допустиму множину станів $D \subset \mathbb{R}^n$ протягом проміжку часу $\tau \in [0, n]$:

$$R(t) = P\{x(\tau) \in D, \forall \tau \in [0, n]\}. \quad (6)$$

Зважаючи на чутливість хаотичних систем до початкових умов та параметрів, аналіз надійності таких систем потребує використання імовірнісних характеристик їх поведінки. Для формального опису впливу хаотичних явищ доцільно розглянути стохастичну модель, що враховує можливі невизначеності або випадкові збурення в початкових умовах чи параметрах.

Нехай початковий стан системи $x(0)$ є випадковим вектором із щільністю розподілу $f_{x(0)}(x)$. Тоді функцію надійності можна записати як:

$$R(t) = \int_D f_{x(t)}(x) dx, \quad (7)$$

де $f_{x(t)}(x)$ – щільність розподілу стану системи у момент часу t , яка визначається еволюцією початкового розподілу згідно із нелінійним відображенням F :

$$f_{x(t)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{x(0)}(y) \delta(x - \Phi_t(y)) dy, \quad (8)$$

де $\Phi_t(\cdot)$ – фазовий потік, що описує еволюцію стану системи у часі; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

З математичної точки зору, ймовірність виходу стану системи за межі допустимої області D у хаотичних умовах швидко зростає зі збільшенням часу t , що можна приблизно описати як:

$$1 - R(t) \sim 1 - e^{-\gamma e^{\lambda t}}, \quad (9)$$

де γ – параметр, що визначає масштаб початкових збурень.

Формула (9) підкреслює стрімке погіршення надійності через вплив хаосу, навіть за незначних початкових невизначеностей. Враховуючи наведені математичні формулювання, необхідно розробляти спеціальні методи контролю та стабілізації нелінійних режимів роботи для забезпечення високого рівня надійності технічних систем.

5. Постановка задачі контролю хаотичної поведінки. Задача контролю хаотичної поведінки полягає в розробці керуючого впливу $u(t)$, що дозволяє стабілізувати систему навколо рівноважного стану x^* , періодичного циклу чи іншого регулярного режиму роботи, який задовольняє рівняння (2).

Враховуючи вплив керуючого сигналу $u(t) \in \mathbb{R}^k$, система набуває наступного вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu) + Bu(t), \quad (10)$$

де $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ – матриця, яка описує розподіл керуючих впливів у фазовому просторі системи.

Формально задача контролю формулюється таким чином:

- 1) Знайти керуючий сигнал $u(t)$, який мінімізує критерій:

$$J(u) = \int_0^T \left[(x(t) - x^*)^T Q (x(t) - x^*) + u^T(t) R u(t) \right] dt \rightarrow \min_{u(t)}; \quad (11)$$

- 2) При заданих матрицях вагових коефіцієнтів $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$, забезпечити умову стабілізації:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0. \quad (12)$$

Таким чином, задача контролю хаотичної поведінки зводиться до вибору оптимального керуючого сигналу $u(t)$, що забезпечує асимптотичну стабілізацію стану системи в околі бажаної траєкторії, що, своєю чергою, дозволяє істотно підвищити надійність функціонування технічної системи.

6. Огляд методів контролю хаосу. Для розв'язання задачі контролю хаотичної поведінки, описаної у розділі 3, можуть використовуватися різноманітні математичні підходи та алгоритми стабілізації нелінійних динамічних систем. Нижче наведено основні математичні методи контролю хаосу з їх формальним описом.

Метод Отта–Гребоджі–Йорка (OGY) базується на застосуванні малих коригувальних впливів на параметри системи в моменти перетину фазовою траєкторією перерізу Пуанкаре з метою стабілізації нестійкої періодичної орбіти. Нехай задано систему в дискретному вигляді:

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu_n), \quad x_n \in \mathbb{R}^n, \quad \mu_n \in \mathbb{R}^m.$$

Тоді метод OGY формулюється через наступний закон керування параметром:

$$\mu_n = \mu^* + K(x_n - x'), \quad (13)$$

де μ^* – номінальне значення параметра, відповідне «оптимальній» періодичній орбіті; x' – точка нестійкої періодичної орбіти в перерізі Пуанкаре, $x' = P(x)$; $P(\cdot)$ – оператор відображення Пуанкаре; K – матриця, що обчислюється на основі лінійного наближення системи поблизу точки x' .

Метод зворотного зв'язку за станом (State Feedback Control) Метод заснований на лінійній стабілізації навколо бажаного стану за допомогою керуючого сигналу вигляду:

$$u_s(t) = -L(x(t) - x'), \quad (14)$$

де L – матриця зворотного зв'язку, що визначається з умов стабільності відповідної лінеаризованої системи:

$$\frac{dy}{dt} = [J(x', \mu) - BL]y, \quad y = x - x',$$

та має забезпечувати виконання умови:

$$\operatorname{Re} \lambda_i [J(x', \mu) - BL] < 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Метод керування за допомогою затриманого зворотного зв'язку (Pyragas Time-Delayed Feedback) використовує затриманий сигнал для стабілізації періодичних орбіт. Керуючий сигнал у цьому випадку має вигляд:

$$u_s(t) = \varphi [x(t - \tau) - x(t)],$$

де τ – період стабілізованої орбіти; φ – коефіцієнт підсилення, який визначає ступінь впливу затриманого сигналу.

Метод адаптивного керування (Adaptive Control) передбачає динамічну адаптацію параметрів керування з метою компенсації невизначеностей моделі та збурень. Закон адаптації параметрів описується рівнянням:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\Gamma(x(t) - x')^T P B,$$

де $\theta(t)$ – адаптивно змінюваний параметр керування; $P > 0$ – матриця, що визначається з розв'язку матричного рівняння Ляпунова (5); $\Gamma(\cdot) > 0$ – швидкість адаптації.

Перелічені методи дають можливість математично обґрунтовано здійснювати контроль хаотичної поведінки та стабілізувати динаміку технічних систем, тим самим суттєво підвищуючи їхню надійність.

7. Модифікований процес контролю на основі адаптивного зворотного зв'язку. Розглянемо подальше узагальнення методу контролю хаотичної динаміки з використанням адаптивного зворотного зв'язку, що враховує не лише поточне значення стану системи, а й динаміку зміни параметрів самої системи. Це дозволяє суттєво підвищити ефективність контролю за умов невизначеності початкових умов та параметричних збурень.

Припустимо, що система функціонує за умов (10) для якої визначимо керуючий сигнал, що складається з двох компонент (14) та адаптивний додатковий член контролю, який враховує зміну параметрів та динаміку їх адаптації:

$$u_a(t) = -G(\hat{\mu}(t) - \mu^*),$$

де $\hat{\mu}(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор адаптивних оцінок параметрів системи; μ^* – бажане (еталонне) значення параметрів; $G \in \mathbb{R}^{k \times m}$ – матриця коефіцієнтів адаптивного впливу.

Відповідно, повний керуючий сигнал має вигляд:

$$u(t) = -L(x(t) - x') - G(\hat{\mu}(t) - \mu^*).$$

Закон адаптації параметрів $\hat{\mu}(t)$ вводиться у вигляді наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d\hat{\mu}(t)}{dt} = -\Gamma B P(x(t) - x')^T.$$

Тоді динаміка замкненої адаптивно-керованої системи набуває вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu) - B(L(x(t) - x') + G(\hat{\mu}(t) - \mu^*)).$$

Застосування такого модифікованого адаптивного керування дозволяє не лише стабілізувати систему навколо бажаної точки рівноваги, а й ефективно компенсувати зміни параметрів, збурення та невизначеності, які є типовими для хаотичних режимів.

Для доведення стабільності та збіжності системи за таким алгоритмом можна використати функцію Ляпунова виду:

$$V(x, \hat{\mu}) = (x - x')^T P (x - x') + (\hat{\mu} - \mu^*)^T \Gamma^{-1} (\hat{\mu} - \mu^*),$$

яка задовольняє умови додатної визначеності та обмеженості.

Вибір матриць L, G, Γ, P, Q дозволяє гарантувати виконання умови стабільності, тобто $\frac{dV(x, \hat{\mu}, t)}{dt} < 0$, що забезпечує асимптотичну стійкість та збіжність траєкторій до заданого стану рівноваги та параметрів до еталонних значень:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x', \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mu}(t) = \mu^*.$$

Таким чином, модифікований контроль на основі адаптивного зворотного зв'язку є математично обґрунтованим методом, що дозволяє істотно покращити надійність технічних систем в умовах хаотичної динаміки.

8. Алгоритмічна реалізація контролю хаотичної динаміки. Нижче наведено псевдокод алгоритму контролю хаотичної динаміки системи з адаптивним зворотним зв'язком, який реалізує математичні принципи, описані у попередніх розділах статті.

Algorithm 1

Рис. 0. Chaos Control Adaptive Feedback

```

1: Input:  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \hat{\mu}(0) = \hat{\mu}_0 \in \mathbb{R}^m, L, G, B, \Gamma, P, Q, x', \mu^*, \Delta t, \varepsilon$ 
2: Output:  $x(t), \hat{\mu}(t), u(t)$ 
3:  $x \leftarrow x_0, \hat{\mu} \leftarrow \hat{\mu}_0$ 
4:  $t \leftarrow 0$ 
5:  $u \leftarrow u_0$ 
6: while  $\|x - x'\| \geq \varepsilon$  do
7:    $u \leftarrow -L(x - x') - G(\hat{\mu} - \mu^*)$ 
8:    $x \leftarrow x + \text{Integrate}(F(x, \mu) + Bu, \Delta t)$ 
9:    $\hat{\mu} \leftarrow \hat{\mu} - \Gamma B^T P(x - x') \Delta t$ 
10:   $t \leftarrow t + \Delta t$ 
11: end while
12: Return  $x, \hat{\mu}, u$ 

```

Представлений алгоритм, де ε – заданий малий поріг, дозволяє систематично реалізувати чисельне рішення задачі контролю, забезпечуючи ефективну стабілізацію технічних систем в умовах хаотичної поведінки. Запропонований підхід характеризується чіткою структурою, високою обчислювальною ефективністю та адаптивною здатністю враховувати можливі невизначеності початкових умов і параметричні збурення. Це робить його придатним для широкого кола задач із забезпечення надійності складних технічних систем.

9. Приклад застосування в технічних системах. Для практичного підтвердження ефективності запропонованого алгоритму контролю хаотичної динаміки необхідно провести його тестування на реальних даних, що демонструють нелінійні та потенційно хаотичні властивості. Таким об'єктом дослідження є відкритий набір даних «Gas Sensor Array: Low-Concentration» з репозиторію UCI Machine Learning Repository, який містить часові ряди вимірювань масиву газових сенсорів у відповідь на низькі концентрації летких органічних сполук. Дані характеризуються суттєвою нелінійністю, чутливістю до початкових умов і параметричних змін, що робить їх оптимальним кейсом для валідації в умовах складної динаміки.

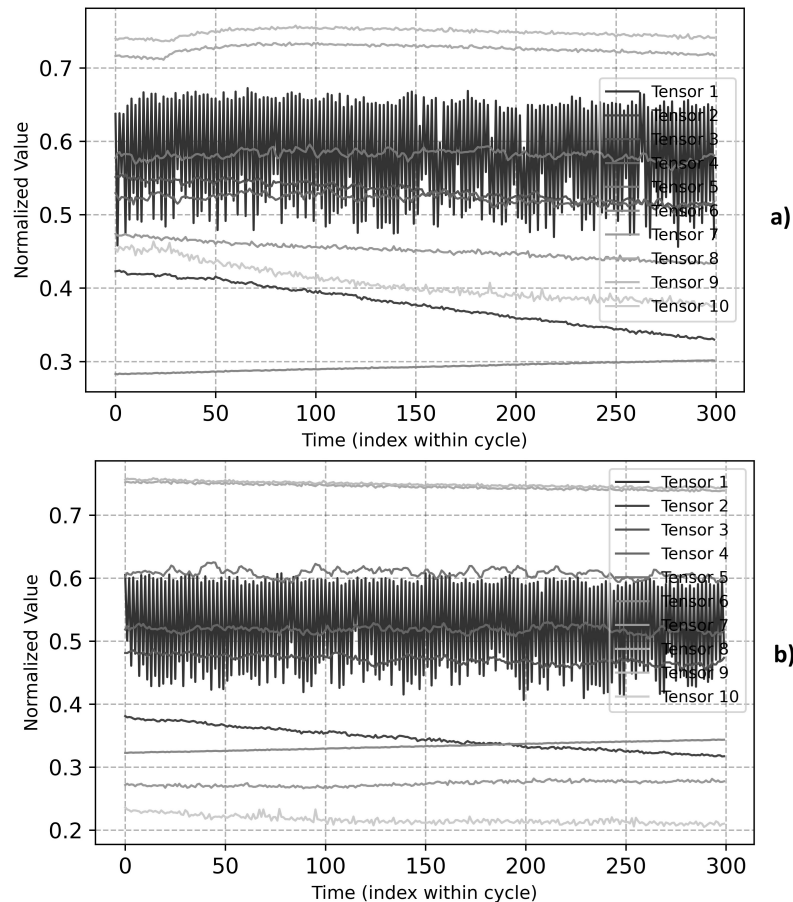


Рис. 1. Динаміка сигналів до (а) і після (б) застосування адаптивного методу контролю

Результати, представлені на рисунках 1(а) і 1(б), демонструють чітке підтвердження ефективності запропонованого адаптивного методу контролю ха-

отичної динаміки. На рисунку 1(a) спостерігається значна варіабельність та нестабільність сигналів сенсорних елементів, що характерно для хаотичної поведінки технічних систем. Після застосування розробленого методу, на рисунку 1(b), помітне зменшення коливань, стабілізація показників сенсорів та суттєве зниження амплітуди нестійких флуктуацій. Це підтверджує, що метод адаптивного контролю забезпечує підвищення прогнозованості, стабільності та надійності роботи технічних систем в умовах складної хаотичної динаміки.

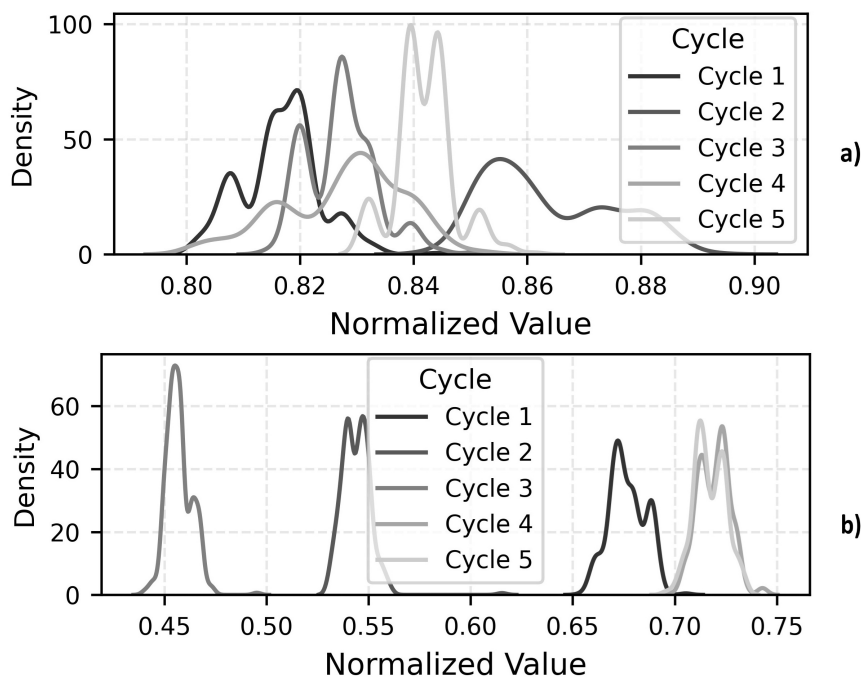


Рис. 2. Вплив адаптивного контролю на характер розподілу сенсорних даних

Проведений порівняльний аналіз розподілів сигналів до та після застосування запропонованого адаптивного методу контролю хаотичної динаміки свідчить про його ефективність та практичну корисність. На рисунку 2(a) спостерігається складний, багатомодальний та неоднорідний розподіл даних, який відповідає нестабільній і хаотичній динаміці. Після використання методу адаптивного контролю, результати зображені на рисунку 1(b), розподіл став більш чітким, зменшилась кількість мод, він набув компактнішого характеру, що свідчить про перехід системи до режиму, близького до нормального розподілу. Це підтверджує ефективність адаптивного контролю у стабілізації сигналів та суттєве підвищення прогнозованості й надійності технічних систем.

10. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті розглянуто математично обґрунтований підхід до підвищення надійності технічних систем шляхом контролю хаотичної динаміки. Побудовано загальну нелінійну модель системи з потенційно хаотичною поведінкою, формалізовано вплив хаосу на функцію надійності, а також поставлено та розв'язано задачу керування з використанням модифікованого адаптивного зворотного зв'язку. Запропонований метод забезпечує асимптотичну стабілізацію стану системи в околі заданої рівноваги за рахунок динамічного коригування параметрів керування відповідно до поведінки системи в реальному часі. Побудовано алгоритмічну

реалізацію запропонованого контролю у вигляді чіткої послідовності інтегрування станів, розрахунку керуючих сигналів та оновлення адаптивних оцінок параметрів. Проведено тестування алгоритму на відкритому наборі даних Gas Sensor Array: Low-Concentration з репозиторію UCI. Результати чисельного моделювання підтвердили ефективність методу: після застосування адаптивного контролю спостерігається стабілізація часових рядів сенсорних сигналів, зменшення амплітуди флуктуацій та впорядкування структури розподілу даних. Зокрема, було зафіксовано трансформацію складної та нерівномірної динаміки до передбачуваного стану з ознаками нормальності розподілу. Це безпосередньо свідчить про підвищення надійності технічної системи, що функціонує в умовах внутрішньої або зовнішньої нестійкості. Запропонований підхід може бути адаптований для широкого спектра складних систем, де виникає необхідність контролю й стабілізації хаотичних процесів, зокрема у сенсорних мережах, роботизованих системах, енергетиці та автоматизованому виробництві.

11. Подяки. Робота виконана в рамках науково-дослідної теми «Розробити методи моделювання процесів цільового управління складними інформаційними багатокомпонентними системами різного призначення» (номер державної реєстрації 0123U100754) Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова (НАН) України.

Список використаної літератури

1. Buts V., Kuzmin V. Chaotic regimes generated by special points and singular solutions. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2024. Vol. 5, Issue 153. P. 161–165. DOI: <https://doi.org/10.46813/2024-153-161>
2. Zhao Z., Lv G., Xu Y., Lin Y., Wang P., & Wang X. Enhancing ground source heat pump system design optimization: A stochastic model incorporating transient geological factors and decision variables. *Renewable Energy*. 2024. Vol. 225. P. 120279. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.120279>
3. Bouadi M., Jia B., Jiang R., Li X., & Gao Z. Stochastic factors and string stability of traffic flow: Analytical investigation and numerical study based on car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.09.007>
4. Zhang J., Karimireddy S. P., Veit A., Kim S., Reddi S. J., Kumar S., & Sra S. Why are Adaptive Methods Good for Attention Models? *arXiv: Optimization and Control*. 2020. Vol. 33. P. 15383–15393.
5. Rackauckas C., & Nie Q. Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*. 2017. Vol. 22, Issue 7. P. 2731–2761. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017133>
6. Симонов Д. І., Заїка Б. Ю. Моделювання управління складними інформаційними багатокомпонентними системами. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2024. Т. 44, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174)
7. Symonov D., Symonov Y. Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Scientific Journal «Mathematical Modeling»*. 2024. Vol. 1, Issue 50. P. 57–63. DOI: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(50\)2024.304943](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943)
8. Yaqoob U., Younis M. I. Chemical Gas Sensors: Recent Developments, Challenges, and the Potential of Machine Learning—A Review. *Sensors (Basel, Switzerland)*. 2021. Vol. 21. P. 2877. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21082877>
9. Tian F., Zhao L., & Deng S. Gas sensor array low-concentration [Dataset]. *UCI Machine Learning Repository*. 2023. DOI: <https://doi.org/10.24432/C5CK6F>
10. Wolf A., Swift J., Swinney H. L., & Vastano J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985. Vol. 16. P. 285–317. DOI:

- [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
11. Das S., Green J. R. Spectral bounds on the entropy flow rate and Lyapunov exponents in differentiable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2024. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad8f06>
 12. Doganaksoy N. Quality and Reliability of Technical Systems: Theory, Practice, Management. *Technometrics*. 1999. Vol. 41. P. 171–172. DOI: <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485644>
 13. Ткачук А., Мошноріз М. Математична модель оцінки надійності для діагностування технічного стану електротехнічних комплексів розподілених систем водопостачання. *Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки*. 2024. Т. 333, № 2. С. 428–432. DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-67>

Symonov D. I. Identification and control of chaotic processes in complex technical systems.

This article presents a generalized mathematical approach to the identification and adaptive control of chaotic processes in nonlinear engineering systems with random parameters. The study addresses the problem of stabilizing systems characterized by high sensitivity to initial conditions and stochastic influences, which is of current interest in modern applied mathematics and engineering. A nonlinear stochastic model of chaotic dynamics is constructed, and the impact of chaos on the reliability indicators of technical systems is formalized. An adaptive feedback-based control method is also developed. The paper provides an algorithmic implementation of the proposed method and demonstrates its validation using real data from gas sensor systems. The results indicate a substantial improvement in stability, predictability, and reliability under complex dynamic conditions. The proposed method can be effectively applied in robotics, sensor networks, energy systems, and automated control systems, ensuring the stabilization and control of nonlinear operating modes under parametric and stochastic uncertainties.

Keywords: chaotic processes, nonlinear systems, system reliability, chaos control, adaptive control law.

References

1. Buts, V., & Kuzmin, V. (2024). Chaotic regimes generated by special points and singular solutions. *Problems of Atomic Science and Technology*, 5(153), 161–165. <https://doi.org/10.46813/2024-153-161>
2. Zhao, Z., Lv, G., Xu, Y., Lin, Y., Wang, P., & Wang, X. (2024). Enhancing ground source heat pump system design optimization: A stochastic model incorporating transient geological factors and decision variables. *Renewable Energy*, 225, 120279. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.120279>
3. Bouadi, M., Jia, B., Jiang, R., Li, X., & Gao, Z. (2022). Stochastic factors and string stability of traffic flow: Analytical investigation and numerical study based on car-following models. *Transportation Research Part B: Methodological*. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2022.09.007>
4. Zhang, J., Karimireddy, S. P., Veit, A., Kim, S., Reddi, S. J., Kumar, S., & Sra, S. (2020). Why are Adaptive Methods Good for Attention Models? *arXiv: Optimization and Control*, 33, 15383–15393.
5. Rackauckas, C., & Nie, Q. (2017). Adaptive methods for stochastic differential equations via natural embeddings and rejection sampling with memory. *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*, 22(7), 2731–2761. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017133>
6. Symonov, D. I., & Zaika, B. Y. (2024). Modeling the management of complex information multicomponent systems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 44(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.44(1).168-174) [in Ukrainian].
7. Symonov, D., & Symonov, Y. (2024). Methods for selecting models of functioning of multicomponent information and environmental systems. *Scientific Journal "Mathematical Modeling"*, 1(50), 57–63. [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(50\)2024.304943](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(50)2024.304943)

8. Yaqoob, U., & Younis, M. I. (2021). Chemical Gas Sensors: Recent Developments, Challenges, and the Potential of Machine Learning—A Review. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 21, 2877. <https://doi.org/10.3390/s21082877>
9. Tian, F., Zhao, L., & Deng, S. (2023). Gas sensor array low-concentration [Dataset]. *UCI Machine Learning Repository*. <https://doi.org/10.24432/C5CK6F>
10. Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16, 285–317. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)
11. Das, S., Green, J. R. (2024). Spectral bounds on the entropy flow rate and Lyapunov exponents in differentiable dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad8f06>
12. Doganaksoy, N. (1999). Quality and Reliability of Technical Systems: Theory, Practice, Management. *Technometrics*, 41, 171–172. <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485644>
13. Tkachuk, A., & Moshnoriz, M. (2024). Mathematical model of reliability assessment for diagnosing the technical condition of electrical engineering complexes in distributed water supply systems. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*, 333(2), 428–432. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-67>

Одержано 30.03.2025

УДК 004.25

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).285-293](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).285-293)**П. В. Тарнавський¹, В. М. Білецький²**

¹ Львівський національний університет ім. І. Франка,
аспірант кафедри прикладної математики
petro.tarnavskiy@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3265-8168>

² Львівський національний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
vasyl.biletskyu@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3246-9894>

ВИКОРИСТАННЯ ВЕЛИКИХ СТОРІНОК ПАМ'ЯТІ ДЛЯ ПОЛІПШЕННЯ РОБОТИ СУЧАСНИХ ОПЕРАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Здійснено огляд сучасних технологій і викликів, пов'язаних із використанням великих сторінок пам'яті в обчислювальних системах. Розглянуто вплив великих сторінок на роботу *буферів асоціативної трансляції* (БАТ) та ефективність керування пам'яттю. Висвітлено основні проблеми, пов'язані з фрагментацією пам'яті, зростанням ймовірності БАТ промахів і зниженням продуктивності за високого рівня багатозадачності. Згадано сумісність великих сторінок із програмним забезпеченням та у сучасних дистрибутивах Linux.

Ключові слова: оперативна пам'ять, керування пам'яттю, буфер асоціативної трансляції, великі сторінки пам'яті, фрагментація пам'яті.

1. Вступ. З моменту появи *електронно-обчислювальних машин* (ЕОМ) розпочались перегони щодо збільшення їхньої продуктивності. Однією з ключових подій цього процесу стало відкриття, зроблене Гордоном Муром 1965 року, яке згодом отримало назву "закон Мура". Він передбачив, що кількість транзисторів на інтегральних схемах подвоюватиметься кожні два роки, забезпечуючи експоненціальне зростання обчислювальних можливостей. Це спостереження стало рушійною силою швидкого розвитку напівпровідникових технологій.

Однак, поряд із значними успіхами у сфері розробки процесорів, прогрес у розвитку оперативної пам'яті не демонструє такої ж динаміки. Адже, відсутність експоненціального зростання у цій галузі створюватиме суттєвий розрив між швидкістю процесорів і можливостями роботи оперативної пам'яті. Якщо така тенденція зберігатиметься, то оперативна пам'ять у майбутньому може стати головним обмежувальним фактором продуктивності обчислювальних систем.

Сучасні системи використовують механізм сегментації пам'яті, де вона поділена на серію безперервних блоків — сторінок пам'яті. Здебільшого *операційні системи* (ОС) застосовують стандартний розмір сторінок у 4 КБ під час виконання процесів.

Зміна розміру сторінок може стати одним із потенційних рішень для зменшення розриву між швидкістю процесорів і можливостями оперативної пам'яті. Використання великих сторінок пам'яті (наприклад, 2 МБ або більше) даватиме змогу зменшити кількість операцій зі співставлення адрес і знижуватиме

витрати на керування пам'яттю, що, своєю чергою, поліпшить загальну продуктивність системи. Такий підхід може значно підвищити ефективність використання пам'яті в умовах стрімкого зростання обчислювальних потужностей процесорів.

2. Віртуальна пам'ять. Віртуальна пам'ять — це підхід до керування пам'яттю, який створює абстракцію між фізичною пам'яттю та процесами, що виконуються у системі. Він дає змогу кожному процесу сприймати фізичну пам'ять як власний суцільний адресний простір (рис. 1), ізольований від адресних просторів інших процесів. Для роботи цього підходу необхідно вміти співставляти віртуальні адреси, згенеровані процесами, у фізичні адреси комп'ютерної пам'яті.

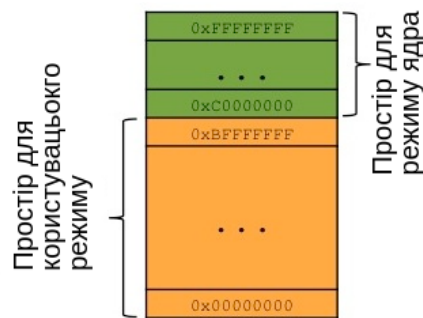


Рис. 1. Приклад адресного простору для процесу

Для реалізації віртуальної пам'яті зазвичай використовують механізм сторінкової організації, який поділяє віртуальний адресний простір та фізичну пам'ять на блоки фіксованого розміру, що називають сторінками, стандартного розміру 4 КБ. При роботі із пам'яттю ОС виконує доступ до цілих сторінок пам'яті, а не послідовно байт за байтом.

Трансляція віртуальних адрес у фізичні здійснено за допомогою модуля керування пам'яттю (МКП), апаратного блоку процесора, що реалізує це перетворення. МКП використовує спеціальні таблиці відповідностей — таблиці сторінок, які зберігають співвідношення між віртуальними сторінками і фізичними фреймами. Операційна система створює та підтримує ці таблиці, надавши кожному процесу окремий віртуальний адресний простір і, таким чином, ізолює його пам'ять від пам'яті інших процесів.

Основними перевагами віртуальної пам'яті є:

- Ізоляція та безпека пам'яті — кожен процес працює у власному адресному просторі, що унеможливорює випадковий або навмисний доступ до пам'яті інших процесів.
- Ефективне використання пам'яті — оскільки у пам'яті збережено лише активні сторінки, система може одночасно запускати більше програм або працювати з більшими обсягами даних.
- Спрощене управління пам'яттю — віртуальна пам'ять забирає необхідність для програм контролювати розподіл пам'яті, ці програми працюють у своїх ізольованих просторах.

Сучасні МКП додатково до таблиць сторінок використовують спеціальний кеш — *буфер асоціативної трансляції* (БАТ). Цей буфер зберігає інформацію

про останні співставлення сторінок, що дає змогу значно прискорити процес доступу до пам'яті.

Операційна система перевіряє, чи в БАТ є відповідний запис щодо фізичної адреси, яка відповідає віртуальній адресі, до якої певний процес пробує доступитись. Якщо такий запис існує, то це називають БАТ влучанням: процесор отримує доступ до фізичної пам'яті без затримок. За відсутності запису, відбувається БАТ промах. У цьому випадку ОС використовує таблиці сторінок (див. рис. 2), щоб знайти відповідну фізичну адресу. Цей процес повільніший, порівняно з БАТ влучанням, оскільки потребує додаткового часу на пошук відповідності у таблиці сторінок.

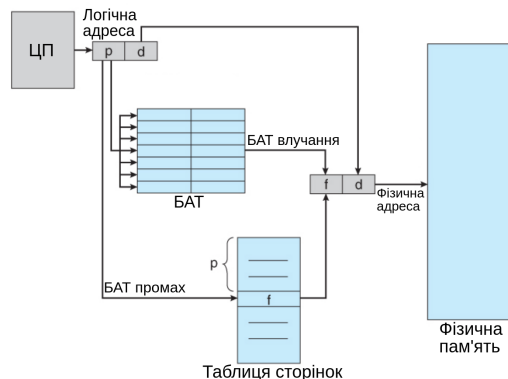


Рис. 2. Схема обробки трансляції адрес

3. Великі сторінки пам'яті. Як зазначалось вище, стандартні сторінки мають розмір 4 КБ, ідея великих сторінок пам'яті полягає у використанні сторінок більшого розміру, зазвичай 2 МБ або 1 ГБ. Великі сторінки використовують поряд зі стандартними сторінками. Такий підхід дозволить ефективніше використовувати обмежений розмір БАТ (див. рис. 3), так як один запис для великої сторінки у БАТ буде містити інформацію про більший об'єм фізичної пам'яті.

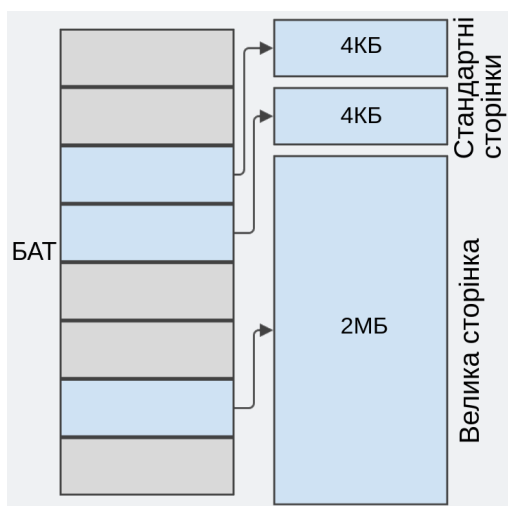


Рис. 3. Трансляція віртуальних адрес

Згідно з дослідженнями, у системах із стандартним розміром сторінки, часті БАТ промахи можуть спричинити значне погіршення продуктивності, що сягатиме до 50 % часу виконання процесу [1–3]. Адже звернення до таблиці сторінок для отримання фізичної адреси може бути у десятки разів повільнішим порівняно з роботою з кешованими даними у БАТ. Зі зростанням обсягу пам'яті в сучасних системах, зазнає і збільшення кількість сторінок, що, своєю чергою, підвищує ймовірність БАТ промахів та сповільнює пошук відповідного запису у таблиці сторінок. Зрештою, операції з обробки стандартних сторінок стануть ключовим місцем, що займає значний обсяг часу та ресурсів у сучасних системах.

Одним із рішень цієї проблеми є використання великих сторінок пам'яті. Великі сторінки, (розміром 2 МБ або більше) даватимуть змогу зменшити загальну кількість сторінок у системі, що знизить навантаження на БАТ і зменшить ймовірність промахів у більшості тестів продуктивності (наприклад, REDIS та CANNEAL). Детальнішу статистику для різних тестів можна переглянути на рис. 4. Також завдяки меншій кількості записів у таблицях сторінок, система може швидше виконувати трансляцію адрес, що доволі важливо у випадках роботи з великими обсягами даних, наприклад, у базах даних або при обробці даних для моделей глибокого навчання.

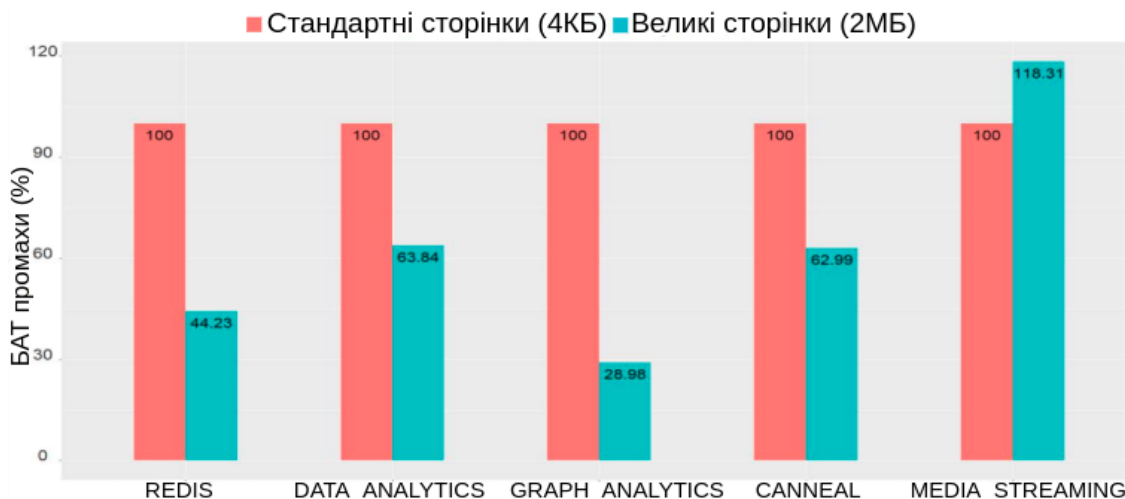


Рис. 4. Вплив великих сторінок на БАТ промахи в порівнянні зі стандартними сторінками [11]

Проте використання великих сторінок також має свої обмеження. Наприклад, великим сторінкам потрібно більше безперервного простору у фізичній пам'яті, що може спричинити фрагментацію пам'яті. Це може стати проблемою для довготривалої роботи систем, передусім в умовах активної багатозадачності, коли часто звільняють і перерозподіляють блоки пам'яті. Крім того, не всі програмні продукти і драйвери оптимізовані для роботи з великими сторінками, що може спричинити погіршення їхньої продуктивності або проблеми із сумісністю.

4. Виклики та обмеження використання великих сторінок пам'яті. Попри те, що великі сторінки пам'яті можуть значно поліпшити ефективність

роботи буферів асоціативної трансляції та зменшити ймовірність промахів, їхнє використання також спричиняє низку викликів та обмежень. Сучасні методи та алгоритми керування віртуальною пам'яттю розробляли переважно для роботи зі сторінками стандартного розміру і не враховували специфіку великих сторінок, що вимагає створення нових методів керування, таких як удосконалені механізми зміни контексту, ефективні стратегії розподілу та звільнення пам'яті.

Вплив на продуктивність під час зміни контексту

При перемиканні процесів ОС повинна повністю або частково очищувати вміст БАТ, оскільки записи, актуальні для попереднього процесу, стають неактуальними для нового. Використання застарілих записів у БАТ може спричинити серйозні помилки доступу до пам'яті, отож для вирішення цієї проблеми треба або повністю очищати буфер, або ретельно керувати його записами.

Оскільки часте повне очищення записів БАТ може суттєво вплинути на продуктивність системи, передусім у багатозадачних системах із високою частотою зміни контексту, то часто використовують ідентифікатор адресного простору процесу, що дає змогу розрізняти записи, які належать різним процесам. Це сприяє зменшенню частоти повного очищення БАТ при перемиканні контексту [4].

Використання БАТ з великими сторінками пам'яті робить управління цими записами складнішим. Оскільки запис для великих сторінок охоплює більший обсяг пам'яті та система повинна ретельніше стежити за актуальністю записів під час зміни контексту. Це може суттєво зменшувати продуктивність, насамперед у випадках, коли кількість перемикань контекстів є значною. Отже, ефективність роботи великих сторінок значною мірою залежить від частоти зміни контекстів у системі та ефективності керування БАТ при цьому.

Фрагментація пам'яті

У багатозадачних середовищах, де завдання постійно зазнають зміни, звільняють і перерозподіляють різні блоки пам'яті, виникає проблема фрагментації — ситуації коли для великої сторінки необхідно мати в наявності великий безперервний блок фізичної пам'яті, що не завжди можливо. Якщо система не може знайти такий блок пам'яті, то вона може виділити звичайні сторінки замість великих, що знизить ефективність роботи і спровокує зростання ймовірності промахів БАТ.

Зменшення продуктивності для певних робочих навантажень

Кожен запис у БАТ для великих сторінок охоплює більший діапазон віртуальних адрес, що дає змогу зменшити кількість записів у БАТ. Якщо ж робоче навантаження процесу пробує досягти до різних ділянок, розкиданих по всьому адресному просторі, то кількість унікальних сторінок, які можуть бути закешовані, значно зменшиться. У наслідок цього може відбутись зменшення продуктивності, оскільки доступ до кеш-пам'яті є швидшим ніж до оперативної пам'яті.

Різноманіття розмірів великих сторінок

Більшість сучасних систем, що використовують великі сторінки, комбінують стандартні сторінки з великими сторінками розміром 2 МБ і 1 ГБ. Це дозволяє гнучко керувати ресурсами пам'яті, але водночас потребує складних адаптивних алгоритмів, які здатні автоматично підбирати оптимальний розмір сторін-

ки для кожного завдання. Такі алгоритми повинні не лише перемикатися між розмірами сторінок відповідно до поточного навантаження, але й враховувати доступні ресурси та специфіку запитів пам'яті.

Реалізація таких алгоритмів є непростим завданням, насамперед у використанні сторінок різного розміру, що значно ускладнює керування пам'яттю та підвищує ризик фрагментації. Передусім це важливо у багатозадачних середовищах, де часто змінюються умови розподілу пам'яті, і адаптивні алгоритми мають швидко реагувати на зміни. Проте розробка таких алгоритмів і їх впровадження на практиці є досить повільним процесом через високу складність і значні вимоги до обсягу пам'яті та обчислювальної потужності для їхньої підтримки.

Через усі ці виклики деякі результати досліджень [5,6] засвідчують, що використання великих сторінок пам'яті не завжди є виправданим і може спричинити зниження загальної продуктивності. У таких випадках рекомендовано відключення цього механізму.

5. Можливості використання великих сторінок пам'яті.

Підходи до використання великих сторінок пам'яті

Підтримка великих сторінок у сучасних дистрибутивах Linux реалізована за допомогою механізму *прозорих великих сторінок* (ПВС), що дає змогу значно спростити їхнє використання для програмного забезпечення [7,8]. Прозора підтримка великих сторінок є основним способом виділення великих сторінок у Linux і забезпечує автоматичне керування цими сторінками на рівні ядра. Такий підхід не потребує жодних змін у програмному коді застосунків.

Під час роботи ОС спочатку виділяє пам'ять для процесів у вигляді стандартних сторінок. За оптимальних умов ядро автоматично підвищує послідовність із 512 таких сторінок до однієї великої сторінки, або ж, за потреби, виконує зворотний процес і розбиває велику сторінку на менші. Такий підхід дає змогу значно підвищити продуктивність процесів, використовуючи можливості великих сторінок без потреби змін з боку користувача.

Динамічні розподільники пам'яті

Програми можуть працювати з великими сторінками і без механізму ПВС, а за допомогою низькорівневих функцій, які дають змогу системі виділити сторінки вказаного у програмі розміру. Наприклад, використання функцій `mmap` та `madvise` з прапорцями `MAP_HUGETLB` і `MADV_HUGETLB`, дає змогу отримати великі сторінки пам'яті. Проте, такий підхід є доволі складним і потребує написання додаткового коду з використанням цих низькорівневих функцій.

Більш зручним варіантом використання великих сторінок без ПВС є динамічні розподільники пам'яті, або алокатори. Наприклад, стандартна бібліотека C містить розподільник `malloc`, який забезпечує базове керування пам'яттю. Окрім нього, існують спеціалізовані алокатори, налаштовані на ефективне управління великими блоками пам'яті, серед яких популярні `jemalloc` [9] і `tcmalloc` [10]. Ці алокатори часто використовують для роботи з великими сторінками, проте програмний код потрібно буде змінювати так як вони не забезпечують прозорий підхід. Існують також алокатори, що підтримують прозоре використання великих сторінок, однак їх застосування обмежене, і вони ще не набули значної популярності в обчислювальних системах.

Алокатори дають змогу використовувати однакові алгоритми розподілу пам'яті у різних операційних системах. Для впровадження нового алгоритму достатньо замінити лише динамічний розподільник, без необхідності змін у самій системі. Варто також зазначити, що реалізація алгоритмів безпосередньо в ОС є складнішим завданням, ніж їх інтеграція в алокатор, через особливості низькорівневої архітектури ОС.

Особливості використання великих сторінок пам'яті

Здебільшого сучасні системи, що використовують великі сторінки працюють зі звичайними та великими сторінками розміру 2 МБ, оскільки вони є найефективнішими в процесах з динамічним використанням пам'яті, адже 1 ГБ — здебільшого занадто великий розмір для користувацьких структур даних і через це програми можуть використовувати велику кількість надлишкової пам'яті.

Як уже зазначено вище, поліпшення від використання великих сторінок залежить від того, як процеси виконують доступ до пам'яті та наскільки часто відбувається зміна контексту (див. рис. 4 та рис. 5). Існують певні види навантажень, де і кількість БАТ промахів менша, і час виконання менший. Існують і такі, де лише кількість промахів менша, але по часу виконання співмірно. Проте є такі завдання, де не вдалось зменшити кількість БАТ промахів, а кількість і час виконання, зросли. З огляду на те, що для більшості навантажень відсоток БАТ промахів суттєво зменшився, майбутнє зростання обсягів пам'яті та швидкодії процесорів може призвести до ще більшого скорочення часу виконання.

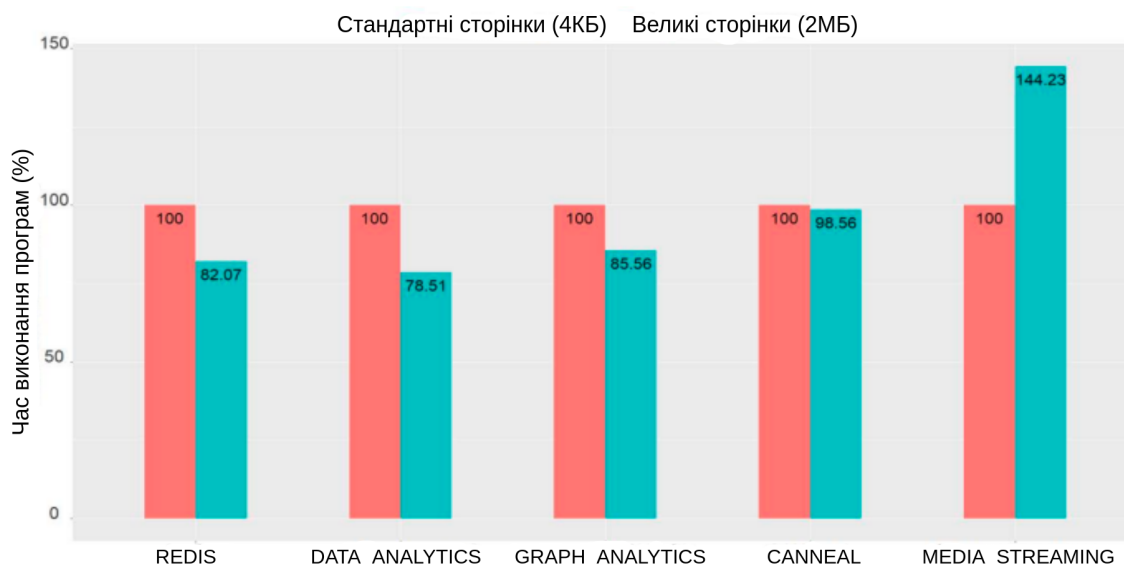


Рис. 5. Вплив великих сторінок на швидкість у порівнянні зі стандартними сторінками [11].

6. Висновки. Використання великих сторінок не завжди ефективно унаслідок впливу фрагментації, недосконалості алгоритмів керування пам'яттю та інші проблемні аспекти цього підходу. Отож подальші дослідження у цій сфері необхідно спрямувати на розробку адаптивних алгоритмів розподілу та керування великими сторінками, які зменшуватимуть вплив фрагментації та полі-

пшуватимуть загальну продуктивність системи.

Список використаної літератури

1. Basu A. et al. Efficient Virtual Memory for Big Memory Servers. *Proceedings of the 40th Annual International Symposium on Computer Architecture*. 2013. Vol. 41, No. 3. pp. 237–248. DOI: <https://doi.org/10.1145/2508148.2485943>
2. Bhattacharjee A. Large-reach Memory Management Unit Caches. *Proceedings of the 46th Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture*. 2013. pp. 383–394. DOI: <https://doi.org/10.1145/2540708.2540741>
3. Karakostas V. et al. Redundant Memory Mappings for Fast Access to Large Memories. *Proceedings of the 42nd Annual International Symposium on Computer Architecture*. 2015. Vol 43, No. 3S. pp. 66–78. DOI: <https://doi.org/10.1145/2872887.2749471>
4. Awad A. et al. Avoiding TLB Shootdowns Through Self-Invalidating TLB Entries. *The Proceedings of the 26th International Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques*. Portland : OR, USA, 09–13 September 2017. pp. 273–287. DOI: <https://doi.org/10.1109/PACT.2017.38>
5. Kwon Y. et al. Coordinated and Efficient Huge Page Management with Ingens. *The Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. 02 November 2016. pp. 705–721. DOI: <https://dl.acm.org/doi/10.5555/3026877.3026931>
6. Panwar A., Prasad A., Gopinath K. Making Huge Pages Actually Useful. *The Proceedings of the International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems*. 2018. pp. 679–692. DOI: <https://doi.org/10.1145/3173162.3173203>
7. Corbet J. Transparent Hugepages. 2009. URL: <https://lwn.net/Articles/359158> (date of access: 15.02.2025).
8. Navarro J. et al. Practical, transparent operating system support for superpages. *USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. 2002. Vol 36, No. SI. pp. 89–104. DOI: <https://doi.org/10.1145/844128.844138>
9. Evans J. A Scalable Concurrent malloc(3) Implementation for FreeBSD. 2006. URL: <https://www.bsdcn.org/2006/papers/jemalloc.pdf> (date of access: 15.02.2025).
10. Hunter A. et al. Beyond malloc efficiency to fleet efficiency: a hugepage-aware memory allocator. *The Proceedings of the 15th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. 2021. URL: <https://www.usenix.org/system/files/osdi21-hunter.pdf> (date of access: 15.02.2025)
11. Choi G. et al. HPanal: A Framework for Analyzing Tradeoffs of Huge Pages. *The 34th ACM/SIGAPP Symposium on Applied Computing*. 2019. pp. 1438–1443. DOI: <https://doi.org/10.1145/3297280.3297425>

Tarnavskyi P. V., Biletsky V. M. Using Large Pages to Improve the Performance of Modern Operating Systems.

A review of current technologies and challenges related to the use of huge memory pages in computing systems. The impact of such pages on the operation of Translation Lookaside Buffers (TLB) and memory management efficiency is discussed. The main issues related to memory fragmentation, increased probability of TLB misses, and decreased performance under high multitasking conditions are outlined. The article also covers the compatibility of huge pages with software and the usage of them in modern Linux distributions.

Keywords: random access memory, memory management, translation lookaside buffer, huge memory pages, memory fragmentation.

References

1. Basu, A., Gandhi, J., Chang, J., Hill, M. D., Swift, M. M., & Venkat, A. (2013). Efficient virtual memory for big memory servers. In *Proceedings of the 40th Annual International Symposium on Computer Architecture*, 41(3), 237–248. <https://doi.org/10.1145/2508148.2485943>
2. Bhattacharjee, A. (2013). Large-reach memory management unit caches. In *Proceedings of the 46th Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture*, 383–394. <https://doi.org/10.1145/2540708.2540741>

3. Karakostas, V., Alipour, M., Chisnall, D., Jones, T. M., & Watson, R. N. M. (2015). Redundant memory mappings for fast access to large memories. In *Proceedings of the 42nd Annual International Symposium on Computer Architecture*, 43(3S), 66–78. <https://doi.org/10.1145/2872887.2749471>
4. Awad, A., Kelley, K., & Falsafi, B. (09–13 September, 2017). Avoiding TLB shootdowns through self-invalidating TLB entries. In *Proceedings of the 26th International Conference on Parallel Architectures and Compilation Techniques*. Portland: OR, USA, 273–287. <https://doi.org/10.1109/PACT.2017.29>
5. Kwon, Y., Miedl, E., & Swift, M. M. (02 November, 2016). Coordinated and efficient huge page management with Ingens. In *Proceedings of the 12th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*, 705–721. <https://dl.acm.org/doi/10.5555/3026877.3026931>
6. Panwar, A., Prasad, A., & Gopinath, K. (2018). Making huge pages actually useful. In *Proceedings of the International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems*. 679–692. <https://doi.org/10.1145/3173162.3173203>
7. Corbet, J. (2009). Transparent hugepages. Retrieved from <https://lwn.net/Articles/359158>
8. Navarro, J., Iyengar, A., McKinley, K. S., & Burger, D. (2002). Practical, transparent operating system support for superpages. In *Proceedings of the USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. 36(SI), 89–104. <https://doi.org/10.1145/844128.844138>
9. Evans, J. (2006). A scalable concurrent malloc(3) implementation for FreeBSD. Retrieved from <https://www.bsdcn.org/2006/papers/jemalloc.pdf>
10. Hunter, A., Schuh, S., Tarjan, D. R., & McElroy, R. (2021). Beyond malloc efficiency to fleet efficiency: A hugepage-aware memory allocator. In *Proceedings of the 15th USENIX Symposium on Operating Systems Design and Implementation*. <https://www.usenix.org/system/files/osdi21-hunter.pdf>
11. Choi, G., Shin, J., Kim, J., & Ryu, J. (2019). HPanal: A framework for analyzing tradeoffs of huge pages. In *Proceedings of the 34th ACM/SIGAPP Symposium on Applied Computing*, 1438–1443. <https://doi.org/10.1145/3297280.3297425>

Одержано 15.02.2025

УДК 004.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).294-304](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).294-304)**В. В. Циганок¹, Я. О. Хроленко²**

¹ Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,
завідувач відділу інтелектуальних технологій підтримки прийняття рішень,
доктор технічних наук, професор
vitaliy.tsyganok@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0821-4877>

² Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,
аспірант
khrolenko.ya.o@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0641-827X>

МЕТОД ПОСЛІДОВНОГО АНАЛІЗУ ВАРІАНТІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ GPT-МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АВТОМАТИЗОВАНОЇ ПЕРЕВІРКИ КОНКУРСНИХ НАУКОВИХ РОБІТ

У статті досліджено новий підхід до автоматизації опрацювання документів конкурсних наукових робіт, який базується на поєднанні методу послідовного аналізу варіантів та спеціалізованих LLM-моделей. Запропонований підхід дозволяє значно оптимізувати процес перевірки поданих матеріалів, зменшити навантаження на експертів і підвищити об'єктивність відбору. Робота містить теоретичне обґрунтування використання методу послідовного аналізу у контексті автоматизованого аналізу відповідності поданих робіт вимогам конкурсу. Методика послідовного аналізу адаптована для перевірки конкурсних робіт. На її основі розроблено структурований алгоритм використання спеціалізованих GPT-моделей як багаторівневих фільтрів, що забезпечує поетапну перевірку відповідності поданих матеріалів установленим вимогам. Описана узагальнена інформаційна модель спеціалізованого GPT для опрацювання документів. Запропонований підхід є гнучким та масштабованим, що дозволяє його легко адаптувати для інших сфер.

Ключові слова: метод послідовного аналізу варіантів, GPT-моделі, конкурс наукових робіт.

1. Вступ. Останні роки принесли значні зміни у сферу студентських академічних конкурсів, що пов'язано з впровадженням нових технологій, зростанням конкуренції та змінами у суспільних і освітніх тенденціях. Ці трансформації сприяють більш ефективній організації конкурсів, покращенню якості оцінювання і підвищенню залученості студентів.

Однак із зростанням кількості учасників та підвищенням вимог до якості оцінювання організатори стикаються з численними викликами. Зокрема, необхідність ефективного управління великими обсягами поданих робіт, організація оперативної взаємодії між усіма учасниками конкурсу, забезпечення об'єктивності оцінювання та прозорості процесів стають критичними факторами.

Хоча на сьогоднішній день багато процесів в процедурі проведення конкурсів автоматизовано, інтеграція цифрових технологій та автоматизація процесів за допомогою інтелектуальних інструментів відкриває нові можливості для оптимізації управління академічними конкурсами.

Дослідження спрямоване на аналіз сучасних підходів до організації та проведення студентських конкурсів та пропонує власну концепцію щодо застосування великих мовних моделей, а саме спеціалізованих GPTs (генеративних попередньо натренованих трансформерів спеціалізованого призначення), для підвищення ефективності конкурсної процедури.

2. Аналіз досліджень і публікацій. Ландшафт академічних конкурсів значно змінився за останні п'ять років, відображаючи зміни в освітніх пріоритетах, технологічний прогрес, соціальні трансформації, зростаючу конкуренцію в академічному середовищі. Академічні конкурси тепер охоплюють широкий спектр галузей, форм проведення і форматів, стають дедалі популярнішими, що вимагає від університетів та організаторів гнучкості в адаптації нових підходів [1].

Аналіз особливостей процедури проведення конкурсів показав, що існує ряд проблем, які потребують вирішення. Конкурси отримують десятки чи сотні заявок, кожна з яких включає анкети, анотації, повні тексти робіт, презентації, рекомендаційні листи тощо. Учасники допускають помилки в анкетах (неправильні дані, пропущені поля), орфографічні, стилістичні чи логічні помилки в текстах робіт. Ручна перевірка документів на відповідність вимогам (формат, обсяг, структура, оформлення літератури) потребує значних часових затрат і часто призводить до помилок через людський фактор. Виявлення плагіату в наукових роботах є складним завданням, особливо якщо організатори не мають доступу до спеціалізованих програм, тому існує ризик пропуску неоригінальних робіт.

Цифровізація значно підвищує ефективність організації академічних конкурсів, оптимізуючи подання, перевірку та оцінювання робіт [2]. Спеціалізовані онлайн-системи забезпечують прозорість, об'єктивність і впровадження нових форм змагань, зокрема колаборативних підходів, які сприяють інтерактивності та обміну знаннями [3]. Автоматизація оцінювання зменшує навантаження на журі, прискорює обробку заявок і підвищує точність оцінки [4]. Застосування штучного інтелекту (ШІ) для оцінювання знань і проєктів, як показано в [5, 6], знижує суб'єктивність, забезпечує послідовність і підтримує об'єктивність, особливо в складних інженерних та комп'ютерних проєктах.

Таким чином, аналіз літератури показує, що на сьогодні існують ефективні методи опрацювання текстових документів, які пропонують сучасні системи ШІ. Проте для реалізації єдиної автоматизованої процедури опрацювання конкурсної документації існує потреба в розробці підходу, який об'єднує можливості ШІ по роботі з текстами, зокрема спеціалізованих GPTs, в єдину технологію покрокового опрацювання документів на основі чітко визначених критеріїв.

3. Виклад основного матеріалу. В основу підходу, що пропонують автори, покладена схема послідовного аналізу та відсіву варіантів. Ця методологія є одним із найзагальніших підходів до розв'язування багатоваріантних задач, а її успішне застосування для розв'язування задач дослідження та проєктування складних систем, що формалізуються в класах моделей математичного програмування великого розміру, має численні підтвердження [7, 8].

Метод послідовного аналізу варіантів базується на поданні процесу пошуку розв'язання багатоваріантної задачі у вигляді багатоступеневої структури, що нагадує структуру складного дослідження. Кожний крок методу пов'язаний з

перевіркою наявності тих чи інших властивостей у підмножини варіантів або окремих варіантів і веде або до безпосереднього скорочення множини варіантів або готує можливість скорочення в майбутньому [9].

З погляду формальної логіки схема послідовного аналізу варіантів є розвитком послідовного аналізу Вальда і зводиться до повторення послідовності дій

- розбиття множини варіантів рішень і задачі на сімейство підмножин, кожна з яких має додаткові специфічні властивості;
- використання цих специфічних властивостей для пошуку логічних протиріч в описі окремих підмножин;
- виключення з подальшого розгляду тих підмножин варіантів, в описі яких є логічні протиріччя.

Для вирішення конкретної задачі на основі її теоретичного і практичного аналізу необхідно формалізувати ті властивості, якими повинен володіти шуканий варіант. Потім потрібно виявити якомога більшу кількість ознак, які дають змогу встановити, чи є цей варіант шуканим. Серед них обирають ті, що легко перевіряються, а також ті, які притаманні якомога більшій кількості варіантів одночасно. Надалі вибір обчислювальної схеми полягає в заданні раціонального порядку перевірки ознак, що дають змогу відсіяти неконкурентоспроможні варіанти і знайти оптимальний [9].

Таким чином, методика ПАВ базується на такому підході до формування множини можливих рішень і встановлення критеріїв їх оцінки, який дозволяє вилучати непридатні варіанти ще на ранніх етапах без необхідності їх повного розгляду. Відбір здійснюється поступово, у той момент, коли виявляється невідповідність критеріям, що дозволяє уникнути зайвих обчислень. Оскільки разом із непридатним варіантом автоматично відсіюються всі його можливі продовження, це суттєво скорочує обсяг необхідних розрахунків.

Методика ПАВ може бути використана для реалізації процедури організації та проведення конкурсів, адже до робіт, що подаються на конкурс висувається ряд вимог, що можуть розглядатись як критерії відсіву варіантів, якщо розглядати конкурсний процес через призму методології ПАВ.

Проведений авторами аналіз сучасних технологій організації та проведення конкурсів [10] показав, що для більшості конкурсів, що розглядають наукові творчі роботи або проекти, характерна уніфікована технологія проведення конкурсу.

Розглянемо процедуру проведення конкурсу на прикладі Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт з галузей знань і спеціальностей [11]. Узагальнена процедура конкурсу передбачає декілька ключових етапів (рис.1).

1й етап «Подання робіт». Студенти подають свої наукові роботи, дотримуючись встановлених умов та термінів.

2й етап «Первинна перевірка». Роботи перевіряються на відповідність формальним вимогам, таким як відповідність тематиці конкурсу, обсяг, оформлення, перевірка на плагіат та інші. Роботи, що не відповідають вимогам конкурсу, відхиляються і до оцінювання експертами/рецензентами не допускаються.

3й етап «Рецензування». Експерти оцінюють кожну роботу за критерійною базою конкурсу та здійснюють їх рецензування. Кожний конкурс, очевидно,



Рис. 1. Узагальнена процедура проведення конкурсів.

має власні критерії оцінки, що враховують його специфіку, спеціальність, направленість.

За результатами рецензування формується рейтинговий список наукових робіт (далі — рейтинговий список), який оприлюднюється.

Конкурсна комісія на підставі рецензій приймає рішення щодо визначення наукових робіт, автори яких запрошуються на підсумкову науково-практичну конференцію.

4й етап «Презентація робіт». На підсумковій науково-практичній конференції студенти презентують свої дослідження, відповідають на запитання, надають пояснення.

5й етап «Оцінювання та визначення переможців». Журі оцінює роботи та презентації, визначаючи переможців.

6й етап «Нагородження переможців». Оголошення результатів та вручення дипломів або нагород.

Етап первинної перевірки конкурсних документів, по суті, є своєрідним «відсіювачем» робіт, що порушують вимоги конкурсу. Саме на цьому етапі доречним є використання сучасних інтелектуальних інструментів.

На сьогоднішній день великі мовні моделі (LLM) є одним із ключових досягнень у сфері штучного інтелекту, оскільки вони здатні вирішувати широкий спектр задач: від автоматизації рутинних текстових процесів до проведення складного аналізу даних. Вони базуються на архітектурі глибоких нейронних мереж, зокрема трансформерів, і дозволяють III моделювати складні мовні структури, відтворювати контекст та взаємодіяти з користувачем у природний спосіб.

Великі мовні моделі можуть застосовуватись для обробки тексту, автоматизації завдань і підвищення продуктивності в різних сферах. Використання LLM дозволяє значно більш ефективно вирішувати завдання автоматизації процесів, що забезпечує скорочення ручної праці, підвищення швидкості виконання задач включаючи роботу з даними та створення звітності [12, 13]. Великі мовні моделі ефективні в інтелектуальній обробці документів. Це дає можливість автоматично витягувати, аналізувати та узагальнювати інформацію з великих масивів даних, що є особливо важливим у багатьох сферах [14]. Вбудовування LLM у виробничі системи забезпечує підвищення ефективності їх роботи, покращують гнучкість, масштабованість та адаптивність до змінних умов. Вони активно за-

стосовуються в освітніх технологіях [15]. LLM покращують бізнес-процеси завдяки автоматизації управлінських завдань: вони можуть оптимізувати процеси планування ресурсів, управління контрактами та створення аналітичних звітів [16].

З точки зору роботи з документами LLM мають низку переваг, які роблять їх потужними інструментами для обробки тексту, автоматизації завдань і підвищення продуктивності.

Розуміння контексту та семантики дозволяє LLM аналізувати тексти з глибоким урахуванням змісту, а не лише окремих слів чи речень. Це допомагає виявляти приховані взаємозв'язки між ідеями, коригувати логіку тексту та покращувати його узгодженість.

Великі мовні моделі можуть виконувати широкий спектр завдань, від перевірки граматики та стилістики до створення анотацій, резюмування, перекладу та аналізу документів. Це робить їх ефективними у науковій, юридичній, бізнесовій та технічній сферах.

Автоматизація рутинних процесів дозволяє значно скоротити час на редагування та перевірку документів. LLM можуть автоматично формувати текст, коригувати помилки, аналізувати великі обсяги інформації та витягувати з них ключові дані, що особливо корисно при роботі з великими документами.

Ці моделі гнучкі та легкі для адаптації: LLM можна навчати на спеціалізованих наборах даних, що дозволяє їх використовувати для конкретних завдань, таких як контроль правильності оформлення документації чи технічна підтримка.

В процедурі конкурсного відбору є багато задач, пов'язаних з опрацюванням документів: допуск наукових робіт до участі в конкурсі, перевірка супровідної документації, формування конкурсної звітності, інше. З огляду на можливості сучасних великих мовних моделей авторами пропонується вирішувати з допомогою спеціалізованих LLM, так званих кастомних GPTs.

Спеціалізовані GPT-моделі є складними системами, що налагоджуються множиною параметрів, які визначають їхню продуктивність, функціональність і здатність адаптуватися до специфічних завдань. Кожен компонент відіграє важливу роль у роботі моделі, і його вибір впливає на кінцевий результат. Розглянемо узагальнену формальну модель спеціалізованого GPTs. Нехай G позначає спеціалізований GPTs, тоді його структура визначається як система множин:

$$G = (M, C, S, I),$$

де:

- M — множина параметрів базової моделі;
- C — множина контекстних налаштувань;
- S — множина безпекових обмежень;
- I — множина налаштувань інтеграцій.

Центральним елементом кастомного GPT є базова модель M , яка визначає його здатність до розпізнавання, аналізу та генерації тексту. Від вибору моделі залежить обсяг знань та якість відповідей моделі, контекстне розуміння тексту та його зв'язність, продуктивність у завданнях, що вимагають глибокого аналізу. Складові базової моделі

$$M = (B, L, T),$$

де:

- B — архітектура базової моделі (наприклад, Llama 3, GPT-4, Mistral 7B, інш.), що визначає обчислювальну складність;
- L — довжина контекстного вікна, що обмежує максимальний обсяг тексту для аналізу (наприклад, 8K–16K токенів);
- T — механізм навчання (fine-tuning, LoRA, інструкційне донавчання).

Контекстні налаштування C відповідають за поведінку GPTs при взаємодії з користувачем. Саме ці налаштування визначають яка задача буде вирішуватись, яким чином вона буде вирішуватись, що отримує модель на вхід, в якому вигляді мають бути подані результати.

$$C = (P_s, Lg, Fd, Sr, Tp),$$

де:

- P_s — системний промпт, що визначає поведінку моделі;
- Lg — мова інтерфейсу та звітних документів;
- Fd — множина підтримуваних форматів документів (PDF, DOCX, TXT, інш.);
- Sr — режим роботи (генеративний чи аналітичний);
- Tr — температура генерації (визначає рівень креативності відповіді).

Контекстні налаштування є ключовими інструментами для керування поведінкою кастомних GPT. Вони визначають, наскільки точно та релевантно модель обробляє запити, яку форму відповіді надає і наскільки глибоко аналізує контент.

Безпекові обмеження є критично важливою складовою спеціалізованих GPT, оскільки вони забезпечують етичність, надійність і конфіденційність у роботі з текстовими даними. У сучасних системах ШІ безпека охоплює широкий спектр заходів, що спрямовані на запобігання їх шкідливому використанню, захист конфіденційних даних, фільтрацію небажаного контенту та контроль відповідності юридичним і корпоративним стандартам.

$$S = (Bq, Pc, Rm),$$

де:

- Bq — блокування некоректних запитів (відсів маніпулятивних, небезпечних запитів);
- Pc — обмеження конфіденційності (заборона збереження або передачі конфіденційної інформації);
- Rm — механізм модерації (автоматична фільтрація або ручний контроль).

Множина параметрів I (налаштування інтеграції) відповідає за збереження, автоматизацію та взаємодію з іншими системами. Інтеграція GPT із зовнішніми сервісами значно розширює його можливості.

$$I = (Ap, Rg, Ds),$$

де:

- *Ap* — API для збереження результатів;
- *Rg* — вимоги до автоматичної генерації звітів;
- *Ds* — параметри підключення до баз даних або хмарних сервісів.

Завдяки можливостям інтеграції модель може працювати динамічно, масштабовано та ефективно, автоматизуючи робочі процеси, забезпечуючи якісну генерацію звітів та надаючи доступ до актуальних даних у корпоративних або хмарних середовищах.

Спеціалізовані GPTs мають значний потенціал для автоматизації та оптимізації різних етапів організації конкурсів наукових робіт.

Найбільш трудомістким етапом в процедурі організації та проведення конкурсу є первинна перевірка робіт надісланих на конкурс. Оцінювання робіт експертами не має сенсу, якщо робота не задовольняє вимогам конкурсу.

Логічно процедуру первинної перевірки і допуску робіт до конкурсу подати у вигляді схеми послідовного аналізу і відсіву варіантів. Основна ідея полягає у використанні спеціалізованих GPTs у якості фільтрів, що на різних етапах аналізу поданих на конкурс робіт, будуть відсіювати роботи, які не відповідають формальним вимогам чи критеріям якості.

- Розглянемо задачі етапу первинної перевірки, які можна реалізувати як спеціалізовані GPTs :
- перевірка правильності оформлення документів (Критерій 1);
- наявність ключових розділів вступ, методологія, висновки, інш. (Критерій 2);
- перевірка на виконання вимог академічної доброчесності (Критерій 3);
- обсяг тексту та відповідність стилю академічного письма (Критерій 4);
- правильність оформлення списку літератури (Критерій 5);
- верифікація джерел (Критерій 6).

Таким чином, схема методу ПАВ забезпечуватиме поетапне скорочення множини варіантів, які не проходять певні критерії перевірки. В контексті конкурсного оцінювання це означає поступове відсіювання наукових робіт, що не відповідатимуть вище переліченим вимогам. Кастомні GPTs будуть застосовуватись поетапно. Кожна окрема модель відповідає за конкретний етап перевірки. В загальному вигляді процес роботи модифікованої схеми методу послідовного аналізу варіантів з використанням спеціалізованих GPTs поданий на рис. 2. Перелік задач, що може уточнюватись і розширюватись у відповідності зі специфікою конкурсної процедури конкретного конкурсу.

Отже, інтеграція спеціалізованих GPTs у метод ПАВ створює багаторівневу систему фільтрації, яка дозволяє автоматизувати задачі попереднього аналізу робіт, значно зменшити навантаження на конкурсну комісію та підвищити якість відбору наукових робіт. Автоматизована перевірка дозволяє усунути суб'єктивні фактори перевірки на початкових етапах та забезпечити прозорість процесу. Протоколи згенеровані GPTs, що надаються за результатами попередньої перевірки матеріалів надісланих на конкурс, повертаються учасникам конкурсу. Це формалізує процес спілкування, усуває можливість людських помилок, спрощує аналіз великого обсягу заявок, гарантуючи, що до фінального рецензування потрапляють лише найкращі дослідження, що відповідають всім необхідним критеріям.

В основі технологічного стеку програмної реалізації системи перевірки конкурсної документації закладена мова Python, що дозволяє легко інтегруватися з AI-інструментами. На клієнтському рівні використовується бібліотека React для створення інтерактивного та швидкого користувацького інтерфейсу, тоді як на серверному рівні основним інструментом є Django — потужний Python-фреймворк, який забезпечує швидку розробку серверної логіки, обробку запитів та взаємодію з базою даних, а для створення REST API використовується Django REST Framework, що спрощує інтеграцію серверної частини з клієнтськими інтерфейсами та зовнішніми сервісами. Рівень даних базується на реляційній СУБД MySQL, яка забезпечує надійність та ефективність роботи з великими обсягами інформації, а для інтеграції з AI-інструментами використовується Python-бібліотека openai, яка дозволяє реалізувати доступ до спеціалізованих GPTs-моделей.

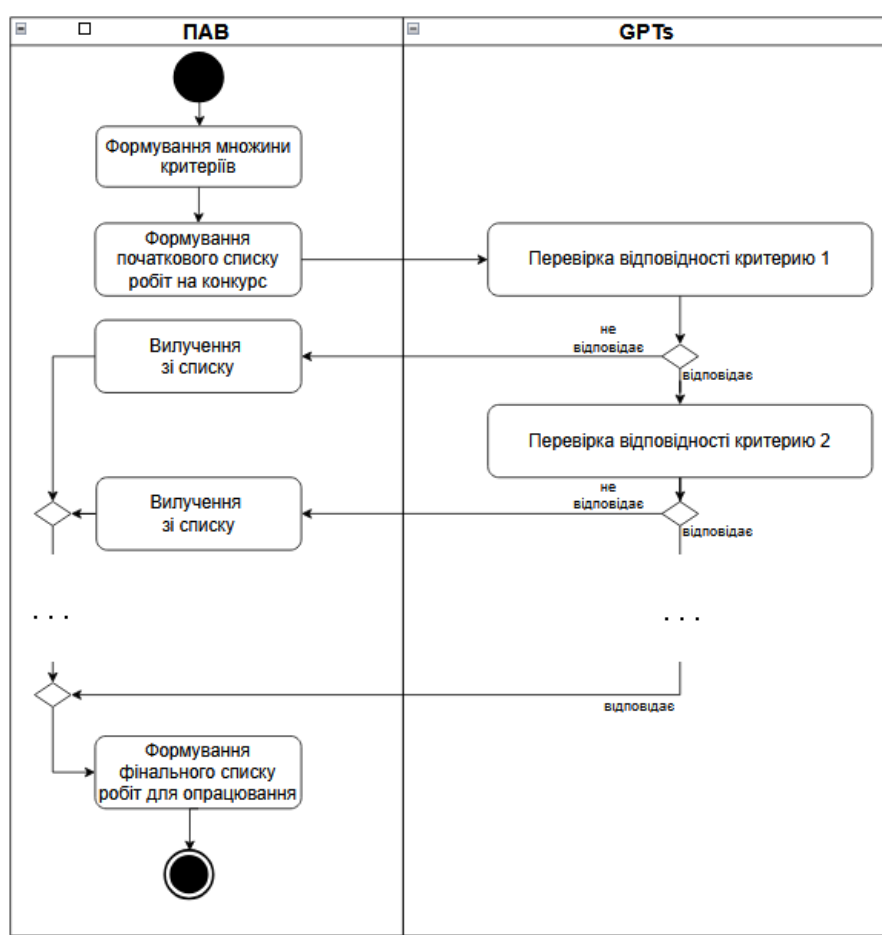


Рис. 2. Узагальнена схема ПАВ реалізована на спеціалізованих GPTs.

Такий технологічний стек є сучасним та ефективним рішенням, яке поєднує гнучкість, масштабованість, інтеграцію з AI та надійність для автоматизації організації та проведення конкурсів наукових робіт.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Впровадження елементів автоматизації та інтелектуальних інструментів у процедуру конкурсного відбору є доречним, актуальним та ефективним рішенням, що значно по-

кращує якість організації та оцінювання робіт. Завдяки технологіям машинного навчання та спеціалізованим GPT-моделям стає можливим швидко та точно попереднє відсіювання неякісних робіт, що дозволяє зменшити навантаження на журі та підвищити рівень об'єктивності оцінювання.

У статті запропоновано новий підхід до автоматизації попереднього аналізу конкурсних робіт шляхом поєднання методу послідовного аналізу варіантів зі спеціалізованими GPT-моделями. Основний науковий внесок дослідження полягає у формалізації процесу автоматизованого аналізу поданих матеріалів, та представлення його як багатокрокової процедури послідовних перевірок та відсіювань матеріалів, що не відповідають вимогам конкурсу. Це дозволяє значно вивільнити людські ресурси, формалізувати та об'єктивізувати процес допуску робіт до конкурсу, скоротити часові витрати за рахунок делегування значної кількості рутинних перевірок інтелектуальним інструментам — кастомним GPTs моделям. Запропонований підхід є гнучким та адаптивним, що дозволяє використовувати його в різних типах конкурсів, а також у суміжних сферах.

Перспективним напрямом подальших досліджень є додаткове навчання GPTs на аугментованому корпусі конкурсних робіт для кращого розуміння критеріїв оцінювання та інтеграція GPTs із хмарними платформами для автоматичного збереження результатів перевірки.

Список використаної літератури

1. Damjanovic V., Proud W., Milosavljevic M. Mentoring development at student international business case competitions. *EuroMed Journal of Business*. 2021. Vol. 16, No. 2. P. 154–170. DOI: <https://doi.org/10.1108/EMJB-12-2018-0092>
2. Vladoiu M., Constantinescu Z., Moise G. A New Collaborative Paradigm of Computer Science Student Contests: An Experience. Panetto H. et al. (eds). *On the Move to Meaningful Internet Systems. OTM 2017 Conferences : Lecture Notes in Computer Science*. Springer : Cham, 2017. Vol. 10573. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-69462-7_18
3. Blum J. J. Competitive programming participation rates: an examination of trends in U.S. ICPC regional contests. *Discovery Education*. 2023. Vol. 2, No. 11. DOI: <https://doi.org/10.1007/s44217-023-00034-1>
4. Messer M. Automated Grading and Feedback of Programming Assignments. *ITiCSE '22 : Proceedings of the 27th ACM Conference on on Innovation and Technology in Computer Science Education*. Publication History, 2022. Vol. 2 P. 638–639. DOI: <https://doi.org/10.1145/3502717.3532113>
5. Gobrecht A., Tuma F., Moller M. Beyond human subjectivity and error: a novel AI grading system. *arXiv preprint*. 2024. arXiv:2405.04323v1.
6. Divason J., Ascacibar F. J., Romero A., Sáenz-de-Cabezón E. Artificial Intelligence Models for Assessing the Evaluation Process of Complex Student Projects. *IEEE Transactions on Learning Technologies*. 2023. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1109/TLT.2023.3246589>
7. Hnatiienko H., Domanetska I., Hnatiienko O., Khrolenko Y. Tasks' analysis of the intelligent system for conducting project competitions. *Management of Development of Complex Systems*. 2024. Vol. 60. P. 113–120. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2024.60.113-120>
8. Гнатієнко Г. М., Доманецька І. М., Гнатієнко О. Г., Хроленко Я. О. Схема послідовного аналізу варіантів в експертній технології аналізу конкурсних пропозицій міської трансформації. *Прикладні інформаційні системи та технології в цифровому суспільстві* : зб. тез доповідей VIII Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 01 жовтня, 2024. С. 63–74.
9. Волошин О. Ф., Гнатієнко Г. М., Кудін В. І. Послідовний аналіз варіантів: Технології та застосування: Монографія. Київ : Стилос, 2013. 304 с.
10. Хроленко Я. О. Аналіз сучасних технологій для організації та проведення конкурсів наукових робіт студентів. URL: <https://conference.ikto.net/public/static/about.html> (дата звернення: 02.02.2025).

11. Положення про Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт з галузей знань і спеціальностей. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0620-17#n101> (дата звернення: 02.02.2025).
12. Minaee S., Mikolov T., Nikzad N., Chenaghlu M., Socher R., Amatriain X., Gao J. Large Language Models: A Survey. *arXiv preprint*. 2024. arXiv:2402.06196v2. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.06196>
13. Mohan G. B., Prasanna Kumar R., Vishal Krishh P. et al. An analysis of large language models: their impact and potential applications. *Knowledge and Information Systems*. 2024. Vol. 66. P. 5047–5070. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10115-024-02120-8>
14. Mandvikar S. Augmenting Intelligent Document Processing (IDP) Workflows with Contemporary Large Language Models (LLMs). *International Journal of Computer Trends and Technology*. 2023. Vol. 71. P. 80–91. DOI: <https://doi.org/10.14445/22312803/IJCTT-V71I10P110>
15. Kumar P. Large language models (LLMs): survey, technical frameworks, and future challenges. *Artificial Intelligence Review*. 2024. Vol. 57. P. 260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10462-024-10888-y>
16. Schnepf J., Engin T., Anderer S., Scheuermann B. Studies on the Use of Large Language Models for the Automation of Business Processes in Enterprise Resource Planning Systems. Rapp A., Di Caro L., Meziane F., Sugumaran V. (eds). *Natural Language Processing and Information Systems*. Lecture Notes in Computer Science, 2024. Vol. 14762. Springer : Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-70239-6_2

Tsyganok V. V., Khrolenko Ya. O. Method of sequential variant analysis using specialized gpt models for automated evaluation of competitive scientific works.

The article explores a new approach to automating the processing of scientific competition entries, which is based on the combination of the sequential analysis method and specialized GPT models. The proposed approach significantly optimizes the process of reviewing submitted materials, reduces the workload on experts, and increases the objectivity of selection. The work provides a theoretical justification for the use of the sequential analysis method in the context of automated analysis of the compliance of submitted works with competition requirements. The sequential analysis methodology has been adapted for reviewing competition entries. Based on this, a structured algorithm for using specialized GPT models as multi-level filters has been developed, ensuring a step-by-step verification of the compliance of submitted materials with established requirements. A generalized information model of a specialized GPT for document processing is described. The proposed approach is flexible and scalable, allowing it to be easily adapted to other domains.

Keywords: sequential analysis method, GPT models, academic competition.

References

1. Damnjanovic, V., Proud, W., & Milosavljevic, M. (2021). Mentoring development at student international business case competitions. *EuroMed Journal of Business*, 16(2), 154–170. <https://doi.org/10.1108/EMJB-12-2018-0092>
2. Vladoiu, M., Constantinescu, Z., & Moise, G. (2017). A new collaborative paradigm of computer science student contests: An experience. In H. Panetto et al. (Eds.). *On the move to meaningful Internet systems. OTM 2017 Conferences*. (Vol. 10573). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-69462-7_18
3. Blum, J. J. (2023). Competitive programming participation rates: An examination of trends in U.S. ICPC regional contests. *Discovery Education*, 2(11). <https://doi.org/10.1007/s44217-023-00034-1>
4. Messer, M. (2022). Automated grading and feedback of programming assignments. In: *ITiCSE '22. Proceedings of the 27th ACM Conference on on Innovation and Technology in Computer Science Education*. Publication History, 2, 638–639. <https://doi.org/10.1145/3502717.3532113>
5. Gobrecht, A., Tuma, F., & Moller, M. (2024). Beyond human subjectivity and error: A novel AI grading system. *arXiv preprint*. <https://arxiv.org/abs/2405.04323v1>

6. Divason, J., Ascacibar, F. J., Romero, A., & Sáenz-de-Cabezón, E. (2023). Artificial intelligence models for assessing the evaluation process of complex student projects. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, 1–18. <https://doi.org/10.1109/TLT.2023.3246589>
7. Hnatiienko, H., Domanetska, I., Hnatiienko, O., & Khrolenko, Y. (2024). Tasks' analysis of the intelligent system for conducting project competitions. *Management of Development of Complex Systems*, 60, 113–120. <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2024.60.113-120>
8. Hnatiienko, H. M., Domanetska, I. M., Hnatiienko, O. H., & Khrolenko, Y. O. (01 October, 2024). Sequential variant analysis scheme in expert technology for evaluating competition proposals in urban transformation. In *Applied Information Systems and Technologies in the Digital Society: Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference*. Kyiv. 63–74 [in Ukrainian].
9. Voloshyn, O. F., Hnatiienko, H. M., & Kudin, V. I. (2013). *Sequential variant analysis: Technologies and applications*. Kyiv: Stylos [in Ukrainian].
10. Khrolenko, Y. O. (2024). Analysis of modern technologies for organizing and conducting student scientific competitions. Retrieved from <https://conference.ikto.net/public/static/about.html> [in Ukrainian].
11. Regulations on the All-Ukrainian Competition of Student Scientific Papers in Fields of Knowledge and Specialties. (n.d.). Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0620-17#n101> [in Ukrainian].
12. Minaee, S., Mikolov, T., Nikzad, N., Chenaghlu, M., Socher, R., Amatriain, X., & Gao, J. (2024). Large language models: A survey. *arXiv preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.06196>
13. Mohan, G. B., Prasanna Kumar, R., Vishal Krishh, P., et al. (2024). An analysis of large language models: Their impact and potential applications. *Knowledge and Information Systems*, 66, 5047–5070. <https://doi.org/10.1007/s10115-024-02120-8>
14. Mandvikar, S. (2023). Augmenting intelligent document processing (IDP) workflows with contemporary large language models (LLMs). *International Journal of Computer Trends and Technology*, 71, 80–91. <https://doi.org/10.14445/22312803/IJCTT-V71I10P110>
15. Kumar, P. (2024). Large language models (LLMs): Survey, technical frameworks, and future challenges. *Artificial Intelligence Review*, 57, 260. <https://doi.org/10.1007/s10462-024-10888-y>
16. Schnepf, J., Engin, T., Anderer, S., & Scheuermann, B. (2024). Studies on the use of large language models for the automation of business processes in enterprise resource planning systems. In A. Rapp, L. Di Caro, F. Meziane, & V. Sugumaran (Eds.). *Natural Language Processing and Information Systems*. (Vol. 14762). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-70239-6_2

Одержано 04.03.2025

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).305-313](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).305-313)**О. А. Капустян¹, Н. В. Касімова²**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень,
доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співр.

olenakapustian@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних, доцент

Zadoianchuk.nv@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6032-0343>

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗБУРЕНИМИ НЕАВТОНОМНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У роботі розглядається задача оптимального керування розв'язками нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреними коефіцієнтами виду $f(t/\varepsilon, y)$, адитивним керуванням, та квадратичним цільовим функціоналом. Доведено, що оптимальне значення збуреної задачі близьке до оптимального значення відповідної задачі із усередненими коефіцієнтами.

Ключові слова: задача оптимального керування, гіперболічне рівняння, усереднення, збурення, нелінійність.

1. Вступ. Ідея переходу до усереднених параметрів [1] широко використовується в теорії диференціальних рівнянь та теорії оптимального керування [2], [3], [4], [5]. Для керованих процесів параболічного типу процедура усереднення була обґрунтована в роботах [6]–[9]. В даній роботі ми доводимо можливість апроксимації оптимального керування через перехід до задачі з усередненими коефіцієнтами в задачі, що описується нелінійним неавтономним гіперболічним рівнянням.

2. Постановка задачі.

У циліндрі $Q_T = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset R^n$ – обмежена область, розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + f(t/\varepsilon, y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x) \end{cases} \quad (1)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) = & \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ & + \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f : R_+ \times R \rightarrow R$, $g : R \rightarrow R$ – неперервні функції, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_1 \in H_0^1(\Omega)$ – задані початкові дані, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\psi_1 \in R$, $\psi_2 \in R$ – задані константи, $q_1, q_2 \in L^2(\Omega)$ – задані функції, і для деяких додатних констант C_1, C_2 виконуються умови:

$$\forall t \geq 0, \forall y \in R \quad |f(t, y)| \leq C_1(1 + |y|), \quad (4)$$

$$\forall y \in R \quad |g(y)| \leq C_2, \quad (5)$$

$$U \text{ замкнена та опукла, } 0 \in U. \quad (6)$$

Під розв'язком початково-крайової задачі (1) будемо розуміти функцію $y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ таку, що $y_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ і для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ вірна рівність

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (y_t, \xi) \eta_t dt + \\ & + \int_0^T \left((y, \xi)_{H_0^1} - (f(t/\varepsilon, y), \xi) - (g(y)u, \xi) \right) \eta dt = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де тут і надалі через $\|\cdot\|$, $(\cdot, \cdot)$ будемо позначати норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Відомо [10], що за припущень (4)–(6) для кожного розв'язку (1) справедливі вкладення

$$y \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)), \quad y_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)),$$

тобто задача (1)–(3) поставлена коректно в тому сенсі, що для кожного допустимого керування u і відповідного йому розв'язку y задачі (1) визначене значення цільового функціоналу $J(y, u) < \infty$.

В роботі доведено, що за припущень (4)–(6) задача оптимального керування (1)–(3) має розв'язк $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$, де y^ε – розв'язок (1) з керуванням $u = u^\varepsilon$. При цьому умови (4)–(6) не гарантують єдиності такого розв'язку.

Далі робиться припущення про те, що рівномірно по $y \in R$ існує границя

$$\bar{f}(y) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y) ds. \quad (8)$$

Основним результатом роботи є встановлення збіжності

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (9)$$

де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ – оптимальний процес у задачі (1)–(3) із усередненою функцією $\bar{f}$:

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + \bar{f}(y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), \end{cases} \quad (10)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) = & \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ & + \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (12)$$

Також доведена збіжність оптимальних керувань і функцій стану у відповідних топологічних просторах.

3. Основний результат.

Перш за все, зауважимо, що за умови існування границі (8) усереднена функція $\bar{f}$ задовольняє умови (4), (5) з тими ж константами. Отже, всі результати щодо існування і властивостей розв'язків задачі (1) будуть справедливими і для розв'язків задачі (10). Зокрема, справедлива наступна лема.

Лема 1. [10] *За умов (4)–(6) для кожного $u \in L^2(Q_T)$, $\varepsilon > 0$ задача (1) має принаймні один розв'язок. Кожен розв'язок (1) задовольняє наступні оцінки: для майже всіх (м.в.) $t \in (0, T)$*

$$\frac{d}{dt} \left(\|\nabla y(t)\|^2 + \|y_t(t)\|^2 \right) \leq C_3(1 + \|\nabla y(t)\|^2 + \|y_t(t)\|^2 + \|u(t)\|^2), \quad (13)$$

для всіх $t \in [0, T]$

$$\|\nabla y(t)\| + \|y_t(t)\| \leq C_4(1 + \|y_0\|_{H_0^1} + \|y_1\| + \|u\|_{Q_T}), \quad (14)$$

де тут і надалі використано позначення $\|u\|_{Q_T} := \left(\int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

Встановимо розв'язність задачі оптимального керування (1)–(3)

Теорема 1. *За умов (4)–(6) задача оптимального керування (1)–(3) для кожного $\varepsilon > 0$ має принаймні один розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Позначимо через $\hat{J}^\varepsilon$ мінімальне значення цільового функціоналу, тобто $\hat{J}^\varepsilon$ – це значення задачі оптимального керування (1)–(3).

Розглянемо мінімізуючу послідовність $\{u_n, y_n\}$ таку, що

$$J(u_n, y_n) < \hat{J}^\varepsilon + 1/n. \quad (15)$$

Відповідно до (15) послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$, а отже по підпослідовності

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(Q_T). \quad (16)$$

Тоді з (13), (14) і рівняння (1) виводимо, що

$$\begin{aligned} \{y_n\} & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \left\{ \frac{\partial y_n}{\partial t} \right\} & \text{ обмежена в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \left\{ \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \right\} & \text{ обмежена в } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \quad (17)$$

Отже, існує функція $y \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ з $y_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ така, що по підпослідовності

$$\begin{aligned} y_n & \rightarrow y \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} & \rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Крім того, використовуючі лему про компактність [10] виводимо, що по підпослідовності

$$y_n \rightarrow y \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ та майже скрізь в } Q_T, \quad (18)$$

і для всіх $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y_n(t) &\rightarrow y(t) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ і сильно в } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial y_n(t)}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial y(t)}{\partial t} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ і сильно в } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (19)$$

Надалі будемо використовувати наступний варіант теореми Лебега про мажоровану збіжність: якщо задано послідовності вимірних функцій $p_n, q_n : Q \mapsto R$ таких, що $p_n \rightarrow p$ м.с., $|p_n| \leq q_n$, $q_n \rightarrow q$ в $L^1(Q)$, то $p_n \rightarrow p$ в $L^1(Q)$.

Використовуючи цю теорему і умови (4), (5), ми виводимо

$$f(t/\varepsilon, y_n) \rightarrow f(t/\varepsilon, y) \text{ в } L^2(Q_T),$$

$$g(y_n) \rightarrow g(y) \text{ в } L^2(Q_T).$$

Ці збіжності дозволяють перейти до границі в рівності (7), записаній для y_n , і отримати, що y є розв'язком (1) з керуванням u .

Після цього, переходячи до нижньої границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності (15) і скориставшись оцінкою

$$\liminf \|u_n\|_{Q_T} \geq \|u\|_{Q_T},$$

яка є наслідком слабкої збіжності (16), одержуємо

$$J(y, u) \leq \liminf J(y_n, u_n) \leq \hat{J}^\varepsilon.$$

Це означає, $\{y, u\}$ є розв'язком (1)–(3). Теорема доведена.

Тепер розглянемо усереднену задачу

$$\begin{cases} y_{tt}(t, x) = \Delta y(t, x) + \bar{f}(y(t, x)) + g(y(t, x))u(t, x), \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \\ y|_{t=0} = y_0(x), \quad y_t|_{t=0} = y_1(x), \end{cases} \quad (20)$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} J(y, u) &= \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) y(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ &+ \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) y_t(T, x) dx - \psi_2 \right)^2 + \int_{Q_T} u^2(t, x) dt dx \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (22)$$

де неперервна функція $\bar{f} : R \rightarrow R$ визначена у (8).

Як вже зазначалося вище, функція $\bar{f}$ задовольняє умови (4), тому задача (20)–(22) має принаймні один розв'язок $\{\bar{y}, \bar{u}\}$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (4)–(6), (8) і, крім того,

$$\forall u \in U \text{ задача (20) має єдиний розв'язок,} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \\ |y - z| < \delta \Rightarrow |f(t, y) - f(t, z)| < \epsilon. \end{aligned} \quad (24)$$

Тоді

$$J(y^\epsilon, u^\epsilon) \rightarrow J(\bar{y}, \bar{u}) \text{ при } \epsilon \rightarrow 0. \quad (25)$$

Доведення. Нехай $\epsilon_n \rightarrow 0$, $\{y_n, u_n\} := \{y^{\epsilon_n}, u^{\epsilon_n}\}$ оптимальний процес у (1)–(3) для $\epsilon = \epsilon_n$. Завдяки включенню $0 \in U$ та оптимальності $\{y_n, u_n\}$ отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_n^2(t, x) dt dx \leq J(y_n, u_n) \leq J(z_n, 0) \leq \alpha_1 \left(\int_{\Omega} q_1(x) z_n(T, x) dx - \psi_1 \right)^2 + \\ + \alpha_2 \left(\int_{\Omega} q_2(x) z_{nt}(T, x) dx - \psi_2 \right)^2, \end{aligned} \quad (26)$$

де z_n – розв'язок (1) з $\epsilon = \epsilon_n$, $u \equiv 0$.

З оцінки (14), застосованої до z_n , та нерівності (26) виводимо, що існує константа $C_5 > 0$, яка залежить лише від початкових даних задачі, така що

$$\int_{Q_T} u_n^2(t, x) dt dx \leq C_5.$$

Таким чином, послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$. Далі ми можемо повторити міркування (16)–(19) Теорема 1 і зробити висновок про те, що для деякого $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ по підпослідовності:

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow \bar{u} \text{ слабо в } L^2(Q_T) \\ y_n &\rightarrow \bar{y} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ y_n &\rightarrow \bar{y} \text{ в } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ та м.с. в } Q_T, \\ y_n(t) &\rightarrow \bar{y}(t) \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ і сильно в } L^2(\Omega), \\ \frac{\partial y_n(t)}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial \bar{y}(t)}{\partial t} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ і сильно в } H^{-1}(\Omega). \end{aligned} \quad (27)$$

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ задовольняє (1), тобто для всіх $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$ вірна рівність

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\bar{y}_t, \xi) \eta_t dt + \\ + \int_0^T \left((\bar{y}, \xi)_{H_0^1} - (\bar{f}(\bar{y}), \xi) - (g(\bar{y})\bar{u}, \xi) \right) \eta dt = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для цього обґрунтуємо граничний перехід в рівності (7), записаній для y_n, u_n, ϵ_n .

Перехід в перших двох даданках рівності (7) є наслідком слабких збіжностей з (27). З теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$g(y_n) \rightarrow g(\bar{y}) \text{ in } L^2(Q_T). \quad (29)$$

Тоді зі слабкої збіжності $\{u_n\}$ виводимо можливість граичного переходу в останньому доданку рівності (7).

Слідуючи міркуванням роботи [9], покажемо, що для $\xi \in H_0^1(\Omega)$ і $\eta \in C_0^\infty(0, T)$

$$\int_{Q_T} f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) \xi(x) \eta(t) dt dx \rightarrow \int_{Q_T} \bar{f}(\bar{y}(t, x)) \xi(x) \eta(t) dt dx \quad (30)$$

Спочатку зауважимо, що з (8), умови (4) та теореми Лебега про мажоровану збіжність для будь-яких $0 < a < b$, $\psi \in L^2(\Omega)$

$$\int_a^b \int_{\Omega} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \psi(x)\right) - \bar{f}(\psi(x)) \right) \xi(x) \eta(t) dx dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Далі з (27) та теореми Єгорова маємо, що для кожного $\delta > 0$ існує $Q_1^\delta \subset Q_T$ така, що $\mu(Q_1^\delta) < \delta$ та

$$y_n \rightarrow \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \setminus Q_1^\delta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Оскільки $\bar{y} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, то існує послідовність кусково сталих функцій

$$y^M(t, x) = \sum_{k=1}^M y_k^M(x) \cdot \chi_{A_k^M}(t),$$

де $\{y_k^M\} \subset L^2(\Omega)$, $\{A_k^M = (a_k^M, b_k^M)\}$ - покриття $(0, T)$, така, що при $M \rightarrow \infty$

$$y^M \rightarrow \bar{y} \text{ в } L^2(Q_T) \text{ і м.с. в } Q_T.$$

Крім того, для кожного $\delta > 0$ існує $Q_2^\delta \subset Q_T$ така, що $\mu(Q_2^\delta) < \delta$ та

$$y^M \rightarrow \bar{y} \text{ рівномірно на } Q_T \setminus Q_2^\delta, \quad M \rightarrow \infty, \quad (33)$$

де μ - міра Лебега в R^2 .

Звідси і з нерівностей (4) маємо наступні оцінки

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx \leq \\ & \int_{Q_T \setminus Q_1^\delta} \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) \right| |\xi(x) \eta(t)| dt dx + \\ & + \int_{Q_1^\delta} C_1 (2 + |y_n(t, x)| + |\bar{y}(t, x)|) |\xi(x) \eta(t)| dt dx =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)}. \end{aligned}$$

З (14) маємо

$$\|y_n\|_{Q_T} + \|\bar{y}\|_{Q_T} \leq C_6. \quad (34)$$

Тоді з (34) і нерівності Гельдера

$$\forall \delta > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad I_1^{(2)} \leq C_7 \cdot \delta^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

З умови (24) виводимо, що $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall t \in [0, T]$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \xi, z, |\xi - z| < \lambda : \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \xi\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, z\right) \right| < \varepsilon.$$

Отже, з (32)

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad I_1^{(1)} \leq \delta.$$

Далі, для кожної функції $y^M(t, x)$ маємо з (31)

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) - \bar{f}(y^M(t, x)) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx = \\ & = \sum_{k=1}^M \int_{A_k^M} \int_{\Omega} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_k^M(x)\right) - \bar{f}(y_k^M(x)) \right) \xi(x) \eta(t) dx dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким чином, $\forall M \geq 1 \quad \exists N(M) \quad \forall n \geq N(M)$

$$\left| \int_{Q_T} \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) - \bar{f}(y^M(t, x)) \right) \xi(x) \eta(t) dt dx \right| < \delta.$$

Далі, в силу (24) існує M_0 таке, що $\forall M \geq M_0 \quad \forall n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T/Q_2^\delta} \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t, x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t, x)\right) \right| |\xi(x) \eta(t)| dt dx < \delta, \\ & \int_{Q_T \setminus Q_2^\delta} |\bar{f}(\bar{y}(t, x)) - \bar{f}(y^M(t, x))| |\xi(x) \eta(t)| dt dx < \delta. \end{aligned}$$

Таким чином, для $M \geq M_0$ і $n \geq N(M)$ отримуємо

$$I_2 \leq \int_{Q_2^\delta} 2C_1(1 + |\bar{y}(t, x)|) |\xi(x) \eta(t)| dx dt + 3\delta \leq C_8 \delta^{\frac{1}{2}} + 3\delta.$$

Об'єднавши всі ці нерівності, отримаємо (30).

Нерівності (27)–(30) дають можливість перейти до границі в рівності (7), і одержати, що $\bar{y}$ є розв'язком (20) з керуванням $\bar{u}$.

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у (20)–(22).

Для кожного $u \in U$ і відповідного розв'язку y_n задачі (1) маємо

$$J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y_n, u).$$

Міркуючи так само, як і в Теоремі 1, ми отримуємо, що по підпоследовності

$$y_n \rightarrow y \text{ у сенсі (27)}$$

і y є в силу (23) єдиним розв'язком (20) для відповідного керування u .

Після переходу до границі отримуємо

$$\begin{cases} \underline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \geq J(\bar{y}, \bar{u}), \\ \overline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y, u). \end{cases} \quad (36)$$

Отже, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у (20)–(22).

Якщо ми покладемо $u = \bar{u}$ у попередніх міркуваннях, ми отримаємо з (36)

$$J(\bar{y}, \bar{u}) \leq \underline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq \overline{\lim} J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y, \bar{u}).$$

З цих нерівностей випливає (9). Теорема доведена.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень.

У роботі вперше розглянута нова постановка задачі оптимального керування розв'язками нелінійного гіперболічного рівняння зі збуреними коефіцієнтами виду $f(t/\varepsilon, y)$ та квадратичним цільовим функціоналом. Керування, яке входить до рівняння, є адитивним. Наявність "швидкої" за часом змінної призводить до застосування процедури усереднення для обґрунтування наближеного керування збуреної задачі.

Доведено розв'язність цієї задачі та обґрунтовано близькість мінімальних значень критеріїв якості на розв'язках вихідної та усередненої задач.

У подальшому планується продовжити дослідження з цієї тематики за двома напрямками: 1) розглянути еволюційні рівняння з нелінійностями більш ніж лінійного росту, 2) дослідити можливість перенесення отриманих результатів на багатовимірні функції взаємодії.

Список використаної літератури

1. Bogolyubov N. N., Mitropol'skii Yu. A., Samoilenko A. M. Method of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics. Kyiv : Naukova Dumka, 1969.
2. Samoilenko A. M., Stanzhitskiĭ A. M. On averaging differential equations on an infinite interval. *Differ. Uravn.* 2006. Vol. 42, № 4. pp. 476–482
3. Sanders J. A., Verhulst F. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. N.Y. : Springer, 1985.
4. Nosenko T. V., Stanzhyts'kyi O. M. Averaging method in some problems of optimal control. *Nonlinear Oscillations.* 2008. Vol. 11, № 4. pp. 539–547
5. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O. Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2018. Vol. 18, № 2. pp. 196–211.
6. Капустян О. А., Сукретна А. В. Наближений усереднений синтез в задачі оптимального керування для параболічного рівняння. *Український математичний журнал.* 2004. Т. 56, № 10. С. 1653–1664.
7. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Sukretna A. V. Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2011. Vol. 63., № 5. pp. 759–767.
8. Nakonechyi O. G., Kapustian O. A., Chikrii A. O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and System Analysis.* 2019. Vol. 55., № 5. pp. 785–795.

9. Kapustyan O. V., Stanzhytskyi O. M., Fartushny I. D. Averaging method in the problem of optimal control for a perturbed parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 74, No. 7. pp. 2257–2264.
10. Chepyzhov V. V., Vishik M. I. Attractors of equations of mathematical physics. *AMS*. 2002.

Kapustian O. A., Kasimova N. V. Approximate optimal control for a nonlinear hyperbolic equation with perturbed non-autonomous coefficients.

In the paper we consider the problem of optimal control for solutions of a nonlinear hyperbolic equation with perturbed coefficients of the form $f(t/\varepsilon, y)$, additive control, and a quadratic objective functional. It is proved that the optimal value of the perturbed problem is close to the optimal value of the corresponding problem with averaged coefficients.

Keywords: optimal control problem, hyperbolic equation, averaging, perturbation, non-linearity.

References

1. Bogolyubov, N. N., Mitropol'skii, Yu. A., & Samoilenko, A. M. (1969). *Method of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics*. Kyiv: Naukova Dumka.
2. Samoilenko, A. M., & Stanzhitskiĭ, A. M. (2006). On averaging differential equations on an infinite interval. *Differ. Uravn.*, 42(4), 476–482.
3. Sanders, J. A., & Verhulst, F. (1985). *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. N.Y.: Springer.
4. Nosenko, T. V., & Stanzhyts'kyi, O. M. (2008). Averaging method in some problems of optimal control. *Nonlinear Oscillations*, 11(4), 539–547.
5. Kichmarenko, O., & Stanzhytskyi, O. (2018). Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 18(2), 196–211.
6. Kapustian, O. A., & Sukretna, A. V. (2004). Approximate averaging synthesis in the optimal control problem for parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 56(10), 1653–1664 [in Ukrainian].
7. Kapustyan, O. V., Kapustian, O. A., & Sukretna, A. V. (2011). Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem. *Ukrainian Mathematical Journal*, 63(5), 759–767.
8. Nakonechyi, O. G., Kapustian, O. A., & Chikrii, A. O. (2019). Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and System Analysis*, 55(5), 785–795.
9. Kapustyan, O. V., Stanzhytskyi, O. M., & Fartushny, I. D. (2022). Averaging method in the problem of optimal control for a perturbed parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 74(7), 2257–2264 [in Ukrainian].
10. Chepyzhov, V. V., & Vishik, M. I. (2002). Attractors of equations of mathematical physics. *AMS*.

Одержано 13.12.2024

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статті повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за алфавітом) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Segaran T. Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application. USA : O'Reilly Media. Inc, 2007. 360 p.
2. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> (дата обращения: 02.12.2024).
3. Кондрук Н. Е. Моделі багатofакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)
4. Kondruk N. E., Malyar M. M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. *II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod : Ukraine, September 28–30, 2021. P. 121–130. URL: https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf (date of access: 07.11.2024).
5. Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. 196 с. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> (дата звернення: 15.12.2024).
6. Тегза А. М. Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук / Ужгородський національний ун-т. Ужгород, 2003. 170 с.
7. Система динамічного, інтерактивного, геометричного середовища та комп'ютерної алгебри — GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 18.12.2024).

Список використаної літератури

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and

- integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

Список використаної літератури

1. Segaran T. Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application. USA : O'Reilly Media. Inc, 2007. 360 p.
2. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> (дата обращения: 02.12.2024).
3. Кондрук Н. Е. Моделі багатфакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)
4. Kondruk N. E., Malyar M. M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. *II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod : Ukraine, September 28–30, 2021. P. 121–130. URL: https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf (date of access: 07.11.2024).
5. Маринець В. В., Рого В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. 196 с. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> (дата звернення: 15.12.2024).
6. Тегза А. М. Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук / Ужгородський національний ун-т. Ужгород, 2003. 170 с.
7. Система динамічного, інтерактивного, геометричного середовища та комп'ютерної алгебри — GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 18.12.2024).

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 46 №1

2025

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,
В. В. Маринець, К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса,
В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua