

НАУКОВИЙ ВІСНИК

Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 47 № 2

2025

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 47 № 2

Ужгород 2025

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2025. Т. 47, № 2. 324 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, професор (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н., доц. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (США), Мулеса П. П. — д.пед.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., проф. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.ekon.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку та опублікування: Редакційно-видавничою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 8 від 23 жовтня 2025 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 13 від 28 жовтня 2025 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Реєстрація суб'єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 2178 від 27.06.2024 року
Ідентифікатор медіа R30-04771

Засновник і видавець — ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2025

© Ужгородський національний університет,
2025

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 47 No 2

Uzhhorod 2025

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2025. Vol. 47, No 2. 324 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (USA), P. Mulesa, Dr. Sci. (Ped.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for print and publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 8 of October 23, 2025) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 13 of October 28, 2025)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Registration of an entity in the field of print media: Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 2178 dated June 27, 2024 Media Identifier R30-04771

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення основних наднапівгруп некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного типу 9
2. Бортюш М. Ю., Тилищак О. А. Побудова тернарних кодів за групою $C_3 \times D_8$ 16
3. Волков О. Ю., Войналович Н. М. Про розподіл степеневого ряду з параметризацією середнім 22
4. Голіченко І. І., Моклячук М. П. Задача інтерполяції для періодично корельованого процесу із пропущеними значеннями 28
5. Гутік О. В., Серізка М. В. Про напівгрупу ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . . . 43
6. Капустян О. В., Краснеева А. О., Жук Т. Ю. Стійкість атрактору параболічного включення відносно зовнішніх та граничних збурень 52
7. Раєвська І., Раєвська М. Локальні майже-кільця та ендоециклічні групи малих порядків 65
8. Сливка-Тилищак Г. І., Ліба О. М., Тилищак М. О. Побудова вибірок з множини міри нуль на площині та їх числові характеристики 72
9. Турчин В. М., Пироженко О. В. Стохастичність і детермінованість механічних систем 82
10. Шурубуря К. І. Моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$ 91
11. Щитов О. М., Мормуль М. Ф. Прецизійні значення коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій з обмеженою варіацією 106

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Млавець Ю. Ю. Чисельний розв'язок математичної моделі контакту попередньо напружених кільцевого штампа та двох півпросторів 118
2. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математичне моделювання поширення епідемії із врахування екологічного фактору 126
3. Глебена М. І., Корник О. В., Глебена О. В., Чубирка В. В. Розробка стратегій відмовостійкого завантаження даних для інформаційних систем нового покоління 136
4. Когуч О. Г., Матвійчук Я. М. Методи машинного навчання в модернізації програмних компонентів комплексних інформаційних систем 148
5. Кондрук Н. Е., Гецько С. В. Розробка систем підтримки прийняття рішень на основі машинного навчання з мульти-таймфреймними даними для алгоритмічної торгівлі на ринку Форекс 168
6. Лях І. М., Млавець Ю. Ю., Пономарьов М. В., Ціпіньо А. Ю. AI-окуляри як інклюзивна технологія: ШІ, розпізнавання, переклад, доступність . . 177
7. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В., Духнов Ю. І. Повне описання еквациональних кластерів булевих алгебр першого типу 189
8. Окунев Є. М. Кластеризація регіонів України на основі епідеміологічної ситуації ВІЛ/СНІД 199
9. Повідайчик М. М., Скляр А. Л., Годя Р. М. Розроблення деяких модулів інформаційної системи «Цифровий асистент викладача ЗВО» 207

10. Поліщук В. В., Келемен М., Повханіч В. І., Матей А. А., Сегляник В. І. Рекомендаційна система оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного штучного інтелекту	214
11. Половко І. І., Шаркаді М. М. Застосування моделей нечіткої класифікації в екологічних дослідженнях	224
12. Попов О. В., Павлюк А. В. Варіаційно-операторна модель керованої дискретизації для гібридних обчислень	231
13. Розора І. В., Веретьюкін О. С. Аналіз популярності вебфреймворків React, Angular та Vue за даними Google Trends	244
14. Рубан І. В., Ткачов В. М. Модель порушень, політик відновлення та локалізації у просторі станів процесного рівня інформаційної системи на мобільній платформі	253
15. Ткаченко В. В., Зарицький О. В., Боровик Д. О. Моделювання природних катастроф на основі ГІС та великих даних	267
16. Товт Ю. О., Брила А. Ю. Фільтрація спекл-шуму на ультразвукових зображеннях за допомогою комплекснозначних нейронних мереж	278
17. Хабарлак К. С. Мультиmodalний додаток здорового харчування та дієти на основі великої мовної моделі	289
18. Чупов С. В., Федорішко А. В. Гібридний алгоритм розв'язання квадратичної задачі про призначення	303
19. Шкіря С. В., Андрашко Ю. В. Проєктування та оптимізація глибокої згорткової нейронної мережі на прикладі дослідження датасету CIFAR-10	312

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of main oversemi-groups of the non-commutative idempotent semigroups of order three of finite type.....	9
2. Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A. Construction of ternary codes by the group $C_3 \times D_8$	16
3. Volkov O. Yu., Voinalovych N. M. On a Power Series Distribution with Mean Parameterization.....	22
4. Golichenko I. I., Moklyachuk M. P. Interpolation problem for periodically correlated processes with missing observations.....	28
5. Gutik O. V., Serivka M. V. On the semigroup of endomorphisms of the semigroup $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of ω	43
6. Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y. Stability of the parabolic inclusion attractor with respect to external and boundary perturbations.....	52
7. Raievska I., Raievska M. Local nearrings and endocyclic groups of small order....	65
8. Slyvka-Tylyshchak G. I., Liba O. M., Tylyshchak M. O. Construction of samples from a measure-zero set in the plane and their numerical characteristics.....	72
9. Turchyn V. M., Pyrozhenko O. V. Stochasticity and Determinicity of Mechanical Systems.....	82
10. Shurubura K. I. Simulation of φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion in the space $L_p([0; T])$	91
11. Shchytyov O. M., Mormul M. F. Precision values of Fourier-Haar transform coefficients for functions with bounded variation.....	106

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. Babich S. Yu., Yaretska N. O., Mlavets Yu. Yu. Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp.....	118
2. Bihun Y. Y., Ukrainets O. Z. Mathematical modeling of the spread of the epidemic with the environmental factor.....	126
3. Hlebena M. I., Korniyk O. V., Hlebena O. V., Chubyrka V. V. Development of strategies for failure-resilient data loading for new-generation information systems.....	136
4. Kohuch O. H., Matviychuk Y. M. Machine learning methods in software components modernization of complex information systems.....	148
5. Kondruk N. E., Hetsko S. V. Development of Multi-Timeframe Machine Learning-Based Decision Support Systems for Algorithmic Forex Trading.....	168
6. Liakh I. M., Mlavets Yu. Yu., Ponomarov M. V., Tsipino A. Yu. AI Glasses as inclusive technology: AI, Recognition, Translation, Accessibility.....	177
7. Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Dukhnov Yu. I. A complete description of equational clusters of boolean algebras of the first type.....	189
8. Okuniey Y. M. Clustering of regions in Ukraine based on state of HIV/AIDS epidemic.....	199
9. Povidaichyk M. M., Skliar A. L., Hodia R. M. Development of Certain Modules of the Information System "Digital Assistant for a Higher Education Teacher".....	207
10. Polishchuk V. V., Kelemen M. Jr., Povkhanych V. I., Matei A. A., Sehlianyk V. I. Recommendation System for Assessing Citizens' Environmental Responsibility in the Use of Generative Artificial Intelligence.....	214
11. Polovko I. I., Sharkadi M. M. Application of fuzzy classification models in ecological research.....	224

12. <i>Popov A. V., Pavliuk A. V.</i> Variational–Operator Model of Controlled Discretization for Hybrid Computing	231
13. <i>Rozora I. V., Veretonkin O. S.</i> Analysis of the Popularity of Web Frameworks React, Angular and Vue Based on Google Trends Data	244
14. <i>Ruban I. V., Tkachov V. M.</i> A Model of Disruptions, Recovery and Localization Policies within the Process-Level State Space of a Mobile-Platform Information System	253
15. <i>Tkachenko V. V., Zarytskiy O. V., Borovyk D. O.</i> Modeling natural disasters based on GIS and BIG DATA	267
16. <i>Tovt Yu. O., Bryla A. Yu.</i> Speckle Noise Filtering in Ultrasound Images Using Complex-Valued Neural Networks	278
17. <i>Khabarlak K. S.</i> Multi-modal LLM-assisted healthy nutrition and diet smartphone application	289
18. <i>Chupov S. V., Fedorishko A. V.</i> Hybrid algorithm for solving the quadratic assignment problem	303
19. <i>Shkiria S. V., Andrashko Yu. V.</i> Design and optimization of a deep convolutional neural network in a CIFAR-10 case study	312

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).9-15](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).9-15)**В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²**

¹ Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ НАДНАПІВГРУП НЕКОМУТАТИВНИХ ІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ПОРЯДКУ ТРИ СКІНЧЕННОГО ТИПУ

У теорії зображень скінченних напівгруп найбільша кількість робіт присвячена незвідним зображенням. Серед старих результатів є лише окремі результати про зображувальний тип напівгруп. А саме, про скінченний зображувальний тип йде мова в низці робіт І. С. Понізовського (зокрема, для скінченної цілком простої напівгрупи) та в його роботі з К. Рінгелем (для деяких напівгруп всіх перетворень скінченної множини). Якщо ж говорити про нові результати, то ще й для класів напівгруп, то варто відзначити роботи про зображення напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням (перший автор цієї статті разом з О. М. Тертичною), напівгруп, породжених потентними елементами (обидва автори), прямих добутків симетричної напівгрупи другого степеня (перший автор разом з Е. М. Костишин) і про зображення (пов'язаних з напівгрупами Ріса) алгебр Манна (Ю. А. Дрозд і А. І. Плакош). Усі вони можуть мати як скінченне, так і нескінченне число нерозкладних зображень, бути ручними чи дикими.

Перший автор разом з Я. В. Заціхою описали зображувальні типи напівгруп третього порядку над довільним полем і вказали в цих випадках канонічну форму матричних зображень для довільної напівгрупи скінченного зображувального типу. У своїх попередніх статтях автори досліджували аналогічні задачі для наднапівгруп спеціального вигляду комутативних напівгруп третього порядку. У цій статті розпочато вивчення таких же самих задач для наднапівгруп некомутиативних напівгруп.

Ключові слова: визначальні співвідношення, основна наднапівгрупа, матричні зображення, напівгрупи скінченного і нескінченного зображувальних типів, ручні та дикі напівгрупи, канонічна форма.

1. Вступ. Ця стаття присвячена матричним зображенням наднапівгруп спеціального вигляду, які зіставляються заданій напівгрупі третього порядку. Якщо говорити конкретніше, розглядається випадок некомутиативних ідемпотентних напівгруп скінченного зображувального типу над довільним полем. Нагадаємо, що напівгрупа називається *ідемпотентною*, якщо всі її елементи — ідемпотенти, і напівгрупою *скінченного зображувального типу*, якщо вона має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень.

Напівгрупи третього порядку вперше описав у 1953 р. Т. Тамура в роботі [1]. Г. Е. Форсайт у 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою

комп'ютерної програми. В обох статтях опис отримано з точністю до ізоморфізму та дуальності в термінах таблиць Келі. Напівгрупи третього порядку вивчалися пізніше в [3]–[6]. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх таких напівгруп вказані в [6] (на основі результатів статті [5]). Зокрема, некомутативні ідемпотентні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються, з точністю до ізоморфізму та дуальності (при деякій перенумерації символів), такими напівгрупами:

$$T_1 : (bc, b, c) = \langle b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, cb = c;$$

$$T_2 : (0, b, c) = \langle 0, b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c;$$

$$T_3 : (e, b, c) = \langle e, b, c \rangle : b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c.$$

Всі виписані системи твірних є мінімальними. В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, а в кутових дужках — мінімальну систему твірних. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних e та 0 (якщо вони є) не виписуються.

Нагадаємо, що дуальною до напівгрупи називається така напівгрупа, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку.

Зауважимо, що напівгрупи T_2 і T_3 не є ізоморфними, бо перша з них має елемент 0 і не має елемента e , а друга — навпаки.

Позначимо визначальні співвідношення $b^2 = b, c^2 = c, cb = c$ напівгрупи T_1 відповідно через $(b), (c), (cb)$ і визначальні співвідношення $b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c$ напівгруп T_2, T_3 відповідно через $(b), (c), (bc), (cb)$.

Дамо ще деякі загальні позначення. Для напівгрупи S та її визначального співвідношення (x) напівгрупу $S \setminus (x)$ (тобто S без співвідношення (x)) позначимо через $S^{(x)}$, для різних визначальних співвідношень $(x), (y)$ напівгрупу $S \setminus \{(x), (y)\}$ позначимо через $S^{(x,y)}$, для попарно різних визначальних співвідношень $(x), (y), (z)$ напівгрупу $S \setminus \{(x), (y), (z)\}$ позначимо через $S^{(x,y,z)}$ і т.д. Очевидно, що при перестановці співвідношень напівгрупи $S^{(x,y)}, S^{(x,y,z)}$ і т.д. не змінюються. Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі S , тобто є наднапівгрупою напівгрупи S . Такі наднапівгрупи називаються основними. Зауважимо, що коли при відкиданні будь-яких s визначальних співвідношень напівгрупа є диною, то аналогічна властивість виконується і для $s + 1$ визначальних співвідношень (коли число всіх визначальних співвідношень більша за s). У цьому випадку в умовах теорем очевидний наслідок для $s + 1$ не вказується.

Сформулюємо тепер основні результати цієї статті,

Теорема 1. *Для напівгрупи $T = T_1$ і довільного поля K мають місце наступні твердження.*

- 1) $T^{(x)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $(x) = (cb)$;
- 2) $T^{(x)}$ — дика напівгрупа для $(x) \in \{(b), (c)\}$;
- 3) $T^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $(x), (y) \in \{(b), (c), (bc)\}$.

Теорема 2. *Для напівгруп $T = T_2, T_3$ і довільного поля K мають місце наступні твердження.*

- 1) $T^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) \in \{(bc), (cb)\}$;
- 2) $T^{(x)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) \in \{(b), (c)\}$;
- 3) $T^{(x,y)}$ — напівгрупа скінченного зображувального типу для $(x) = (b), (y) = (c)$;
- 4) $T^{(x,y)}$ — ручна напівгрупа нескінченного зображувального типу для $(x) = (bc), (y) = (cb)$;
- 5) $T^{(x,y)}$ — дика напівгрупа для $x \in \{(b), (c)\}, y \in \{(bc), (cb)\}$;
- 6) $T^{(x,y,z)}$ — дика напівгрупа для $(x), (y), (z) \in \{(b), (c), (bc), (cb)\}$.

При доведенні цих теорем використовується метод класифікаційних матричних задач, розвинутий представниками Київської школи з теорії зображень (див. зокрема, [7] – [12]).

Перший автор підтриманий грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine 00014586, V.M.B.).

2. Зауваження.

2.1. Щодо аналогів сформульованих теорем для комутативних напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображуваотний тип, див. [13] – [15]. Підкреслимо, що серед таких напівгруп існує єдина, яка має нескінченний зображувальний тип, а саме $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0, c^2 = 0, bc = 0, cb = 0$ (див. [6]). Задачі про класифікацію зображень її основних наднапівгруп $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^2 = 0, c^2 = 0$ і $(0, b, c) = \langle b, c \rangle$: $bc = 0, cb = 0$ добре відомі в сучасній теорії зображень (див. відповідно [16] і [8], [17], [18]).

2.2. Ми розглядаємо всі напівгрупи, з точністю до дуальності, фіксуючи для кожної пари взаємно дуальних напівгруп лише одну напівгрупу. Але наші твердження про матричні зображення цих напівгруп природним чином переносяться на дуальні напівгрупи (бо матриці, транспоновані до матриць деякого зображення довільної напівгрупи, задають зображення дуальної напівгрупи).

2.3. Природно вважати (див. [19]), що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Тоді довільне матричне зображення напівгрупи T_i ($i = 1, 2, 3$) однозначно задається матрицями B і C , які відповідають твірним елементам b і c . Його природно позначати через (B, C) . Одинична матриця будь-якого розміру $n \times n$ ($n \geq 0$) буде позначатися через E .

3. Доведення теореми 1.

Твердження 1) випливає із [20, 3.6].

Перейдемо до доведення твердження 2), розглянувши спочатку випадок $(x) = (c)$.

Нехай $R = \{B, C\}$ — довільне матричне зображення напівгрупи $T^{(c)}$. Згідно з означенням еквівалентних зображень, матриці B і C можна приводити одночасними перетвореннями подібності. За допомогою таких перетворень приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З формальних міркувань (щоб не нагромаджувати позначення) матрицю C , яка при цьому якимось чином зміниться, будемо знову позначати через C (цією домовленістю будемо користуватися і надалі). Тоді, після розбиття матриці C на блоки (такого ж розміру, як і блоки матриці B), вона має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – деякі матриці. Запишемо рівність $CB = C$ (яка відповідає визначальному співвідношенню $cb = c$), в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що ця рівність еквівалентна рівності

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, зображення $R = \{B, C\}$ еквівалентне зображенню $R_0 = \{B_0, C_0\}$, де

$$B_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер з'ясуємо, коли матричне зображення $R_0 = \{B_0, C_0\}$ еквівалентне матричному зображенню $\overline{R}_0 = \{\overline{B}_0, \overline{C}_0\}$ такого ж самого вигляду, тобто з матрицями

$$\overline{B}_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{C}_0 = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 & 0 \\ \overline{C}_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай X — оборотна матриця, така що $\overline{B}_0 = XB_0X^{-1}$, $\overline{C}_0 = XC_0X^{-1}$, що еквівалентно $\overline{B}_0X = XB_0$, $\overline{C}_0X = XC_0$. Очевидно, що матриці $\overline{B}_0$ і B_0 мають однаковий ранг, а значить рівні. Вважаємо, що матриця X розбита на блоки у відповідності з розбиттям матриці B_0 (а значить C_0 та матриць зображення $\overline{R}_0$):

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Із рівності $\overline{B}_0X = XB_0$ випливає, що $X_{12} = 0$, $X_{21} = 0$. Тоді рівність $\overline{C}_0X = XC_0$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \overline{C}_1 & 0 \\ \overline{C}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & 0 \end{pmatrix}$$

і легко бачити, що вона еквівалентна рівностям $\overline{C}_1 = X_{11}C_1X_{11}^{-1}$, $\overline{C}_3 = X_{22}C_3X_{11}^{-1}$.

Позначимо через Γ сагайдак з двома вершинами 1 і 2 та двома стрілками $c_1 : 1 \rightarrow 1$ і $c_3 : 2 \rightarrow 1$. Введемо два його матричних зображення $\mathcal{R}$ і $\overline{\mathcal{R}}$ наступним чином: $\mathcal{R}(c_1) = C_1$, $\mathcal{R}(c_3) = C_3$, $\overline{\mathcal{R}}(c_1) = \overline{C}_1$, $\overline{\mathcal{R}}(c_3) = \overline{C}_3$.

Дві останні рівності в попередньому абзаці означають, що зображення R_0 і $\overline{R}_0$ напівгрупи T_1 еквівалентні тоді і лише тоді, коли еквівалентні (матричні)

зображення $\mathcal{R}$ і $\overline{\mathcal{R}}$ сагайдака Γ . А оскільки сагайдак Γ є диким, (згідно з роботами [21], [22]), то такою буде і напівгрупа T_1 . Твердження 2) для $(x) = (c)$ доведено.

Випадок $(x) = (b)$ розглядається аналогічним чином. У цьому випадку

$$C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матриця B з урахування рівності $CB = C$ має вигляд

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

При цьому дві пари матриць (B, C) і $(\overline{B}, \overline{C})$ вказаного вигляду подібні між собою тоді і лише тоді, коли пари матриць (B_3, B_4) і $(\overline{B}_3, \overline{B}_4)$ еквівалентні як зображення дикого сагайдака з двома вершинами 1, 2 та двома стрілками $b_3 : 2 \rightarrow 1$, $b_4 : 2 \rightarrow 2$.

Твердження 3) випливає із твердження 2).

4. Доведення теореми 2.

4.1. Доведення твердження 1). Оскільки напівгрупи $T^{(bc)}$ і $T^{(cb)}$ ізоморфні напівгрупі T_1 , твердження 1 випливає із теореми 3 [6] (про те, що напівгрупа T_1 має скінченний зображувальний тип, вже говорилося вище).

Згідно з цією теоремою маємо наступне твердження.

Теорема 3. *Канонічна форма для матричних зображень некомутативної напівгрупи T_1 така:*

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Доведення твердження 2). Оскільки напівгрупи $T^{(b)}$ і $T^{(c)}$ ізоморфні, достатньо розглянути другу напівгрупу.

Нехай $R = \{B, C\}$ — довільне матричне зображення напівгрупи $T^{(c)}$. Тоді із доведення твердження 2) теореми 1 і рівності $BC = B$ маємо, що зображення R еквівалентне зображенню $R'_0 = \{B'_0, C'_0\}$, де

$$B'_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Твердження 2) доведено.

Як наслідок маємо таку теорему.

Теорема 4. *Пара матриць B, C вказаного вигляду разом з нульовою (відповідно одиничною) матрицею, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, задає канонічну форму для матричних зображень напівгрупи $T^{(c)}$ при $T = T_2$ (відповідно $T = T_3$).*

4.3. Доведення тверджень 3) і 4).

Спочатку у формулюванні твердження 3) було вказано (з інтуїтивних міркувань), що в цьому випадку ми маємо дику наднапівгрупу. Але дослідження її матричних зображень показало, що це не так, а саме, що вона є напівгрупою скінченного зображувального типу. Більш точно, було вставлено на матричний мові, що в напівгрупі $T = T_2, T_3$ перші два співвідношення є наслідками двох останніх. Коли це стало відомо, вже було знайдено доведення цього факту і на мові самої напівгрупи. Скажімо, із співвідношення $cb = c$ маємо $c(bc) = c^2$, а тоді $cb = c^2$ (бо $bc = b$); але оскільки $cb = c$, то $c = c^2$. Така ситуація нормальна, адже одна із цілей дослідження основних наднапівгруп саме і полягає у знаходженні “лишніх” визначальних співвідношень.

Твердження 4) випливає із [20, 3.6].

4.4. Доведення тверджень 5) і 6). Твердження 5) випливає із твердження 2) теореми 1. Твердження 6) випливає із твердження 5).

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення основних наднапівгруп некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Описано зображувальний тип над довільним полем, а у випадку наднапівгруп скінченного зображувального типу вказана канонічна форма їхніх матричних зображень.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших некомутативних напівгруп третього порядку.

Список використаної літератури

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2013). On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics*, 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Chotchaisthit, S. (2014). Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3. *Appl. Math. Sci. (Ruse)*, 8, 1261–1269.
5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 32–39.
6. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 32(1), 36–49 [in Ukrainian].
7. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 5–31 [in Russian].
8. Nazarova, L. A., Roiter, A. V., Sergeichuk, V. V., & Bondarenko, V. M. (1972). Application of modules over a dyad to the classification of finite p -groups that have an abelian subgroup of index p and to the classification of mutually annihilating operators. *Zap. Nauch. Sem. LOMI*, 28, 69–92 [in Russian].
9. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkcional. Anal., i Prilozhen.*, 8, 34–42 [in Russian].
10. Drozd, Yu. A. (1977). On tame and wild matrix problems. *Matrix problems, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev*, 104–114 [in Russian].
11. Bondarenko, V. M. (1988). Bundles of semichained sets and their representations. *Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, Preprint.* (60), 32 [in Russian].
12. Nazarova, L. A., Bondarenko, V. M., & Roiter, A. V. (1990). Tame partially ordered sets with involution. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 183, 149–159 [in Russian].
13. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of

- the semigroup generated by mutually annihilating idempotents. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 36(1), 7–15 [in Ukrainian].
14. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of the semigroup generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, (3), 110–114 [in Ukrainian].
 15. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2023). On matrix representations of oversemigroups of the semigroup of third order without zero divisors. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 43(2), 15–21 [in Ukrainian].
 16. Bondarenko, V. M. (1975). Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2. *Mat. Sb.*, 96(1), 63–74. [in Russian]
 17. Gelfand, I. M., & Ponomarev, V. A. (1968). Indecomposable representations of the Lorentz group. *Uspehi Mat. Nauk*, 23(2), 3–60. [in Russian]
 18. Bondarenko, V. M., Gerasimova, T. G., & Sergeichuk, V. V. (2009). Pairs of mutually annihilating operators. *Linear Algebra Appl.*, 430(1), 86–105.
 19. Bondarenko, V. M., & Kostyshy, E. M. (2011). Modular representations of the semigroup T_2 . *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science*, 22(1), 26–34. [in Ukrainian]
 20. Bondarenko, V. M., Tertychna, O. M., & Zubaruk, O. V. (2016). On classification of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition. *Algebra Discrete Math.*, 21(1), 18–23.
 21. Nazarova, L. A. (1973). Representations of quivers of infinite type. *Math. USSR Izvestija*, 3(4), 752–791 [in Russian].
 22. Donovan, P., & Freislich, M. R. (1973). The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Lecture Notes*, 5, 3–86.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of main oversemigroups of the non-commutative idempotent semigroups of order three of finite type.

In the theory of representations of semigroups, the largest number of works are devoted to irreducible representations. Among the old results, there are only some results on representation type of semigroups. Namely, the finite representation type for a finite quite simple semigroup is discussed in a series of papers of I. S. Ponizovsky and that for some semigroups of all transformations of a finite set are discussed by I. S. Ponizovsky and C. Ringel. If we are talking about new results on semigroup classes, then it should be noted works on representations of the semigroups generated by idempotents with partial zero multiplication (the first author of this paper together with O. M. Tertychna), of semigroups generated by the potential elements (both the authors), of direct products of the symmetric second-order semigroup (the first author together with E. M. Kostyshyn), and on representations of (related to Rees semigroups) Munn algebras (Yu. A. Drozd and A. I. Plakosh). All they can have both a finite and infinite number of indecomposable representations, can be tame or wild.

The first author together with Ja. V. Zatsikha described representation types of the third-order semigroups over any field, and indicated in these cases the canonical form of the matrix representations for any semigroup of finite representation type. In their previous papers, the authors investigated similar problems for oversemigroups of a special type of the commutative third-order semigroups. In this paper we begin to explore the same problems for oversemigroups of noncommutative semigroups.

Keywords: defining relations, main oversemigroup, matrix representations, semigroups of finite and infinite representation types, tame and wild semigroups, canonical form.

Одержано 21.09.2025

УДК 519.725

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).16-21](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).16-21)**М. Ю. Бортош¹, О. А. Тилищак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
maria.bortos@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1648-1350>

² Закарпатський угорський інститут ім. Ференца Ракоці II,
професор кафедри математики та інформатики,
доктор фізико-математичних наук
alxltk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>

ПОБУДОВА ТЕРНАРНИХ КОДІВ ЗА ГРУПОЮ $C_3 \times D_8$

Структура самодуальних кодів довжини 24 над полем з двох елементів $\mathbb{F}_2$ досліджувалися протягом тривалого часу, в результаті чого було виявлено численні властивості цих кодів. У даній статті розглянуто коди довжини 24 за головними (лівими) ідеалами груповою алгеброю $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ над полем з трьох елементів $\mathbb{F}_3$. Для елемента $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}$ заданої групової алгебри позначимо $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}^{-1}$. Знайдено кількість всіх елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, за якими можна побудувати код довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12, і які задовольняють умову $v = v^*$.

Ключові слова: групова алгебра, коди довжини 24, коди над полями, алгоритми побудови самодуальних кодів.

1. Вступ. У багатьох роботах [1, 3–15] досліджувалися різні підходи побудови і властивості бінарних та тернарних кодів. Розглянемо побудову тернарних самодуальних кодів довжини 24, використовуючи конструкцію, яку застосували [2–4, 6] використовуючи групи 24-го порядку для побудови розширених бінарних кодів Голя. У цій статті ми будемо цим методом самодуальні тернарні коди довжини 24 використовуючи групу $C_3 \times D_8$.

Розглянемо детально побудову таких кодів. Тернарним називають код над полем $\mathbb{F}_3$ із трьох елементів. Нехай $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ – скінченна група порядку n і елемент $v = \sum_{i=1}^n \alpha_{g_i}g_i \in \mathbb{F}_3G$ ($\alpha_{g_i} \in \mathbb{F}_3$). Для елемента $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_n}g_n \in \mathbb{F}_3G$ позначимо $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_n}g_n^{-1} \in \mathbb{F}_3G$. Розглянемо зображення $v \rightarrow \sigma(v)$, де матриця $\sigma(v) \in M(n, \mathbb{F}_3)$ має вигляд

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \dots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{pmatrix}.$$

Легко встановити, що матриця $\sigma(v)^T$ і матриця $\sigma(v^*)$ однакові. Визначимо $C(v)$, для заданого елемента $v \in \mathbb{F}_3G$, як код породжений рядками матриці $\sigma(v)$. Якщо розглянути простір $\mathbb{F}_3^n$, в якому заданий скалярний добуток $[v, w] = \sum_{i=1}^n v_i w_i \bmod 3$, то $C(v)$ є підпростором простору $\mathbb{F}_3^n$. Код C є самодуальним, якщо $C = C^\perp$, де $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_3^n \mid [v, w] = 0, w \in C\}$.

Скористаємося наступною теоремою.

Теорема 1 ([5]). *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v нової алгебри $\mathbb{F}_3 G$. Код $C(v)$ самодуальний тоді і тільки тоді, коли*

- 1) $vv^* = 0$,
- 2) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$.

2. Побудова кодів за групою $G = C_3 \times D_8$.

Поле $\mathbb{F}_3$ можна ототожнювати з $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$. При подальших записях цілі числа x , як елементи $\mathbb{F}_3$, позначають класи $x + 3\mathbb{Z}$, а кільцеві бінарні алгебраїчні операції над ними проводимо «за модулем 3».

Лема 1. *Нехай $G = \langle x, y, z | x^3 = 1, y^4 = 1, z^2 = 1, xy = yx, xz = zx, yzyz = 1 \rangle$ і $v = \sum_{i=0}^3 ((\alpha_{i+1} + \alpha_{i+5}x + \alpha_{i+9}x^2)y^i + (\alpha_{i+13} + \alpha_{i+17}x + \alpha_{i+21}x^2)y^i z)$. Якщо код $C(v)$ самодуальний, тоді*

- 1) $\left(\sum_{i=1}^{24} \alpha_i^2 \right) = 0$,
- 2) $((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24})) = 0$,
- 3) $((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16} + \alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20})) = 0$,
- 4) $(2((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24}))) = 0$,
- 5) $2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_5\alpha_7 + \alpha_6\alpha_8 + \alpha_9\alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{15} + \alpha_{14}\alpha_{16} + \alpha_{17}\alpha_{19} + \alpha_{18}\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{22}\alpha_{24}) = 0$,
- 6) $(\alpha_1\alpha_9 + \alpha_9\alpha_5 + \alpha_5\alpha_1 + \alpha_2\alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_6 + \alpha_6\alpha_2 + \alpha_3\alpha_{11} + \alpha_{11}\alpha_7 + \alpha_7\alpha_3 + \alpha_4\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_4 + \alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{17} + \alpha_{17}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{22} + \alpha_{22}\alpha_{18} + \alpha_{18}\alpha_{14} + \alpha_{15}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{19} + \alpha_{19}\alpha_{15} + \alpha_{16}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{20} + \alpha_{20}\alpha_{16}) = 0$,
- 7) $(\alpha_1\alpha_{11} + \alpha_{11}\alpha_5 + \alpha_5\alpha_3 + \alpha_3\alpha_9 + \alpha_9\alpha_7 + \alpha_7\alpha_1 + \alpha_2\alpha_{12} + \alpha_{12}\alpha_6 + \alpha_6\alpha_4 + \alpha_4\alpha_{10} + \alpha_{10}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_2 + \alpha_{13}\alpha_{23} + \alpha_{23}\alpha_{17} + \alpha_{17}\alpha_{15} + \alpha_{15}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{19} + \alpha_{19}\alpha_{13} + \alpha_{14}\alpha_{24} + \alpha_{24}\alpha_{18} + \alpha_{18}\alpha_{16} + \alpha_{16}\alpha_{22} + \alpha_{22}\alpha_{20} + \alpha_{20}\alpha_{14}) = 0$.

Доведення. Обчислення в системі GАР показують, що у випадку, коли розглядаємо групу $C_3 \times D_8$, матриця $\sigma(v)$ набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} \\ \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} \\ \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} \\ \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 \\ \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_{19} & \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_{20} & \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{16} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_9 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma_{11} = 2(\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_5\alpha_7 + \alpha_6\alpha_8 + \alpha_9\alpha_{11} + \alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{13}\alpha_{15} + \alpha_{14}\alpha_{16} + \alpha_{17}\alpha_{19} + \alpha_{18}\alpha_{20} + \alpha_{21}\alpha_{23} + \alpha_{22}\alpha_{24}).$$

$$\gamma_{12} = 2(\alpha_1\alpha_{13} + \alpha_2\alpha_{14} + \alpha_3\alpha_{15} + \alpha_4\alpha_{16} + \alpha_5\alpha_{17} + \alpha_6\alpha_{18} + \alpha_7\alpha_{19} + \alpha_8\alpha_{20} + \alpha_9\alpha_{21} + \alpha_{10}\alpha_{22} + \alpha_{11}\alpha_{23} + \alpha_{12}\alpha_{24}).$$

$$\gamma_{13} = 2(\alpha_1\alpha_{14} + \alpha_2\alpha_{15} + \alpha_3\alpha_{16} + \alpha_4\alpha_{13} + \alpha_5\alpha_{18} + \alpha_6\alpha_{19} + \alpha_7\alpha_{20} + \alpha_8\alpha_{17} + \alpha_9\alpha_{22} + \alpha_{10}\alpha_{23} + \alpha_{11}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{21}).$$

$$\gamma_{14} = 2(\alpha_1\alpha_{15} + \alpha_2\alpha_{16} + \alpha_3\alpha_{13} + \alpha_4\alpha_{14} + \alpha_5\alpha_{19} + \alpha_6\alpha_{20} + \alpha_7\alpha_{17} + \alpha_8\alpha_{18} + \alpha_9\alpha_{23} + \alpha_{10}\alpha_{24} + \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22}).$$

$$\gamma_{15} = 2(\alpha_1\alpha_{16} + \alpha_2\alpha_{13} + \alpha_3\alpha_{14} + \alpha_4\alpha_{15} + \alpha_5\alpha_{20} + \alpha_6\alpha_{17} + \alpha_7\alpha_{18} + \alpha_8\alpha_{19} + \alpha_9\alpha_{24} + \alpha_{10}\alpha_{21} + \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{23}).$$

Звідси отримаємо,

$$\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{11})(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 + \alpha_{10} + \alpha_{12}) + (\alpha_{13} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{23})(\alpha_{14} + \alpha_{16} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{22} + \alpha_{24}).$$

$$\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_{22} + \alpha_{18} + \alpha_{20} + \alpha_{24} + \alpha_{23} + \alpha_{19} + \alpha_{21} + \alpha_{17}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{14} + \alpha_{22} + \alpha_{16} + \alpha_{24} + \alpha_{15} + \alpha_{23} + \alpha_{13} + \alpha_{21}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{18} + \alpha_{14} + \alpha_{20} + \alpha_{16} + \alpha_{19} + \alpha_{15} + \alpha_{17} + \alpha_{13}).$$

$$\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{15} = 2((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_{13} + \alpha_{14} + \alpha_{15} + \alpha_{16}) + (\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)(\alpha_{17} + \alpha_{18} + \alpha_{19} + \alpha_{20}) + (\alpha_9 + \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24})).$$

Якщо код $C(v)$ самодуальний, то за умовою 1 теореми 1 виконуються умови: $vv^* = 0$ і $\sigma(v)\sigma(v)^T = \sigma(vv^*) = 0$. Таким чином, $\gamma_i = 0$ ($i = 1, \dots, 10$). Тоді $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 + \gamma_6 + \gamma_8 = 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_9 + \gamma_{10} = 0$, $\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{15} = 0$, $\gamma_5 = 0$, $\gamma_7 = 0$, $\gamma_{11} = 0$. Звідси отримуємо відповідно рівняння наведені у висновку леми.

Одним зі знайдених елементів є, наприклад, $v = 2 + 2y + 2y^2 + 2y^3 + 2x + 2xy + 2x^2 + 2x^2y^3 + yz + 2y^2z + y^3z \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$. Для нього запишемо вигляд елемента $v^* = 2 + 2y^3 + 2y^2 + 2y + 2x^2 + 2x^2y^3 + 2x + 2xy + yz + 2y^2z + y^3z$. В таблиці подано добутки всіх доданків з v на доданки з v^* за модулем 3.

Таблиця 1.

Таблиця добутків доданків з v на доданки з v^* у груповій алгебрі $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$

	2	2y	2y ²	2y ³	2x	2xy	2x ²	2x ² y ³	yz	2y ² z	y ³ z
2	1	y	y ²	y ³	x	xy	x ²	x ² y ³	2yz	y ² z	2y ³ z
2y ³	y ³	1	y	y ²	xy ³	x	x ² y ³	x ² y ²	2z	yz	2y ² z
2y ²	y ²	y ³	1	y	xy ²	xy ³	x ² y ²	x ² y	2y ³ z	z	2yz
2y	y	y ²	y ³	1	xy	xy ²	x ² y	x ²	2y ² z	y ³ z	2z
2x ²	x ²	x ² y	x ² y ²	x ² y ³	1	y	x	xy ³	2x ² yz	x ² y ² z	2x ² y ³ z
2x ² y ³	x ² y ³	x ²	x ² y	x ² y ²	y ³	1	xy ³	xy ²	2x ² z	x ² yz	2x ² y ² z
2x	x	xy	xy ²	xy ³	x ²	x ² y	1	y ³	2xyz	xy ² z	2xy ³ z
2xy	xy	xy ²	xy ³	x	x ² y	x ² y ²	y	1	2xy ² z	xy ³ z	2xz
yz	2yz	2z	2y ³ z	2y ² z	2xyz	2xz	2x ² yz	2x ² y ² z	1	2y ³	y ²
2y ² z	y ² z	yz	z	y ³ z	xy ² z	xyz	x ² y ² z	x ² y ³ z	2y	1	y ³
y ³ z	2y ³ z	2y ² z	2yz	2z	2xy ³ z	2xy ² z	2x ² y ³ z	2x ² z	y ²	2y	1

Таким чином, $vv^* = 0$. З вигляду v отримаємо, що

$$\sigma(v) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здійснивши обчислення в системі комп'ютерної алгебри GAP отримаємо, що $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$, а мінімальна відстань Хемінга коду $C(v)$ рівна 6. Отже, $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12.

При числових обчисленнях скористуємось також наступною теоремою.

Теорема 2 ([6]). *Нехай G скінченна група порядку 24 з елементом v групової алгебри $\mathbb{F}_3 G$. Якщо*

- 1) $v = v^*$,
- 2) $v^2 = 0$,
- 3) $\text{rank}(\sigma(v)) = 12$,

тоді код $C(v)$ самодуальний.

Для умови $\sigma(v) = \sigma(v)^T$ достатньо, щоб $\alpha_4 = \alpha_2$, $\alpha_9 = \alpha_5$, $\alpha_{10} = \alpha_8$, $\alpha_{11} = \alpha_7$, $\alpha_{12} = \alpha_6$, $\alpha_{21} = \alpha_{17}$, $\alpha_{22} = \alpha_{18}$, $\alpha_{23} = \alpha_{19}$, $\alpha_{24} = \alpha_{20}$.

3. Числові результати. Очевидно, групова алгебра $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ складається з $3^{24} = 282\,429\,536\,481$ елементів v . В результаті здійснених в дослідженні обчислень отримаємо кількість елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, що $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12 і виконується умова $v = v^*$. Точна кількість таких кодів дорівнює 198 018. Мінімальна відстань кодів: 2, 3, 4 або 6.

Таблиця 2.

Кількість елементів з групової алгебри $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$

Мінімальна відстань Хемінга $C(v)$	2	3	4	6
Кількість елементів v , що $v = v^*$	4482	23 328	91 872	78 336

Крім того, встановлено, що існує рівно 21 972 елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ таких, що перша координата рівна 2 і $C(v)$ є самодуальним кодом над полем $\mathbb{F}_3$.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті досліджено конструкцію кодів довжини 24 за групою алгеброю $\mathbb{F}_3 G$ групи $G = C_3 \times D_8$. Знайдено 198 018 елементів $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$, що $C(v)$ є кодом довжини 24, де розмірність підпростору кодових слів дорівнює 12 і виконується умова $v = v^*$. В подальших дослідженнях, крім вже розглянутої групи $C_3 \times D_8$, можна

розглянути інші групи порядку 24, а також досліджувати тернарні самодуальні коди довжини 24 з мінімальною відстанню 9.

Список використаної літератури

1. Bortos, M. Yu., Tylyshchak, A. A., & Khymynets, M. V. (2024). Extended binary Golay codes by a group algebra. *Algebra Discrete Math.*, 38(1), 23–33. <https://doi.org/10.12958/adm2241> [in Ukrainian].
2. Hurley, T. (2006). Group Rings and Rings of Matrices. *Int. Jour. Pure and Appl. Math.*, 31(3), 319–335.
3. Bernhardt, F., Landrock, P., & Manz, O. (1990). The extended Golay codes considered as ideals. *J. Combin. Theory Ser. A*, 55(2), 235–246.
4. McLoughlin, I., & Hurley, T. (2008). A group ring construction of the extended binary Golay code. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 9(54), 4381–4383.
5. Huffman, W. C., & Pless, V. (2003). *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge University Press: Cambridge.
6. Dougherty, S. T., Gildea, J., Taylor, R., & Tylyshchak, A. (2018). Group rings, G -codes and constructions of self-dual and formally self-dual codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86(9), 2115–2138. <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0440-7>.
7. Conway, J. H., Pless, V., & Sloane, N. J. A. (1979). Self-dual codes over $GF(3)$ and $GF(4)$ of length not exceeding 16. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 25, 312–322.
8. Leon, J. S., Pless, V., & Sloane, N. J. A. (1981). On ternary self-dual codes of length 24. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 27, 176–180.
9. Steven, T., Dougherty, T., Gulliver, A., & Harada, M. (1999). Optimal ternary formally self-dual codes. *Discrete Mathematics*, 196(1–3), 117–135.
10. Bortos, M. Yu., & Tylyshchak, A. A. (2020). Extended binary Golay codes by a group algebra of one group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(36), 65–72. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).65-72](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).65-72) [in Ukrainian].
11. Bortos, M. Yu., Tylyshchak, A. A., & Khymynets, M. V. (2022). Extended binary Golay codes by a group algebra of dihedral group. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 27–32. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).27-32](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).27-32) [in Ukrainian].
12. Peng, X. H., & Farrell, P. G. (2006). On construction of the $(24, 12, 8)$ Golay codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 8(52), 3669–3675.
13. Curtis, R. T. (2016). Error-correction and the binary Golay code. *London Mathematical Society*, 150(1), 51–58.
14. Huffman, W. C. (2005). On the classification and enumeration of self-dual codes. *Finite Fields and Their Applications*, 11(3), 451–490. <https://doi.org/10.1016/j.ffa.2005.05.012>
15. Harada, M., & Munemasa, A. (2009). A complete classification of ternary self-dual codes of length 24. *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, 116(5), 1063–1072. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2008.11.011>
16. Huffman, W. C., Kim, J.-L., & Sole, P. (Eds.). (2021). *Concise Encyclopedia of Coding Theory* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315147901>

Bortos M. Yu., Tylyshchak A. A. Construction of ternary codes by the group $C_3 \times D_8$.

The structure of self-dual codes of length 24 over the finite field with two elements $\mathbb{F}_2$ has been studied for a long time, through which numerous properties of such codes have been established. In this paper, we consider codes of length 24 constructed by principal (left) ideals in the group algebra $\mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ over the finite field with three elements $\mathbb{F}_3$. For an element $v = \alpha_{g_1}g_1 + \alpha_{g_2}g_2 + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}$ of the given group algebra, let $v^* = \alpha_{g_1}g_1^{-1} + \alpha_{g_2}g_2^{-1} + \dots + \alpha_{g_{24}}g_{24}^{-1}$ denote its involution. The number of all elements $v \in \mathbb{F}_3(C_3 \times D_8)$ has been obtained, for which a code of length 24 can be built, with the dimension of the codewords subspace equal to 12 and satisfying the condition $v = v^*$.

Keywords: group algebra, codes of length 24, codes over fields, algorithms for constructing self-dual codes.

Одержано 15.09.2025

UDC 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).22-27](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).22-27)**O. Yu. Volkov¹, N. M. Voinalovych²**¹ University of California, Berkeley,

Master's student at the Department of Statistics

oleksandr_volkov@berkeley.edu

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0247-9921>² Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,

Associate Professor of the Department of Mathematics and Digital Technologies,

Candidate of Pedagogical Sciences

voinalovichn@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0523-7889>

ON A POWER SERIES DISTRIBUTION WITH MEAN PARAMETERIZATION

The article examines the distribution of the power series of the function $w(y) = (1 + \sqrt{1-y})^{-\frac{1}{2}}$. The distribution of the considered function into a power series is obtained $(1 + \sqrt{1-y})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m)!16^{-m}}{(2m)!(2m+1)\sqrt{2}} y^m$. The dispersion function is found $v(x) = x(2x+1)(4x+1)$, $x > 0$. A distribution with mean parameterization is constructed

$$\Pr(\xi = k) = \binom{4k+1}{2k} 2^{-k} x^k (2k+1)^{k+\frac{1}{2}} (4k+1)^{-2k-\frac{3}{2}}, \quad x > 0.$$

It is proved that the raw moments α_m , central moments μ_m , cumulants χ_m , $m = 1, 2, \dots$ satisfy the following recurrence relations: $\alpha_{m+1} = x\alpha_m + v(x) \frac{d\alpha_m}{dx}$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = x$; $\mu_{m+1} = m\mu_{m-1} + v(x) \frac{d\mu_m}{dx}$, $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$; $\chi_{m+1} = v(x) \frac{d\chi_m}{dx}$, $\chi_1 = x$.

Keywords: power series, distribution, parameterization by the mean, numerical characteristics, variance function.

1. Introduction. The study of power-series distributions was initially undertaken in the classical work of A. Noack [1], wherein the notion of random variables with discrete distributions defined via power series was introduced. Further development of this direction was reflected in the works of N. L. Johnson, A. W. Kemp, and S. Kotz [2, 3], who, in their monographs, systematized the known discrete distributions and examined them within the unified framework of power-series distributions. A significant contribution to the study of generalizations of such distributions was made by P. S. Consul [4] and his co-authors, who developed the theory of generalized Poisson distributions and examined a wide class of families defined by power series.

In Ukraine, research in this domain has been advanced by the contributions of Yu. I. Volkov [5], who investigated power-series distributions under prescribed covariance structures, as well as by the textbook authored by Yu. I. Volkov and N. M. Voinalovych [6], which provides a systematic exposition of methodologies for the construction and analysis of such distributions. Particular attention is devoted to mean parameterization, which proves convenient for analytical representation and for establishing recurrence relations for the numerical characteristics of the distribution.

Prior findings have established that mean parameterization constitutes a convenient and informative framework for the investigation of discrete distributions,

as it facilitates a direct correspondence between numerical characteristics and the expected value of the random variable. This, in turn, provides opportunities for a more effective analysis of the variance function and for the derivation of recurrence relations for moments and cumulants.

The significance of the present study arises from the necessity to broaden the class of established power-series distributions, to identify novel generating functions with positive coefficients, and to establish their properties under mean parameterization. These contributions are of importance not only from a theoretical standpoint — advancing probability theory through the provision of new distributional examples and methodological tools of analysis — but also from an applied perspective, as the resulting findings offer potential utility in the mathematical modeling of stochastic processes, in statistical machine learning for forecasting, and in a wide range of problems in applied mathematics.

2. Theoretical foundations of the study.

Definition 1. *Let*

$$w(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k, \quad 0 < y < R,$$

and all coefficients of this series are non-negative numbers. The distribution of an integer random variable ξ , given by the formula

$$p_k(y) = \Pr(\xi = k) = \frac{a_k y^k}{w(y)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

is called the power series distribution of the function $w(y)$ with parameter y .

To obtain the numerical characteristics of the distribution, generating functions are used:

1) ordinary generating function

$$P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k(y) z^k = \frac{1}{w(y)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k z^k = \frac{w(yz)}{w(y)},$$

2) generating function of raw moments

$$A(z) = P(e^z),$$

3) generating function of central moments

$$C(z) = e^{-\alpha_1 z} A(z), \quad (\alpha_1 — \text{expected value } \xi),$$

4) generating function of cumulants

$$K(z) = \log A(z).$$

Then expected value $E\xi = \frac{yw'(y)}{w(y)}$, variance $D\xi = y \frac{dE\xi}{dy}$.

Let $E\xi$ be denoted by x . Then the function $x = \frac{yw'(y)}{w(y)}$ on the interval $(0, R)$ has an inverse $y = y(x)$, because $\frac{dx}{dy} = \frac{D\xi}{y} > 0$. Therefore, it is possible to study the power series distribution with a different parameterization, specifically by characterizing

the distribution with the parameter x . This parameterization is called parameterization by the mean (see, for example, [2], p. 670). With this parameterization, we have

$$\Pr(\xi = k) = p(k, x) = p_k(y(x)) = \frac{(y(x))^k a_k}{w(y(x))}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$x \in X = \left(0, \frac{Rw'(R)}{w(R)}\right), \quad D\xi = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \frac{y(x)}{y'(x)}.$$

The function $v(x) = \frac{y(x)}{y'(x)}$ is called the variance function of the distribution.

For example,

- if $w(y) = 1 + y$, is $v(x) = x(1 - x)$, $0 < x < 1$;
- if $w(y) = e^y$, is $v(x) = x$, $x > 0$;
- if $w(y) = (y - 1)^{-1}$, is $v(x) = x(1 + x)$, $x > 0$.

3. The main result. The goal of this work is to study the power series distribution of the function $w(y) = (1 + \sqrt{1 - y})^{-\frac{1}{2}}$.

We will find the expansion of this function into a power series and verify that the coefficients of this series are non-negative.

Since

$$\frac{1 - \sqrt{1 - y}}{y} = \frac{1 + \sqrt{y}}{2y} + \frac{1 - \sqrt{y}}{2y} - 2\sqrt{\frac{1 - y}{4y^2}} = \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{y}}{2y}} - \sqrt{\frac{1 - \sqrt{y}}{2y}}\right)^2$$

, will give us

$$\left(1 + \sqrt{1 - y}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - y}}{y}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{y}}{2y}} - \sqrt{\frac{1 - \sqrt{y}}{2y}}.$$

Next, using the binomial series, we will have

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{y}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (\sqrt{y})^k, \\ \sqrt{1 - \sqrt{y}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) (-\sqrt{y})^k, \\ \sqrt{1 + \sqrt{y}} - \sqrt{1 - \sqrt{y}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{(2m+1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - (2m+1) + 1\right) (\sqrt{y})^{2m+1} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m)!}{(2m)!(2m+1)16^m} y^m \sqrt{y}. \end{aligned}$$

If this is divided by $\sqrt{2y}$, we will ultimately have

$$\left(1 + \sqrt{1 - y}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m)!16^{-m}}{(2m)!(2m+1)\sqrt{2}} y^m.$$

Thus, the coefficients of this series are positive.

Let's find the variance function.

We have:

$$x = \frac{yw'(y)}{w(y)} = \frac{1 - \sqrt{1-y}}{4\sqrt{1-y}},$$

hence

$$y = \frac{8x(2x+1)}{(4x+1)^2}.$$

And hence

$$v(x) = \frac{y(x)}{y'(x)} = x(2x+1)(4x+1), \quad x > 0.$$

Then the distribution with parameterization by the mean will be such that

$$\Pr(\xi = k) = p(k, x) = \binom{4k+1}{2k} 2^{-k} x^k (2k+1)^{k+\frac{1}{2}} (4k+1)^{-2k-\frac{3}{2}}, \quad x > 0.$$

Generating functions are used to obtain numerical characteristics.

It can be directly verified that the generating function $P(z)$ satisfies the differential equation

$$v(x) \frac{\partial P}{\partial x} - z \frac{\partial P}{\partial z} + xP = 0, \quad P(1) = 1, \quad x \in X. \quad (1)$$

It follows that the generating function of the raw moments $A(z)$ satisfies the equation

$$v(x) \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} + xA = 0, \quad A(0) = 1; \quad (2)$$

the generating function of the central moments $C(z)$ satisfies the equation

$$v(x) \left(\frac{\partial C}{\partial x} + zC \right) - \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad C(0) = 1; \quad (3)$$

the generating function of the cumulants $K(z)$ satisfies the equation

$$v(x) \frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial z} + x = 0, \quad K(0) = 0. \quad (4)$$

Theorem 1. *The raw moments α_m , central moments μ_m , and cumulants χ_m , $m = 1, 2, \dots$ satisfy the following recurrence relations:*

$$\alpha_{m+1} = x\alpha_m + v(x) \frac{d\alpha_m}{dx}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = x, \quad (5)$$

$$\mu_{m+1} = m\mu_{m-1} + v(x) \frac{d\mu_m}{dx}, \quad \mu_0 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad (6)$$

$$\chi_{m+1} = v(x) \frac{d\chi_m}{dx}, \quad \chi_1 = x. \quad (7)$$

Proof. To obtain relation (5), we differentiate (2) m times with respect to z and substitute $z = 0$. To obtain relation (6), we differentiate (3) m times with respect to z and substitute $z = 0$. To obtain relation (7), we differentiate (4) m times with respect to z and substitute $z = 0$.

In particular, from (5), (6), (7) we find

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= x^2 + x(2x + 1)(4x + 1), \\ \alpha_3 &= x^3 + 3x^2(2x + 1)(4x + 1) + v(x)v'(x), \\ \chi_2 &= v(x), \\ \chi_3 &= v(x)v'(x).\end{aligned}$$

4. Conclusions. The power series distribution of the function $w(y) = (1 + \sqrt{1 - y})^{-\frac{1}{2}}$ was obtained, and its characteristics were studied in the case of parameterization by the mean. The explicit form of the dispersion function was established, and recursive relations for the raw and central moments, as well as for the cumulants, were proved.

Unlike previously known results, which mainly considered individual examples or parameterization by the initial coefficients of the series, this work constructs the distribution using mean-based parameterization, allowing a direct connection between the properties of the distribution and its mathematical expectation. This approach simplifies the analysis of the behavior of the variance and moments and also enables effective comparison of different distributions within the same class.

The value of the obtained result lies in the fact that the considered generating function has positive coefficients in its power series expansion, ensuring the correctness of probability definitions and expanding the known class of power series distribution examples. Moreover, the established recursive relations for moments and cumulants can be used for further theoretical studies and applied computations in problems of mathematical statistics and machine learning for forecasting natural and social phenomena.

References

1. Noack, A. (1950). A class of random variables with discrete distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 21(1), 127–132.
2. Kotz, S., Balakrishnan, N., & Johnson, N. L. (2000). *Continuous multivariate distributions: Volume 1: Models and applications (2nd ed.)*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons.
3. Johnson, N. L., Kemp, A. W., & Kotz, S. (2005). *Univariate discrete distributions (3rd ed.)*. Hoboken, NJ, USA: Wiley-Interscience.
4. Consul, P. C., & Famoye, F. (2006). *Lagrangian probability distributions*. Boston, MA, USA: Birkhäuser / CRC Press.
5. Volkov, Yu. I. (2002). Distributions of power series with given covariances. *Scientific notes of the Kirovohrad State Pedagogical University named after V. Vynnychenko. Series: Physical and mathematical sciences*, 43, 16–21 [in Ukrainian].
6. Volkov, Yu. I., & Voinalovych, N. M. (2016). *Cycle of lectures on concrete mathematics*. Kirovohrad: Ukraine [in Ukrainian].

Волков О. Ю., Войналович Н. М. Про розподіл степеневого ряду з параметризацією середнім.

В статті досліджено розподіл степеневого ряду функції $w(y) = (1 + \sqrt{1 - y})^{-\frac{1}{2}}$.

Отримано розклад розглядуваної функції в степеневий ряд $(1 + \sqrt{1 - y})^{-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m)!16^{-m}}{(2m)!(2m+1)\sqrt{2}} y^m$. Знайдено дисперсійну функцію $v(x) = x(2x + 1)(4x + 1)$, $x > 0$. Побудовано розподіл з параметризацією середнім

$$\Pr(\xi = k) = \binom{4k + 1}{2k} 2^{-k} x^k (2k + 1)^{k + \frac{1}{2}} (4k + 1)^{-2k - \frac{3}{2}}, \quad x > 0.$$

Доведено, що початкові моменти α_m , центральні моменти μ_m , кумулянти χ_m , $m = 1, 2, \dots$ задовольняють такі рекурентні співвідношення: $\alpha_{m+1} = x\alpha_m + v(x) \frac{d\alpha_m}{dx}$, $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = x$; $\mu_{m+1} = m\mu_{m-1} + v(x) \frac{d\mu_m}{dx}$, $\mu_0 = 1, \mu_1 = 0$; $\chi_{m+1} = v(x) \frac{d\chi_m}{dx}$, $\chi_1 = x$.

Ключові слова: степеневий ряд, розподіл, параметризація середнім, числові характеристики, дисперсійна функція.

Received 16.09.2025

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).28-42](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).28-42)**I. I. Golichenko¹, M. P. Moklyachuk²**

¹ National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute",
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Probability Theory,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
idubovetska@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5639-8271>

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Professor of the Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
moklyachuk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>

INTERPOLATION PROBLEM FOR PERIODICALLY CORRELATED PROCESSES WITH MISSING OBSERVATIONS

The problem of the optimal linear estimation of a linear functional depending on the unknown values of periodically correlated stochastic process from observations of the process with additive noise with missing observations is considered. Formulas for calculating the mean square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional are proposed in the case where spectral densities are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty, where the spectral densities are not exactly known while some classes of admissible spectral densities are specified.

Keywords: periodically correlated stochastic process, spectral characteristics, mean-square error, minimax (robust) estimate, least favorable spectral density, minimax spectral characteristics.

1. Introduction. The investigation of cyclostationarity as a phenomenon was started by W. R. Bennett in 1958, [1]. He studied the statistical characteristics of signals in channels of communication and called the group of such signals the cyclostationary process. That is a nonstationary process having a periodically varying in time statistical characteristics. Literature review of theory and application of cyclostationarity in different spheres of research is presented in the article [2] by W. A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura. In other sources cyclostationary processes are called periodically stationary, periodically nonstationary, periodically correlated. We will use the term periodically correlated processes.

E. G. Gladyshev, [3], was one of the first who started the study of periodically correlated processes with continuous time. H. L. Hurd continued study of periodically correlated processes and their properties in the papers [4], [5]. A. Makagon in [6] investigated relations between periodically correlated processes and stationary processes.

A. N. Kolmogorov [7], N. Wiener [8], A. M. Yaglom [9], [10], proposed their methods of solution of estimation problems for stationary processes and sequences in the case of spectral certainty. In the case where complete information on the spectral densities is impossible, but a set of admissible spectral densities is given, the minimax approach to estimation problem is used. That is we find estimate that minimizes the mean square error for all spectral densities from a given class

of densities simultaneously. U. Grenander, [11], was the first who applied the minimax estimation method to find solution of the extrapolation problem for stationary processes.

The detailed analysis of the estimation problems with missing observations are presented in the books by M. J. Daniels and J. W. Hogan [12], P. E. McKnight et al [13]. The interpolation and extrapolation problems of linear functionals from periodically correlated stochastic sequences with missing observations were investigated by I. I. Golichenko and M. P. Moklyachuk in [14], [15], by I. I. Golichenko, O. Yu. Masyutka and M. P. Moklyachuk in [16].

In this paper we study the problem of mean square optimal linear estimation of the functional $A_s\zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(t)\zeta(t)dt$ which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$. The estimation is based on observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} [M_l, M_l + N_{l+1}]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$. We obtain formulas for calculation the mean square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of $A_s\zeta$ in the case of spectral certainty. The least favorable spectral density and the minimax (robust) spectral characteristic of the optimal linear estimate of $A_s\zeta$ are found in the case when the spectral density is not known, but the class of admissible densities is given.

2. Periodically correlated processes and generated vector stationary sequences.

Definition 1. [3] Mean square continuous stochastic process $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $E\zeta(t) = 0$, is called *periodically correlated (PC)* with period T , if its correlation function $K(t+u, u) = E\zeta(t+u)\overline{\zeta(u)}$ for all $t, u \in \mathbb{R}$ and some fixed $T > 0$ is such that

$$K(t+u, u) = K(t+u+T, u+T).$$

Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\theta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually uncorrelated PC processes. We construct two sequences of stochastic functions

$$\{\zeta_j(u) = \zeta(u + jT), u \in [0, T), j \in \mathbb{Z}\}, \quad (1)$$

$$\{\theta_j(u) = \theta(u + jT), u \in [0, T), j \in \mathbb{Z}\}. \quad (2)$$

Sequences (1) and (2) form the $L_2([0, T); H)$ -valued stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, respectively, with the correlation functions

$$B_\zeta(l, j) = \langle \zeta_l, \zeta_j \rangle_H = \int_0^T K_\zeta(u + (l-j)T, u) du = B_\zeta(l-j),$$

$$B_\theta(l, j) = \langle \theta_l, \theta_j \rangle_H = \int_0^T K_\theta(u + (l-j)T, u) du = B_\theta(l-j),$$

where $K_\zeta(t, s) = E\zeta(t)\overline{\zeta(s)}$, $K_\theta(t, s) = E\theta(t)\overline{\theta(s)}$ are correlation functions of PC processes $\zeta(t)$, $\theta(t)$.

Let us define in $L_2([0, T); \mathbb{R})$ the orthonormal basis

$$\{\tilde{e}_k = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{2\pi i \{(-1)^k \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\} u/T}, k = 1, 2, \dots\}, \quad \langle \tilde{e}_j, \tilde{e}_k \rangle = \delta_{kj}.$$

Stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ can be represented in the form

$$\zeta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{kj} \tilde{e}_k, \quad \zeta_{kj} = \langle \zeta_j, \tilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \zeta_j(v) e^{-2\pi i \{(-1)^k [\frac{k}{2}]\} v/T} dv, \quad (3)$$

$$\theta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{kj} \tilde{e}_k, \quad \theta_{kj} = \langle \theta_j, \tilde{e}_k \rangle. \quad (4)$$

Let us name sequences

$$\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}, \{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\},$$

or corresponding vector sequences

$$\{\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\}, \{\vec{\theta}_j = (\theta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\}$$

generated vector stationary sequences, that means that vector sequences $\{\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\}, \{\vec{\theta}_j = (\theta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top, j \in \mathbb{Z}\}$ are generated by processes $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}, \{\theta(t), t \in \mathbb{R}\}$, respectively.

Components $\{\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots\}$ and $\{\theta_{kj}, k = 1, 2, \dots\}$ of stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ are such that, [17],

$$\mathbb{E} \zeta_{kj} = 0, \quad \|\zeta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |\zeta_{kj}|^2 = P_\zeta = B_\zeta(0) < \infty, \quad \mathbb{E} \zeta_{kl} \overline{\zeta_{nj}} = \langle R_\zeta(l-j) e_k, e_n \rangle,$$

$$\mathbb{E} \theta_{kj} = 0, \quad \|\theta_j\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} |\theta_{kj}|^2 = P_\theta = B_\theta(0) < \infty, \quad \mathbb{E} \theta_{kl} \overline{\theta_{nj}} = \langle R_\theta(l-j) e_k, e_n \rangle.$$

where $\{e_k, k = 1, 2, \dots\}$ is a basis of the space ℓ_2 . Correlation functions $R_\zeta(j)$ and $R_\theta(j)$ of generated vector stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ are correlation operator functions in ℓ_2 . Correlation operators $R_\zeta(0) = R_\zeta$, $R_\theta(0) = R_\theta$ are kernel operators and their kernel norms satisfy the following restrictions:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\zeta e_k, e_k \rangle = \|\zeta_j\|_H^2 = P_\zeta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_\theta e_k, e_k \rangle = \|\theta_j\|_H^2 = P_\theta,$$

Generated vector stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}, \{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ have spectral density functions $f(\lambda) = \{f_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$, $g(\lambda) = \{g_{kn}(\lambda)\}_{k,n=1}^{\infty}$ that are positive operator valued functions of variable $\lambda \in [-\pi, \pi)$ in ℓ_2 , if their correlation functions $R_\zeta(j)$ and $R_\theta(j)$ can be represented in the form

$$\langle R_\zeta(j) e_k, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle f(\lambda) e_k, e_n \rangle d\lambda,$$

$$\langle R_\theta(j) e_k, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\lambda} \langle g(\lambda) e_k, e_n \rangle d\lambda, \quad k, n = 1, 2, \dots$$

Spectral densities $f(\lambda), g(\lambda)$ a.e. on $[-\pi, \pi)$ are kernel operators with integrable kernel norms:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda = \|\zeta_j\|_H^2 = P_\zeta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle g(\lambda) e_k, e_k \rangle d\lambda = \|\theta_j\|_H^2 = P_\theta.$$

Hilbert space projection method of linear interpolation.

Let consider the problem of mean square optimal linear estimation of the functional

$$A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(t) \zeta(t) dt,$$

which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$. The estimation is based on observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} [M_l, M_l + N_{l+1}]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$. Process $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated process. The function $a(t)$, $t \in \mathbb{R}$, satisfies the condition $\sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l+N_{l+1}} |a(t)| dt < \infty$.

We assume that length of each interval of observations is a multiple of the period T and the length of each interval of missed observations is a multiple of T , what means that

$$K_1 = T \cdot K_1^T, K_2 = T \cdot K_2^T, \dots, K_{s-1} = T \cdot K_{s-1}^T, \\ N_1 = T \cdot N_1^T, N_2 = T \cdot N_2^T, \dots, N_s = T \cdot N_s^T,$$

respectively. The set which corresponds to the set S is of the form

$$\tilde{S} = \bigcup_{l=0}^{s-1} \{M_l^T, \dots, M_l^T + N_{l+1}^T - 1\}.$$

The functional $A_s \zeta$ can be written as

$$A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l+N_{l+1}} a(t) \zeta(t) dt = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \int_0^T a(u+jT) \zeta(u+jT) du,$$

where $M_l = T \cdot M_l^T$, $l = 0, \dots, s-1$.

Denoting by $a(u+jT) = a_j(u)$, $\zeta(u+jT) = \zeta_j(u)$, $j \in \tilde{S}$, $u \in [0, T)$, and taking into account the decomposition (3) of generated vector stationary sequence $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, [18], the functional $A_s \zeta$ can be written as

$$A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \int_0^T a(u+jT) \zeta(u+jT) du = \\ = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \left(a_{1j} \zeta_{1j} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+(-1)^n, j} \zeta_{nj} \right) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \vec{a}_j^\top \vec{\zeta}_j,$$

where vectors $\vec{a}_j$ have the special form

$$\vec{a}_j = (a_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top = (a_{1j}, a_{3j}, a_{2j}, \dots, a_{2k+1, j}, a_{2k, j}, \dots)^\top, j \in \tilde{S},$$

where $a_{kj} = \langle a_j, \tilde{e}_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T a_j(v) e^{-2\pi i \{(-1)^k [\frac{k}{2}]\} v/T} dv$, $\vec{\zeta}_j = (\zeta_{kj}, k = 1, 2, \dots)^\top$, $j \in \tilde{S}$, is generated vector stationary sequence.

Let us assume that coefficients $\{\vec{a}_j, j \in \tilde{S}\}$ satisfy conditions

$$\|\vec{a}_j\| < \infty, \quad \|\vec{a}_j\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kj}|^2, \quad j \in \tilde{S}. \quad (5)$$

On condition (5) functional $A_s \zeta$ has finite second moment.

Let the spectral densities $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ satisfy the minimality condition

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))^{-1}] d\lambda < +\infty. \quad (6)$$

Condition (6) is necessary and sufficient in order that the error-free interpolation of the unknown values of the sequence $\vec{\zeta}_j + \vec{\theta}_j$ is impossible, [19].

Denote by $L_2(f)$ the Hilbert space of vector valued functions $\vec{b}(\lambda) = \{b_\nu(\lambda)\}_{\nu=1}^{\infty}$ that are square integrable with respect to a measure with the density $f(\lambda) = \{f_{\nu\mu}(\lambda)\}_{\nu,\mu=1}^{\infty}$: $\int_{-\pi}^{\pi} \vec{b}^\top(\lambda) f(\lambda) \vec{b}(\lambda) d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu,\mu=1}^{\infty} b_\nu(\lambda) f_{\nu\mu}(\lambda) \overline{b_\mu(\lambda)} d\lambda < +\infty$.

Denote by $L_2^s(f)$ the subspace in $L_2(f)$ generated by the functions $e^{ij\lambda} \delta_\nu, \delta_\nu = \{\delta_{\nu\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}, j \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{S}, \nu = 1, \dots$, where $\delta_{\nu\nu} = 1, \delta_{\nu\mu} = 0$ for $\nu \neq \mu$.

Every mean-square optimal linear estimate $\widehat{A_s \zeta}$ of the functional $A_s \zeta$ from observations of the sequence $\zeta_j + \theta_j$ at points $j \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{S}$ has the form

$$\widehat{A_s \zeta} = \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^\top(e^{i\lambda}) (Z^\zeta(d\lambda) + Z^\theta(d\lambda)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(e^{i\lambda}) (Z_\nu^\zeta(d\lambda) + Z_\nu^\theta(d\lambda)), \quad (7)$$

where $Z^\zeta(\Delta) = \{Z_\nu^\zeta(\Delta)\}_{\nu=1}^{\infty}$ and $Z^\theta(\Delta) = \{Z_\nu^\theta(\Delta)\}_{\nu=1}^{\infty}$ are orthogonal random measures of the sequences ζ_j and θ_j , and $\vec{h}(e^{i\lambda}) = \{h_\nu(e^{i\lambda})\}_{\nu=1}^{\infty}$ is the spectral characteristic of the estimate $\widehat{A_s \zeta}$. The function $\vec{h}(e^{i\lambda}) \in L_2^s(f^\zeta + f^\theta)$.

The mean square error $\Delta(\vec{h}; f^\zeta, f^\theta)$ of the estimate $\widehat{A_s \zeta}$ is calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{h}; f^\zeta, f^\theta) &= E|A_s \zeta - \widehat{A_s \zeta}|^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[A_s(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda}) \right]^\top f^\zeta(\lambda) \overline{\left[A_s(e^{i\lambda}) - \vec{h}(e^{i\lambda}) \right]} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^\top(e^{i\lambda}) f^\theta(\lambda) \overline{\vec{h}(e^{i\lambda})} d\lambda, \end{aligned} \quad (8)$$

where $A_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T + N_{l+1}^T - 1} \vec{a}_j e^{ij\lambda}$.

The spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta, f^\theta)$ of the optimal linear estimate of $A_s \zeta$ minimizes the mean square error

$$\Delta(f^\zeta, f^\theta) = \Delta(\vec{h}(f^\zeta, f^\theta); f^\zeta, f^\theta) = \min_{\vec{h} \in L_2^s(f^\zeta + f^\theta)} \Delta(\vec{h}; f^\zeta, f^\theta) = \min_{\widehat{A_s \zeta}} E|A_s \zeta - \widehat{A_s \zeta}|^2. \quad (9)$$

Optimal estimate $\widehat{A_s \zeta}$ is a solution of optimization problem (9). With the help of the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov, [7], we can find a solution of the optimization problem (9). The optimal linear estimate $\widehat{A_s \zeta}$ is a projection of the functional $A_s \zeta$ on the subspace $H^-[\zeta + \theta] = H^-[\zeta_{kj} + \theta_{kj}, j \in$

$\mathbb{Z} \setminus \tilde{S}, k = 1, 2, \dots]$ of the Hilbert space $H = \{\xi : \mathbf{E}\xi = 0, \mathbf{E}|\xi|^2 < \infty\}$. The projection is characterized by the following conditions: 1) $\widehat{A_s \zeta} \in H^-[\zeta + \theta]$, 2) $A_s \zeta - \widehat{A_s \zeta} \perp H^-[\zeta + \theta]$.

From condition 2) it follows that

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s^\top(e^{i\lambda})f^\zeta(\lambda) - h^\top(e^{i\lambda})(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \tilde{S}. \quad (10)$$

From (10) we can derive the formula for the spectral characteristic of the optimal estimate

$$\begin{aligned} \vec{h}^\top(f^\zeta, f^\theta) &= (A_s^\top(e^{i\lambda})f^\zeta(\lambda) - C_s^\top(e^{i\lambda})) [f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda)]^{-1} = \\ &= A_s^\top(e^{i\lambda}) - (A_s^\top(e^{i\lambda})f^\theta(\lambda) + C_s^\top(e^{i\lambda})) [f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda)]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

where $C_s(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{k_l=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \vec{c}_{k_l} e^{ik_l\lambda}$, column-vectors of unknown coefficients $\vec{c}_{k_l} = (c_{kk_l}, k \geq 1) = (c_{1k_l}, c_{2k_l}, \dots)^\top$, $l = 0, \dots, s-1$, $k_l = M_l^T, \dots, M_l^T + N_{l+1}^T - 1$.

Condition 1) is satisfied when the system of equalities

$$\int_{-\pi}^{\pi} \vec{h}^\top(f^\zeta, f^\theta) e^{-ij\lambda} d\lambda = 0, \quad j \in \tilde{S}, \quad (12)$$

holds true.

Let us define operators $\mathbf{D}_s, \mathbf{B}_s$ that are determined by matrices

$$\mathbf{D}_s = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} & \dots & D_{0,s-1} \\ D_{10} & D_{11} & \dots & D_{1,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{s-1,0} & D_{s-1,1} & \dots & D_{s-1,s-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_s = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & \dots & B_{0,s-1} \\ B_{10} & B_{11} & \dots & B_{1,s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s-1,0} & B_{s-1,1} & \dots & B_{s-1,s-1} \end{pmatrix},$$

constructed from block-matrices

$$D_{mn} = \{D_{mn}(k, j)\}_{k=M_m^T}^{M_m^T+N_{m+1}^T-1} \}_{j=M_n^T}^{M_n^T+N_{n+1}^T-1}, \quad B_{mn} = \{B_{mn}(k, j)\}_{k=M_m^T}^{M_m^T+N_{m+1}^T-1} \}_{j=M_n^T}^{M_n^T+N_{n+1}^T-1},$$

$$m, n = 0, \dots, s-1,$$

with elements

$$D_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^\zeta(\lambda)(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))^{-1}]^\top e^{i(j-k)\lambda} d\lambda,$$

$$B_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))^{-1}]^\top e^{i(j-k)\lambda} d\lambda,$$

$$k = M_m^T, \dots, M_m^T + N_{m+1}^T - 1, \quad j = M_n^T, \dots, M_n^T + N_{n+1}^T - 1, \quad m, n = 0, \dots, s-1.$$

With the help of the defined operators, relation (12) can be written in the form of the equation

$$\mathbf{D}_s \vec{a}_s = \mathbf{B}_s \vec{c}_s, \quad (13)$$

where $\vec{a}_s, \vec{c}_s$ are column-vectors

$$\vec{a}_s = \left(\vec{a}_0^\top, \dots, \vec{a}_{N_1^T-1}^\top, \vec{a}_{M_1^T}^\top, \dots, \vec{a}_{M_1^T+N_2^T-1}^\top, \dots, \vec{a}_{M_{s-1}^T}^\top, \dots, \vec{a}_{M_{s-1}^T+N_s^T-1}^\top \right)^\top,$$

$$\vec{c}_s = \left(\vec{c}_0^\top, \dots, \vec{c}_{N_1^T-1}^\top, \vec{c}_{M_1^T}^\top, \dots, \vec{c}_{M_1^T+N_2^T-1}^\top, \dots, \vec{c}_{M_{s-1}^T}^\top, \dots, \vec{c}_{M_{s-1}^T+N_s^T-1}^\top \right)^\top.$$

If the inverse matrix for the block-matrix $\mathbf{B}_s$ exists, the unknown components $\vec{c}_{k_l}$, $l = 0, \dots, s-1$, $k_l = M_l^T, \dots, M_l^T + N_{l+1}^T - 1$, of vector $\vec{c}_s$ are determined from the equation (13).

The mean-square error of the optimal estimate $\widehat{A_s \zeta}$ is calculated by the formula (8) and is of the form

$$\Delta(f^\zeta, f^\theta) = \langle \vec{a}_s, \mathbf{R}_s \vec{a}_s \rangle + \langle \vec{c}_s, \mathbf{B}_s \vec{c}_s \rangle, \quad (14)$$

where $\langle a, b \rangle$ denotes the scalar product, $\mathbf{R}_s$ is the linear operator determined by matrix $\mathbf{R}_s = \{R_{mn}\}_{m,n=0}^{s-1}$ composed with block-matrices

$$R_{mn} = \{R_{mn}(k, j)\}_{k=M_m^T}^{M_m^T+N_{m+1}^T-1}^{j=M_n^T}^{M_n^T+N_{n+1}^T-1}, \quad m, n = 0, \dots, s-1,$$

with elements

$$R_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^\zeta(\lambda)(f^\zeta(\lambda) + f^\theta(\lambda))^{-1} f^\theta(\lambda)]^\top e^{i(j-k)\lambda} d\lambda,$$

$$k = M_m^T, \dots, M_m^T + N_{m+1}^T - 1, \quad j = M_n^T + 1, \dots, M_n^T + N_{n+1}^T - 1.$$

The following statement holds true.

Theorem 1. *Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ and $\{\theta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be mutually uncorrelated PC processes such that stationary sequences $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ and $\{\theta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, which are built by relations (1), (2), respectively, have spectral density matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$. Assume that the matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ satisfy the minimality condition (6). Let coefficients $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots\}$ that determine the functional $A_s \zeta$ satisfy conditions (5). Then the spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta, f^\theta)$ and the mean square error $\Delta(f^\zeta, f^\theta)$ of the optimal estimate of the functional $A_s \zeta$ from observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ are given by (11), (14). The optimal estimate $\widehat{A_s \zeta}$ of the functional $A_s \zeta$ is calculated by the formula (7).*

In the case of observations without noise we have the following corollary.

Corollary 1. *Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a PC process such that stationary sequence $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, which is built by relations (1), has spectral density matrix $f^\zeta(\lambda)$. Assume that the matrix $f^\zeta(\lambda)$ satisfies the minimality condition*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[(f^\zeta(\lambda))^{-1}] d\lambda < +\infty. \quad (15)$$

Let coefficients $\{\vec{a}_j, j = 0, 1, \dots\}$ that determine the functional $A_s \zeta$ satisfy conditions (5). The spectral characteristic $\vec{h}(f^\zeta)$ and the mean square error $\Delta(f^\zeta)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_s \zeta$ based on observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, are calculated by formulas

$$\vec{h}^\top(f^\zeta) = A_s^\top(e^{i\lambda}) - C_s^\top(e^{i\lambda})[f^\zeta(\lambda)]^{-1}, \quad (16)$$

$$\Delta(f^\zeta) = \langle \vec{c}_s, \vec{a}_s \rangle, \quad (17)$$

where $\vec{a}_s, \vec{c}_s$ are column-vectors, components of vector $\vec{c}_s$ are determined from the equation $\mathbf{B}_s \vec{c}_s = \vec{a}_s$, if the inverse matrix for $\mathbf{B}_s$ exists. Operator $\mathbf{B}_s$ is constructed from block-matrices $B_{mn} = \{B_{mn}(k, j)\}_{k=M_m^T, j=M_n^T}^{M_m^T+N_{m+1}^T-1, M_n^T+N_{n+1}^T-1}$, $m, n = 0, \dots, s-1$, with elements which are the Fourier coefficients of the matrix function $[(f^\zeta(\lambda))^{-1}]^\top$:

$$B_{mn}(k, j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(f^\zeta(\lambda))^{-1}]^\top e^{i(j-k)\lambda} d\lambda,$$

$$k = M_m^T, \dots, M_m^T + N_{m+1}^T - 1, j = M_n^T, \dots, M_n^T + N_{n+1}^T - 1, m, n = 0, \dots, s-1.$$

Minimax (robust) method of linear interpolation.

Let $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ be the spectral density matrices of generated stationary sequences ζ_j and θ_j , which are built by relations (1), (2), respectively.

Formulas (11), (14) and (16), (17) may be applied for finding the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimate of the functional $A_s \zeta$ only under the condition that the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ are exactly known. But when the density matrices are not known exactly while a set $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is given, the minimax (robust) approach to estimation of functionals from unknown values of stationary sequences is used. In this case we find the estimate which minimizes the mean square error for all spectral densities from the given set simultaneously.

Definition 2. For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ are called the least favorable in D for the optimal linear estimation of the functional $A_s \zeta$ if

$$\Delta(f^0, g^0) = \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f^0, g^0) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}(f, g); f, g).$$

Definition 3. For a given class of pairs of spectral densities $D = D_f \times D_g$ the spectral characteristic $\vec{h}^0(\lambda)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_s \zeta$ is called minimax (robust) if

$$\vec{h}^0(\lambda) \in H_D = \bigcap_{(f, g) \in D} L_2^s(f + g),$$

$$\min_{\vec{h} \in H_D} \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}; f, g) = \max_{(f, g) \in D} \Delta(\vec{h}^0; f, g).$$

Taking into consideration these definitions and the obtained relations we can verify that the following lemmas hold true.

Lemma 1. The spectral density matrices $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$, that satisfy condition (6), are the least favorable in D for the optimal linear estimation of $A_s \zeta$, if the Fourier coefficients of the matrix functions $(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}$, $f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}$, $f^0(\lambda)(f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1}g^0(\lambda)$ define matrices $\mathbf{B}_s^0, \mathbf{D}_s^0, \mathbf{R}_s^0$, that determine a solution of the constrained optimization problem

$$\max_{(f, g) \in D} (\langle \vec{a}_s, \mathbf{R}_s \vec{a}_s \rangle + \langle (\mathbf{B}_s)^{-1} \mathbf{D}_s \vec{a}_s, \mathbf{D}_s \vec{a}_s \rangle) = \langle \vec{a}_s, \mathbf{R}_s^0 \vec{a}_s \rangle + \langle (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \mathbf{D}_s^0 \vec{a}_s, \mathbf{D}_s^0 \vec{a}_s \rangle.$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ is given by (11), if $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$.

Lemma 2. *The spectral density matrix $f^0(\lambda) \in D_f$, that satisfies condition (15), is the least favorable in D_f for the optimal linear estimation of $A_s \zeta$ based on observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, if the Fourier coefficients of the matrix function $(f^0(\lambda))^{-1}$ define the matrix $\mathbf{B}_s^0$, that determine a solution of the constrained optimization problem*

$$\max_{f \in D_f} \langle (\mathbf{B}_s)^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle = \langle (\mathbf{B}_s^0)^{-1} \vec{a}_s, \vec{a}_s \rangle.$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0)$ is given by (16), if $\vec{h}(f^0) \in H_D$.

The least favorable spectral densities $f^0(\lambda) \in D_f$, $g^0(\lambda) \in D_g$ and the minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$ form a saddle point of the function $\Delta(\vec{h}; f, g)$ on the set $H_D \times D$. The saddle point inequalities

$$\Delta(\vec{h}^0; f, g) \leq \Delta(\vec{h}^0; f^0, g^0) \leq \Delta(\vec{h}; f^0, g^0), \quad \forall \vec{h} \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

hold when $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0, g^0)$, $\vec{h}(f^0, g^0) \in H_D$ and (f^0, g^0) is a solution of the constrained optimization problem

$$\sup_{(f, g) \in D_f \times D_g} \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) = \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f^0, g^0). \quad (18)$$

The linear functional $\Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g)$ is calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{h}(f^0, g^0); f, g) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}))^\top (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} f(\lambda) \times \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \overline{(A_s(e^{i\lambda})g^0(\lambda) + C_s^0(e^{i\lambda}))} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_s(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}))^\top \times \\ & (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} g(\lambda) (f^0(\lambda) + g^0(\lambda))^{-1} \overline{(A_s(e^{i\lambda})f^0(\lambda) - C_s^0(e^{i\lambda}))} d\lambda. \end{aligned}$$

In the case of estimation of the functional based on observations without noise we have the following statement.

Lemma 3. *Let $f^0(\lambda)$ satisfies the condition (15) and be a solution of the constrained optimization problem*

$$\Delta(\vec{h}(f^0); f) \rightarrow \sup, f(\lambda) \in D_f, \quad (19)$$

$$\Delta(\vec{h}(f^0); f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (C_s^0(e^{i\lambda}))^\top (f^0(\lambda))^{-1} f(\lambda) (f^0(\lambda))^{-1} \overline{(C_s^0(e^{i\lambda}))} d\lambda.$$

Then $f^0(\lambda)$ is the least favorable spectral density matrix for the optimal linear estimation of $A_s \zeta$ based on observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$. The minimax spectral characteristic $\vec{h}^0 = \vec{h}(f^0)$ is given by (16), if $\vec{h}(f^0) \in H_D$.

The least favorable spectral densities in D_0^- .

Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a PC process such that stationary sequence $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, which is built by relations (1), has spectral density matrix $f^\zeta(\lambda)$. Assume that the length of each interval of observations is a multiple of the period T : $K_1 =$

$T \cdot K_1^T, K_2 = T \cdot K_2^T, \dots, K_{s-1} = T \cdot K_{s-1}^T$, and the length of each interval of missed observations is a multiple of T : $N_1 = T \cdot N_1^T, N_2 = T \cdot N_2^T, \dots, N_s = T \cdot N_s^T$.

Consider the problem of minimax estimation of the functional $A_s \zeta$ from observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ without noise, under the condition that the spectral density matrix $f(\lambda)$ of generated stationary sequence ζ_j belongs to the set

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) d\lambda = P \right\},$$

where $P = \{p_{\nu\mu}\}_{\nu,\mu=1}^{\infty}$ is a given positive definite matrix and $\det P \neq 0$.

With the help of Lemma 3 and the method of Lagrange multipliers we can find that a solution $f^0(\lambda)$ of the constrained optimization problem (19) satisfy the following relation:

$$[(f^0(\lambda))^{-1}]^{\top} C_s^0(e^{i\lambda}) = [(f^0(\lambda))^{-1}]^{\top} \vec{\alpha}, \quad (20)$$

where $\vec{\alpha} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ – a vector of Lagrange multipliers, $C_s^0(e^{i\lambda}) = \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{j=M_l^T}^{M_l^T+N_{l+1}^T-1} \vec{c}_j^0 e^{ij\lambda}$, $\vec{c}_s^0 = \{(\vec{c}_j^0)^{\top}\}_{j \in \tilde{S}}$ – column-vector of unknown coefficients $\vec{c}_j^0$, $j \in \tilde{S}$, which are determined from relation $\mathbf{B}_s^0 \vec{c}_s^0 = \vec{a}_s$, the matrix $\mathbf{B}_s^0$ is constructed from the Fourier coefficients of the matrix function $[(f^0(\lambda))^{-1}]^{\top}$:

$$B_s^0(k, j) = R^{\top}(k - j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(f^0(\lambda))^{-1}]^{\top} e^{i(j-k)\lambda} d\lambda, \quad k, j \in \tilde{S},$$

The Fourier coefficients $R(k) = R^*(-k)$, $k \in \tilde{S}$, found from the equation $\mathbf{B}_s^0 \vec{a}_s = \vec{a}_s$, for $\vec{a}_s = (\vec{\alpha}, \vec{0}, \dots, \vec{0}, \dots)^{\top}$, satisfy relation (20) and $\mathbf{B}_s^0 \vec{c}_s^0 = \vec{a}_s$. From equations above we obtain that

$$R(k) = \begin{cases} P(\vec{a}_0)^{-1} \vec{a}_k^{\top}, & k \in \tilde{S}, \\ 0, & k \in \{0, \dots, M_{s-1}^T + N_s^T - 1\} \setminus \tilde{S}, \end{cases}$$

where $[(\vec{a}_0)^{-1}]^{\top} \cdot \vec{a}_0 = 1$. The equality $R(0) = P$ follows as a consequence of the restriction on the spectral densities from the class D_0^- .

Let the vector-valued sequence $\vec{a}_k, k \in \tilde{S}$, be such that the matrix function $(f^0(\lambda))^{-1} = \sum_{k=-(M_{s-1}^T+N_s^T-1)}^{M_{s-1}^T+N_s^T-1} R(k) e^{ik\lambda}$ is positive definite and has nonzero determinant. Then $(f^0(\lambda))^{-1}$ can be represented in the form, [20],

$$(f^0(\lambda))^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{M_{s-1}^T+N_s^T-1} Q(k) e^{-ik\lambda} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{M_{s-1}^T+N_s^T-1} Q(k) e^{-ik\lambda} \right)^*,$$

where $Q(k) = 0$ – zero matrix for $k \in \{0, \dots, M_{s-1}^T + N_s^T - 1\} \setminus \tilde{S}$. Thus $f^0(\lambda)$ is the spectral density of the vector autoregression stochastic sequence of order $M_{s-1}^T + N_s^T - 1$ generated by the equation

$$\sum_{k=0}^{M_{s-1}^T+N_s^T-1} Q(k) \vec{\zeta}_{n-k} = \vec{\varepsilon}_n, \quad (21)$$

where $\vec{\varepsilon}_n$ is a vector “white noise” sequence. The minimax spectral characteristic $\vec{h}(f^0)$ is given by

$$\vec{h}(f^0) = - \sum_{k=1}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} \overline{R(k)} (P^T)^{-1} \vec{a}_0 e^{-ik\lambda}. \quad (22)$$

Hence the following theorem holds true.

Theorem 2. *Let the sequence $\vec{a}_j$, $j \in \tilde{S}$, which determine the linear functional $A_s \zeta$ from observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ without noise, be such that the matrix function $\sum_{k=-(M_{s-1}^T + N_s^T - 1)}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} R(k) e^{ik\lambda}$, where*

$$R(k) = R^*(-k) = \begin{cases} P(\vec{a}_0)^{-1} \vec{a}_k^\top, & k \in \tilde{S}, \\ 0, & k \in \{0, \dots, M_{s-1}^T + N_s^T - 1\} \setminus \tilde{S}, \end{cases}$$

is positive definite and has nonzero determinant. Then the least favorable in the class D_0^- spectral density for the optimal linear estimate of $A_s \zeta$ is given by the formula

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{k=-(M_{s-1}^T + N_s^T - 1)}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} R(k) e^{ik\lambda} \right)^{-1}. \quad (23)$$

The minimax spectral characteristic $\vec{h}(f^0)$ is given by (22).

The least favorable spectral densities in D_M^- .

Let $\{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ be a PC process such that stationary sequence $\{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$, which is built by relations (1), has spectral density matrix $f^\zeta(\lambda)$. Assume that the length of each interval of observations is a multiple of the period T : $K_1 = T \cdot K_1^T, K_2 = T \cdot K_2^T, \dots, K_{s-1} = T \cdot K_{s-1}^T$, and the length of each interval of missed observations is a multiple of T : $N_1 = T \cdot N_1^T, N_2 = T \cdot N_2^T, \dots, N_s = T \cdot N_s^T$.

Consider the problem of minimax estimation of the functional $A_s \zeta$ from observations of the process $\zeta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$ without noise, under the condition that the spectral density matrix $f(\lambda)$ of generated stationary sequence ζ_j belongs to the set

$$D_0^- = \left\{ f(\lambda) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\lambda) \cos(m\lambda) d\lambda = P(m), \quad m = 0, 1, \dots, M \right\},$$

where the sequence of matrices $P(m) = \{P_{\nu\mu}(m)\}_{\nu,\mu=1}^\infty$, $P(m) = P^*(-m)$, $m = 0, \dots, M$, is such that the matrix function $\sum_{m=-M}^M P(m) e^{im\lambda}$ is positive definite and has the determinant that does not equal zero.

With the help of Lemma 3 and the method of Lagrange multipliers we can find that solution $f^0(\lambda)$ of the constrained optimization problem (19) satisfy the following relation:

$$\begin{aligned} & [(f^0(\lambda))^{-1}]^\top C_s^0(e^{i\lambda}) (C_s^0(e^{i\lambda}))^* [(f^0(\lambda))^{-1}]^\top = \\ & = [(f^0(\lambda))^{-1}]^\top \left(\sum_{m=0}^M \vec{\alpha}_m e^{im\lambda} \right) \left(\sum_{m=0}^M \vec{\alpha}_m e^{im\lambda} \right)^* [(f^0(\lambda))^{-1}]^\top, \end{aligned} \quad (24)$$

where $\vec{\alpha}_m$, $m = 0, 1, \dots, M$ are Lagrange multipliers. Relation (24) holds true if

$$\sum_{j \in \tilde{S}} \vec{c}_j^0 e^{ij\lambda} = \sum_{m=0}^M \vec{\alpha}_m e^{im\lambda}.$$

Consider two cases: 1) $M \geq M_{s-1}^T + N_s^T - 1$ and 2) $M < M_{s-1}^T + N_s^T - 1$.

Let 1) $M \geq M_{s-1}^T + N_s^T - 1$. Then the Fourier coefficients of the function $(f^0(\lambda)^{-1})^\top$ determine the matrix $\mathbf{B}_s$ and $\vec{\alpha}_{M_{s-1}^T + N_s^T} = \vec{\alpha}_{M_{s-1}^T + N_s^T + 1} = \dots = \vec{\alpha}_M = \vec{0}$. Thus, extremum problem (19) is degenerate.

Let $\vec{\alpha}_{M_{s-1}^T + N_s^T} = \dots = \vec{\alpha}_M = \vec{0}$ and $\vec{\alpha}_m = 0$, $m \notin \tilde{S}$, and $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_{M_{s-1}^T + N_s^T - 1}$ find from the equation $\mathbf{B}_s^0 \vec{\alpha}_s^0 = \vec{a}_s$, where $\vec{\alpha}_s^0 = (\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_{M_{s-1}^T + N_s^T - 1})^\top$. Then the least favorable density satisfies the relation

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{m=-M}^M P(m) e^{im\lambda} \right)^{-1} = \left(\left(\sum_{m=0}^M Q(m) e^{-im\lambda} \right) \left(\sum_{m=0}^M Q(m) e^{-im\lambda} \right)^* \right)^{-1} \quad (25)$$

This spectral density $f^0(\lambda)$ is the density of the vector stochastic autoregression sequence of the order M

$$\sum_{m=0}^M Q(m) \vec{\zeta}_{l-m} = \vec{\varepsilon}_l. \quad (26)$$

Let 2) $M < M_{s-1}^T + N_s^T - 1$. Then the matrix $\mathbf{B}_s$ is defined by the Fourier coefficients of the function $(f(\lambda)^{-1})^\top$. Among them $P(m)$, $m \in \{0, \dots, M\} \cap \tilde{S}$, are known and $P(m)$, $m \in \tilde{S} \setminus \{0, \dots, M\}$, are unknown. The unknown coefficients $\vec{\alpha}_m$, $m \in \{0, \dots, M\} \cap \tilde{S}$ and $P(m)$, $m \in \tilde{S} \setminus \{0, \dots, M\}$ we find from the equation

$$\mathbf{B}_s \vec{\alpha}_M^0 = \vec{a}_s, \quad (27)$$

where $\vec{\alpha}_M^0 = (\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_{M'}, \vec{0}, \dots, \vec{0})^\top$, M' is defined from the relation $\{0, \dots, M\} \cap \tilde{S} = \{0, \dots, M'\}$.

The equation (27) can be represented as a system of the following equations $\sum_{m \in \{0, \dots, M\} \cap \tilde{S}} B_s(j, m) \vec{\alpha}_m = \vec{a}_j$, $j \in \tilde{S}$. From the first M' equations we can find coefficients $\vec{\alpha}_0, \dots, \vec{\alpha}_{M'}$ and from the next equations we can find matrices $P(m)$, $m \in \tilde{S} \setminus \{0, \dots, M\}$.

If the sequence of matrices $P(m)$, $m \in \tilde{S}$, is such that $P(m) = P^*(m)$, $m \in \tilde{S}$, the matrix function $\sum_{m=-(M_{s-1}^T + N_s^T - 1)}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} P(m) e^{im\lambda}$ is positive-definite and has the determinant which does not equal zero identically, then the least favorable spectral density $f^0(\lambda)$ is defined by the formula

$$f^0(\lambda) = \left(\sum_{m=-(M_{s-1}^T + N_s^T - 1)}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} P(m) e^{im\lambda} \right)^{-1} \quad (28)$$

and $f^0(\lambda) = \left(\left(\sum_{m=0}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} Q(m) e^{-im\lambda} \right) \left(\sum_{m=0}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} Q(m) e^{-im\lambda} \right)^* \right)^{-1}$. This spectral density $f^0(\lambda)$ is the density of the vector stochastic autoregression sequence of

the order $M_{s-1}^T + N_s^T - 1$

$$\sum_{m=0}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} Q(m) \vec{\zeta}_{l-m} = \vec{\varepsilon}_l. \quad (29)$$

Thus, the following theorem holds true.

Theorem 3. *If $M \geq M_{s-1}^T + N_s^T - 1$ then the least favorable spectral density in the class D_M^- for the optimal estimation of the functional $A_s \zeta$ is defined by (25). It is spectral density of the vector stochastic autoregression sequence (26) of order M , that is determined by matrices $P(m), m \in \{0, 1, \dots, M\}$.*

If $M < M_{s-1}^T + N_s^T - 1$ and solutions $P(m), m \in \tilde{S} \cap \{0, 1, \dots, M\}$, of the equation $\mathbf{B}_s \vec{\alpha}_M^0 = \vec{a}_s$ with coefficients $P(m), m \in \tilde{S} \cap \{0, 1, \dots, M\}$, form a positive-definite matrix function $\sum_{m=-(M_{s-1}^T + N_s^T - 1)}^{M_{s-1}^T + N_s^T - 1} P(m) e^{im\lambda}$, with the determinant which does not equal zero identically, then the spectral density (28) of the vector stochastic autoregression sequence (29) of order $M_{s-1}^T + N_s^T - 1$ is the least favorable in the class D_M^- . The minimax spectral characteristic $h(f^0)$ is calculated by the formula (16).

3. Conclusions and prospects for further research. We propose formulas for calculating the mean square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functional $A_s \zeta = \sum_{l=0}^{s-1} \int_{M_l}^{M_l + N_{l+1}} a(t) \zeta(t) dt$ which depends on the unknown values of a periodically correlated stochastic process $\zeta(t)$. The estimation is based on observations of the process $\zeta(t) + \theta(t)$ at points $t \in \mathbb{R} \setminus S$, $S = \bigcup_{l=0}^{s-1} [M_l, M_l + N_{l+1}]$, $M_l = \sum_{k=0}^l (N_k + K_k)$, $N_0 = K_0 = 0$. Process $\theta(t)$ is uncorrelated with $\zeta(t)$ periodically correlated process.

The problem is considered under conditions of spectral certainty and spectral uncertainty. In the first case the spectral density matrices $f^\zeta(\lambda)$ and $f^\theta(\lambda)$ of the generated vector stationary sequences are known exactly. In this case we derived formulas for calculating the spectral characteristic and the mean-square error of the optimal estimate of the functional. In the second case the spectral density matrices are not exactly known, but a class $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is specified. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_s \zeta$ are proposed. The problem is investigated in details for classes D_0^- , D_M^- of admissible spectral densities.

References

1. Bennett, W. R. (1958). Statistics of regenerative digital transmission. *Bell System Technical Journal*, 37(6), 1501–1542. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1958.tb01560.x>
2. Gardner, W., Napolitano, A., & Paura, L. (2006). Cyclostationarity: Half a century of research *Signal Processing*, 86, 639–697. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016>
3. Gladyshev, E. G. (1963). Periodically and almost periodically random processes with continuous time parameter. *Theory Probab. Appl.*, 8, 173–177. <https://doi.org/10.1137/1108016>
4. Hurd, H. L. (1975). Periodically correlated processes with discontinuous correlation functions. *Theory of Probability and its Applications*, 19(4), 834–838. <https://doi.org/10.1137/1119088>
5. Hurd, H. L. (1991). Correlation theory of almost periodically correlated processes. *J. Multivariate Analysis*, 37, 24–45. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(91\)90109-F](https://doi.org/10.1016/0047-259X(91)90109-F)

6. Makagon, A. (1999). Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes. *Studia Math.*, 136(1), 71–86. Retrieved from <http://eudml.org/doc/216661>
7. Kolmogorov, A. N. (1992). *Selected works of A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Kluwer.
8. Wiener, N. (1966). *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Whis engineering applications*. Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press.
9. Yaglom, A. M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results*. New York: Springer-Verlag.
10. Yaglom, A. M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Supplementary notes and references*. New York: Springer-Verlag.
11. Grenander, U. (1957). A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.*, 3(4), 371–379. <https://doi.org/10.1007/BF02589429>
12. Daniels, M. J., & Hogan, J. W. (2008) *Missing data in longitudinal studies: strategies for Bayesian modeling and sensitivity analysis*. Boca Raton: Taylor & Francis Group.
13. McKnight, P. E., McKnight, K. M., Sidani, S., & Figueredo, A. J. (2007). *Missing data: A gentle introduction*. NY: Guilford Press.
14. Golichenko, I. I., & Moklyachuk, M. P. (2020). Interpolation Problem for Periodically Correlated Stochastic Sequences with Missing Observations. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 8(2), 631–654. <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-458>
15. Golichenko, I., & Moklyachuk, M. (2022). Estimation problems for periodically correlated stochastic sequences with missed observations. In: M. Moklyachuk (ed.) *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. Nova Science Publishers, New York, 111–162. <https://doi.org/10.52305/ABFI3483>
16. Golichenko, I. I., Masyutka, A. Yu., & Moklyachuk, M. P. (2021). Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, 2, 39–52. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.6>
17. Kallianpur, G., & Mandrekar, V. (1971). Spectral theory of stationary H-Valued processes *J. Multivariate Analysis*, 1(1), 1–16. [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(71\)90026-1](https://doi.org/10.1016/0047-259X(71)90026-1)
18. Moklyachuk, M. P., & Golichenko, I. I. (2016). *Periodically correlated processes estimates*. LAP Lambert Academic Publishing.
19. Rozanov, Yu. A. (1967). *Stationary stochastic processes*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day.
20. Hannan, E. J. (1970). *Multiple time series*. Wiley, New York.

Голіченко І. І., Моклячук М. П. Задача інтерполяції для періодично корельованого процесу із пропущеними значеннями.

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала від невідомих значень періодично корельованого стохастичного процесу за результатами спостережень процесу з адитивним шумом із пропущеними значеннями. У випадку відомих спектральних щільностей виведено формули для обчислення спектральної характеристики та середньоквадратичної похибки оптимальної оцінки функціонала. У випадку спектральної невизначеності, коли спектральні щільності не відомі точно, але визначено клас допустимих спектральних щільностей, запропоновано формули для обчислення найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних лінійних оцінок функціоналів.

Ключові слова: періодично корельований процес, спектральна характеристика, середньоквадратична похибка, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксні спектральні характеристики.

Список використаної літератури

1. Bennett W. R. Statistics of regenerative digital transmission. *Bell System Technical Journal*. 1958. Vol. 37, No. 6. P. 1501–1542. DOI: <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1958.tb01560.x>

2. Gardner W., Napolitano A., Paura L. Cyclostationarity: Half a century of research. *Signal Processing*. 2006. Vol. 86. P. 639–697. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016>
3. Gladyshev E. G. Periodically and almost periodically random processes with continuous time parameter. *Theory Probab. Appl.* 1963. Vol. 8. P. 173–177. DOI: <https://doi.org/10.1137/1108016>
4. Hurd H. L. Periodically correlated processes with discontinuous correlation functions. *Theory of Probability and its Applications*. 1975. Vol. 19, No. 4. P. 834–838. DOI: <https://doi.org/10.1137/1119088>
5. Hurd H. L. Correlation theory of almost periodically correlated processes. *J. Multivariate Analysis*. 1991. Vol. 37. P. 24–45. DOI: [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(91\)90109-F](https://doi.org/10.1016/0047-259X(91)90109-F)
6. Makagon A. Induced stationary process and structure of locally square integrable periodically correlated processes. *Studia Math.* 1999. Vol. 136, No. 1. P. 71–86. URL: <http://eudml.org/doc/216661> (date of access: 04.09.2025).
7. Kolmogorov A. N. Selected works of A.N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics. Dordrecht : Kluwer, 1992. 534 p.
8. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Whis engineering applications. Cambridge, Mass. : The M. I. T. Press, 1966. 163 p.
9. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. New York : Springer-Verlag, 1987. 526 p.
10. Yaglom A. M. Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Supplementary notes and references. New York : Springer-Verlag, 1987. 258 p.
11. Grenander U. A prediction problem in game theory. *Ark. Mat.* 1957. Vol. 3, No. 4. pp. 371–379. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02589429>
12. Daniels M. J., Hogan J. W. Missing data in longitudinal studies: strategies for Bayesian modeling and sensitivity analysis. Boca Raton : Taylor & Francis Group, 2008. 328 p.
13. McKnight P. E., McKnight K. M., Sidani S., Figueredo A. J. Missing data: A gentle introduction. NY : Guilford Press, 2007. 251 p.
14. Golichenko I. I., Moklyachuk M. P. Interpolation Problem for Periodically Correlated Stochastic Sequences with Missing Observations. *Statistics, Optimization & Information Computing*. 2020. Vol. 8, No. 2. P. 631–654. DOI: <https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-458>
15. Golichenko I., Moklyachuk M. Estimation problems for periodically correlated stochastic sequences with missed observations. In: M. Moklyachuk (ed.) *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications*. Nova Science Publishers, New York, 2022. P. 111–162. DOI: <https://doi.org/10.52305/ABFI3483>
16. Голіченко І. І., Масютка А. Ю., Моклячук М. П. Extrapolation problem for periodically correlated stochastic sequences with missing observations. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. 2021. Vol. 2. P. 39–52. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.6>
17. Kallianpur G., Mandrekar V. Spectral theory of stationary H-Valued processes *J. Multivariate Analysis*. 1971. Vol. 1, No. 1. P. 1–16. DOI: [https://doi.org/10.1016/0047-259X\(71\)90026-1](https://doi.org/10.1016/0047-259X(71)90026-1)
18. Moklyachuk M. P., Golichenko I. I. Periodically correlated processes estimates. LAP Lambert Academic Publishing, 2016. 308 p.
19. Rozanov Yu. A. Stationary stochastic processes. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam : Holden-Day, 1967. 211 p.
20. Hannan E. J. Multiple time series. Wiley, New York, 1970. 536 p.

Recived 18.08.2025

О. В. Гутік¹, М. В. Серівка²

¹ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
професор кафедри кібербезпеки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleg.gutik@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8513-0282>

² Львівський національний університет ім. Івана Франка,
аспірант кафедри алгебри, топології та основ математики
marko.serivka@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0198-2286>

**ПРО НАПІВГРУПУ ЕНДОМОРФІЗМІВ НАПІВГРУПИ $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ З
ДВОЕЛЕМЕНТНОЮ СІМ'ЄЮ $\mathcal{F}^2$ ІНДУКТИВНИХ
НЕПОРОЖНІХ ПІДМНОЖИН У ω**

Ми досліджуємо моноїд $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх ендоморфізмів біциклічного розширення $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Знайдено підмоноїд $\langle \varpi \rangle^1$ у напівгрупі $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ такий, що кожен елемент напівгрупи $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ однозначно зображається у вигляді добутку моноїдального ендоморфізму напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та елемента з $\langle \varpi \rangle^1$.

Ключові слова: інверсна напівгрупа, біциклічний моноїд, ендоморфізм, біциклічне розширення.

1. Вступ. У цій праці ми користуємося термінологією з монографій [9,10,19,21]. Надалі у тексті множину невід'ємних цілих чисел позначатимемо через ω . Для довільного числа $k \in \omega$ позначимо $[k] = \{i \in \omega : i \geq k\}$.

Нехай $\mathcal{P}(\omega)$ — сім'я усіх підмножин у ω . Для довільних $F \in \mathcal{P}(\omega)$ і $n, m \in \omega$ приймемо

$$n - m + F = \{n - m + k : k \in F\}, \quad \text{якщо } F \neq \emptyset$$

і $n - m + F = \emptyset$, якщо $F = \emptyset$. Будемо говорити, що непорожня підсім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ є ω -замкненою, якщо $F_1 \cap (-n + F_2) \in \mathcal{F}$ для довільних $n \in \omega$ та $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.

Підмножина A в ω називається *індуктивною*, якщо з $i \in A$ випливає, що $i + 1 \in A$. Очевидно, що $\emptyset$ — індуктивна підмножина в ω .

Зауваження 1. (1) За лемою 6 з [2] непорожня множина $F \subseteq \omega$ є індуктивною в ω тоді і лише тоді, коли $(-1 + F) \cap F = F$.

(2) Оскільки множина ω зі звичайним порядком є цілком впорядкованою, то для кожної непорожньої індуктивної підмножини F у ω існує невід'ємне ціле число $n_F \in \omega$ таке, що $[n_F] = F$.

(3) З пункту (1) випливає, що перетин довільної скінченної кількості непорожніх індуктивних підмножин у ω є непорожньою індуктивною підмножиною в ω .

Надалі через $E(S)$ позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S . Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою*.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного елемента $s \in S$ існує єдиний елемент $s^{-1} \in S$ такий, що $ss^{-1}s = s$ і $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$ [1]. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент s^{-1} називається *інверсним до s* .

Якщо S — напівгрупа, то кожен гомоморфізм (ізоморфізм) з S у S називається *ендоморфізмом* (*автоморфізмом*) напівгрупи S . Добре відомо, що множина всіх ендоморфізмів (автоморфізмів) фіксованої напівгрупи S стосовно операції композиції відображень є моноїдом (групою). Надалі через $(s)\varepsilon$ і $(A)\varepsilon$ будемо позначати образ елемента s і підмножини A напівгрупи S , відповідно, стосовно ендоморфізму $\varepsilon: S \rightarrow S$. Ендоморфізм ε напівгрупи S називається *анулюючим*, якщо існує елемент $x \in S$ такий, що $(s)\varepsilon = x$ для всіх $s \in S$. Очевидно, якщо ε — анулюючий ендоморфізм напівгрупи S , то образ $(S)\varepsilon = x$ є ідемпотентом у S .

Нагадаємо (див. [9, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathcal{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p, q\}$ і визначена одним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Так, зокрема, класична теорема О. Андерсена [7] стверджує, що (0) -проста напівгрупа з (ненульовим) ідемпотентом є цілком (0) -простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи. Різні розширення та узагальнення біциклічного моноїда вводилися раніше багатьма авторами [11–13, 15, 24]. Такими, зокрема, є конструкції Брука та Брука–Рейлі занурення напівгруп у прості та описання інверсних біпростих і 0 -біпростих ω -напівгруп [8, 22, 23].

Зауваження 2. Легко бачити, що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p, q)$ ізоморфний напівгрупі, заданій на множині $\mathbf{B}_\omega = \omega \times \omega$ з напівгруповою операцією

$$(i_1, j_1) \cdot (i_2, j_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2), & \text{якщо } j_1 \leq i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2), & \text{якщо } j_1 \geq i_2. \end{cases}$$

Надалі ми будемо ототожнювати біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p, q)$ з напівгрупою $\mathbf{B}_\omega$.

У праці [2] введено алгебраїчні розширення $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ біциклічного моноїда для довільної ω -замкнутої сім'ї $\mathcal{F}$ підмножин в ω , які узагальнюють біциклічний моноїд, зліченню напівгрупу матричних одиниць і деякі інші комбінаторні інверсні напівгрупи.

Нагадаємо цю конструкцію. Нехай $\mathbf{B}_\omega$ — біциклічний моноїд і $\mathcal{F}$ — непорожня ω -замкнена підсім'я в $\mathcal{P}(\omega)$. На множині $\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}$ означимо бінарну операцію “.” формулою

$$(i_1, j_1, F_1) \cdot (i_2, j_2, F_2) = \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + F_1) \cap F_2), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, F_1 \cap F_2), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, F_1 \cap (i_2 - j_1 + F_2)), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases} \quad (1)$$

У [2] доведено, якщо сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ є ω -замкнутою, то $(\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$ є напівгрупою, а також, що $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ є комбінаторною інверсною напівгрупою, і описано відношення Гріна, частковий природний порядок на напівгрупі $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ та її множину ідемпотентів. Крім того, у [2] доведено критерії простоти, 0 -простоти, біпростоти та 0 -біпростоти напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$, і вказано умови, коли $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ містить одиницю, ізоморфна біциклічному моноїду або зліченній напівгрупі матричних одиниць.

Припустимо, що ω -замкнена сім'я $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ містить порожню множину $\emptyset$, то з означення напівгрупової операції “.” на $\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}$ випливає, що множина $\mathbf{I} = \{(i, j, \emptyset) : i, j \in \omega\}$ є ідеалом у $(\mathbf{B}_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)$.

Означення 1 ([2]). Для довільної ω -замкненої сім'ї $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ означимо

$$B_\omega^{\mathcal{F}} = \begin{cases} (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot)/I, & \text{якщо } \emptyset \in \mathcal{F}; \\ (B_\omega \times \mathcal{F}, \cdot), & \text{якщо } \emptyset \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

У [14, 20] досліджено алгебраїчну структуру напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$ у випадку, коли ω -замкнена сім'я $\mathcal{F}$ складається з атомарних підмножин (одноточкових підмножин і порожньої множини) в ω . Зокрема доведено, що за виконання таких умов на сім'ю $\mathcal{F}$ напівгрупа $B_\omega^{\mathcal{F}}$ ізоморфна піднапівгрупі розширення Брандта напівгратки $(\omega, \min)$.

Із зауваження 1(1) випливає, якщо сім'я $\mathcal{F}_0$ складається з індуктивних в ω підмножин і містить порожню множину $\emptyset$ як елемент, то для сім'ї $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \setminus \{\emptyset\}$ множина $B_\omega^{\mathcal{F}}$ з індукованою напівгруповою операцією з $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}_0}$.

У [3] досліджуються групові конгруенції на напівгрупі $B_\omega^{\mathcal{F}}$ та її гомоморфні ретракти у випадку, коли $\mathcal{F}$ — ω -замкнена сім'я з індуктивних непорожніх підмножин в ω . Доведено, що конгруенція $\mathfrak{C}$ на $B_\omega^{\mathcal{F}}$ є груповою, тоді і лише тоді, коли звуження конгруенції $\mathfrak{C}$ на піднапівгрупу в $B_\omega^{\mathcal{F}}$, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі, не є відношенням рівності. Також, у [3] описано всі нетривіальні гомоморфні ретракти й ізоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$.

Ендоморфізми біциклічного моноїда та розширеної біциклічної напівгрупи описані в [6], і отримані результати поширено на біциклічні розширення лінійно впорядкованих архімедових напівгруп у [5].

Надалі скрізь в тексті ми вважаємо, що ω -замкнена сім'я $\mathcal{F}$ складається лише з індуктивних непорожніх підмножин у ω . У [4] доведено, що ін'єктивний ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}}$ є тотожним відображенням тоді і тільки тоді, коли ε має три різні нерухомі точки, що еквівалентно існуванню неїдемпотентного елемента $(i, j, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}}$ такого, що $(i, j, [p])\varepsilon = (i, j, [p])$.

У [16] досліджено ін'єктивні ендоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Описано елементи напівгрупи $\mathbf{End}_*^1(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх ін'єктивних моноїдальних ендоморфізмів, тобто які зберігають одиницю моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, і доведено, що відношення Гріна $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ і $\mathcal{J}$ на напівгрупі $\mathbf{End}_*^1(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ збігаються з відношенням рівності. У [17, 18] досліджено структуру напівгрупи $\mathbf{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ усіх моноїдальних ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, напівгрупову операцію та відношення Гріна на напівгрупі $\mathbf{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

Надалі через $\overline{\mathbf{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ позначатимемо моноїд усіх ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. За твердженням 1 з [2], не зменшуючи загальності, надалі в цьому тексті можемо вважати, що двоелементна сім'я $\mathcal{F}^2$ збігається з $\{[0], [1]\}$.

2. Про піднапівгрупи в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та пов'язані з ними ін'єктивні ендоморфізми.

Для довільного $p \in \{0, 1\}$ позначимо $B_{\omega^p}^{\mathcal{F}^2} = \{(i, j, [p]) : i, j \in \omega\}$.

Означимо відображення $\varpi: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ за формулою

$$(i, j, [p])\varpi = \begin{cases} (i, j, [1]), & \text{якщо } p = 0; \\ (i + 1, j + 1, [0]), & \text{якщо } p = 1. \end{cases}$$

Лема 1. Відображення $\varpi: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Доведення. За твердженням 3 з [2] для довільного числа $p \in \{0, 1\}$ напівгрупа $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}_p^2}$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Звідси випливають такі рівності

$$((i_1, j_1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [0]))\varpi = (i_1, j_1, [0])\varpi \cdot (i_2, j_2, [0])\varpi$$

і

$$((i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2, j_2, [1]))\varpi = (i_1, j_1, [1])\varpi \cdot (i_2, j_2, [1])\varpi$$

для довільних $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \omega$, оскільки відображення $\iota: \mathbf{B}_\omega \rightarrow \mathbf{B}_\omega$, $(i, j) \mapsto (i, j)$ — єдиний автоморфізм біциклічного моноїда $\mathbf{B}_\omega$.

Для довільних $i_1, j_1, i_2, j_2 \in \omega$ маємо, що

$$\begin{aligned} & ((i_1, j_1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [1]))\varpi = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [0]) \cap [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [0] \cap [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0] \cap (i_2 - j_1 + [1]))\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (i_1, j_1, [0])\varpi \cdot (i_2, j_2, [1])\varpi = (i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2 + 1, j_2 + 1, [0]) = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, (j_1 - i_2 - 1 + [1]) \cap [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2 + 1; \\ (i_1, j_2 + 1, [1] \cap [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, (i_2 + 1 - j_1 + [0]) \cap [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2 + 1; \\ (i_1, j_2 + 1, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 - 1 + j_2 + 1, [1]), & \text{якщо } j_1 = i_2 + 1; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 + 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} & ((i_1, j_1, [1]) \cdot (i_2, j_2, [0]))\varpi = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 - i_2 + [1]) \cap [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1] \cap [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1] \cap (i_2 - j_1 + [0]))\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [0])\varpi, & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1, j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1, j_1 - i_2 + j_2, [1])\varpi, & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (i_1, j_1, [1])\varpi \cdot (i_2, j_2, [0])\varpi &= (i_1 + 1, j_1 + 1, [0]) \cdot (i_2, j_2, [1]) = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, (j_1 + 1 - i_2 + [0]) \cap [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2, [0] \cap [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0] \cap (i_2 - j_1 - 1 + [1])), & \text{якщо } j_1 + 1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 + 1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 < i_2; \\ (i_1 + 1 - (j_1 + 1) + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 + 1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (i_1 - j_1 + i_2, j_2, [1]), & \text{якщо } j_1 < i_2; \\ (i_1 + 1, j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 = i_2; \\ (i_1 + 1, j_1 - i_2 + j_2 + 1, [0]), & \text{якщо } j_1 > i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

З вище викладених рівностей випливає, що відображення ϖ є ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Ін'єктивність відображення ϖ очевидна.

Твердження 1. Для довільного натурального числа n виконуються такі рівності

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\varpi^{2n} &= (i + n, j + n, [0]); \\ (i, j, [1])\varpi^{2n} &= (i + n, j + n, [1]); \\ (i, j, [0])\varpi^{2n-1} &= (i + n - 1, j + n - 1, [1]); \\ (i, j, [1])\varpi^{2n-1} &= (i + n, j + n, [0]), \end{aligned}$$

$i, j \in \omega$.

Доведення. З визначення ендоморфізму $\varpi: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\varpi^2 &= (i, j, [1])\varpi = (i + 1, j + 1, [0]); \\ (i, j, [1])\varpi^2 &= (i + 1, j + 1, [0])\varpi = (i + 1, j + 1, [1]). \end{aligned}$$

Далі скористаємося індукцією.

З леми 1 і твердження 1 випливає

Наслідок 1. Для довільного натурального числа n відображення $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Означивши $(i, j, [p])\varpi^0 = (i, j, [p])$, отримуємо, що ϖ^0 є одиницею напівгрупи $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, а отже, $\langle \varpi \rangle = \{\varpi^n: n \in \mathbb{N}\}$ і $\langle \varpi \rangle^1 = \langle \varpi \rangle \cup \{\varpi^0\}$ є циклічною піднапівгрупою та циклічним підмоноїдом моноїда $\overline{\text{End}}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, відповідно.

Для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ означимо

$$B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p) = (s, s, [p])B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, s, [p]) = (s, s, [p])B_\omega^{\mathcal{F}^2} \cap B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, s, [p]).$$

З визначення напівгрупової операції на $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ множина $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з одиничним елементом $(s, s, [p])$.

Твердження 2. Для довільного числа $s \in \omega$ виконуються такі рівності

$$B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, 0) = (B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varpi^{2s} \quad i \quad B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, 1) = (B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varpi^{2s-1}.$$

Більше того, для довільних $s \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$ напівгрупа $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$ ізоморфна напівгрупі $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$.

Доведення. Перша частина твердження випливає з твердження 1. Далі скористаємося наслідком 1.

3. Зображення ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ композицією її моноїдальних ендоморфізмів і елементами напівгрупи $\langle \varpi \rangle^1$.

Зафіксуємо довільний ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. За твердженням 1.4.21 [19] і лемою 2 [2] існує ідемпотент $(s, s, [p]) \in B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, $s \in \omega$, $p \in \{0, 1\}$, такий, що $(s, s, [p]) = (0, 0, [0])\varepsilon$. Оскільки $(0, 0, [0])$ — одиниця напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, то $(s, s, [p])$ — одиничний елемент напівгрупи $(B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varepsilon$, а отже, образ $(B_\omega^{\mathcal{F}^2})\varepsilon$ є піднапівгрупою в $B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p)$. За твердженням 2 існує число $n \in \omega$ таке, що $(s, s, [p]) = (0, 0, [0])\varpi^n$. З ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ (наслідок 1) випливає, що композиція $\varepsilon(\varpi^n)^{-1}$ є моноїдальним ендоморфізмом моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Позначимо $\varepsilon_1 = \varepsilon(\varpi^n)^{-1}$. З ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що $\varepsilon = \varepsilon_1\varpi^n$. Оскільки часткове відображення $(\varpi^n)^{-1}: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним і $(B_\omega^{\mathcal{F}^2}(s, p))(\varpi^n)^{-1} = B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, то ендоморфізм ε_1 визначено коректно, і він єдиний.

Отже, доведена така теорема.

Теорема 1. Для довільного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ існують єдиний моноїдальний ендоморфізм $\varepsilon_1: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та єдине невід'ємне ціле число n такі, що $\varepsilon = \varepsilon_1\varpi^n$, причому ендоморфізм ε є ін'єктивним (анулюючим) тоді і лише тоді, коли моноїдальний ендоморфізм ε_1 є ін'єктивним (анулюючим).

З теореми 1 випливає

$$\text{Наслідок 2. } \overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = End(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) \cdot \langle \varpi \rangle^1.$$

Ін'єктивні моноїдальні ендоморфізми напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ описані в праці [16]. За теоремою 1 з [16] кожен такий ендоморфізм ε є одного з двох типів: або він збігається з перетворенням $\alpha_{k,p}$ моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, яке визначається

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\alpha_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\alpha_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [1]), \end{aligned}$$

для всіх $i, j \in \omega$, де k — деяке натуральне число і $p \in \{0, \dots, k-1\}$, або він збігається з перетворенням $\beta_{k,p}$ моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, яке визначається

$$\begin{aligned} (i, j, [0])\beta_{k,p} &= (ki, kj, [0]), \\ (i, j, [1])\beta_{k,p} &= (p + ki, p + kj, [0]), \end{aligned}$$

для всіх $i, j \in \omega$, де k — деяке натуральне число ≥ 2 і $p \in \{1, \dots, k-1\}$.

Якщо ендоморфізм ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ є ін'єктивним відображенням, то з ін'єктивності ендоморфізму $\varpi^n: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ випливає, що $\varepsilon_1 = \varepsilon(\varpi^n)^{-1}$ є моноїдальним ін'єктивним ендоморфізмом моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Отже, виконується така теорема.

Теорема 2. Для довільного ін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з таких умов:

- (i) існують єдині невід'ємне ціле число n , натуральне число k і $p \in \{0, \dots, k-1\}$ такі, що $\varepsilon = \alpha_{k,p} \varpi^n$;
- (ii) існують єдині невід'ємне ціле число n , натуральне число $k \geq 2$ і $p \in \{1, \dots, k-1\}$ такі, що $\varepsilon = \beta_{k,p} \varpi^n$.

Очевидно, що для довільної напівгрупи S композиція її двох (моноїдальних) ін'єктивних ендоморфізмів є (моноїдальним) ін'єктивним ендоморфізмом.

Через $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ і $End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ позначимо моноїди усіх ін'єктивних і всіх моноїдальних ін'єктивних ендоморфізмів моноїда $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Очевидно, що $End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ — піднапівгрупа в $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ і в $End(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$, а $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ — піднапівгрупа в $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

З теореми 2 випливає

Наслідок 3. $\overline{End}_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = End_{inj}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) \cdot \langle \varpi \rangle^1$.

Очевидно, що для довільних $s \in \omega$ і $q \in \{0, 1\}$ відображення $\chi_{s,q}: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$, означене

$$(i, j, [p])\chi_{s,q} = (s, s, [q]),$$

для довільних $i, j \in \omega$ і $p \in \{0, 1\}$, є анулюючим ендоморфізмом напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Також, з визначення ендоморфізму $\chi_{s,q}$ випливає, що для довільного ендоморфізму $\varepsilon: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконуються рівності

$$\varepsilon\chi_{s,q} = \chi_{s,q} \quad \text{і} \quad \chi_{s,q}\varepsilon = \chi_{s_1,q_1}, \quad (2)$$

де числа $s_1 \in \omega$ і $q_1 \in \{0, 1\}$ задовольняють умову $(s, s, [q])\varepsilon = (s_1, s_1, [q_1])$. Отже, множина

$$\overline{End}_{ann}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) = \{\varepsilon \in \overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2}) : \varepsilon = \chi_{s,q} \text{ для деяких } s \in \omega, q \in \{0, 1\}\},$$

збігається з напівгрупою всіх анулюючих ендоморфізмів напівгрупи $B_\omega^{\mathcal{F}^2}$. Також з рівності (2) випливає

Теорема 3. Напівгрупа $\overline{End}_{ann}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$ ізоморфна нескінченній зліченній напівгрупі правих нулів і вона є мінімальним ідеалом напівгрупи $\overline{End}(B_\omega^{\mathcal{F}^2})$.

Для довільного натурального числа k означимо відображення $\gamma_k: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ і $\delta_k: B_\omega^{\mathcal{F}^2} \rightarrow B_\omega^{\mathcal{F}^2}$ за формулами

$$(i, j, [0])\gamma_k = (i, j, [1])\gamma_k = (ki, kj, [0])$$

та

$$(i, j, [0])\delta_k = (ki, kj, [0]) \quad \text{і} \quad (i, j, [1])\delta_k = (k(i+1), k(j+1), [0]),$$

для всіх $i, j \in \omega$, відповідно.

За теоремою 1 з [17] для довільного неін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з умов:

- (i) ε — анулюючий ендоморфізм;
- (ii) $\varepsilon = \gamma_k$ для деякого натурального числа k ;
- (iii) $\varepsilon = \delta_k$ для деякого натурального числа k .

Тоді з вище наведених результатів і теореми 1 випливає

Теорема 4. Для довільного неанулюючого неін'єктивного ендоморфізму ε напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2}$ виконується лише одна з таких умов:

- (i) існують єдині невід'ємне ціле число n і натуральне число k такі, що $\varepsilon = \gamma_k \varpi^n$;
- (ii) існують єдині невід'ємне ціле число n і натуральне число k такі, що $\varepsilon = \delta_k \varpi^n$.

4. Висновки. У цій праці ми досліджуємо напівгрупу $\overline{\mathbf{End}}(\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2})$ немоноїдальних ендоморфізмів (тобто такі, що не зберігають одиницю) напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2}$ з двоелементною сім'єю $\mathcal{F}^2$ індуктивних непорожніх підмножин у ω . Знайдено підмоноїд $\langle \varpi \rangle^1$ у $\overline{\mathbf{End}}(\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2})$ такий, що кожен елемент напівгрупи $\overline{\mathbf{End}}(\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2})$ однозначно зображається у вигляді добутку моноїдального ендоморфізму напівгрупи $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}^2}$ та елемента з $\langle \varpi \rangle^1$.

Список використаної літератури

1. Vagner, V. V. (1952). Generalized groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 84, 1119–1122 [in Russian].
2. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2020). On some generalization of the bicyclic monoid. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 90, 5–19. <https://doi.org/10.30970/vmm.2020.90.005-019> [in Ukrainian].
3. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2021). On group congruences on the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ and its homomorphic retracts in the case when the family $\mathcal{F}$ consists of inductive non-empty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 91, 5–24. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.91.005-027> [in Ukrainian].
4. Gutik, O., & Mykhalenych, M. (2022). On automorphisms of the semigroup $\mathbf{B}_\omega^{\mathcal{F}}$ in the case when the family $\mathcal{F}$ consists of nonempty inductive subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 93, 54–65. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.93.054-065> [in Ukrainian].
5. Gutik, O., & Prokhorenkova, O. (2022). On homomorphisms of bicyclic extensions of totally ordered groups. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 93, 42–53. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.93.042-053> [in Ukrainian].
6. Gutik, O., Prokhorenkova, O., & Sekh, D. (2021). On endomorphisms of the bicyclic semigroup and the extended bicyclic semigroup. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 92, 5–16. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.92.005-016> [in Ukrainian].
7. Andersen, O. (1952). Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen. PhD Thesis. Hamburg,
8. Bruck, R. H. (1958). *A Survey of Binary Systems*. Erg. Math. Grenzgebiete. Neue Folge. Heft 20. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer.
9. Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1961). *The Algebraic Theory of Semigroups*. Vol. 1. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
10. Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1967). *The Algebraic Theory of Semigroups*. Vol. II, Providence, R.I.: American Mathematical Society.
11. Fortunatov, V. A. (1976). Congruences on simple extensions of semigroups. *Semigroup Forum*, 13, 283–295. <https://doi.org/10.1007/BF02194949>
12. Fotedar, G. L. (1974). On a semigroup associated with an ordered group. *Math. Nachr.*, 60, 297–302. <https://doi.org/10.1002/mana.19740600128>

13. Fotedar, G. L. (1978). On a class of bisimple inverse semigroups. *Riv. Mat. Univ. Parma* (4), 4, 49–53.
14. Gutik, O., & Lysetska, O. (2021). On the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ which is generated by the family $\mathcal{F}$ of atomic subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 92, 34–50. <https://doi.org/10.30970/vmm.2021.92.034-050>
15. Gutik, O., Pagon, D., & Pavlyk, K. (2011). Congruences on bicyclic extensions of a linearly ordered group. *Acta Comment. Univ. Tartu. Math.* 15(2), 61–80. <https://doi.org/10.12697/ACUTM.2011.15.10>
16. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2022). On the semigroup of injective monoid endomorphisms of the monoid $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 94, 32–55. <https://doi.org/10.30970/vmm.2022.94.032-055>
17. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2023). On the semigroup of non-injective monoid endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 95, 14–27. <https://doi.org/10.30970/vmm.2023.95.014-027>
18. Gutik, O. & Pozdniakova, I. (2024). On the semigroup of all monoid endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}}$ with the two-elements family $\mathcal{F}$ of inductive nonempty subsets of ω . *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 96, 5–24. <https://doi.org/10.30970/vmm.2024.96.005-024>
19. Lawson, M. (1998). *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*. Singapore: World Scientific. <https://doi.org/10.1142/3645>
20. Lysetska, O. (2020). On feebly compact topologies on the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}^1}$. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 90, 48–56. <https://doi.org/10.30970/vmm.2020.90.048-056>
21. Petrich, M. (1984). *Inverse Semigroups*. New York: John Wiley & Sons.
22. Reilly, N. R. (1966). Bisimple ω -semigroups. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 7, 160–167. <https://doi.org/10.1017/S2040618500035346>
23. Warne, R. J. (1966). A class of bisimple inverse semigroups. *Pacif. J. Math.*, 18, 563–577. <https://doi.org/10.2140/pjm.1966.18.563>
24. Warne, R. J. (1967). Bisimple inverse semigroups mod groups. *Duke Math. J.*, 34, 787–812. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-67-03481-3>

Gutik O. V., Serivka M. V. On the semigroup of endomorphisms of the semigroup $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of ω .

We study the semigroup $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ of all endomorphisms of the bicyclic extension $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ with the two-element family $\mathcal{F}^2$ of inductive nonempty subsets of ω . The submonoid $\langle \varpi \rangle^1$ of $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ with the property that every element of the semigroup $\overline{End}(B_{\omega}^{\mathcal{F}^2})$ has the unique representation as the product of the monoid endomorphism of $B_{\omega}^{\mathcal{F}^2}$ and the element of $\langle \varpi \rangle^1$ is constructed.

Keywords: inverse semigroup, bicyclic monoid, endomorphism, bicyclic extension.

Одержано 19.06.2025

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).52-64](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).52-64)**О. В. Капустян¹, А. О. Краснєєва², Т. Ю. Жук³**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

kapustyan@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9373-6812>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
krasnyeyeva@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8058-1823>

³ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
zhuktetiana6@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8015-0038>

СТІЙКІСТЬ АТРАКТОРУ ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ВІДНОСНО ЗОВНІШНІХ ТА ГРАНИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

В роботі розглядається задача вивчення асимптотичної поведінки розв'язків параболічного включення з мноюзначною напівнеперервною зверху функцією взаємодії за наявності неавтономних обмежених збурень в правій частині та в крайових умовах. За відсутності збурень траєкторії цієї задачі в фазовому просторі L^2 рівномірно по обмеженим початковим даним притягуються з часом до компактної зв'язної інваріантної множини - глобального атрактору. Ми вивчаємо асимптотику збуреної задачі шляхом встановлення робастної оцінки, яка визначає відхилення траєкторій збуреної задачі від глобального атрактору незбуреної задачі через величину збурень. Наявність такої оцінки говорить про стійкість глобального атрактору щодо збурень. Ми використовуємо підхід, що полягає у дослідженні відповідного сімейства неавтономних напівпроцесів, які мають рівномірний атрактор, що залежить від збурень. На основі властивості його напівнеперервності зверху встановлюються умови, що гарантують шукану робастну стійкість атрактору.

Ключові слова: стійкість, параболічне включення, глобальний атрактор, неавтономні крайові умови, збурення.

1. Вступ. Однією з основних задач в якісній теорії диференціальних рівнянь та в теорії керування є дослідження стійкості положень рівноваги щодо збурень [1]. Цю властивість робастної стійкості для звичайних диференціальних рівнянь прийнято вивчати в рамках теорії ISS - стійкості від входу до стану (Input to State Stability) [2, 3]. Ключовим елементом цієї теорії є нерівність

$$\|y(t, y_0, d)\| \leq \beta(\|y_0\|, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \quad (1)$$

де $y(t, y_0, d)$ — це значення розв'язку збуреної системи диференціальних рівнянь в момент часу $t \geq 0$ з початковим даним y_0 і обмеженим неавтономним збуренням $d(t)$, $\beta \in KL$, $\gamma \in K$ - функції порівняння (див. означення нижче). І хоча ці функції визначаються, як правило, неявно [1], формула (1) виявилась в багатьох як теоретичних так і прикладних аспектах більш корисним і ефективним інструментом дослідження, ніж класичний $\varepsilon - \delta$ підхід, і дозволили одержати нові якісні результати щодо стійкості збурених систем, включаючи

багатокомпонентні та імпульсно-збудені системи [4, 5]. Класичний підхід одержання робастної оцінки (1) ґрунтується на аналізі ISS-функції Ляпунова і може бути використаний також для оцінки відхилення траєкторій збуденої системи від довільної замкненої інваріантної множини [2]. Робастна стійкість положення рівноваги для нескінченновимірних систем, заданих у термінах диференціальних рівнянь у частинних похідних, досліджувалася впродовж останнього десятиліття в рамках теорії ISS в роботах багатьох авторів, наприклад [6–8]. Проте якісна поведінка більшості дисипативних нескінченновимірних систем, породжених нелінійними рівняннями в частинних похідних, описується не сукупністю положень рівноваги, а набагато більш складним об’єктом – глобальним аттрактором [9]. При цьому у більшості випадків не існує природної ISS-функції Ляпунова, що описує відхилення траєкторій збуденої системи від нетривіального глобального аттрактора. Загальна схема одержання локального варіанту оцінки (1) в околі аттрактору Θ

$$\|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \beta(\|y_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (2)$$

де $\|y\|_{\Theta} = \inf_{\theta \in \Theta} \|y - \theta\|$, а також властивості AG — оцінки асимптотичного підсилення (Asymptotic Gain)

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (3)$$

для різних класів нескінченновимірних дисипативних систем була запропонована в роботах [10], [11]. Слід відзначити принципову різницю у способах одержання оцінок (2) та (3): для виведення (2) будується ISS-функція Ляпунова на основі оцінки між розв’язками збуденої і незбуденої систем, а також робастна оцінка, що впливає з асимптотичної стійкості глобального аттрактору (оцінка (2) при $d \equiv 0$) [10]; натомість для виводу (3) використовується теорія рівномірних аттракторів неавтономних процесів та характер залежності цих рівномірних аттракторів від збудуючого параметра [12, 13]. Обидва ці підходи допускають узагальнення на багатозначний випадок, тобто коли єдиність задачі Коші для еволюційного рівняння не гарантується [14]. Але всі ці роботи розглядали зовнішні збурення, що надходять через праву частину рівнянь. Наявність неавтономних збурень на границі просторової області є більш природним припущенням, проте робить задачу робастного оцінювання значно складнішою. Робастна стійкість нульового асимптотично стійкого положення рівноваги нескінченновимірної параболічної еволюційної задачі відносно граничних збурень розглядалася в [15]. В даній роботі ми виводимо оцінку асимптотичного підсилення (3) для параболічного включення зі збуренням як в правій частині, так і в граничних умовах.

2. Постановка задачі. Розглянемо наступну початково-крайову задачу на циліндрі $Q = (0, \infty) \times (0, l)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \in f(y(t, x)) + h(t, x), & (t, x) \in Q, \\ y|_{x=0} = d_1(t), \quad y|_{x=l} = d_2(t), \\ y|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Тут початкові умови y_0 належать фазовому простору $X = L^2(0, l)$ зі стандартною нормою $\|\cdot\|$ і скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, збурення $d := \{h, d_1, d_2\}$ належать

деякій підмножині D (див. (9)) з простору функцій $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(0, l)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+) \times L^\infty(\mathbb{R}_+)$ з нормою

$$\|d\|_\infty = \max\{\text{ess sup}_{t>0} \|h(t)\|, \|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\}.$$

Багатозначна функція взаємодії $f : \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ (тобто значення f є непорожніми компактними опуклими підмножинами $\mathbb{R}$) задовольняє наступним умовам:

$$f \text{ є напівніпервною зверху } \mathbb{R}; \quad (5)$$

$$\exists c_1 \geq 0 \exists c_2 \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \forall \xi \in f(s) \implies |\xi| \leq c_1|s| + c_2; \quad (6)$$

$$\exists \lambda \in (0, \lambda_1) \exists c \geq 0 \forall s \in \mathbb{R} \forall \xi \in f(s) \implies s\xi \leq \lambda s^2 + c; \quad (7)$$

де $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$ — константа з нерівності Пуанкаре. Прикладом такого відображення може слугувати $f(s) = [0, \lambda|s| + b]$ для $b \geq 0$.

Надалі будемо використовувати позначення: для множин $A, A_1, A_2, \Theta \subset X$

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sup_{y_1 \in A_1} \inf_{y_2 \in A_2} \|y_1 - y_2\|,$$

$$O_\delta(A) = \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < \delta\}, \quad \|A\|_\Theta = \text{dist}(A, \Theta).$$

Відомо [16], що для $d \equiv 0$ за умов (5),(6) задача (4) є глобально розв'язною і за додаткової умови (7) всі розв'язки породжують багатозначну напівгрупу (або m -напівпотік) $\{S(t) : X \mapsto 2^X\}_{t \geq 0}$, $S(t)y_0 = \{y(t, y_0, 0)\}$, який має глобальний аттрактор [17]. Точніше, існує компактна множина $\Theta \subset X$ така, що

$$\forall t \geq 0 \quad S(t)\Theta = \Theta \quad \text{and} \quad \forall r > 0 \quad \sup_{\|y_0\| \leq r} \text{dist}(S(t)y_0, \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Слід зауважити, що для багатозначних функцій взаємодії множина Θ може мати дуже складну структуру і навіть бути нескінченновимірною [18].

Можна показати [17], що Θ є асимптотично стійкою в сенсі Ляпунова, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \geq 0 \quad S(t)O_\delta(\Theta) \subset O_\varepsilon(\Theta),$$

або в термінах функцій порівняння [14]

$$\exists \beta \in KL \forall t \geq 0 \quad \|S(t)y_0\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t).$$

Тут і надалі ми використовуємо класи функцій порівняння

$$K = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, \text{ неперервна, додатно визначена, строго зростаюча}\},$$

$$KL = \{\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+, \text{ неперервна, } \beta(\cdot, t) \in K, \beta(s, \cdot) \text{ строго спадна до } 0\}.$$

Основним результатом роботи є оцінка асимптотичного підсилення AG для глобального аттрактора Θ відносно збурень $d = \{h, d_1, d_2\}$

$$\exists \gamma \in K \forall y_0 \in X \forall d \in D \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \gamma(\|d\|_\infty). \quad (8)$$

Для доведення (8) ми, слідуючи загальній схемі теорії неавтономних процесів [12, 13], будемо сімейство m -напівпроцесів $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(d)}$ і доводимо для нього

існування рівномірного атрактора $\Theta_{\Sigma(d)}$ (Означення 2). Далі ми покажемо граничну рівність

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(d)}, \Theta) \rightarrow 0, \quad \|d\|_{\infty} \rightarrow 0,$$

з якої і виводимо нерівність (8).

3. Основні результати. Ми припускаємо, що множина збурень D складається з функцій $d = \{h, d_1, d_2\} \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(0, l)) \times L^{\infty}(\mathbb{R}_+) \times L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ таких, що d_1, d_2 є абсолютно неперервними $d_1(0) = d_2(0) = 0$, $\dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, і

$$\|d\|_{\infty} \leq R. \quad (9)$$

Тоді D є інваріантною відносно зсуву, тобто, $\forall \tau \geq 0, \quad \forall d \in D \quad d(\cdot + \tau) \in D$ та $\|d(\cdot + \tau)\|_{\infty} \leq \|d\|_{\infty}$.

Припустимо $\omega = \omega(t, x)$, $(t, x) \in Q$ є розв'язком наступної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \omega(t, x)}{\partial x^2} = 0, \\ \omega|_{x=0} = d_1(t), \quad \omega|_{x=l} = d_2(t), \\ \omega|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Відомо, що $\omega \in C([0, +\infty); H_0^1(0, l))$ і завдяки принципу максимуму [15] виконується наступне:

$$\|\omega\|_{\infty} = \sup_{x \in (0, l), t > 0} |\omega(t, x)| \leq \max\{\|d_1\|_{\infty}, \|d_2\|_{\infty}\}. \quad (11)$$

Означення 1. Будемо говорити, що $y = y(t, x)$, $(t, x) \in Q_T = (0, T) \times (0, l)$ розв'язок (4) на $(0, T)$ якщо $y = v + \omega$, де ω розв'язок (10) на $(0, T)$ і $v = v(t, x)$ і є слабким розв'язком

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \quad (12)$$

тобто $v \in L^2(0, T; H_0^1(0, l))$, $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$, і існує функція $g \in L^2(Q_T)$ така, що

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = g(t, x) + h(t, x), \quad (t, x) \in Q_T, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \quad (13)$$

$$g(t, x) \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) \quad \text{майже скрізь на } Q_T. \quad (14)$$

Зауваження 1. Розв'язок (13) розуміємо в слабкому сенсі, тобто $\forall \eta \in C_0^{\infty}(0, l)$, $\forall \theta \in C_0^{\infty}(0, T)$

$$-\int_0^T (v(t), \eta) \theta_t dt + \int_0^T (v_x(t), \eta_x) \theta dt = \int_0^T (g(t) + h(t), \eta) \theta dt. \quad (15)$$

Лема 1. Для всіх $T > 0$, $h \in L^\infty(0, T; L^2(0, l))$, та $\omega \in C([0, T]; X) \cap L^\infty(Q_T)$ із

$$\max\{\text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|h(t)\|, \|\omega\|_\infty\} \leq R,$$

задача (12) має принаймні один розв'язок $(0, T)$. Більше того, кожний розв'язок (12) задовольняє для всіх $0 \leq \tau \leq t \leq T$ наступним оцінкам:

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta_1(t-\tau)} + c_3(1 + \int_\tau^t \|h(s)\|^2 e^{-\delta_1(t-s)} ds), \quad (16)$$

$$\|v(t)\|^2 + \delta_2 \int_\tau^t \|v(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq \|v(\tau)\|^2 + c_4 \int_\tau^t (1 + \|h(s)\|^2) ds, \quad (17)$$

де $\delta_1, \delta_2, c_3, c_4$ є додатними константами, які залежать тільки від R .

Доведення. Розглянемо відображення $F : [0, T] \times X \mapsto 2^X$,

$$F(t, v) = \{u \in X \mid u(x) \in f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x) \text{ майже скрізь}\}.$$

Тоді задачу (12) можна записати у вигляді задачі Коші для диференціально-операторного включення

$$\frac{d}{dt}v(t) + Av(t) \in F(t, v(t)),$$

де $A : H_0^1(0, l) \mapsto H^{-1}(0, l)$ породжується $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ з нульовими крайовими умовами Діріхле. Тоді згідно [16] для доведення розв'язності (12) достатньо показати, що: 1) $F(t, v) \neq \emptyset \quad \forall (t, v) \in [0, T] \times X$; 2) $\forall v \in X \quad t \mapsto F(t, v)$ має вимірний селектор; 3) $\forall t \in [0, T] \quad v \mapsto F(t, v)$ є напівнеперервним зверху; 4) $\exists D_1, D_2 \geq 0 \quad \forall (t, v) \in [0, T] \times X \quad \sup_{z \in F(t, v)} \|z\| \leq D_1 + D_2 \|v\|$.

Властивість 4) є прямим наслідком (6). Перед тим, як доводити інші властивості, відмітимо, що багатозначне відображення $f : \mathbb{R} \mapsto C_v(\mathbb{R})$ є напівнеперервним зверху [19] тоді і лише тоді коли $\forall s \in \mathbb{R} \quad f(s) = [f_-(s), f_+(s)]$, де $f_-(s)(f_+(s)) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є напівнеперервними знизу (зверху) функціями.

Таким чином, для $v \in X$ функція $x \mapsto f_+(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)$ є вимірною, і, згідно нерівності (6), належить протору X . Це означає, що $F(t, v)$ є непорожньою підмножиною X . Більше того, функція $t \mapsto f_+(v(\cdot) + \omega(t, \cdot)) + h(t, \cdot)$ є вимірним вимірним селектором $t \mapsto F(t, v)$, що доводить 2). Далі припустимо, що властивість 3) не виконується. Тоді $\exists \varepsilon > 0, v_n \rightarrow v$ в X і $u_n \in F(t, v_n)$ такі, що

$$\|u_n - u\| \geq \varepsilon \quad \forall u \in F(t, v) \quad \forall n \geq 1. \quad (18)$$

Без втрати загальності ми можемо припустити, що $v_n(x) \rightarrow v(x)$ для майже всіх $x \in (0, l)$. Згідно Теорема 8.2.13 в [19] існує вимірний селектор $\xi_n(x) \in f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)$ такий, що $\text{dist}(u_n(x), f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)) = |u_n(x) - \xi_n(x)|$ майже скрізь. Враховуючи той факт, що відображення f є напівнеперервним зверху, ми отримуємо

$$|u_n(x) - \xi_n(x)| \leq$$

$$\text{dist}(f(v_n(x) + \omega(t, x)) + h(t, x), f(v(x) + \omega(t, x)) + h(t, x)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{м.с.}.$$

З теореми Лебега про мажоровану збіжність випливає $\|u_n - \xi_n\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Але $\xi_n \in F(t, v)$, що суперечить (18). Таким чином, згідно теореми 3.1 з [16] задача (12) має принаймні один розв'язок на $(0, T)$.

Тепер виведемо оцінки (16), (17) для довільного розв'язку v задачі (12). Нехай g відповідна функція з (14) Означення 1. З того, що $v : [0, T] \rightarrow X$ є абсолютно неперервною функцією, отримуємо для майже всіх $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \|v(t)\|_{H_0^1}^2 &= \int_0^l (g(t, x) + h(t, x))v(t, x)dx = \\ &= \int_0^l g(t, x)(v(t, x) + \omega(t, x))dx + \int_0^l h(t, x)v(t, x)dx - \int_0^l g(t, x)\omega(t, x)dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Із включення $g(t, x) \in f(v(t, x) + \omega(t, x))$ м.с. і (6), (7) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \lambda_1 \|v(t)\|^2 &\leq \lambda \int_0^l (v(t, x) + \omega(t, x))^2 dx + Cl + \|h(t)\| \|v(t)\| + \\ &+ \int_0^l (c_2 + c_1 |v(t, x) + \omega(t, x)|) |\omega(t, x)| dx. \end{aligned}$$

Звідси для деяких констант $\delta_1 \in (0, \lambda_1 - \lambda)$ і $C_{\delta_1} > 0$ ми отримуємо, що

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \delta_1 \|v(t)\|^2 \leq C_{\delta_1} (1 + \|\omega(t)\|^2 + \|h(t)\|^2), \quad \text{для м.в. } t \in (0, T). \quad (20)$$

Поклавши $c_3 := \max\{\frac{C_{\delta_1}}{\delta_1} (1 + l \|\omega\|_\infty^2), C_{\delta_1}\}$, з (20) та леми Гронсуола одержуємо (16).

Далі, вибираючи $\delta_2 \in (0, 1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})$, для деякого $C_{\delta_2} > 0$ ми отримуємо з (19)

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|^2 + \delta_2 \|v(t)\|_{H_0^1}^2 \leq C_{\delta_2} (1 + \|\omega(t)\|^2 + \|h(t)\|^2), \quad \text{для м.в. } t \in (0, T). \quad (21)$$

Поклавши $c_4 := \max\{C_{\delta_2} (1 + l \|\omega\|_\infty^2), C_{\delta_2}\}$, одержуємо (17). Лема доведена.

Зауваження 2. Твердження леми означає глобальну розв'язність (4).

Щоб побудувати сім'ю напівпроцесів, породжених (12), ми виділяємо деякі додаткові властивості розв'язку (10). Нехай ω — це розв'язок (10). Тоді $\bar{\omega} = \omega - (\frac{x}{l} d_1(t) + \frac{l-x}{l} d_2(t))$ є слабким розв'язком задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} - \Delta \bar{\omega} = \bar{f}(t, x) := -\frac{x}{l} \dot{d}_1(t) + \frac{l-x}{l} \dot{d}_2(t), \\ \bar{\omega}|_{x=0} = 0, \bar{\omega}|_{x=l} = 0, \\ \bar{\omega}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

З того, що $\bar{f} \in L^\infty(Q)$, і з теореми 3.3, [9], випливає, що існує константа $\bar{c} = \bar{c}(\bar{f}) > 0$ така, що

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{\omega}(t)\|_{H_0^1} \leq \bar{c} \quad \text{and} \quad \|\bar{\omega}(t_1) - \bar{\omega}(t_2)\| \leq \bar{c} |t_1 - t_2|. \quad (23)$$

З того, що $d_i, \dot{d}_i \in L^\infty(Q)$, легко бачити, що ті ж нерівності (з іншою константою) виконуються для ω . Тепер можна побудувати сім'ю m -напівпроцесів. Для $d = \{h, d_1, d_2\} \in D$ позначимо через $W(d)$ множину всіх ω таких, що $\omega \in C([0, +\infty]; H_0^1(0, l))$ і задовольняють (11), (23). Зокрема, розв'язок (10) належить множині $W(d)$. Для всіх $\omega \in W(d)$ і h таких, що

$$\max\{\text{ess sup}_{t>0} \|h(t)\|, \|\omega\|_\infty\} \leq R, \quad (24)$$

ми розглядаємо множину

$$\Sigma(\omega, h) = cl_{C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)} \{\{\omega(\cdot + \tau), h(\cdot + \tau)\} | \tau \geq 0\},$$

де замикання береться в добутку топологій: топології $C(\mathbb{R}_+; X)$, породженій рівномірною збіжністю на компактних інтервалах, і топології $L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)$, породженою слабкою збіжністю на компактних інтервалах. Завдяки компактному вкладенню $H_0^1(0, l) \subset X$ маємо, що $\Sigma(\omega, h)$ є інваріантною відносно зсувів та компактною в $C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X)$.

Завдяки побудові $\Sigma(\omega, h)$ для всіх $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ існує $\tau_n \geq 0$ таке, що з точністю до підпоследовності

$$\omega(\cdot + \tau_n) \rightarrow p(\cdot) \text{ в } C(\mathbb{R}_+; X) \text{ м.с.на } Q,$$

$$h(\cdot + \tau_n) \rightarrow l(\cdot) \text{ в } L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X).$$

Зокрема, це означає, що кожне $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ належить $L^\infty(Q) \times L^\infty(\mathbb{R}_+; X)$ і задовольняє (11), (24). Отже, задача (12) з правою частиною $f(v + p) + l$ є глобально розв'язуваною завдяки Лемі 1.

Позначимо через $K_\sigma^\tau \subset C([\tau, +\infty); X)$ сім'ю всіх розв'язків (12) на $[\tau, +\infty)$ з правою частиною $f(v + p) + l$ та початковими даними $v|_{t=\tau} = y_\tau$.

Лекко бачити, що виконуються наступні властивості:

$$\begin{aligned} &\forall y \in X, \forall \tau \geq 0, \forall \sigma \in \Sigma(\omega, h) \exists v \in K_\sigma^\tau : v(\tau) = y; \\ &v|_{[s, +\infty)} \in K_\sigma^s, \forall v \in K_\sigma^\tau, \forall s \geq \tau; \\ &v(\cdot + s) \in K_{\sigma(\cdot+s)}^\tau, \forall v \in K_\sigma^{\tau+s}, \forall s \geq 0; \\ &\forall s \geq \tau, \forall \psi \in K_\sigma^\tau, \forall \varphi \in K_\sigma^s \text{ з } \psi(s) = \varphi(s) \text{ функція} \end{aligned}$$

$$\theta(p) = \begin{cases} \psi(p), & p \in [\tau, s], \\ \varphi(p), & p \geq s \end{cases} \quad \text{належить } K_\sigma^\tau;$$

$$\forall s \geq 0, \forall v \in K_{\sigma(\cdot+s)}^\tau \text{ функція } v(\cdot - h) \text{ належить } K_\sigma^{\tau+s}.$$

Покладемо для $y \in X, t \geq \tau \geq 0, \sigma \in \Sigma(\omega, h)$

$$U_\sigma(t, \tau, y) := \{v(t) \mid v \in K_\sigma^\tau, v(\tau) = y\}. \quad (25)$$

Тоді легко перевірити [14], що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ породжує строгу сім'ю m -напівпроцесів, тобто, $\forall \sigma \in \Sigma(\omega, h), \forall t \geq s \geq \tau \geq 0, \forall y \in X, \forall \tau \geq 0$

$$\begin{aligned} U_\sigma(t, \tau, y) &= y, \quad U_\sigma(t, \tau, y) = U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, y)), \\ U_\sigma(t + s, \tau + s, y) &= U_{\sigma(\cdot+s)}(t, \tau, y). \end{aligned}$$

Легко перевірити, що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ задовольняє властивість коциклу:

$$U_\sigma(t + s, 0, y) = U_{\sigma(\cdot+s)}(t, 0, U_\sigma(s, 0, y)).$$

Більш того, $\forall v \in K_\sigma^\tau$ виконується $v(t) \in U_\sigma(t, s, v(s))$, і $v(t+s) \in U_{\sigma(\cdot+s)}(t, 0, v(s))$, $\forall v \in K_\sigma^0$, $\forall t, s \geq 0$.

У випадку $d \equiv 0$ отримуємо $W(0) = \{0\}$, $\Sigma(0) = \{0\}$ та $U_0(t + s, 0, y) = U_0(t, 0, U_0(s, 0, y))$, тобто, $S_0(t)y = U_0(t, 0, y)$ є строгим m -напівпотоким, породженим незбуреною задачею (4).

Зауваження 3. Якщо ω є розв'язком задачі (10), то для розв'язку (4) маємо

$$y(t, y_0, d) = v(t) + \omega(t), \text{ де } v \in K_{\{\omega, h\}}^0, \quad v(0) = y_0. \quad (26)$$

Лема 2. Сімя m -напівпотоків $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$, означена в (25), має рівномірний аттрактор, тобто існує компактна множина $\Theta_{\Sigma(\omega, h)} \subset X$ така, що для $U_{\Sigma(\omega, h)} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)} U_\sigma$

$$\forall r > 0 \quad \sup_{\|y_0\| \leq r} \text{dist}(U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0), \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad (27)$$

та $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$ є мінімальною серед усіх замкнених множин, що задовольняють (27).

Більш того, $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$ є від'ємно інваріантною в тому сенсі, що

$$\Theta_{\Sigma(\omega, h)} \subset U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) \quad \forall t \geq 0. \quad (28)$$

Доведення. Згідно [14] потрібно довести, що $\{U_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ задовольняє наступним властивостям

1) дисипативність: існує обмежена множина $B_0 \subset X$ така, що для будь-якої обмеженої $B \subset X$

$$\exists T = T(B) \quad \forall t \geq T(B) \quad U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, B) \subset B_0; \quad (29)$$

2) асимптотична компактність: для кожної $\{t_n \nearrow \infty\}$, для будь-якої обмеженої $\{y_n\} \subset X$

$$\text{кожна послідовність } \{\xi_n \in U_{\Sigma(\omega, h)}(t_n, 0, y_n)\} \text{ передкомпактна}; \quad (30)$$

3) замкнений граф: $\forall t > 0 \quad \forall y_n \rightarrow y \quad \forall \sigma_n \rightarrow \sigma \quad \forall \xi_n \in U_{\sigma_n}(t, 0, y_n) \quad \text{з } \xi_n \rightarrow \xi$ маємо

$$\xi \in U_\sigma(t, 0, y). \quad (31)$$

Доведемо 1). Для кожного $\sigma = \{p, l\} \in \Sigma(\omega, h)$ та кожного $v(\cdot) \in K_\sigma^0$, $v(0) = y_0$ згідно (16) маємо: $\forall t \geq 0$

$$\|v(t)\|^2 \leq \|y_0\|^2 e^{-\delta_1 t} + C_{\delta_1}(\delta_1)^{-1}(1 + l \|p\|_\infty^2 + \text{ess sup}_{t>0} \|l(t)\|^2), \quad (32)$$

де δ_1, C_{δ_1} не залежить від d . Тому, для кожного $d \in D$, $\omega \in W(d)$, $\sigma \in \Sigma(\omega, h)$ ми отримуємо (29) з

$$B_0 = \left\{ u \in X \mid \|u\| \leq \sqrt{1 + C_{\delta_1}(\delta_1)^{-1}(1 + (l+1)R^2)} \right\}.$$

Доведемо 2). Нехай $\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, 0, y_n)$, де $t_n \nearrow \infty$, $\|y_n\| \leq r$, $\sigma_n \in \Sigma(\omega, h)$. Тоді

$$\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n - 1 + 1, t_n - 1, U_{\sigma_n}(t_n - 1, 0, y_n)) \subset U_{\sigma_n(\cdot + t_n - 1)}(1, 0, U_{\sigma_n}(t_n - 1, 0, y_n)).$$

Згідно доведеного пункту 1) про дисипацію і компактності $\Sigma(\omega, h)$ отримуємо, що

$$\xi_n = v_n(1) \in U_{\bar{\sigma}_n}(1, 0, \bar{y}_n), \quad \bar{\sigma}_n = \{\bar{p}_n, \bar{l}_n\} \in \Sigma(\omega, h),$$

де з точністю до підпослідовності

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_n \rightarrow \bar{\sigma} \text{ в } C(\mathbb{R}_+; X) \times L_{loc}^{2,w}(\mathbb{R}_+; X), \\ \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \text{ слабо в } X. \end{cases} \quad (33)$$

Отже, для $T > 1$ маємо, що $v_n(\cdot)$ є розв'язком задачі (13),(14) з початковими умовами $\bar{y}_n$ та правими частинами $g_n(t, x) + \bar{l}_n(t, x)$, $g_n(t, x) \in f(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x))$.

Ми використаємо наступний результат, який є прямим наслідком Теорема 3.1 з [9].

Лема 3. *Нехай $\{v_n\}$ нехай будуть розв'язками (13) на $(0, T)$ початковими умовами $\{y_n\}$ і правою частиною $\{g_n + l_n\}$. Припустимо, що $y_n \rightarrow y$ слабо в X , $g_n + l_n \rightarrow g + l$ слабо в $L^2(0, T; X)$. Тоді з точністю до підпослідовності $v_n \rightarrow v$ в $C([\varepsilon, T]; X)$, $\forall \varepsilon \in (0, T)$, де v розв'язок рівняння (13) з початковими умовами y і правою частиною $g + l$. Якщо, додатково, $y_n \rightarrow y$ в X сильно, то $v_n \rightarrow v$ в $C([0, T]; X)$.*

З того, що $\{\bar{\sigma}_n\}$ обмежена, з оцінок (6) та (16) ми приходимо до висновку, що послідовність $\{g_n\}$ є обмеженою в $L^2(0, T; X)$. Отже, з точністю до підпослідовності $g_n \rightarrow g$ слабо в $L^2(0, T; X)$, $\bar{l}_n \rightarrow \bar{l}$ слабо в $L^2(0, T; X)$ і Лема 3 забезпечує, що $\xi_n = v_n(1) \rightarrow v(1)$ in X .

Доведемо тепер 3). Нехай $\xi_n \in U_{\bar{\sigma}_n}(\bar{t}, 0, \bar{y}_n)$, де $\bar{\sigma}_n \rightarrow \bar{\sigma}$, $\bar{y}_n \rightarrow \bar{y}$, і $\bar{t} \in (0, T)$. Повторюючи попередні міркування та використовуючи Лему 3, отримуємо, що $\xi_n = v_n(\bar{t})$, де $\{v_n, g_n\}$ задовольняють (13),(14), і з точністю до підпослідовності маємо

$$g_n \rightarrow g \text{ слабо в } L^2(0, T; X) \quad \text{і} \quad v_n \rightarrow v \text{ в } C([0, T]; X),$$

де v є розв'язком (13) з правою частиною $g + \bar{l}$ і початковими умовами $\bar{y}$. Далі, згідно з включенням (14), збіжністю $v_n + \bar{p}_n$ до $v + \bar{p}$ в $C([0, T]; X)$, і напівнеперервністю зверху f , ми отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$, для м.в. $(t, x) \in Q_T$ та $n \geq N(t, x)$ виконуються наступні нерівності

$$\begin{aligned} f_-(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) - \varepsilon &< f_-(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) \leq g_n(t, x) \leq \\ &\leq f_+(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) < f_+(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) + \varepsilon. \end{aligned} \quad (34)$$

З слабкої збіжності g_n до g в $L^2(Q_T)$ і теореми Мазира виводимо, що деяка опукла комбінація $\{g_n\}$ збігається до g сильно та майже всюди на Q_T . Переходячи до границі в (34), отримуємо

$$f_-(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) - \varepsilon \leq g(t, x) \leq f_+(v(t, x) + \bar{p}(t, x)) + \varepsilon.$$

Остання нерівність означає, що $g(t, x) \in f(v(t, x) + \bar{p}(t, x))$ м.в., і ми виводимо $\xi_n = v_n(\bar{t}) \rightarrow \xi = v(\bar{t}) \in U_{\bar{\sigma}}(\bar{t}, 0, \bar{y})$. Лема доведена.

Тепер сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (5)-(7), (9). Нехай Θ — глобальний аттрактор незбуреної задачі (4) (при $d \equiv 0$). Тоді існує $\gamma \in K$ така, що для всіх $y_0 \in X$ і $d \in D$ довільний розв'язок $y(t, y_0, d)$ задачі (4) задовольняє робастну оцінку*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}). \quad (35)$$

Доведення. Згідно (26) $y(t, y_0, d) = v(t) + \omega(t)$, де $\omega \in$ розв'язком (10), $v(t) \in U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0)$. Доведемо, що $\exists \tilde{\gamma} \in K$ таке, що

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} \leq \tilde{\gamma}(\|d\|_{\infty}).$$

Тоді із включення $\{\omega, h\} \in \Sigma(\omega, h)$ отримуємо

$$\begin{aligned} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} &\leq \|U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} + \|\omega(t)\| \\ &\leq \|U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} + \sqrt{l}\|d\|_{\infty}, \end{aligned}$$

і ми отримуємо (35) з $\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) + \sqrt{l}s$.

Згідно Лемми 2 для кожного $d \in D$ і для відповідного розв'язку ω задачі (10) сім'я $\{U_{\sigma}\}_{\sigma \in \Sigma(\omega, h)}$ має рівномірний аттрактор $\Theta_{\Sigma(\omega, h)}$, який задовольняє (28). Відмітимо, що $\Sigma(0) = \{0\}$, $U_0(t, 0, y_0) = S(t)y_0$, та $\Theta_{\Sigma(0)} = \Theta$ є глобальним аттрактором m -напівпотoku $S(t)$, породженого незбуреною ($d \equiv 0$) задачею (4).

Далі доведемо від супротивного, що

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega, h)}, \Theta) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|d\|_{\infty} \rightarrow 0. \quad (36)$$

Припустимо, що $\exists \varepsilon > 0$ та $d_n \in D$, $\|d_n\|_{\infty} \rightarrow 0$, такі, що для розв'язків ω_n задачі (10) для деяких $z_n \in \Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)}$

$$\text{dist}(z_n, \Theta) \geq \varepsilon.$$

Згідно (32) дисипативна множина B_0 в (29) одна й та ж для всіх $n \geq 1$. Тоді з (29) отримуємо $\Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)} \subset B_0$ for $n \geq 1$. За (28), (29) та властивістю коциклу отримуємо

$$z_n \in U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(n, 0, \Theta_{\Sigma(\omega_n, h_n)}) \subset U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(1, 0, B_0).$$

Отже, $z_n = v_n(1) \in U_{\bar{\sigma}_n}(1, 0, \bar{y}_n)$, де $\bar{y}_n \in B_0$, $v_n(\cdot) \in$ розв'язком (13), (14) на Q_T , $T > 1$, і згідно з (11)

$$\|\bar{\sigma}_n\|_{\infty} \leq \|d_n\|_{\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, з точністю до підпоследовності маємо, що

$$\bar{p}_n \rightarrow 0 \text{ в } L^{\infty}(Q_T), \quad \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \in B_0 \text{ слабо в } X,$$

$$g_n(t, x) \in f(v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x)) \text{ м.в. на } Q_T.$$

Оскільки $\{v_n\}$ задовольняє (32), останнє включення та умова (6) гарантують, що послідовність $\{g_n\}$ є обмеженою в $L^2(Q_T)$. Отже $g_n \rightarrow g$ слабо в $L^2(0, T; X)$. Тоді ми можемо застосувати Лему 3 і отримати, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$v_n \rightarrow v \text{ in } C([\varepsilon, T]; X). \quad (37)$$

Це означає, що $v_n(t, x) + \bar{p}_n(t, x) \rightarrow v(t, x)$ м.с. на $(\varepsilon, T) \times (0, l)$.

Після цього ми можемо повторити міркування (34) і з напівнеперервності f вивести, що

$$g(t, x) \in f(v(t, x)) \text{ м.с. на } (\varepsilon, T) \times (0, l).$$

Нарешті, довільність вибраного ε веде до висновку

$$z_n = v_n(1) \rightarrow v(1) \in U_0(1, 0, \bar{y}) = S(1)\bar{y}. \quad (38)$$

Тепер, використовуючи означення глобального атрактора Θ , обираємо $t > 0$ так, щоб

$$\text{dist}(S(t)B_0, \Theta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із (29) виводимо, що $\exists \eta_n \in \Theta_{\Sigma(\omega_n)}$ таке, що

$$z_n \in U_{\Sigma(\omega_n, h_n)}(t, 0, \eta_n). \quad (39)$$

Повторюючи для $\{\eta_n\}$ попередні міркування, отримуємо, що $\eta_n \rightarrow \eta \in B_0$ в X . Тоді, застосовуючи знову міркування (37), (38) та другу частину Лема 3 до пари $\{z_n, \eta_n\}$ з (39), виводимо, що

$$z_n \rightarrow z \in U_0(t, 0, \eta) = S(t)\eta \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\Theta),$$

що суперечить нашому припущенню. Отже, (36) має місце. Покладемо $\gamma_0(s) := \sup_{\|d\|_\infty \leq s} \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega)}, \Theta)$. Тоді

$$\text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega)}, \Theta) \leq \gamma_0(\|d\|_\infty).$$

Крім того, $\forall s > 0 \gamma_0(s) < \infty$. Справді, $\gamma_0(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega_n)}, \Theta)$, $\|\omega_n\|_\infty \leq \|d_n\|_\infty \leq s$. Тоді завдяки (32) існує обмежена множина B_s such that $\Theta_{\Sigma(\omega_n)} \subset B_s$. Звідси, $\gamma_0(s) \leq \text{dist}(B_s, \Theta) + 1 < \infty$ і функція $\gamma_0 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ є незростаючою з $\gamma_0(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$. Тоді відомо [20], що існує $\gamma \in K$ така, що $\forall s \geq 0$, $\gamma_0(s) \leq \gamma(s)$. Включення $\{\omega, h\} \in \Sigma(\omega, h)$ та нерівність

$$\text{dist}(U_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0), \Theta) \leq \text{dist}(U_{\Sigma(\omega, h)}(t, 0, y_0), \Theta_{\Sigma(\omega, h)}) + \text{dist}(\Theta_{\Sigma(\omega, h)}, \Theta),$$

гарантують виконання (35) завдяки властивості рівномірного притягання. Теорему доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі обґрунтована робастна оцінка, що визначає величину відхилення траєкторій параболічного включення з многозначною напівнеперервною зверху функцією взаємодії за наявності неавтономних обмежених збурень в правій частині та в крайових

умовах від глобального атрактору незбуреної системи в фазовому просторі L^2 . Наявність такої оцінки говорить про стійкість глобального атрактору щодо збурень. Ми використали підхід, що полягає у дослідженні відповідного сімейства неавтономних напівпроцесів, які мають рівномірний атрактор, що залежить від збурень, як від параметру, та переході до границі по цьому параметру. Методи роботи відкривають широкі можливості для дослідження робастної стійкості різних класів еволюційних нелінійних нескінченновимірних дисипативних систем зі збуреннями. Зокрема, природно узагальнити методи роботи на випадок багатомірних областей з використанням відповідного апарату теорії нелінійних крайових задач.

5. Подяка. Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння з багатозначною та стохастичною динамікою"

Список використаної літератури

1. Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. USA: Prentice Hall.
2. Sontag, E. D., & Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5), 351–359. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(94\)00050-6](https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00050-6)
3. Sontag, E. D. (1998). *Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems*. USA: Springer.
4. Dashkovskiy, S., Rüffer, B. S., & Wirth, F. R. (2007). An ISS small gain theorem for general net works. *Math. Control Signals Systems*, 19(2), 93–122. <https://doi.org/10.1007/s00498-007-0014-8>
5. Dashkovskiy, S., & Feketa, P. (2017). Input-to-state stability of impulsive systems and their networks. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 26, 190–200. <https://doi.org/10.1016/j.nahs.2017.06.004>
6. Dashkovskiy, S., & Mironchenko, A. (2013). Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Con. Sign. Syst.*, 25, 1–35. <https://doi.org/10.1007/s00498-012-0090-2>
7. Karafyllis, I., & Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs*. USA: Springer.
8. Mironchenko, A., & Priour, Ch. (2020). Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions. *SIAM Review*, 62, 529–614. <https://doi.org/10.1137/19M1291248>
9. Temam, R. (1997). *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. USA: Springer.
10. Schmid, J., Kapustyan, O., & Dashkovskiy, S. (2022). Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 12(3), 763–788. <https://doi.org/10.3934/mcrf.2021044>
11. Dashkovskiy, S., & Kapustyan, O. (2022). Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 11(5), 1565–1577. <https://doi.org/10.3934/eect.2021054>
12. Zgurovsky, M. Z., Kasyanov, P. O., Kapustyan, O. V., Valero, J., & Zadoianchuk, N. V. (2012). *Evolution Inclusions and Variation Inequalities for Earth Data Processing III. Long-Time Behavior of Evolution Inclusions Solutions in Earth Data Analysis*. USA: Springer.
13. Gorban, N. V., Kapustyan, O. V., & Kasyanov, P. O. (2014). Uniform trajectory attractor for non-autonomous reaction-diffusion equations with Caratheodory's nonlinearity. *Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications*, 98, 13–26. <https://doi.org/10.1016/j.na.2013.12.004>
14. Kapustyan, O. V., Sobchuk, V. V., & Yussyv, T. V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*, 30(2), 1–13. <https://doi.org/10.15421/142208>
15. Dashkovskiy, S., Kapustyan, O., & Slynko, V. (2023). Robust stability of a nonli-

- near ODE-PDE system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 61 (3), 1760–1777. <https://doi.org/10.1137/21M1467535>
16. Denkowski, Z., & Mortola, S. (1993). Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *J. Optim. Theory Appl.*, 78, 365–391. <https://doi.org/10.1007/BF00939675>
 17. Kapustyan, O. V., & Valero, J. (2000). Attractors of differential inclusions and their approximation. *Ukrainian Math. Journal*, 52, 1118–1123. <https://doi.org/10.1023/A:1005237902620>
 18. Valero, J. (2000). Finite and infinite-dimensional attractors of multivalued reaction-diffusion equations. *Acta Math. Hungar.*, 88, 239–258. <https://doi.org/10.1023/A:1006769315268>
 19. Aubin, J. P., & Frankowska, H. (1998). *Set-Valued Analysis*. USA: Springer.
 20. Clarke, F. H., Ledyaev, Y. S., Stern, R. J. (1998). Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *J. Dif. Eqs.*, 149(1), 69–114. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3476>

Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y. Stability of the parabolic inclusion attractor with respect to external and boundary perturbations.

The paper considers the problem of studying the asymptotic behavior of solutions of a parabolic inclusion with a multivalued upper semicontinuous interaction function in the presence of non-autonomous bounded perturbations in the right-hand side and in boundary conditions. In the absence of perturbations, the trajectories of this problem in the phase space L^2 are uniformly attracted over time by the bounded initial data to a compact connected invariant set - the global attractor. We study the asymptotics of a perturbed problem by establishing a robust estimate that determines the deviation of the trajectories of the perturbed problem from the global attractor of the unperturbed problem due to the magnitude of the perturbations. The presence of such an estimate indicates the stability of the global attractor with respect to perturbations. We use an approach that consists in studying the corresponding family of non-autonomous semi-processes that have a uniform attractor that depends on the perturbations. Based on the property of its upper semicontinuity, conditions are established that guarantee the desired robust stability of the attractor.

Keywords: stability, parabolic inclusion, global attractor, nonautonomous boundary conditions, perturbations.

Одержано 18.08.2025

UDC 512.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).65-71](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).65-71)**I. Raievska¹, M. Raievska²**¹ Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,

Kyiv, Ukraine,

Senior researcher,

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics

raeirina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6764-480X>² Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,

Kyiv, Ukraine,

Senior researcher,

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics

raemarina@imath.kiev.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6135-7818>

LOCAL NEARRINGS AND ENDOCYCLIC GROUPS OF SMALL ORDER

Nearrings are generalization of associative rings, in which the additive group can be non-abelian, and addition is connected with multiplication at least one distributive law, left or right. In this sense local nearrings are generalization of local rings.

The package SONATA of the computer algebra system GAP contains a library of all non-isomorphic nearrings of order at most 15 and nearrings with a unity of order at most 31, among which 698 are local. However, the classification of nearrings of higher orders requires much more complex calculations.

The classification of `nearrings with identity` (up to order 32) and `local nearrings` (of orders 32 and 64) on `endocyclic additive groups` is given. Moreover, some information concerning these nearring from the `LocalNR` and `SONATA` packages of GAP is presented.

Keywords: nearring with identity, local nearring, endocyclic group, additive group, LocalNR package, GAP.

1. Introduction. We study algebraic structures called nearrings, which are interesting examples of generalised rings (i.e. addition need not to be commutative, and only one distributive law is assumed).

The classification of all nearrings up to certain orders is an open problem. The SONATA package [1] of GAP [2] contains a library of all non-isomorphic nearrings of order at most 15 and nearrings with identity of order up to 31, among which 698 are local. We have implemented algorithms to compute all local nearrings of further orders, in a new GAP package called LocalNR [3]. The current version of this package contains all local nearrings of order at most 361, except some orders.

2. Nearrings with identity and endocyclic groups.

Definition 1. A set N with two binary operations $+$ and $\cdot$ is called a (left) nearring if the following statements hold:

- 1) $(N, +) = N^+$ is a (not necessarily abelian) group with neutral element 0;
- 2) $(N, \cdot)$ is a semigroup;
- 3) $x(y + z) = xy + xz$ for all $x, y, z \in N$.

The monographs by Pilz [4], Meldrum [5], Clay [6], C. Ferrero and G. Ferrero [7], and Lockhart [8] are devoted to the general theory of nearrings.

Let G be a group and $\text{End } G$ be the set of all its endomorphisms, which can be considered as a semigroup with respect to the composition operation of endomorphisms. For each $g \in G$ we denote by $g^{\text{End } G}$ the set $\{g^\alpha | \alpha \in \text{End } G\}$ of all images of the element g with respect to endomorphisms of $\text{End } G$.

Definition 2. A group G is called *endocyclic* if it contains an element g with $G = g^{\text{End } G}$.

The SONATA package includes the *AllLibraryNearRingsWithOne* database of nearrings with identity. In this library, nearrings are arranged according to their additive groups G , for example, the command

$$N := \text{AllLibraryNearRingsWithOne}(G)$$

defines the lists of local nearrings N .

We use the function *IsEndoCyclicGroup* from the LocalNR package for checking whether G is an endocyclic group.

Let $[n, i]$ be the i -th group of order n in the SmallGroups library in GAP. We denote by C_n , D_n and Q_n the cyclic, dihedral and quaternion groups of order n , respectively.

Let $m(G)$ be the number of all non-isomorphic nearrings with identity R whose additive group R^+ is isomorphic to the group G .

The SONATA package includes the list of all non-isomorphic nearrings with identity of order less than 32.

The following lemma are obtained using GAP, the LocalNR and SONATA packages.

Lemma 1. *The following groups G of order less than 32 are endocyclic. Moreover, if G is an additive group of a nearring with identity R , then the following holds.*

$\text{IdGroup}(G)$	$\text{StructureDescription}(G)$	$m(G)$
[4, 1]	C_4	1
[4, 2]	$C_2 \times C_2$	5
[5, 1]	C_5	1
[6, 2]	C_6	1
[7, 1]	C_7	1
[8, 1]	C_8	1
[8, 2]	$C_4 \times C_2$	10
[8, 3]	D_8	7
[8, 4]	Q_8	-
[8, 5]	$C_2 \times C_2 \times C_2$	35
[9, 1]	C_9	1
[9, 2]	$C_3 \times C_3$	10
[10, 2]	C_{10}	1
[11, 1]	C_{11}	1
[12, 2]	C_{12}	1

Continued on the next page

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$m(G)$
[12, 4]	D_{12}	1
[12, 5]	$C_6 \times C_2$	9
[13, 1]	C_{13}	1
[14, 2]	C_{14}	1
[15, 1]	C_{15}	1
[16, 1]	C_{16}	1
[16, 2]	$C_4 \times C_4$	51
[16, 3]	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_2$	132
[16, 4]	$C_4 \rtimes C_4$	40
[16, 5]	$C_8 \times C_2$	37
[16, 6]	$C_8 \rtimes C_2$	33
[16, 7]	D_{16}	-
[16, 10]	$C_4 \times C_2 \times C_2$	470
[16, 11]	$C_2 \times D_8$	708
[16, 12]	$C_2 \times Q_8$	4
[16, 14]	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	2798
[17, 1]	C_{17}	1
[18, 2]	C_{18}	1
[18, 3]	$C_3 \times S_3$	8
[18, 5]	$C_6 \times C_3$	17
[19, 1]	C_{19}	1
[20, 2]	C_{20}	1
[20, 4]	D_{20}	1
[20, 5]	$C_{10} \times C_2$	9
[21, 2]	C_{21}	1
[22, 2]	C_{22}	1
[23, 1]	C_{23}	1
[24, 2]	C_{24}	1
[24, 5]	$C_4 \times S_3$	1
[24, 6]	D_{24}	-
[24, 9]	$C_{12} \times C_2$	14
[24, 10]	$C_3 \times D_8$	7
[24, 11]	$C_3 \times Q_8$	-
[24, 13]	$C_2 \times A_4$	8
[24, 14]	$C_2 \times C_2 \times S_3$	10
[24, 15]	$C_6 \times C_2 \times C_2$	136
[25, 1]	C_{25}	1
[25, 2]	$C_5 \times C_5$	16
[26, 2]	C_{26}	1
[27, 1]	C_{27}	1
[27, 2]	$C_9 \times C_3$	20
[27, 3]	$(C_3 \times C_3) \rtimes C_3$	22
[27, 4]	$C_9 \rtimes C_3$	4
[27, 5]	$C_3 \times C_3 \times C_3$	202

Continued on the next page

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$m(G)$
[28, 2]	C_{28}	1
[28, 3]	D_{28}	1
[28, 4]	$C_{14} \times C_2$	9
[29, 1]	C_{29}	1
[30, 4]	C_{30}	1
[31, 1]	C_{31}	1

The following theorem follows from Lemma 1.

Theorem 1. *Let G be a group of order less than 32. If G is an additive group of nearring with identity R , then G is endocyclic.*

3. Local nearrings and endocyclic groups. Main results about local nearrings are given in surveys [9] and [10].

Definition 3. *A nearring with identity is called local if the set of all its non-invertible elements is a subgroup of its additive group.*

The LocalNR package provides functionality for investigating nearrings with identity and local nearrings. It also includes the *AllLocalNearRings* database of local nearrings of small orders. In this library, local nearrings are arranged according to their additive and multiplicative groups, for example, the command

$$N := AllLocalNearRings(k, l, m, n)$$

defines the lists of local nearrings N . The arguments k, l, m, n are from $IdGroup$ of the additive group and the multiplicative group, respectively.

3.1. Local nearrings and endocyclic groups of order 32. Let $n(G)$ be the number of all non-isomorphic local nearrings R whose additive group R^+ is isomorphic to the group G .

There exist 51 non-isomorphic groups of order $32 = 2^5$ from which 35 are endocyclic groups and only 19 of these groups are the additive groups of local nearrings. The list and the database of all local nearrings of order 32 can be found in [11], the LocalNR package and [12].

Lemma 2. *The following groups G of order 32 are endocyclic. Moreover, if G is an additive group of a local nearring R , then the following holds.*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$n(G)$
[32, 1]	C_{32}	1
[32, 2]	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_4$	1397
[32, 3]	$C_8 \times C_4$	880
[32, 4]	$C_8 \rtimes C_4$	798
[32, 5]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	1945
[32, 6]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	433
[32, 7]	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2$	225
[32, 8]	$C_2 \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = (C_2 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)$	208

Continued on the next page

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$n(G)$
[32, 9]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_2$	-
[32, 10]	$Q_8 \rtimes C_4$	-
[32, 11]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	-
[32, 12]	$C_4 \rtimes C_8$	2406
[32, 16]	$C_{16} \times C_2$	129
[32, 17]	$C_{16} \rtimes C_2$	129
[32, 18]	D_{32}	-
[32, 21]	$C_4 \times C_4 \times C_2$	135558
[32, 22]	$C_2 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)$	149374
[32, 23]	$C_2 \times (C_4 \rtimes C_4)$	157905
[32, 24]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	262544
[32, 25]	$C_4 \times D_8$	-
[32, 26]	$C_4 \times Q_8$	-
[32, 27]	$(C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	-
[32, 28]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_2$	-
[32, 34]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$	-
[32, 35]	$C_4 \rtimes Q_8$	-
[32, 36]	$C_8 \times C_2 \times C_2$	177175
[32, 37]	$C_2 \times (C_8 \rtimes C_2)$	527419
[32, 39]	$C_2 \times D_{16}$	-
[32, 43]	$(C_2 \times D_8) \rtimes C_2$	-
[32, 45]	$C_4 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	>6684533
[32, 46]	$C_2 \times C_2 \times D_8$	-
[32, 47]	$C_2 \times C_2 \times Q_8$	-
[32, 49]	$(C_2 \times D_8) \rtimes C_2$	-
[32, 50]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_2$	-
[32, 51]	$C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	>7007053

As a consequence of Lemma 2 we have the following result.

Theorem 2. *Let G be a group of order 32. If G is an additive group of a local nearring R , then G is endocyclic.*

3.2. Local nearrings and endocyclic 2-generated groups of order 64.

There exist 267 non-isomorphic groups of order $64 = 2^6$ from which 53 are 2-generated groups and only 39 of these groups are endocyclic. Moreover, 24 of these groups are the additive groups of local nearrings. The list and the database of all local nearrings of order 64 can be found in [10], the LocalNR package and [13].

Lemma 3. *The following 2-generated groups G of order 64 are endocyclic. Moreover, if G is an additive group of a local nearring R , then the following holds.*

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$n(G)$
[64, 2]	$C_8 \times C_8$	1683
[64, 3]	$C_8 \rtimes C_8$	1628
[64, 4]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	167245

Continued on the next page

$IdGroup(G)$	$StructureDescription(G)$	$n(G)$
[64, 5]	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_8$	118190
[64, 6]	$(C_8 \times C_4) \rtimes C_2$	-
[64, 7]	$Q_8 \rtimes C_8$	-
[64, 8]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	-
[64, 9]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_4$	-
[64, 10]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_2$	7424
[64, 11]	$(C_2 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	-
[64, 12]	$(C_4 \rtimes C_8) \rtimes C_2$	5633
[64, 14]	$(C_2 \times C_2).((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) =$ $= (C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	5520
[64, 15]	$C_8 \rtimes C_8$	2384
[64, 16]	$C_8 \rtimes C_8$	2384
[64, 17]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_4$	433060
[64, 18]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_4$	-
[64, 19]	$C_4.(C_4 \times C_4)$	-
[64, 20]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_4$	-
[64, 21]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_4$	-
[64, 23]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4$	111758
[64, 24]	$(C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_4$	109189
[64, 26]	$C_{16} \times C_4$	11467
[64, 27]	$C_{16} \rtimes C_4$	11467
[64, 28]	$C_{16} \rtimes C_4$	-
[64, 29]	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_2$	28185
[64, 30]	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2$	4433
[64, 32]	$((C_8 \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	-
[64, 33]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4$	-
[64, 34]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2 \rtimes C_2$	16177
[64, 35]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_4$	15504
[64, 36]	$(C_2.((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) =$ $(C_2 \times C_2).(C_4 \times C_2)) \rtimes C_2$	15761
[64, 37]	$C_2.(((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) =$ $(C_4 \times C_2).(C_4 \times C_2)$	15920
[64, 38]	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_2$	-
[64, 41]	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2$	-
[64, 44]	$C_4 \rtimes C_{16}$	28500
[64, 45]	$C_8.D_8 = C_4.(C_8 \times C_2)$	1920
[64, 50]	$C_{32} \times C_2$	257
[64, 51]	$C_{32} \rtimes C_2$	257
[64, 52]	D_{64}	-

The following result follows from Lemma 3.

Theorem 3. *Let G be a 2-generated group of order 64. If G is an additive group of a local nearring R , then G is endocyclic.*

This work is supported by a grant from the Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, I.Yu.R., M.Yu.R.)

References

1. Aichinger, E., Binder, F., Ecker, Ju., Mayr, P., & Noebauer, C. (2018). SONATA — system of near-rings and their applications. *GAP package, Version 2.9.1*, Retrieved from <https://gap-packages.github.io/sonata/>
2. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.15.0; (2024). Retrieved from <https://www.gap-system.org>
3. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Ya. (2024). LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.4 (GAP package), Retrieved from <https://gap-packages.github.io/LocalNR/>
4. Pilz, G. (1977). *Near-rings. The theory and its applications*. North Holland: Amsterdam.
5. Meldrum, J. D. P. (1985). *Near-rings and their links with groups*. London: Pitman Publishing Limited.
6. Clay, J. R. (1992). *Nearrings. Geneses and Applications*. New York: Clarendon Press, Oxford University Press.
7. Ferrero, C. C., & Ferrero, G. (2002). *Nearrings. Some Developments Linked to Semigroups and Groups*. Kluwer AP, Dordrecht.
8. Lockhart, R. (2021). *The Theory of Near-Rings*. Springer, Cham.
9. Sysak, Ya. P. (2008). Products of groups and local nearrings. *Note di Mat.*, 28(2), 179–213. Retrieved from <http://siba-esu.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/11153>
10. Raievska, I., & Raievska, M. (2024). Local nearrings, their structure and GAP. *Ukr. Mat. Zh.*, 76(11), 1629–1644. <https://doi.org/10.1007/s11253-025-02426-y>
11. Raievska, I., & Raievska, M. (2018). Finite local nearrings. *Mohyla Mathematical Journal*, 1, 38–48. Retrieved from <https://mmj.ukma.edu.ua/article/view/152611/151700>
12. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Ya. DatabaseEndom32: (v1.0.2) [Data set] (2024). Zenodo, Retrieved from <https://zenodo.org/records/10820301>
13. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Ya. DatabaseEndom64: (v1.0.1) [Data set] (2024). Zenodo, Retrieved from <https://zenodo.org/records/10820320>

Раєвська І., Раєвська М. Локальні майже-кілець та ендочиклічні групи малих порядків.

Майже-кілець — це узагальнення асоціативних кілець, в яких адитивна група може бути неабелевою, а додавання пов'язане з множенням хоча б одним дистрибутивним законом, лівим або правим. У цьому сенсі локальні майже-кілець є узагальненням локальних кілець.

Пакет SONATA системи комп'ютерної алгебри GAP містить бібліотеку всіх неізоморфних майже-кілець порядку не більше 15 та майже-кілець з одиницею порядку не більше 31, серед яких 698 є локальними. Однак класифікація майже-кілець вищих порядків вимагає набагато складніших обчислень.

Наведено класифікацію майже-кілець з одиницею (до порядку 32) та локальних майже-кілець (порядків 32 та 64) на ендочиклічних адитивних групах. Крім того, представлено деяку інформацію щодо цих майже-кілець з GAP-пакетів LocalNR та SONATA.

Ключові слова: майже-кілець з одиницею, локальне майже-кілець, ендочиклічна група, адитивна група, пакет LocalNR, GAP.

Received 16.09.2025

УДК 519.23

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).72-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).72-81)**Г. І. Сливка-Тилищак¹, О. М. Ліба², М. О. Тилищак³**

¹ Ужгородський національний університет,
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук

anna.slyvka@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

² Мукачівський державний університет,
доцентка кафедри теорії та методики початкової освіти,
кандидат педагогічних наук

Liba_oksana@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6278-913X>

³ Ужгородський науковий ліцей,
здобувач

marichkatlk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4379-1423>

ПОБУДОВА ВИБІРОК З МНОЖИНИ МІРИ НУЛЬ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок із множин на площині, що мають міру нуль. У процесі дослідження було побудовано дві серії вибірок із множин міри нуль: одна з них відповідає трикутнику Серпінського, інша — деякому спеціально сконструйованому фракталу на площині.

Аналіз вибірових характеристик показав, що вибірові середні значення точок, отриманих із трикутника Серпінського, практично збігаються з точкою перетину медіан початкового трикутника. Подібна закономірність виявлена і для вибірок, побудованих із фрактала: їхні вибірові середні розташовані поблизу центра початкового правильного трикутника, на основі якого було здійснено побудову. Додатково досліджувалася динаміка зміни середньоквадратичних відхилень для серій вибірок. Було встановлено, що для рівних початкових правильних трикутників послідовність цих відхилень стабілізується вже на другому кроці побудови як для трикутника Серпінського, так і для розглянутого фрактала. Водночас отримані значення для трикутника Серпінського є дещо більшими, ніж для іншої фрактальної множини.

Ключові слова: множини міри нуль, трикутник Серпінського, фрактал на площині, числові характеристики вибірки.

1. Вступ. Поняття міри у математиці є узагальненням таких базових числових характеристик множин, як довжина, площа та об'єм. У різних просторах та для різних класів множин ці характеристики можуть мати власні особливості, проте їх об'єднують спільні властивості: вони завжди невід'ємні та володіють адитивністю, тобто для об'єднання двох неперетинних множин значення характеристики дорівнює сумі їхніх окремих значень. Саме завдяки цим універсальним рисам у математичному аналізі замість вивчення довжини, площі чи об'єму окремо розглядають більш загальне поняття – міру, що визначається на певному абстрактному класі множин і задовольняє вказані властивості.

Водночас існують множини, які хоч і підпорядковуються строгим математичним правилам побудови, проте мають так звану міру нуль. Іншими словами, вони не «займають простору» у звичному розумінні, хоч і складаються з нескінченної кількості елементів.

У роботі [1] розглянуто два способи побудови вибірок з множини Кантора та проаналізовано їх числові характеристики. Дана робота присвячена дослідженню методів побудови вибірок із множин на площині, що мають міру нуль, та аналізу їхніх числових характеристик. Актуальність теми зумовлена тим, що вивчення подібних множин дозволяє глибше зрозуміти природу міри як математичного поняття, а також розкрити властивості об'єктів, що здаються «невидимими» з точки зору традиційних понять довжини, площі чи об'єму. Методи побудови вибірок із таких множин досі залишаються мало дослідженими, що відкриває перспективи для подальших наукових пошуків у галузі теорії міри та її застосувань.

2. Трикутник Серпінського. Множина Кантора є одним з простих прикладів фракталів. Фрактал (від лат. *fractus* — подрібнений) — у загальновживаному розумінні фігура, що складається з частин, які в певному сенсі подібні до цілого. В геометричному сенсі фігура, яка відображається на свою підмножину (самоподібна) за допомогою деяких перетворень прямої, площини чи простору, залежно від того де розглядається фігура. Множина Кантора є самоподібною, оскільки її можна представити як об'єднання двох множин $K = ([0; \frac{1}{3}] \cap K) \cup ([\frac{1}{3}; 1] \cap K)$ кожна з яких $[0; \frac{1}{3}] \cap K$ та $[\frac{1}{3}; 1] \cap K$ подібна до всієї множини K . Множина $[0; \frac{1}{3}] \cap K$ отримується з множини K за допомогою гомотетії з центром в точці 0 та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, а множина $[\frac{2}{3}; 1] \cap K$ отримується з множини K за допомогою гомотетії з центром в точці 1 та коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. Трикутник Серпінського — один із двовимірних аналогів множини



Рис. 1. Множина Кантора.

Кантора. Його математичний опис був запропонований польським математиком Вацлавом Серпінським в 1915 році [2]. Цей трикутник є одним з найбільш ранніх прикладів фракталів, відомих з середньовіччя [3].

Розглянемо найпростіший спосіб побудови трикутника Серпінського. Беремо довільний трикутник (краще виглядає рівносторонній трикутник, для якого утвориться більш симетрична фігура). На першому кроці видаляється трикутник з вершинами в середині сторін початкового трикутника. На другому кроці аналогічні трикутники із трьох менших трикутників, які залишилися після першого кроку, і т. д. Після нескінченного повторення цієї процедури, від суцільного трикутника залишається підмножина початкового трикутника — трикутник Серпінського. Цікавим є той факт, що площа фігури, яка залишається на кожному кроці формування трикутника Серпінського, зменшується. Оскільки на кожному кроці відкидаються один з кожних чотирьох трикутників рівних за площею, то після кожного кроку лишається $\frac{3}{4}$ від попередньої площі. Таким чином при $n = 1$ — це $\frac{3}{4}$, $n = 2$ — це $\frac{9}{16}$ а для довільного n — $(\frac{3}{4})^n$. Якщо n спрямувати до нескінченності, то площа фігури, яка залишається, прямує до 0. Таким чином, площа трикутника Серпінського рівна 0.

3. Генерація вибірки точок трикутника Серпінського методом ха-

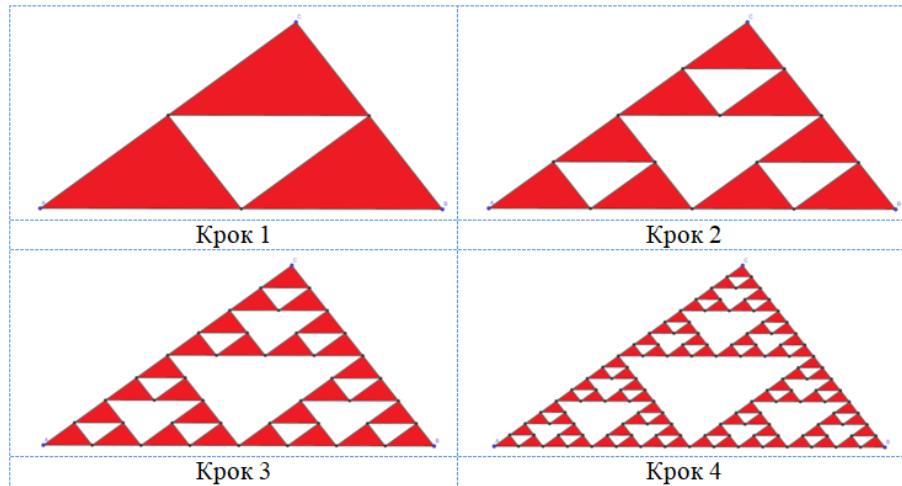


Рис. 2. Побудова трикутника Серпінського.

оса. Нехай (x, y) випадкова точка рівномірно розподілена всередині деякого трикутника ABC . Тобто ймовірність попадання у підмножину цієї множини пропорційна її площі.



Рис. 3. Рівномірний розподіл випадкової величини на першому кроці побудови.

Перемістимо точку (x, y) вдвічі ближче до A або вдвічі ближче до B або вдвічі ближче до C . Тобто для дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, розглянемо

$$(x', y') = f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x+x_A}{2}, \frac{y+y_A}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 0 \\ \left(\frac{x+x_B}{2}, \frac{y+y_B}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 1 \\ \left(\frac{x+x_C}{2}, \frac{y+y_C}{2} \right), & \text{якщо } \delta = 2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що якщо при кожному зверненні до $f(x, y)$ незалежно генерується δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, то

(x', y') є рівномірно розподіленою випадковою точкою на множині, зображеній на малюнку. Якщо б (x, y) була б рівномірно розподіленою випадковою

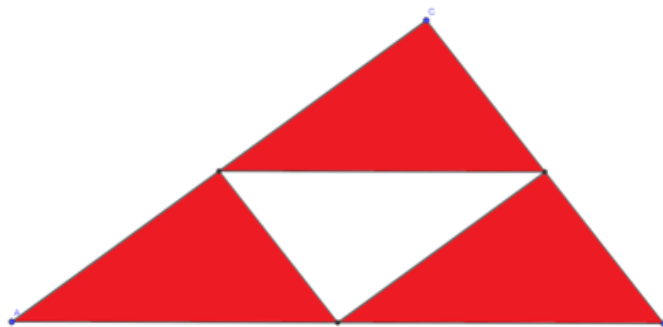


Рис. 4. Рівномірний розподіл випадкової величини на другому кроці побудови.

точкою на останній зображеній множині, то $f(x, y)$ була б рівномірно розподіленою випадковою величиною на такій множині. І так далі. Побудуємо в де-

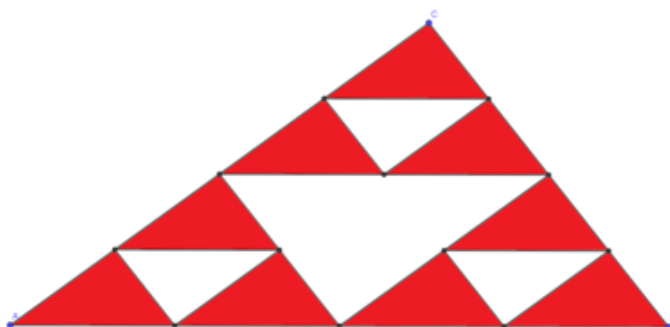


Рис. 5. Рівномірний розподіл випадкової величини на третьому кроці побудови.

якому наближені вибірку з трикутника Серпінського. Можна використати метод хаосу. На початку задамо довільний трикутник і генеруємо вибірку точок $(x_i^{(0)}, y_i^{(0)})$, $(i = 1, \dots, k)$ рівномірно розподілену всередині трикутника. Для цього ми поступово вибираємо точки рівномірно розподілені на квадраті, який охоплює даний трикутник і відкидаємо точки, які не попадають в середину трикутника, довівши їх кількість до k . На кожному кроці обчислюємо нову вибірку $(x_i^{(j+1)}, y_i^{(j+1)}) = f(x_i^{(j)}, y_i^{(j)})$, $(i = 1, \dots, k)$ застосовуючи до кожної точки попередньої вибірки функцію f .

Проаналізуємо характеристики утворених вибірок. Дві середні арифметичні одноіменних координат вершин трикутника є, очевидно, координатами точки перетину медіан трикутника. В механічних задачах вважають, що в цій точці зосереджена вся маса фігури, яку називають центром мас. При цьому

обчислення координат центру мас системи матеріальних точок знаходиться за формулою:

$$x_{сер} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \dots + m_k}$$

та аналогічна формула для y . Тому й далі можна вважати, що в середині зосереджена маса $m_1 + m_2 + \dots + m_k$, але основне — результат обчислення не залежить від порядку заміни системи точок на одну, в якій зосереджена вся маса. А на першому кроці видаляється саме трикутник із тим же центром, що й початковий. Тому центр мас фігури, що отримується на першому кроці такий саме, як на початку та такий саме, як у видаленого трикутника. Якщо розглядати кожен з трьох рівних трикутників, які залишилися на наступному кроці то їх центри не змінюються і на другому кроці. Маси міняються з кроку на крок, але між собою залишаються рівними в межах одного кроку. Тому центр мас системи трьох трикутників, що буде також центром початкового трикутника, не зміниться і на другому кроці. І так далі. Отже, центр фігури, яка лишається на кожному кроці видалення, незмінна.

Запуск коду, що починає з вибірки в $k = 200$ елементів рівномірно розподілених у рівносторонньому трикутнику зі стороною 0,8 з вершинами $(0, 5; 0, 9 - 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 1; 0, 9)$, $(0, 9; 0, 9)$ генерує вибірки поданих характеристик та зображує точки поточної вибірки червоними точками, а всіх попередніх вибірок — жовтими, дає наочний рисунок. Точка перетину медіан трикутника знахо-

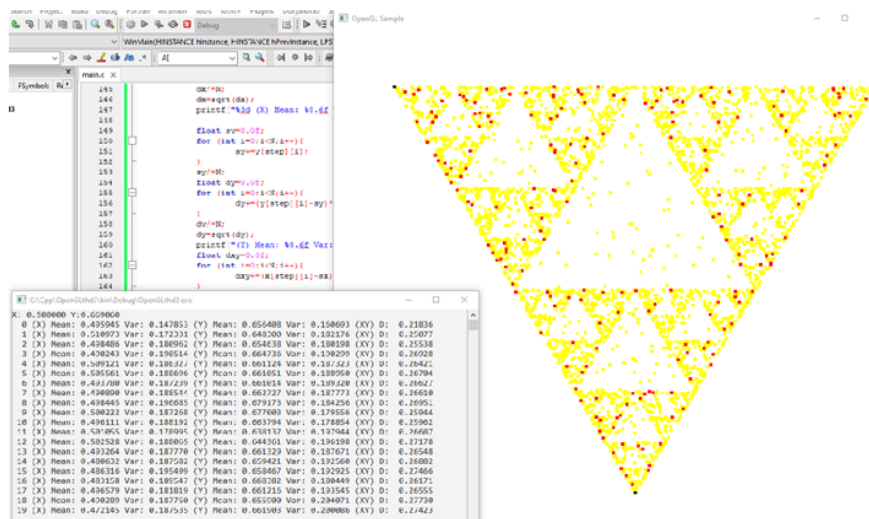


Рис. 6. Генерація вибірки з трикутника Серпінського методом хаоса.

диться, як середнє арифметичне їх відповідних координат $(0, 5; 0, 66906)$ і має відповідати вибіркового середнім x та y на кожному кроці.

Аналіз таблиці показує, що вибірконе середнє x та y , дійсно знаходиться завжди біля 0,5 та 0,66906 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,03, а середньо квадратичне відхилення знаходиться завжди біля 0,18 та 0,19 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,033.

Таблиця 1.

Характеристики вибірки.

I	Вибіркове середнє X	Середньо квадра- тичне відхилення X	Вибіркове середнє Y	Середньо квадра- тичне відхилення Y	Середньо квадра- тичне відхилення
0	0,495945	0,147853	0,656408	0,160693	0,21836
1	0,510973	0,172331	0,648300	0,182176	0,25077
2	0,498486	0,180962	0,654638	0,180198	0,25538
3	0,490243	0,190514	0,664736	0,190299	0,26928
4	0,509121	0,186327	0,661124	0,187323	0,26421
5	0,505561	0,188696	0,661051	0,188950	0,26704
6	0,493780	0,187239	0,661014	0,189320	0,26627
7	0,490890	0,188544	0,662727	0,187773	0,26610
8	0,498445	0,196685	0,679173	0,184256	0,26951
9	0,500222	0,187268	0,677003	0,179556	0,25944
10	0,496111	0,188192	0,663794	0,178854	0,25962
11	0,501055	0,178995	0,638137	0,197944	0,26687
12	0,502528	0,188065	0,644361	0,196198	0,27178
13	0,493264	0,187770	0,661329	0,187671	0,26548
14	0,480632	0,187582	0,659421	0,192560	0,26882
15	0,486316	0,195499	0,658467	0,192925	0,27466
16	0,483158	0,189547	0,668382	0,180449	0,26171
17	0,496579	0,181819	0,661216	0,193545	0,26555
18	0,490289	0,187750	0,655900	0,204071	0,27730
19	0,472145	0,187535	0,661903	0,200086	0,27423

Цікавим є середньо квадратичне відхилення в сукупності обох координат, що обчислюємо за формулою:

$$D_i = \sqrt{\left(x^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2},$$

або

$$D_i = \sqrt{\frac{\left(x_1^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y_1^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2 + \dots + \left(x_k^l - \overline{x^{(l)}}\right)^2 + \left(y_k^l - \overline{y^{(l)}}\right)^2}{k}}.$$

Середньо квадратичне відхилення, крім першого значення, знаходиться завжди біля 0,26 відрізняється не більше ніж на 0,018.

4. Генерація вибірки точок деякого фрактала методом хаоса. Нехай (x, y) випадкова точка рівномірно розподілена всередині правильного трикутника ABC . Перемістимо точку (x, y) втричі ближче до прямої AB , залишаючи її на перпендикулярі проведеному до прямої AB (стиск до прямої AB з коефіцієнтом $1/3$). Тоді вона попаде всередину трикутника AMB , де M центр трикутника ABC , а, отже, і точка перетину його медіан. При виборі замість AB

інших прямих: BC або CA , то точка попадає відповідно в трикутники BMC або CMA . Тобто нове положення точки (x, y) може знову бути довільною точкою трикутника ABC (Рис. 7). Тому продовжуючи з коефіцієнтом $1/3$, аналогічно до попередньої побудови трикутника Серпінського, ми не отримаємо фрактал. Зменшимо коефіцієнт до $1/4$. Перемістимо точку (x, y) в чотири рази ближ-

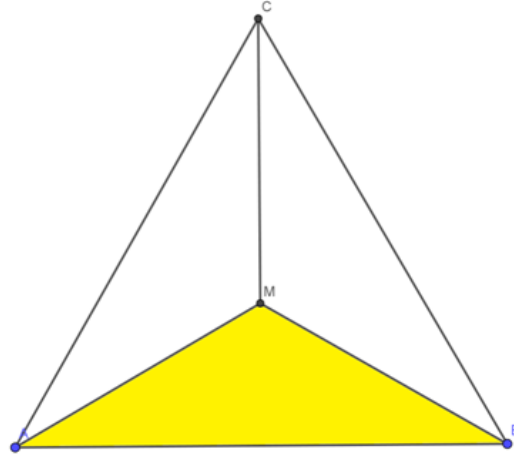


Рис. 7. Ілюстрація стиску до сторони трикутника з коефіцієнтом $\frac{1}{2}$.

че до прямої AB або в чотири рази ближче до прямої BC або в чотири рази ближче до прямої CA залишаючи її на перпендикулярі проведеному до відповідної прямої. Для реалізації таких стисків нам буде потрібно знайти формули для проекції точки $T(x, y)$ на пряму M_1M_2 , $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ (Рис.8). Нехай

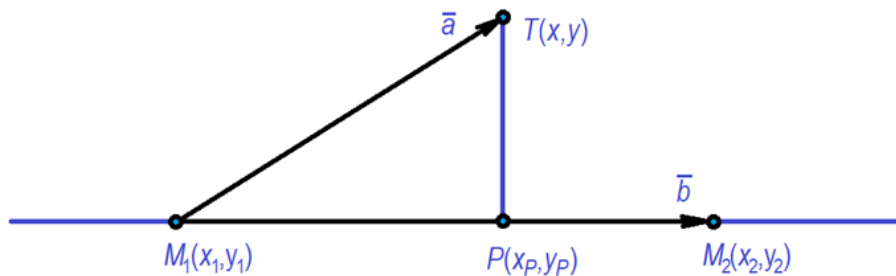


Рис. 8. Ілюстрація стиску з коефіцієнтом $\frac{1}{4}$.

$\bar{a} = \overline{M_1T} = (x - x_1, y - y_1)$, $\bar{b} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Для проекції P точки T на пряму M_1M_2 одержимо:

$$M_1P = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}, \quad \overline{M_1P} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \cdot \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b}^2} \cdot \bar{b}.$$

Таким чином $(x_p, y_p) = (x_1, y_1) + \overline{M_1P}$. Для знаходження точки на перпендикулярі TP , що в 4 рази ближча до P ніж T до P шукаємо точку $(\frac{3x_p + x}{4}, \frac{3y_p + y}{4})$, яка в 3 рази ближча до P ніж вона ж до T . Тобто для дискретної рівномірно

розподіленої випадкової величини δ , що приймає значення 0, 1 або 2, кожне з однаковою ймовірністю $1/3$, розглянемо

$$(x', y') = f(x, y) = \left(\frac{3x_P + x}{4}, \frac{3y_P + y}{4} \right),$$

де

$$(x_P, y_P) = f(x, y) = \begin{cases} \text{проекція } (x, y) \text{ на } AB, & \text{якщо } \delta = 0 \\ \text{проекція } (x, y) \text{ на } BC, & \text{якщо } \delta = 1 \\ \text{проекція } (x, y) \text{ на } CA, & \text{якщо } \delta = 2. \end{cases}$$

Запуск коду, що починає з вибірки в $k = 200$ елементів, рівномірно розподілених у рівносторонньому трикутнику зі стороною 0,8 та з вершинами в точках $(0, 5; 0, 9 - 0, 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(0, 1; 0, 9)$, $(0, 9; 0, 9)$ генерує вибірки поданих характеристик та зображує точки поточної вибірки червоними точками, а всіх попередніх вибірок — жовтими, дає наочний рисунок. Проаналізуємо характеристики

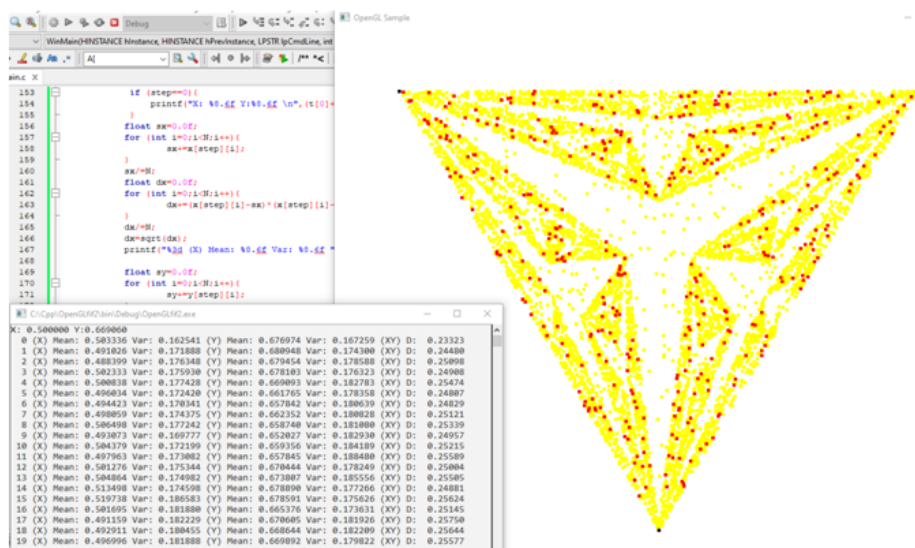


Рис. 9. Генерація вибірок з деякого фрактала методом хаоса.

утворених вибірок. Дві середні арифметичні одноіменних координат вершин трикутника є, очевидно, координатами точки перетину M медіан трикутника, яка є центром трикутника. Трикутник не змінюється при повороті навколо точки M на кут 120° та 240° . Крім того такі повороти мініяють ролями сторони трикутника, що не впливає на розподіл ймовірностей при перетворенні f . Отже, $M(0, 5; 0, 66906)$ залашиться центром мінімальних областей в яких можуть знаходитися точки вибірок на кожному кроці їх формування. Точка перетину медіан трикутника знаходиться, як середнє арифметичне їх відповідних координат. Аналіз таблиці показує, що вибіркове середнє x та y , дійсно знаходиться завжди біля 0,5 та 0,66906 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,02 а середньо квадратичне відхилення знаходяться завжди біля 0,175 та 0,18 відповідно та відрізняються не більше ніж на 0,013.

Середньо квадратичне відхилення крім першого значення знаходиться завжди біля 0,25 та відрізняється не більше ніж на 0,0075. Таким чином, середньо

Таблиця 2.

Характеристики вибірки.

I	Вибіркове середнє X	Середньо квадрати́чне відхилення X	Вибіркове середнє Y	Середньо квадрати́чне відхилення Y	Середньо квадрати́чне відхилення
0	0,503336	0,162541	0,676974	0,167259	0,23323
1	0,491026	0,171888	0,680948	0,174300	0,24480
2	0,488399	0,176348	0,679454	0,178588	0,25098
3	0,502333	0,175930	0,678103	0,176323	0,24908
4	0,500838	0,177428	0,669093	0,182783	0,25474
5	0,496034	0,172420	0,661765	0,178358	0,24807
6	0,494423	0,170341	0,657842	0,180639	0,24829
7	0,498059	0,174375	0,662352	0,180828	0,25121
8	0,506498	0,177242	0,658740	0,181080	0,25339
9	0,493073	0,169777	0,652027	0,182930	0,24957
10	0,504379	0,172199	0,659356	0,184189	0,25215
11	0,497963	0,173082	0,657845	0,188480	0,25589
12	0,501276	0,175344	0,670444	0,178249	0,25004
13	0,504864	0,174982	0,673807	0,185556	0,25505
14	0,513498	0,174598	0,678890	0,177266	0,24881
15	0,519738	0,186583	0,678591	0,175626	0,25624
16	0,501695	0,181880	0,665376	0,173631	0,25145
17	0,491159	0,182229	0,670605	0,181926	0,25750
18	0,492911	0,180455	0,668644	0,182209	0,25644
19	0,496996	0,181888	0,669892	0,179822	0,25577

квадратичне відхилення в сукупності обох координат трохи менше ніж середньо квадратичне відхилення 0,26 вибірок побудованих для трикутника Серпінського з тим же початковим трикутником.

5. Висновки. У роботі побудовано серії вибірок з множин міри 0:

- трикутник Серпінського (одна серія);
- деякий фрактал на площині (одна серія).

Вибіркові середні вибірок трикутника Серпінського майже не відрізняються від точки перетину медіан початкового трикутника. Аналогічно, вибіркові середні вибірок побудованого фрактала не відрізняються від центра початкового правильного трикутника. Для рівних початкових правильних трикутників послідовність середньоквадратичних відхилень вибірок для трикутника Серпінського та побудованого фрактала стабілізується на другому кроці. Для трикутника Серпінського ці значення є трохи більшими.

Таким чином, проведені експерименти засвідчують наявність чіткої тенденції: вибіркові середні для множин міри нуль, побудованих на основі правильних трикутників, відображають геометричні центри вихідних фігур, а дисперсійні характеристики стабілізуються вже на початкових етапах побудови.

Список використаної літератури

1. Slyvka-Tylyshchak, H. I., Madi, M. V., & Tylyshchak, M. O. (2025). Construction of a sample from a measure-zero set and its characteristics. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics*, 46(1), 104–108. [in Ukrainian].
2. Sierpinski, W. (1915). Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Paris*, 160, 302–305.
3. Bevz, V. H. (2006). *History of Mathematics*. Kharkiv: Osnova [in Ukrainian].
4. Turchyn, V. M. (1999). *Mathematical Statistics*. Kyiv: Akademiia [in Ukrainian].

Slyvka-Tylyshchak G. I., Liba O. M., Tylyshchak M. O. Construction of samples from a measure-zero set in the plane and their numerical characteristics.

The study is devoted to the investigation of methods for constructing samples from sets of measure zero in the plane. Two series of such samples were generated: one corresponding to the Sierpiński triangle and the other to a specially constructed fractal set in the plane.

Analysis of the sample characteristics showed that the sample means obtained from the Sierpiński triangle are almost identical to the intersection point of the medians of the original triangle. A similar pattern was observed for the constructed fractal: the sample means are located near the centroid of the initial equilateral triangle on which the fractal construction was based. Additionally, the dynamics of the mean square deviations of the samples were examined. It was found that, for equal initial equilateral triangles, the sequence of these deviations stabilizes already at the second iteration step, both for the Sierpiński triangle and for the constructed fractal. At the same time, the values for the Sierpiński triangle are slightly larger than those for the other fractal set.

Keywords: measure-zero sets, Sierpiński triangle, fractal in the plane, numerical characteristics of a sample.

Одержано 16.08.2025

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).82-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).82-90)**V. M. Turchyn¹, O. V. Pyrozhenko²**

¹ Oles Honchar Dnipro National University,
Associate Professor, Department of Statistics and Probability Theory,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent
vnturchyn@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0268-9545>

² Institute of Technical Mechanics (National Academy of Sciences of Ukraine,
State Space Agency of Ukraine),
Senior Research Fellow,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher
alex.pirozhenko@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5240-8604>

STOCHASTICITY AND DETERMINICITY OF MECHANICAL SYSTEMS

The article is devoted to stochasticity and determinicity in mechanical systems: it is shown how a mechanical system can behave in a random way which contradicts the determinicity principle of classical mechanics. A mechanical system is considered, a dumbbell which after being tossed moves in the vertical plane and bounces off the horizontal plane until it stops, one of its tips pointing to the positive direction. On the one hand, the initial conditions uniquely define the dumbbell orientation on the axis, on the other hand, the experiment shows that this is not true. The stochastic nature of the dumbbell behavior is caused by the boundedness from below of measurement device errors and locally “lined” structure of the final state diagram.

Keywords: The determinicity principle, stochasticity, mechanical system, diagram of final states, probability.

1. Introduction. According to the principle of determinicity of classical mechanics the initial position of a mechanical system uniquely defines its trajectory. But experience shows that there exist mechanical systems which movement can not be predicted and these are not unpleasant exceptions but rather a natural situation. One of such simple systems is a dumbbell which after tossing moves in the vertical plane and afterwards bounces off a horizontal plane until it stops with one of its ends pointing to the positive direction. The initial conditions — i.e., the angular velocity and the height from which the dumbbell was thrown, according to the principle of determinicity, uniquely define the orientation of the dumbbell on the abscissa axis. But this is wrong — experience shows that it is impossible to predict (determine) the dumbbell’s orientation by the initial conditions. How can it happen?

In this article we undertook an attempt to explain the seeming contradiction between the determinicity principle of classical mechanics and stochastic behavior of a certain mechanical system.

Stochastic behavior of mechanical systems which should behave deterministically according to the determinicity principle of classical mechanics was studied by many authors.

Diaconis, Holmes and Montgomery studied tossing of a coin using a tossing machine (see [1]). The analysis of their model was very careful and comprehensive.

Keller, in particular, considered a mathematical model of flipping a symmetric coin with random initial conditions (see [2]). He supposed that the surface is an absorbing barrier. Keller also considered a wheel and other chance devices.

Nagler and Richter (see [3, 4]) researched dice tossing (a dice was modeled as a barbell with point masses at the tips). The first of these articles is devoted to the symmetrical case of equal masses and the second one contains a generalization of these results to the asymmetric case.

Vulović and Prange studied in [5] a two-dimensional coin toss. They reached a conclusion that the coin flip is not random but closeness to randomness in various randomizers is connected to precision of a tossing mechanism.

2. Model of the dumbbell's movement. The dumbbell is tossed in the vertical plane with the angular velocity ω_0 from height h_0 . The dumbbell stops after several bounces off the horizontal plane, one of its tips — white (A) or black (B) — pointing to the positive direction.

The dumbbell's motion is modeled (described) by a system of ordinary differential equations. And the determinicity principle of classical mechanics corresponds to the uniqueness theorem for solutions of an ordinary differential equation.

Let us build a model of the planar motion of the dumbbell in the uniform gravitational field in the vertical plane which passes through the dumbbell's center of mass.

Our dumbbell is modeled as two point masses (the masses of both tips are equal) at the ends of a zero-mass rod. The surface off which the dumbbell bounces is horizontal, absolutely flat and ideally smooth.

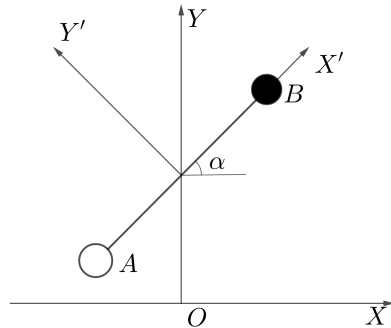


Figure 1. Two Cartesian coordinate systems.

Let us introduce two right-handed Cartesian coordinate systems (see Fig. 1). The first one is an inertial coordinate system Oxy , the Ox axis belongs to the horizontal plane off which the dumbbell bounces, the Oy axis points vertically upwards. The dumbbell's center of mass belongs to the Oy axis. The second coordinate system $O'x'y'$ is a body-fixed coordinate system which is attached to the dumbbell's center of mass, $O'x'$ is pointed along the dumbbell's rod, the positive direction of $O'x'$ is the direction towards the black (B) dumbbell's tip, $O'y'$ is orthogonal to $O'x'$. The orientation of the $O'x'y'$ coordinate system with respect to the Oxy coordinate system is defined by the angle α between Ox and $O'x'$ (see Fig. 1), the positive direction for α is the counterclockwise one.

The dumbbell is a perfectly rigid body. The dumbbell's mass is concentrated at its tips — $m/2$ at each one.

Denote the dumbbell's length by $2l$, the center of mass coordinates by (x, y) , the tips' coordinates by (x_A, y_A) and (x_B, y_B) correspondingly, the dumbbell's axial moment of inertia with respect to the $O'z'$ axis by I ($O'z'$ is perpendicular to the plane $O'x'y'$), the dumbbell's angular velocity with respect to the $O'z'$ axis by ω , the acceleration of free fall by g ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$). We neglect the air drag. The friction coefficient is zero (the bounce surface is absolutely smooth). The dumbbell's free motion until the bounce with the surface under the assumptions above is described by the following system of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -gm, \\ I\dot{\omega} = 0, \\ \dot{\alpha} = \omega. \end{cases} \quad (1)$$

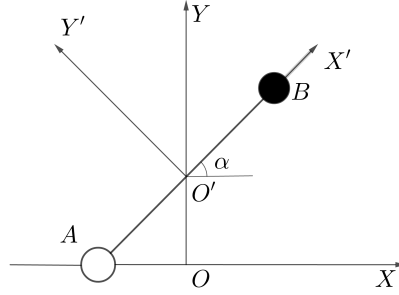


Figure 2. The dumbbell at a bounce moment.

The solution of system (1) until moment t_1 of the first dumbbell's bounce (on $[0; t_1)$ interval) under the initial conditions $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, $y = y_0 = h$, $\dot{y} = \dot{y}_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\omega = \omega_0$ is

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = h + \dot{y}_0 t - \frac{gt^2}{2}, \\ \omega = \omega_0, \\ \alpha = \alpha_0 + \omega_0 t. \end{cases} \quad (2)$$

Let us note that $x(t) = 0$ for all t : since the friction coefficient is zero, dumbbell's bounces do not change the center of mass velocity along the Ox axis.

At a moment of a dumbbell's bounce off the surface t_1 (at this moment the ordinate $y_A(t_1)$ of the A tip or the ordinate $y_B(t_1)$ of the B tip is equal to 0) the center of mass velocity and the dumbbell's angular velocity instantly change and the dumbbell continues its movement until the moment t_2 of the second bounce (on $[t_1; t_2)$ interval) according to (1) with the initial conditions

$$x(t_1) = 0, \dot{x}(t_1) = 0, y(t_1), \dot{y}(t_1), \alpha(t_1), \omega(t_1). \quad (3)$$

The velocity of the dumbbell's center of mass $\dot{y}(t_1)$ and the dumbbell's angular velocity $\omega(t_1)$ are reevaluated in the following way:

$$\dot{y}(t_1) = v_y^{(1)} = \left(1 - \frac{\rho^2(1+k)}{r_x^2 + \rho^2}\right) v_y^{(0)} - \frac{(1+k)r_x\rho^2}{r_x^2 + \rho^2} \omega^{(0)}, \quad (4)$$

$$\omega(t_1) = \omega^{(1)} = \left(1 - \frac{r_x^2(1+k)}{r_x^2 + \rho^2}\right) \omega^{(0)} - \frac{(1+k)r_x}{r_x^2 + \rho^2} v_y^{(0)}, \quad (5)$$

where the following notations are used: $\omega^{(0)}$ is the angular velocity before the bounce, $\omega^{(1)}$ is the angular velocity after the bounce, $v_y^{(0)}$ is the projection of the dumbbells' center of mass velocity vector $v^{(0)}$ before the bounce, $v_y^{(1)}$ is the projection of the dumbbells' center of mass velocity vector $v^{(1)}$ after the bounce, $r_x = l \cos \alpha$ if the dumbbell bounces off the surface on its A tip and $r_x = -l \cos \alpha$ if the dumbbell bounces off the surface on its B tip, k is the coefficient of restitution which describes the physical properties of the impact surface ($k = v_y^{(1)}/v_y^{(0)}$), $\rho^2 = I/m = l^2$.

We can find moment t_2 of the second bounce using the known solution of system (1) between the moment t_1 of the first bounce and the moment of the second bounce (on $[t_1, t_2]$ interval).

Then, reevaluating the initial conditions at the moment t_2 of the second bounce (similar to reevaluation of initial conditions at the moment t_1 according to (3)–(5)) we obtain the initial conditions for solving system (1) of differential equations which describes the dumbbell's movement between the moments of the second and the third bounce and so on until the dumbbell stops at some moment (i.e. until it positions itself on the Ox axis or stops in a vertical position) due to lack of energy for further movement. The dumbbell's tip which points to the positive direction of Ox (the white or the black one) is registered, the vertical dumbbell's position is also registered.

The dumbbell's energy at moment t is

$$E(t) = \frac{1}{2}v^2(t)m + \frac{1}{2}I\omega^2(t) + mgy(t).$$

It changes (decreases) at bounce moments t_k (energy is dissipated as a result of a bounce). The dumbbell will continue moving after the k -th bounce (i.e. it will overturn at least once) if its energy $E(t_k)$ after the bounce is not less than $E_{min} = mgl$, i.e. the condition of continuation of the dumbbell's movement after the k -th bounce is the inequality

$$E(t_k) \geq E_{min}. \quad (6)$$

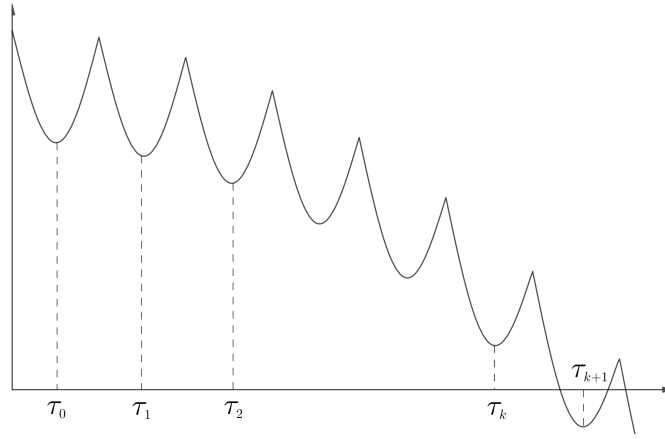
3. The moment of the dumbbell's bounce off the surface. It is necessary to know the moment t_1 of the first dumbbell's bounce off the surface in order to reevaluate the initial conditions at the moment of the bounce according to (3)–(5). We will find it using the known solution (2) of system (1) until the moment t_1 (from now on $\alpha_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0$).

Obviously a moment t of a dumbbell's bounce off the surface must satisfy the equality

$$|l \sin \alpha(t)| = y(t) \quad (7)$$

(see Fig. 2). And the first bounce moment is the smallest root of equation

$$|l \sin(\omega_0 t)| = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Figure 3. The plot of $f(t)$.

We will find it as follows. The plot of function

$$f(t) = h - \frac{gt^2}{2} - |l \sin(\omega_0 t)|$$

is shown in Fig. 3 (the axis of abscissas corresponds to t , the axis of ordinates — to values $f(t)$). Function $f(t)$ has local minima at the points

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

The moment t_1 of the first bounce belongs to the interval $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ for which $f(\tau_k) \geq 0$ and $f(\tau_{k+1}) < 0$, besides, t_1 is the only root of equation $f(t) = 0$ from this interval. For given $\varepsilon > 0$ we will find an interval $[\tau_\varepsilon^{(1)}, \tau_\varepsilon^{(2)}] \subset [\tau_k, \tau_{k+1}]$ such that $\tau_\varepsilon^{(2)} - \tau_\varepsilon^{(1)} \leq \varepsilon$, $f(\tau_\varepsilon^{(1)}) > 0$ and $f(\tau_\varepsilon^{(2)}) < 0$. A point t_1 from $[\tau_\varepsilon^{(1)}, \tau_\varepsilon^{(2)}]$ taken randomly according to the uniform distribution on $[\tau_\varepsilon^{(1)}, \tau_\varepsilon^{(2)}]$ will be considered as the moment of the first bounce which is calculated with error ε . Let us note that it is impossible to avoid error when we determine a moment of bounce. We can reevaluate the initial conditions using the known value of moment t_1 of the first bounce and if the energy is big enough for the dumbbell's overturning we can find the moment t_2 of the second bounce, etc. (all the bounce moments are random variables).

We will also consider experiments with an absorbing barrier at the n -th bounce besides the experiment which was described above. An experiment with an absorbing barrier at the n -th bounce will mean the experiment with tossing of a dumbbell and bounces off the surface afterwards such that the n -th bounce is perfectly inelastic and therefore the last one. We register the dumbbell's tip which points to the positive direction of Ox axis.

4. Final state diagram.

We will use the following values for numerical experiments: $2l = 0.6$ m, $m = 2$ kg, $k = 0.8$, $x_0 = 0$ m, $\dot{x}_0 = 0$ m/s, $\dot{y}_0 = 0$ m/s, $\alpha_0 = 0$ rad.

Let us determine the outcome of an experiment for given initial conditions $(\omega, h) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty)$: the dumbbell's black tip points towards the positive direction, the white tip points towards the positive direction, the dumbbell

stopped vertically. Let us paint the point (ω, h) black if the dumbbell's black tip points towards the positive direction, paint it gray if the white tip points towards the positive direction and paint it white if the dumbbell stopped vertically. We will use the term “final state diagram” for the set of possible initial conditions (ω, h) painted in such a way. Examples of final states diagrams are given in Fig. 4, 5, 6 (these are the final states diagrams for the $[33; 35] \times [81; 83]$ neighborhood of the point $(34; 82)$). The final states diagram for the first bounce (with an absorbing barrier at the first bounce) is shown in Fig. 4, the final states diagrams for the second and the third bounces are shown in Fig. 5 and 6 correspondingly. The final states diagrams for the subsequent bounces have structure similar to the structure shown in Fig. 6.

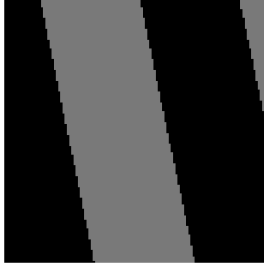


Figure 4. Diagram,
first bounce.

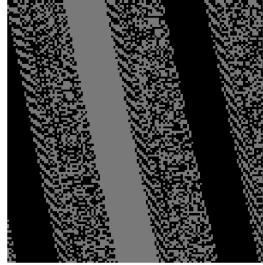


Figure 5. Diagram,
second bounce.

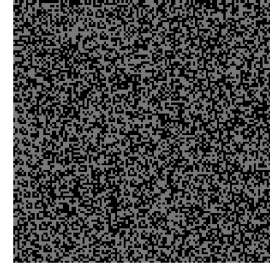


Figure 6. Diagram,
third bounce.

5. Local structure of a final state diagram. We will give examples of local structure of final state diagrams for the case when the dumbbell starts movement with high initial energy — the dumbbell has high initial angular velocity and and it is tossed from large height, or at least one of this parameters has a large value.

Enlarged final state diagrams for the $[85 - 10^{-4}; 85 + 10^{-4}] \times [0.5 - 10^{-4}; 0.5 + 10^{-4}]$ neighborhood of the point $(85; 0.5)$ for the 4th, 5th and 6th bounces are shown in Fig. 7, 8 and 9 correspondingly. We see “uniformly gray” structure of the final state diagrams but really the final state diagrams have locally line structure (see Fig. 10, 11, 12). The enlarged fragment $[85 - 10^{-7}; 85 + 10^{-7}] \times [0.5 - 3 \cdot 10^{-7}; 0.5 + 3 \cdot 10^{-7}]$ of a neighborhood of the point $(85; 0.5)$ at the 4th bounce is shown in Fig. 10. The enlarged fragment $[85 - 10^{-9}; 85 + 10^{-9}] \times [0.5 - 3 \cdot 10^{-9}; 0.5 + 3 \cdot 10^{-9}]$ of a neighborhood of the point $(85; 0.5)$ at the 5th bounce is shown in Fig. 11. The enlarged fragment $[85 - 10^{-11}; 85 + 10^{-11}] \times [0.5 - 3 \cdot 10^{-11}; 0.5 + 3 \cdot 10^{-11}]$ of a neighborhood of the point $(85; 0.5)$ at the 6th bounce is shown in Fig. 12. (Let us note that the hydrogen atom size is 10^{-11} m.)

The final state diagram for the case when the contribution of h into the dumbbell's energy is substantially greater than the the contribution of ω has locally “vertical” line structure.

The final state diagram will also have locally line structure for other quite large values of the dumbbell's energy and the slope of stripes (see Fig. 4) depends on contribution of ω and h into the dumbbell's energy.

6. Measurement errors and local structure of a final state diagram. Locally line structure of final state diagram holds for large values of the dumbbell's energy for a numerical experiment. This fact provides grounds for concluding that

final state diagram for a physical experiment also has locally line structure when energy is large.

We set the initial conditions (the initial angular velocity ω_0 and the initial height h_0) using a measurement device. Boundedness of the measurement error Δ of the measurement device from below — it cannot be less than certain Δ_0 (the error cannot be arbitrarily small) and locally line structure of the final state diagram (when energy is large enough) make impossible prediction of the experiment outcome (i.e. the dumbbell's orientation) from the initial conditions. By “setting” the initial conditions (ω_0, h_0) using a measurement device which has the measurement error $\Delta = (\Delta_\omega, \Delta_h)$ we actually obtain as initial conditions a point (ω, h) from a rectangle $[\omega_0 - \Delta_\omega/2, \omega_0 + \Delta_\omega/2] \times [h_0 - \Delta_h/2, h_0 + \Delta_h/2]$. A measurement device which has the measurement error $\Delta = (\Delta_\omega, \Delta_h)$ cannot distinguish between initial conditions (ω_1, h_1) and (ω_2, h_2) such that $|\omega_1 - \omega_2| < \Delta_\omega$ and $|h_1 - h_2| < \Delta_h$. But a mechanical system “distinguishes” between arbitrarily close but different initial conditions. Therefore every time when we set the initial conditions using a measurement device we actually obtain as initial conditions a random point (ω, h) from a neighborhood $[\omega_0 - \Delta_\omega/2, \omega_0 + \Delta_\omega/2] \times [h_0 - \Delta_h/2, h_0 + \Delta_h/2]$. But the final state diagram for the $[\omega_0 - \Delta_\omega/2, \omega_0 + \Delta_\omega/2] \times [h_0 - \Delta_h/2, h_0 + \Delta_h/2]$ neighborhood of (ω_0, h_0) point has line structure. This fact makes impossible determination of the dumbbell's orientation using the initial conditions (ω_0, h_0) .

When we conduct the numerical experiment the boundedness of error Δ for the initial conditions (ω_0, h_0) from below is modeled as random choice of a point (ω, h) from the $[\omega_0 - \Delta_\omega/2, \omega_0 + \Delta_\omega/2] \times [h_0 - \Delta_h/2, h_0 + \Delta_h/2]$ neighborhood of (ω_0, h_0) point. The second error (which is impossible to avoid during a numerical simulation of the dumbbell's movement) is the error of determining a bounce moment, this error depends on the accuracy of a computer and a calculations algorithm. But the system (1) “can distinguish” between arbitrarily close but different initial conditions. The line structure of the final state diagram for the $[\omega_0 - \Delta_\omega/2, \omega_0 + \Delta_\omega/2] \times [h_0 - \Delta_h/2, h_0 + \Delta_h/2]$ neighborhood of (ω_0, h_0) and boundedness of the measurement device error from below (this error is greater or equal to a certain Δ_0) make impossible determination of the experiment's outcome by the initial conditions (ω_0, h_0) in a numerical experiment.



Figure 7. Enlarged,
fourth bounce.



Figure 8. Enlarged,
fifth bounce.

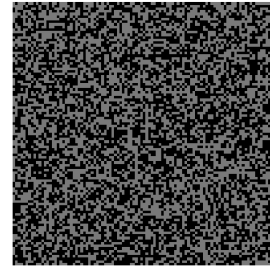


Figure 9. Enlarged,
sixth bounce.

The results we obtain do not contradict either the principle of determinicity of classical mechanics or the uniqueness theorem for solutions of an ordinary differential equation. The phenomenon of non-deterministic, stochastic dumbbell's behavior is

caused by fundamental boundedness of measurement device error from below and locally line structure of the final state diagram.

The numerical simulation of the dumbbell's movement was realized by V.I. Dubyna, Master student of Oles Honchar Dnipro National University.



Figure 10.
Line structure,
fourth bounce.



Figure 11.
Line structure,
fifth bounce.



Figure 12.
Line structure,
sixth bounce.

7. Conclusions. Initial conditions uniquely define behavior of a mechanical system by reason of the principle of determinicity of classical mechanics. A mechanical system is considered in the article which behaves stochastically, it is shown why the principle of determinicity does not hold for this system.

References

1. Diaconis, P., Holmes, S., & Montgomery, R. (2007). Dynamical bias in the coin toss. *SIAM Review*, 49(2), 211–235. <https://doi.org/10.1137/S0036144504446436>
2. Keller, J. B. (1986). The probability of heads. *The American Mathematical Monthly*, 93(3), 191–197. <https://doi.org/10.1080/00029890.1986.11971784>
3. Nagler, J., & Richter, P. (2008). How random is dice tossing? *Physical Review E — Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 78(3), 036207. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.036207>
4. Nagler, J., & Richter, P. H. (2010). Simple model for dice loading. *New Journal of Physics*, 12(3), 033016. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/3/033016>
5. Vulović, V. Z., & Prange, R. E. (1986). Randomness of a true coin toss. *Physical Review A*, 33(1), 567–582. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.576>

Турчин В. М., Пироженко О. В. Стохастичність і детермінованість механічних систем.

Робота присвячена стохастичності і детермінованості у механічних системах. Згідно з принципом детермінованості класичної механіки початкові умови однозначно визначають еволюцію системи у часі. Проте досвід свідчить, що це далеко не завжди так.

Розглядається механічна система — гантель після підкидання рухається у вертикальній площині співударяючись з горизонтальною площиною, допоки рано чи пізно не зупиниться тим чи іншим кінцем у додатньому напрямі. Яким саме — передбачити неможливо, що на перший погляд протирічить принципу детермінованості. Насправді протиріччя немає — стохастичний характер поведінки гантелі обумовлений принциповою обмеженістю знизу похибки вимірювального приладу і локальною “лінійчастою” структурою діаграми кінцевих станів.

Ключові слова: Принцип детермінованості, стохастичність, механічна система, діаграма кінцевих станів, імовірність.

Received 14.05.2025

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).91-105](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).91-105)**К. І. Шурубур**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

shurubura@hotmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-5535-2644>

МОДЕЛЮВАННЯ φ -СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В ПРОСТОРИ $L_p([0; T])$

Будується модель φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$, що є узагальненням класичного дробового броунівського руху в класі φ -субгауссових випадкових процесів. Модель задається за допомогою спектрального подання у вигляді стохастичного інтеграла та використовується для апроксимації такого процесу із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$. Одержано достатні умови, за яких спектральна апроксимація збігається до вихідного процесу в нормі простору $L_p([0; T])$. Наведено приклад моделювання траєкторій у просторі $L_3([0, 1])$, що ілюструє практичну придатність запропонованого підходу.

Ключові слова: φ -субгауссовий дробовий броунівський рух, дробовий броунівський рух, моделювання, φ -субгауссові випадкові процеси, простір $L_p([0; T])$.

1. Вступ. Сучасна теорія випадкових процесів охоплює широкий спектр об'єктів, що моделюють стохастичні явища у природничих та прикладних науках. Значний інтерес викликають процеси, які мають більш загальну поведінку порівняно з класичними гауссовими моделями, зокрема φ -субгауссові процеси. До цього класу належать процеси, що демонструють нетривіальні залежності, зокрема сильну залежність від минулих значень та нетипові закономірності зростання дисперсії.

В роботі [1] розглядалася апроксимація $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ -процесів у просторі $L_p([0; T])$. Подальше дослідження властивостей таких процесів у контексті моделювання привело до появи спектральних методів побудови моделей, які не лише зручні з обчислювальної точки зору, а й дозволяють досягати контрольованої точності та надійності наближення.

Особливе місце серед таких процесів займає φ -субгауссовий дробовий броунівський рух (ДБР), що є узагальненням класичного ДБР на випадок неквадратичної експоненціальної обмеженості. У роботах [2] і [3] досліджено зображення дробового броунівського руху у вигляді випадкових рядів і спектральних інтегралів, що стало основою для побудови моделей з контрольованими характеристиками.

Актуальність дослідження полягає в тому, що існуючі методи моделювання не завжди забезпечують одночасний контроль точності та надійності апроксимації φ -субгауссових процесів у функціональних просторах $L_p([0; T])$.

Мета і завдання дослідження: побудова спектральної моделі φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$, яка забезпечує наближення траєкторії такого процесу із заданою точністю $\varepsilon > 0$ та надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, у просторі $L_p([0; T])$ з отриманням конкретних оцінок для випадків $\alpha \in (0, 1]$ та $\alpha \in (1, 2)$ і реалізацією практичного алгоритму у просторі $L_3([0; 1])$.

Наукова новизна дослідження полягає у розробці спектральної моделі з отриманням точних умов забезпечення заданої надійності та точності апроксимації у просторі $L_p([0; T])$ для різних значень параметра $\alpha \in (0, 2)$.

У першому розділі подано допоміжні означення та характеристики досліджуваного процесу. У другому розділі сформульовано умови, за яких спектральна модель гарантує наближення у просторі $L_p([0; T])$. В третьому розділі розглядається моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$ та наведено наслідки для випадку $L_3([0; T])$. Завершальний розділ ілюструє практичну реалізацію моделювання при фіксованих значеннях параметрів.

2. Модель φ -субгауссового дробового броунівського руху.

Означення 1. (див. [4]) Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, і виконуються умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Умова Q. (див. [4]) Для N -функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Означення 2. (див. [4]) Нехай φ – N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Норма у просторі $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ визначається за формулою (див. [4]):

$$\tau_\varphi(\xi) := \inf\{a \geq 0 : \mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(a\lambda)\}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Зрозуміло, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\}.$$

Означення 3. Випадковий процес $\{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо для кожного $t \in T$ має місце $\tau_\varphi(X(t)) < \infty$ (зокрема кожна скінченна лінійна комбінація значень процесу є φ -субгауссовою випадковою величиною).

Означення 4. (див. [4]) Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ .

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω, Σ, P) та параметричну множину T ($T = [0; T]$ або $T = [0, \infty]$).

Означення 5. *Випадковий процес $\{W_\alpha(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом з параметром $\alpha \in (0, 2)$, якщо він є строго φ -субгауссовим випадковим процесом із нульовим середнім $\mathbb{E}(W_\alpha(t)) = 0$, кореляційною функцією*

$$R(t, s) = \frac{1}{2} (|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t - s|^\alpha),$$

і виконується $W_\alpha(0) = 0$.

Один з можливих аналітичних описів строго φ -субгауссового дробового броунівського руху з параметром $\alpha \in (0, 2)$ має вигляд (див., наприклад, [3]):

$$W_\alpha(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right), \quad t \in [0, T],$$

де $\xi(\lambda)$ та $\eta(\lambda)$ — незалежні дійсні строго φ -субгауссові випадкові процеси, які задовольняють таким умовам:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi(\lambda) &= \mathbb{E}\eta(\lambda) = 0, \\ \tau_\varphi(\xi(\lambda)) &\leq C_\Delta \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2(\lambda))}, \end{aligned}$$

а константа A визначається формулою

$$A^2 = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\}^{-1} = \left\{ -\frac{2}{\pi} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}^{-1}.$$

Розглянемо інтервал $[0, \Lambda]$ при $\Lambda > 0$ і представимо процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ у вигляді суми трьох складових:

$$W_\alpha(t) = W_\alpha(t, [0, \varepsilon]) + W_\alpha(t, [\varepsilon, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]),$$

де $0 < \varepsilon < \Lambda$, а кожну з компонент визначимо як

$$W_\alpha(t, [a, b]) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_a^b \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_a^b \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right).$$

Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$ на M частин, причому $\lambda_1 = \varepsilon$.

Скориставшись цим розбиттям, побудуємо апроксимацію строго φ -субгауссового дробового броунівського руху W_α у вигляді дискретної суми:

$$\begin{aligned} S_M(t, \Lambda) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right) = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} X_i - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} Y_i \right), \\ &\quad t \in [0, T], \quad M \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

де $\{X_i, Y_i\}, i = 1, 2, \dots, M - 1$, — незалежні строго φ -субгауссові випадкові величини, які мають нульове математичне сподівання:

$$\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}Y_i = 0, \quad \mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{E}Y_i^2 = \lambda_{i+1} - \lambda_i.$$

Означення 6 (Перетворення Юнга-Фенхеля). *Нехай $f = (f(x), x \in \mathbb{R})$ — дійсна функція. Перетворенням Юнга-Фенхеля функції f (або спряженою функцією до f) називається функція*

$$f^* = (f^*(x), x \in \mathbb{R}),$$

визначена рівністю

$$f^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{xy - f(y)\}.$$

Зокрема, для N -функції Орліча φ маємо спряжену функцію φ^* у цьому ж сенсі.

Використаємо твердження 2.1 з роботи [1].

Твердження 1. *Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ — строго φ -субгауссовий випадковий процес, для якого виконується умова:*

$$\int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt < \infty, \quad p \geq 1.$$

Позначимо

$$c := \int_0^T (\mathbb{E}(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Тоді інтеграл $\int_0^T |X(t)|^p dt$ існує майже напевно, і для будь-якого $\varepsilon > cr^{\frac{p}{2}}$ виконується така експоненціальна оцінка ймовірності:

$$P\left\{\int_0^T |X(t)|^p dt > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/p}\right)\right\},$$

де φ^* — перетворення Юнга-Фенхеля функції φ .

3. Моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$.

Означення 7. *Кажуть, що модель $S_M = \{S_M(t, \Lambda), t \in [0, T]\}$ апроксимує випадковий процес $W_\alpha = \{W_\alpha(t), t \in [0, T]\}$ із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$, $p \geq 1$, якщо має місце наступна нерівність:*

$$\mathbf{P}\left\{\left(\int_0^T |W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)|^p dt\right)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq \delta.$$

Враховуючи, що процес похибки апроксимації $X_M(t, \Lambda) := W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, належить до класу строго φ -субгауссових випадкових процесів, можна скористатися оцінкою, наведеною у твердженні 1. Це дозволяє вивести умови, за яких модель $S_M(t, \Lambda)$ забезпечує наближення процесу W_α у просторі $L_p([0; T])$ з заданими надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. *Модель S_M наближає процес W_α із заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0; T])$, $p \geq 1$, якщо у випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ & < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \end{aligned}$$

а у випадку $\alpha \in (1, 2)$ виконується умова

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2}-\frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ & < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ – розбиття відрізка $[0, \Lambda]$.

Доведення. Як було зазначено раніше, до процесу відхилень $X_M(t, \Lambda)$, $t \in [0, T]$, що є строго φ -субгауссовим, можна застосувати твердження 1. Це дозволяє записати ймовірнісну оцінку для довільного $u > c p^{\frac{p}{2}}$ у такому вигляді:

$$P \left\{ \int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{u}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

де

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Поклавши $\varepsilon = u^{\frac{1}{p}}$ та припускаючи, що $0 < \delta < 1$ й

$$\delta \geq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{u}{c} \right)^{1/p} \right) \right\} = 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

маємо:

$$\mathbf{P} \left\{ \left(\int_0^T |X_M(t, \Lambda)|^p dt \right)^{1/p} > \varepsilon \right\} \leq \delta,$$

що співпадає з умовою з означення 7.

Таким чином, щоб визначити, за яких умов модель S_M є апроксимацією процесу W_α у просторі $L_p([0; T])$ з наперед заданими параметрами точності $\varepsilon > 0$ та надійності $1 - \delta$, слід перевірити виконання гіпотези твердження 1.

Із умови $u > cp^{\frac{p}{2}}$ безпосередньо випливає:

$$\varepsilon = u^{\frac{1}{p}} > \left(cp^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} = c^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}},$$

а звідси

$$c < \frac{\varepsilon^p}{p^{\frac{p}{2}}}.$$

Далі, якщо припустити, що $0 < \delta < 1$ і виконується нерівність

$$\delta \geq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\},$$

тоді маємо:

$$\exp \left\{ -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \right\} \leq \frac{\delta}{2}; \quad -\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \leq \ln \frac{\delta}{2};$$

$$\varphi^* \left(\left(\frac{\varepsilon^p}{c} \right)^{1/p} \right) \geq \ln \frac{2}{\delta}; \quad \frac{\varepsilon}{c^{1/p}} \geq (\varphi^*)^{(-1)} \left(\ln \frac{2}{\delta} \right);$$

$$c \leq \frac{\varepsilon^p}{((\varphi^*)^{(-1)} (\ln \frac{2}{\delta}))^p}.$$

Отже, щоб виконувалася відповідна оцінка, достатньо, щоб була задоволена така умова:

$$c = \int_0^T (\mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2)^{p/2} dt < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)} (\ln \frac{2}{\delta}))^p} \right\}. \quad (1)$$

Розглянемо дисперсію процесу похибки апроксимації $X_M(t, \Lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &= \mathbb{E}(W_\alpha(t) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= \mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]) + W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) + W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\ &= \mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 + \mathbb{E}(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 + \mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2. \end{aligned}$$

Проведемо аналогічну оцінку до тієї, яка була проведена в статті [2]. Оцінимо перший з отриманих доданків:

$$\mathbb{E}(W_\alpha(t, [0, \lambda_1]))^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A^2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) \right)^2 + \mathbb{E} \left(\int_0^{\lambda_1} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda + \int_0^{\lambda_1} \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(\cos(\lambda t) - 1)^2 + \sin^2(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{(2 - 2\cos(\lambda t))}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_0^{\lambda_1} \frac{4\sin^2(\frac{\lambda t}{2})}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq \\
&\leq \frac{A^2}{\pi} \left\{ t^2 \int_0^{\lambda_1} \lambda^{2-1-\alpha} d\lambda \right\} = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right\}.
\end{aligned}$$

Для наступного доданка маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\Lambda, \infty]))^2 = \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_\Lambda^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_\Lambda^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{(2 - 2\cos(\lambda t))}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\} \leq 2 \frac{A^2}{\pi} \left\{ \int_\Lambda^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}} \right\} \leq \frac{2A^2}{\alpha\pi\Lambda^\alpha}.
\end{aligned}$$

А для $\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2$ отримуємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_{\lambda_1}^\Lambda \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) - \right. \\
&\left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right)^2 = \\
&= \frac{A^2}{\pi} \left\{ \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right) d\xi(\lambda) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right) d\eta(\lambda) \Big)^2 \Big\} = \\
& = \frac{A^2}{\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{M-1} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right\} =: \frac{A^2}{\pi} (\Sigma_{\cos} + \Sigma_{\sin}).
\end{aligned}$$

Переходимо до оцінювання інтеграла виду

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda.$$

Розкриваючи різницю в дужках, отримаємо:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq$$

Застосувавши оцінку для квадрата суми, маємо:

$$\begin{aligned}
& \leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\sin(\lambda t) - \sin(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
& \left. + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\sin(\lambda_i t))^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) =: 2(W_{i1} + W_{i2}).
\end{aligned}$$

Оцінимо W_{i1} . Використовуючи тригонометричну тотожність та оцінку $\sin^2(x) \leq x^2$, маємо:

$$W_{i1} \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4 \left(\sin \left(\frac{\lambda t - \lambda_i t}{2} \right) \right)^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\lambda - \lambda_i)^2 t^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \quad (2)$$

Для оцінювання W_{i2} розглянемо два випадки: $\alpha \leq 1$ і $1 < \alpha < 2$. У першому випадку, при $0 < \beta \leq 1$ та $\beta < \alpha$, скористаємося нерівністю $|\sin x| \leq |x|^\beta$, що дає:

$$\begin{aligned}
W_{i2} & \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \left(\frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
& = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}})^2} d\lambda. \quad (3)
\end{aligned}$$

Використаємо відому нерівність $a^\nu - b^\nu \leq (a-b)^\nu$ для $\nu \leq 1$ та $a > b$. Оскільки у нашому випадку $0 < \lambda_i < \lambda_{i+1}$ і при $\alpha \leq 1$ виконується $(\alpha + 1)/2 \leq 1$, то з формули (3) випливає:

$$W_{i2} \leq \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}.$$

Поклавши $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, маємо остаточну оцінку:

$$W_{i2} \leq t^{\frac{3}{2}\alpha} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (4)$$

У випадку $\alpha \in (1, 2)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} W_{i2} &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \\ &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2 (\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\ &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{4t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\alpha-1} \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}} \leq \\ &\leq \frac{4t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Підсумовуючи оцінки (2)–(5), одержуємо, що для випадку $\alpha \leq 1$ маємо:

$$\Sigma_{\sin} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right),$$

а у випадку $1 < \alpha < 2$ — наступну оцінку:

$$\Sigma_{\sin} \leq 2t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right).$$

Оцінимо тепер інтеграл такого вигляду:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda.$$

Розкриваючи дужки у виразі під інтегралом, маємо:

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} + \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq$$

Застосовуючи оцінку для квадрата суми, отримаємо:

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 \left(\int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \right) = \\
 &= 2(W_{i3} + W_{i4}).
 \end{aligned}$$

Оцінимо спочатку W_{i3} :

$$\begin{aligned}
 W_{i3} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(\cos(\lambda t) - \cos(\lambda_i t))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{(2 \sin(\frac{\lambda t + \lambda_i t}{2}) \sin(\frac{\lambda_i t - \lambda t}{2}))^2}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{4 \left| \frac{\lambda_i t - \lambda t}{2} \right|^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda \leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}{\lambda_i^{\alpha+1}} d\lambda = \frac{t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Тепер перейдемо до W_{i4} у випадку $\alpha \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 W_{i4} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} (\cos(\lambda_i t) - 1)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
 &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \left(2 \sin^2 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda = \\
 &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \left(\frac{1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} - \frac{1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} \right)^2 d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{\beta}{2}} \right)^4 \frac{(\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq 2^{2-2\beta} \lambda_i^{2\beta} t^{2\beta} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+1}}{\lambda_i^{2(\alpha+1)}} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} d\lambda = \frac{2^{2-2\beta} t^{2\beta} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{2(\alpha-\beta)+2}}.
 \end{aligned}$$

Поклавши $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, отримаємо остаточну оцінку:

$$W_{i4} \leq \frac{2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}}. \quad (7)$$

У випадку, коли $1 < \alpha < 2$, отримаємо таку оцінку:

$$\begin{aligned}
 W_{i4} &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_i t}{2} \right) \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} 4 \left(\left| \frac{\lambda_i t}{2} \right|^{\frac{1}{2}} \right)^4 \frac{(\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} - \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2 (\lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{4}} + \lambda_i^{\frac{\alpha+1}{4}})^2}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \\
 &\leq \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \lambda_i^2 t^2 \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha+1}{2}} 4 \lambda_{i+1}^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(\lambda_i \lambda_{i+1})^{\alpha+1}} d\lambda \leq \frac{4 t^2 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Звідси, з урахуванням оцінок (6)–(8), для випадку $\alpha \leq 1$ отримаємо:

$$\Sigma_{\cos} \leq 2 \left(t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right),$$

а у разі $1 < \alpha < 2$ маємо:

$$\Sigma_{\cos} \leq 2 t^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{M-1} \frac{4 (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right).$$

Таким чином, отримаємо наступну загальну оцінку:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}(W_\alpha(t, [\lambda_1, \Lambda]) - S_M(t, \Lambda))^2 \leq \\
 &\leq \begin{cases} \frac{2A^2}{\pi} \left(2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right), & \alpha \leq 1; \\ \frac{4A^2 t^2}{\pi} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), & 1 < \alpha < 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Для оцінки математичного сподівання квадрата $X_M(t, \Lambda)$ отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3 \lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\
 &+ (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \Bigg), \quad \alpha \leq 1; \quad (9)
 \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_M(t, \Lambda))^2 &\leq \frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \\ &\quad \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right), \quad 1 < \alpha < 2. \end{aligned} \quad (10)$$

На завершення, скориставшись оцінками (9)–(10), можемо стверджувати, що умова (1) виконується, якщо справджуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ &< \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta}))^p)} \right\}, \quad \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (11)$$

а також

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ &< \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \quad 1 < \alpha < 2 \end{aligned} \quad (12)$$

Таким чином, виконання умов (11)–(12) забезпечує справедливість твердження теореми 1.

Наслідок 1. *Наближення процесу W_α моделлю S_M у просторі $L_3([0; T])$ з заданою надійністю $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$ та точністю $\varepsilon > 0$, гарантується, якщо для випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується така нерівність:*

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) T^{\frac{3}{2}\alpha+1}}{\frac{3}{2}\alpha + 1} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ &< \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^3} \right\}, \end{aligned}$$

а для $\alpha \in (1, 2)$ має місце наступна умова:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{T^3 \lambda_1^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)} + \frac{T}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2T^3}{9} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4T^3}{3} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{3}{2}}}{\lambda_i^{\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{2}}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}, \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \Lambda$ — розбиття інтервалу $[0, \Lambda]$.

Доведення. У випадку $p = 3$ значення

$$\varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^p} \right\},$$

дорівнює

$$\varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}.$$

Підставляючи це значення у відповідні вирази теореми 1 та виконуючи інтегрування по $t \in [0, T]$, отримуємо твердження наслідку.

4. Реалізація алгоритму моделювання у просторі $L_3([0, 1])$. Припустімо, що ми обираємо рівномірне розбиття відрізка $[0, \Lambda]$

$$\Delta \lambda = \lambda_{i+1} - \lambda_i = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_1 = \frac{\Lambda}{M}, \quad \lambda_i = \frac{i\Lambda}{M}.$$

Тоді, застосовуючи наслідок 1 до випадку простору $L_3([0, 1])$, можна вивести умови, що дозволяють визначити відповідні параметри моделі Λ та M . Зокрема, при $\alpha \in (0, 1]$ отримаємо наступну оцінку:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\Lambda^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)M^{2-\alpha}} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2\Lambda^{2-\alpha}}{9M^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha})\Lambda^{\frac{\alpha}{2}}}{(\frac{3}{2}\alpha + 1)M^{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\frac{\alpha}{2} + 2}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{3/2}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}, \end{aligned}$$

а при $\alpha \in (1, 2)$:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{\Lambda^{2-\alpha}}{6(2-\alpha)M^{2-\alpha}} + \frac{1}{\alpha \Lambda^\alpha} + \frac{2\Lambda^{2-\alpha}}{9M^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{1}{i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{4}{3} \left(\frac{\Lambda}{M} \right)^{2-\alpha} \frac{1}{i^{\frac{3\alpha-1}{2}}} \right) \right)^{\frac{3}{2}} < \\ & < \varepsilon^3 \cdot \min \left\{ \frac{1}{3^{3/2}}, \frac{1}{((\varphi^*)^{(-1)}(\ln \frac{2}{\delta}))^3} \right\}. \end{aligned}$$

Зобразимо на рис. 1–4 для заданих надійностей та точностей траєкторії моделі процесу φ -субгауссового дробового броунівського руху при різних значеннях α . Візьмемо до уваги, що $\alpha = 2H$. Візьмемо значення δ, ε, H зі статті [5]. З графіків очевидно, що чим більше значення H , тим гладша траєкторія моделі φ -субгауссового дробового броунівського руху.



Рис. 1. $H = \frac{7}{8}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

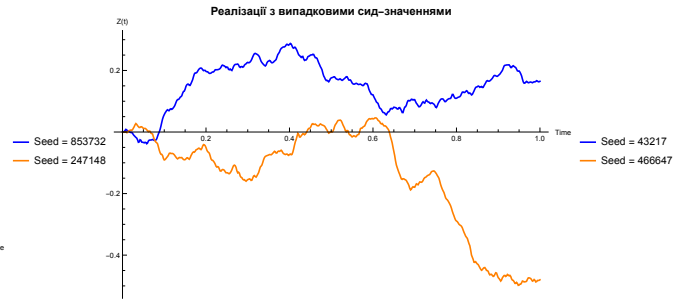


Рис. 2. $H = \frac{8}{9}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

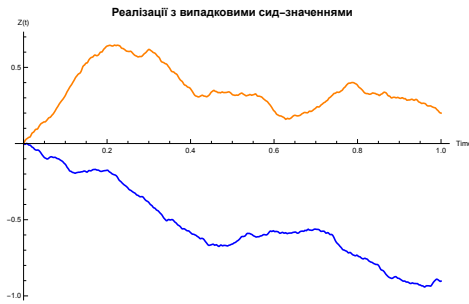


Рис. 3. $H = \frac{9}{10}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$

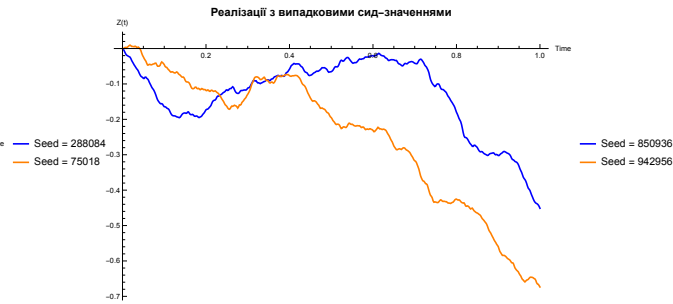


Рис. 4. $H = \frac{15}{16}$,
 $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.01$



Рис. 5. $H = \frac{3}{4}$,
 $\varepsilon = 0.05, \delta = 0.05$

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті представлено новий алгоритм моделювання процесів φ -субгауссового дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p([0; T])$. Також проілюстровано результати такого моделювання у просторі $L_3([0, 1])$. Під час проведення обчислень та побудови графіків було помічено, що для побудови

моделі використовуються M та Λ дуже великих порядків, що значно сповільнює процес обчислення в порівнянні з моделлю, яка розглянута в статті [5]. Отже, моделювання φ -субгауссового дробового броунівського руху на основі спектрального розкладу є складнішим для обчислення та побудови графіків, ніж моделювання на основі розкладу в ряд.

Список використаної літератури

1. Kozachenko, Yu. V., & Kamenshchikova, O. Ye. (2008). Approximation of $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ stochastic processes in the space $L_p([0; T])$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 79, 73–78. Retrieved from <https://probability.knu.ua/tims/issues-new/79/PDF/9.pdf> [in Ukrainian].
2. Kozachenko, Yu. V., Pashko, A. O., & Vasylyk, O. I. (2017). Simulation of a fractional Brownian motion in the space $L_p([0; T])$. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 97, 97–108. Retrieved from <https://probability.knu.ua/tims/issues-new/97/PDF/11.pdf> [in Ukrainian].
3. Picard, J. (2011). Representation formulae for the fractional Brownian motion. *Séminaire de Probabilités*, 43, 3–70. https://doi.org/10.1007/978-3-642-15217-7_1
4. Vasylyk, O. I., Kozachenko, Yu. V., & Yamnenko, R. Ye. (2008). *φ -sub-Gaussian random processes: Monograph*. Kyiv: VPC “Kyivskyi Universytet”. Retrieved from https://probability.knu.ua/userfiles/yamnenko/kyv_monograph.pdf [in Ukrainian].
5. Vasylyk, O. I., & Shurubura, K. I. (2025). Optimization of the model of φ -sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 80, 17–28. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.3>

Shurubura K. I. Simulation of φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion in the space $L_p([0; T])$.

In this paper, I construct a model of a φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion with parameter $\alpha \in (0, 2)$, which generalizes the classical fractional Brownian motion to the class of φ -sub-Gaussian random processes. The model is defined via a spectral representation in the form of a stochastic integral and is used to approximate this process in the space $L_p([0; T])$ with prescribed reliability $1 - \delta$, $0 < \delta < 1$, and accuracy $\varepsilon > 0$. Sufficient conditions are obtained that guarantee the convergence of the spectral approximation to the original process in the $L_p([0; T])$ norm. An example of simulating trajectories in $L_3([0, 1])$ is presented, illustrating the practical applicability of the proposed approach.

Keywords: φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion, fractional Brownian motion, simulation, φ -sub-Gaussian random processes, space $L_p([0; T])$.

Одержано 05.09.2025

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).106-117](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).106-117)**О. М. Щитов¹, М. Ф. Мормуль²**

¹ НВК-Ліцей № 100 м. Дніпро,
викладач математики та фізики,
кандидат фізико-математичних наук
alexander.shchitov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1435-2918>

² Університет митної справи та фінансів,
доцент кафедри комп'ютерних наук та інженерії програмного забезпечення,
кандидат технічних наук
nikolaj.mormul@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8036-3236>

ПРЕЦИЗИЙНІ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-ХААРА ДЛЯ ФУНКЦІЙ З ОБМЕЖЕНОЮ ВАРІАЦІЄЮ

Розглядаються точні оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації. Досліджуються властивості та застосування перетворень Фур'є-Хаара в контексті функцій з обмеженою варіацією, що має важливе значення для теоретичних та практичних задач в області математичного аналізу та обробки сигналів. Оцінки коефіцієнтів перетворення дозволяють більш детально вивчити зв'язок між характеристиками функцій та їх перетвореннями, а також ефективно застосовувати ці методи в різних галузях науки та техніки, таких як обробка зображень, числові методи та теорія апроксимацій. У ході дослідження отримано точні значення верхніх меж модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї змінної на класах функцій граничних варіацій KV_p ($1 \leq p < \infty$). Досліджено поведінку коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій кількох змінних для функцій граничних варіацій з класів $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}$ ($1 \leq p < \infty$) та $KV_{1,d}^*$. На цих класах функцій кількох змінних отримано точні результати.

Ключові слова: система Фур'є-Хаара, функції обмеженої варіації, точні оцінки, прецизійні коефіцієнти, вейвлет-аналіз.

1. Вступ. Система функцій Альфреда Хаара була введена угорським вченим у 1909 році [1]. Перетворення Фур'є-Хаара стало потужним математичним інструментом для аналізу функцій, що застосовується в різних галузях, таких як обробка сигналів, числові методи, теорія апроксимацій та інші. Особливе значення має вивчення точних оцінок коефіцієнтів перетворення для функцій обмеженої варіації, оскільки вони дозволяють краще розуміти структуру функцій та їх взаємодію з перетворенням, що є важливим аспектом у багатьох теоретичних і практичних задачах. Однією з основних проблем є точність та ефективність оцінок коефіцієнтів для цих функцій, що потребує глибокого математичного аналізу та розробки нових підходів для їх точного визначення.

У сучасній прикладній математиці, теорії сигналів і чисельному аналізі все більшого значення набувають прецизійні методи аналізу та обробки функцій, зокрема таких, що мають обмежену варіацію. Функції з обмеженою варіацією є природною моделлю для опису сигналів, зображень, а також реальних фізичних процесів, що містять стрибки, сингулярності або локальні особливості. У цьому контексті особливу роль відіграє перетворення Хаара як найпростішого випадку вейвлет-перетворення, заснованого на ортогональній системі функцій, що дає змогу здійснювати ефективний розклад подібних функцій.

Аналіз точного (прецизійного) значення коефіцієнтів перетворення Хаара або Фур'є-Хаара є важливим не лише з теоретичної точки зору, але і для практичних застосувань — у стисненні сигналів, розпізнаванні образів, адаптивній апроксимації, а також в оптимізації обчислювальних методів.

Незважаючи на широке застосування вейвлет-аналізу, питання точності оцінювання та обмежень для коефіцієнтів розкладу функцій з обмеженою варіацією залишається недостатньо дослідженим, особливо у випадку некласичних (ламаних або розривних) функцій. Це створює потребу в детальному математичному вивченні структури таких коефіцієнтів, умов їх точного обчислення та оцінки похибок при апроксимації.

Отже, дослідження прецизійних значень коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара має високу актуальність, оскільки сприяє розвитку теорії вейвлетів, підвищує точність чисельного аналізу функцій та забезпечує прикладну базу для новітніх інформаційних технологій.

Об'єкт дослідження є функції з обмеженою варіацією та їх представлення у базисі Хаара.

Предмет дослідження — прецизійні значення коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій з обмеженою варіацією, їхні властивості збіжності, точності та стабільності обчислення.

Метою роботи є розробка точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, а також дослідження їх властивостей у контексті теорії апроксимацій і числових методів. Вивчення цих оцінок дозволить поліпшити розуміння взаємозв'язку між функціями та їх перетвореннями, що має широке застосування у математиці та інженерії.

Для досягнення мети використано методи математичного аналізу, теорії функцій, теорії апроксимацій та обробки сигналів. Зокрема, застосовано апарат дослідження функцій з обмеженою варіацією, що дало змогу обґрунтувати коректність використання базису Хаара та оцінити властивості збіжності рядів. Методи апроксимаційної теорії були використані для аналізу точності та швидкості збіжності розкладів, а техніки обробки сигналів — для побудови ефективних алгоритмів обчислення коефіцієнтів Фур'є-Хаара. Обчислення реалізовано шляхом інтегрування функцій із базисними елементами Хаара та чисельного уточнення результатів кінцево-різницеви́ми та ітераційними схемами. Це дозволило отримати прецизійні значення коефіцієнтів та оцінити їх стабільність у класі функцій з обмеженою варіацією.

Гіпотеза дослідження базується на тому, що для функцій обмеженої варіації можна знайти точні і ефективні оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара, які дозволяють зменшити похибки апроксимацій та підвищити точність застосування цих перетворень у числових методах та обробці сигналів.

Наукова новизна роботи полягає у розробці нових точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, а також у встановленні їх властивостей, які до цього часу були недостатньо вивчені. Розроблені оцінки дозволяють покращити ефективність математичних методів у різних галузях науки та техніки, зокрема в обробці зображень, числових методах та теорії апроксимацій. Результати дослідження можуть стати основою для подальших розробок у напрямку оптимізації перетворень Фур'є-Хаара та їх застосування в практичних задачах.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Система функцій Хаара є ортонормованою на $[0, 1]$. Її властивості протягом десятиріч вивчалися багатьма вченими. Але в останні роки їм приділяли увагу в основному з практичної точки зору. Дослідники надають сучасні підходи до оцінки коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації, зокрема в контексті статистичного оцінювання, онлайн-прогнозування та обробки сигналів. Так, у статті [2] розглядається мінімаксна оцінка функцій обмеженої варіації з розкиданими даними, зокрема через жорстке порогове обмеження емпіричних коефіцієнтів Фур'є-Хаара. Робота [3] пропонує алгоритм для онлайн-прогнозування послідовностей з обмеженою варіацією, використовуючи коефіцієнти Фур'є-Хаара та адаптивний підхід до невідомих параметрів згладжування. У [4] розглядаються розкладання сигналів за допомогою Фур'є-Хаара та їх застосування в обробці зображень, зокрема для функцій обмеженої варіації.

З вітчизняних досліджень останніх років можна назвати роботи І. Шарапудінова [5], С. Вакарчука і О. Щитова [6], [7], С. Стасюка [8] та інших.

У теорії апроксимації велика кількість робіт присвячена розв'язанню задач апроксимації функцій однієї та кількох змінних поліномами в системі Хаара та частинними сумами Фур'є-Хаара [3], [4].

У деяких статтях отримано оцінки модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара на деяких класах функцій однієї змінної, визначених за допомогою модуля неперервності (див., наприклад, [9], [10]).

У цій роботі ми продовжуємо вивчати поведінку коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї та кількох змінних з граничною варіацією.

3. Постановка задачі. Нехай $I^d\{t = (t_1, t_2, \dots, t_d) : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}$ ($I^1 \equiv I = [0, 1]$) — d -вимірний куб у просторі R^d . На одиничному відрізку $[0, 1]$ розглянемо двійкові інтервали, які визначатимуться наступним чином: для довільного числа $n_i = 2^{m_i} + k_i$, $m_i \in Z_+$, ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$) отримуємо

$$\delta_{n_i} \equiv \delta_{m_i}^{k_i} = ((k_i - 1)/2^{m_i}, k_i/2^{m_i}). \quad (1)$$

На відрізку $[0, 1]$ визначаємо систему функцій Хаара [1]: $\chi_1(t) \equiv \chi_0^{(0)}(t) \equiv 1$, а коли $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($m_i \in Z_+$, $k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$), тоді

$$\chi_{n_i}(t) \equiv \chi_{m_i}^{(k_i)}(t) = \begin{cases} 2^{m_i/2}, & \text{якщо } t \in \delta_{m_i+1}^{2k_i-1}, \\ -2^{m_i/2}, & \text{якщо } t \in \delta_{m_i+1}^{2k_i}, \\ 0, & \text{якщо } t \notin \overline{\delta_{m_i}^{k_i}}, \end{cases} \quad (2)$$

коли $\overline{\delta_{m_i}^{k_i}}$ — замикання множини $\delta_{m_i}^{k_i}$. У точках розриву функції Хаара дорівнюють половині суми лівої та правої границь функцій Хаара. В кінці відрізка $[0, 1]$ функції Хаара дорівнюють граничним значенням зсередини відрізка.

Нехай

$$N_*^d \stackrel{df}{=} \{n = (n_1, \dots, n_d) : n_i \in N, i = \overline{1, d}\} \quad (N^1 \equiv N),$$

$$N_*^d \stackrel{df}{=} \{n = (n_1, \dots, n_d) : n_i \in N \setminus \{1\}, i = \overline{1, d}\},$$

$$(N_*^1 \equiv N_*).$$

Множина $\left\{\chi_n(t) \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{i=1}^d \chi_{n_i}(t_i)\right\}_{n \in N^d}$ утворює ортонормальну систему функцій Хаара на d -вимірному кубі I^d . Основну інформацію про систему Хаара можна знайти, наприклад, у книгах [1], [4].

Визначимо на d -вимірному кубі I^d коефіцієнти Фур'є-Хаара функції $f(t)$ наступним чином.

$$c_n(f) \equiv c_m^k(f) = \int_{I^d} f(t) \chi_n(t) dt, \quad (n \in N^d), \quad (3)$$

коли $dt \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{i=1}^d dt_i$.

Нехай $f(t)$ функція, визначена на відрізку $[a, b]$, і

$$\xi \stackrel{\text{df}}{=} \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\},$$

є довільним розбиттям $[a, b]$. З [11] визначаємо наступне значення

$$\kappa_p(f; \xi; [a, b]) \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p \right\}^{1/p}, \quad (1 \leq p < \infty),$$

як суму варіацій p -го порядку функції $f(t)$ на розбитті ξ . Нехай $V_p(f; [a, b]) = \sup\{\kappa_p(f; \xi; [a, b]) : \xi\} \in p$ -варіацією функції $f(t)$ на інтервалі $[a, b]$; $V_p(f) \equiv V_p(f; [0, 1])$. Ми позначаємо $V_p \equiv V_p([0, 1])$ ($1 \leq p < \infty$) класом функцій $f(t)$, визначених на інтервалі $[0, 1]$, таких, що $V_p(f) < \infty$. Якщо $p = 1$, то $V_1(f)$ є класом функцій обмеженої варіації.

Позначимо

$$KV_p = \{f(t) \in V_p([0, 1]) : V_p(f; [0, 1]) \leq K\}, \quad (K > 0).$$

Нехай $G^d = \{t = (t_1, \dots, t_d) : a_i \leq t_i \leq b_i, i = 1, \dots, d\}$ — d -вимірний паралелепіпед у просторі R^d ; $\Pi_d = \left\{a_i = t_i^{(0)} < t_i^{(1)} < \dots < t_i^{(s_i)} = b_i, i = \overline{1, d}\right\}$ — деяке розбиття паралелепіпеда G^d на малі n -вимірні паралелепіпеди гіперплощинами $t_i = t_i^{(v_i)}$, $(v_i = \overline{1, s_i - 1}, i = \overline{1, d})$.

Ми називаємо значення

$$V_d(f; G^d) = \sup_{\Pi_d} \sum_{v_1=0}^{s_1-1} \dots \sum_{v_d=0}^{s_d-1} \left| \Delta_{\lambda_1^{(v_1)}}^1 \dots \Delta_{\lambda_d^{(v_d)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) \right|, \quad (4)$$

як варіація Віталі [23] функції d -змінних $f(t)$ ($t \in G^d$) на паралелепіпеді G^d , де

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda_i^{(v_i)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) &= f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_{i-1}^{(v_{i-1})}, t_i^{(v_i)} + \lambda_i^{(v_i)}, t_{i+1}^{(v_{i+1})}, \dots, t_d^{(v_d)}) - \\ &- f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_{i-1}^{(v_{i-1})}, t_i^{(v_i)}, t_{i+1}^{(v_{i+1})}, \dots, t_d^{(v_d)}), \end{aligned}$$

є першою різницею з кроком $\lambda_i^{(v_i)}$ функції f за змінною $t_i^{(v_i)}$; $\lambda_i^{(v_i)} = t_i^{(v_{i+1})} - t_i^{(v_i)}$, $v_i = \overline{0, s_i - 1}, i = \overline{1, d}$.

Верхня межа в (4) обчислюється на всіх можливих розбиттях G^d . Функція $f(t)$ має обмежену варіацію Віталі на G^d , якщо $V_d(f; G^d) < \infty$. Клас таких функцій ми позначимо як $V_d(G^d)$.

Визначимо для всіх $1 \leq p < \infty$ та деякого розбиття Π_d паралелепіпеда G^d значення

$$\kappa_{p,d}(f; \Pi_d; G^d) = \left\{ \sum_{v_1=0}^{s_1-1} \dots \sum_{v_d=0}^{s_d-1} \left| \Delta_{\lambda_1^{(v_1)}}^1 \dots \Delta_{\lambda_d^{(v_d)}}^1 f(t_1^{(v_1)}, \dots, t_d^{(v_d)}) \right|^p \right\}^{1/p}. \quad (5)$$

Функція d -змінних $f(t)$ має на паралелепіпеді G^d обмежену p -варіацію у сенсі Віталі, якщо

$$V_{p,d}(f; G^d) = \sup \left\{ \kappa_{p,d}(f; \Pi_d; G^d) : \Pi_d \right\} < \infty. \quad (6)$$

Клас функцій, що мають на G^d обмежену p -варіацію у сенсі Віталі [6], [8] позначимо як $V_{p,d}(G^d)$. Якщо $p = 1$, то визначення p -варіації (6) відповідає визначенню варіації Віталі (4), а клас функцій $V_{1,d}(G^d)$ збігається з класом $V_d(G^d)$. Якщо $d = 1$, то клас функцій $V_{p,1}(I)$ збігається з класом $V_p([0, 1])$.

Нехай $KV_{p,d} = \{f(t) : t \in I^d : V_{p,d}(f; I^d) \leq K\}$, ($K > 0$).

Припустимо далі $KV_{p,d}^*$ є функцією класу $f(t) \in KV_{p,d}$, період якої дорівнює 1 для кожної змінної.

4. Результати. Використовуючи методи математичного аналізу та теорії апроксимацій [7], [9], [10], отримаємо точні верхні межі модуля коефіцієнтів для функцій однієї та кількох змінних, визначених на класах функцій з обмеженою варіацією. Особливу увагу приділимо оцінкам коефіцієнтів на класах функцій KV_p ($1 \leq p < \infty$), V_p та $KV_{p,d}$, що дозволить зменшити похибки апроксимацій і підвищити точність застосування цих методів у числових методах та обробці сигналів.

Теорема 1. Для всіх $k = \overline{1, 2^m}$, $m \in Z_+$ і $1 \leq p < \infty$ маємо рівність

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| = \sup_{f \in KV_p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} = \frac{K}{2\sqrt{2^m}}, \quad (7)$$

Доведення теореми. Для довільної функції $f(t) \in KV_p$ з визначення системи Хаара (2) для всіх $k = \overline{1, 2^m}$, ($m \in Z_+$) можна записати

$$|c_m^{(k)}(f)| = 2^{m/2} \left| \int_{\delta_{m+1}^{2k-1}} (f(x) - f(x+h)) dx \right|,$$

де $h = 2^{-(m+1)}$. Використовуючи нерівність Гельдера, маємо наступну нерівність з останнього співвідношення для $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} |c_m^{(k)}(f)| &\leq 2^{m/2-(m+1)(1-1/p)} \left\{ \int_{\delta_{m+1}^{2k-1}} |f(x) - f(x+h)|^p dx \right\}^{1/p} \\ &\leq 2^{-(m/2+1)} V_p(f; [(k-1)2h, k2h]). \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи (8) та визначення бінарних інтервалів (1), можемо записати

$$\sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \leq 2^{-(m/2+1)p} \sum_{k=1}^{2^m} V_p^p(f; \overline{\delta_m^k}). \quad (9)$$

Для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти розбиття ξ_k відрізка $\overline{\delta_m^k}$ таке, що $V_p^p(f; \overline{\delta_m^k}) < \kappa_p^p(f; \xi_k; \overline{\delta_m^k}) + \varepsilon$. Тоді з (9) отримуємо

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} &< 2^{-(m/2+1)p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} \kappa_p^p(f; \xi_k; \overline{\delta_m^k}) + \varepsilon 2^m \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq 2^{-(m/2+1)} \left\{ V_p(f; I) + (\varepsilon 2^m)^{1/p} \right\} \leq \frac{K}{2\sqrt{2^m}} + \frac{\varepsilon^{1/p}}{2\sqrt{2^m}} 2^{m/p}. \end{aligned}$$

Отже, оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, ми отримуємо верхні межі

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| \leq \sup_{f \in KV_p} \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} \leq \frac{K}{2\sqrt{2^m}}. \quad (10)$$

Далі нам потрібно показати, що знак рівності виконується у (10). Розглянемо функцію

$$v(t) = \begin{cases} -K/2, & \text{якщо } t \in [0, 2^{-(m+1)}]; \\ K/2, & \text{якщо } t \in (2^{-(m+1)}, 1]. \end{cases}$$

Легко побачити, що $v(t) \in KV_p$ і

$$c_m^{(1)}(v) = -2^{-(m/2+1)}K,$$

$$c_m^{(k)}(v) = 0, \quad \forall k = \overline{2, 2^m}.$$

Тоді ми маємо нижню межу

$$\sup_{f \in KV_p} |c_m^{(k)}(f)| \geq |c_m^{(1)}(v)| = \left\{ \sum_{k=1}^{2^m} |c_m^{(k)}(f)|^p \right\}^{1/p} = 2^{-(m/2+1)}K. \quad (11)$$

Співвідношення (7) отримуємо з (10) та (11). Теорему 1 доведено.

Далі ми розглядаємо функції кількох змінних.

Теорема 2. Для довільної функції $f(t) \in V_{p,d}(I^d)$, де числа $n \in N_*^d$ мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$, $m_i \in Z_+$; $i = \overline{1, d}$), $i = 1 \leq p < \infty$ маємо наступні нерівності

$$|c_n(f)| \leq \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq \prod_{i=1}^d 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,d}(f; I^d). \quad (12)$$

Ці нерівності не можна покращити на всіх класах функцій $V_{p,d}(I^d)$.

Доведення теореми 2. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, ми розглядаємо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 2.

Використовуючи визначення коефіцієнтів Фур'є-Хаара (3) для довільної функції $f(t) \in V_{p,2}(I^2)$, $n \in N_*^2$, запишемо

$$|c_n(f)| \leq 2^{(m_1+m_2)/2} \int_{\delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \int_{\delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} |\Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^1 f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2,$$

де $h_i = 2^{-2(m_i+1)}$, $i = 1, 2$.

Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$|c_n(f)| \leq \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2-(m_i+1)(1-1/p)} \left\{ \int_{\delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \int_{\delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} |\Delta_{h_1}^1 \Delta_{h_2}^1 f(t_1, t_2)|^p dt_1 dt_2 \right\}^{1/p} \leq \quad (13)$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,2} \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right),$$

де $\Delta_{m_1+1, m_2+1}^{2k_1-1, 2k_2-1} = \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}} \times \overline{\Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}}$. Для всіх $k_i = \overline{1, 2^{m_i}}$ ($m_i \in Z_+$; $i = 1, 2$) та довільного $\varepsilon > 0$ ми можемо знайти розбиття Π_{k_1, k_2} діапазону $\overline{\Delta_{m_1+1, m_2+1}^{2k_1-1, 2k_2-1}}$ таке, що

$$\kappa_p^p \left(f; \Pi_{k_1, k_2}; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) \geq V_{p,2}^p \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) - \varepsilon 2^{-(m_1+m_2)}. \quad (14)$$

Тоді з (13)–(14), використовуючи визначення p -варіації у сенсі Віталі (6), маємо

$$|c_n(f)| \leq \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} \kappa_p^p \left(f; \Pi_{k_1, k_2}; \overline{\Delta_{m_1+1}^{2k_1-1}, \Delta_{m_2+1}^{2k_2-1}} \right) + \varepsilon \right\}^{1/p} \leq \quad (15)$$

$$\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} V_{p,2} \left(f; I^2 \right) + \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)} \varepsilon^{1/p},$$

Через довільне ε ми отримуємо нерівність (12) з (15).

Покажемо, що нерівності (12) не можна покращити на всіх класах функцій $V_{p,d}(I^d)$. Для функції

$$v_o(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \\ 0, & \text{якщо } (t_1, t_2) \notin [0, h_1] \times [0, h_2], \end{cases} \quad t \in I^2,$$

що належить класу $V_{p,2}(I^2)$, маємо

$$v_{p,2}(v_o, I^2) = 1 \quad \text{та} \quad |c_{m_1, m_2}^{(1, 1)}(v_o)| = \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}.$$

Оскільки всі коефіцієнти Фур'є-Хаара $c_n(v_0)$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = 1, 2$) функції $v_0(t)$, крім коефіцієнта $c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_0)$, дорівнюють нулю, отримуємо рівності

$$|c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_0)| = \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(v_0)|^p \right\}^{1/p} = \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}.$$

Таким чином, ми показали, що для функції $v_0(t)$ у (12) знак рівності виконується. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Для довільних чисел $n \in N_*^d$, що мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = \overline{1, d}$) і $1 \leq p < \infty$, виконуються рівності

$$\sup_{f \in KV_{p,d}} |c_n(f)| = |c_m^{(1)}(v)| = \sup_{f \in KV_{p,d}} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} = K \prod_{i=1}^d 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (16)$$

Теорема 4. Для довільних чисел $n \in N_*^d$, що мають компоненти $n_i = 2^{m_i} + k_i$ ($k_i = \overline{1, 2^{m_i}}, m_i \in Z_+; i = \overline{1, d}$), $i, p = 1$, є відношення

$$\sup_{f \in KV_{1,d}^*} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \dots \sum_{k_d=1}^{2^{m_d}} c_n(f) \right| = K \prod_{i=1}^d 2^{-(2+m_i/2)}. \quad (17)$$

Доведення теореми 3. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, розглянемо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 3.

Використовуючи аргументи з (13)–(15) та визначення класу $KV_{p,d}$, для довільної функції $f \in KV_{p,2}$ і чисел $n \in N_*^2$ з (12) маємо верхні межі

$$\sup_{f \in KV_{p,2}} |c_n(f)| \leq \sup_{f \in KV_{p,2}} \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(f)|^p \right\}^{1/p} \leq K \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (18)$$

Для отримання нижніх меж розглянемо функцію $v_1(t)$ на множині I^2

$$v_1(t_1, t_2) = \frac{1}{4} \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \\ -1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times (h_2, 1]; \\ & (h_1, 1] \times [0, h_2]; \\ & (h_1, 1] \times (h_2, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, що $v_1(t) \in KV_{p,2}$, легко перевірити наступні рівняння

$$\left. \begin{aligned} |c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_1)| &= \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}; \\ |c_n(v_1)| &= 0 \quad \forall k_i = \overline{1, 2^{m_i}} \quad (m_i \in Z_+; i = 1, 2), \quad k_1 \neq 1, \quad k_2 \neq 1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Використовуючи (19), маємо нижню межу

$$\sup_{f \in KV_{p,2}} |c_n(f)| \geq |c_{m_1, m_2}^{(1,1)}(v_1)| = \left\{ \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} |c_n(v_1)|^p \right\}^{1/p} = K \prod_{i=1}^2 2^{-(1+m_i/2)}. \quad (20)$$

Ми отримуємо рівняння (16) з верхньої межі (18) та рівнянь (20). Теорему 3 доведено.

Доведення теореми 4. Без обмеження загальності, щоб уникнути громіздкості, ми розглядаємо лише випадок функцій двох змінних ($d = 2$) у доведенні теореми 4.

Продовжимо функцію системи Хаара $\chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i)$, $i = 1, 2$ на всі дійсні осі з унікальним періодом. Нехай $g_i(t_i) = 2^{-m_i/2} \chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i)$. Використовуючи визначення коефіцієнтів Фур'є-Хаара (3) та (1), можемо записати

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| &= \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)}(t_i) dt_1 dt_2 \right| = \left| \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \times \right. \\ &\times \left\{ \int_0^{h_1/2} \int_0^{h_2/2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 + \int_0^{h_1/2} \left[\int_{h_2/2}^{2h_2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 + \right. \right. \\ &+ \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 \Big] dt_1 + \int_0^{h_2/2} \left[\int_{h_1/2}^{2h_1} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 + \right. \\ &+ \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 \Big] dt_2 + \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 + \\ &+ \int_{h_1/2}^{2h_1} \left[\int_{h_2/2}^{2h_2} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 + \sum_{k_2=2}^{2^{m_2}} \int_{\delta_{m_2}^{k_2}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_2 \right] dt_1 + \\ &\left. \left. + \int_{h_2/2}^{2h_2} \sum_{k_1=2}^{2^{m_1}} \int_{\delta_{m_1}^{k_1}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 \right\} \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

Використовуючи періодичність функції $f(t) \in H_\Omega^*$ на кожній змінній з періодом, що дорівнює 1, маємо

$$\int_0^{h_i/2} f(t_1, t_2) g_i(t_i) dt_i = \int_1^{1+h_i/2} f(t_1, t_2) g_i(t_i) dt_i \quad (i = 1, 2).$$

Зі співвідношення (21) отримуємо

$$\left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| = \left| \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 g_i(t_i) dt_1 dt_2 \right|, \quad (22)$$

де з (1) маємо

$$\delta_{m_i+1}^{\gamma_i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\gamma_i - \frac{1}{2}}{2^{(m_i+1)}} \cdot \frac{\gamma_i + \frac{1}{2}}{2^{(m_i+1)}} \right) \quad (i = 1, 2).$$

З рівності (22) отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| &= \left| \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq \sum_{\gamma_1=1}^{2^{m_1+1}} \sum_{\gamma_2=1}^{2^{m_2+1}} \left| \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Для довільних γ_i та m_i ($\gamma_i = \overline{1, 2^{m_i+1}}$, $m_i \in Z_+$; $i = 1, 2$) використовуючи визначення системи Хаара (2), можемо записати

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}} \int_{\delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} f(t_1, t_2) \prod_{i=1}^2 \chi_{m_i}^{(k_i)} dt_1 dt_2 \right| \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^2 2^{m_i/2} \int_{\delta_{m_1+2}^{2\gamma_1}} \int_{\delta_{m_2+2}^{2\gamma_2}} |\Delta_{h_1/2}^1 \Delta_{h_2/2}^2 f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \leq \\ &\leq \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)} V_{1,2} \left(f; \overline{\Delta_{m_1+1}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}, \Delta_{m_2+1}^{\gamma_2+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

З (23), (24), аналогічно до (14)–(15), маємо верхню оцінку

$$\sup_{f \in KV_{1,2}^*} \left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(f) \right| \leq K \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)}. \quad (25)$$

Легко перевірити, що функція

$$v_2(t_1, t_2) = \frac{K}{16} \begin{cases} 1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times [0, h_2]; \quad (h_1, 1) \times (h_2, 1); \\ -1, & \text{якщо } (t_1, t_2) \in [0, h_1] \times (h_2, 1); \quad (h_1, 1) \times [0, h_2], \end{cases}$$

має період, що дорівнює 1, на якому змінна належить до класу $KV_{1,2}^*$. Для функції $v_2(t_1, t_2)$ маємо

$$\left| \sum_{k_1=1}^{2^{m_1}} \sum_{k_2=1}^{2^{m_2}} c_n(v_2) \right| = K \prod_{i=1}^2 2^{-(2+m_i/2)}.$$

З (25) та наведеного вище співвідношення отримуємо співвідношення (17). Теорему 4 доведено.

5. Обговорення результатів. Отримані результати точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій обмеженої варіації дозволяють значно покращити точність апроксимацій. Встановлені верхні межі модуля коефіцієнтів для функцій однієї та кількох змінних показують, що ці оцінки є важливими для зменшення похибок, що виникають при використанні перетворень у числових методах та обробці сигналів. Теореми, доведені в даній роботі, дають чітке уявлення про поведінку коефіцієнтів для функцій з різними варіаціями, а також відкривають нові можливості для подальших досліджень в галузі теорії апроксимацій та обробки зображень.

6. Висновки. У результаті проведеного дослідження отримання точних оцінок коефіцієнтів перетворення Фур'є-Хаара для функцій однієї та кількох змінних досліджено для класів функцій з граничними варіаціями. Отримано точні значення верхніх меж модуля коефіцієнтів Фур'є-Хаара функцій однієї змінної на класах функцій KV_p ($1 \leq p < \infty$). Точні значення верхніх меж коефіцієнтів Фур'є-Хаара отримано для класів функцій кількох змінних $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}(1 \leq p < \infty)$ і $KV_{1,d}^*$.

Отримані оцінки дозволяють значно покращити точність апроксимацій і зменшити похибки, що виникають при використанні цих перетворень у числових методах та обробці сигналів. Досліджено властивості цих коефіцієнтів, що сприяє глибшому розумінню їхнього взаємозв'язку з функціями та їх застосуванню в різних математичних і інженерних задачах. Розроблені оцінки можуть бути використані для оптимізації методів перетворення Фур'є-Хаара в контексті різних галузей науки, таких як обробка зображень, числові методи та теорія апроксимацій.

Список використаної літератури

1. Haar, A. (1909). *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Inaugural-dissertation.* Göttingen: Georg-August-Universität. Retrieved from http://rcin.org.pl/Content/67971/PDF/WA35_17124_5579_Zur_Theorie.pdf
2. Hu, A. J., Green, A., & Tibshirani, R. J. (30 December, 2022). The Voronoigram: Minimax Estimation of Bounded Variation Functions From Scattered Data. *Arxiv. 2212.14514*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.14514>
Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/366789665_The_Voronoigram_Minimax_Estimation_of_Bounded_Variation_Functions_From_Scattered_Data
3. Baby, D., & Baby, Yu-X (2019). Online Forecasting of Total-Variation-bounded Sequences. In *33rd Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2019)*, Vancouver: Canada. Retrieved from https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2019/file/62e0973455fd26eb03e91d5741a4a3bb-Paper.pdf
4. Lal, S., Shukla, K., & Keshri, S. (2017). Haar Wavelet Expansions of Signals and their Applications in Image Processing. *International Journal of Computer Applications*, 173, 9. Retrieved from <https://www.ijcaonline.org/archives/volume173/number9/lal-2017-ijca-915317.pdf>
5. Sharapudinov, I. I. (2014). Approximation of functions in variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces by finite Fourier-Haar series. *Sb. Mathematics*, 205(2), 291–306. <https://doi.org/10.1070/SM2014v205n02ABEH004376>
6. Vakarchuk, S. B., & Shchitov, A. N. (2015). Estimates for the error of approximation of functions in L_p^1 by polynomials and partial sums of series in the Haar and Faber-Schauder systems. *Izvestiya Mathematics*, 79(2), 257–287. <https://doi.org/10.1070/IM2015v079n02ABEH002742>
7. Shchitov, A. (2016). The exact estimates of Fourier-Haar coefficients of functions of bounded variation. *International Journal of Advanced Research in Mathematics*, 4, 14–22. <https://doi.org/10.18052/www.scipress.com/IJARM.4.14>

- Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/294573444_The_Exact_Estimates_of_Fourier-Haar_Coefficients_of_Functions_of_Bounded_Variation
8. Stasyuk, S. A. (2015). Approximations of the classes $MB_{p,\theta}^r$ of periodic functions of several variables by polynomials according to the Haar system. *Journal of Mathematical Sciences*, 210(1), 76–85. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2549-4>
 9. Tsagareishvili, V. (2010). Fourier-Haar coefficients and properties of continuous functions. *Mathematical Notes*, 87(3), 416–424. <https://doi.org/10.1134/S0001434610030132>
 10. Galkina, S. Yu. (2001). On the Fourier-Haar Coefficients of Functions of Several Variables with Bounded Vitali Variation. *Mathematical Notes*, 70(5), 733–743. <https://doi.org/10.4213/mzm794>
 11. Wiener, N. (1924). The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Journal of Mathematics and Physics*, 3, 73–94. <https://doi.org/10.1002/sapm19243272>

Shchytyov O. M., Mormul M. F. Precision values of Fourier-Haar transform coefficients for functions with bounded variation.

We obtain sharp estimates for the Fourier-Haar transform coefficients of functions of bounded variation. The paper investigates properties and applications of the Fourier-Haar transform in the setting of bounded-variation functions, which is relevant to both theory and practice in mathematical analysis and signal processing. The coefficient bounds elucidate the link between structural characteristics of functions and their transforms, and they enable effective use of these methods across applied domains such as image processing, numerical methods, and approximation theory. We derive exact upper bounds for the modulus of Fourier-Haar coefficients of univariate functions in the classes KV_p ($1 \leq p < \infty$). We further analyze the behavior of Fourier-Haar coefficients for multivariate functions of bounded variation in the classes $V_{p,d}(I^d)$, $KV_{p,d}$ ($1 \leq p < \infty$) and $KV_{1,d}^*$. Exact results have been obtained on these classes of functions of several variables.

Keywords: Fourier-Haar system; functions of bounded variation; sharp estimates; precision coefficients; wavelet analysis.

Одержано 25.08.2025

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).118-125](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).118-125)**С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², Ю. Ю. Млавець³**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
nayaretska@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КОНТАКТУ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА ТА ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ

У статті представлено чисельний розв'язок контактної задачі для двох пружних півпросторів з початковими напруженнями та попередньо напруженого кільцевого штампа без врахування сил тертя. Вважаємо, що поверхні поза межею контакту попередньо напружених кільцевого штампа та півпросторів залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Математичну модель та її дослідження представлено у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу. З певним ступенем точності, припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружних півпросторів однорідні та рівні. Вважаємо, що контакт пружних тіл з початковими напруженнями знаходиться в умовах просторової деформації. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами. Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану півпросторів. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У результаті, проведено чисельні розрахунки та знайдено методом утинання розв'язки нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь, через які виражаються компоненти переміщення та напруження у контактуючих тілах. Побудовані графіки у випадку гармонічного потенціалу для нормальних контактних напружень та радіальних переміщень у кільцевому циліндрі та півпросторах у безрозмірних координатах. Графік зв'язку між осіданням та рівнодіючою навантаження має дискретний характер, враховуючи складність обчислень. Отже, за допомогою отриманих числових результатів можна вивчити вплив початкових напружень на розподіл контактних напружень та переміщень у двох пружних півпросторах і пружному кільцевому штампі.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір, інтегральні рівняння.

1. Вступ. Числовий аналіз задач сучасної контактної механіки є важливим аспектом дослідження та розв'язку проблем механіки твердого деформованого тіла з урахуванням початкових напружень.

Залучення додаткових сил, таких як залишкові чи початкові напруження, суттєво ускладнює математичне моделювання задач взаємодії пружних тіл, які перебувають у контакті. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває розвиток цього наукового напрямку із застосуванням методів математичного аналізу та інструментів комп'ютерного моделювання та чисельних методів.

Практична значущість досліджуваних задач обумовлена тим, що залишкові (технологічні) напруження справляють істотний вплив на високі об'єкти — наприклад, димові труби, водонапірні башти, градирні, — особливо в тих випадках, коли ґрунтова основа або перекриття моделюються у вигляді пружного півпростору чи шару. Крім того, цей вплив необхідно враховувати при проектуванні деталей машин, конструкцій і механізмів, які широко використовуються в промисловості та суміжних сферах діяльності.

Початкові (залишкові або технологічні) напруження можуть бути наслідком різних факторів, серед яких: вітрові навантаження на споруди; навантаження від власної маси конструкцій; технологічні процеси виробництва матеріалів; попередня обробка матеріалів або елементів конструкцій; етапи монтажу конструкцій; геостатичні та геодинамічні впливи земної кори; деформації, викликані мерзлими ґрунтами; розвантаження пластичних тіл; процеси, що відбуваються у кровоносних судинах біологічних організмів, а також інші аналогічні ситуації.

Із метою зменшення контактних напружень, які виникають у процесі експлуатації конструктивних елементів, доцільно в окремих випадках спеціально створювати початкові напруження. Це дозволяє підвищити міцність як матеріалів, так і конструкцій загалом. Згідно з результатами, поданими у [1], встановлено, що при наявності стискаючих або розтягуючих початкових напружень поведінка контактних напружень і переміщень істотно змінюється у кількісному вимірі.

Актуальність дослідження впливу початкових напружень на тіла, які перебувають у стані контакту, підтверджується широким спектром наукових галузей, до яких належать: механіка композитних матеріалів, механіка матеріалів і конструктивних елементів, методи неруйнівного контролю навантажень, сейсмологія, біомеханіка, механіка гірських порід, геофізика тощо. Отже, дослідження контактної взаємодії тіл з урахуванням початкових напружень є важливою складовою комплексного вивчення зазначених наукових проблем.

Аналізуючи наукові напрацювання у галузі контактної механіки, слід зазначити, що моделі, які враховують складну фізичну та механічну природу тіл, розглядалися у працях [2–5]. Загалом, для дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл необхідним є застосування нелінійної теорії пружності [4–6]. Водночас, якщо величина початкових напружень є достатньо значною, доцільно обмежитися використанням її лінеаризованого варіанту.

Однією з перших публікацій, в якій було запропоновано розв'язання задачі для колової тріщини у пружному нестисливому тілі за наявності початкових напружень і для конкретного типу пружного потенціалу, є робота [10]. Подальші дослідження, в яких задачі контактної взаємодії розв'язувалися для заданих форм потенціалу, подані у працях [11]. У цих дослідженнях одні й ті самі задачі

взаємодії попередньо напружених тіл аналізувалися різними авторами — кожен з використанням певного типу потенціалу. Такий підхід, на жаль, не сприяє уніфікації та спрощенню загального процесу розв'язання контактних задач.

З огляду на це, автори вважають більш ефективним підхід, що передбачає розв'язання задачі контактної взаємодії у загальному вигляді — як для стисливих, так і для нестисливих тіл, при довільній структурі пружного потенціалу. До таких фундаментальних робіт можна віднести праці [1, 2–5, 7–9, 12], які суттєво розвивають цей напрям досліджень.

Запропонований метод базується на використанні теорії потенціалу — для просторових контактних задач. Такий підхід надає можливість формулювати та розв'язувати контактні задачі в єдиній загальній постановці, як для стисливих, так і для нестисливих тіл, без обмеження на конкретну структуру пружного потенціалу. При цьому числові результати для конкретних варіантів потенціалу одержують уже на завершальному етапі розв'язання. Основні припущення, що лежать в основі лінеаризованої теорії пружності та запропонованого підходу, наведено у праці [12].

Враховуючи вище сказане, дослідження контактної задачі для двох попередньо напружених півпросторів, які тиснуть на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями було представлено в аналітичному та чисельному варіантах. Аналітичний розв'язок опублікований у [13]. А чисельний розв'язок — представимо у даній статті.

Дослідження контактної взаємодії двох попередньо напружених півпросторів та кільцевого штампу виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності без врахування сил тертя [13]. Задача сформульована у вигляді розв'язку потрійних інтегральних рівнянь, що зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки задача є вісесиметричною, то ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Для аналітичного розв'язку в [13] була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у подвійну суму добутків гіпергеометричної функції на функцію Бесселя. Це дозволило звести задачу до функціонального рівняння. Це рівняння пов'язує переміщення штампа з невідомими коефіцієнтами розподілу контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведене до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дану систему розв'язуємо методом редукції (утинання) [14]. При дії навантаження на кільцевий циліндр розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді ряду добутків приєднаних функцій Лежандра з вагою, що відповідає особливостям у контактних напруженнях на межах штампів.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного кільцевого штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однакові. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [15].

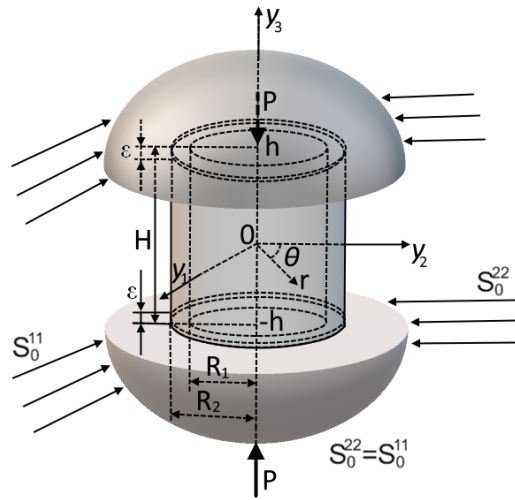


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями.

2. Постановка задачі. Нехай пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою вісесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки ненавантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним кільцевим штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R_1 та R_2 — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кільцевого штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1. величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11}, S_0^{22} — компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні розглядаємо пружні ізотропні тіла (стисливі або нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. Причому, пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [8]. Крім того, дія штампа викликає у півпросторах мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану Oy_i , які пов'язані з лагранжевими координатами (початкового стану) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

Припускаємо, що початкові стани півпросторів і штампа є однорідними та рівними й для них виконуються співвідношення [1]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1}y_i \quad (i, m = \overline{1, 3}), \quad (2)$$

де δ_{mi} — символ Кронекера.

Всі величини, що відносяться до верхнього, нижнього півпросторів будемо позначати верхнім індексом (1) та (2) відповідно, а величини, що відносяться до кільцевого штамп — верхнім індексом (3).

У системі циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1}y_3$; $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i = 1, 2$); $n_1 = \xi_2^2$; $n_2 = \xi_3^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружного кільцевого штамп в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{33}^{(3)}, \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}^{(3)} = 0, \quad U_3^{(i)} - U_3^{(3)} = \varepsilon \quad (R_1 \leq r \leq R_2); \quad (3)$$

2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}^{(i)} = Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad U_3^{(i)} = 0 \quad (r > R_2, 0 < r < R_1) \quad (i = 1, 2, 3); \quad (4)$$

3) на боковій поверхні пружного штамп $r = R_1, r = R_2$:

$$Q_{rr}^{(3)} = 0; \quad Q_{3r}^{(3)} = 0 \quad (|z_i| \leq h/v_i), \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодійною навантаження P , має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r |Q_{33}^{(i)}| dr, \quad |Q_{33}^{(3)}| = |Q_{3r}^{(3)}|_{z_i = \pm \frac{h}{v_1}} \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Умова (6) завершує постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного кільцевого циліндричного штамп із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

Основні співвідношення та метод розв'язання даної контактної задачі детально описаний у статті [13]. Розглянемо чисельні результати розв'язання задачі.

3. Числові результати. В статті проведений числовий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\tilde{\alpha}_k T_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} T_n = \tilde{\beta}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

де $\tilde{\beta}_k, \tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_{kn}$ — коефіцієнти, що залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу, радіусів кільцевого штамп та висоти пружного штамп [13].

Система (7) розв'язана методом редукції (утинання) та побудовані графіки (рис. 2–3) у випадку гармонічного потенціалу при наступних значеннях параметрів: $R_1 = 1, R_2 = 2, H = 10, \varepsilon = 10^{-3}, E^{(i)} = 5 \cdot 10^{-2}$ ГПа (гума) ($i = 1, 2, 3$), $\lambda_1 = 0.8; 0.9; 1; 1.1; 1.2$.

Нормальні контактні напруження та радіальні переміщення у кільцевому циліндрі представлені на рис. 2, рис. 3 у безрозмірних координатах при $\rho = \frac{r-R_1}{R_2-R_1}, 0 \leq \rho \leq 1$. Тут $\rho = 0$ при $r = R_1$, а $\rho = 1$, при $r = R_2$.

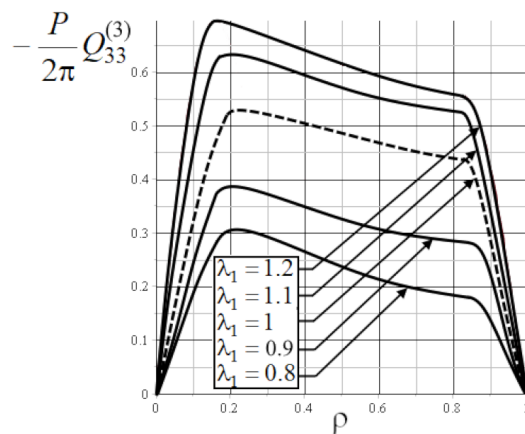


Рис. 2. Нормальні контактні напруження у кільцевому циліндричному штампі.

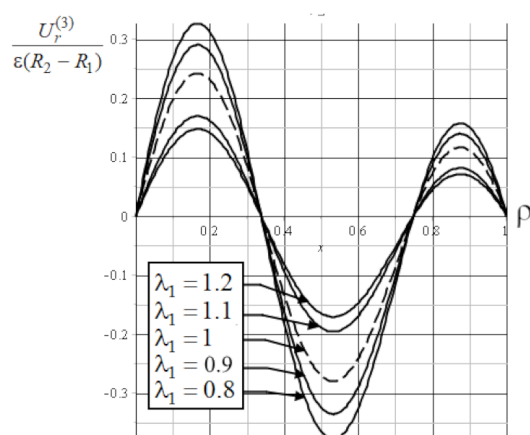


Рис. 3. Радіальні напруження у штампі в області контакту.

З рис. 2 видно, що контактні напруження у штампі приймають найбільші свої значення по абсолютній величині ближче до внутрішніх твірних кільцевого циліндра, ніж до зовнішніх. Причому при розтягу контактні напруження більші ніж при стиску.

З рис. 3 видно, що піки радіальних переміщень $\frac{U_r^{(3)}}{\varepsilon(R_2-R_1)}$ у штампі в області контакту затухають ближче до зовнішніх твірних кільцевого циліндра. Причому при стиску радіальні переміщення більші по абсолютній величині, ніж при розтягу.

Використавши умову рівноваги (6), зв'язок між осіданням та рівнодією навантаження

$$P = 4\pi\varepsilon C_{44}(1 + m_2)l_2(R_1^2 - R_2^2)\tilde{A}_0T_0.$$

Представимо у вигляді графіка (рис. 4) дискретним чином, залежно від коефіцієнта видовження λ_1 .

На рис. 4 видно, що при стиску на одну й ту саму величину, необхідно застосувати більшу за абсолютною величиною силу, ніж при розтягу. Також, чим ближче коефіцієнт видовження λ_1 до свого критичного значення, тим більшу силу по абсолютній величині потрібно прикладати.

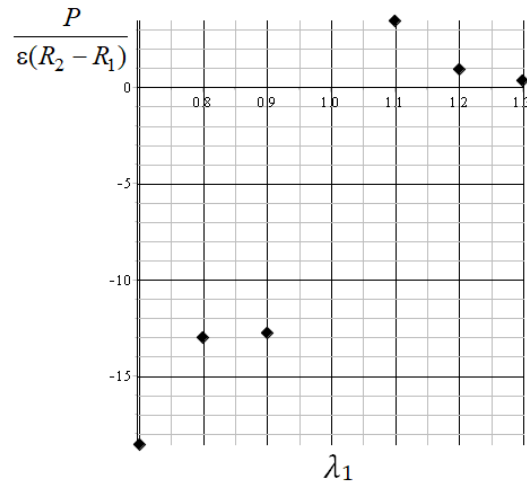


Рис. 4. Залежність сили $\frac{P}{\varepsilon(R_2 - R_1)}$ від коефіцієнта видовження λ_1 .

4. Висновок. В розглянутій задачі було зроблене припущення, що додаткове зовнішнє навантаження (по відношенню до початкового стану) викликає у попередньо напружених тілах значно менше збурення напружено-деформованого стану порівняно із відповідними величинами початкового напруженого стану. Але в околі точок зміни граничних умов це припущення може порушуватись. Це явище обговорено у працях [1, 16].

Також, коректність використання методу редукції (утинання) при розв'язку нескінченної алгебраїчної системи (7) пояснюється тим, що в дослідженні [1] доведено, що спосіб використання ортогональних многочленів [13] веде до квазірегулярних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Отже, враховуючи проведене числове та аналітичне [13] дослідження задачі, можна зробити висновок про те, що запропонований розв'язок контактної задачі про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндр з початковими напруженнями можна використовувати для розрахунку фундаментів (грунтових основ) або перекриттів з підшвами кільцевої форми.

Список використаної літератури

1. Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2006). *Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses*. Khmelnytskyi: vyd. PP Melnyk.
2. Altenbach, H., Bogdanov, V., Bulat, A., Guz, A., & Nazarenko, V. (2023). A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine: *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
3. Guz, A. N., Bogdanov, V. L., & Nazarenko, V. M. (2020). Two-dimensional problems on the fracture of bodies under compression along cracks. *Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. Advanced Structured Materials*. (Vol. 138). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_3
4. Guz, A. N. (2021). *Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics*. Springer: Cham.
5. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph "Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics". *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29.
6. Hutchinson, J. W., & Thompson, J. M. T. (2017). Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces. *Journal of Applied Mechanics*, 84(6), 061001. <https://doi.org/10.1115/1.4036355>
7. Guz, A. N., Babych, S. Iu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for an elastic foundation*

- with initial stresses*. Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing.
8. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 38(1), 23–59. <https://doi.org/10.1023/A:1015379824503>
 9. Guz, A. N., & Guz, I. A. (2004). Mixed plane problems in linearized solid mechanics. Exact solutions. *International Applied Mechanics*, 40(1), 1–29. <https://doi.org/10.1023/B:INAM.0000023808.08859.48>
 10. Kurashige, M. (1969). Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid. *ZAMM*, 49(8), 671–678.
 11. Dhaliwal, R. S., Singh, B. M., & Rokne, J. G. (1980). Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hookean elastic layer. *Int. J. Eng. Sci.*, 18(1), 169–179.
 12. Yaretska, N. O. (2022). Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed cylindrical punch and elastic layer. *Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences* : Collective monograph. Riga, Latvia: “Baltija Publishing”, 261–295. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
 13. Babich, S. Yu., Yaretska, N. O., Lazar, V. F., & Mlavets, Yu. Yu. (2024). Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 45(2), 126–138. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).126-138](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).126-138) [in Ukrainian].
 14. Bobyk, O. I., Bobyk, I. O., & Lytvyn, V. V. (2010). *Equations of mathematical physics*. Lviv: «Novyi svit-2000» [in Ukrainian].
 15. Hrylytskiy, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity and thermoelasticity*. Lviv: Vyshcha shk. [in Ukrainian].
 16. Guz, O. M., Babich, S. Yu., & Rudnytskyi, V. B. (1995). *Contact interaction of elastic bodies with initial stresses: Textbook*. Kyiv: Higher School [in Ukrainian].

Babich S. Yu., Yaretska N. O., Mlavets Yu. Yu. Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp.

The article presents a numerical solution of the contact problem for two elastic half-spaces with initial stresses and a prestressed annular die without taking into account friction forces. We assume that the surfaces outside the contact boundary of the prestressed annular die and half-spaces remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary of displacement and stress are continuous. The problem is solved in the case of equal roots of the determining equation. The mathematical model and its study are presented in a general form for the theory of large initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. With a certain degree of accuracy, it is assumed that the initial states of the elastic annular die and elastic half-spaces are homogeneous and equal. We assume that the contact of elastic bodies with initial stresses is under conditions of spatial deformation. The study is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates. In addition, the effect of the ring stamp causes small perturbations of the corresponding values of the main stress-strain state of the half-spaces. It is also assumed that the elastic ring stamp and the elastic half-spaces are made of various isotropic, transversely-isotropic or composite materials. As a result, numerical calculations were carried out and the solution of an infinite quasi-regular system of algebraic equations was found by the truncation method, through which the components of displacement and stress in the contacting bodies are expressed. Graphs were constructed in the case of a harmonic potential for normal contact stresses and radial displacements in the ring cylinder and half-spaces in dimensionless coordinates. The graph of the relationship between settlement and resultant load is discrete, taking into account the complexity of the calculations. Therefore, using the obtained numerical results, it is possible to study the influence of initial stresses on the distribution of contact stresses and displacements in two elastic half-spaces and an elastic ring die.

Keywords: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, ring stamp, half-space, integral equations, numerical methods, graph.

Одержано 28.07.2025

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).126-135](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).126-135)**Я. Й. Бігун¹, О. З. Українець²**

¹ Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій,
доктор фізико-математичних наук, професор

y.bihun@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5545-9041>

² Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій
o.ukrainets@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-9793-0330>**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ
ІЗ ВРАХУВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОГО ФАКТОРУ**

У роботі запропоновано математичну модель поширення епідемії із врахуванням забруднення довкілля, що може посилити негативний вплив на перебіг епідемії. Модель ґрунтується на відомі SIR-моделі, в якій крім інтегрального екологічного фактору $E(t)$ враховано народжуваність і смертність у популяції. Динаміка долі схильного до інфікування населення у моделі залежить від відхилення рівня забруднення від деякого допустимого значення K і втрати імунітету до захворювання через час $\tau > 0$. Доля інфікованого населення зростає із ростом значення $E(t) - K$. Досліджено існування і невід’ємність розв’язку моделі при $t > 0$, знайдено стани рівноваги та умови їх існування. Встановлено умови стійкості стану відсутності епідемії та стану епідемічного процесу. За результатами комп’ютерного моделювання проаналізовано динаміку математичної моделі.

Ключові слова: Епідемія, базове репродуктивне число, математична модель, екологічний фактор, стан рівноваги, стійкість розв’язків, диференціальні рівняння із запізненням, популяція, комп’ютерне моделювання

1. Вступ. Математичному моделюванню поширення епідемій за допомогою диференціальних рівнянь із звичайними, частинними, дробовими похідними присвячена значна кількість досліджень, зокрема монографії [1] - [4]. Моделі з урахування втрати імунітету, інкубаційного періоду та інших чинників, пов’язаних з передісторією процесу поширення епідемії, описуються рівняннями із запізненням аргументу або диференціальними функціональними рівняннями і досліджували в працях [5] - [8] та багатьох інших.

Більшість математичних моделей поширення епідемій базується на класичній SIR-моделі [1] - [4]:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t), \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t). \quad (1)$$

Тут $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ відповідно – кількість осіб у момент часу $t > 0$, схильних до інфікування, інфікованих і тих, які одужали або набули імунітету, β і γ – додатні параметри, причому $\gamma \approx T^{-1}$, де T – середня тривалість хвороби. Із системи рівнянь (1) випливає, що

$$S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{const},$$

тобто чисельність популяції залишається сталою протягом епідемії.

Математична модель (1) є частинним випадком загальнішої моделі, яка досліджувалась з 1927 р. Кермаком і МакКендриком [9]. У цій праці розглядалось рівняння:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S(t)}{N} \int_0^\infty A(\tau) \frac{dS(t-\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2)$$

де $A(\tau)$ – середня інфективність особи, інфікованої τ одиниць часу раніше по відношенню до здорової особи. Якщо $A(\tau) = \beta N \exp^{-\gamma\tau}$, то ввівши позначення

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t A(t-\tau) \frac{dS(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3)$$

і диференціюючи (3) із врахуванням (2), одержимо систему рівнянь (1).

Невід’ємність розв’язку $I(t)$ при $t > 0$ одержується із другого рівняння системи (1), оскільки

$$I(t) = I_0 \exp \left(\int_0^t (\beta S(z) - \gamma) dz \right) \geq 0.$$

Аналогічно, $S(t)$ і $R(t)$ набувають невід’ємних значень при $t > 0$, якщо $S(0) \geq 0$ і $R(0) \geq 0$.

Тому $S'(t) \leq 0$, і при $t > 0$ $S(t) \leq S(0)$. Крім того, при $t > 0$

$$I(t) \leq I_{max} = N - \sigma + \sigma \ln \frac{\sigma}{S_0}.$$

Із обмеженості розв’язку системи (1) на довільному інтервалі $(0, t)$, випливає існування диференційовного розв’язку для $t > 0$.

2. Математична модель.

На розвиток епідемії впливають різноманітні чинники медичного, соціального, організаційного та іншого типу. Ще одним фактором є стан забруднення довкілля, що в першу чергу стосується захворювань з ураженням органів дихання, наприклад різних штамів вірусів грипу. Для узагальненого екологічного впливу також можна включати психо-емоційні фактори, що пов’язані із стресовими станами частини населення щодо загрози захворювання, а також зовнішніми фактори, такими як воєнний стан, повітряні тривоги тощо.

Розглянемо математичну модель поширення епідемії серед населення деякого регіону, яка ґрунтується на модифікації SIR-моделі із врахуванням негативного впливу забруднення навколишнього середовища. Фактор забруднення в моделі позначено через $E(t)$, $t \geq t_0 = 0$. Припустимо, що

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \dots + \alpha_m E_m(t),$$

де $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$, $E_i(t)$ – компоненти забруднення, наприклад забруднення повітря, води, кліматичні, соціально-психологічні фактори тощо. Нехай $K > 0$ – допустимий фактор забруднення, при якому схильні до інфікування особи не відчувають негативного впливу. Ризик інфікування посилюється при $E(t) > K$ і зменшується при $0 \leq E(t) < K$. Оскільки процес відновлення довкілля найчастіше має коливний характер, який стабілізується відносно

значення $E = K$ при $t \rightarrow \infty$, то припустимо, що $E(t)$ є розв'язком рівняння Гачінсона [10]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t - \Delta)}{K} \right) E(t), t > 0, \quad (4)$$

де $0 < r$ – коефіцієнт лінійного росту, запізнення $\Delta > 0$ відображає середній час відновлення екологічного стану.

При $-\Delta \leq t \leq 0$ задається передісторія процесу

$$E(t) = E_0(t) \geq 0. \quad (5)$$

У статті [11] показано, що для узагальненого рівняння Гачінсона

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{E(t - \Delta)}{K} \right)^n \right) E(t), \quad t > 0,$$

стійкість стану рівноваги досягається $E = K$ досягається при виконанні умови

$$0 < rn\Delta < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Графіки розв'язків для різних n наведені на рис. 1:

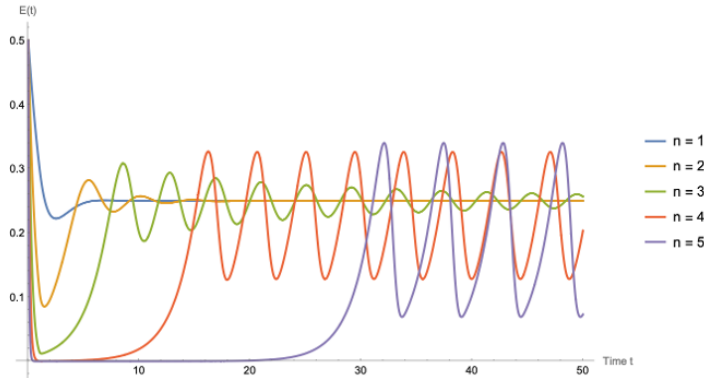


Рис. 1. Динаміка розв'язків фактору E узагальненого рівняння Гачінсона при різних значеннях параметра n .

Якщо $E(0) > 0$, то розв'язок задачі (4), (5) існує при $t > 0$, невід'ємний і обмежений [10].

У моделі поширення епідемії врахуємо час $\tau > 0$ втрату імунітету до захворювання, як і в [2] або в [5]. Також врахуємо той факт, що перевищення рівня забруднення $E \rightarrow K$ веде до збільшення кількості осіб, схильних до інфікування серед населення популяції.

Враховувавши природні процеси народжуваності та смертності у групі $S(t)$, одержимо рівняння:

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) + \alpha I(t - \tau) + \varepsilon(E(t) - K) - \mu S(t), \quad (7)$$

де $b > 0$ і $\mu > 0$ – коефіцієнти народжуваності і смертності в популяції відповідно, $\varepsilon > 0$.

У системі рівнянь (1) коефіцієнт γ обернено пропорційний середньому часу перебігу захворювання T , тому перевищення показника $E(t)$ за середнє значення K може збільшити час T , що спостерігається в медичній практиці [12], [13]. Тому припустимо, що функція $\gamma = \gamma(E)$ і набуває вигляду

$$\gamma(E) = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E(t) - K)}, \quad (8)$$

де γ_0 і γ_1 – додатні коефіцієнти.

У підсумку маємо рівняння для динаміки інфікованих осіб:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma(E(t))I(t) - \mu I(t), \quad (9)$$

із початковою умовою

$$I(t) = 0, \quad -\tau \leq t < 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0. \quad (10)$$

Для частини осіб $R(t)$, які одужали або набули імунітету, маємо рівняння

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(E(t))I(t) - \alpha I(t - \tau) - \varepsilon(E(t) - K) - \mu R(t), \quad (11)$$

з початковою умовою $R(0) = R_0 \geq 0$.

Надалі побудовану модель будемо досліджувати для безрозмірних величин, вважаючи, що $N(0) = 1$, а $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ – відповідні долі населення і

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

Із рівнянь (7), (9), (11) випливає

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N, \quad N(0) = 1,$$

і зміна кількості населення з плином часу набуває вигляду

$$N(t) = \left(1 - \frac{b}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{b}{\mu}. \quad (12)$$

3. Невід'ємність розв'язку.

Розглянемо питання про невід'ємність розв'язку задачі (7), (9), (11) із невід'ємними початковими умовами.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

- 1) для $t > 0$ існує єдиний неперервний розв'язок системи рівнянь (7), (9), (11) із початковими умовами $S(0) > 0, I(0) > 0, R(t) \geq 0$;
- 2) $b - \varepsilon\sigma > 0$, $\sigma = \max |E(t) - K|$ при $t \geq 0$;
- 3) $\alpha(1 + \gamma_1\sigma) < \gamma_0$.

Тоді при $t > 0$ розв'язок $S(t), I(t), R(t)$ набуває невід'ємних значень.

Доведення. Із рівняння (9) після інтегрування одержимо

$$I(t) = I(0) \exp \left(\int_0^t \beta S(x) - \gamma(E(x)) \right) dx.$$

Звідси випливає, що $I(t) \geq 0$ при $t > 0$. Якщо $I(0) > 0$, то $I(t) > 0$ при $t > 0$. У разі відсутності інфікованих осіб при $t = 0$ маємо $I(t) \equiv 0$ для $t > 0$.

Нехай $0 < S(0) \leq N(0) = 1$ і $t_1 \in (0, \tau)$ – перша точка, у якій $S(t_1) = 0$. Тоді $S'(t_1) \leq 1$. При виконанні умови 2 теореми отримуємо:

$$\frac{dS(t_1)}{dt} = b + \varepsilon(E(t_1) - K) \geq b - \varepsilon\sigma > 0,$$

що суперечить припущенню.

Якщо $t_1 \geq \tau$, то врахувавши, що $I(t_1 - \tau) \geq 0$ і умову 2 теореми, аналогічно одержимо суперечність із припущенням $S'(t_1) \leq 0$.

Нехай $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, при цьому $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $I(0) > 0$ і $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, отже $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $t_2 < \tau$, то $R'(t_2) > 0$ на підставі умови 2 теореми. Якщо $t_2 \geq \tau$ і виконується умова 3 теореми, то

$$\frac{dR(t_2)}{dt} \geq \left(\frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1\sigma} - \alpha \right) \min(I(t_2 - \tau), I(t_2)) > 0,$$

що також суперечить припущенню. $\square$

4. Існування і єдиність розв'язку.

Для доведення існування і єдиності неперервного розв'язку системи рівнянь (7), (9), (11) із невід'ємними початковими умовами застосуємо теорему із монографії [14, с.308-309]. Розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(t, u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m)), t > 0, \\ u(t) &= u_0(t), \quad -\tau_m \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, $u := (u_1, \dots, u_n) \subset \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$.

Теорема 2 [14]. Нехай виконуються умови:

- 1) вектор-функція F визначена для $t > 0$ і $u \in \mathbb{D}$, неперервна для кожного u , локально Ліпшицева по u_0 ;
- 2) справджується оцінка:

$$\|F(t, u)\| \leq P(t) + N(t) \|u\|, \quad (t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{D}, \quad (13)$$

де P і Q – неперервні функції при $t \geq 0$ із значеннями в $\mathbb{R}_+$;

- 3) початкова функція $u_0 \in C[-\tau_m, 0]$.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок задачі на довільному інтервалі $(0, t)$.

На підставі теореми 2 доведемо існування і єдиність розв'язку початкової задачі для системи (7), (9), (11).

Теорема 3. *Нехай:*

- 1) початкові умови $S_0(t) > 0, I(0) > 0, R(0) \geq 0$;
- 2) виконуються умови теореми 1.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок початкової задачі для системи (7), (9), (11) при $t > 0$, диференціальний при $t > \tau$.

Доведення. Обмежений невід'ємний розв'язок початкової задачі (4), (5) існує при $t > 0$ [10, 15].

Як впливає із системи рівнянь (7), (9), (11) на довільному інтервалі існування розв'язку цієї задачі:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \leq \frac{b}{\mu}. \quad (14)$$

Оскільки розв'язки $S(t), I(t), R(t)$ невід'ємні, то кожен із них обмежений значенням b/μ на $(0, t)$.

Позначимо через $F := (F_1, F_2, F_3)$ – праві частини системи (7), (9), (11). Тоді із (14) і умови (2) теореми (3) одержимо:

$$\begin{aligned} |F_1| &\leq b + \varepsilon\sigma + \beta b \frac{b}{\mu} + \alpha I_\tau + \mu S, \\ |F_2| &\leq \left(\frac{\beta b}{\mu} + \frac{\gamma_0}{(1 - \gamma_1\sigma)} + \mu \right) I, \\ |F_3| &\leq \varepsilon\sigma + b + \left(\frac{\gamma_0}{(1 - \gamma_1\sigma)} \right) I + \alpha I_\tau + \mu R. \end{aligned}$$

Застосувавши теорему 2 отримаємо висновок про існування неперервного розв'язку на довільному інтервалі $(0, t)$, отже на півосі $(0, \infty)$.

При $t > \tau$ для розв'язку $I(t)$ початкова функція неперервна на $[0, \tau]$, тому розв'язок диференціальний при $t > \tau$ [14]. $\square$

5. Стани рівноваги.

Для моделі (7), (9), (11), стани рівноваги є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} b - \beta SI + \alpha I + \varepsilon(E - K) - \mu S = 0, \\ \beta SI - \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \mu I = 0, \\ \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \alpha I - \varepsilon(E - K) - \mu R = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Один із розв'язків системи (15), коли $E_1 = K$, набуває вигляду:

$$I_1 = 0, \quad E_1 = K, \quad S_1 = b/\mu, \quad R_1 = 0, \quad (16)$$

і відображає стан відсутності епідемії серед населення популяції.

Якщо $I \neq 0$ і $E_2 = K$, то із системи рівнянь (15) одержується ще один розв'язок:

$$S_2 = \frac{\gamma_0 + \mu}{\beta}, \quad I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\beta(\gamma_0 + \mu - \alpha)}, \quad R_2 = \frac{(\gamma_0 - \alpha)I_2}{\mu}. \quad (17)$$

Нехай виконується нерівність

$$\mu(\gamma_0 + \mu) < \beta b, \quad (18)$$

тоді $S_2 < N(\infty) < b \setminus \mu$.

Значення $I_2 > 0$, оскільки $\gamma_0 + \mu - \alpha > 0$ на підставі умови 3 теореми 1, а $\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu) > 0$ при виконанні нерівності (18). Компоненти $I_2 > 0$ і $R_2 > 0$, оскільки $\gamma_0 - \alpha > \alpha\sigma\gamma_1 > 0$.

6. Стійкість станів рівноваги.

Застосуємо для дослідження стійкості розв'язку (16) критерій стійкості за лінійним наближенням [15]. Характеристичне рівняння, яке відповідає лінеаризованій системі рівнянь (4), (7), (9) має вигляд:

$$\begin{vmatrix} -re^{-\Delta\lambda} - \lambda & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\beta I - \mu - \lambda & -\beta S + \alpha e^{-\tau\lambda} \\ \frac{\gamma_0\gamma_1}{(1+\gamma_1(E-K))^2} I & \beta I & \beta S - \frac{\gamma_0}{1+\gamma_1(E-K)} - \mu - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для стану рівноваги (16) одержимо:

$$(re^{-\Delta\lambda} + \lambda)(\mu + \lambda)\left(\frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu - \lambda\right) = 0.$$

Корені рівняння

$$re^{-\Delta\lambda} + \lambda = 0$$

лежать у лівій півплощині $Re(\lambda) < 0$, якщо виконується умова (6). Власні значення $\lambda_1 = -\mu < 0$ і $\lambda_2 = \frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu < 0$, якщо виконується умова (18) або базове репродуктивне число

$$R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\gamma_0 + \mu)} < 1. \quad (19)$$

Отже, справджується твердження.

Теорема 4. *Нехай виконується умова (6) і базове репродуктивне число $R_0 < 1$. Тоді стан рівноваги (16) локально асимптотично стійкий і поширення епідемії не відбувається.*

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи для стану рівноваги (17), де $E_2 = K$, набуває вигляду:

$$(e^{-\Delta\lambda} + \lambda) (\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha e^{-\lambda\tau})) = 0,$$

де

$$a = \beta I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\gamma_0 + \mu - \alpha}.$$

Якщо $\tau = 0$, що означає миттєву втрату імунітету, для λ_1 і λ_2 одержується характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha) = 0.$$

Оскільки $\alpha + \mu > 0$, $\alpha > 0$, то при виконанні умови 6 і нерівності

$$\alpha\beta I_2 < \gamma_0 + \mu - \alpha$$

або

$$\alpha(\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)) < (\gamma_0 + \mu)(\gamma_0 + \mu - \alpha),$$

стан рівноваги (17) асимптотично стійкий.

Якщо імунітет після одужання не втрачається, $\alpha = 0$, то маємо рівняння:

$$\lambda^2 + \mu\lambda + a(\gamma + \mu) = 0,$$

корені якого $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$.

Отже, при виконанні умови (6) для $n = 1$, умов теореми 1 і умови (18), розв'язок (17) локально асимптотично стійкий.

7. Комп'ютерне моделювання.

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки епідемії зі змінною екологічного фактору $E(t)$ - розв'язком рівняння (4). Нехай запізнення $\Delta = \tau = 1$, $K = 0.25$, $n = 1$, початкові умови: $S(0) = 0.99$, $I(0) = 0.01$, $R(0) = 0$.

Якщо імунітет не втрачається ($\alpha = 0$) і відсутній вплив екологічного фактору на осіб, схильних до інфікування, динаміка процесу близька до динаміки SIR -моделі, $S(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рис 2 та рис. 3).

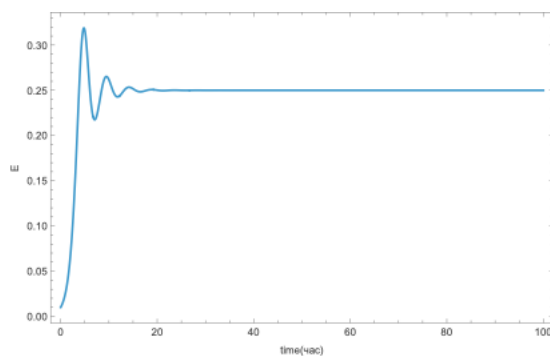


Рис. 2. Графік розв'язку $E(t)$, $r = 1$

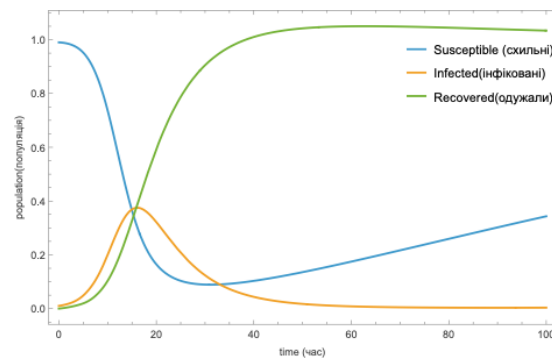


Рис. 3. Графіки розв'язків S, I, R .
Параметри: $\beta = 0.5$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 1$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$, $b = 0.005$, $\mu = 0.001$.

Якщо імунітет втрачається після одужання через час $\tau = 1$, то під впливом екологічного фактору з ростом коефіцієнта r спостерігається коливання факторів S, I та R . З часом є прямування значень факторів до стійких станів рівноваги (рис. 4, рис. 5), але при цьому залишається доля інфікованих осіб, яка зростає.

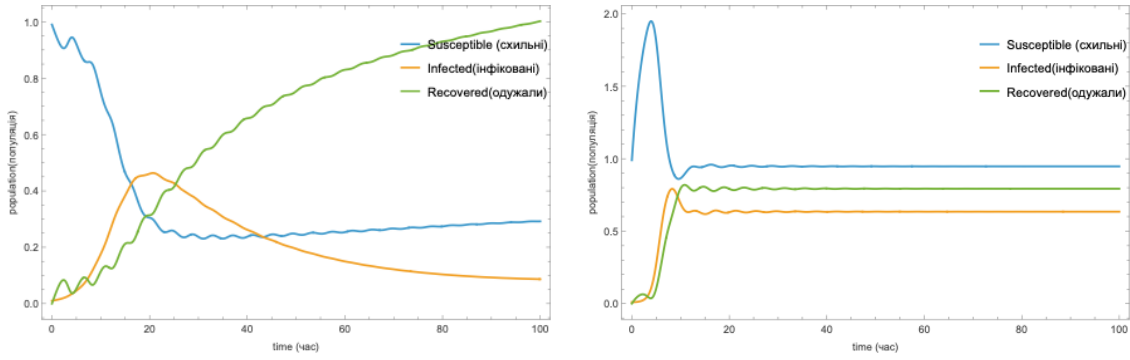


Рис. 4. Динаміка S, I, R із врахуванням $E(t)$. Параметри: $\beta = 0.5|0.95$, $\gamma_0 = 0.15|0.5$, $\gamma_1 = 1|0.7$, $\varepsilon = 0.06|0.2$, $\alpha = 0.1$, $b = 0.005$, $\mu = 0.001$, $r = 1.5$

Якщо $r\Delta = 2 > \pi/2$, то стійкість стану рівноваги $E = K$ втрачається і розв'язок $E(t)$ має коливний характер. Такий вплив екологічного фактору $E(t)$ призводить до періодичної зміни розв'язку моделі(7), (9), (11).

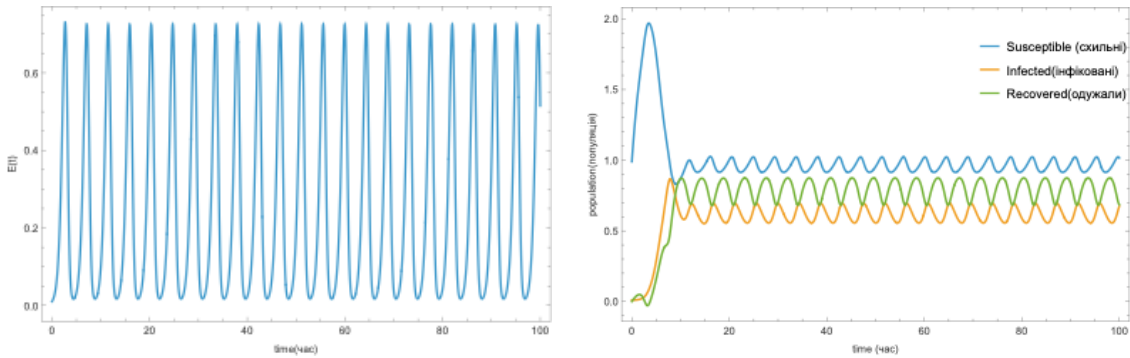


Рис. 5. Графіки розв'язків S, I, R із врахуванням коливної динаміки фактору $E(t)$. Параметри:

$$\beta = 0.95, \gamma_0 = 0.5, \gamma_1 = 0.7, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0, b = 0.95, \mu = 0.4, r = 2$$

8. Висновки.

Отже, як аналітичні дослідження, так і комп'ютерне моделювання підтверджують вплив екологічного фактору на перебіг епідемії. Зокрема, на існування і значення станів рівноваги, їх стійкість, появу коливань чисельності груп населення, схильних до інфікування, інфікованих і тих, що одужали. Ще одним фактором, як впливає з умов теореми 4, на перебіг епідемії впливає втрата імунітету особами, які перехворіли. Зменшити такий вплив можна зменшивши коефіцієнт α , що можливо, зокрема, при проведенні вакцинації і набуття стійкого імунітету.

Список використаної літератури

1. Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer: New York–Heidelberg–Dordrecht–London.
2. Brauer, F., van den Driessche, P., & Wu, J. (2008). *Mathematical Epidemiology*. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg.
3. Arino, O., Hbid, M. L., & Ait, E. (2006). *Delay Differential Equations and Applications*. Springer.
4. Ma, Z., & Li, J. (2009). *Dynamical modeling and analysis of epidemics*. World Scientific Publishing Co: Singapore.
5. Cooke, K., van den Driessche, P., & Zou, X. (1999). Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. *Journal of Mathematical Biology*, 39, 332–352.
6. Foryś, U. (2012). Problems with modelling using delay differential equations. *Scientific Bulletin of Chernivtsi National University. Mathematics*, 2(2–3), 164–169.
7. Foryś, U. (2000). Modele matematyczne w epidemiologii i immunologii. *Matematyka stosowana*, 1(42), 35–67.
8. Beretta, E., & Takeuchi, Y. (1995). Global stability of an SIR epidemic model with time delays. *Journal of Mathematical Biology*, 33(3), 250–260.
9. Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). Contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Statistical Society A*, 115, 700–721.
10. Smith, H. (2011). *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer Science+Business Media.
11. Bihun, Y., Ukrainets, O. (2024). Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*, 18(2), 7–17.
12. Stiefs, D., Venturino, E., & Feude, U. (2009). Evidence of chaos in eco-epidemic models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 6(4), 855–871.
13. Galvani, A. P. (2003). Epidemiology meets evolutionary ecology. *Trends in Ecology and Evolution*, 18(3), 132–139.
14. Driver, R. D. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer: New York–Heidelberg–Dordrecht–Berlin.
15. Hale, J. K., & Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer: New York.

Bihun Y. Y., Ukrainets O. Z. Mathematical modeling of the spread of the epidemic with the environmental factor.

The study proposes a mathematical model of epidemic spread that accounts for environmental pollution, which may exacerbate the negative impact on the course of the epidemic. The model is based on the well-known SIR framework, extended to incorporate an integral ecological factor $E(t)$, as well as population birth and mortality rates. The dynamics of the susceptible population depend on the deviation of the pollution level from a certain permissible threshold K and on the loss of immunity to the disease after a time period $\tau > 0$. The proportion of infected individuals increases with the growth of the quantity $E(t) - K$. The existence and non-negativity of solutions to the model for $t > 0$ are established, and equilibrium states along with their conditions of existence are identified. Stability conditions for the epidemic-free and epidemic states are derived. Finally, the dynamics of the proposed model is analyzed through computer simulations.

Keywords: Epidemic, mathematical model, time delay, steady-state solution, stability of solutions, differential-functional equations, population, computer simulation

Одержано 02.09.2025

УДК 004.65

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).136-147](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).136-147)**М. І. Глебена¹, О. В. Корник², О. В. Глебена³, В. В. Чубирка⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
oleksandr.kornyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0170-2309>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи
oleksandr.hlebena1@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2962-920X>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
viktor.chubyrka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7556-6118>

РОЗРОБКА СТРАТЕГІЙ ВІДМОВОСТІЙКОГО ЗАВАНТАЖЕННЯ ДАНИХ ДЛЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ НОВОГО ПОКОЛІННЯ

У статті представлено системний підхід до реалізації механізмів відмовостійкого завантаження даних в інформаційних системах, що інтегруються із зовнішніми сервісами, зокрема з ЄДЕБО через REST API. Проаналізовано ключові виклики, серед яких мережеві збої, обмеження кількості запитів, непередбачувані помилки зовнішніх серверів та проблеми цілісності даних. Запропонована архітектура ґрунтується на використанні Laravel Framework і включає модульну організацію процесів через консольні команди, механізми повторних спроб для обробки тимчасових помилок, транзакційну модель бази даних для забезпечення узгодженості інформації та комплексне логування з подальшим моніторингом у реальному часі. Окрему увагу приділено важливості регулярного тестування та впровадженню циклу зворотного зв'язку, що сприяє постійному вдосконаленню системи. Практична реалізація довела, що запропонований підхід не лише підвищує надійність та стійкість процесів завантаження, але й формує основу для масштабованості й адаптивності інформаційної системи в умовах зростання вимог до обробки даних та динамічних змін інформаційного середовища. Таким чином, відмовостійкість розглядається не як разове рішення, а як фундаментальний принцип розроблення сучасних інформаційних систем.

Ключові слова: відмовостійкість, великі дані, завантаження даних, інформаційні системи, REST API, Laravel Framework, транзакційна модель, логування, моніторинг, ЄДЕБО.

1. Вступ. У сучасному інформаційному суспільстві дані виступають одним із найцінніших ресурсів, що визначають ефективність функціонування цифрових систем і сервісів. Зростання обсягів та різноманітності джерел даних, зокрема зовнішніх (REST API та інші), актуалізує проблему організації надійного процесу їх завантаження. Водночас цей процес супроводжується низкою технічних і методологічних викликів, серед яких — забезпечення цілісності, достовірності та безперервності обробки інформації. Особливе значення у цьому

контексті має концепція відмовостійкого завантаження даних, яка передбачає здатність системи до коректної реакції на можливі помилки та збої без втрати продуктивності й коректності результатів. У даній статті здійснюється аналіз підходів до реалізації відмовостійких механізмів завантаження даних та їх практичного застосування в умовах сучасних інформаційних систем. Актуальність досліджуваної проблематики зумовлена стрімким зростанням обсягів даних та необхідністю їх оперативної інтеграції з різноманітних джерел у сучасних інформаційних системах. Використання зовнішніх сервісів, зокрема REST API, є невід'ємною частиною багатьох цифрових застосунків, однак воно супроводжується ризиками виникнення збоїв, втрати даних чи порушення їхньої цілісності. Проблема полягає в тому, що традиційні методи завантаження даних не завжди здатні забезпечити коректну обробку помилок і відновлення після збоїв, що може призвести до втрати важливої інформації або порушення цілісності даних. Це зумовлює потребу у впровадженні механізмів відмовостійкості, які дають змогу мінімізувати наслідки технічних збоїв та гарантувати стабільність роботи системи. Відповідно, завданням даного дослідження є аналіз сучасних підходів до організації відмовостійкого завантаження даних, визначення їхніх переваг і обмежень, а також окреслення напрямів удосконалення процесу інтеграції даних у сучасних інформаційних системах.

Саме це визначає важливість і практичну значущість розглядуваної теми.

2. Основний результат.

Завантаження даних: концепції та проблеми. Завантаження даних є фундаментальним процесом в інформаційних системах, що передбачає вилучення, трансформацію та завантаження (ETL — Extraction, Transformation, Loading) інформації з різних джерел у цільову систему чи базу даних [1]. Цей процес забезпечує основу для прийняття рішень на базі даних та ефективного функціонування цифрових застосунків.

У ході завантаження виникає низка проблем, зумовлених властивостями самих даних:

- різноманітність форматів (структуровані, напівструктуровані, неструктуровані) ускладнює стандартизацію та інтеграцію;
- значний обсяг даних вимагає масштабованих рішень. Важливим фактором виступає і швидкість передавання (data velocity), адже сучасні системи орієнтуються на обробку інформації в реальному часі.

Не менш критичною є якість даних, яка визначає їхню точність, узгодженість та повноту.

Сучасні інформаційні системи використовують кілька підходів до завантаження даних:

- **пакетна обробка** передбачає завантаження даних через визначені проміжки часу. Це зручне рішення для систем, де не критична миттєва обробка, однак воно не відповідає потребам додатків реального часу [2];
- **потоківна обробка** базується на безперервному отриманні даних (Apache Kafka, Apache Flink). Вона забезпечує високу оперативність, проте створює труднощі для забезпечення відмовостійкості [3];
- **ETL-інструменти** (комерційні або з відкритим кодом) автоматизують процес інтеграції та зменшують складність розробки [4];

- **інтеграція з API** дає змогу отримувати дані безпосередньо зі сторонніх джерел, але потребує особливої уваги до надійності та обробки помилок [5].

Таблиця 1.

Порівняння підходів до завантаження даних

Критерій	Пакетне завантаження (Batch)	Потокове завантаження (Streaming)
Обсяг даних	Підходить для великих масивів, що накопичуються з часом	Оптимальне для безперервних потоків у реальному часі
Частота оновлення	Дані оновлюються періодично (щогодини, щодня, щотижня)	Дані надходять та обробляються миттєво
Затримка (latency)	Висока — від хвилин до годин	Низька — від мілісекунд до секунд
Надійність	Простішою є обробка помилок (повторне завантаження пакету)	Потребує складних механізмів обробки збоїв у режимі онлайн
Архітектура	Часто монолітна, з ETL-процесами	Ґрунтується на мікросервісах та потокових технологіях (Kafka, Flink)
Ресурси	Високе навантаження у моменти запуску завантаження	Рівномірний розподіл навантаження у часі
Типові сценарії	Аналітика, звітність, міграція даних	Онлайн-аналітика, моніторинг, фінансові транзакції

Надійність системи визначається її здатністю забезпечувати цілісність та доступність даних навіть у разі збоїв. Серед ключових механізмів відмовостійкості можна виокремити:

- **механізм повторних спроб** (retry), що дозволяє автоматично відновлювати процес після збоїв, хоча надмірна кількість спроб може перевантажити систему [6];
- **контрольні точки**, які фіксують прогрес і дають змогу відновити процес без повторної обробки всіх даних;
- **перевірку цілісності даних** до та після завантаження;
- **резервування джерел і процесів**, що створює додаткові шляхи для збереження даних;
- **транзакційні механізми** баз даних, які гарантують узгодженість і можливість відкату;
- **системи моніторингу та оповіщення**, що виявляють аномалії в режимі реального часу.

Традиційний процес ETL передбачає три етапи [4]:

- **вилучення** даних із різних джерел (бази даних, файли, API);
- **трансформація** шляхом очищення, нормалізації та узгодження з цільовою структурою;
- **завантаження** у базу чи сховище даних.

Концепції відмовостійкості. Відмовостійкість розглядається як здатність інформаційної системи зберігати працездатність навіть у разі виникнення несправностей різного рівня критичності. Вона є фундаментальним принципом

побудови сучасних застосунків і сервісів, що працюють з великими обсягами даних та інтегрують численні зовнішні джерела. Основні поняття у цьому контексті включають [6]:

- **несправність** — відхилення від нормального стану апаратного чи програмного компонента;
- **відмова** — наслідок несправності, який призводить до зупинки системи, втрати даних або порушення доступності сервісу;
- **резервування** — дублювання критично важливих компонентів (серверів, баз даних, мережевих елементів), що дає змогу уникнути простою в разі відмови основних;
- **стійкість** — здатність системи відновлюватися після збоїв без втрати продуктивності та з мінімальними витратами часу.

Відмовостійкість безпосередньо впливає на якість сервісів, рівень довіри користувачів і конкурентоспроможність системи на ринку.

Роль API у завантаженні даних. API є ключовим інструментом для інтеграції даних із зовнішніх джерел, оскільки забезпечує стандартизований механізм взаємодії між системами. Для надійного та безпечного використання API необхідно врахувати такі аспекти [7]:

- **безпечна автентифікація** (API keys, OAuth, JWT), що захищає доступ до даних від несанкціонованого використання;
- **контроль частоти запитів** (rate limiting), який запобігає перевантаженню сервісу й блокує потенційні атаки;
- **ефективна обробка помилок** (HTTP-статуси, детальні повідомлення-відповіді), що дозволяє системі відновлюватися після збоїв без втрати даних та контролювати повторні запити.

Важливим є також використання механізмів логування та моніторингу для виявлення проблем у процесі інтеграції даних.

Фактори вибору підходу до завантаження. Вибір оптимальної стратегії завантаження даних залежить від сукупності факторів:

- **обсяг і швидкість даних** — великі потоки потребують потокових технологій (streaming), тоді як невеликі обсяги можуть завантажуватися пакетно;
- **затримки (latency)** — для критичних застосунків важлива мінімальна затримка, що зумовлює використання асинхронних методів;
- **характеристики джерела** — обмеження API, стабільність підключення, формат даних;
- **масштабованість** — здатність системи адаптуватися до зростання навантаження;
- **рівень відмовостійкості** — вимоги до безперервності процесів і допустимого часу відновлення.

Для високонавантажених систем у реальному часі доцільно застосовувати потокову обробку та мікросервісну архітектуру, тоді як у менш критичних сценаріях ефективними залишаються пакетні методи завантаження.

Отже, теоретична база, що охоплює концепції ETL-процесів, принципи відмовостійкості та роль API у завантаженні даних, створює підґрунтя для подальшого вивчення практичних аспектів. Її застосування дозволяє:

- усвідомити необхідність забезпечення безперервності та надійності процесів інтеграції;
- визначити ключові ризики й фактори, що впливають на стабільність роботи системи;
- сформулювати критерії вибору технологічних рішень відповідно до потреб конкретного застосунку.

Таким чином, розуміння специфіки завантаження даних та механізмів відмовостійкості виступає основою для розроблення ефективних стратегій інтеграції у сучасних інформаційних системах, які функціонують у динамічному середовищі та повинні гарантувати високий рівень надійності.

Механізми відмовостійкості. Відмовостійкість є одним із ключових аспектів завантаження даних, адже саме вона гарантує збереження цілісності та доступності інформації навіть за умов виникнення збоїв чи помилок. У цьому контексті застосовуються різні стратегії, які дають змогу мінімізувати ризики та забезпечити надійність процесів інтеграції.

Одним із базових підходів є механізми повторних спроб [8]. Автоматичне повторення операцій дозволяє компенсувати тимчасові збої, наприклад у мережних з'єднаннях. Для запобігання надмірному навантаженню на вихідні системи використовуються стратегії експоненціального відставання, які поступово збільшують час очікування між спробами. Водночас важливим обмеженням є встановлення максимальної кількості спроб, що унеможливорює нескінченні цикли повторень і дозволяє вчасно залучати ручне втручання. На рис. 1 показано алгоритм схеми механізмів повторних спроб.

Значну роль у відновленні процесів відіграють контрольні точки [9] та журнали повторного виконання. Збереження стану завантаження у визначені моменти часу забезпечує можливість відновлення з останнього відомого етапу, а журнали повторного виконання дозволяють відтворювати дії системи для мінімізації втрат даних.

Транзакції відіграють ключову роль у забезпеченні узгодженості та надійності даних. Одним із базових підходів у цій сфері є **ACID-транзакції**, що вважаються фундаментальним принципом у сучасних системах керування базами даних. Абревіатура **ACID** розшифровується як *Atomicity* (атомарність), *Consistency* (узгодженість), *Isolation* (ізоляція) та *Durability* (стійкість).

- **Атомарність** гарантує, що транзакція виконується цілком: або всі її операції реалізуються, або жодна з них.
- **Узгодженість** забезпечує збереження інтегральності бази даних, не допускаючи переходу системи у некоректний стан.
- **Ізоляція** запобігає взаємному впливу паралельних транзакцій, дозволяючи уникнути конфліктів і збоїв.
- **Стойкість** означає, що результати завершеної транзакції зберігаються навіть у випадку системних відмов чи збоїв.

Завдяки цим властивостям ACID-транзакції створюють основу для стабільної та послідовної роботи інформаційних систем, що особливо важливо у складних і критичних застосуваннях [10]. Механізми «відкату» дозволяють скасувати зміни, зроблені після останньої успішної транзакції чи контрольної точки.

Крім цього, у практиці широко застосовуються механізми резервування, серед яких гарячий резерв, що забезпечує безперервне перемикання на дублюючу

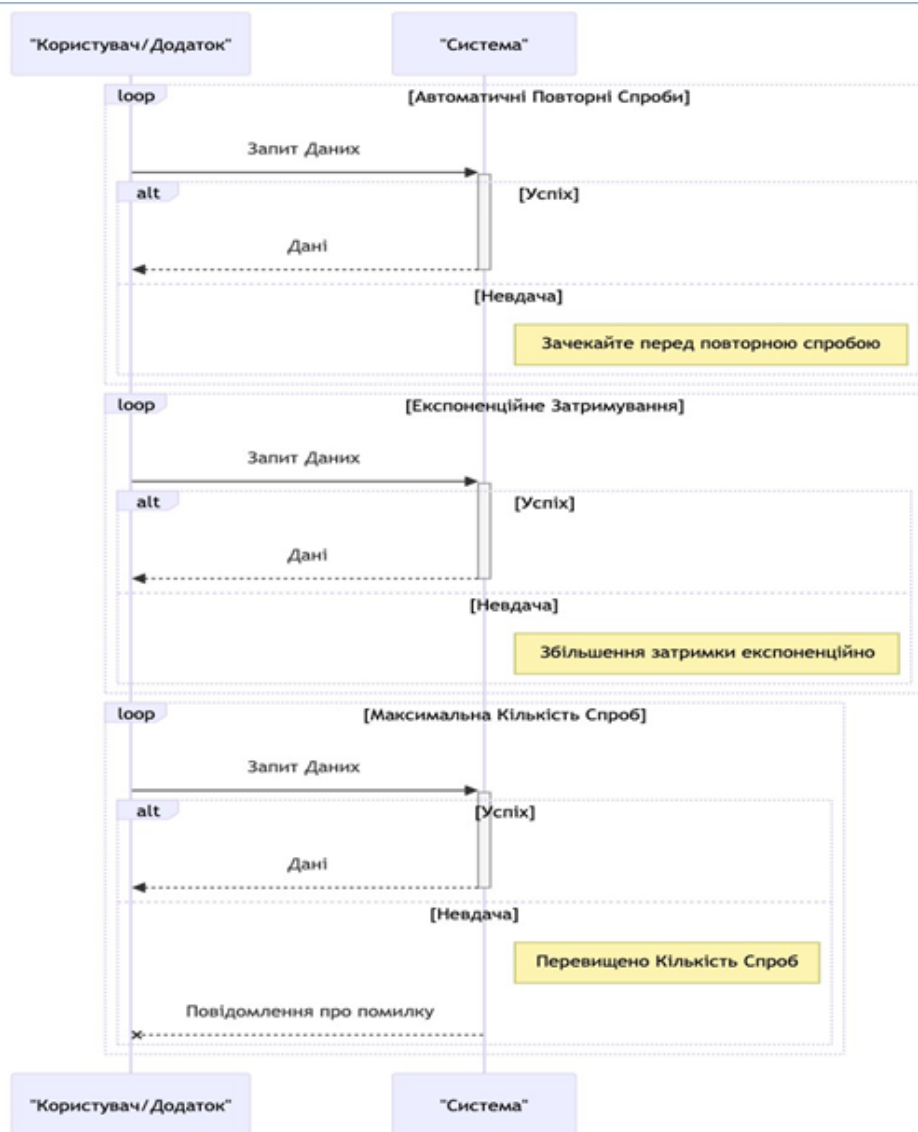


Рис. 1. Механізм повторних спроб.

систему, та реплікація даних, яка зберігає їх копії на різних серверах чи локаціях.

Важливим елементом сучасних рішень є моніторинг і система оповіщень. Вони дозволяють у реальному часі відстежувати роботу системи, виявляти аномалії та потенційні проблеми, ідентифікувати «вузькі» місця, прогнозувати ризики та своєчасно реагувати на збої. Моніторинг сприяє не лише швидкому відновленню працездатності, а й запобіганню майбутнім проблемам за рахунок аналізу трендів і формування рекомендацій щодо оптимізації.

Узагальнюючи, різні механізми відмовостійкості формують комплекс заходів, спрямованих на забезпечення стабільності та безперервності завантаження даних. Їх поєднання дозволяє досягти високого рівня надійності та мінімізувати ризики втрати або пошкодження інформації.

Реалізація завантаження даних з ЄДЕБО REST API. Розглянемо практичний підхід до реалізації процесу завантаження даних з Єдиної держав-

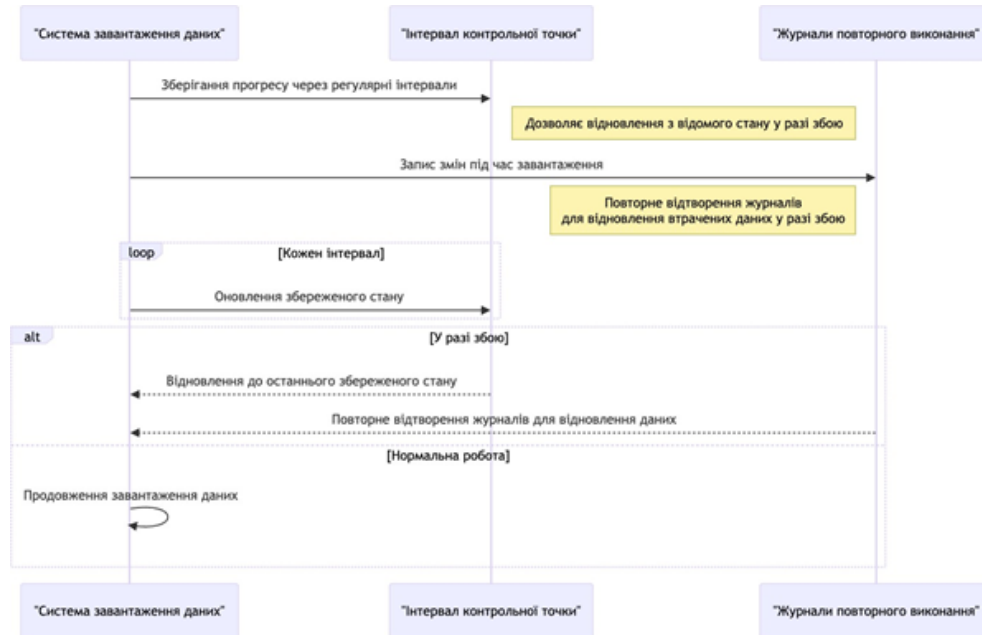


Рис. 2. Механізм журналу повторного виконання.

ної електронної бази з питань освіти (ЄДЕБО) через REST API. Основну увагу приділено забезпеченню відмовостійкості, що є ключовим чинником для збереження цілісності та доступності даних.

ЄДЕБО REST API забезпечує інтеграцію з центральною освітньою базою України, надаючи інструменти для обміну даними щодо студентів, закладів освіти, освітніх програм і пов'язаних процесів. Основні можливості API охоплюють:

- **PhysPerson** — управління персональними даними, документами та вступними заявами абітурієнтів;
- **University** — доступ до інформації про заклади освіти, їхні структурні підрозділи та кадровий склад;
- **Dictionary** — словники та довідкові дані (країни, типи документів, категорії осіб, професії тощо);
- **UniversityStudyProgram** — управління освітніми програмами закладів;
- **UniversitySpecialization** — створення та редагування спеціалізацій;
- **StudentEducations** — робота з академічною історією студентів;
- **PersonPrivilege** — управління даними про осіб із пільгами;
- **EduPrograms** — відомості про програми та спеціалізації;
- **Auth** — автентифікація та управління користувачами.

Таким чином, API виступає центральним інструментом для автоматизованого обміну освітніми даними та підтримки процесів вступу й навчання.

Реалізація компонента завантаження даних. Під час інтеграції із ЄДЕБО REST API виникає задача забезпечення відмовостійкого завантаження даних, що є критично важливим для підтримання стабільності та цілісності освітніх інформаційних систем. У процесі проєктування необхідно врахувати потенційні проблеми, зокрема мережеві збої, обмежену доступність серверних

ресурсів, а також неочікувані помилки, що можуть виникати під час обробки отриманих даних.

Для вирішення поставленої задачі необхідно розробити програмний компонент, що відповідає за комунікацію із REST API. Даний компонент реалізує виклики до різних методів API, охоплює можливі сценарії виникнення збоїв, а також здійснює попередню обробку та конвертацію даних у формат, придатний для подальшого використання. Такий підхід дозволяє ізолювати логіку роботи з API від інших частин системи та підвищує загальний рівень відмовостійкості.

Розробку компонента рекомендовано виконувати мовою програмування PHP 8.1, що забезпечить високу продуктивність та сумісність із сучасними серверними середовищами. Для забезпечення інтеграції та подальшого використання розроблений компонент публікується через менеджер пакетів Composer, що є стандартним інструментом керування залежностями в екосистемі PHP та гарантує зручність його встановлення й оновлення. На рис. 3 зображено схему архітектури компонента завантаження даних із ЄДЕБО REST API у вигляді діаграми.

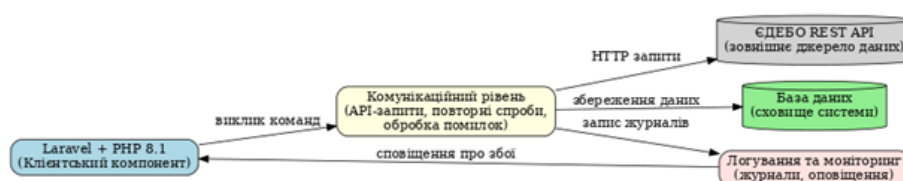


Рис. 3. Архітектура компонента завантаження даних.

Таким чином, створений компонент виконує роль проміжного рівня комунікації із зовнішнім сервісом ЄДЕБО, забезпечуючи захищений та стабільний механізм завантаження даних. Це формує основу для подальшої інтеграції та обробки освітніх відомостей у рамках інформаційних систем, орієнтованих на високий рівень надійності та безперервності роботи.

Відмовостійка архітектура завантаження даних із ЄДЕБО: виклики та рішення. У процесі інтеграції з ЄДЕБО REST API постає низка викликів, які безпосередньо впливають на надійність і стабільність завантаження даних. Одним із ключових чинників є мережеві збої, що можуть призвести як до відмови у виконанні запитів, так і до значного зниження швидкості обробки відповідей. Додатковою проблемою виступають непередбачувані помилки на стороні серверів ЄДЕБО, включно з їхньою тимчасовою недоступністю чи відмовою в опрацюванні запитів. Важливим обмеженням є також політика контролю кількості запитів, яка у разі перевищення встановлених лімітів здатна заблокувати доступ до API на певний проміжок часу. Окрему категорію ризиків становлять помилки валідації даних, які можуть виникати як на етапі їхнього надсилання до API, так і під час отримання відповіді, що призводить до некоректного функціонування процесу завантаження.

У цьому контексті особливої ваги набуває поняття відмовостійкості, яке розглядається як здатність системи зберігати працездатність навіть у випадку збоїв, помилок чи інших непередбачуваних ситуацій. Для процесів завантаження даних це означає необхідність впровадження стратегій і механізмів, що забезпечують коректне відновлення після відмов, мінімізацію втрат інформації та

гарантію завершення процесу відповідно до визначених вимог. Саме реалізація відмовостійкості виступає фундаментальною передумовою побудови ефективних інформаційних систем, здатних функціонувати у динамічному середовищі з високими вимогами до безперервності й надійності обробки даних.

Для забезпечення відмовостійкості процесу завантаження даних з ЄДЕБО потрібно врахувати низку критично важливих аспектів архітектурного проектування. Одним із ключових рішень є використання консольних команд у межах Laravel Framework (зокрема, `edbo:load-dictionaries`, `edbo:load-students`), що дозволить реалізувати модульний підхід до організації процесів. Подібна інкапсуляція окремих завдань у вигляді команд відповідає сучасним принципам побудови надійних інформаційних систем, оскільки забезпечує чітке розмежування функціональності, спрощує налагодження та знижує ймовірність поширення помилок між різними компонентами системи.

Важливим елементом архітектури є впровадження механізму автоматизованого планування завантажень, що передбачає виконання процесів у заздалегідь визначений час доби. Такий підхід відповідає концепціям регулярності та передбачуваності обробки даних у розподілених системах (*fault-tolerant scheduling*) і забезпечує своєчасне оновлення інформації навіть у випадку виникнення тимчасових збоїв.

Окрему увагу потрібно приділяти системі логування, яка функціонує як інструмент забезпечення прозорості процесів та діагностики відмов. У ході виконання кожного завдання формується детальний журнал, що фіксує всі виняткові ситуації, а також метаінформацію про перебіг завантаження. Практика впровадження логування відповідає загальноновизнаним підходам до забезпечення надійності інформаційних систем, оскільки створює основу для подальшого аналізу збоїв, формування відновлювальних стратегій та підвищення рівня експлуатаційної готовності системи.

Таким чином, сукупність описаних рішень дозволить реалізувати архітектуру, що відповідає сучасним вимогам до відмовостійких програмних систем і сприяє підвищенню ефективності управління даними у контексті освітніх інформаційних платформ.

Механізми відмовостійкості у процесі завантаження даних з ЄДЕБО орієнтовані насамперед на обробку збоїв, що виникають унаслідок зовнішніх викликів API, оскільки саме ця складова визначає стабільність і цілісність усього процесу обміну інформацією. Виклики до API є критично важливими для підтримання актуальності даних, тому їх надійна обробка становить фундаментальний елемент архітектури системи.

Одним із ключових рішень у цьому контексті є впровадження надійного механізму перехоплення та обробки виняткових ситуацій безпосередньо у командах завантаження даних. Якщо під час виклику API виникає виняток (наприклад, `ApiException`), він не призводить до аварійного завершення виконання, а обробляється у контрольованій формі. Інформація про збій реєструється у відповідному журналі, а конкретний елемент даних, який не вдалося завантажити, позначається як невдалий. Такий підхід відповідає принципам *fault isolation*, коли помилка локалізується в межах одного завдання і не впливає на цілісність загального процесу.

Водночас реалізовано механізм повторних спроб (*retry policy*), що дає змогу

мінімізувати вплив тимчасових збоїв у роботі API. Якщо певний запит завершується невдачею, система виконує повторний виклик визначену кількість разів, перш ніж остаточно зафіксувати його як постійну помилку. Подібна стратегія відповідає концепції підвищення надійності через повторюваність транзакцій, яка широко використовується у високонавантажених інформаційних системах.

Окреме місце у забезпеченні відмовостійкості займає система логування. Для кожного виклику API формується детальний журнал, що включає дані HTTP-запиту та отриманої відповіді, а також метаінформацію про перебіг виконання. Ці журнали становлять важливу основу для подальшого аналізу та діагностики, оскільки дають змогу відстежити першопричини відмов і розробити стратегії для їх запобігання у майбутньому.

На додаток до збоїв, пов'язаних із викликами API, архітектура системи повинна передбачати механізми обробки відмов, що виникають на рівні бази даних. Одним із ключових інструментів забезпечення цілісності даних у цьому контексті є використання транзакцій. Усі команди завантаження даних виконуються в межах транзакційної моделі, що відповідає принципам ACID-парадигми (Atomicity, Consistency, Isolation, Durability) та забезпечує узгодженість даних навіть у випадку виникнення помилок.

Якщо під час виконання завантаження виникає помилка, транзакція автоматично відкочується, унеможливаючи часткове або некоректне збереження даних. Такий підхід гарантує збереження інваріантів бази даних і дозволяє уникнути порушення її структурної цілісності. У результаті відповідне завдання позначається як неуспішне, а процес завантаження даних повторюється, забезпечуючи повторну спробу їх коректного збереження. Це рішення відповідає сучасним практикам *fault-tolerant data loading*, коли система відновлюється від збоїв без втрати консистентності та без додаткового втручання з боку адміністратора.

Використання транзакцій у процесі завантаження даних не лише мінімізує ризики пошкодження інформації, а й забезпечує прозорість відновлення після збоїв. Завдяки цьому, навіть у разі повторних помилок на рівні API чи мережових взаємодій, база даних зберігає узгоджений стан, що є критично важливим для подальшого функціонування системи.

Ефективна система реєстрації журналів та моніторинг є невід'ємними складовими забезпечення відмовостійкості процесу завантаження даних. Реєстрація охоплює не лише фіксацію помилок, але й документування повної історії виконання завдань. Система повинна передбачати збереження детальної інформації про успішні сесії завантаження, що дозволить здійснювати ретроспективний аналіз і відстежувати динаміку роботи компонентів. Такі журнали виступають важливим джерелом даних для оцінки продуктивності та надійності механізмів інтеграції, а також допомагають виявляти приховані закономірності у процесах завантаження.

Поряд із веденням журналу, важливим елементом є моніторинг у реальному часі, спрямований на своєчасне виявлення збоїв і аномалій. У випадку виявлення критичних помилок чи затримок повинна спрацювати система оперативних сповіщень, що інформує відповідальних осіб або операційну команду. Завдяки цьому забезпечується мінімізація часу реагування та знижується ризик тривалого простою або накопичення помилок. Такий підхід підсилює надійність

системи загалом і формує основу для її стабільного функціонування у виробничих умовах.

Відмовостійкість не може розглядатися як одноразове впровадження чи статичне рішення; натомість вона є безперервним процесом удосконалення, який вимагає постійного моніторингу та адаптації. Одним із ключових аспектів цього процесу є регулярне тестування, що передбачає моделювання різноманітних сценаріїв відмов для перевірки коректності роботи захисних механізмів. Такий підхід дозволяє своєчасно виявляти потенційні вразливості та гарантувати, що система здатна зберігати працездатність навіть за умов несподіваних збоїв.

Не менш важливим є використання циклу зворотного зв'язку, що ґрунтується на результатах моніторингу, аналізі журналів і звітів про інциденти. Зібрана інформація виступає основою для прийняття рішень щодо оптимізації процесів та вдосконалення існуючих рішень. Завдяки ітеративному підходу команда розробників має змогу постійно підвищувати рівень відмовостійкості, адаптуючи систему до нових викликів та змін у середовищі її функціонування. Таким чином, відмовостійкість постає як динамічна характеристика інформаційної системи, яка підтримується завдяки циклічному процесу перевірки, аналізу й удосконалення.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Узагальнюючи результати, можна стверджувати, що впровадження механізмів відмовостійкості у процес завантаження даних до інформаційної системи є ключовим чинником забезпечення її надійності та безперервності роботи. Практична реалізація на базі Laravel Framework засвідчує, що ефективне використання консольних команд, механізмів повторних спроб та транзакційної моделі дозволяє не лише гарантувати цілісність даних, але й мінімізувати вплив мережевих збоїв і помилок API.

Детальне логування та моніторинг створюють умови для прозорості процесів і формують основу для зворотного зв'язку, що забезпечує ітеративне вдосконалення архітектури системи. Таким чином, відмовостійкість постає не як разова функціональна можливість, а як постійний процес оптимізації, інтегрований у життєвий цикл системи.

У підсумку, застосовані підходи демонструють, що використання сучасних шаблонів проектування дає змогу сформулювати відмовостійке рішення, здатне до масштабування й адаптації, що є вирішальним для довгострокової стабільності інформаційних систем в умовах динамічного середовища.

Список використаної літератури

1. TechTarget. (n.d.). 5 Vs of Big Data. Retrieved from <https://www.techtarget.com/searchdatamanagement/definition/5-Vs-of-big-data>
2. Amazon Web Services. (n.d.). What is Batch Processing? Retrieved from <https://aws.amazon.com/what-is/batch-processing>
3. Wikipedia. (n.d.). Stream processing. Retrieved from https://en.wikipedia.org/wiki/Stream_processing
4. Skyvia. (n.d.). What Is Batch ETL Processing? The Only Guide You Need. Retrieved from <https://blog.skyvia.com/batch-etl-processing>
5. Skyvia. (n.d.). What is API Integration. Retrieved from <https://blog.skyvia.com/batch-etl-processing>
6. Abrkljac. (n.d.). Building a Resilient Data Infrastructure: Best Practices for Fault-Tolerant Systems. *Medium*. Retrieved from <https://abrkljac.medium.com/building-a-resilient-data-infrastructure-best->

- practices-for-fault-tolerant-systems-562587e136a
7. Acode. (n.d.). What is an API and how does it work? Retrieved from <https://acode.com.ua/what-is-api> [in Ukrainian].
 8. Code Curated. (n.d.). Designing a Retry Mechanism For Reliable Systems. Retrieved from <https://codecurated.com/blog/designing-a-retry-mechanism-for-reliable-systems>
 9. Amazon Web Services. (n.d.). Build an incremental data load solution using AWS DMS checkpoints and database logs. Retrieved from <https://aws.amazon.com/blogs/database/build-an-incremental-data-load-solution-using-aws-dms-checkpoints-and-database-logs>
 10. Wikipedia. (n.d.). ACID. Retrieved from <https://en.wikipedia.org/wiki/ACID>

Hlebena M. I., Kornyk O. V., Hlebena O. V., Chubyrka V. V. Development of strategies for failure-resilient data loading for new-generation information systems.

The article presents a systematic approach to implementing fault-tolerant data loading mechanisms in information systems that integrate with external services, in particular with EDEBO via REST API. Key challenges are analysed, including network failures, request limits, unpredictable external server errors, and data integrity issues. The proposed architecture is based on the use of the Laravel Framework and includes modular organisation of processes through console commands, retry mechanisms for handling temporary errors, a transactional database model to ensure information consistency, and comprehensive logging with subsequent real-time monitoring. Particular attention is paid to the importance of regular testing and the implementation of a feedback cycle, which contributes to the continuous improvement of the system. Practical implementation has proven that the proposed approach not only increases the reliability and stability of loading processes, but also forms the basis for the scalability and adaptability of the information system in the context of growing data processing requirements and dynamic changes in the information environment. Thus, fault tolerance is considered not as a one-time solution, but as a fundamental principle of modern information system development.

Keywords: fault tolerance, Big Data, data loading, information systems, REST API, Laravel Framework, transactional model, logging, monitoring, EDEBO.

Одержано 15.09.2025

УДК 004.416.6:004.855

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).148-167](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).148-167)**О. Г. Когуч¹, Я. М. Матвійчук²**

¹ Національний університет «Львівська політехніка»,
аспірант кафедри Систем штучного інтелекту ІКНІ
oksana.h.kohuch@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-6861-8082>

² Національний університет «Львівська політехніка»,
професор кафедри Систем штучного інтелекту ІКНІ,
доктор технічних наук
yaroslav.m.matviychuk@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5570-182X>

МЕТОДИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ В МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРОГРАМНИХ КОМПОНЕНТІВ КОМПЛЕКСНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Значна кількість сучасних державних і приватних організацій використовують інформаційні системи, побудовані на основі технологій попередніх поколінь, із застосуванням програмних компонентів, створених ще десятки років тому. Такі системи є критично важливими для функціонування бізнесу, однак їхнє оновлення й підтримка вимагають значних людських, часових та фінансових ресурсів, а традиційні підходи до модернізації в більшості випадків виявляються надмірно тривалими, складними для управління та пов'язаними з високим рівнем ризиків. Це зумовлює потребу у нових технологічних підходах, здатних зменшити вартість та пришвидшити процес трансформації без втрати надійності.

Методи машинного навчання (ML) постають як перспективний інструмент, здатний частково автоматизувати ключові етапи модернізації програмних систем. У статті систематизовано сучасні напрями їх застосування: від діагностики технічного стану та виявлення прихованих залежностей у кодовій базі до автоматизованого переписування окремих модулів і тестування оновлених фрагментів. Особливу увагу приділено аналізу сильних сторін і наявних обмежень цих підходів, а також технологічних і практичних викликів, які супроводжують їх впровадження. Доведено, що результативність ML-рішень безпосередньо визначається масштабом системи та якістю доступних вихідних даних.

Робота ґрунтується на теоретичному аналізі та результатах практичного оцінювання ефективності використання ML. Окремий акцент зроблено на питаннях інтеграції подібних технологій у робочі процеси, адаптації команд програмістів до нової парадигми та перспективам подальших досліджень у цій сфері. Також розглядаються формалізовані метрики, що дають змогу об'єктивно оцінити успіх модернізації.

Дослідження демонструє, що комплексне поєднання сучасних ML-методів із перевіреними традиційними підходами зменшує витрати на підтримку застарілих систем і забезпечує поступовий перехід до сучасних архітектур за умови ретельного контролю ризиків та валідації результатів. Такий підхід може слугувати основою для масштабованої й сталої стратегії цифрової трансформації організацій.

Ключові слова: монолітні застарілі системи, модернізація монолітних систем, машинне навчання у модернізації систем, автоматизація програмної модернізації.

1. Вступ та постановка проблеми. Попри динамічний розвиток сучасних інформаційних технологій (ІТ), у багатьох стратегічно важливих галузях (фінансах, охороні здоров'я, державному управлінні та промисловості) все ще функціонують монолітні, застарілі інформаційні системи. Створені на основі технологій минулих десятиліть, ці рішення залишаються критично важливими для

діяльності організацій, хоча з технічного й архітектурного погляду давно втратили актуальність. Їм притаманні складна бізнес-логіка, тісна взаємозалежність компонентів, недостатня документація та визначальна роль у ключових бізнес-процесах. Потреба в їх модернізації є очевидною, проте реалізація цього процесу супроводжується численними технічними, організаційними та економічними викликами.

Традиційні підходи, зокрема ручний рефакторинг і повне переписування коду, мають обмежену масштабованість, потребують залучення висококваліфікованих фахівців, добре обізнаних зі старими технологіями, і пов'язані з високими ризиками порушення стабільності. Модернізацію додатково ускладнюють приховані залежності, застарілі архітектурні патерни, наявність анти-патернів, тривалі цикли тестування та нестача автоматизованих засобів перевірки якості.

У цьому контексті методи машинного навчання розглядаються як потенційно ефективний інструмент для часткової автоматизації окремих етапів оновлення систем. Зокрема, великі мовні моделі (LLM) і трансформери, доповнені доменними адаптерами та векторними поданнями коду, здатні точніше відображати специфіку застарілого програмного забезпечення. Графові нейронні мережі (GNN) показують перспективні, але переважно експериментальні результати у виявленні структурних залежностей та визначенні природних «ліній розрізу» між модулями. Seq2Seq-архітектури можуть забезпечити автоматичний переклад і переформатування фрагментів коду зі збереженням їхньої семантики, що є необхідним для подальшої міграції, проте їхня точність на великих (> 1 MLOC) модулях ще не підтверджена. Методи навчання з підкріпленням (RL) оптимізують генерацію тестів і верифікацію змін, однак поки застосовуються здебільшого на сервісах до 50-500 kLOC. У сукупності ці ML-рішення демонструють обнадійливі результати в задачах розпізнавання шаблонів, реконструкції архітектурної логіки, виявлення внутрішніх залежностей та автоматизованої генерації коду, але їхня ефективність на гігантських легасі-кодових базах лишається предметом подальших досліджень.

Водночас інтеграція ML-інструментів у практику модернізації створює низку процесно-організаційних викликів. Необхідно адаптувати чинні інженерні практики та робочі процеси до нової парадигми, в якій результати мають ймовірнісний характер, переглянути цикли прийняття рішень, критерії якості та механізми контролю змін, забезпечити безперервний моніторинг та пояснюваність ML-моделей у задачах модернізації, а також підтримувати прозорість і відтворюваність результатів, що є критично важливими для функціонування інформаційних систем.

Таким чином постає комплексна науково-практична задача: систематизувати й критично проаналізувати сучасні ML-підходи для модернізації інформаційних систем; оцінити їхній потенціал та обмеження на різних масштабах коду; сформулювати перевірні й відтворювані метрики успіху впровадження; і окреслити межі ефективного застосування в умовах реального функціонування різноманітних інформаційних середовищ. Розв'язання цієї задачі потребує глибокого вивчення наявних методів, публічних бенчмарків, та їхньої адаптації до специфіки застарілої програмно-організаційної інфраструктури.

Мета та завдання. Метою дослідження є комплексна систематизація та критичний аналіз сучасних методів машинного навчання в контексті їх застосу-

вання для модернізації компонентів великих монолітних інформаційних систем. Дослідження передбачає узагальнення підтверджених у літературі та промислових пілотах результатів щодо ефективності ML-підходів, оцінювання їхніх переваг і обмежень з урахуванням масштабованості ($\leq/\geq 1$ MLOC), інфраструктурних витрат і пояснюваності, виявлення наукових прогалин, зокрема нестачі відкритих бенчмарків для систем > 1 MLOC та неузгодженості метрик, формулювання перспективних напрямів подальших досліджень.

Наукова новизна. Проведене дослідження має теоретичну і прикладну значущість у контексті використання методів машинного навчання для модернізації програмних компонентів складних інформаційних систем. Наукова новизна дослідження визначається такими результатами:

- розроблено методологічну схему узгодження класів ML-моделей з етапами процесу модернізації (аналіз – трансформація – верифікація), що забезпечує системність результатів;
- проведено апробацію (пілотну оцінку) GraphCodeBERT, MonoEmbed-GNN, CodeT5+, CodeT5-DA та DeepREST-RL на великому кодовому репозиторії (≈ 850 kLOC), що дозволило оцінити їхню ефективність у завданнях виявлення технічного боргу, структурної декомпозиції, автоматизованого рефакторингу та тестування в контексті запропонованої методологічної схеми;
- запропоновано формалізований набір метрик (SES, Δ TD, Δ MTTR) для кількісного оцінювання результатів застосування ML-підходів у процесі модернізації програмного забезпечення;
- уточнено орієнтовні (не нормативні) діапазони метрик ефективності (SES = 0,15–0,45; Δ TD ≥ 10 %; Δ MTTR ≥ 10 %), які можуть бути використані як початкові орієнтири для оцінювання результативності ML-модернізацій у промислових умовах.

Отримані результати розширюють наукові уявлення про застосування методів машинного навчання у завданнях технічного оновлення складних інформаційних систем і формують підґрунтя для подальшої стандартизації підходів до оцінювання ефективності таких процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній науковій літературі модернізація програмного забезпечення все частіше розглядається крізь призму використання машинного навчання. Такий підхід демонструє потенціал у зниженні технічного боргу, підвищенні підтримуваності коду та спрощенні переходу до сучасних архітектур. Дослідження у цій галузі охоплюють чотири основні напрями застосування ML: виявлення архітектурних дефектів, декомпозиція монолітів, трансформація коду з урахуванням семантики та автоматизоване тестування [3, 5, 6]. У більшості праць ML-моделі розглядаються як засоби часткової автоматизації процесів модернізації.

У прикладних дослідженнях описано ефективність конкретних моделей у вирішенні окремих задач. Великі мовні моделі або трансформери застосовуються переважно для аналізу кодової бази, виявлення «запахів коду», дублювань і шаблонів проектування [4, 8, 10]. У свою чергу, графові нейронні мережі довели свою придатність у декомпозиції монолітних систем, зокрема шляхом класифікації залежностей і пошуку меж модулів [3, 7]. Seq2Seq-моделі, зокрема архітектури трансформерного типу, використовуються для автоматизованого переписування коду зі збереженням його семантики (через тести/специфікації),

що сприяє переходу до більш сучасних стилів реалізації [5]. Методи з підкріпленням застосовуються в задачах генерації тестів, де їхньою перевагою є здатність адаптуватися до особливостей потоку керування (control flow) й оптимізувати покриття. Водночас література фіксує і певні обмеження таких рішень. Серед них нестабільність результатів, помилки генерації коду, порушення семантики при трансформації та відсутність пояснень, що знижує довіру до результатів моделей. [1, 5].

Попри схожі результати, різні автори по-різному оцінюють масштабованість таких моделей: у [3] та [7] декомпозиція монолітів розглядається як цілком розв'язна задача, тоді як у [13] наголошено на низькій відтворюваності результатів у промислових умовах. Це свідчить про відсутність єдиної позиції щодо готовності ML-підходів до реального використання. Крім того, порівняння робіт [5] і [10] показує, що навіть для однакових типів архітектур (трансформерів) результати суттєво відрізняються залежно від домену коду, розміру корпусу та ступеня ручної пост-обробки. Наявні дослідження демонструють перспективність ML-рішень, але ще не підтверджують їх універсальності.

Окремо увага дослідників зосереджується на питаннях оцінки ефективності застосованих підходів. У ряді праць запропоновано формалізовані, але різноспрямовані метрики для оцінювання результатів модернізації, включно з оцінкою технічного боргу, модульності архітектури та стабільності змін [6, 12]. Проте наразі не існує єдиного підходу до визначення і валідації порогових значень таких метрик, що ускладнює порівняння результатів у різних дослідженнях. Це відображає ширшу проблему відсутності уніфікованої теоретичної основи для модернізації систем, що неодноразово підкреслювалася в концептуальних дослідженнях [9].

Додаткові виклики пов'язані з обмеженою масштабованістю сучасних моделей на великих кодових базах, відсутністю репрезентативних публічних датасетів і значними інфраструктурними витратами на обробку [8, 11, 13]. Серед інших практичних бар'єрів є виявлення структурних проблем, таких як повторювані фрагменти з однаковими наборами змінних у різних функціях, що важко ідентифікувати без аналізу ширшого контексту коду. У таких випадках ефективними є ML-рішення, які враховують проєктний рівень закономірностей, зокрема, каскадні підходи до виявлення й автоматичного рефакторингу [10]. У відповідь на це в окремих роботах пропонуються рішення, спрямовані на підвищення пояснюваності моделей, адаптацію до специфіки застарілого коду та створення відкритих еталонних бенчмарків. Такі ініціативи можуть стати основою для стабільної інтеграції ML-інструментів у практику модернізації складних програмних систем.

Таким чином, сучасна наукова література демонструє суттєвий прогрес у використанні ML-методів для модернізації ПЗ, але також виявляє низку невирішених проблем: від нестачі єдиних метрик і масштабованих бенчмарків до відсутності узгодженої концептуальної рамки для порівняння результатів різних досліджень. Це створює об'єктивне підґрунтя для подальших робіт, спрямованих на формування узгодженої теоретичної та методичної бази модернізації програмних систем.

Виклад основного матеріалу. Більшість великих компаній і державних установ у фінансовому, телекомунікаційному та промисловому секторах зали-

шається залежною від монолітних інформаційних систем, створених кілька десятиліть тому. Їхній програмний код спирається на застарілі бібліотеки, фрагментарні оновлення та численні ручні модифікації, що істотно ускладнює забезпечення стабільності, масштабованості та подальшого розвитку таких систем. Технічна документація переважно неповна або втратила актуальність, що створює додаткові труднощі під час модернізації, тестування та інтеграції з сучасними технологічними платформами. Унаслідок цього знижується ефективність упровадження інноваційних методів розроблення програмного забезпечення та переходу до сучасних архітектурних підходів.

2. Характеристика проблемного поля. З часом в інформаційній системі накопичився значний технічний борг: численні «запахи коду» (наприклад, надмірно великі класи чи дублювання функціоналу) ускладнюють внесення змін, роблячи їх трудомісткими та ризикованими. Монолітна архітектура створює щільні міжмодульні залежності, тому модифікація окремого компонента може призвести до збоїв у роботі цілих підсистем, а кожен новий реліз вимагає високоякісного регресійного тестування. Це узгоджується з висновками [1], де підкреслено, що глибокі історичні шари коду значно ускладнюють його підтримку і унеможливають швидке оновлення за допомогою ручних методів рефакторингу. Додаткову складність створює кадровий чинник: первинні розробники вже покинули компанію, а новим спеціалістам потрібні тривалі періоди адаптації для розуміння кодової бази. Окрім цього, застаріла архітектура перешкоджає масштабуванню та ускладнює забезпечення безпеки.

Існує низка відомих стратегій модернізації, проте кожна має відчутні обмеження. Повне переписування системи («Big-Bang Rewrite») теоретично дозволяє реалізувати сучасну архітектуру, однак вимагає багаторічних інвестицій і створює ризик тимчасового паралічу бізнес-процесів у період до запуску нової версії. Поступовий підхід за шаблоном «Strangler Fig» знижує ризики завдяки етапному винесенню функціональності у мікросервіси, однак вимагає трудомісткого аналізу меж сервісів, написання тестів і забезпечення сумісності. Як зазначено в [2], ефективна декомпозиція в мікросервіси можлива лише за наявності чіткої інтерпретації меж сервісів, що стає складним без автоматизованих інструментів аналізу коду та залежностей. Традиційний ручний рефакторинг залежить від обмеженої кількості експертів, яким складно гарантувати сталість стандартів якості та відслідковувати вплив змін на архітектуру. Ці обмеження також висвітлено в [13], де наголошується, що масштабні рефакторингові проекти без підтримки автоматизованих засобів практично некеровані в умовах складної архітектури. У підсумку, такі підходи виявляються недостатньо масштабованими для систем, що охоплюють сотні тисяч або мільйони рядків коду, і тому зростає потреба в автоматизованих засобах, здатних зменшити навантаження на людські ресурси.

Методи машинного навчання пропонують ефективні засоби підтримки модернізації в кількох критичних напрямках. Кодові трансформер-моделі (наприклад, CodeBERT чи GraphCodeBERT), доповнені доменними адаптерами, дозволяють ідентифікувати архітектурні патерни та зони технічного боргу, формуючи пріоритетні списки для рефакторингу. За результатами останніх досліджень точність виявлення «запахів коду» зростає на 10–15% для репозиторіїв < 300 kLOC, але ефективність на базах > 1 MLOC поки не доведена. Графові

нейронні мережі (GNN), як-от MonoEmbed-GNN, аналізують структуру коду та пропонують природні межі декомпозиції у мікросервіси, проте поки їх випробувано лише на проєктах до 200 kLOC. Seq2Seq-моделі, наприклад CodeT5+ та CodeT5-DA, трансформують код у сучасні стилі або інші мови програмування, зберігаючи семантичну точність на функціях до 200 рядків. Методи навчання з підкріпленням (RL), такі як DeepREST, автоматично генерують тести, підвищуючи покриття на 15–18 % у невеликих сервісах. У сукупності ці інструменти охоплюють повний цикл модернізації (від діагностики до трансформації та верифікації) й можуть суттєво зменшити тягар на команду розробки, але потребують масштабних реплікацій, щоб підтвердити стійкість результатів у промислових умовах. Систематизований огляд таких рішень у [6] підтверджує їх доцільність для архітектурної трансформації у ряді промислових сценаріїв, але з істотними застереженнями щодо масштабу та домену.

Втім, інтеграція ML-рішень не позбавлена складнощів. LLM-моделі можуть генерувати некоректний або нефункціональний код особливо за наявності доменного зсуву чи дефіциту якісних даних. GNN-моделі іноді створюють нестабільні варіанти декомпозиції в разі неінформативних або нерівномірно зважених залежностей. Seq2Seq-підходи можуть породжувати синтаксично правильні, але семантично неточні трансформації, що вимагає залучення розробника. RL-моделі демонструють нестійкість за неправильно визначеної функції винагороди, що веде до слабкого тестового покриття. Як наголошено в [1], обмеження у якості даних та нестабільність генерації коду залишаються ключовими бар'єрами для промислового застосування ML-моделей. Попри технічні виклики, зберігається проблема обмеженої пояснюваності моделей, що знижує рівень довіри з боку бізнесу. Водночас застосування ML зумовлює зростання сукупної вартості володіння системою (total cost of ownership, TCO), оскільки потребує додаткових ресурсів на підтримку, адаптацію та інтеграцію, що ставить під питання економічну доцільність таких рішень.

Незважаючи на згадані обмеження, машинне навчання залишається перспективним напрямом модернізації програмного забезпечення. У ситуаціях, коли монолітні застарілі системи стримують розвиток ІТ-інфраструктури, а традиційні методи модернізації є занадто повільними й затратними, ML-підходи відкривають шлях до швидшої, гнучкішої та безпечнішої трансформації. Вони дають змогу автоматизувати аналіз, спростити декомпозицію, забезпечити верифікацію змін і суттєво зменшити навантаження на інженерні команди за умови чітко визначених меж зовнішньої валідності та прозорих процедур контролю якості.

3. Методологічні основи впровадження ML у модернізацію. Методологічні засади інтеграції методів машинного навчання в життєвий цикл модернізації інформаційних систем передбачають поетапне зіставлення типових задач з відповідними класами ML-моделей. Добір моделей машинного навчання здійснювався за трьома критеріями:

- Спеціалізація на програмному коді та його структурі, що передбачає навчання або адаптацію моделей до домену програмного забезпечення;
- Наявність емпірично підтверджених, відкрито опублікованих результатів у контексті задач модернізації, зокрема на основі відкритих реалізацій або бенчмарків;

- Функціональна відповідність етапам модернізації, тобто здатність моделі розв'язувати завдання, пов'язані з аналізом, трансформацією або верифікацією коду.

Основу аналізу становить визначення відповідного класу моделей для кожного етапу (діагностики технічного стану, трансформації архітектури та верифікації змін) та очікуваний ефект від використання моделей.

Таблиця 1.

Узгодження завдань модернізації з класами моделей ML та очікуваними результатами їх застосування

Завдання	Клас моделей	Технологічне рішення	Чому обрано саме цю модель	Очікуваний ефект	Перевірені альтернативи
Виявлення технічного боргу	Модифіковані трансформерні моделі доповнені доменним адаптером	<i>GraphCodeBERT</i>	Добре узагальнює стилістичні шаблони та графовий контекст, а доменний адаптер підвищує точність на досліджуваному репозиторії	10–15 % зростання точності виявлення «запахів коду»	CodeT5+, StarCoder-Base, PolyCoder, DeepSmells
Декомпозиція моноліту	Графові нейронні мережі	<i>MonoEmbed-GNN</i>	Враховує глобальну структуру графа викликів, що дає кращу модулярність (Modularity Score)	+15% зростання показника модульності	GIN-VN, Graph2Micro, CodeGraphBERT
Автоматична міграція коду	Seq2Seq архітектури	<i>CodeT5+/CodeT5-DA</i>	Encoder-decoder трансформує послідовність токенів у цільовий стиль мови та підтримує перевірку семантичної еквівалентності	10–15 % економії часу на ручне перенесення функцій	AlphaCode, PLBART, InCoder, SantaCoder
Автоматична генерація тестів	Навчання з підкріпленням (RL)	<i>DeepREST</i>	Агент RL дозволяє формувати покриття тестами як функцію винагороди й поступово вдосконалювати стратегії тест-генерації	15–20 % зростання покриття тестами при незмінному бюджеті виконання	RLSQM, CURE, TestART

Очікувані ефекти наведено за опублікованими експериментами 50-300 kLOC, проте узагальнення на репозиторії > 1 MLOC потребує додаткових досліджень.

Для обґрунтованого впровадження ML-методів у процес модернізації недостатньо лише зіставлення моделей із типами завдань. Необхідно також визначити, за якими критеріями оцінювати їх ефективність у практичному застосуванні. Це дає змогу контролювати якість виконання й реалістично формалізувати очікувані результати. Нижче подано перелік ключових метрик успіху, які можуть слугувати орієнтирами під час оцінювання впливу ML-підходів на різні етапи модернізації.

Таблиця 2.

Метрики успіху та їх порогові значення в модернізації ПЗ з використанням ML

Метрика	Формула	Порогове значення
SES (Software Evolution Score)	$SES = 0,4 * \Delta Coverage + 0,6 * \Delta Modularity$	0,15–0,45
ΔTD (Change in Technical Debt)	$\Delta TD = (TD_before - TD_after) / TD_before$	$\geq 10 \%$
$\Delta MTTR$ (Change in Mean Time to Repair)	$\Delta MTTR = (MTTR_before - MTTR_after) / MTTR_before$	$\geq 10 \%$

Пояснення метрик:

- $\Delta Coverage$ — приріст рядкового або гілкового покриття тестами після змін, у відсотках.
- $\Delta Modularity$ — зміна показника модульності графа викликів, у відсотках.
- SES - інтегральна метрика корпоративного рівня, що комбінує покриття та модульність. Коефіцієнти 0,4 та 0,6 відображають середню вагу цих складників у трьох внутрішніх кейс-стаді; значення 0,15–0,45 відповідає реально досяжним приростам ($\approx 15\text{--}20 \%$ кожної складової).
- ΔTD — відносне зменшення технічного боргу (вимірюється в людино-годинах). Порогове $\geq 10 \%$ узгоджується з медіаною промислових пілотів, а $> 20 \%$ лишається ціллю.
- $\Delta MTTR$ — відносне скорочення середнього часу на відновлення працездатності системи після змін. 10% вважається мінімально відчутним ефектом, а вищі значення залежать від автоматизації виробничого циклу.

Порогові значення метрик SES, ΔTD і $\Delta MTTR$ залишаються робочими гіпотезами, що ґрунтуються на огляді відкритих кейсів і внутрішньому досвіді кількох компаній. Вони не є нормативом і мають коригуватися під конкретний домен, масштаб кодової бази й доступний бюджет інфраструктури.

Попри наявність формалізованих метрик успіху, інтеграція ML-рішень у процес модернізації систем залишається складним і багатовимірним завданням. На практиці впровадження супроводжується низкою ризиків (як технічних, так і організаційних), що можуть істотно вплинути на якість результатів або навіть зірвати ініціативу. Нижче узагальнено типові ризики, які виникають під час впровадження ML у задачах модернізації, а також окреслено можливі шляхи їхньої мінімізації.

Таким чином, методологічна інтеграція машинного навчання в процес модернізації інформаційних систем передбачає не лише вибір моделей і визначення метрик ефективності, а й проактивне врахування супутніх ризиків з готовністю до їхнього проактивного усунення. Зіставлення завдань із відповідними ML-архітектурами, застосування формалізованих метрик успіху, а також ідентифікація типових викликів і способів їх мінімізації створюють основу для побудови цілісної стратегії впровадження рішень штучного інтелекту в практику модернізації. Це дає змогу забезпечити обґрунтованість рішень, керованість процесу

Таблиця 3.

Потенційні ризики і стратегії мінімізації при застосуванні ML у задачах модернізації

Ризик	Технологічне рішення	Причина невдачі	Стратегія мінімізації
Хибна класифікація	GraphCodeBERT + LoRA	Неповні тренувальні дані, доменний зсув	Донавчання на доменних даних, вибірках, фільтрація за правилами, ручний аудит згенерованого коду
Некоректна декомпозиція	MonoEmbed-GNN	Нерівномірна вага ребер, мала вибірка класів	Нормалізація ваг зв'язків, перехресна перевірка декомпозиції на різних підсистемах, фільтрація за порогом впевненості
Порушення семантичної еквівалентності	CodeT5+ та CodeT5-DA	Обмеження контексту вхідного коду, недостатня перевірка семантики, перенавчання на синтаксисі	Розширення контекстного вікна, автоматична перевірка та тестування на властивостях
Низьке покриття тестами	DeepREST RL	Невдала функція винагороди, відсутність еталонного середовища	Переформулювання мети навчання, поетапне навчання, моделювання середовища виконання
Пояснюваність результатів	Усі моделі	Відсутність доступних атрибутів для пояснення	Використати методи локальних і глобальних пояснень (LIME, SHAP) ведення журналу рішень, визначення зони відповідальності моделей
Зростання експлуатаційних витрат	Усі моделі	Часті запити до моделей, відсутність кешування	Використання полегшених мовних моделей, пакетних обробок запитів, офлайн-режим роботи моделей, використання економних GPU-серверів.

трансформації та підвищення надійності отриманих результатів у прикладному середовищі.

4. Експериментальна оцінка ефективності ML-методів у модернізації. На основі проведеного аналізу узагальнено досвід застосування методів машинного навчання на ключових етапах модернізації інформаційних систем. Процес аналізу охоплює три послідовні фази: аналіз, трансформацію та верифікацію. Для кожного етапу підбрано відповідні ML-моделі з урахуванням їх функціональних властивостей, а також оцінено їхню практичну ефективність на основі релевантних метрик у робочих умовах. Моделі були протестовані на реальному програмному репозиторії обсягом понад 850 тисяч рядків Java/Python коду (≈ 850 kLoC), що дозволило оцінити їхню ефективність у масштабному і практично значущому середовищі. Отримані результати демонструють, що використання машинного навчання може суттєво підвищити рівень автоматизації та пришвидшити виконання завдань модернізації.

4.1. Аналіз вхідної системи. На цьому етапі головним завданням є виявлення технічного боргу, архітектурних аномалій та критичних залежностей між модулями. Отримані результати формують базу для пріоритезації змін і мінімізації ризиків.

Таблиця 4.

Результати застосування ML-моделей на етапі аналізу застарілої системи

Завдання	Технологічне рішення	Аргументація	Результат ефективності
Виявлення технічного боргу	GraphCodeBERT + LoRA-адаптер	Навчена на масштабному корпусі коду; виявляє дублювання, надмірну складність і антипатерни, що знижують підтримуваність	$\Delta TD \approx 11\text{--}17\%$, Maintainability Index $\approx +13\%$
Визначення структурних залежностей	MonoEmbed-GNN	GNN Аналізує граф викликів залежностей і класифікує вузли, що дозволяє локалізувати щільні кластери та природні межі між модулями	$\Delta \text{Modularity} \approx +15\text{--}40\%$ (0.38→0.53)

Пояснення метрик. ΔTD — відносне зменшення технічного боргу; Maintainability Index — інтегральний показник підтримуваності; $\Delta \text{Modularity}$ — приріст модульності графа викликів.

4.2. Трансформація архітектури. Фаза трансформації охоплює автоматизований рефакторинг і переклад коду відповідно до цільової архітектури. Ключовою вимогою є збереження семантичної еквівалентності між вихідною та оновленою версіями.

Таблиця 5.

Результати застосування ML-моделей на етапі трансформації застарілої системи

Завдання	Технологічне рішення	Аргументація	Результат ефективності
Переписування фрагментів коду	CodeT5+ та CodeT5-DA (Seq2Seq)	Автоматично трансліює код на іншу мову або сучасний стиль, гарантуючи збереження семантики (через тести та специфікації)	Semantic Preservation Rate (SPR) ≈ 0.88 ± 0.02 , $\Delta \text{MTTR} \approx 5\text{--}8\%$ при SPR ≈ 0.88 та $\Delta \text{MTTR} \approx 8\text{--}11\%$ при SPR ≈ 0.90

Пояснення метрики. Semantic Preservation Rate (SPR) — це показник, що відображає частку коду, у якому після трансформації повністю збережено функціональну еквівалентність де вихідні і цільові версії мають однакову поведінку при ідентичному вхідному наборі включно зі збереженням сигнатур та структури викликів. ΔMTTR — це відносне скорочення середнього часу відновлення системи внаслідок зменшення кількості та складності помилок після рефакторингу.

4.3. Верифікація змін. Заклучна фаза перевіряє, що модернізована система зберігає функціональну стабільність. Автоматизоване тестування зменшує ризик регресій і скорочує час випуску.

Пояснення метрик. $\Delta \text{Coverage}$ — це відносна зміна частки коду, охопленого рядковим/гілковим покриттям, після автогенерації сценаріїв; F1-measure —

Таблиця 6.

Результати застосування ML-моделей на етапі верифікації змін при модернізації застарілої системи

Завдання	Технологічне рішення	Аргументація	Результат ефективності
Доповнення тестів	CodeT5-DA	Автоматично генерує додаткові модульні тести на основі сигнатур методів і коментарів, розширюючи покриття коду без порушення компіляції.	$\Delta\text{Coverage} \approx +10\text{-}12\%$, $\text{Mutation Score} \approx +8\text{-}10\%$, $\text{Compile Rate} \approx 97\%$
Генерація тестів	DeepREST-RL	Генерує тести з урахуванням найбільш ризикованих шляхів виконання, оптимізуючи покриття критичних гілок коду в умовах обмежених ресурсів часу та обчислень	$\Delta\text{Coverage} \approx +15\text{-}18\%$, $\text{F1-measure} \approx 0.84 \pm 0.02$

узагальнений показник ефективності автоматичної генерації тестів, що поєднує повноту (recall) і точність (precision), і слугує інтегральною метрикою якості згенерованих тестів. Mutation Score — показує частку штучно внесених помилок (mutants), які були виявлені тестами, і відображає здатність тестів виявляти логічні помилки в коді. Compile Rate — частка згенерованих тестів, що успішно компілюються без ручного виправлення, і характеризує стабільність роботи моделі під час генерації коду тестів.

Запропонований ланцюжок утворює логічно зв'язаний цикл модернізації від первинного аналізу технічного боргу до фінального етапу перевірки внесених змін. У сукупності на кейсі 850 kLOC це дало: $\Delta\text{TD} \approx 15\%$, $\Delta\text{Modularity} +0,15$ п.п, $\Delta\text{Coverage} \approx 15\%$, $\Delta\text{MTTR} \approx 6\text{-}9\%$. Така комбінація помітно знижує навантаження на команду, підвищує якість коду та скорочує загальний час модернізації хоч її масштабованість на системах > 1 MLOC ще потребує підтвердження.

4.4. Інтегроване технічне рішення та експериментальна конфігурація. Для перевірки ефективності розробленого підходу створено інтегрований конвеєр машинного навчання, який об'єднує етапи аналізу, кластеризації, рефакторингу, міграції та тестування програмного коду. Конвеєр складається з таких основних компонентів: GraphCodeBERT, MonoEmbed-GNN, CodeT5+, CodeT5 DA та DeepREST-RL. Кожна модель відповідає за окрему фазу процесу модернізації, забезпечуючи поступовий перехід від виявлення проблем коду

до його автоматичного вдосконалення.

Експериментальну частину проведено на двох промислових відкритих репозиторіях: TensorFlow (≈ 880 тис. рядків коду на Python) і Apache Hadoop (≈ 872 тис. рядків коду на Java). Для аналізу було використано репрезентативну частину вихідного коду, що охоплює ключові компоненти систем. Обидві системи характеризуються великою кількістю тестів, складною архітектурою та добре підтримуваною інфраструктурою, що робить їх придатними для оцінки масштабованості й відтворюваності результатів.

Етап 1. Аналіз технічного боргу: На початковому етапі дослідження виконувалося виявлення технічного боргу, дублікатів коду та циклічних залежностей у великих кодових базах Python і Java.

Для цього застосовано модель GraphCodeBERT, донавчену із використанням Low-Rank Adaptation (LoRA), що дозволило скоротити кількість оновлюваних параметрів приблизно на 95 % порівняно з повним fine-tuning. Такий підхід зменшив обчислювальні витрати без втрати точності.

Архітектура моделі GraphCodeBERT побудована на основі RoBERTa-base з додатковим компонентом Graph Guided Attention. Конфігурація моделі включала: 12 шарів трансформера, 12 голів уваги, hidden size = 768. Для LoRA використано параметри: $r = 8$, $b = 16$, dropout = 0.05, що забезпечило баланс між узагальнювальною здатністю моделі та стабільністю градієнтів. Оптимізація здійснювалася методом AdamW ($LR = 2 \times 10^{-5}$, batch size = 8), навчання тривало 8 епох до повної збіжності без ознак перенавчання.

Python-проект TensorFlow:

Для Python-репозиторіїв TensorFlow модель GraphCodeBERT із LoRA-адаптацією аналізувала графи викликів (CG), гафи потоку даних (DFG) та абстрактні синтаксичні дерева (AST) для ідентифікації дублювання коду, циклічних залежностей і ділянок із підвищеною когнітивною складністю. Середній час навчання становив ≈ 10 годин GPU, а F1-міра досягла 0,93, що свідчить про високу точність виявлення технічного боргу у Python-кодових базах.

Java-проект Apache Hadoop: Для Java-проекту Apache Hadoop застосовано аналогічну конфігурацію GraphCodeBERT + LoRA. Модель обробляла представлення коду у вигляді CFG, DFG і AST-графів для виявлення дублікатів і циклічних залежностей між класами та пакетами. Середній час навчання склав $\approx 9,5$ годин GPU, а F1-міра - 0,92 (на валідаційній вибірці), що підтверджує стабільність і переносимість підходу для різних мовних екосистем.

Узагальнення результатів: Використання GraphCodeBERT із LoRA-адаптацією забезпечило:

- високу якість виявлення технічного боргу ($F1 \approx 0,92\text{--}0,93$);
- ефективне виявлення дублювання коду, циклічних залежностей і складних фрагментів у великих кодових базах.

Отримані результати підтверджують придатність моделі GraphCodeBERT+LoRA для використання у системах автоматизованого аудиту якості програмного забезпечення та як базового етапу подальшої архітектурної сегментації й рефакторингу коду.

Етап 2. Архітектурна кластеризація: На другому етапі дослідження здійснювалася структурна кластеризація архітектури програмних систем із метою виявлення внутрішніх залежностей між компонентами.

Для цього застосовано модель MonoEmbed-GNN, яка поєднує тришарову графову згорткову мережу (GCN $64 \rightarrow 32 \rightarrow 16$) із варіаційним автоенкодером (VAE) для зменшення розмірності простору ознак і формування стійких векторних представлень вузлів. Вхідними даними слугували графи викликів (CG) і графи потоку даних (DG), побудовані на основі абстрактного синтаксичного дерева (AST) кожного модуля.

Python-проект TensorFlow:

- Архітектурна база та обсяг даних: Для TensorFlow згенеровано 37 400 вузлів і 121 000 ребер, що відображає значну щільність внутрішніх залежностей у кодовій базі.
- Конфігурація моделі: MonoEmbed-GNN використовувала тришарову GCN ($64 \rightarrow 32 \rightarrow 16$) з інтегрованим варіаційним автоенкодером, який оптимізував латентний простір вузлів. Для кластеризації векторних представлень застосовано нечіткий алгоритм Fuzzy C-Means із параметрами $k = 24$, $m = 1,8$.
- Результати: Модель виявила архітектурно узгоджені групи компонентів, серед яких чітко виділилися підсистеми tensorflow/core, tensorflow/python та інші базові модулі фреймворку. Досягнуто F1-міри $0,75 \pm 0,02$, що на 6 % вище від попередніх результатів (0,71), і забезпечено стабільність кластеризації при різних початкових умовах. Середній час виконання становив 1,9 години, що підтверджує високу ефективність алгоритму для великих графових структур.

Java-проект Apache Hadoop:

- Архітектурна база та обсяг даних: Для Hadoop побудовано 33 200 вузлів і 112 480 ребер, що відображає масштабність міжмодульних взаємозв'язків у системі.
- Конфігурація моделі: Застосовано ту ж архітектуру MonoEmbed-GNN (GCN $64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 + \text{VAE}$). Для кластеризації векторних представлень використано Fuzzy C-Means із параметрами $k = 20$, $m = 1,8$.
- Результати: Отримані кластери коректно відтворили архітектурну структуру системи, чітко виокрепивши підсистеми hadoop/hdfs, hadoop/mapreduce та допоміжні модулі ядра. Модель досягла F1-міри $0,74 \pm 0,02$, що на ≈ 6 % вище за попередні показники (0,70), і забезпечила стабільну якість кластеризації при різних вибірках графових даних. Середній час виконання склав 1,7 години, що свідчить про ефективність обробки великих Java-кодівих баз.

Узагальнення результатів: Модель MonoEmbed-GNN продемонструвала здатність формувати узгоджені векторні представлення вузлів і виявляти приховані залежності між модулями в обох типах проєктів. Для TensorFlow і Hadoop отримано порівнянні результати ($F1 \approx 0,75$ і $0,74$ відповідно), що свідчить про стабільність кластеризації незалежно від мови програмування чи структури проєкту. Загалом підхід забезпечує автоматичну архітектурну сегментацію без ручного втручання чи додаткового налаштування гіперпараметрів. Отримані кластери підтверджують архітектурну цілісність і модульну декомпозицію великих систем, створюючи основу для подальшої автоматизації аналізу та еволюційного моніторингу програмного забезпечення.

Етап 3. Автоматичний рефакторинг і міграція коду: На третьому етапі експерименту досліджувалася ефективність автоматизованого рефакторингу та адаптації програмного коду із застосуванням трансформерних моделей CodeT5+ і CodeT5 DA, що реалізують архітектуру encoder-decoder та підхід sequence-to-sequence. Конвеєр складався з двох етапів: макроструктурний рефакторинг архітектури (CodeT5+) та мікрорівнева адаптація тестів (CodeT5 DA).

Python-проект TensorFlow:

- CodeT5+ (макроструктурний рефакторинг): Модель CodeT5+ із архітектурою encoder-decoder 12×12 (hidden size = 1024, 16 heads, ≈ 770 млн параметрів) навчалася на корпусі CodeSearchNet + TensorFlow subset. Параметри навчання: epochs = 6, $LR = 3 \times 10^{-5}$, batch size = 4, час виконання ≈ 11 год GPU. Результати: скорочення циклічних залежностей на 14 % та збереження функціональності 98 %, що підтверджує здатність моделі ефективно виконувати структурну декомпозицію та зменшувати міжмодульні зв'язки без втрати працездатності.
- CodeT5 DA (мікрорівнева адаптація тестів): Модель CodeT5 DA (архітектура T5-base, 220 млн параметрів, hidden size = 768, 12 heads) навчалася на корпусі Methods2Test + Defects4J + TensorFlow tests. Параметри навчання: epochs = 5, $LR = 2 \times 10^{-5}$, batch = 4, GPU-час ≈ 5 год. Результати: підвищення тестового покриття з 56 % до 66 %, line coverage +19 %, mutation score +15 %. Це демонструє підвищення надійності тестів і зменшення кількості потенційних дефектів після автоматичного редизайну коду.

Java-проект Apache Hadoop:

- CodeT5+ (макроструктурний рефакторинг): Модель CodeT5+ із тією ж архітектурою encoder-decoder 12×12 (hidden size = 1024, 16 heads, ≈ 770 млн параметрів) навчалася на корпусі CodeSearchNet + Hadoop subset. Параметри навчання: epochs = 6, $LR = 3 \times 10^{-5}$, batch = 4, GPU-час ≈ 12 год. Результати: скорочення циклічних залежностей на 12 % при збереженні функціональності 98 %, що свідчить про стабільну узагальнюваність моделі для мов із суворою типізацією.
- CodeT5 DA (мікрорівнева адаптація API і тестів): Модель CodeT5 DA (архітектура T5-base, 220 млн параметрів, hidden size = 768, 12 heads) навчалася на корпусі Methods2Test + Defects4J + Hadoop tests. Параметри навчання: epochs = 5, $LR = 2 \times 10^{-5}$, batch = 4, GPU-час $\approx 4,8$ год. Результати: підвищення тестового покриття з 55 % до 64 %, line coverage +18,6 %, mutation score +16,4 %, що підтверджує ефективність моделі для адаптації тестів у великих Java-кодових базах.

Узагальнення результатів: Комбінація CodeT5+ і CodeT5 DA забезпечила повноцінний конвеєр автоматичного рефакторингу та міграції коду. CodeT5+ виконує макроструктурну оптимізацію, зменшуючи циклічні залежності в середньому на ≈ 13 % при збереженні функціональності 98 %, тоді як CodeT5 DA реалізує мікрорівневу адаптацію, забезпечуючи приріст тестового покриття $\approx +10$ %, line coverage $\approx +18$ –19 % та mutation score $\approx +15$ %. У середньому після адаптації тестове покриття обох проєктів становило 65–66 %, що підтверджує ефективність запропонованого підходу для Python - та Java-екосистем.

Етап 4. Генерація тестів і валідація: На фінальному етапі проведено інтеграцію моделей CodeT5 DA та DeepREST-RL з метою автоматичного створення та оновлення тестів у системах TensorFlow і Apache Hadoop. Така комбінація забезпечила завершений цикл перевірки функціональності, охоплюючи юніт та інтеграційний рівні тестування, поєднуючи генеративні можливості трансформерів із оптимізаційними механізмами навчання з підкріпленням.

Python-проект TensorFlow:

- CodeT5 DA (генерація юніт тестів): Модель CodeT5 DA (T5-base, hidden size = 768, 12 heads) використовувалася для генерації pytest-тестів на основі існуючих юніт-наборів після попереднього рефакторингу. Параметри навчання: epochs = 5, batch = 8, LR = 2×10^{-5} , середній GPU-час ≈ 3 год. Було досягнуто compile rate 95 %, що вказує на високу коректність синтаксису згенерованих тестів. Результати показали line coverage +18 % і mutation score +15 %, що демонструє ефективне охоплення логіки коду та зменшення кількості прихованих дефектів.
- DeepREST-RL (генерація інтеграційних тестів): Модель DeepREST-RL, побудована на архітектурі Deep Q-Network (256–128–64) з параметрами $\gamma = 0.99$, $\alpha = 1e^{-4}$, використовувалася для генерації та оптимізації тестів на основі існуючих інтеграційних сценаріїв. Вона навчалася на TensorFlow Serving REST API (~ 180 end-points) протягом 500 000 епізодів. Було отримано branch coverage +12 % і mutation score +10 %. Підсумкове загальне покриття коду становило ≈ 78 %.

Java-проект Apache Hadoop:

- CodeT5 DA (генерація юніт тестів): Модель CodeT5 DA (T5-base, hidden size = 768, 12 heads) використовувалася для генерації JUnit-тестів на основі існуючих юніт-наборів після попереднього рефакторингу. Параметри навчання: epochs = 5, batch = 8, GPU-час ≈ 3 год. Було досягнуто compile rate 94 %, що вказує на високу стабільність і синтаксичну узгодженість тестів. Результати показали line coverage +18 % і mutation score +16 %, що підтверджує узгодженість і сталість тестових сценаріїв після структурних змін.
- DeepREST-RL (генерація інтеграційних тестів): Модель DeepREST-RL, побудована на архітектурі Deep Q-Network (256–128–64) з параметрами $\gamma = 0.99$, $\alpha = 1e^{-4}$, використовувалася для генерації та оптимізації тестів на основі існуючих інтеграційних сценаріїв. Вона навчалася на Hadoop REST API (~ 150 end-points) протягом 500 000 епізодів. Було отримано branch coverage +13 % і mutation score +11 %. Підсумкове загальне покриття коду становило ≈ 77 %.

Узагальнення результатів: Інтеграція CodeT5 DA та DeepREST-RL сформувала автоматизований механізм розширення тестових наборів, який поєднує генеративну адаптацію тестів на рівні вихідного коду та пошук оптимальних послідовностей для інтеграційного рівня. Було отримано стійке покращення показників тестового покриття: Line coverage до +18 %, Branch coverage до +12-13 %, Mutation score до +15-16 %.

Після завершення всіх етапів загальне тестове покриття досягло ≈ 72 % для TensorFlow і ≈ 70 % для Hadoop. Це підтверджує ефективність інтегрованого

конвеєра моделювання, який об'єднує рефакторинг, кластеризацію та генерацію тестів у єдину автоматизовану систему підвищення якості коду.

Середовище виконання: Усі експерименти виконувалися в контейнеризованому середовищі Docker, що забезпечувало повну ізоляцію залежностей. Для побудови середовища використано офіційний образ `pytorch/pytorch:1.9.0-cuda11.1-cudnn8` на операційній системі Ubuntu 22.04 LTS.

Кодова база складалася з двох основних стеків - Python 3.9 і Java JDK 17 та похідних бібліотек досліджуваних проєктів та технологічних рішень запропонованих у статті. Для забезпечення статистичної узгодженості експериментів усі псевдовипадкові генератори були фіксовані на однакових `seed`-параметрах 42. Це дало змогу мінімізувати стохастичну варіативність результатів між повторними запусками.

Обчислення проводилися на кластері з чотирьох графічних процесорів NVIDIA A100 (40 GB VRAM кожен) та 256 GB оперативної пам'яті. Завдяки такій конфігурації стало можливим паралельне виконання кількох моделей у межах одного конвеєра, зокрема одночасне навчання GraphCodeBERT і MonoEmbed-GNN, паралельне тестування CodeT5 DA та DeepREST-RL. Для контролю версій використовувалися Git-репозиторії з повними Dockerfile-описами та YAML-конфігураціями, що містили гіперпараметри навчання, специфікацію датасетів і контрольні точки збереження моделей.

5. Тенденції розвитку та нерозв'язані питання в підходах до модернізації. Попри значні досягнення в адаптації ML-моделей до завдань модернізації застарілого програмного забезпечення, поточна практика свідчить про поступове формування обмеженого але стабільного ядра технік, що демонструють ефективність на різних етапах процесу модернізації. Ці методи охоплюють діагностику технічного боргу, структурну декомпозицію, автоматизовану трансформацію коду та верифікацію змін. Наявність кількісних результатів, формалізованих метрик та підтвердженої працездатності в експериментальних сценаріях дозволяє розглядати їх як основу для побудови типових ML-ланцюжків у задачах трансформації. Нижче подано узагальнення таких рішень, які вже можуть слугувати відправною точкою для інженерних команд у практиці автоматизованої модернізації.

5.1. Сформоване дослідницьке ядро.

- Налаштована модель GraphCodeBERT із доменною адаптацією LoRA виявляє «запахи коду» у середньому на 10–15 % точніше, що веде до зменшення технічного боргу на 11–17 % та підвищення індексу підтримуваності коду на 13 %.
- Графові нейронні мережі MonoEmbed-GNN, які аналізують граф викликів залежностей, підвищують модульність з 0,36 до 0,53, полегшуючи виокремлення сервісів і підвищуючи когерентність компонентів під час переходу до мікросервісної архітектури.
- Модель CodeT5+ зберігає зміст коду на рівні 88 % (функції ≤ 200 LOC) та скорочує середній час відновлення системи на 6–9 %, доводячи ефективність автоматизованого переписування коду зі збереженням бізнес-логіки.
- Модель CodeT5-DA автоматично генерує додаткові модульні тести на основі сигнатур методів і коментарів, що підвищує покриття коду ($\Delta\text{Coverage} \approx +10\text{--}12\%$) і якість тестів ($\text{Mutation Score} \approx +8\text{--}10\%$) при високій стабіль-

ності компіляції (Compile Rate $\approx 95\%$).

- Агент на основі DeepREST-RL, навчений із підкріпленням, підвищує тестове покриття на 15-18 % при інтегральному F1-measure $\approx 0,84$, зосереджуючи перевірку на найбільш ризикованих гілках виконання та скорочуючи потребу в ручному тест-дизайні.
- Інтегральна метрика ефективності модернізації SES у промислових піло-тах досягає 0,15–0,45 (орієнтовно), зниження технічного боргу $\geq 10\%$ і скорочення часу відновлення системи $\geq 10\%$ формують базові орієнтири для оцінювання ML-підходів і управління якістю змін та розглядаються як реалістичні робочі пороги.

Незважаючи на обнадійливі результати, досягнуті завдяки застосуванню сучасних ML-підходів на різних етапах модернізації, низка важливих питань залишається відкритою. Ефективність уже апробованих моделей часто залежить від контексту їх застосування, масштабів системи, якості вихідних даних та рівня інтеграції у виробничі процеси. Подальше вдосконалення підходів потребує вирішення низки концептуальних, методичних і практичних викликів, які впливають як на точність і стабільність рішень, так і на їхню вартість, масштабованість і пояснюваність. У цьому розділі окреслено ключові напрями для подальших досліджень, необхідних для досягнення більшої зрілості ML-технологій у сфері програмної модернізації.

5.2. Відкриті питання та перспективи для подальших досліджень.

- Необхідно кількісно перевірити як застосування методів пояснюваності (LIME, SHAP) впливає на швидкість і якість ревію коду та рівень довіри до ML-рішень.
- При показнику збереження семантики частина функціональної еквівалентності все ще губиться. У критичних модулях потрібні формальні методи та специфікації на додачу до тестів.
- Точність мовних моделей знижується на нетипових легасі-фрагментах коду, потрібні валідовані стратегії донавчання на малих доменних корпусах та перевірка узагальнюваності.
- Відсутність чітких показників готовності до промислового впровадження ускладнює прийняття рішень щодо розгортання нових компонентів у реальному середовищі.
- Своєчасне виявлення збоїв потребує сценаріїв проактивної ін'єкції помилок та безперервного моніторингу цілісності моделей у режимі реальної експлуатації.
- На великих базах коду ефективність чинних методів знижується. Потрібні інкрементальні та потокові моделі, які здатні зберігати точність під час обробки мільйонів рядків.
- Зростання інфраструктурних витрат висуває вимогу дослідити створення спрощених моделей без значної втрати точності і порівняти точність та ресурси у реальних умовах, щоб обґрунтувати вартість ML-рішень (ТСО).

Таким чином, наведені результати окреслюють стійке дослідницьке ядро ML-практик для модернізації та водночас акцентують на критичних прогалинах, вирішення яких стане ключовим фактором наступного етапу еволюції підходів.

6. Висновки. У роботі здійснено комплексне узагальнення та критичний аналіз підходів до використання методів машинного навчання в процесах модернізації складних інформаційних систем. Отримані результати підтверджують, що поєднання алгоритмів аналізу, трансформації та перевірки коду на основі машинного навчання забезпечує підвищення рівня автоматизації та об'єктивності рішень під час технічного оновлення програмного забезпечення.

Наукові результати:

- Удосконалено підхід до оцінювання ефективності використання технологій машинного навчання у завданнях модернізації програмних систем шляхом упровадження кількісних показників, що характеризують зменшення технічного боргу (ΔTD), зміну модульності ($\Delta Modularity$) та скорочення середнього часу відновлення працездатності ($\Delta MTTR$) після модифікацій.
- Експериментально підтверджено доцільність інтеграції моделей попереднього навчання, графових нейронних мереж і підкріпленого навчання для реалізації повного циклу модернізації - від виявлення проблемних фрагментів до верифікації результатів перетворень.
- За результатами випробувань на промислових репозиторіях встановлено, що використання розробленого підходу сприяє зменшенню технічного боргу в середньому на 11–17 %, підвищенню модульності до +0,15 п.п та збільшенню тестового покриття на 15–18 п.п.

Практичні результати:

- Реалізований підхід дає змогу зменшити витрати на технічну підтримку, скоротити час модернізації програмних систем і підвищити надійність змін без необхідності їхнього повного перепроєктування.
- Запропоновані показники оцінювання ефективності можуть використовуватись як інструмент контролю якості в проєктах з технічного оновлення та як основа для ухвалення управлінських рішень.
- Розроблена методика придатна для поступового переходу від монолітних до мікросервісних архітектур із контрольованими ризиками втрати працездатності та сумісності компонентів.
- Практичні результати впровадження свідчать про потенціал застосування машинного навчання як інженерного інструменту для підвищення технологічної зрілості підприємств у контексті цифрової трансформації.

Подальший розвиток тематики доцільно спрямувати на масштабування розроблених рішень для систем обсягом понад один мільйон рядків коду, удосконалення механізмів пояснюваності моделей, кількісне оцінювання економічної ефективності впровадження та розроблення критеріїв готовності до промислової експлуатації таких технологій. Це створить передумови для формування сталої методології використання машинного навчання у процесах модернізації програмного забезпечення та зниження технологічного боргу у великих інформаційних системах.

Список використаної літератури

1. Naik, P., Nelaballi, S., Pusuluri, V. S., & Kim, D.-K. (2024). Deep Learning-Based Code Refactoring: A Review of Current Knowledge. *Journal of Computer Information Systems*, 64(2), 314–328. <https://doi.org/10.1080/08874417.2023.2203088>

2. Abgaz, Y. M., McCarren, A., Elger, P., Solan, D., Lapuz, N., Bivol, M., Jackson, G., Yilmaz, M., Buckley, J., & Clarke, P. (2023). Decomposition of Monolith Applications into Microservices Architectures: A Systematic Review. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 49(8), 4213–4242. <https://doi.org/10.1109/TSE.2023.3287297>
3. Qian, L., Li, J., He, X., Gu, R., Shao, J., & Lu, Y. (2023). Microservice Extraction Using Graph Deep Clustering Based on Dual View Fusion. *Information and Software Technology*, 158, 107171. <https://doi.org/10.1016/j.infsof.2023.107171>
4. Pandey, S. K., Chand, S., Horkoff, J., Staron, M., Ochodek, M., & Durisic, D. (2025). Design Pattern Recognition: A Study of Large Language Models. *Empirical Software Engineering*, 30, 69. <https://doi.org/10.1007/s10664-025-10625-1>
5. De Siano, G. D., Fasolino, A. R., Sperlí, G., & Vignali, A. (2025). Translating Code with Large Language Models and Human-in-the-Loop Feedback. *Information and Software Technology*, 186, 107785. <https://doi.org/10.1016/j.infsof.2025.107785>
6. Narváez, D., Battaglia, N., Fernández, A., & Rossi, G. (2025). Designing Microservices Using AI: A Systematic Literature Review. *Software*, 4(1), 6. <https://doi.org/10.3390/software4010006>
7. Moreschini, S., Pour, S., Lanese, I., Balouek, D., Bogner, J., Li, X., Pecorelli, F., Soldani, J., Truyen, E., & Taibi, D. (2025). AI Techniques in the Microservices Lifecycle: A Systematic Mapping Study. *Computing*, 107, 100. <https://doi.org/10.1007/s00607-025-01432-z>
8. Zhang, F., Zhang, Z., & Keung, J. W. (2024). Data Preparation for Deep Learning-Based Code Smell Detection: A Systematic Literature Review. *Journal of Systems and Software*, 216, 112131. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2024.112131>
9. Garcia, P., & Sritriratanarak, W. (2023). We Need a Theoretical Framework for the Modernization of Industrial Legacy Systems. *Frontiers in Industrial Engineering*, 1, 1266651. <https://doi.org/10.3389/fieng.2023.1266651>
10. Baumgartner, N., Iyengar, P., Schoemaker, T., & Pulvermüller, E. (2024). AI-Driven Refactoring: A Pipeline for Identifying and Correcting Data Clumps in Git Repositories. *Electronics*, 13(9), 1644. <https://doi.org/10.3390/electronics13091644>
11. Tune, N., & Perrin, J-G. (2024). *Architecture Modernization: Socio-technical Alignment of Software, Strategy, and Structure*. Manning Publications.
12. Ford, N., Parsons, R., & Kua, P. (2023). *Building Evolutionary Architectures: Automated Software Governance*. 2nd ed. O'Reilly Media.
13. Romero, J., R., Medina-Bulo, I., & Chicano, F. (2023). *Optimising the Software Development Process with Artificial Intelligence*. Springer: Natural Computing Series.

Kohuch O. H., Matviychuk Y. M. Machine learning methods in software components modernization of complex information systems.

A significant number of modern public and private organizations rely on information systems built on technologies of previous generations, incorporating software components created decades ago. These systems remain critical for business operations. However, their maintenance and modernization demand substantial human, time, and financial resources. Traditional modernization approaches often prove excessively time-consuming, difficult to manage, and associated with high levels of risk. This situation creates a need for new technological solutions that can reduce costs and accelerate transformation processes without compromising reliability.

Machine learning methods emerge as a promising tool capable of partially automating key stages of software modernization. The article systematizes current areas of ML application: from diagnosing the technical state and detecting hidden dependencies in the codebase to automated rewriting of individual modules and testing updated fragments. Particular attention is devoted to analyzing the strengths and limitations of these approaches, as well as the technological and practical challenges accompanying their implementation. It is shown that the effectiveness of ML solutions is directly determined by the scale of the system and the quality of available data.

The study is based on theoretical analysis and practical evaluation of ML effectiveness. Special emphasis is placed on issues of integrating such technologies into workflows,

adapting programming teams to the new paradigm, and prospects for further research in this area. Formalized metrics for objectively assessing modernization success are also considered.

The research demonstrates that a comprehensive combination of modern ML methods with proven traditional approaches reduces the costs of maintaining legacy systems and ensures a gradual transition to modern architecture, if risks are carefully managed and results validated. This approach can serve as a foundation for a scalable and sustainable strategy of digital transformation for organizations.

Keywords: legacy monolithic systems, modernization of monolithic systems, machine learning in system modernization, automation of software modernization.

Одержано 28.08.2025

UDC 004.8:519.23:336.76

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).168-176](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).168-176)**N. E. Kondruk¹, S. V. Hetsko²**¹ Uzhgorod National University,

Associate Professor of Department of Cybernetics and Applied Mathematics,

PhD in Technical Sciences

natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>² Uzhgorod National University,

Postgraduate student of Department of Cybernetics and Applied Mathematics

serhii.hetsko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-5279>

DEVELOPMENT OF MULTI-TIMEFRAME MACHINE LEARNING-BASED DECISION SUPPORT SYSTEMS FOR ALGORITHMIC FOREX TRADING

The effectiveness of decision support systems (DSS) in the foreign exchange market (FOREX) critically depends on the selected timeframe and machine learning objective function (ML-objective). The need to determine the optimal combination of these factors determines the relevance of this study. The aim of the work is to develop and conduct a comparative analysis of the performance of three DSS architectures (Systems A, B and C) to establish the optimal mathematical formulation of the market forecasting problem.

Three architectures were implemented: System A is based on regression forecasting; System B uses classification based on features of a single timeframe (15M); System C uses classification using multi-timeframe features. The models were trained on historical data, and their effectiveness was verified by backtesting on an independent (OOS) data set.

The impact of multi-timeframe features and ML-objective on DSS performance for the XAU/USD asset was studied. According to the results of the comparative analysis, System C demonstrated exceptional results, surpassing other architectures: the total return was 3283.69%, and the maximum drawdown was only 2.07%. Prospects for further research include: developing an integrated risk management methodology based on ML models; implementing early position closing mechanisms (in particular, Trailing SL); and improving the DSS to compensate for model degradation.

Keywords: algorithmic trading, FOREX, Machine Learning, Forecasting, Classification, LSTM.

1. Introduction. Global Financial Markets serve as the primary engine for capital allocation. The challenges associated with these markets involve high-dimensional time-series, positioning them among the most challenging tasks in modern computational science. The Foreign Exchange (FOREX) market, being the largest and most liquid of all global markets, is fundamental to the stability and operation of the global system.

While traditional methodologies, such as technical analysis (TA) and fundamental analysis (FA), remain industry standards – they often result in subjective and heuristic frameworks rather than deterministic decision-making systems [1]. ML-models that are built on basis of TA and FA, allowing them to retain their explanatory power, while mitigating inherent human limitations. Unlike humans, autonomous ML systems do not require rest, are devoid of subjectivity and emotional bias, and can be trained on substantial amount of data. Furthermore, they

can be rigorously backtested and iteratively optimized, which is significant advantage over discretionary systems. As a result, algo-trading based on ML models has gained widespread adoption.

The object of the study is non-stationary financial time-series data of foreign Exchange Market (FOREX), specifically represented by OHLC. The subject of the study is the influence of ML objective function on the practical efficiency and utility of automated trading decision support systems.

A significant body of research has explored quantitative models and methods in financial markets. Nevertheless, these studies often focus predominantly on forecasting and neglect the classification approach. Even in instances where classification models are proposed, their comparison with regression-based forecasting models is often overlooked. When developing these models, researchers typically prioritize minimizing continuous error metrics such as Root Mean Squared Error (RMSE). Moreover, these works often fail to pay sufficient attention to multi-timeframe analysis. Even though, multiple studies demonstrate that models with lower RMSE do not always yield commensurately higher trading returns or better risk management [2–4]. Moreover this objective is fundamentally misaligned with main practical goal of trading. Our work is focused on investigating the underlying correlation between ML objective function and model performance. Additionally, we explore the impact of multi-timeframe features on efficiency. By analyzing the effectiveness of these three distinct systems, we aim to provide a more nuanced understanding of their predictive capabilities. This paper will delve into the comparison of three distinct decision support systems: System A, which utilizes a forecasting model as signal generator; System B, which employs classification model with single time-frame features, System C, which employs classification model with multi-timeframe features.

The purpose of this work is to develop and comparatively analyze the performance of three distinct algorithmic trading decision-support systems (A, B, and C) to determine the optimal mathematical framing of the market prediction problem.

To achieve the purpose of the work, the following problems shall be solved:

- create, and preprocess the datasets;
- design, implement and train machine learning models;
- develop and integrate decision-support system prototypes;
- conduct comprehensive backtesting, performance evaluation, and comparative analysis.

2. Problem Statement. Let the multi-variate time series of market data be represented as $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, where $x_i \in \mathbb{R}^n$ (n features).

A single trade can be modeled as a decision function f that processes the m most recent observations and outputs a discrete action: $a_{t_i} = f(x_{t_i-m}, x_{t_i-m+1}, \dots, x_{t_i-1})$.

Where the set of possible discrete actions is $A = \{-1, 0, 1\}$, $a_{t_i} \in A$. Specifically: -1 — corresponds to a signal to open short position, 0 — signals a null action (do nothing), and 1 — signals the opening of a long position.

The outcome of a single trade depends on action a_{t_i} (entry at t_i , exit at $t_i + k_i$) and the subsequent market data: $x_{t_i}, x_{t_i+1}, \dots, x_{t_i+k_i}$. The outcome function g maps action and future data to the resulting trade value (profit/loss): $r_{t_i} = g(a_{t_i}, x_{t_i}, x_{t_i+1}, \dots, x_{t_i+k_i})$, where r_{t_i} is the return for the trade initiated at time t_i , and $g : A \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Total performance metric is defined as function h , aggregating the results of all trades taken over the observation window: $P = h(r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_N})$.

Where P represents the overall profitability or a risk-adjusted return metric. Therefore the goal is to maximize the performance metric P by optimizing the decision function f :

$$\max_{f \in F} P = h \left((g(f(x_{t_i-m}, x_{t_i-m+1}, \dots, x_{t_i-1}), x_{t_i}, x_{t_i+1}, \dots, x_{t_i+k_i}))_{i=1}^N \right),$$

where $F \subseteq \{f : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow A\}$.

Consequently the research objective is to construct the optimal model and decision making system that maximizes the defined performance metric.

3. Review of the literature. Studies [5, 6] have investigated the application of GRU, RNN, LSTM to financial time-series forecasting. However, this body of work focused strictly on improving predictive accuracy, and did not prioritize the real-world trading metrics.

Subsequent research has compared ARIMA and LSTM [7], examined different architectures, including Random Forest and LSTM [8], and evaluated novel structures like single versus dual LSTM [9]. Critically, all of these studies [7–9] primarily assess performance solely in terms of minimizing predictive error, a methodology which is demonstrably insufficient.

As evidenced by numerous investigations [2–4], the RMSE is and inherently deficient metric for evaluating trading models. Because it fails to accurately reflect practical trading objectives [2, 4], overlooks profitability and directionality [2, 4], and is highly susceptible to market noise [3].

While minority of studies [10, 11] have explored use of classification framework instead of forecasting. It lacks direct comparative analysis between the regression and classification methodologies.

This necessitates exploring correlation between ML objective function and model performance in algorithmic trading. Our study will compare: System A would use forecasting model as signal generator, System B would use classification model with single time-frame features, System C would use classification model with multi-timeframe forecasting features.

4. Materials and Methods. LSTM model. Long Short-Term Memory (LSTM) networks [9] are a type of neural network that is capable of learning from long sequences of data. LSTMs have memory that helps them remember important information from past data. This allows them to build connections on how past events impact future.

LSTM has forget gates, input gates, and output gates. These gates control how information flows inside the LSTM's memory. LSTM can decide which information to keep, which to forget, and how to combine it with new data to make better predictions.

Normalization is used to bring data to a common scale. In this study, the min-max technique (1) was employed:

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (1)$$

All development were done using Python [12]. Python is high-level programming language that is industry standard for Machine Learning. It became industry stan-

dard because it's easy to read with simple syntax and rich ecosystem of libraries that utilizing C++ for performance. Pandas library was used for data storing, manipulation, cleaning. For ML-models were used TensorFlow / Keras [13]. Matplotlib was used for visualisation.

5. Experiments.

1. Datasets.

The primary financial asset investigated was XAU/USD.

We trained regression LSTM model for System A on Dataset A, which consists of 124 176 rows. It was gathered from the finance.yahoo.com website.

Dataset A was collected on 15 minutes time-frame. And includes data for time period from 01 January 2020 to 31 December 2024. Dataset has 8 columns. First column labeled as Date Time serving as an index. The following four columns labeled as Open, High, Low, Close were used as input features.

We trained classification LSTM models (System B and System C) on dataset of trades. Let's call it Dataset B. Dataset B were data-mined from Dataset A.

Dataset B consists of 124 176 rows. And following columns: Entry time — time when trade was entered, also serving as an index; entry price; open; high; low; close; exit time — time when trade was closed; direction — direction of trade (either 1 (Long) or -1 (Short)); exit price — price when trade was closed; win — binary outcome; profit — return magnitude. All columns except typed as “datetime”, win and profit — are features. Win — is target variable.

Data were normalized to a range of [0, 1] using the Min-Max normalization technique as shown in (1).

All datasets were divided into In Sample (IS) — used for training and tuning of model and Out of Sample (OOS) — used for evaluation of model (backtesting). IS includes data for time period from 01 January 2020 to 31 December 2023. OOS includes data for time period from 01 January 2024 to 31 December 2024. IS were divided into training set (first 70% rows) and test set (last 30% rows).

2. Scheme of experiment.

Gathering Dataset A. Dataset A was acquired by utilizing “yfinance” Python library.

Creating Dataset B. Dataset B was generated through a data-mining process applied to the raw price data of Dataset A. For each data point, a hypothetical trade was initiated with predefined SL equal $2 \times \text{ATR}$ and TP equal $6 \times \text{ATR}$. Initial direction was selected randomly. The outcome of each trade—recorded as either a win or loss—was then documented, and the process advanced to the subsequent data point.

System A. Dataset A was utilized to train a forecasting model based on LSTM architecture as referenced in [1]. The model implementation was conducted using TensorFlow library.

Decision Support System A was subsequently developed to utilize Model A as signal source. On the first tick of each bar Model A generates a prediction for high low and close of this bar based of prior bars. Based on this forecasted price data system executes one of three discrete actions: “Enter Long”, “Enter Short” or “Does nothing”.

System B. As a preparatory step, Dataset B was enriched with an array of trend, momentum, and volatility indicators derived from the 15-minute OHLC data.

Subsequently, an LSTM classification model (Model B) was trained on this augmented dataset. Early Stopping was employed to mitigate risk of overfitting.

Decision Support System B uses model B as its signal source. At the beginning of each bar all features are passed to the Model B. To determine the directional action, Model B performs two separate classifications (one for Long and one for Short), yielding a probability of success (P) for each direction.

The activation rule is governed by a confidence threshold (Θ). If the probability of a win exceeds the threshold for only one direction, a trade is initiated in that direction. If the probability of a win exceeds the threshold for both directions, the trade is opened in the direction with the higher probability. If the probability of a win falls short of the threshold for both directions, the system executes a null action (does nothing).

The theoretical minimum threshold, derived via Expected Value optimization given our risk-to-reward ratio of 1:3, is 0.25. However, to ensure robust performance accounting for transaction costs, model uncertainty, and risk-adjusted returns, a conservative threshold of 0.5 was selected. This choice optimally balances the trade-off between expected return and variance: a lower threshold would significantly increase position variance and exposure to unnecessary risk, whereas a higher threshold would unacceptably diminish the opportunity set. The Stop Loss (SL) and Take Profit (TP) levels are set identically to the parameters utilized during the generation of Dataset B.

System C. System C represents an architectural extension of System B, developed with an identical modeling approach but with a significantly expanded feature set. System C incorporates features calculated based on the current 15-minute timeframe in conjunction with technical indicators derived from higher timeframes (1-Hour and 4-Hour).

Implementing Backtesting framework. The specific computational requirements of this comparative analysis necessitated the development of a proprietary backtesting framework. Existing backtesting solutions were insufficient due to performance limitations and an inability to incorporate the non-standard architectures of Systems B and C.

Upon completion of all prerequisite, backtesting was executed on OOS data. All system simulations were initialized with initial balance of \$100,000 and fixed Risk-Per-Trade of 0.5%.

6. RESULTS. Table 1 presents the results obtained for the Systems A,B and C on OOS.

Table 1.

DSS backtesting results

	System A	System B	System C
Final Balance	\$109,083.41	\$207,275.17	\$3,383,686.07
Total Return	9.08%	107.28%	3283.69%
Win Rate	45.98%	38.66%	67.08%
Profit Factor	1.18	1.03	4.87
Max Drawdown	5.76%	66.91%	2.07%

In Figures 1-3 compared results of each of Systems A, B and C.

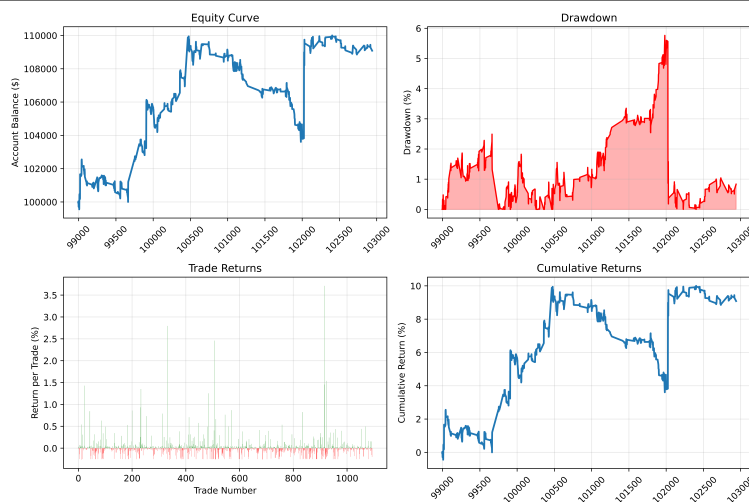


Figure 1. Equity curve, drawdown, trade returns and cumulative returns of System A.

The Equity Curve for System A demonstrates the capacity for sustained capital appreciation, a finding strongly supported by the Cumulative Returns chart. However the system's inherent risk profile is linked to significant, periodic drawdowns as evidenced by the Drawdown chart Furthermore.

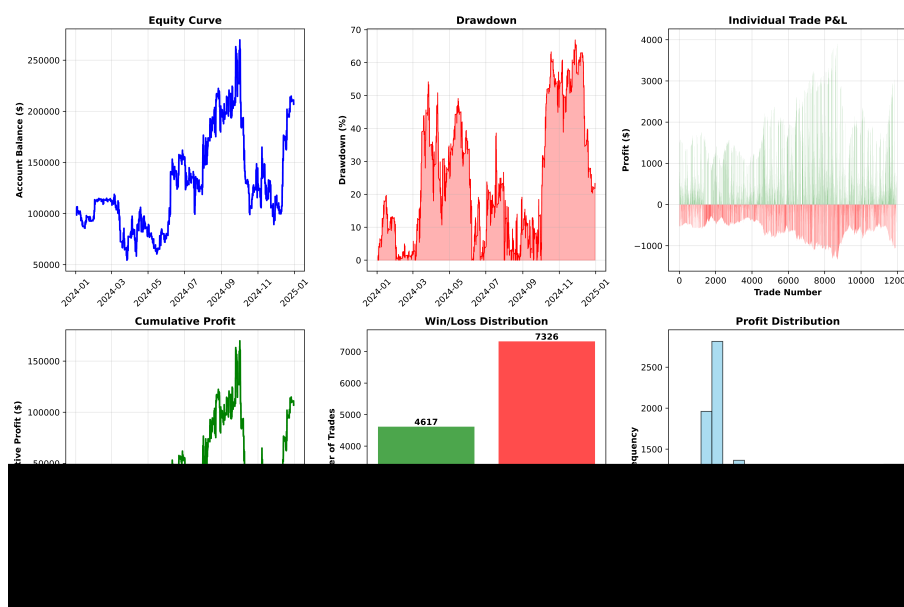


Figure 2. Equity curve, drawdown, trade returns and cumulative returns of System A.

The Equity Curve and Cumulative Profit metrics for System B exhibit characteristics analogous to those observed in System A. However, System B demonstrates a superior capacity for capital growth, achieving higher returns. This enhanced profitability is, accompanied by a higher degree of aggressiveness and increased frequency of periodic drawdowns, followed by rapid recovery cycles.

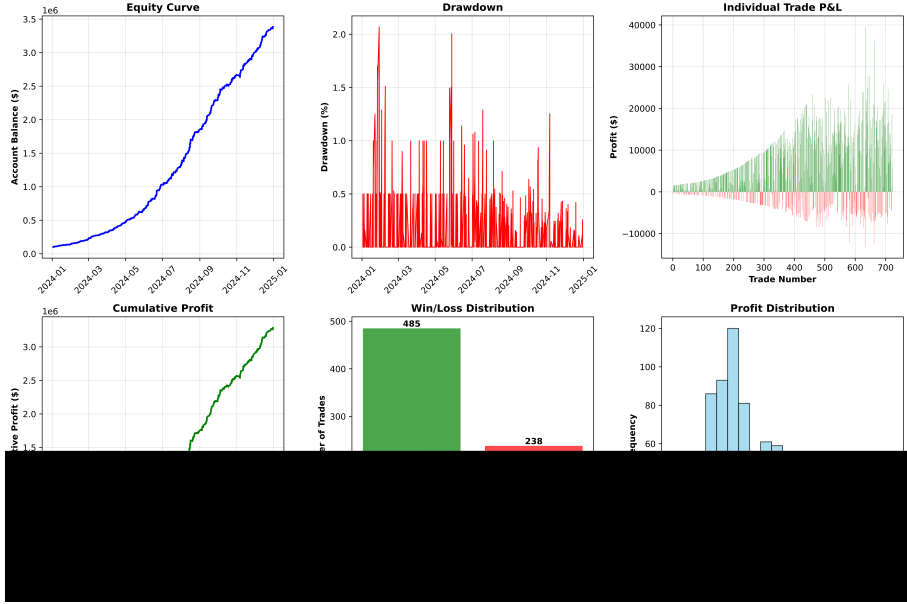


Figure 3. Equity curve, drawdown, trade returns and cumulative returns of System C.

The Equity Curve and Cumulative Profit plots for System C unequivocally demonstrate steady, exponential capital growth. The system achieves profitability levels that exceed the aggression demonstrated by System B. Crucially, however, the Drawdown chart confirms that the maximal drawdown was constrained to approximately 2%, with all drawdowns characterized by rapid recovery cycles. Overall, System C successfully couples high-magnitude profit generation (similar to System B) with superior risk containment (manifested in faster recovery and a significantly smaller maximal drawdown), validating its optimization as the most efficient architecture.

7. DISCUSSIONS. Although System A, operating under conventional regression paradigm, achieved a competitive MAE equal to 0.0337. The comparative analysis demonstrated the superior efficacy of the classification-based approaches. Specifically, Systems B and C exhibited metrics that are demonstrably more aligned with real-world objective of trading (Table 1). While System A is capable of generating profit, its equity curve (Figure 1) is overly volatile, yielding relatively modest returns. System B (Figure 2), which utilizes the classification ML model, generates substantially higher returns, though this is accompanied by elevated drawdowns. Ultimately, System C, which integrates multi-timeframe features into the classification, is confirmed to deliver highly stable results characterized by minimal drawdowns (Figure 3).

8. CONCLUSIONS. The problem of development and comparative analysis of the performance of three distinct algorithmic trading DSS (A, B, C) to determine

the optimal mathematical framing of the market prediction has been solved.

The scientific novelty of the obtained results is summarized as follows:

1. Systems A, B and C were applied to the algo-trading of the XAU/USD currency pair at 15M timeframe;
2. the hyperparameters of the models and the architecture of neural networks were adjusted in accordance with the tasks under consideration;
3. to identify the most effective ML objective function, a critical analysis of the results was conducted, encompassing both visualisations and financial metrics;
4. according to the results of the study, the best system was System C with Total Return — 3283.69%, Win Rate — 67.08% and Max Drawdown — 2.07%.

The practical significance of our findings lies in the development of three DSS: System A, System B, System C. Experiments have demonstrated that framing trading as classification problem instead of forecasting problem leads to improving performance metrics of resulting DSS. This software can empower traders with the ability to make better decisions and therefore maximizing profitability. Furthermore, the models and the underlying methodology presented in this work can serve as valuable resources for other researchers seeking to advance the field of financial forecasting.

Future research is to develop a method for Risk and Money Management with ML-models. Also future researches could focus on implementing DSS that would account for early stopping, and exiting position before reaching SL/TP, or implementing Trailing SL. It is also planned to enhance current decision support system to account for model decay.

References

1. Kondruk, N. E., & Hetsko, S. V. (2024). Forecasting currency rates using machine learning models. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 45(2), 205–215. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).205-215](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).205-215)
2. Shah, J., Vaidya, D., & Shah, M. (2022). A comprehensive review on multiple hybrid deep learning approaches for stock prediction. *Intell. Syst. Appl.*, 16, 200111. <https://doi.org/10.1016/j.iswa.2022.200111>
3. Sattar, A., Sarwar, A., Gillani, S., Bukhari, M., Rho, S., & Faseeh, M. (2025). A Novel RMS-Driven Deep Reinforcement Learning for Optimized Portfolio Management in Stock Trading. *IEEE Access*, 13, 42813–42835. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3546099>
4. Liu, F., Guo, S., Xing, Q., Sha, X., Chen, Y., Jin, Y., & Zheng, Q. (2024). Application of an ANN and LSTM-Based Ensemble Model for Stock Market Prediction. In *2024 IEEE 7th International Conference on Information Systems and Computer Aided Education (ICISCAE)*, 390–395. <https://doi.org/10.1109/ICISCAE62304.2024.10761432>
5. Sako, K., Mpinda, B. N., & Rodrigues, P. C. (2022). Neural networks for financial time series forecasting. *Entropy*, 24(5), 657. <https://doi.org/10.3390/e24050657>
6. Alfredo, C. S., & Adytia, D. A. (2022). Time series forecasting of significant wave height using GRU, CNN-GRU, and LSTM. *Jurnal RESTI (Rekayasa Sistem dan Teknologi Informasi)*, 6(5), 776–781. <https://doi.org/10.29207/resti.v6i5.4160>
7. Taslim, D. G., & Murwantara, I. M. (2022). A Comparative Study of ARIMA and LSTM in Forecasting Time Series Data. In *2022 9th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering (ICITACEE)*. Semarang: Indonesia, 231–235. <https://doi.org/10.1109/ICITACEE55701.2022.9924148>
8. Ghosh, P., Neufeld, A., & Sahoo, J. K. (2021). Forecasting directional movements of stock prices for intraday trading using LSTM and random forests. *Finance Research Letters*, 102280. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102280>
9. Gajamannage, K., Park, Y., & Jayathilake, D. (2023). Real-time forecasting of time series

- in financial markets using sequentially trained dual-LSTMs. *Expert Syst. Appl.*, 223, 119879. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.119879>
10. Dezhkam, A., Manzuri, M., Aghapour, A., Karimi, A., Rabiee, A., & Shalmani, S. (2022). A Bayesian-based classification framework for financial time series trend prediction. *The Journal of Supercomputing*, 79, 4622–4659. <https://doi.org/10.1007/s11227-022-04834-4>
 11. Chalkidis, N., & Savani, R. (2021). Trading via selective classification. *Proceedings of the Second ACM International Conference on AI in Finance*. <https://doi.org/10.1145/3490354.3494379>
 12. Welcome to python.org. Retrieved from <https://www.python.org>
 13. TensorFlow. Retrieved from <https://www.tensorflow.org>

Кондрук Н. Е., Гецько С. В. Розробка систем підтримки прийняття рішень на основі машинного навчання з мульти-таймфреймними даними для алгоритмічної торгівлі на ринку Форекс.

Ефективність систем підтримки прийняття рішень (СППР) на ринку іноземних валют (FOREX) критично залежить від обраного таймфрейму та цільової функції машинного навчання (ML-ціль). Необхідність визначення оптимального поєднання цих факторів обумовлює актуальність даного дослідження. Метою роботи є розробка та здійснення порівняльного аналізу продуктивності трьох архітектур СППР (Системи А, В та С) для встановлення оптимального математичного формулювання задачі прогнозування ринку.

Було імплементовано три архітектури: Система А базується на регресійному прогнозуванні; Система В використовує класифікацію на ознаках одного таймфрейму (15M); Система С застосовує класифікацію з використанням мульти-таймфреймних ознак. Навчання моделей проведено на історичних даних, а їхня ефективність верифікована шляхом бектесту проведеного на незалежному (OOS) наборі даних.

Проведено дослідження впливу мульти-таймфреймних ознак та ML-цілі на продуктивність СППР для активу XAU/USD. За результатами порівняльного аналізу, Система С продемонструвала виняткові результати, перевершивши інші архітектури: загальна прибутковість склала 3283,69%, а максимальна просадка (Max Drawdown) — лише 2,07%. Перспективи подальших досліджень включають: розробку інтегрованої методології управління ризиками на базі ML-моделей; впровадження механізмів раннього закриття позицій (зокрема, Trailing SL); та вдосконалення СППР для компенсації деградації моделі.

Ключові слова: алготрейдинг, FOREX, машинне навчання, прогнозування, класифікація, LSTM.

Recived 25.08.2025

УДК 004.8:007:681.7

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).177-188](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).177-188)

І. М. Лях¹, Ю. Ю. Млавець², М. В. Пономарьов³, А. Ю. Ціпіньо⁴

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін,
доктор технічних наук, професор
igor.lyah@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5417-9403>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрант 1-ого курсу ОПП «Комп'ютерно-математичне моделювання»
ponomarov.mykhailo@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5064-9232>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрант 1-ого курсу ОПП «Управління ІТ проектами»
tsipino.artemii@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-1704-2732>

AI-ОКУЛЯРИ ЯК ІНКЛЮЗИВНА ТЕХНОЛОГІЯ: ІІІ, РОЗПІЗНАВАННЯ, ПЕРЕКЛАД, ДОСТУПНІСТЬ

AI-окуляри є новим поколінням носимих технологій, що поєднують класичний дизайн із можливостями штучного інтелекту. На відміну від VR/AR-шоломів, вони зберігають компактність та зручність щоденного використання, виконуючи роль персонального асистента. Завдяки камерам, сенсорам та алгоритмам ІІІ AI-окуляри забезпечують розпізнавання об'єктів, переклад мовлення у реальному часі та надання контекстної інформації. Це робить їх перспективними не лише для повсякденного застосування, а й для інклюзивних рішень — підтримки людей із порушеннями зору чи слуху та створення доступних інтерфейсів для комунікації й навігації.

Актуальність дослідження визначається зростанням ринку носимих пристроїв, потребою в ергономічних технологіях та необхідністю оцінки ефективності інтегрованих ІІІ-моделей. Метою роботи є комплексна оцінка AI-окулярів у практичних сценаріях: медичній реабілітації, безпеці, освіті, туризмі та подоланні мовних бар'єрів. Для цього проаналізовано сучасні дослідження й розробки у сфері розпізнавання об'єктів, перекладу мовлення, енергоефективності та інтерфейсів, заснованих на погляді.

Особливу увагу приділено працям, що демонструють потенціал gaze-based interaction, інклюзивних систем навігації для людей із порушеннями зору, real-time перекладу мовлення та субтитрування, а також підходів до захисту приватності користувачів. У низці досліджень відзначено перспективність моделей YOLO v8s та TinyissimoYOLO, які забезпечують баланс між швидкістю, точністю та енергоефективністю. Також розглянуто практичні рішення провідних брендів (Ray-Ban Meta, Oakley Meta HSTN, Xiaomi AI Glasses), що ілюструють різні стратегії ринку: від компактності та дизайну — до автономності й адаптивних функцій.

Для кількісної оцінки запропоновано інтегральний коефіцієнт ефективності (ІКЕ), що враховує точність розпізнавання, час обробки, стабільність і задоволеність користувачів. На основі аналізу обчислено ІКЕ для окремих моделей, що дозволяє визначати їхню придатність у різних сценаріях — від медичної реабілітації до освітніх і туристичних застосувань.

Отримані результати свідчать про високу ефективність AI-окулярів як інклюзивної технології та перспективу їхнього поширення у сфері персональних асистентів.

Подальші дослідження мають бути спрямовані на вдосконалення приватності, підвищення автономності та розробку адаптивних алгоритмів, що здатні забезпечити стабільність і надійність роботи у динамічних умовах.

Ключові слова: AI-окуляри, штучний інтелект, носимі технології, розпізнавання об'єктів, інтегральний коефіцієнт ефективності.

1. Вступ. AI-окуляри є новим етапом розвитку носимих технологій, які поєднують класичний дизайн окулярів із можливостями штучного інтелекту. На відміну від VR- та AR-шоломів (Virtual Reality, Augmented Reality), вони зберігають компактність, орієнтовані на щоденне використання і виконують роль персонального асистента, забезпечуючи швидкий доступ до інформації та підтримку взаємодії з цифровим середовищем. Інтеграція камер, сенсорів та алгоритмів ШІ дозволяє AI-окулярам виконувати завдання розпізнавання об'єктів, перекладу мов у реальному часі та надання контекстної інформації користувачу.

Сучасні дослідження показують високий потенціал AI-окулярів для підтримки людей із порушеннями зору та слуху, забезпечуючи навігацію, переклад жестової мови та озвучування інформації, сприяючи інклюзії та підвищенню автономності користувачів. Крім того, AI-окуляри демонструють ефективність у сфері безпеки, правоохоронної діяльності, туризму та освіти, надаючи можливість оперативної обробки інформації, перекладу іноземних мов та створення персоналізованих AR-рішень.

Актуальність дослідження зумовлена швидким розвитком ринку носимих технологій, доступністю та ергономічністю AI-окулярів, а також необхідністю оцінки їх ефективності у практичних сценаріях. Вивчення ключових параметрів роботи ШІ-моделі, таких як: точність, швидкість, стабільність та задоволеність користувачів, дозволяє здійснити комплексну оцінку продуктивності пристрою. Це створює основу для подальшого вдосконалення AI-окулярів та розширення їх застосування у повсякденному житті, професійній діяльності та соціальній інтеграції.

2. Основний результат. Постановка завдання. Метою дослідження є оцінка ефективності роботи ШІ-моделі в AI-окулярах та визначення їх придатності для практичного застосування у різних сферах, таких як: медична реабілітація, забезпечення безпеки, подолання мовних бар'єрів, туризм та освіта. Для цього необхідно проаналізувати сучасні дослідження та публікації щодо AI-окулярів, зокрема щодо розпізнавання об'єктів, перекладу мовлення, інтерактивності на основі погляду та енергоефективності обчислень. Дослідження передбачає оцінку ключових параметрів ефективності ШІ-моделі, включно з точністю розпізнавання, швидкістю обробки даних, задоволеністю користувачів та стабільністю роботи пристрою. На основі отриманих даних здійснюється кількісна та якісна оцінка моделі для різних сценаріїв використання, що дозволяє визначити, у яких умовах AI-окуляри працюють ефективно, а де можливі обмеження. Очікуваним результатом є комплексна оцінка ефективності AI-окулярів та рекомендації щодо їх практичного застосування у різних сферах життя.

3. Аналіз останніх досліджень та публікацій. У сучасних дослідженнях, присвячених розумним окулярам із вбудованим ШІ, значну увагу приділяють інтеграції штучного інтелекту для обробки зображень, аудіо та взаємо-

дії користувача через погляд. У роботі Li Shi та ін. [1] проведено eye-tracking експеримент для аналізу того, як інтерактивність у III-системах впливає на поведінку користувачів. Результати показали, що можливість змінювати параметри прогнозів штучного інтелекту збільшує час взаємодії та концентрацію уваги користувачів, що підтверджує перспективність впровадження gaze-based interaction у носимі пристрої, зокрема у розумні окуляри.

У роботі Y. Rajesh та ін. [2] запропоновано модель AI-enhanced смарт-окулярів, орієнтованих на допомогу людям із вадами зору та глухонімих користувачів. Пристрій інтегрує камеру, мікрофон, акселерометр та алгоритми штучного інтелекту для ідентифікації об'єктів і перешкод, а також містить модуль синтезу мовлення для озвучування інформації. Таким чином, система забезпечує не лише навігацію в просторі, а й створює додаткові можливості для комунікації, що підкреслює значний потенціал смарт-окулярів як інклюзивної технології.

У роботі Jan Figura, Rafał Kuźmiczuk та Marcin Badurowicz [3] проведено аналіз систем розпізнавання об'єктів у контексті їх використання в окулярах доповненої реальності. Автори порівняли чотири сучасні моделі — Faster R-CNN ResNet-101 v1, YOLO v8s, SSD MobileNet v2 та EfficientDet Lite 2 — за параметрами точності, швидкості, енергоефективності та придатності для роботи у реальному часі. Результати показали, що моделі з одностадійною архітектурою (зокрема YOLO v8s) є найбільш оптимальними для безпосередньої інтеграції у смарт-окуляри, оскільки забезпечують баланс між продуктивністю та ресурсозатратами.

У дослідженні Julian Moosmann та ін. [4] було запропоновано спеціалізовану платформу для надзвичайно енергоефективного обчислення прямо «на пристрої». Використовуючи новий багатоядерний RISC-V процесор GAP9 та сімейство надлегких моделей TinyissimoYOLO, автори досягли роботи з продуктивністю до 18 FPS при споживанні лише 62.9 mW. Це забезпечує до 9 годин безперервної роботи від малої батареї, що є проривним результатом для носимих пристроїв. Таким чином, TinyissimoYOLO демонструє, що смарт-окуляри можуть одночасно бути високопродуктивними та автономними, відкриваючи шлях до масового використання.

У дослідженні Cristian Pamprău та Radu-Daniel Vatavu [5] представлено платформу FlexiSee, що розроблена для гнучкого налаштування та кастомізації функцій смарт-окулярів у контексті зорової реабілітації. Система дозволяє застосовувати різні візуальні фільтри (корекція кольору, підсвічування контурів, регулювання контрасту тощо), які можуть бути налаштовані дистанційно через веб-інтерфейс із будь-якого пристрою. Особливої уваги заслуговує введення концепції «vision monitors and assistants», тобто користувачів, які отримують можливість віддалено допомагати людям із порушеннями зору, контролюючи параметри візуальної реальності. У ході користувацького дослідження автори показали високу оцінку зручності (середній SUS score — 75,3) та корисності системи. Це дослідження підкреслює перспективність індивідуально налаштованих AR-рішень для підтримки людей із різними станами зору та в процесі реабілітації.

У дослідженні Advait Bal та ін. [6] розглядається розробка AR-окулярів для реального часу перекладу та субтитрування, орієнтованих на людей із вадами слуху та користувачів, що спілкуються різними мовами. Система поєднує то-

чне перетворення мови в текст, інтеграцію на дисплей окулярів та ефективний real-time переклад. Автори наголошують на важливості забезпечення безперешкодної комунікації для користувачів та підтримки культурного обміну, що робить технологію не лише інноваційною, а й соціально значущою. Результати підкреслюють перспективність інтеграції AI у носимі пристрої для покращення взаємодії та інклюзивності.

У роботі Ziyang Zhang та ін. [7] досліджуються аспекти конфіденційності при використанні Vision-Language Models (VLM) на смарт-окулярах. Автори аналізують 376 реальних взаємодій користувачів із VLM і виявляють часті випадки ненавмисного розкриття чутливої інформації (обличчя людей, місцезнаходження, контент екранів). Для захисту приватності запропоновано механізм автоматичного обрізання зображень за допомогою жестів рук, що дозволяє користувачам контролювати дані, які передаються VLM. Результати показали зменшення явних витоків приватних даних на 70,6% та прихованих на 47,6%, при збереженні якості роботи моделей. Попереднє дослідження користувачів підтвердило інтуїтивність та ефективність цього підходу. Це дослідження підкреслює важливість розробки privacy-friendly рішень для AI-окулярів.

4. Виклад основного матеріалу. AI-окуляри — це новий етап розвитку носимих технологій, які поєднують класичний дизайн окулярів із можливостями штучного інтелекту. Вони суттєво відрізняються від VR-шоломів, що занурюють користувача у віртуальну реальність, та AR-шоломів, які накладають цифрові елементи на фізичний світ. На відміну від них, AI-окуляри зберігають компактність і орієнтовані на щоденне використання у повсякденному житті. Якщо VR та AR найчастіше застосовуються для ігор, навчання чи професійної діяльності, то AI-окуляри позиціонуються як персональний асистент для швидкої та зручної взаємодії з інформаційним середовищем.

Як зазначають Aluri Anand Sai та Ravali Gunda у дослідженні, поєднання сенсорів, камер і алгоритмів ШІ дозволяє таким пристроям виконувати широкий спектр завдань: переклад мов у реальному часі, розпізнавання об'єктів, надання контекстної інформації користувачу [8]. Це робить їх універсальними та відмінними від вузькоспеціалізованих VR/AR-рішень.

Актуальність дослідження AI-окулярів зумовлена кількома чинниками:

- Швидке зростання ринку носимих технологій — AI-окуляри стають однією з найдинамічніших категорій.
- Інтеграція зі штучним інтелектом — обробка інформації відбувається в реальному часі, відкриваючи нові сценарії використання.
- Доступність та ергономічність — легкий дизайн робить їх придатними для щоденного використання, на відміну від громіздких VR/AR-шоломів.

Таким чином, AI-окуляри можна розглядати як логічний етап еволюції від VR/AR до компактних і зручних пристроїв нового покоління, які інтегрують у собі функції «розумного асистента» та змінюють підхід до взаємодії з цифровим середовищем. Сучасні AI-окуляри представлені на ринку кількома провідними брендами, серед яких виділяються Ray-Ban Meta, Oakley Meta HSTN та Xiaomi AI Glasses (дві модифікації). Порівняльні характеристики наведено у таблиці.

Ray-Ban Meta — найкраще підходять для щоденного використання завдяки компактності, класичному дизайну та прийнятній ціні. Недолік — відносно невеликий час роботи (4 години). Підтвердженням важливості автономності та

Таблиця 1.

Порівняльні технічні характеристики основних моделей AI-окулярів

Параметр	Ray-Ban Meta	Oakley Meta HSTN	Xiaomi AI Glasses (Std)	Xiaomi AI Glasses (Col/Mono)
Камера	12 МП, 1080p відео	12 МП, 3K відео	12 МП, 2K відео	12 МП, 2K відео
Процесор	Snapdragon AR1 Gen1	Snapdragon AR1 Gen1	Snapdragon AR1 + BES2700	Snapdragon AR1 + BES2700
Мікрофони	5-мікр. масив	5-мікр. масив	5 мікрофонів	5 мікрофонів
Динаміки	2 open-ear	2 open-ear	2 динаміки	2 динаміки
Акумулятор (один заряд)	~ 4 год	~ 8 год	~ 8.6 год	~ 8.6 год
Бат. кейс (додатково)	+32 год (зарядний кейс)	+48 год (зарядний кейс)	— USB-C заряджається	— USB-C заряджається
Вага	~ 48–50 г	~ 49 г	~ 40 г	~ 40 г
Зберігання	32 GB	32 GB	32 GB	32 GB
Лінзи	різні (поляр, Rx, прозорі)	Prizm Polarized	Electrochromic/колірні/прозорі	Electrochromic/колірні/прозорі

зручності для масових користувачів є дослідження Boyuan Wang та ін., що аналізує застосування AI-окулярів у повсякденному житті та цифровому здоров'ї, підкреслюючи потребу у балансі між функціональністю та часом автономної роботи [9].

Oakley Meta HSTN — орієнтовані на активний стиль життя: довший час автономної роботи (8 год + 48 год у кейсі) та покращене відео (3K). Головний недолік — висока ціна. Їхня спрямованість на спортивні та активні сценарії підкріплюється аналізом Gobinath Aroganam та ін., який демонструє роль сенсорів у споживчих спортивних пристроях та важливість точності показників і надійності батареї для користувачів з активним способом життя [10].

Xiaomi AI Glasses — роблять акцент на балансі: легші за конкурентів (~ 40 г), найдовший час автономної роботи (8.6 год), але не мають зарядного кейсу. Важлива перевага — електрохромні лінзи, що дозволяють адаптуватися до освітлення. Такі характеристики роблять ці окуляри універсальним рішенням, поєднуючи комфорт, автономність та адаптивні функції для різних умов використання.

Для кількісного оцінювання ефективності роботи ШІ-моделі в смарт-окулярах доцільно використовувати інтегральний коефіцієнт ефективності (IKE), що враховує ключові параметри пристрою та моделі штучного інтелекту. Крім абсолютного значення IKE, важливо забезпечити інтерпретацію результатів для практичного застосування.

Застосування такої шкали дозволяє здійснювати не лише порівняльний аналіз різних моделей AI-окулярів, а й оцінювати потенційні перспективи їх впровадження у практичні сценарії, включно з медичними, освітніми та туристичними застосуваннями. Наприклад, у нашому аналізі інтегральний коефіцієнт ефективності для Xiaomi AI Glasses склав $E_{AI} = 0.7875$, що відносить їх до категорії ефективно, підкреслюючи добрий баланс автономності, адаптивних

Таблиця 2.

Шкала інтегральної ефективності ІІІ-моделі АІ-окулярів

Діапазон E_{AI}	Рівень ефективності	Характеристика
0.0 – 0.2	Дуже неефективно	Модель демонструє низьку точність, значні затримки у обробці даних та не забезпечує належного функціонального результату
0.2 – 0.4	Слабо ефективно	Робота моделі відбувається з частими помилками або значними затримками, ресурсомісткість залишається високою
0.4 – 0.6	Помірно ефективно	Завдання виконуються з середньою точністю, час обробки прийнятний, ресурси використовуються раціонально
0.6 – 0.8	Ефективно	Висока точність та стабільність роботи, невеликі затримки, оптимальне використання обчислювальних ресурсів
0.8 – 1.0	Дуже ефективно	Модель демонструє майже ідеальну продуктивність, швидку обробку даних, високу надійність та мінімальне споживання ресурсів

функцій та швидкості обробки даних.

Для комплексної оцінки ефективності ІІІ-моделі в АІ-окулярах доцільно враховувати кілька ключових параметрів, що впливають на продуктивність та практичну користь пристрою. Серед них можна виділити:

- Точність розпізнавання об'єктів, тексту або обличчя (A) — показує, як часто модель правильно класифікує об'єкти або виконує переклад тексту;
- Час обробки / затримка (T) — відображає швидкість реакції системи у реальному часі, де менший час відповіді свідчить про вищу ефективність;
- Використання ресурсів (R) — характеризує енергоспоживання та навантаження на процесор і пам'ять, що критично для портативних пристроїв;
- Стабільність та надійність (S) — відображає частоту помилок, зависань або некоректної роботи моделі.

Інтегральна ефективність ІІІ-моделі E_{AI} може бути описана за формулою:

$$E_{AI} = \omega_A \cdot A + \omega_T \cdot T_{norm} + \omega_R \cdot R + \omega_S \cdot S, \quad (1)$$

де $\omega_A + \omega_T + \omega_R + \omega_S = 1$ — вагові коефіцієнти, що відображають значущість кожного параметра у конкретному сценарії використання, а A , T_{norm} , R , S — нормалізовані величини від 0 до 1.

Нормалізований час відгуку розраховується як:

$$T_{norm} = 1 - \frac{T - T_{min}}{T_{max} - T_{min}}, \quad (2)$$

де T_{min} та T_{max} — мінімальний і максимальний час відгуку у розглянутому наборі сценаріїв. Таким чином, найменший час отримує значення 1, а найбільший — 0, а проміжні значення масштабуються лінійно.

Наприклад, якщо точність моделі становить 90% ($A = 0.9$), час обробки 0.5 секунди з максимально допустимих 1 сек ($T = 0.5$), середнє використання ресурсів ($R = 0.8$) та стабільність 95% ($S = 0.95$), інтегральна ефективність

моделі можна обчислити як зважену суму цих параметрів. Такий підхід дозволяє кількісно порівнювати різні моделі AI-окулярів та оцінювати їх придатність для різних сфер застосування, включно з медичною, освітньою, туристичною або професійною діяльністю.

Після визначення інтегрального коефіцієнта ефективності (ІКЕ) для порівняння технічних характеристик AI-окулярів доцільно розглянути й ефективність самих ШІ-моделей, що забезпечують функціональність цих пристроїв. Для цього можна ввести інтегральну оцінку ефективності ШІ-моделі E_{AI} , що відображає якість виконання основних завдань, таких як розпізнавання об'єктів, переклад мовлення або аналіз даних сенсорів. Значення цієї оцінки варіюється від 0 до 1, де 0 відповідає повній неефективності моделі, а 1 — максимальній продуктивності та надійності.

Для наочного представлення та узагальненого аналізу рівнів ефективності ШІ-моделі запропоновано шкалу, наведено у Таблиці 2. Вона дозволяє однозначно класифікувати роботу моделі від «дуже неефективної» до «дуже ефективної», враховуючи точність, швидкість обробки даних та оптимальність використання обчислювальних ресурсів.

У дослідженні Baig та ін. [11] було представлено комплексну оцінку системи AI-based Wearable Vision Assistance для людей із вадами зору. Автори протестували точність, швидкість, задоволення користувачів та надійність роботи пристрою в різних умовах. Зокрема, система продемонструвала високу точність розпізнавання об'єктів у хорошому освітленні (90%) та збереження працездатності навіть у слабкому світлі (80%). Час відгуку становив у середньому 1.5 секунди для режиму реального часу та 5.5 секунд для детальних запитів. Оцінка задоволення користувачів (SUS — System Usability Scale) сягнула 85/100, а понад 90% учасників заявили про готовність використовувати пристрій у повсякденному житті, що свідчить про високу зручність і прийнятність системи.

Важливим є також аспект стабільності: навіть за змінних умов освітлення пристрій демонстрував адекватну продуктивність, а у порівняльному аналізі показав кращу надійність та функціональність порівняно з аналогами. Таким чином, із цієї роботи було отримано всі необхідні дані для обчислення інтегральної оцінки ефективності за формулою (1) що робить її достатньою базою для розрахунків у даному дослідженні.

Таблиця 3.

Шкала інтегральної ефективності ШІ-моделі AI-окулярів

Параметр	Значення
A (Accuracy)	0.90 (good light), 0.80 (low light)
T (Response Time)	1.5 s (real-time), 5.5 s (detailed queries)
R (User Satisfaction)	SUS = 85/100; > 90% позитивних відгуків
S (Stability & Reliability)	Збереження роботи при різному освітленні; перевага над аналогами

Для базового оцінювання ефективності системи було запропоновано базовий набір вагових коефіцієнтів, які відображають важливість кожного параметра

у загальній інтегральній оцінці: точність (Accuracy), швидкодія (Response Time), задоволеність користувачів (User Satisfaction) та стабільність/надійність (Stability & Reliability). Вибрані ваги дозволяють збалансовано врахувати всі ключові аспекти роботи системи, не надаючи надмірного пріоритету жодному з них.

Для розрахунку за базовим профілем використано вагові коефіцієнти $\omega_A = 0.35$, $\omega_T = 0.25$, $\omega_R = 0.20$, $\omega_S = 0.20$. Нормалізований час відгуку обчислюється за формулою:

$$T_{norm} = 1 - \frac{T - 1.5}{5.5 - 1.5}, \quad (3)$$

де 1.5 с — мінімальний час (режим реального часу), а 5.5 с — максимальний (детальні запити).

Підставляючи значення з Таблиці 3 для хорошої освітленості та режиму реального часу ($A = 0.90$, $T_{norm} = 1.0$, $R = 0.85$, $S = 1.0$), отримуємо:

$$E_{AI} = 0.35 \cdot 0.9 + 0.25 \cdot 1 + 0.2 \cdot 0.85 + 0.2 \cdot 1 = 0.935.$$

Для режиму низької освітленості та детальних запитів ($A = 0.80$, $T_{norm} = 0.0$, $R = 0.85$, $S = 1.0$) інтегральна ефективність складає:

$$E_{AI} = 0.35 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0.85 + 0.2 \cdot 1 = 0.65.$$

Таким чином, інтегральна оцінка ефективності відображає зменшення результативності системи при збільшенні часу відгуку, одночасно враховуючи точність, задоволеність користувачів та стабільність її роботи.

АІ-окуляри сьогодні знаходять застосування у різних сферах життя, демонструючи універсальність і широкий спектр можливостей. У сфері медичної допомоги та реабілітації АІ-окуляри демонструють значний потенціал для полегшення повсякденного життя людей із порушеннями зору. Наприклад, система, представлена Satani та ін. [12], пропонує рішення для навігації та переміщення для користувачів із вадами зору. Пристрій обладнаний апаратними компонентами, такими як процесор Raspberry Pi, камера, акумулятор, окуляри та навушники, що дозволяє обробляти зображення безпосередньо на пристрої за допомогою глибинного навчання та моделей типу R-CNN. Виявлені об'єкти перетворюються на аудіосигнали, які подаються користувачу через навушники, забезпечуючи зручну та інтуїтивну взаємодію. Такий підхід демонструє практичну ефективність АІ-окулярів у підтримці автономності людей із порушеннями зору, а також відкриває перспективи для подальшого розвитку доступних та надійних assistive-технологій.

Крім користувачів із вадами зору, АІ-окуляри також можуть підтримувати людей із порушеннями слуху або глухонімих. Такі пристрої здатні відтворювати реальний світ у вигляді текстових субтитрів, перекладу мови жестів або синтезованого аудіо у реальному часі, полегшуючи комунікацію та інтеграцію у соціальні та професійні середовища. Технології, що поєднують комп'ютерний зір та обробку природної мови, дозволяють автоматично визначати мовні сигнали та конвертувати їх у зручну форму для сприйняття користувачем, тим самим підвищуючи незалежність та якість життя.

Одним із перспективних напрямів застосування АІ-окулярів є сфера безпеки та правоохоронної діяльності. Завдяки вбудованим камерам, мікрофонам і алгоритмам штучного інтелекту, такі пристрої можуть стати інструментом оперативної фіксації подій, розпізнавання облич та номерних знаків, а також аналізу поведінки підозрюваних у режимі реального часу. Це відкриває можливості для використання окулярів у патрулюванні, розслідуваннях та спеціальних операціях.

Проте науковці звертають увагу, що широке впровадження подібних технологій супроводжується суттєвими викликами у сфері конфіденційності та кібербезпеки. Так, у дослідженні *Opaschi та Vatavu* розглянуто практичні загрози, пов'язані з використанням окулярів із вбудованими відеокамерами. Автори показують, що навіть відносно дешеві моделі можуть створювати ризики порушення приватності як самого користувача, так і сторонніх осіб, потрапляючи під неконтрольований запис чи трансляцію. У статті продемонстровано проблеми із захистом даних, доступом до записів та можливістю несанкціонованого втручання, що ставить під сумнів надійність таких пристроїв у критично важливих сферах [13].

Таким чином, у правоохоронній діяльності АІ-окуляри мають подвійну природу: з одного боку, вони здатні значно підвищити ефективність і швидкість роботи завдяки миттєвому аналізу інформації, а з іншого — створюють нові вектори загроз, які потребують технічних рішень (захист каналів зв'язку, шифрування даних, обмеження доступу) та етичного регулювання.

Однією з найперспективніших сфер використання АІ-окулярів є подолання мовних бар'єрів. Туристичні поїздки та освітні процеси нерідко стикаються з проблемою нерозуміння іноземної мови, і саме тут на допомогу приходять технології штучного інтелекту. Дослідження *Zainab Rasheed та ін.* демонструє, що поєднання АІ та АR відкриває можливість для миттєвого перекладу та інтерпретації мовлення у режимі реального часу. Це означає, що користувач може спілкуватися у багатомовному середовищі без необхідності постійно звертатися до смартфона чи перекладача [14].

У сфері туризму це перетворює АІ-окуляри на персонального гίδα: вони можуть не лише відображати переклад під час розмови, а й накладати субтитри на дорожні знаки, меню чи інформаційні таблички. Відповідно, подорож стає комфортнішою та доступнішою навіть у країнах із зовсім іншою мовною культурою.

В освітньому процесі АІ-окуляри можуть стати інструментом інклюзії. Наприклад, студент, що слухає лекцію іноземною мовою, може бачити її текстовий переклад безпосередньо на лінзах. Це відкриває можливості для глобалізації освіти, міжнародних обмінів та дистанційного навчання. Водночас дослідження підкреслює, що для стабільної роботи потрібна якісна комунікаційна інфраструктура, адже миттєвий переклад вимагає швидкого з'єднання та ефективних алгоритмів обробки даних.

Таким чином, у туризмі та освіті АІ-окуляри виступають не лише як інноваційний гаджет, а як реальний інструмент для подолання бар'єрів між культурами та мовами, роблячи світ доступнішим для спілкування та навчання.

5. Висновки. Проведене дослідження дозволило здійснити комплексну оцінку ефективності AI-окулярів як нового покоління носимих технологій, що інтегрують можливості штучного інтелекту у компактний і зручний формат. На основі аналізу сучасних досліджень, технічних характеристик провідних моделей та практичних сценаріїв застосування встановлено, що:

1. AI-окуляри забезпечують функціональність персонального асистента, поєднуючи переклад мовлення у реальному часі, розпізнавання об'єктів, надання контекстної інформації та інклюзивні можливості для людей із порушеннями зору чи слуху.
2. Сучасні моделі (Ray-Ban Meta, Oakley Meta HSTN, Xiaomi AI Glasses) демонструють різні стратегії розвитку — від компактності та ергономіки до високої автономності й адаптивності. Це підтверджує тенденцію до сегментації ринку залежно від потреб користувачів.
3. Інтегральний коефіцієнт ефективності (ІКЕ) є доцільним інструментом для кількісної оцінки роботи ШІ-моделей в AI-окулярах. Він враховує точність, швидкодію, використання ресурсів та стабільність, що дозволяє об'єктивно визначати придатність пристроїв до конкретних сценаріїв застосування.
4. Практичні дослідження підтверджують значущість інновацій у сферах енергоефективності (TinyissimoYOLO), інклюзивності (FlexiSee, AI-enhanced smart glasses), приватності (Vision-Language Models із механізмами захисту даних) та соціальної інтеграції (системи перекладу та субтитрування).
5. Використання AI-окулярів у медицині, освіті, туризмі та безпеці має високий потенціал, що вже підтверджено як експериментальними результатами, так і позитивними відгуками користувачів у пілотних тестах.

Таким чином, AI-окуляри можна вважати перспективним етапом розвитку носимих технологій, здатним суттєво розширити можливості взаємодії людини з цифровим середовищем. Подальші дослідження мають бути зосереджені на розробці більш енергоефективних та приватність-орієнтованих рішень, а також на створенні адаптивних алгоритмів, що забезпечать високу точність і стабільність роботи в різних умовах.

Список використаної літератури

1. Shi, L., Bhattacharya, N., Das, A., Lease, M., & Gwizdka, J. (March, 2022). The effects of interactive ai design on user behavior: An eye-tracking study of fact-checking covid-19 claims. In *Proceedings of the 2022 Conference on Human Information Interaction and Retrieval*, 315–320.
2. Rajesh, Y., Bhaskar, K., Dinakar, K. A., Devi, T. K., & Priyanga, M. (08 February, 2025). AI Enhanced Arduino Based Customized Smart Glasses for Blind People Integrated with Speech Synthesis. In: Pareek, P., Mishra, S., Reis, M. J. C. S., & Gupta, N. (eds) *Cognitive Computing and Cyber Physical Systems. IC4S 2024. Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering*. Springer: Cham. 598, 317–331. https://doi.org/10.1007/978-3-031-77078-4_25
3. Figura, J., Kuźmiczuk, R., & Badurowicz, M. (2025). Analysis of object recognition systems using augmented reality glasses. *Journal of Computer Sciences Institute*, 34, 8–13. <https://doi.org/10.35784/jcsi.6469>
4. Moosmann, J., Bonazzi, P., Li, Y., Bian, S., Mayer, P., Benini, L., & Magno, M. (12 May, 2025). Ultra-efficient on-device object detection on ai-integrated smart glasses with tinyissimoyolo. In *European Conference on Computer Vision*, 15645, 262–280. https://doi.org/10.1007/978-3-031-91989-3_17

5. Pamparău, C., & Vatavu, R. D. (2021). FlexiSee: flexible configuration, customization, and control of mediated and augmented vision for users of smart eyewear devices. *Multimedia Tools and Applications*, 80(20), 30943–30968. <https://doi.org/10.1007/s11042-020-10164-5>
6. Bal, A., Anjana, P., Devi, K. G., Upot, V. S., Abhishek, S., & Anjali, T. (31 October, 2024). AR Glasses for Real-Time Translation and Subtitling. In *International Conference on Information and Communication Technology for Intelligent Systems*. Springer Nature: Singapore. 279–288. https://doi.org/10.1007/978-981-97-6678-9_25
7. Zhang, Z., Bao, C., Pan, X., Chang, C. M., Igarashi, T., & Zhang, G. (April, 2025). Through the Lens of Privacy: Exploring Privacy Protection in Vision-Language Model Interactions on Smart Glasses. In *Proceedings of the Extended Abstracts of the CHI Conference on Human Factors in Computing Systems*. (530), 1–8. <https://doi.org/10.1145/3706599.3720234>
8. Sai, A. A., & Gunda, R. (2024). AI-Enabled Glasses. In *Handbook of Artificial Intelligence and Wearables*, 261–272.
9. Wang, B., Zheng, Y., Han, X., Kong, L., Xiao, G., Xiao, Z., & Chen, S. (2025). A systematic literature review on integrating AI-powered smart glasses into digital health management for proactive healthcare solutions. *npj Digital Medicine*, 8(1), 410. <https://doi.org/10.1038/s41746-025-01715-x>
10. Aroganam, G., Manivannan, N., & Harrison, D. (2019). Review on Wearable Technology Sensors Used in Consumer Sport Applications. *Sensors*, 19(9), 1983. <https://doi.org/10.3390/s19091983>
11. Baig, M. S. A., Gillani, S. A., Shah, S. M., Aljawarneh, M., Khan, A. A., & Siddiqui, M. H. (2024). AI-based wearable vision assistance system for the visually impaired: Integrating real-time object recognition and contextual understanding using large vision-language models. *Preprint arXiv: 2412.20059*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.20059>
12. Satani, N., Patel, S., & Patel, S. (2020). AI powered glasses for visually impaired person. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*, 9(2), 416–421. <https://doi.org/10.35940/ijrte.B3565.079220>
13. Opaschi, O., & Vatavu, R. D. (2020). Uncovering practical security and privacy threats for connected glasses with embedded video cameras. *Proceedings of the ACM on Interactive, Mobile, Wearable and Ubiquitous Technologies*, 4(4), 1–26. <https://doi.org/10.1145/3432700>
14. Rasheed, Z., Ghwanmeh, S., & Almahadin, A. (03–05 June, 2024). A Critical Review of AI-Driven AR Glasses for Realtime Multilingual Communication. In *2024 Advances in Science and Engineering Technology International Conferences (ASET)*. IEEE. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ASET60340.2024.10708749>

Liakh I. M., Mlavets Yu. Yu., Ponomarov M. V., Tsipino A. Yu. AI Glasses as inclusive technology: AI, Recognition, Translation, Accessibility.

AI glasses are a new generation of wearable technology that combines classic design with artificial intelligence abilities. In contrast to VR/AR headsets, they remain compact and convenient for everyday use, acting as a personal assistant. Thanks to cameras, sensors, and AI algorithms, AI glasses provide object recognition, real-time speech translation, and contextual information. This makes them promising not only for everyday use, but also for inclusive solutions – supporting people with visual or hearing impairments and creating accessible interfaces for communication and navigation.

The relevance of the study is determined by the growth of the wearable device market, the need for ergonomic technologies, and the necessity to evaluate the effectiveness of integrated AI models. The aim of the work is to comprehensively evaluate AI glasses in practical scenarios: medical rehabilitation, security, education, tourism, and overcoming language barriers. In order to do this, current research and developments in the field of object recognition, speech translation, energy efficiency, and gaze-based interfaces were analysed.

Particular attention is paid to works demonstrating the potential of gaze-based interaction, inclusive navigation systems for people with visual impairments, real-time speech translation and subtitling, as well as approaches to protecting user privacy. A number of studies have noted the prospects of the YOLO v8s and TinyissimoYOLO models, which

provide a balance between speed, accuracy, and energy efficiency. Practical solutions from leading brands (Ray-Ban Meta, Oakley Meta HSTN, Xiaomi AI Glasses) are also reviewed, illustrating various market strategies: from compactness and design to autonomy and adaptive features.

For quantitative assessment, an integral efficiency coefficient (IEC) is proposed, which takes into account recognition accuracy, processing time, stability, and user satisfaction. Based on the analysis, the ICE has been calculated for individual models, allowing their suitability to be determined in various scenarios, from medical rehabilitation to educational and tourism applications.

The results obtained demonstrate the high effectiveness of AI glasses as an inclusive technology and the prospect of their widespread use in the field of personal assistants. Further research should be aimed at improving privacy, increasing autonomy, and developing adaptive algorithms capable of ensuring stability and reliability in dynamic conditions.

Keywords: AI glasses, artificial intelligence, wearable technologies, object recognition, integral efficiency coefficient.

Одержано 15.09.2025

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).189-198](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).189-198)**І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³, Ю. І. Духнов⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
ihor.mych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

⁴ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
yurii.dukhnov@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-0352-1699>

ПОВНЕ ОПИСАННЯ ЕКВАЦІОНАЛЬНИХ КЛАСТЕРІВ БУЛЕВИХ АЛГЕБР ПЕРШОГО ТИПУ

У дослідженні продовжено вивчення еквівалентних властивостей у класі булевих алгебр. Розглянуто широкий клас алгебр, що включає структури з нульарними, унарними та бінарними операціями. Уведено нові поняття — сигнатурні тотожності та еквівалентні кластери. Особливу увагу приділено кластерам першого типу, для яких можна виразити повну систему тотожностей однієї алгебри через іншу за допомогою сигнатурних тотожностей. У результаті визначено повні системи тотожностей для сорока чотирьох алгебр, що формують двадцять один еквівалентний кластер першого типу.

Ключові слова: повна система тотожностей, сигнатурна тотожність, еквівалентний кластер.

1. Вступ. Загальна теорія алгебр як окрема математична дисципліна сформувалася у 1935 році, коли Дж. Біркгоф опублікував свої класичні роботи, у яких довів основні теореми про повноту для еквівалентної логіки. Саме ця логіка стала ключовою для побудови сучасного апарату дослідження алгебраїчних структур, оскільки класи алгебр, що становлять основний інтерес для алгебраїстів, зазвичай аксіоматично визначаються системами тотожностей або перебувають у тісному зв'язку з такими системами [1].

Особливу роль у цій теорії відіграє булева алгебра — базовий інструмент двозначної логіки, який широко використовується у задачах обробки інформації, логічному програмуванні, побудові баз даних, аналізі цифрових схем та в моделюванні функціонування обчислювальних систем. Розвиток структурної теорії булевих алгебр привів до появи концепції еквівалентних підкласів, дослідження яких безпосередньо пов'язане з пошуком скінченних повних систем

тотожностей. Як відомо, питання про існування таких систем залишається відкритим навіть для скінченних алгебр. Результати Ліндона [2] показали, що майже всі двозначні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей, тоді як для багатозначних логік ситуація значно складніша.

Поняття еквівалентного кластеру виникло як узагальнення класичних еквівалентних класів, досліджуваних у працях Поста та пізніших представників алгебраїчної школи логіки. Еквівалентні властивості не обмежуються окремими множинами тотожностей, а можуть групуватися у системи взаємопов'язаних алгебр, які зберігають еквівалентну еквівалентність. Такі об'єднання отримали назву еквівалентних кластерів, і розглядаються як окремі об'єкти дослідження, що поєднують у собі ознаки класу, підкласу та відношення еквівалентності.

У цьому контексті особливий інтерес становить поняття еквівалентного кластеру булевих алгебр першого типу — структурної сукупності алгебр, пов'язаних спільними еквівалентними умовами, які забезпечують їхню тотожнісну сумісність та замкненість щодо основних алгебраїчних операцій. Дослідження таких кластерів дозволяє деталізувати механізми формування тотожностей у межах певного класу.

Метою цієї роботи є повне описання еквівалентних кластерів булевих алгебр першого типу, включно з аналізом їхніх внутрішніх зв'язків, систем породжувальних елементів, умов замкненості та відображень між підкластерами.

Отримані результати створюють основу для подальшої побудови узагальненої теорії еквівалентних систем, де булеві алгебри розглядаються як моделі логічних структур, що мають широке застосування у теоретичній інформатиці, штучному інтелекті та формальній логіці.

2. Клас булевих алгебр M_9 . Нехай задано клас універсальних булевих алгебр $M = \{U = \langle A, \Omega \rangle; A = \{0, 1\}; \Omega — деяка множина булевих операцій\}$. Позначимо через $R(U)$ множину всіх тотожностей алгебри U .

Означення 1. Алгебри U_1 і U_2 називаються еквівалентно еквівалентними, якщо $R(U_1) = R(U_2)$.

Означення 2. Алгебра U_1 еквівалентно вкладається в алгебру U_2 , якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Наслідок 1. Якщо алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ еквівалентно вкладається в алгебру $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, то $\Omega_1 \subset \Omega_2$.

Якщо $R(U_1) \subset R(U_2)$, а $\Omega_1 \not\subset \Omega_2$, то в алгебрі U_1 можемо побудувати формулу $F(\varphi)$, яка містить операцію $\varphi \in \Omega_1 - \Omega_2$. У цьому випадку тотожність $F(\varphi) = F(\varphi) \notin R(U_2)$.

Нехай $R(U_1) \subset R(U_2)$.

Означення 3. Тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\psi) \in R(U_2)$ називається сигнатурною, якщо $F_2(\varphi)$ — формула, яка реалізує операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$, а $F_1(\psi)$ — формула, яка належить алгебрі U_1 .

Наприклад, якщо $U_1 = \langle A, \neg, \vee, \wedge \rangle$, $U_2 = \langle A, \neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow \rangle$, то сигнатурні тотожності мають вигляд: $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$; $x \Leftrightarrow y = \bar{x} \bar{y} \vee xy$.

Означення 4. Алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ називається еквівалентним розширенням алгебри $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність

$$F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1).$$

Множину таких сигнатурних тотожностей позначимо через $R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Означення 5. Система тотожностей $H \subset R(U_1)$ називається повною в U_1 , якщо використовуючи операцію суперпозиції можна довести довільну тотожність до лексикографічної рівності, використовуючи тільки тотожності з H .

Наслідок 2. Якщо для алгебри U_1 знайдеться повна система тотожностей $H(U_1)$, а алгебра $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$ є екваціональним розширенням U_1 , то $H(U_2) = H(U_1) \cup R(\Omega_2 - \Omega_1)$.

Доведення твердження випливає з того, що сигнатурні тотожності дають можливість вивести операцію $\varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ з формул алгебри U_2 , звести їх до формул алгебри U_1 , для якої знайдена повна система тотожностей $H(U_1)$.

Означення 6. Алгебри $U_1, U_2, \dots, U_t \in M$ утворюють екваціональний кластер K , якщо в множині K існує така алгебра U^* , що $\forall U_i \in K$ існує така послідовність алгебр $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_t} \in K$, що $R(U_1) = R(U_{i_1}) \subset R(U_{i_2}) \subset \dots \subset R(U_{i_t}) = R(U^*)$, і $\forall U_t \notin K, R(U_t) \not\subset R(U^*)$.

Означення 7. Потужністю екваціонального кластеру називається число алгебр, які входять до його складу.

Означення 8. Алгебра $U_1 = \langle A, \Omega_1 \rangle$ називається екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, якщо $\forall \varphi \in \Omega_2 - \Omega_1$ існує сигнатурна тотожність $F_2(\varphi) = F_1(\Omega_1)$.

Якщо алгебра U_1 є екваціональним звуженням алгебри $U_2 = \langle A, \Omega_2 \rangle$, і для алгебри U_2 знайдена повна система тотожностей $H(U_2)$, то за допомогою сигнатурних тотожностей можемо ввести в сигнатуру алгебри U_1 операції $\Omega_2 - \Omega_1$.

У даній роботі досліджується клас універсальних алгебр

$$M_9 = \{U = \langle A, \Omega \rangle, A = \{0, 1\}, \Omega = \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \oplus, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow\}\}.$$

Алгебри цього класу утворюють дев'ятимірний сигнатурний куб. До складу цього кубу входять 512 алгебр. Кожна вершина кубу однозначно визначається сигнатурою, яку іноді позначають числом, що є розкладом за степенем двійки.

Екваціональні кластери зручно представляти у вигляді сигнатурно-еквіваціональних графів. Вершинами кластеру є алгебри, які входять до складу кластеру, а ребра позначають сигнатурними тотожностями, які з'єднують пари алгебр, одне з яких є екваціональним розширенням (звуженням) іншої.

Екваціональний кластер має алгебру, що має максимальну сигнатуру U^* і декілька елементів з мінімальною сигнатурою. Екваціональні кластери дають можливість:

- А) знаходити повні системи тотожностей для алгебр екваціонального кластеру;
- Б) передавати рівність $F_1 = F_2 \in R(U_1)$ для алгебри, для якої не знайдено повну систему тотожностей алгебри U_2 , для якої повні системи тотожностей знайдені.

Екваціональні кластери поділяються на три типи:

- 1) Кластери для яких виконано повне екваціональне описання. У цих кластерах для кожної алгебри знайдено повні системи тотожностей.
- 2) Кластери в яких виконано часткове екваціональне описання. Знайдена повна система тотожностей принаймні для однієї алгебри кластеру.
- 3) Кластери, в яких виконано початкове екваціональне описання: знайдені сигнатурні тотожності кластеру. Не знайдено жодної повної системи тотожностей для алгебри цього кластеру.

У даній роботі побудовані повні системи тотожностей для алгебр одноелементних кластерів.

Перший кластер N_0 складають алгебри, які мають екваціональну потужність 0, тобто в цих алгебрах не існує сигнатурних тотожностей. Цей клас складається з сімнадцяти алгебр, кожна з яких є одноелементним екваціональним кластером. Сімнадцять алгебр цього класу утворюють сигнатурний граф, представлений на рис. 1.

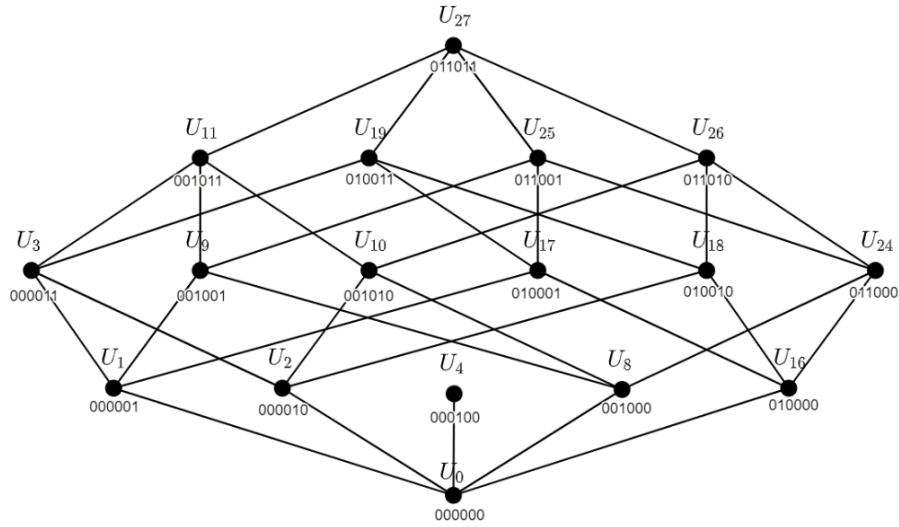


Рис. 1. Сигнатурний граф екваціональних алгебр потужності нуль.

Повна система тотожностей алгебр класу N_0 екваціональна потужності, яка дорівнює нулю.

1. Алгебра $U_0 = \langle A, \emptyset \rangle$. $H(U_0) = \{x_i = x_i\}$.
2. Алгебра $U_1 = \langle A, 0 \rangle$. $H(U_1) = \{x_i = x_i, 0 = 0\}$.
3. Алгебра $U_2 = \langle A, 1 \rangle$. $H(U_2) = \{x_i = x_i, 1 = 1\}$.
4. Алгебра $U_3 = \langle A, 0, 1 \rangle$. $H(U_3) = \{x_i = x_i, 0 = 0, 1 = 1\}$.
5. Алгебра $U_4 = \langle A, \neg \rangle$. $H(U_4) = \{x_i = x_i, \bar{x} = x\}$.
6. Алгебра $U_8 = \langle A, \wedge \rangle$. $H(U_8) = \{x_i = x_i, x_1 x_1 = x_1, x_1 x_2 = x_2 x_1, (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)\}$.
7. Алгебра $U_{16} = \langle A, \vee \rangle$. $H(U_{16}) = \{x_i = x_i, x_1 \vee x_1 = x_1, x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1, (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\}$.
8. Алгебра $U_{17} = \langle A, \vee, 0 \rangle$. $H(U_{16}) = \{H(U_{16}) \cup H(U_2), x \vee 1 = 1\}$.
9. Алгебра $U_9 = \langle A, \wedge, 0 \rangle$. $H(U_9) = \{H(U_1) \cup H(U_8), 0 \wedge x = 0\}$.
10. Алгебра $U_{10} = \langle A, 1, \wedge \rangle$. $H(U_{10}) = \{H(U_8) \cup H(U_2), x \wedge 1 = x\}$.

11. Алгебра $U_{18} = \langle A, 1, \vee \rangle$. $H(U_{18}) = \{H(U_2) \cup H(U_{16}), x \vee 1 = 1\}$.
12. Алгебра $U_{24} = \langle A, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{24}) = \{H(U_8) \cup H(U_{16}), x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3, x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3), x_1 \vee x_1x_2 = x_1, x_1(x_1 \vee x_2) = x_1\}$.
13. Алгебра $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$. $H(U_{11}) = \{H(U_9) \cup H(U_{10})\}$.
14. Алгебра $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$. $H(U_{19}) = \{H(U_{17}) \cup H(U_{18})\}$.
15. Алгебра $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{25}) = \{H(U_9) \cup H(U_{17}) \cup H(U_{24})\}$.
16. Алгебра $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{26}) = \{H(U_{10}) \cup H(U_{18}) \cup H(U_{24})\}$.
17. Алгебра $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$. $H(U_{27}) = \{H(U_{11}) \cup H(U_{19}) \cup H(U_{25}) \cup H(U_{26})\}$.

Наслідок 3. Повною системою тотожностей алгебри $U_{27} = \langle A, 0, 1, \wedge, \vee \rangle$ є система тотожностей, яка включає повні системи тотожностей алгебр $U_{11} = \langle A, 0, 1, \wedge \rangle$, $U_{19} = \langle A, 0, 1, \vee \rangle$, $U_{25} = \langle A, 0, \wedge, \vee \rangle$, $U_{26} = \langle A, 1, \wedge, \vee \rangle$.

Виписавши тотожності цих алгебр, отримаємо систему:

1. $x_1 \vee x_1 = x_1$; $x_1 \wedge x_1 = x_1$.
2. $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; $x_1x_2 = x_2x_1$.
3. $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$; $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$.
4. $(x_1 \vee x_2)x_3 = x_1x_3 \vee x_2x_3$; $x_1 \vee x_2x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$.
5. $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$; $x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$.
6. $0 \wedge x_1 = 0$; $1 \wedge x_1 = x_1$; $0 \vee x_1 = x_1$; $1 \vee x_1 = 1$.

Нехай F_1 і F_2 — формули алгебри U_{27} . Використовуючи тотожності (6), нуль і одиницю можна опустити або вони перетворюються у функції, які тотожно дорівнюють нулю або одиниці. За допомогою тотожностей (1-4) формули F_1 і F_2 зводяться до диз'юнктивної нормальної форми. Тотожності (5) дають можливість отримати диз'юнктивну нормальну форму, в якій кожна елементарна кон'юнкція не є власною частиною іншої. У роботі [6] показано, що таке представлення є єдиним відносно лексикографічного впорядкування.

Клас алгебр N_1 , які мають екваціональну потужність 1, складається з двох алгебр $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$ і $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. Сигнатурна тотожність $x \oplus x = 0$ дає можливість переходити від формули однієї алгебри до іншої. Ці алгебри утворюють двоелементний екваціональний кластер.

18. Алгебра $U_{32} = \langle A, \oplus \rangle$. $H(U_{32}) = \{x_1 \oplus x_1 = x_2 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, x_1 \oplus (x_2 \oplus x_2) = x_1, (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)\}$.
19. Алгебра $U_{33} = \langle A, \oplus, 0 \rangle$. $H(U_{33}) = \{x \oplus x = 0, H(U_{32})\}$.

Трьохелементний кластер N_2 утворюють алгебри $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$, $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$ і $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$.

20. Алгебра $U_5 = \langle A, \neg, 0 \rangle$. $H(U_5) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$. У цій алгебрі формули, за допомогою тотожності $\bar{\bar{x}} = x$, можуть бути приведені до формул вигляду $x, \bar{x}, 0, \bar{0}$.
21. Алгебра $U_6 = \langle A, \neg, 1 \rangle$. $H(U_6) = \{\bar{\bar{x}} = x\}$. Формули можуть бути приведені до формул вигляду $x, \bar{x}, 1, \bar{1}$.
22. Алгебра $U_7 = \langle A, \neg, 1, 0 \rangle$. $H(U_7) = \{\bar{\bar{x}} = x, \bar{1} = 0, \bar{0} = 1\}$.

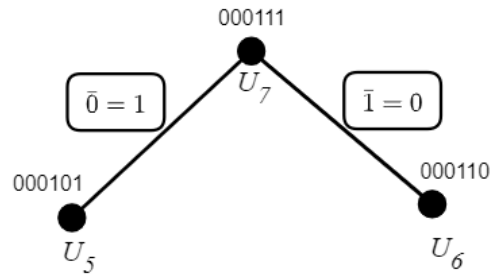


Рис. 2. Трьохелементний екваціональний кластер.

У класі M_9 маємо два двоелементні кластери, зображені на рис. 3.

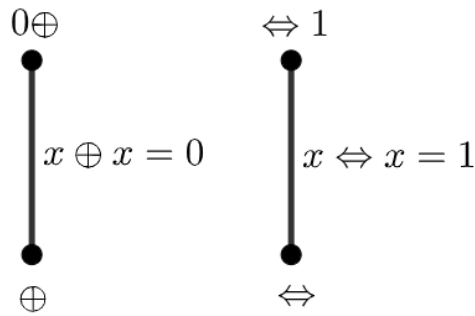


Рис. 3. Двоелементні кластери.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ для другого двоелементного кластеру. Повна система тотожностей:

- 1) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
- 2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 3) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 4) $x \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = y$;
- 5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow x) = x \Leftrightarrow y$.

1. Тотожність (3) дає можливість опустити дужки у доданках алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$.

2. З тотожностей (1), (5) випливає, що формула $x \Leftrightarrow x$ є окремою формулою, або вона поглинається іншими формулами. Тому довільна формула алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$ або співпадає з формулою $x \Leftrightarrow x$ або має вигляд $x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Нехай $F_1 = F_2 \in R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$. Покажемо, що $F_1 = x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k} = F_2 = x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}$, якщо вони лексикографічно співпадають. Допустимо, що $x_{V_1} \in F_1$, а $x_{j_1} \notin F_2$, тоді на наборі $x_{V_1} = 0$, а решта змінних рівна одиниці, формула $F_1 = 0$, а формула $F_2 = 1$. Тобто формула $F_1 = F_2 \notin R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$. Таким чином, знайдена повна ситема тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle$.

Повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, 1 \rangle$ можемо отримати з $R(U = \langle A, \Leftrightarrow \rangle)$ через тотожність $1 = E \Leftrightarrow E$.

Випишемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$:

- 1) $0 \Leftrightarrow 0 = x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 2) $0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 0 = x$;
- 3) $0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow 0 = 0$;
- 4) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
- 5) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 6) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$.

За допомогою цих тотожностей для довільних формул F алгебри $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$ можна побудувати тотожності формул, в яких кожна змінна і 0 будуть зустрічатися не більше одного разу. Тоді в цій алгебрі існують формули тільки двох типів:

$$0 \Leftrightarrow x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k} \text{ і } x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{j_l}.$$

Легко показати, що якщо лексикографічно приведені формули не співпадають, то існує набір, на якому вони приймають різні значення.

Покажемо, що повною системою тотожностей для алгебри $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$ є така система рівностей:

- 1) $\bar{\bar{x}} = x$;
- 2) $x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y$;
- 3) $x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$;
- 4) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$;
- 5) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x = x$;
- 6) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y$;
- 7) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 8) $\overline{x \Leftrightarrow y} = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 9) $x \Leftrightarrow \bar{x} = y \Leftrightarrow \bar{y}$;
- 10) $x_1 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_4 = x_1 \Leftrightarrow x_3 \Leftrightarrow \bar{x}_2 \Leftrightarrow \bar{x}_4$;
- 11) $x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow y = \bar{y}$.

Використовуючи формули (1) і (6) отримаємо формули, у яких заперечення зустрічається тільки над змінними і не більше одного разу. Тотожність (10) дає можливість отримати формули, які мають не більше одного заперечення.

У даній алгебрі існує тільки три типи формул:

- 1) $x_{V_1} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$;
- 2) $\overline{x_{V_1}} \Leftrightarrow x_{V_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$;
- 3) $x_{V_1} \Leftrightarrow \overline{x_{V_2}} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Для кожної з цих формул можемо знайти набір, на якому вона приймає протилежне значення до формули з якою вона лексикографічно не співпадає.

Знайдемо повну систему тотожностей для алгебри $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$. Повна система тотожностей:

- 1) $x \oplus E = y \oplus y$;
- 2) $x \oplus x \oplus x = x$;
- 3) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \Leftrightarrow y$;

- 4) $(x \oplus x) \Leftrightarrow (x \Leftrightarrow y) = x \oplus y$;
- 5) $(x \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow (x \oplus y) = x \Leftrightarrow y$;
- 6) $x \Leftrightarrow x \oplus y = x \oplus x \Leftrightarrow y$;
- 7) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$;
- 8) $(x \Leftrightarrow y) \oplus (x \Leftrightarrow z) = y \oplus z$;
- 9) $(x \Leftrightarrow y) \oplus z = x \Leftrightarrow (y \oplus z)$;
- 10) $x \oplus y \Leftrightarrow z \oplus u = x \oplus y \oplus z \Leftrightarrow u$;
- 11) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- 12) $(x \oplus y) \Leftrightarrow (x \oplus z) = y \Leftrightarrow z$;

Тотожності (9), (11), (12) дають можливість опустити всі дужки у формулах цієї алгебри. Тотожності (3) і (5) опускають формулу $x \Leftrightarrow x$, а тотожності (2) і (4) формулу $x \oplus x$. Формула (10) дає можливість перенести доданки через операцію $\Leftrightarrow$.

У результаті використання цих тотожностей формулу F можна звести до вигляду: $x_{V_1} \oplus x_{V_2} \oplus \dots \oplus x_{V_k} \Leftrightarrow x_{j_1} \Leftrightarrow x_{j_2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_{V_k}$.

Тотожність (7) дає можливість отримати формули, в яких жодна змінна не може одночасно належати $\{x_{V_1}, x_{V_2}, \dots, x_{V_k}\}$ і $\{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{V_k}\}$.

Легко показати, якщо у формулах F_1 і F_2 , отриманих в результаті цих перетворень, $x_i \in F_1$ і $x_i \notin F_2$, то існує набір α , що $x_i = 0$, а всі інші змінні дорівнюють одиниці. На цьому наборі $F_1(\alpha) = 0$, а $F_2(\alpha) = 1$, тобто $F_1 \neq F_2 \in R(U)$, якщо вони лексикографічно співпадають.

Таким чином, знайдені повні системи тотожностей для всіх мінімальних алгебр кластера: $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$, $U = \langle A, 0, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, $U = \langle A, \neg, \Leftrightarrow \rangle$, $U = \langle A, \neg, \oplus \rangle$. Ми виконали повне екваціональне описання двадцятиелементного кластера.

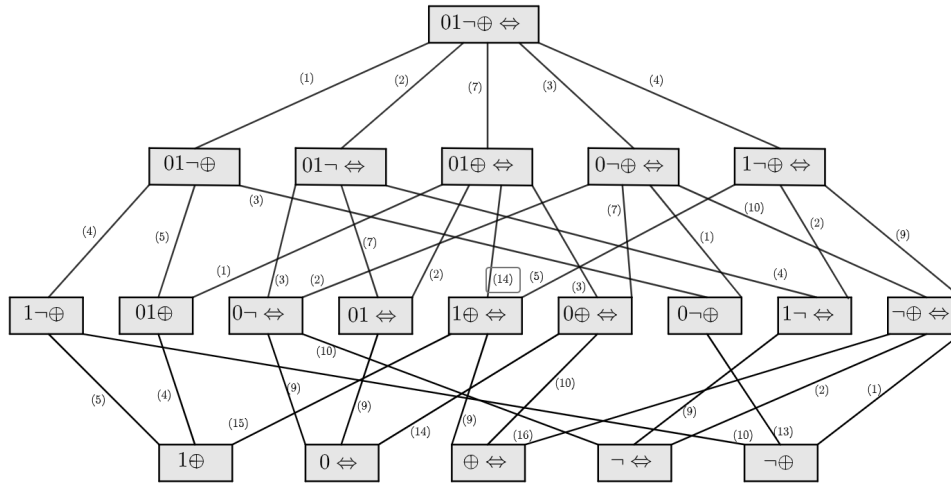


Рис. 4. Двадцятиелементний екваціональний кластер.

Випишемо сигнатурні тотожності, якими позначені ребра двадцятиелементного кластера:

1. $x \Leftrightarrow y = \overline{x \oplus y}$;
2. $x \oplus y = \overline{x} \Leftrightarrow y$;

3. $1 = \bar{0}$;
4. $0 = \bar{1}$;
5. $\bar{x} = x \oplus 1$;
6. $\bar{x} = y \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
7. $\bar{x} = x \Leftrightarrow 0$;
8. $1 = x \vee \bar{x}$;
9. $1 = x \Leftrightarrow x$;
10. $0 = \overline{x \Leftrightarrow x}$;
11. $0 = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow (x \oplus y)$;
12. $0 = 1 \oplus 1$;
13. $0 = x \oplus x$;
14. $x \oplus y = (0 \Leftrightarrow x) \Leftrightarrow y$;
15. $x \Leftrightarrow y = 1 \oplus E \oplus y$;
16. $\bar{x} = (x \oplus x) \Leftrightarrow x$.

Для того, щоб знайти, наприклад, повну систему тотожностей алгебри $U = \langle A, 0, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ досить рухаючись по ребрах (використовуючи відповідні сигнатурні тотожності (11)) перейти до сигнатури алгебри $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, а далі або за допомогою (9) перейти до алгебр $U = \langle A, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ або за допомогою (12) до алгебр $U = \langle A, 1, \oplus \rangle$. Таким чином, алгебра $U = \langle A, 1, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$ у двадцятиелементному екваціональному кластері має $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ повних систем тотожностей. Найбільше повних систем тотожностей має алгебра $U^* = \langle A, 0, 1, \neg, \Leftrightarrow, \oplus \rangle$, а найменше — по одній повній системі п'ять алгебр першого ярусу.

Рухаючись по ребрах екваціонального кластеру відбувається перехід від сигнатури одних алгебр до інших.

3. Висновки. У даному дослідженні знайдені всі екваціональні кластери першого типу для класу булевих алгебр M_9 . До кластерів першого типу відносяться сімнадцять одноелементних кластерів, два двоелементних, один трьохелементний і один двадцятиелементний кластер.

У даній роботі завершено побудову повного екваціонального описання булевих алгебр класу M_9 і здійснено кластеризацію цих алгебр за екваціональними ознаками. На основі введених понять сигнатурних тотожностей, екваціонального розширення та екваціонального звуження визначено структуру екваціональних кластерів першого типу та описано їхні внутрішні зв'язки.

Екваціональні кластери подані у вигляді орієнтованих графів, вершинами яких є алгебри, а ребрами — сигнатурні тотожності, що відображають відношення екваціонального розширення або звуження. Така візуалізація дала змогу встановити послідовні переходи між сигнатурами алгебр і виявити закономірності у побудові тотожностей.

Отримані результати дозволили:

- формалізувати процес переходу від однієї алгебри до іншої через сигнатурні тотожності;
- узагальнити принцип побудови повних систем тотожностей у межах кластерів;
- показати, що для кожної алгебри кластеру існує ланцюг екваціональних зв'язків, за допомогою якого можна побудувати її повну систему тотожностей на основі систем інших алгебр кластеру.

Наукова новизна роботи полягає у системному визначенні еквівалентних кластерів булевих алгебр, розробленні алгоритму їх побудови та встановленні повних систем тотожностей для всіх алгебр кластерів першого типу.

Практичне значення полягає у можливості застосування запропонованого підходу для автоматизованої класифікації булевих структур, оптимізації логічних перетворень і побудови еквівалентних моделей у теоретичній інформації та штучному інтелекті.

Список використаної літератури

1. Birkhoff, G. (1935). On the structure of abstract algebras. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 31, 433–454.
2. Lyndon, R. C. (1954). Identities in finite algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 5, 8–9. <https://doi.org/10.2307/2963956>
3. Vartsaba, O. V., Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Dynys, V. S. (2021). Equational investigation of zero algebras, algebras of a boolean cube and a zhegalkin cube. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(37), 142–149. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2\(37\).142-149](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.2(37).142-149) [in Ukrainian].
4. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 42(1), 194–201. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).194-201](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).194-201) [in Ukrainian].
5. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2023). Equational description of functionally incomplete Boolean algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 43(2), 136–143. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).136-143](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).136-143) [in Ukrainian].
6. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2017). Complete identity systems in a class of algebras. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 1(30), 79–86. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1\(30\).79-86](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2017.1(30).79-86) [in Ukrainian].
7. Mych, I. A., & Nykolenko, V. V. (2018). Equivalent lattice of one class of algebra. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. Of Mathematics and Informatics*, 2(33), 109–113. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2\(33\).109-113](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.2(33).109-113) [in Ukrainian].

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Dukhnov Yu. I. A complete description of equational clusters of boolean algebras of the first type.

The study continued to investigate equational properties in the class of Boolean algebras. A wide class of algebras was considered, including structures with zero, unary, and binary operations. New concepts were introduced — signature identities and equational clusters. Special attention was paid to clusters of the first type, for which the complete system of identities of one algebra can be expressed in terms of another using signature identities. As a result, complete systems of identities were determined for forty-four algebras that form twenty-one equational clusters of the first type.

Keywords: complete system of identities, signature identity, equational cluster.

Одержано 14.09.2025

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).199-206](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).199-206)**Y. M. Okuniev**

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”,

Kyiv School of Economics,

Student, TA of Probability Theory and Statistics,

Master's Student

egorky96@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3695-490X>

CLUSTERING OF REGIONS IN UKRAINE BASED ON STATE OF HIV/AIDS EPIDEMIC

It is a well-known fact that Ukraine is among the countries most affected by the HIV/AIDS epidemic. In this work, I fit a mixed linear model to cluster the regions of Ukraine based on the number of HIV/AIDS diagnoses and AIDS-related deaths. Using this model, I represent each region as a combination of stochastic vectors, each describing the probabilities of a region belonging to a particular class based on the normalized numbers of HIV/AIDS diagnoses and AIDS-related deaths in that region. I then construct a graph where each region is represented as a vertex, and each edge is weighted by the correlation between the corresponding class-belonging vectors. Finally, I perform Walktrap clustering to group regions according to the similarity of HIV/AIDS epidemic trends and interpret the resulting clusters. The aforementioned work is conducted as part of an actuarial study of the HIV/AIDS epidemic in Ukraine.

Keywords: Mixed linear models, Clustering analysis, Walktrap community detection, Weighted correlation networks, Network analysis of epidemics

1. Literature review. The HIV/AIDS epidemic remains one of the most pressing challenges for Ukraine's healthcare system [1, 2]. According to international reports, Ukraine ranks among the countries with the highest rates of HIV/AIDS transmission in Europe and globally [3, 4]. Addressing this public health crisis requires a formalized, data-driven framework for modeling the epidemic at the regional level.

Previous studies have extensively studied the HIV epidemic using molecular biology [5], phylodynamic approaches [6], and other data-driven methods. However, these works typically focus on regions with a high concentration of internally displaced persons or areas already known to have a significant epidemic burden, leaving other regions and the effectiveness of their preventive and anti-HIV interventions comparatively underexplored.

2. Introduction. This study focuses on analyzing the regions of Ukraine to identify patterns in the dynamics of the HIV/AIDS epidemic. The goal is to classify regions into groups according to their epidemiological risk levels and to interpret the resulting clusters in terms of shared epidemic trends. This research contributes to the ongoing effort to understand the spatial and temporal structure of the HIV/AIDS epidemic in Ukraine.

To achieve these objectives, the following steps were performed:

- Collection and preparation of regional data on HIV/AIDS incidence and AIDS-related mortality in Ukraine;
- standardization of the data;
- fitting multiple mixed linear models with varying numbers of latent states based on standardized indicators of HIV/AIDS diagnoses and AIDS-related deaths [7];

- selecting the models that best capture the key epidemiological characteristics of the epidemic;
- deriving class-belonging probability vectors for each region based on the fitted models;
- constructing a weighted correlation network in which vertices represent regions and edges reflect the correlational similarity of their epidemiological profiles;
- applying the Walktrap clustering algorithm to identify groups of regions with similar epidemic dynamics [8];
- interpreting the obtained clusters to reveal common regional traits and factors contributing to shared epidemic patterns.

3. Data preparation. For the purposes of this study, region-level data were obtained from the State Enterprise “Center of Public Health” of the Ministry of Health of Ukraine [9], covering the period from January 2014 to the present. The dataset provides monthly observations for each region and includes the following data:

- number of newly reported cases of HIV,
- number of newly reported cases of AIDS,
- number of AIDS-related deaths,
- total number of individuals with HIV/AIDS under medical supervision at the end of each month,
- corresponding rates per 100000 population.

The original data were stored in a format unsuitable for direct import into Microsoft Excel. For further processing, Optical Character Recognition (OCR) technology was applied using ABBYY software, which specializes in recognizing spreadsheet-like document structures that closely resembled the format of the source files.

The automated OCR process introduced several technical challenges. Specifically, the software occasionally misclassified the digits 0 and 1 as the letters “o” and “i,” introduced sporadic data corruption, and misinterpreted center-aligned symbols as entries containing multiple spaces. To correct these issues, manual data cleaning was performed, including the removal of redundant spaces and systematic replacements such as $o \rightarrow 0$ and $i \rightarrow 1$.

It is important to emphasize that the available data reflect only officially documented cases of HIV infection and AIDS progression. The true prevalence of HIV infection remains uncertain due to underdiagnosis and incomplete reporting.

Throughout this study, the following notational conventions are used:

- G — name of group G being studied,
- N — increment in the size of a given group,
- T — total number of individuals in a given group,
- D — number of AIDS-related deaths,
- .100k — indicator expressed per 100000 population.

Additionally, the left subscript “ t ” denotes the time index. For instance, the total number of individuals living with HIV at time point 4 is represented as ${}_4HIV.T$.

For analytical consistency, several regions were excluded from the dataset: Ukraine (national aggregate), Sevastopol, Luhansk region, and Donetsk region. The national-level data were omitted as redundant for a region-specific analysis, while the excluded

regions lack consistent observations across the study period due to temporary occupation and limited data availability and credibility.

Finally, transitions between HIV and AIDS stages (progressions and regressions) were not explicitly modeled. As all individuals with HIV/AIDS under medical supervision currently receive antiretroviral therapy (ART), which may revert AIDS to HIV and induce viral remission, such transitions are unobservable given the available empirical data.

4. Fitting mixed linear model. In this section, I describe the process of fitting mixed linear models used to categorize each region according to its HIV/AIDS epidemic state.

Specifically, three mixed linear models were estimated: one for the standardized linear trends in the number of HIV diagnoses, one for the standardized linear trends in the number of AIDS diagnoses, and one for the number of deaths related to AIDS.

To standardize the regional data, a z-transformation was applied, ensuring that, at each time point, the data have a mean of zero and a standard deviation of one. Normalization was performed on values of HIV.N.100k, AIDS.N.100k and AIDS.D.100k in order to avoid biases caused by populational similarity between regions.

Each of these models captures a distinct aspect of the epidemic dynamics within a region:

- the number of HIV diagnoses reflects both the susceptibility of a region's population to HIV infection and the effectiveness of preventive campaigns aimed at reducing new cases and promoting early diagnosis;
- the number of AIDS diagnoses primarily represents the prevalence of late, yet still manageable, HIV cases;
- finally, the number of deaths caused by AIDS captures the most severe epidemic outcomes—cases diagnosed too late for effective medical treatment.

For example, regions that exhibit a moderate number of HIV diagnoses, but a low number of AIDS diagnoses and AIDS-related deaths can be considered relatively 'low risk'. Conversely, regions with moderate or high levels of AIDS diagnoses and AIDS-related deaths may require improvements in public awareness, early testing, and quality of anti-HIV campaigns.

To estimate the latent class mixture models, the `lcmm` package for R was used. The modeling procedure involves solving a likelihood maximization problem to identify the best-fitting model for a specified number of latent classes. In this study, given the richness of the dataset, models with one, two, and three classes were fitted. The destandardized mean trajectories of these models are illustrated in the following figures.

From the plots, it is evident that, regardless of the number of classes or the characteristics of individual classes, a decreasing trend is present, indicating the effectiveness of the anti-HIV campaigns.

Furthermore, for the trajectories of AIDS diagnoses and AIDS-related deaths, the addition of a third class did not produce a substantially new class compared to the two-class model.

To finalize the selection of the number of latent classes for the studied models, the Bayesian Information Criterion (BIC) values were compared. The BIC values for studied models are presented in Table 1:

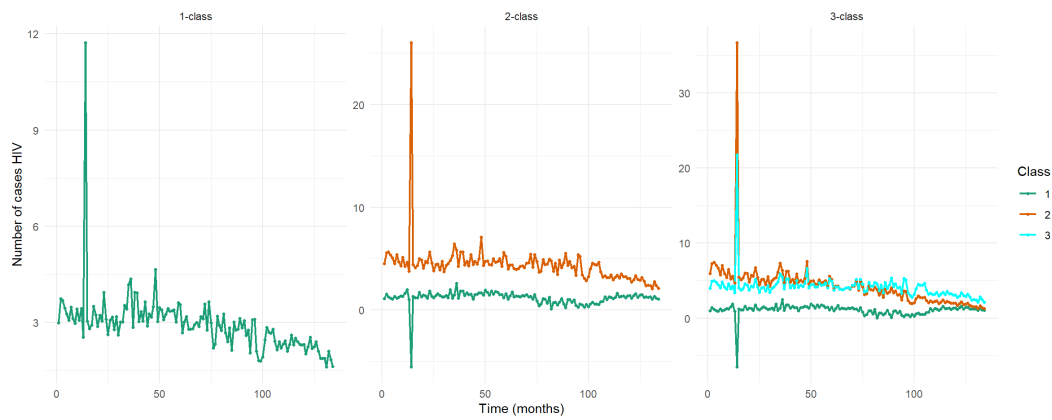


Figure 1. Expected trajectories of HIV.N.

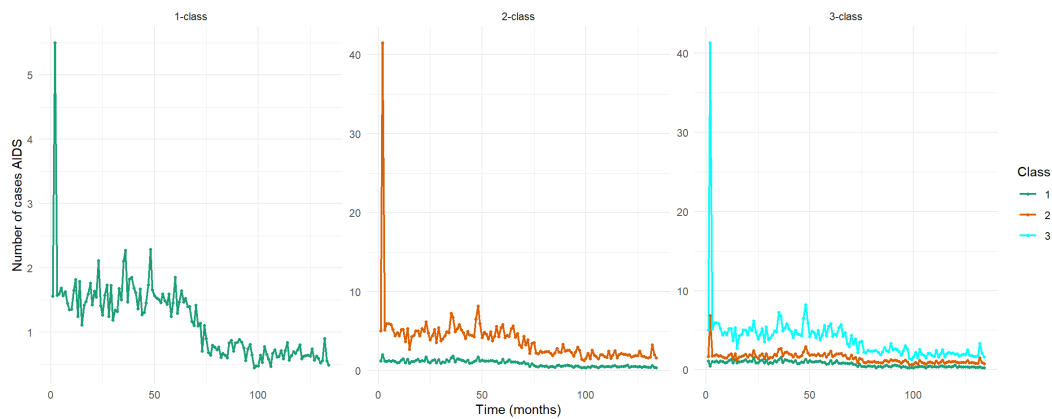


Figure 2. Expected trajectories of AIDS.N.

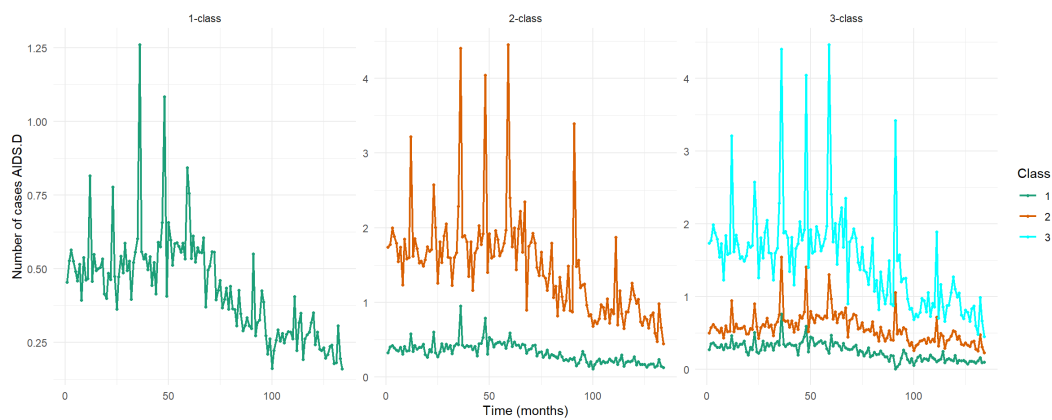


Figure 3. Expected trajectories of AIDS.D.

Therefore, 3-class models were chosen for HIV.N.100k and AIDS.D.100k, and 2-class model was chosen for AIDS.N.100k. The absence of improvement in interpretability for the three-class model of AIDS.N.100K is evident from the plot of expected trajectories. In this specification, two of the three classes substantially overlap, providing no additional meaningful differentiation and therefore offering

Table 1.

BIC values for latent class mixed models (HIV.N, AIDS.N, and AIDS.D).

Variable	1-class	2-class	3-class
HIV.N.100k	3435.553	3418.599	3412.978
AIDS.N.100k	4668.3	4660.506	4664.915
AIDS.D.100k	5497.002	5478.181	5477.191

limited explanatory value compared to the two-class model.

5. Building regional weighted correlation network.

Once each mixed linear model was fitted, three probability vectors were obtained for each region, corresponding to the likelihood of membership in each latent class based on HIV.N, AIDS.N, and AIDS.D, respectively.

To identify regions exhibiting similar epidemic patterns, a regional network was constructed in which each region represents a vertex, and each pair of vertices is connected by an edge weighted according to the correlation between the corresponding probability vectors.

To reduce informational clutter and eliminate redundant connections (e.g., weakly or negatively correlated regions), hard thresholding was applied. Specifically, a threshold τ was defined, and edges e with weight $\omega(e) < \tau$ were removed.

In order to choose appropriate τ , frequency histogram of values in correlation matrix was studied:

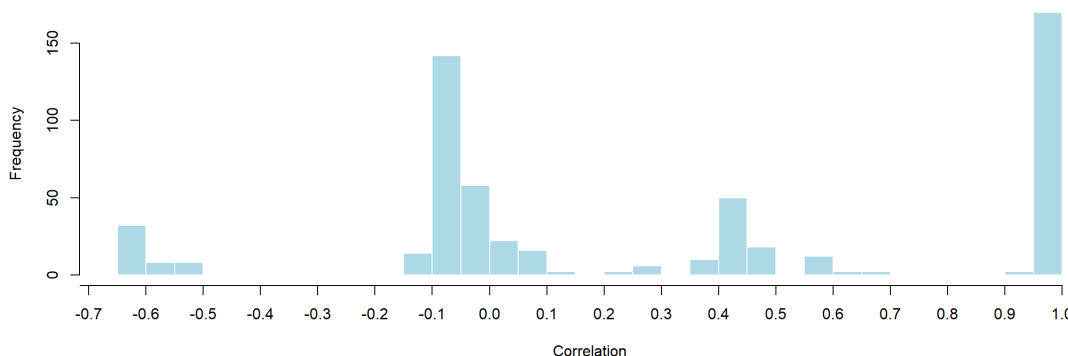


Figure 4. Histogram of values in correlation matrix

As evident from the histogram, most of the strong positive correlations are concentrated at values of 0.9 and above; therefore, a threshold of $\tau = 0.9$ was selected for subsequent analyses.

After hard thresholding, the Walktrap clustering algorithm was applied to group regions with similar epidemic trends. All network construction and clustering procedures were implemented using the *igraph* package in R.

The resulting network is illustrated in Figure 5.

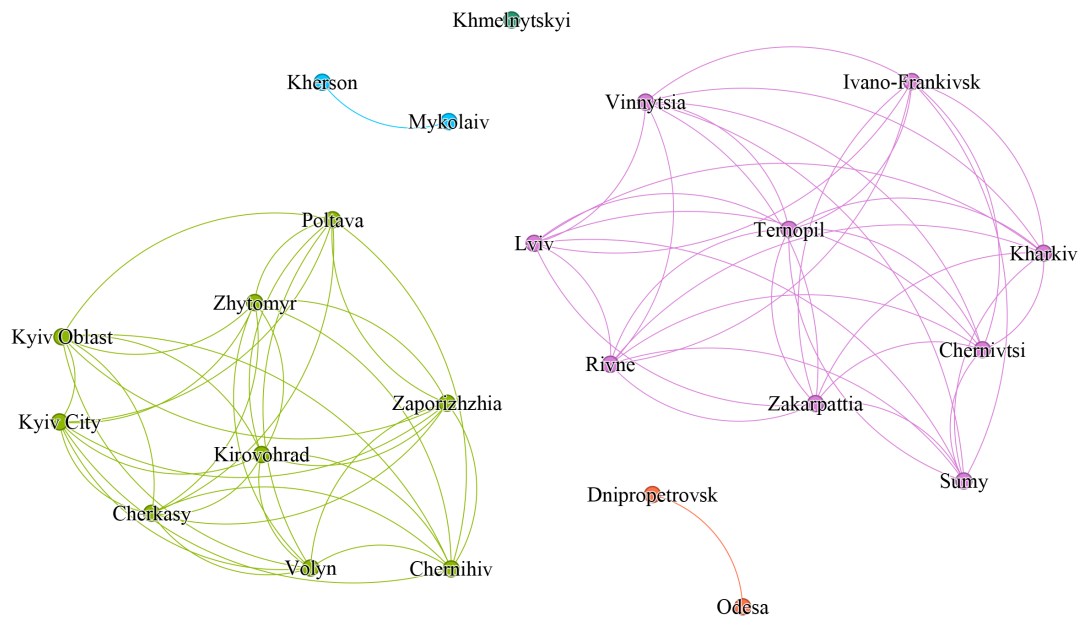


Figure 5. Epidemic regional clusters

With the network constructed, the resulting clusters were analyzed and interpreted in Table 2.

Table 2.

Cluster composition by model class assignments.

Cluster	Size	HIV.N Class	AIDS.N Class	AIDS.D Class
1	9	1	1	1
2	9	3	1	2
3	2	2	1	2
4	2	3	2	3
5	1	1	1	2

Cluster 1 includes regions with low numbers of HIV and AIDS diagnoses and low AIDS-related mortality. The apparent mildness of the epidemic may reflect under-testing or incomplete reporting rather than genuinely low prevalence.

Cluster 2 represents regions with moderate HIV incidence, low AIDS diagnoses, and moderate AIDS-related mortality (typically below one death per month). The relatively higher number of HIV diagnoses suggests broader testing coverage and a more accurate depiction of the epidemic situation.

Cluster 3 comprises regions with stable HIV incidence, low AIDS diagnoses, and moderate mortality. While epidemic trends appear under control, enhanced awareness campaigns could further reduce HIV transmission, so that those region follow common declining trend.

Cluster 4 covers regions historically exhibiting the highest HIV/AIDS burden — particularly Odesa and Dnipro. Despite a declining trend in HIV diagnoses, persistently high AIDS cases and deaths indicate that inadequate preventive and informational efforts remain key drivers of severity, consistent with previous studies [10].

Cluster 5 includes regions likely affected by underdiagnosis, though the epidemic is less severe than in Cluster 4.

6. Conclusions and Prospects for Further Research.

As a result of the conducted study, multiple mixed linear models were fitted to classify regions according to different fundamental aspects of the HIV/AIDS epidemic. Among the fitted models, the most appropriate were selected for subsequent analysis based on both interpretability and Bayesian Information Criterion (BIC) values. Using these models, a regional epidemiological network was constructed to identify regions that share similar epidemic patterns, and the resulting clusters of regions were thoroughly interpreted.

This work represents an important step toward the actuarial study of the epidemic at the regional level. Available epidemiological data are aggregated at the country level, which makes it challenging to infer detailed regional epidemic dynamics. Therefore, the clustering of regions and the estimation of correction coefficients are essential to capture local patterns and inform targeted interventions. This methodology provides a foundation for future research aimed at improving regional epidemic modeling and optimizing public health responses.

References

1. Kruglov, Y., Kobyshcha, Y., Salyuk, T., Varetska, O., Shakarishvili, A., & Saldanha, V. (2008). The most severe HIV epidemic in Europe: Ukraine's national HIV prevalence estimates for 2007. *Sexually Transmitted Infections*, 84(1), 37–41. <https://doi.org/10.1136/sti.2008.031195>
2. Barnett, T., Whiteside, A., Khodakevich, L., Kruglov, Y., & Steshenko, V. (2000). The HIV/AIDS epidemic in Ukraine: Its potential social and economic impact. *Social Science & Medicine*, 51(9), 1387–1403. [https://doi.org/10.1016/s0277-9536\(00\)00104-0](https://doi.org/10.1016/s0277-9536(00)00104-0)
3. Miranda, M. N. S., Pingarilho, M., Pimentel, V., Martins, M. R. O., Vandamme, A.-M., Bobkova, M., Böhm, M., Seguin-Devaux, C., Paredes, R., Rubio, R., Zazzi, M., Incardona, F., & Abecasis, A. (2021). Determinants of HIV-1 late presentation in patients followed in Europe. *Pathogens*, 10(7), 835. <https://doi.org/10.3390/pathogens10070835>
4. Parczewski, M., Gökengin, D., Sullivan, A., de Amo, J., Cairns, G., Bivol, S., Kuchukhidze, G., Vasylyev, M., & Rockstroh, J. K. (2025). Control of HIV across the WHO European region: Progress and remaining challenges. *The Lancet Regional Health–Europe*, 52, 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.lanepe.2025.101243>
5. Vasylyeva, T. I., Liulchuk, M., Friedman, S. R., Sazonova, I., Faria, N. R., Katzourakis, A., ... & Magiorkinis, G. (2018). Molecular epidemiology reveals the role of war in the spread of HIV in Ukraine. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(5), 1051–1056. <https://doi.org/10.1073/pnas.1701447115>
6. Kovalenko, G., Yakovleva, A., Smyrnov, P., Redlinger, M., Tymets, O., Korobchuk, A., ... & Vasylyeva, T. I. (2023). Phylodynamics and migration data help describe HIV transmission dynamics in internally displaced people who inject drugs in Ukraine. *PNAS nexus*, 2(3), pgad008. <https://doi.org/10.1093/pnasnexus/pgad008>
7. Proust-Lima, C., Philipps, V., & Lique, B. (2025). lcmm: Mixed models for longitudinal data and latent classes in R [R package]. Retrieved from <https://cran.r-project.org/web/packages/lcmm/lcmm.pdf>
8. Csardi, G., & Nepusz, T. (2025). igraph: Network analysis and visualization in R. Version 1.2.6 [R package]. Retrieved from <https://igraph.org/r/html/1.2.6>

9. State Enterprise “Center of Public Health” of the Ministry of Health of Ukraine. *Statistics on HIV/AIDS in Ukraine*. (2025). Retrieved from <https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/vilsnid/statistika-z-vilsnidu>
10. Neduzhko, O., Postnov, O., Perehinets, I., DeHovitz, J., Joseph, M., Odegaard, D., ... & Kiriazova, T. (2017). Factors associated with delayed enrollment in HIV medical care among HIV-positive individuals in Odessa Region, Ukraine. *Journal of the International Association of Providers of AIDS Care (JIAPAC)*, 16(2), 168–173. <https://doi.org/10.1177/2325957416686194>

Окунєв Є. М. Кластеризація регіонів України на основі епідеміологічної ситуації ВІЛ/СНІД.

Відомо, що Україна належить до країн із найвищим рівнем поширення епідемії ВІЛ/СНІД. У цій роботі було побудовано лінійні змішані моделі, щоб кластеризувати регіони України за кількістю діагностованих випадків ВІЛ/СНІД та смертей, пов'язаних зі СНІДом. Кожен регіон представлено як комбінацію стохастичних векторів, що описують ймовірності належності регіону до певного класу на основі нормалізованих показників. Далі було побудовано граф, де регіони — це вершини, а ребра зважено за кореляцією відповідних векторів. Нарешті, за допомогою алгоритму Walktrap проведено кластеризацію регіонів за схожістю епідемічних тенденцій та інтерпретовано отримані кластери. Ця робота виконана в рамках актуарного дослідження епідемії ВІЛ/СНІД в Україні.

Ключові слова: Лінійні змішані моделі, кластерний аналіз, Walktrap кластеризація, зважені кореляційні мережі, мережевий епідеміологічний аналіз

Recived 11.09.2025

УДК 004.4:65.011.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).207-213](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).207-213)**М. М. Повідайчик¹, А. Л. Скляр², Р. М. Годя³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор педагогічних наук

mykhailo.povidaichyk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1554-2067>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант 3-го року навчання

artur.skliar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7714-7938>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант 3-го року навчання

roman.hodia@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7546-5263>

РОЗРОБЛЕННЯ ДЕЯКИХ МОДУЛІВ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ «ЦИФРОВИЙ АСИСТЕНТ ВИКЛАДАЧА ЗВО»

Описано розроблений модуль інформаційної системи «Цифровий асистент викладача ЗВО», який призначено для автоматизації процесу створення робочої програми навчальної дисципліни. Подано загальну схему функціонування системи та описано основні процедури її роботи. Розглянуто можливості автоматизації на основі даних освітньо-професійної програми, навчального плану та інших нормативних документів. Визначено методику обчислення числових параметрів робочої програми, які можуть бути отримані автоматизовано з наявних файлів. Описано використання об'єктів Word, що забезпечують керування діапазонами, закладками та таблицями. Зазначено перспективи подальшого розвитку системи як інструменту автоматизованого аналізу розроблених робочих програм і виявлення їх невідповідностей вимогам освітньо-професійної програми та навчального плану.

Ключові слова: інформаційна система, автоматизація, файл-шаблон, VBA.

1. Вступ. Серед задач, які вирішує викладач ЗВО є як творчі, що стосуються планування та проведення занять, досліджень, публікації результатів, керівництва науковою роботою здобувачів, а також рутинні, які вимагають здебільшого механічної діяльності, пов'язаної із заповненням різноманітних документів заданого шаблону. На нашу думку, останні потрібно максимально автоматизувати, щоб вивільняти час саме для розв'язання творчих задач.

Авторська система «Цифровий асистент викладача» передбачає розроблення модулів, які власне беруть на себе значну частину рутинних завдань, які підлягають автоматизації. Прикладом задачі, яка вимагає багато часових ресурсів, може бути розроблення різноманітних тестових завдань для перевірки знань здобувачів, їхньої самопідготовки [1, 2].

Ще одна задача розглядається у даній статті — це автоматизація процесу наповнення робочої програми з дисципліни даними, які зберігаються у різноманітних документах: освітньо-професійній програмі (ОПП), навчальному плані (НП) та ін. Розроблений модуль не може створити повноцінну робочу програму, оскільки її зміст, перелік джерел та ін. вимагає інтелектуальної роботи викладача. Але наповнення документа стандартними даними, як показує досвід, значно прискорює процес його формування.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зазначені проблеми досліджують як вітчизняні, так і зарубіжні науковці. Так, у [3] досліджено підходи й інструменти автоматизації створення і наповнення курсів у Moodle; у [4] розглянуто автоматизовану систему для динамічного формування навчальних компонент (робочих планів/модулів); у [5] описано модуль для автоматизованого формування навчальних планів з урахуванням вибору студентів. Проте, недостатньо дослідженою залишається проблема розроблення цифрових інструментів для автоматизованої роботи з документацією, що стосується освітнього процесу.

3. Постановка задачі. Розробити модуль інформаційної системи «Цифровий асистент викладача ЗВО» для автоматизованого наповнення робочої програми з дисципліни на основі шаблонів MS Word з використанням середовища Visual Basic for Applications.

4. Описання загальної схеми роботи системи. При розробленні інформаційної системи «Цифровий асистент викладача ЗВО» за основу було обрано шаблони MS Word, оскільки вони дозволяють формувати документи заданої структури, а вбудована мова програмування Visual Basic for Applications дозволяє ефективно керувати всіма об'єктами MS Office [1].

Розглянемо загальну схему роботи системи (лістинг 1).

Лістинг 1: Головна процедура системи.

```

1 Sub Main()
2     Dim doc As Document
3     Call Отримати_теми
4     Call Отримати_години
5     Call Отримати_ІК
6     Call Отримати_ЗК
7     Call Отримати_ФК
8     Call Отримати_РН
9     Call Матриця_Компетентності
10    Call Матриця_РН
11
12    Call Замінити_маркери
13    Call Закладка_компетентності
14    Call Закладка_зміст
15    Call Таблиці_РН_ОРН
16    Call Таблиці_Модуль12
17    Call Таблиця_Структура_НД
18    Call Семінари_Самостійна_робота
19
20    Set doc = Application.Documents.Add
21    ThisDocument.Range.Copy
22    doc.Range.Paste
23    doc.SaveAs2 fileName:=ThisDocument.Path & "{\}" & назва_дисципліни
        & ".docx"
24    doc.Close
25 End Sub

```

Головну процедуру системи Main можна умовно розділити на три частини. У першій частині знаходимо необхідні дані із трьох файлів:

- «Зміст дисципліни.docx» — це файл, який містить назву дисципліни, перелік модулів та тем до кожного модуля;

- Excel-файл, назва якого відповідає шаблону «НП*.xls?», — це навчальний план ОПП, з якого отримуємо як загальну інформацію (рівень вищої освіти, галузь знань, спеціальність, предметну спеціальність, назву ОПП), так і конкретну для вказаної дисципліни (шифр, години та ін.);
- Word-файл, назва якого відповідає шаблону «ОПП*.doc?», — це освітньо-професійна програма, з якого отримуємо інтегральну компетентність, перелік загальних та фахових компетентностей (на основі матриці відповідності програмних компетентностей освітнім компонентам), а також перелік програмних результатів навчання (на основі матриці забезпечення програмних результатів навчання відповідними освітніми компонентами).

У другій частині на основі отриманих даних формуємо файл-шаблон робочої програми. Тут заміняємо раніше створені маркери даними з НП, редагуємо раніше створені закладки даними з ОПП, формуємо нові таблиці та наповнюємо їх розрахунковими даними. Детальніше це описано нижче.

Третя частина зберігає наповнений даними файл-шаблон у форматі файлу .docx у поточній папці. Далі цей файл викладач має змогу редагувати – додати дані, які не можна отримати з НП і ОПП (очікувані програмні результати, список джерел та ін.).

5. Розроблення шаблону для автоматизованого створення робочої програми. Розглянемо можливості автоматизації процесу розроблення робочої програми дисципліни. Так, у документі стандартної робочої програми більше одного разу зустрічаються:

- галузь знань — 5 разів;
- спеціальність — 2 рази;
- предметна спеціальність — 2 ризи (для педагогічних спеціальностей);
- освітня програма — 3 рази;
- вид підсумкового контролю — 3 рази.

Всі ці дані приведені у навчальному плані освітньо-професійної програми. Крім цього, із вказаного документа можна автоматизовано отримати:

- рівень вищої освіти;
- кількість кредитів ЄКТС;
- загальну кількість годин;
- кількість аудиторних годин на тиждень (для денної форми навчання);
- кількість годин самостійної роботи студента на тиждень (для денної форми навчання);
- рік підготовки;
- семестр;
- кількість лекційних годин;
- кількість практичних (семінарських) годин;
- кількість лабораторних годин.

Отримавши ці дані нам необхідно їх записати у файл-шаблон робочої програми. Для цього використовуємо маркери у форматі «[маркер]», де у квадратних дужках записано параметр для заміни. У лістингу 2 наведено фрагмент коду, що виконує описану дію.

Лістинг 2: Заміна маркерів.

```

1 For i = LBound(markers) To UBound(markers)
2   With ActiveDocument.Content.Find
3     .Text = markers(i)
4     .Replacement.Text = replacements(i)
5     .Execute Replace:=wdReplaceAll
6   End With
7 Next i

```

Далі з освітньо-професійної програми автоматизовано отримуємо:

- інтегральну компетентність;
- загальні компетентності та їхні шифри;
- фахові компетентності та їхні шифри;
- програмні результати навчання та їхні шифри.

Для запису компетентностей у файлі-шаблоні робочої програми створюємо закладку «компетентності» (Вставлення | Посилання | Закладка). Це дозволяє автоматизовано змінювати текст закладки згідно з вимогами ОПП (лістинг 3). Зауважимо, що вибіркові дисципліни не відображаються у матриці відповідності програмних компетентностей освітнім компонентам та матриці забезпечення програмних результатів навчання відповідними освітніми компонентами ОПП, тому доцільно перенести всі компетентності та програмні результати навчання з подальшим редагуванням. Аналогічно до компетентностей через закладку «зміст» формуємо власне зміст дисципліни.

Лістинг 3: Фрагмент роботи із закладкою «компетентності».

```

1 Set bm = ThisDocument.Bookmarks("компетентності")
2 Set rng = bm.Range
3   ' Видаляємо попередній текст закладки
4 rng.Text = ""
5   ' Додаємо нові абзаци з текстом
6 rng.InsertAfter "Загальні компетентності:" & vbCrLf
7 For i = 1 To кількість_зк
8   If зк(i).наявна Then
9     rng.InsertAfter Trim(зк(i).код) & ". " & Trim(зк(i).текст) &
        vbCrLf
10  End If
11 Next i

```

Програмні результати навчання та їхні шифри записуємо у відповідну таблицю, попередньо видаливши застарілі дані (лістинг 4). Для таблиці з очікуваними результатами навчання з дисципліни готуємо порожню таблицю та вписуємо тільки шифри, які відповідають програмним результатам.

Лістинг 4: Фрагмент роботи із таблицею «Програмні результати навчання».

```

1   ' -- Отримуємо посилання на таблицю --
2 Set tbl1 = ThisDocument.Tables(tblIndex1) 'РН
3   ' -- Видаляємо всі рядки, крім першого --
4 For i = tbl1.Rows.Count To 2 Step -1
5   tbl1.Rows(i).Delete
6 Next i
7   ' -- Додаємо нові рядки після першого --
8 For i = 1 To кількість_рн
9   If рн(i).наявна Then

```

```

10      tbl1.Rows.Add
11      tbl1.cell(tbl1.Rows.Count, 1).Range.Text = Trim(рн(i).текст)
12      tbl1.cell(tbl1.Rows.Count, 2).Range.Text = Trim(рн(i).код)
13  End If
14  Next i

```

Ми не можемо автоматизовано наповнити таблицю «Очікувані результати навчання», оскільки це вимагає інтелектуальної роботи викладача, але аналогічно до лістингу 4 можемо підготувати порожню таблицю на записати шифри програмних результатів навчання. Крім цього, програмно здійснюємо форматування тексту (вирівнювання, напівжирний та ін.), що також економить час при завершальному оформленні документа.

Наступною можливістю для автоматизації є формування та наповнення таблиці, яка відображає розподіл балів за темами кожного модуля (табл. 1).

Таблиця 1.

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти

Поточне оцінювання та самостійна (індивідуальна) робота				Модульна контрольна робота	Сума
T_1	T_2	...	T_n	50	100
k_1	k_2	...	k_n		

Тут n — кількість тем певного модуля, $k_1, k_2, \dots, k_n$ — бали, які можуть отримати здобувачі вищої освіти за вказану тему. Отже, ми можемо створити таблицю, врахувавши кількість тем, а також задати рівномірний розподіл балів за темами із можливістю подальшого редагування викладачем. Оскільки структура таблиці досить складна, то ми спочатку об'єднуємо всі її комірки у одну, видаляємо застарілий текст, а потім формуємо нову таблицю (лістинг 5).

Лістинг 5: Фрагмент роботи із таблицею «Розподіл балів».

```

1  Set tbl = ThisDocument.Tables(tblIndex) 'Оновлюємо посилання
2  ' -- Крок 1. Об'єднати всі клітинки в одну --
3  tbl.cell(1, 1).Merge tbl.cell(tbl.Rows.Count, tbl.Columns.Count)
4  ' -- Крок 2. Видалити весь вміст --
5  tbl.cell(1, 1).Range.Text = ""
6  ' -- Крок 3. Розбити таблицю заново --
7  tbl.Rows(1).Cells(1).Split NumRows:=3, NumColumns:=модулі(n).
   кількість_тем + 2

```

Розглянемо ще одну підзадачу — формування таблиці «Структура навчальної дисципліни» (табл. 2).

Оскільки табл. 2 має об'єднання по вертикалі, то видалення рядків аналогічно до лістингу 4 викликає помилку виконання. Тому ми розділимо її на таблицю із заголовками та іншу частину, яку видаляємо. Далі додаємо необхідну кількість рядків, у залежності від кількості тем, та обчислюємо попередній рівномірний розподіл годин за темами (лістинг 6).

Таблиця 2.

Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		лек.	пр.	лаб.	інд.	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
Модуль 1.						
Тема 1.1.						
Тема 1.2.						
...						
Разом за модулем						
Модуль 2.						
Тема 2.1.						
Тема 2.2.						
...						
Разом за модулем						
Разом						

Лістинг 6: Фрагмент роботи із таблицею «Структура навчальної дисципліни».

```

1 Set tbl = ThisDocument.Tables(tblIndex)
2 tbl.cell(6, 1).Select ' Нижче заголовків
3 Selection.SplitTable
4 ThisDocument.Tables(tblIndex + 1).Delete
5 p = 0
6 For i = 1 To кількість_модулів
7     tbl.Rows.Add 'Модуль i
8     tbl.cell(tbl.Rows.Count, 1).Range.Text = Trim(модулі(i).назва)
9     For j = 1 To модулі(i).кількість_тем
10        p = p + 1
11        tbl.Rows.Add 'Тема j
12        tbl.cell(tbl.Rows.Count, 1).Range.Text = Trim(теми(p).номер) & "
13            " & Trim(теми(p).назва)
14        tbl.cell(tbl.Rows.Count, 2).Range.Text = години_теми(p).усього
15        tbl.cell(tbl.Rows.Count, 3).Range.Text = години_теми(p).лек
16        If наявні_пр Then
17            tbl.cell(tbl.Rows.Count, 4).Range.Text = години_теми(p).пр
18        End If
19        If наявні_лаб Then
20            tbl.cell(tbl.Rows.Count, 5).Range.Text = години_теми(p).лаб
21        End If
22        If наявні_інд Then
23            tbl.cell(tbl.Rows.Count, 6).Range.Text = години_теми(p).інд
24        End If
25        tbl.cell(tbl.Rows.Count, 7).Range.Text = години_теми(p).ср
26    Next j
27    tbl.Rows.Add 'Разом за модулем i
28    tbl.cell(tbl.Rows.Count, 1).Range.Text = "Разом за модулем"
29 Next i

```

Крім описаних підзадач слід відмітити можливості автоматизації роботи викладача, пов'язані з форматуванням тексту, виділенням певних фрагментів та ін. Це вимагає певних затрат часу у процесі розробки, проте потім економить його при експлуатації системи.

6. Висновки. Описана інформаційна система покликана економити час викладача, беручи на себе рутинні завдання при створенні робочої програми. На нашу думку, цю та подібні системи доцільно розробляти, зіставляючи витрати часу на їхнє розроблення та економію часу при їх експлуатації. Описана система містить більше 700 рядків коду, тобто її розроблення вимагає значних часових ресурсів. Тим не менше, при створенні нових освітньо-професійних програм виникає необхідність у розробленні значної кількості робочих програм. У цьому випадку використання інформаційної системи «Цифровий асистент викладача ЗВО» вважаємо за доцільне.

У подальшому систему можна розвивати як інструмент автоматизованого аналізу розроблених робочих програм та виявлення у них невідповідностей ОПП та НП.

Список використаної літератури

1. Povidaichyk, M. M., Sharkadi, M. M., Katsala, R. A., Hodia, R. M., & Yanchii, I. V. (2025). Development of the Framework of the Information System "Computer Simulator for Financial Mathematics". *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series: Mathematics and Informatics*. 46(1), 247–255. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).247-255](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).247-255) [in Ukrainian].
2. Povidaichyk, M. M., Povidaichyk, O. S., Herych, M. S., & Popovych, A. O. (2022). *Development of Automated Learning and Knowledge Control Systems for Pupils and Students: A Textbook*. Uzhhorod: UzhNU Publishing House "Hoverla" [in Ukrainian].
3. Shcherbyna, O. A. (2023). Automation of Creation, Filling, and Administration of Course Categories on the MOODLE Website. *Information Technologies and Learning Tools*, 93(1), 178–198. <https://doi.org/10.33407/itlt.v93i1.5117>
4. Panovyk, U. P., Panovyk, R. R., Petriv, R. I., & Fedyna, B. I. (2024). Automated Support System for the Educational Process with Dynamic Formation of Elective Components. *Scientific Notes*, 1(68), 94–106.
5. Kosiuk, M. M., Bilovskyi, K. E., & Lysak, V. M. (2023). Automated Information System for Managing a Higher Education Institution "Electronic University". *Information Technologies and Learning Tools*, 93(1), 96–116. <https://doi.org/10.33407/itlt.v93i1.5107>

Povidaichyk M. M., Skliar A. L., Hodia R. M. Development of Certain Modules of the Information System "Digital Assistant for a Higher Education Teacher".

A developed module of the information system "Digital Assistant for a Higher Education Teacher" is described, which allows automating the development of a syllabus (working program of a discipline). The general workflow of the system and its main procedures are presented. The possibilities of automation based on data from the educational and professional program, the curriculum, and other documents are considered. The calculation of those numerical parameters of the syllabus that can be automatically obtained from existing files is described. The work with Word objects that make it possible to manage ranges, bookmarks, and tables is presented. The potential for further system development as a tool for automated analysis of developed syllabuses and identification of their inconsistencies with the educational and professional program and curriculum is indicated.

Keywords: information system, automation, template file, VBA.

Одержано 14.09.2025

**В. В. Поліщук¹, М. Келемен², В. І. Повханич³, А. А. Матей⁴,
В. І. Сегляник⁵**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри програмного забезпечення систем,
доктор технічних наук, професор
volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² Кошицький технічний університет,
доцент кафедри підготовки пілотів
martin.kelemen@tuke.sk
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
volodymyr.povkhanych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0397-8015>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
andrej.matey@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0280-1763>

⁵ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
vasyl.sehlianyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9958-3713>

РЕКОМЕНДАЦІЙНА СИСТЕМА ОЦІНЮВАННЯ ЕКОЛОГІЧНОЇ ВІДПОВІДАЛЬНОСТІ ГРОМАДЯН ПРИ ВИКОРИСТАННІ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

У роботі розглянуто актуальну проблему оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного штучного інтелекту (ШІ), зокрема в умовах високого енергоспоживання та формування цифрового сліду.

Метою дослідження є розроблення рекомендаційної системи, що інтегрує кількісне та якісне оцінювання цифрової поведінки користувачів за допомогою нечітких моделей, експертних оцінок та функцій належності.

Запропонований підхід дозволяє формувати інтегральний показник екологічної зрілості цифрової поведінки та визначати загальний рівень екологічно відповідального використання ШІ серед громадян регіону. Методика включає фазифікацію анкетних даних, нормування оцінок, застосування нечіткої логіки та побудову адаптивних рекомендацій, що залежать від рівня усвідомлення користувачів. Система враховує невизначеність та суб'єктивність оцінок, що підвищує точність та достовірність результатів.

Отримані дані можуть бути використані органами влади та освітніми установами для розробки політик з цифрової та екологічної відповідальності, стимулювання сталого розвитку та підвищення екологічної свідомості громадян.

Ключові слова: генеративний штучний інтелект, екологічна відповідальність, нечіткі моделі, рекомендаційна система, цифрова поведінка, інтегральний показник, сталий розвиток.

1. Вступ. Стрімкий розвиток генеративного ШІ відкриває нові можливості для суспільства, бізнесу та науки, але водночас створює виклики, пов'язані з

його екологічним впливом. Потужні обчислювальні ресурси, необхідні для функціонування таких систем, зумовлюють значне енергоспоживання, формують цифровий слід та спричиняють додаткове навантаження на довкілля. У цих умовах постає необхідність формування культури екологічно відповідального використання ІІІ серед громадян.

Актуальність дослідження зумовлена тим, що більшість користувачів, взаємодіючи з ІІІ-помічниками, зрідка замислюються над екологічними наслідками своїх дій, а відповідні освітні та рекомендаційні інструменти перебувають на початковому етапі розвитку. Відсутність системного підходу до оцінювання рівня екологічної відповідальності громадян у цифровому середовищі ускладнює вироблення ефективних стратегій зменшення негативного впливу ІІІ на довкілля. Регламент ЄС щодо штучного інтелекту підкреслює необхідність забезпечення екологічної відповідальності в розробці та використанні ІІІ-систем, включаючи вимоги до енергоефективності та обов'язкову звітність про вплив на навколишнє середовище для високоризикових ІІІ-систем [1]. Це свідчить про важливість інтеграції екологічних критеріїв у процеси оцінювання та рекомендацій щодо використання ІІІ, що робить запропоновану систему своєчасною та відповідною сучасним регуляторним вимогам.

Запропоноване дослідження спрямоване на створення рекомендаційної системи, що поєднує кількісне й якісне оцінювання цифрової поведінки користувачів із використанням нечітких моделей та експертних висновків. Такий підхід дозволяє не лише визначити рівень екологічної зрілості суспільства, але й надати індивідуальні та колективні рекомендації для підвищення екологічної відповідальності. Дослідження буде корисним для органів влади щодо формування політик екологічно відповідального використання генеративного ІІІ та підвищення цифрової свідомості громадян.

Основною метою даного дослідження є розроблення рекомендаційної системи оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного штучного інтелекту для формування культури відповідального цифрового споживання.

2. Огляд літератури. Огляд наукової літератури базується на аналізі сучасних досліджень у галузі екологічної відповідальності, штучного інтелекту та підтримки прийняття рішень. Ці напрямки є актуальними у контексті сталого розвитку, цифровізації управлінських процесів та інтеграції інноваційних технологій у державне управління.

У роботах [2] та [3] розглядаються моделі оцінювання екологічної відповідальності громадян, зокрема через призму поведінкових аспектів та соціальних норм. Автори підкреслюють важливість інтеграції інтелектуальних систем для автоматизованої оцінки екологічної поведінки, що дозволяє зменшити суб'єктивність та підвищити ефективність моніторингу. У статтях [4–5] запропоновано використання нечіткої логіки для моделювання складних екологічних процесів, що дозволяє враховувати невизначеність та варіативність даних.

Щодо застосування генеративного ІІІ, у роботах [6–7] досліджуються можливості використання таких технологій для створення адаптивних рекомендаційних систем, які можуть враховувати індивідуальні особливості користувачів та їхню поведінку. Ці системи здатні генерувати персоналізовані поради щодо зменшення екологічного сліду, що відповідає сучасним вимогам до інтерфейсів

людина-комп'ютер. При цьому, піднімається питання етики та різноманітність у політиці, стратегіях та ініціативах щодо штучного інтелекту [8].

У контексті підтримки прийняття рішень, у статтях [9–10] розглядаються методи нечіткої математики для аналізу та оцінки екологічних ризиків, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. Автори підкреслюють важливість інтеграції таких методів у системи підтримки прийняття рішень для забезпечення сталого розвитку [11].

На сьогодні, однак, не було проведено комплексного дослідження, яке б поєднувало застосування методів нечіткої логіки та генеративного ШІ для систематичної оцінки екологічної відповідальності громадян. Таким чином, існуючі дослідження підтверджують актуальність розробки рекомендаційних систем, які поєднують методи нечіткої логіки та генеративного ШІ для оцінювання та стимулювання екологічної відповідальності громадян. Ці системи можуть стати ефективним інструментом у контексті реалізації політик сталого розвитку та цифровізації управлінських процесів.

3. Матеріали та методи. Нехай для дослідження задано вибірку респондентів $C = \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$. Респонденти представляють собою громадян певного регіону R . Метою є оцінювання рівня екологічної відповідальності при використанні ШІ серед цих громадян. Для отримання емпіричних даних, що слугуватимуть основою дослідження, передбачається проведення експертного опитування. З цією метою розроблено текстову анкету, структуровану за системою критеріїв оцінювання K , які згруповано в тематичні категорії G . У поєднанні з відповідною процедурою обробки відповідей дана анкета утворює інформаційний метод оцінювання екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами, позначений як K_{AI} . Фазифіковані вхідні дані, сформовані відповідно до інформаційного методу, обробляються за допомогою нечіткої математичної моделі виведення рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами в межах досліджуваного регіону — M_{AI} .

Формально рекомендаційна система оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного ШІ може бути представлена у вигляді оператора:

$$\Delta(R, C, E, K_{AI}, M_{AI}) | Y(f). \quad (1)$$

Оператор Δ на основі вхідних даних ставить у відповідність вихідне значення $Y(f)$. Вихідне значення $Y(f) = \{m; e; S_r\}$ складається з: m — загальна оцінка рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами в межах досліджуваного регіону; e — інтегральний показник екологічної зрілості цифрової поведінки в суспільстві; S_r — рекомендації щодо підвищення екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного ШІ.

K_{AI} — інформаційний метод оцінювання екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами.

Запропонована відкрита множина критеріїв забезпечує можливість комплексного аналізу різних аспектів екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами. Критерії згруповано у три групи.

G_1 — тенденції поведінки користувачів під час роботи з ШІ-помічниками.

K_{11} — З якою регулярністю Ви взаємодієте з голосовими інтерфейсами, чат-ботами чи віртуальними аватарами у щоденних ситуаціях?

Варіанти відповідей визначаються з наступної терм-множини:

$A(K_{11}) = \{a(K_{11}) = 1 \text{ якщо "Кілька разів на день"}; a(K_{11}) = 2 \text{ якщо "Приблизно раз на день"}; a(K_{11}) = 3 \text{ якщо "Кілька разів на тиждень"}; a(K_{11}) = 4 \text{ якщо "Кілька разів на місяць"}; a(K_{11}) = 5 \text{ якщо "Рідше"}; a(K_{11}) = 6 \text{ якщо "Ніколи"}\}$. З метою уніфікації та порівнянності даних лінгвістичні змінні підлягають формалізації, зокрема шляхом застосування функцій належності.

K_{12} — Для яких цілей ви використовували систему ChatGPT ?

Множина можливих відповідей представлена як терм-множина, елементи якої відповідають таким оцінкам: «Так, саме так я його й використовував»; «Ні, я не використовував це так».

$A(K_{12}) = \{a(K_{12}) = 1 \text{ якщо "З цікавості — щоб перевірити можливості ШІ-помічників"}; a(K_{12}) = 2 \text{ якщо "Для розваги"}; a(K_{12}) = 3 \text{ якщо "Для робочих/-шкільних завдань"}; a(K_{12}) = 4 \text{ якщо "Щоб навчитися чогось нового"}; a(K_{12}) = 5 \text{ якщо "Співрозмовник, коли бракує людей"}\}$.

Кожен елемент терм-множини оцінюється за допомогою бінарної функції належності: 1 — «Так, саме так я його й використовував», 0 — «Ні, я не використовував це так». Функція визначається наступним чином:

$$\widetilde{\mu(K_{12})}_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо «Так» для } h(K_{12}) = i; \\ 0, & \text{якщо «Ні» для } h(K_{12}) = i. \end{cases} \quad \text{для } i = 1, \dots, 5. \quad (2)$$

Перетворення матриці відповідей у числовий діапазон $[0; 1]$ здійснюється шляхом застосування наступної процедури агрегування:

$$\mu(K_{12}) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \widetilde{\mu(K_{12})}_i. \quad (3)$$

K_{13} — З якою регулярністю Ви звертаєтесь до ChatGPT?

Варіанти відповідей визначаються з наступної терм-множини:

$A(K_{13}) = \{a(K_{13}) = 1 \text{ якщо "Дуже часто (кілька разів на день)"}; a(K_{13}) = 2 \text{ якщо "Часто (кілька разів на тиждень)"}; a(K_{13}) = 3 \text{ якщо "Зрідка (кілька разів на місяць)"}; a(K_{13}) = 4 \text{ якщо "Я пробував це раніше, але більше не використовую"}\}$. Лінгвістичні змінні формалізуються для уніфікації та порівнянності даних, зокрема шляхом застосування функцій належності.

K_{14} — Досвід використання інших систем ШІ.

Множина можливих відповідей представлена як терм-множина, елементи якої відповідають оцінкам «Так» або «Ні».

$A(K_{14}) = \{a(K_{14}) = 1 \text{ якщо "Google Gemini/Bard"}; a(K_{14}) = 2 \text{ якщо "Microsoft Copilot/Bing"}; a(K_{14}) = 3 \text{ якщо "Midjourney"}; a(K_{14}) = 4 \text{ якщо "DALL-E2/E-3"}; a(K_{14}) = 5 \text{ якщо "Stability AI"}; a(K_{14}) = 6 \text{ якщо "Wombo Art"}; a(K_{14}) = 7 \text{ якщо "Canva"}\}$. Аналогічно, кожен елемент терм-множини оцінюється за допомогою бінарної функції належності, формула (2). Перетворення матриці відповідей у числовий діапазон $[0; 1]$ здійснюється шляхом застосування формули (3).

G_2 — Ступінь інтеграції науково-технічних інновацій.

K_{21} — Ступінь впровадження у повсякденне життя технологій генеративного штучного інтелекту.

K_{22} — Ступінь використання технологій доповненої та віртуальної реальності у повсякденних чи професійних цілях.

K_{23} — Ступінь впровадження альтернативних джерел енергії у побут чи господарську діяльність.

K_{24} — Ступінь використання екологічно чистого транспорту.

Відповідь виражається за шестибальною шкалою: $A(K_{2g}) = \{a(K_{2g}) = 1$ якщо “Значною мірою використовую”; $\dots$; $a(K_{2g}) = 5$ якщо “Зовсім не використовую”; $a(K_{2g}) = 6$ якщо “Я не знайомий з цією технологією”}. $g = 1, \dots, 4$. Даний показник пропонується формалізувати за допомогою Z-лінійною функцією належності:

$$\mu(K_{2g}) = \begin{cases} 1, & 0 < a(K_{2g}) \leq 1; \\ \frac{6-a(K_{2g})}{5}, & 1 < a(K_{2g}) \leq 6; \\ 0, & a(K_{2g}) > 6. \end{cases} \quad (4)$$

G_3 — Екологічна відповідальність у цифровому середовищі.

K_{31} — Готовність змінити електронну адресу або перейти до провайдера електронної пошти, що використовує енерго- та водоефективні центри обробки даних.

K_{32} — Готовність передавати документи й дані постачальнику, який застосовує енергоощадні та водозберігаючі технології у центрах обробки даних.

K_{33} — Намір відмовитися від користування соціальними мережами, які не впроваджують заходи з економії енергоресурсів та води у своїх центрах обробки даних.

K_{34} — Намір припинити користування популярними стрімінговими платформами, що не забезпечують раціональне використання енергоресурсів в центрах обробки даних.

K_{35} — Намір відмовитися від платформ генеративного штучного інтелекту, які не дотримуються екологічно ефективних практик у роботі центрів обробки даних.

Варіанти відповідей визначаються з наступної терм-множини:

$A(K_{4p}) = \{a(K_{4p}) = 1$ якщо “Дуже корисно”; $a(K_{4p}) = 2$ якщо “Досить охоче”; $a(K_{4p}) = 3$ якщо “Досить неохоче”; $v(K_{4p}) = 4$ якщо “Дуже неохоче”}. Щоб забезпечити порівнянність даних, лінгвістичні змінні формалізують із використанням Z-лінійної функції:

$$\mu(K_{3p}) = \begin{cases} 1, & 0 < a(K_{3p}) \leq 1; \\ \frac{4-a(K_{3p})}{3}, & 1 < a(K_{3p}) \leq 4; \\ 0, & a(K_{3p}) > 4. \end{cases} \quad p = 1, \dots, 5. \quad (5)$$

Розроблено інформаційний метод для оцінювання екологічно відповідального використання ІІІ-помічників громадянами. Система критеріїв охоплює три аспекти: використання ІІІ, інтеграцію інновацій та екологічну відповідальність у цифровому середовищі. Використання терм-множин та функцій належності забезпечує уніфікацію даних та формування інтегральних показників цифрової екологічної зрілості.

M_{AI} — нечітка математична модель виведення рівня екологічно відповідального використання ІІІ-помічників громадянами в межах досліджуваного регіону.

Після проведення опитування громадян та обробки зібраних даних для кожного запитання та респондента формується фазифікований набір. Спочатку розраховуються фазифіковані набори для груп у межах відповідної категорії:

$$\psi_h = \frac{1}{m_h} \sum_{u=1}^l \mu(K_{hu}), \quad h = 1, \dots, 3. \quad (6)$$

Де m_h — кількість показників у групі h ; u — кількість критеріїв у групі.

Наступним кроком враховується значущість груп критеріїв, які відображають різні аспекти оцінювання рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами. Для цього особа, що приймає рішення (ОПР), задає вагові коефіцієнти $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h\}$ для кожної групи G_h , наприклад, у діапазоні від 1 до 10. Після цього вагові коефіцієнти нормуються за допомогою формули:

$$\beta_h = \frac{\alpha_h}{\sum_{h=1}^3 \alpha_h}, \quad \beta_h \in [0; 1]. \quad (7)$$

Використовуючи згортковий підхід, проводиться обчислення загального рівня довіри серед громадян множини C . Наприклад, середнє значення згортки можна подати у вигляді:

$$\vartheta_3(C) = \sum_{h=1}^3 \beta_h \cdot \psi_h(C). \quad (8)$$

Таким чином, процес агрегації дає змогу визначити загальну оцінку рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників серед громадян множини C . Отримане значення є нормованим, і в разі, коли $\vartheta_3() \rightarrow 1$, це свідчить про високий рівень екологічно відповідального використання ШІ-помічників конкретним громадянином. Навпаки, значення, що наближаються до 0, свідчать про низький рівень усвідомлення та практичного впровадження екологічних принципів у процесі використання цих технологій.

Далі здійснюється розрахунок загальної оцінки для досліджуваного регіону. Для цього пропонується обчислити середнє арифметичне значень:

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vartheta_3(c_i). \quad (9)$$

Отримується $m \in [0; 1]$ — загальна оцінка рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників громадянами в межах досліджуваного регіону R . На основі цього показника можна визначити регіони з високим або низьким рівнем екологічної відповідальності, що дозволяє цілеспрямовано розробляти інформаційні кампанії, освітні програми та політики для підвищення екологічної свідомості користувачів.

Експерти з ШІ, екологічної безпеки, цифрової етики та соціальних комунікацій висловлюють свої лінгвістичні оцінки L щодо рівня екологічно відповідального використання ШІ-помічників у регіоні R . Для формалізації цих оцінок пропонується застосувати терм-множину лінгвістичних змінних, що відображає

можливі якісні рівні екологічної відповідальності. Наприклад: L_1 — «високий рівень»; L_2 — «рівень вище середнього»; L_3 — «середній рівень»; L_4 — «рівень нижче середнього»; L_5 — «низький рівень».

Наведено експертний метод обчислення інтегрального показника рівня екологічно відповідального використання ІІІ-помічників громадянами. Метод поєднує два підходи: кількісну оцінку загального рівня використання технологій у регіоні та якісний експертний аналіз, що враховує аспекти, недоступні через анкетування чи статистику. Для визначення інтегрального показника екологічної зрілості цифрової поведінки пропонується застосувати нечітке логічне виведення на основі S-подібної функції належності:

$$e_\delta = \begin{cases} \frac{1}{5} \left(\sqrt{\frac{m}{2}} + (5 - \delta) \right), & 0 \leq m \leq 0.5; \\ \frac{1}{5} \left((6 - \delta) - \sqrt{\frac{1-m}{2}} \right), & 0.5 < m \leq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Де $\delta = 1, 2, 3, 4, 5$, а його значення визначається відповідно до лінгвістичного міркування експерта. У підсумку отримують $e(R) \in [0; 1]$ — інтегральний показник екологічної зрілості цифрової поведінки в суспільстві.

На фінальному етапі формується S_r — набір рекомендацій щодо підвищення екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного ІІІ. Зміст рекомендацій варіюється залежно від рівня екологічної зрілості цифрової поведінки в суспільстві. Розподіл за рівнями здійснюється системним аналітиком, спираючись на фактичні результати дослідження. Нижче сформульовано 10 пропонованих рекомендацій.

Початковий рівень: $e \in [0; 0.2]$

- Базова цифрова освіта: організувати курси та вебінари для громадян про екологічно безпечне використання ІІІ, включаючи енергоощадні налаштування та зменшення цифрового сліду.
- Формування базових правил: розробити внутрішні керівництва для громадських організацій і спільнот щодо етичного та екологічного користування АІ, уникнення надлишкових обчислень та невиправданого зберігання даних.

Низький рівень: $e \in [0.2; 0.4]$

- Фінансові стимули: запровадити гранти або пільгові програми для ініціатив, що впроваджують генеративний ІІІ із оптимізацією енергоспоживання та зменшенням цифрового сліду.
- Розвиток співпраці: створювати платформи та альянси для обміну знаннями та інструментами щодо екологічно відповідального використання ІІІ у різних сферах.

Середній рівень: $e \in [0.4; 0.6]$

- Моніторинг ефективності: застосовувати цифрові платформи для відстеження енергоспоживання та екологічних показників при використанні ІІІ-систем громадянами.
- Пілотні ініціативи: запускати тестові проекти з ІІІ для оптимізації ресурсів, планування та управління, що зменшують відходи та споживання енергії.

Високий рівень: $e \in [0.6; 0.8]$

- Стимулювання інновацій: підтримувати стартапи та громадські ініціативи, що поєднують ІІІ та екологічну відповідальність.
- Стандарти “зеленого ІІІ”: розробляти рекомендації та стандарти для генеративного ІІІ, що враховують енергоефективність, мінімізацію викидів та відповідальне зберігання даних.

Просунутий рівень: $e \in [0.8; 1]$

- Масштабування рішень: поширювати перевірені екологічно ефективні АІ-рішення серед широких спільнот та інтегрувати їх у міжнародні та глобальні процеси.

Ці рекомендації дозволять органам влади підвищити екологічну свідомість громадян, сприяти відповідальному використанню генеративного ІІІ, зменшити цифровий та енергетичний слід у суспільстві та створити умови для впровадження екологічно орієнтованих політик і регуляторних ініціатив у сфері цифрових технологій.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розроблено рекомендаційну систему оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного штучного інтелекту. Особливістю системи є використання гібридних вхідних даних, отриманих через експертне опитування, що підвищує якість оцінки цифрової поведінки користувачів. В основі дослідження лежить апарат нечітких множин та функції належності, які дозволяють відобразити коридор значень показників екологічно відповідального використання ІІІ.

Запропонована методика дозволяє формувати інтегральний показник рівня екологічної зрілості цифрової поведінки та загальну оцінку рівня екологічно відповідального використання ІІІ-помічників у межах регіону. На основі отриманих результатів визначаються рекомендації щодо підвищення екологічної відповідальності громадян, диференційовані за рівнями: початковий, низький, середній, високий та просунутий.

Метод поєднує кількісну оцінку реальної поведінки користувачів із якісним експертним аналізом, що дозволяє враховувати аспекти, недоступні через опитування чи статистичні дані. Система демонструє здатність відображати нечіткість оцінок, обчислювати лінгвістичне значення рівня екологічної відповідальності та формувати рекомендації для підвищення екологічної свідомості громадян.

Отримані результати мають наукову та практичну цінність. Подальші дослідження передбачають розробку програмної підтримки для автоматизації обчислень за запропонованим методом. Планується створення модульної програмної системи, яка забезпечуватиме комплексну автоматизацію оцінювання екологічної відповідальності громадян при використанні генеративного ІІІ. Система дозволить вводити та обробляти анкетні дані у цифровій формі, здійснювати фазифікацію та нормування оцінок за допомогою функцій належності, обчислювати інтегральний показник e та загальну оцінку m , формувати адаптивні рекомендації S_r залежно від рівня екологічної зрілості цифрової поведінки, візуалізувати результати для аналітиків та органів влади, а також інтегруватися

з існуючими інформаційними системами для підтримки прийняття рішень у сфері екологічної політики та цифрової відповідальності.

Запропоновані рекомендації особливо корисні для органів влади, оскільки вони дозволяють підвищити екологічну свідомість населення, сприяти відповідальному використанню цифрових технологій, зменшити цифровий і енергетичний слід та впроваджувати екологічно орієнтовані політики й регуляторні ініціативи у сфері цифрових технологій.

Список використаної літератури

1. AI Act (2025). Regulatory framework on AI. European Commission. Retrieved from https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/regulatory-framework-ai?utm_source=chatgpt.com
2. Sorcaru, I. A., Muntean, M.-C., Manea, L.-D., & Nistor, R. (2024). From social norms to pro-environmental behavior: The role of destination social responsibility for families traveling with children. *Technol. Forecast. Soc. Change*, 209, 123830. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2024.123830>
3. Kim, M., Kim, S., & Jeon, S. (2024). One in three or three in one: Integrating three competing theoretical models (TPB, VIP, and PADM) to explain the intentions to act/actions against climate change. *Heliyon*, 10(21), e39337. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e39337>
4. Janssen, J. A. E. B., Krol, M. S., Schielen, R. M. J., Hoekstra, A. Y., & de Kok, J.-L. (2010). Assessment of uncertainties in expert knowledge, illustrated in fuzzy rule-based models. *Ecol. Model.*, 221(9), 1245–1251. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2010.01.011>
5. Polovko, I. I., & Sharkadi, M. M. (2025). Use of mathematical models in environmental research. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 46(1), 256–261. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).256-261](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).256-261)
6. Silalahi, A. D. K. (2025). Can generative artificial intelligence drive sustainable behavior? A consumer-adoption model for AI-driven sustainability recommendations. *Technol. Soc.*, 83, 102995. <https://doi.org/10.1016/j.techsoc.2025.102995>
7. Hultin, L., & Mähring, M. (2025). Reimagining AI for sustainability: Cultivating imagination, hope, and response-ability. *Inf. Organ.*, 35(3), 100586. <https://doi.org/10.1016/j.infoandorg.2025.100586>
8. Roche, C., Wall, P. J., & Lewis, D. (2023). Ethics and diversity in artificial intelligence policies, strategies and initiatives. *AI Ethics*, 3(4), 1095–1115.
9. Chung, C.-J., Hsieh, Y.-Y., & Lin, H.-C. (2019). Fuzzy inference system for modeling the environmental risk map of air pollutants in Taiwan. *J. Environ. Manag.*, 246, 808–820. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2019.06.038>
10. Uzhga-Rebrov, O., & Grabusts, P. (2023). Methodology for Environmental Risk Analysis Based on Intuitionistic Fuzzy Values. *Risks*, 11(5), 88. <https://doi.org/10.3390/risks11050088>
11. Polishchuk, V., Kelemen, M., Gavurová, B., Varotsos, C., Andoga, R., Gera, M., Christodoulakis, J., Soušek, R., Kozuba, J., Blišťan, P., & Szabo, S. Jr. (2019). A Fuzzy Model of Risk Assessment for Environmental Start-Up Projects in the Air Transport Sector. *Int. J. Environ. Res. Public Health*. 16(19), 3573. <https://doi.org/10.3390/ijerph16193573>

Polishchuk V. V., Kelemen M. Jr., Povkhanych V. I., Matei A. A., Sehlianyk V. I. Recommendation System for Assessing Citizens' Environmental Responsibility in the Use of Generative Artificial Intelligence.

The study addresses the pressing issue of assessing citizens' environmental responsibility in the use of generative artificial intelligence (AI), particularly in the context of high energy consumption and the formation of a digital footprint.

The aim of the research is to develop a recommendation system that integrates quantitative and qualitative evaluation of users' digital behavior through fuzzy models, expert assessments, and membership functions.

The proposed approach enables the formation of an overall indicator of the ecological maturity of digital behavior and determines the general level of environmentally responsible

AI use among citizens in a region. The methodology includes fuzzification of survey data, normalization of assessments, application of fuzzy logic, and the construction of adaptive recommendations based on users' awareness levels. The system accounts for the uncertainty and subjectivity of evaluations, enhancing the accuracy and reliability of results.

The obtained data can be utilized by government authorities and educational institutions to develop policies on digital and environmental responsibility, promote sustainable development, and increase citizens' environmental awareness.

Keywords: generative artificial intelligence, environmental responsibility, fuzzy models, recommendation system, digital behavior, integral indicator, sustainable development.

Одержано 23.08.2025

УДК 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).224-230](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).224-230)**І. І. Половко¹, М. М. Шаркаді²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
polovko.ivan@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7128-4846>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук
marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЕЙ НЕЧІТКОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ В ЕКОЛОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У статті розглянуто застосування методів нечіткої класифікації для оцінювання якості водних ресурсів. Запропоновано використання S- та Z-лінійних функцій належності для моделювання екологічних показників. Продемонстровано побудову нечіткого класифікатора та його ефективність для діагностики стану поверхневих вод. Отримані результати підтверджують, що нечітка логіка дозволяє інтегрувати фізико-хімічні, гідробіологічні та токсикологічні показники у єдину систему.

Ключові слова: нечітка класифікація, екологічні дослідження, якість води, функції належності, S-лінійна функція, Z-лінійна функція.

1. Вступ. Екологічні проблеми сьогодні стають дедалі гострішими та актуальнішими. Глобальні зміни клімату, зростання інтенсивності забруднення навколишнього середовища, деградація ґрунтів, виснаження водних і біологічних ресурсів вимагають комплексного підходу до моніторингу, оцінки та прогнозування стану довкілля. Серед інструментів, що забезпечують системне вивчення цих процесів, важливе місце займає математичне моделювання, яке дозволяє описувати складні природні й антропогенні взаємодії, прогнозувати їхню динаміку та оцінювати наслідки різних сценаріїв впливу.

Математичні моделі дають змогу встановлювати приховані залежності між чинниками забруднення, оцінювати потенційні ризики та обґрунтовувати управлінські рішення як на локальному, так і на регіональному чи глобальному рівнях. Розвиток цифрових технологій, зростання обчислювальної потужності та доступ до великих масивів відкритих екологічних даних зробили моделювання гнучким і доступним методом наукового дослідження.

На сучасному етапі розвитку важко уявити функціонування інформаційних систем у різних сферах людської діяльності (науці, техніці, економіці, медицині, промисловості тощо) без застосування інтелектуальних технологій. Інформаційні системи орієнтовані на використання та акумуляцію знань, що формуються фахівцями відповідних галузей і подаються у вигляді професійних термінів та лінгвістичних конструкцій. Як правило, такі знання мають характер тверджень із нечітко окресленими межами або висловлювань, які допускають багатозначність у шкалі значень істинності. У зв'язку з цим сучасні методологічні підходи до моделювання станів складних систем за умов неповної визначеності вхідних

даних ґрунтуються на використанні апарату теорії нечітких множин та концепції лінгвістичних змінних[1].

2. Математична постановка задачі. Діагностика екологічного стану навколишнього середовища може бути сформульована як задача класифікації. Така задача може бути розв'язана шляхом знаходження відповідного класифікатора, тобто математичної функції F , яка ставить у відповідність множині ознак $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$ певну мітку класу k_j :

$$F(X) : X \rightarrow k_j.$$

Пропонується у вигляді класифікатора використати підхід нечіткого моделювання, який базується на даних спостереження. Такий підхід дозволяє дотриматись компромісу між точністю класифікації та інтерпретацією отриманого результату.

Задача класифікації полягає в передбаченні класу об'єкта за його вектором значень ознак.

Нехай задана множина ознак $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$ і множина класів $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\} = \{k_j, j = \overline{1, m}\}$.

Нечіткий класифікатор представляється у вигляді функції, яка присвоює точці із простору вхідних ознак мітку класу з обчисленим ступенем упевненості:

$$F(X) : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, 1]^n.$$

Основою нечіткого класифікатора являється продукційне правило наступного вигляду:

$$R_{pj} : \text{Якщо } x_1 = A_{1j} \ \& \ x_2 = A_{2j} \ \& \ \dots \ \& \ x_{nj} = A_{nj} \ \text{Тоді } class = k_j,$$

де A_{ij} — лінгвістичний терм, який характеризує i -у ознаку в j -у правилі та визначений своєю функцією належності $\mu_{A_{ij}}(x_i)$ в точці x_i , $p = \overline{1, P}$, P — число правил.

Клас визначається правилом, для якого *Якщо*-частина максимально відповідає описанню, заданому вхідному вектору X :

$$class = k_{j^*}, \quad j^* = \arg \max_{1 \leq j \leq m} \prod_{i=1}^n \mu_{A_{ij}}(x_i).$$

Побудова нечітких класифікаторів потребує вирішення наступних завдань: відбір інформативних ознак, формалізації знань, формулювання бази нечітких правил, оптимізація параметрів функції належності.

3. Огляд літератури. У сучасних наукових підходах до оцінки якості водних ресурсів широко застосовуються стандартизовані методики класифікації екологічного стану [2]. В Україні основним нормативним документом є Наказ Міністерства екології та природних ресурсів України від 14.01.2019 № 5 “Про затвердження Методики віднесення масиву поверхневих вод до одного з класів екологічного та хімічного станів масиву поверхневих вод” [3], який встановлює п'ять класів якості вод — від “відмінного” до “поганого” — на основі гідрохімічних, гідробіологічних та гідроморфологічних показників. У міжнародній науковій практиці, зокрема у дослідженні Vitecek, Johnson та Poikane

(2021) “Assessing the Ecological Status of European Rivers and Lakes Using Benthic Invertebrate Communities: A Practical Catalogue of Metrics and Methods” [4], описано різноманітні методи оцінки екологічного стану водних об’єктів із застосуванням біологічних, хімічних та гідроморфологічних характеристик. Дослідження Пономаренка (2022) “Оцінка екологічного стану поверхневих водних об’єктів” [5] демонструє, що національні підходи узгоджуються з міжнародними стандартами, проте відрізняються більш деталізованими критеріями для біогенних і фізико-хімічних показників.

4. Методи і матеріали. Проблема відбору інформативних ознак полягає у пошуці таких входних атрибутів із набору даних, які найбільш реально відображають екологічний стан середовища. Це можуть бути як статистичні, так і теоретико-інформаційні та метаевристичні методи.

Особливу увагу сучасні дослідники приділяють якості водних ресурсів, які відіграють фундаментальну роль у збереженні екосистем і забезпеченні потреб населення. Оцінка якості води ґрунтується на системі фізико-хімічних, гідробіологічних та токсикологічних показників, серед яких ключовими є:

- **кисневий режим** (розчинений кисень, біохімічне та хімічне споживання кисню – БСК₅, ХСК);
- **вміст біогенних елементів** (NO_3^- , NO_2^- , NH_4^+ , PO_4^{3-}), які впливають на евтрофікаційні процеси;
- **концентрація завислих речовин і органічного забруднення** (каламутність, зважені частинки, органічний вуглець);
- **наявність токсичних речовин** (важкі метали, пестициди, нафтопродукти)

Екологічна класифікація якості вод за біологічними критеріями включає такі групи показників:

а) гідробіологічні:

- структурні показники окремих угруповань — чисельність, біомаса, число видів, індекс Шенона, структурні індекси та ін.,
- показники трофності — біомаса фітопланктону, концентрація хлорофілу “а”, первинна продукція;
- біоіндикаційні оцінки — індекси сапробності за системами Пантле–Букка і Гуднайта–Уітлея, біотичні індекси;

б) біохімічні — індекс A/R (самоочищення / самозабруднення), потенційна здатність вод до самоочищення, активність позаклітинних оксидоредуктаз у донних відкладах;

в) бактеріологічні — загальна чисельність бактеріопланктону, кількість сапрофітних бактерій та бактерій групи кишкових паличок (індекс БГКП).

г) біотестові — біотести на ракоподібних, біотест Кнеппа.

Кожен показник порівнюється з гранично допустимими концентраціями (ГДК) або екологічними нормативами, а сукупна оцінка дозволяє віднести водойму до певного класу якості (від I — «дуже чиста» до V — «дуже забруднена»).

Метою математичного моделювання є не лише кількісний опис стану водних екосистем, але й прогнозування змін під впливом природних і антропогенних

факторів. Результати моделювання застосовуються для оцінки екологічних ризиків, визначення пріоритетних заходів охорони вод, а також для обґрунтування управлінських рішень у сфері екологічної політики. У таблиці 1 наведено граничні значення основних показників якості води відповідності до класів.

Таблиця 1

№ п/п	Показник	Клас I	Клас II	Клас III	Клас IV	Клас V
1	Розчинений кисень, мг O_2 /дм ³	>8.0	7.6–8.0	7.1–7.5	6.1–7.0	<6.0
2	% насичення	96–105	91–96	81–90	71–80	<70
3	Завислі речовини, мг/дм ³	<5	5–10	11–20	21–30	>30
4	Прозорість, м	>1.50	1.00–1.50	0.65–0.95	0.50–0.60	<0.50
5	pH	6.9–7.5	7.6–7.9	8.0–8.1	8.2–8.3	>8.3
6	Азот амонійний, мг N/дм ³	<0.10	0.10–0.20	0.21–0.30	0.31–0.50	>0.50
7	Азот нітритний, мг N/дм ³	<0.002	0.002–0.005	0.006–0.010	0.011–0.020	>0.020
8	Азот нітратний, мг N/дм ³	<0.20	0.20–0.30	0.31–0.50	0.51–0.70	>0.70
9	Загальний N, мг N/дм ³	<1.0	1.1–1.5	1.6–2.0	2.1–4.0	>4.0
10	Фосфор фосфатів, мг P/дм ³	<0.015	0.015–0.030	0.031–0.050	0.051–0.100	>0.100
11	Фосфор загальний, мг P/дм ³	<0.015	0.015–0.030	0.031–0.060	0.061–0.120	>0.120
12	БСК ₅ , мг O_2 /дм ³	<1.0	1.0–1.6	1.7–2.1	2.2–4.0	>4.0
13	ХСК (біхроматна окислюваність), мг O_2 /дм ³	<9	9–15	16–25	26–30	>30

Дана класифікація відображає комплексний підхід до оцінки якості поверхневих вод. Основними критеріями є показники кисневого режиму (розчинений кисень і ступінь насичення), гідрофізичні параметри (завислі речовини, прозорість), кислотно-лужний баланс (pH), вміст біогенних елементів (азот і фосфор у різних формах), а також індикатори органічного забруднення (БСК₅, ХСК). У наведеній таблиці класифікація якості води відповідає категоріям, прийнятим у національних методиках екологічної оцінки стану поверхневих вод [1]:

- **I клас — відмінні:** вода характеризується природним станом, без ознак антропогенного впливу.
- **II клас — добрі:** вода майже не змінена, незначний антропогенний вплив.
- **III клас — задовільні:** спостерігаються помірні зміни якості води, вплив антропогенних факторів відчутний.
- **IV клас — погані:** істотне погіршення якості води, потрібне очищення перед використанням.
- **V клас — дуже погані:** вода непридатна для використання без глибокого очищення, небезпечна для біоти.

Така деталізація дозволяє не лише класифікувати водойми за ступенем забруднення, а й створювати моделі нечіткого виведення, де кожен показник матиме свою функцію належності до класу якості.

Ця класифікація може бути основою для побудови моделей екологічного моніторингу, визначення інтегральних індексів якості води (ІЗВ) та для подальшого застосування методів нечіткої логіки для оцінки ступеня забруднення.

Формалізація знань являється проблемою, вирішення якої полягає у побудові моделі, яка адекватно відображає інформацію предметної області.

Виходячи із аналізу даних наведених у таблиці 1 показники доцільно промодельовати за допомогою апарату нечітких множин, тобто деякі S-лінійною функцією належності та деякі Z-лінійною функцією належності.

$$\mu = \begin{cases} 0, & x \leq a_{\min}, \\ \frac{x - a_{\min}}{a_{\max} - a_{\min}}, & a_{\min} \leq x \leq a_{\max}, \\ 1, & x \geq a_{\max}. \end{cases}$$

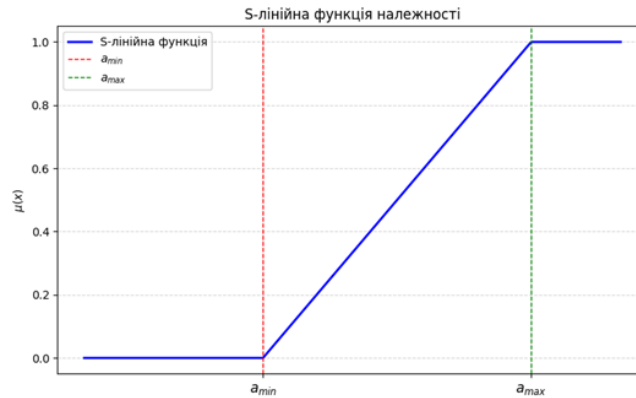


Рис. 1. S-лінійна функція належності.

$$\mu = \begin{cases} 0, & x \geq a_{\max}, \\ \frac{a_{\max} - x}{a_{\max} - a_{\min}}, & a_{\min} \leq x \leq a_{\max}, \\ 1, & x \leq a_{\min}. \end{cases}$$

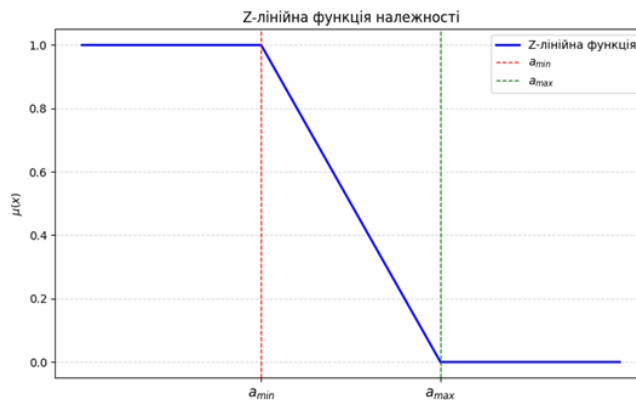


Рис. 2. Z-лінійна функція належності.

Якщо аналізувати показники з таблиці 1, то можемо зробити висновок, що для показників, де покращення означає зростання значення — краще вибрати S-лінійну функцію належності (рис. 1), зокрема для показників № 1, 2, 4. А для всіх інших, де покращення означає зменшення значення — краще використати Z-лінійну функцію належності (рис. 2).

5. Результати досліджень. Якщо взяти значення для одного класу з першого показника, то графік буде такий (рис. 3).

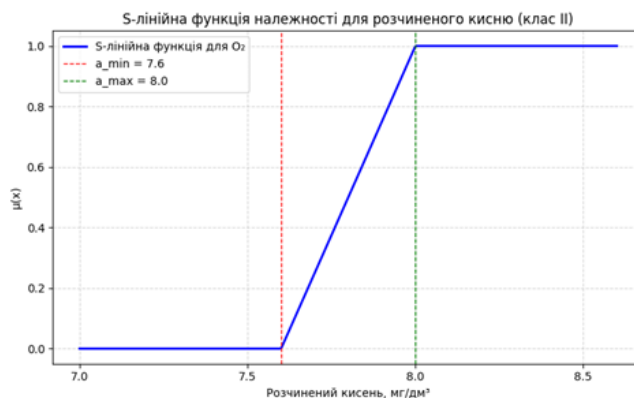


Рис. 3. Функція належності для розчиненого кисню O_2 (клас II).

Якщо взяти всі класи для показника 2, то вийде такий графік (рис. 4), з комбінацією функцій належності.

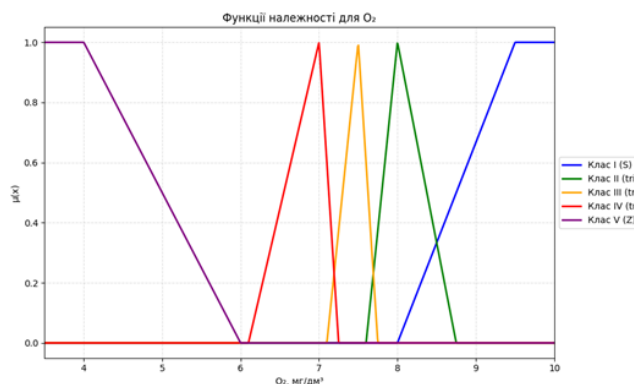


Рис. 4. Функція належності для розчиненого кисню O_2 для всіх класів.

6. Висновки. Математичне моделювання з використанням методів нечіткої класифікації виступає дієвим інструментом для оцінювання екологічного стану водних екосистем, оскільки дає змогу інтегрувати фізико-хімічні, гідробіологічні та токсикологічні показники у єдину систему комплексної оцінки. Застосування апарату нечітких множин і функцій належності забезпечує урахування невизначеності та природної мінливості даних, що сприяє формуванню більш адаптивної та адекватної класифікації водойм за рівнем забруднення. Суттєвою перевагою нечіткої логіки є її здатність поєднувати різнорідні й не завжди чітко визначені результати спостережень у цілісну математичну модель, яка відображає логічне судження про стан досліджуваної системи.

Аналіз показників якості води (кисневий режим, вміст біогенних елементів, органічне та токсичне забруднення) демонструє, що застосування S- та Z-лінійних функцій належності дає змогу коректно моделювати залежність між станом води та її класом якості. Це дозволяє не лише класифікувати водойми за традиційними категоріями від I до V класу, а й формувати інтегральні ін-

декси якості води для екологічного моніторингу та прогнозування змін стану екосистем.

Використання моделей нечіткої класифікації створює нові можливості для ефективного управління водними ресурсами, оцінювання екологічних ризиків і розроблення науково обґрунтованих управлінських стратегій. Подальший поступ у цій сфері може бути пов'язаний з інтеграцією цифрових двійників екосистем, аналізом великих масивів даних, застосуванням технологій Інтернету речей (ІоТ) та сучасних обчислювальних платформ, що забезпечить більш точний і своєчасний моніторинг стану довкілля. Концепція м'якого комп'ютіngu розглядається як сучасний підхід до розв'язання складних задач, у випадках коли традиційні методи та алгоритми виявляються недостатньо ефективними через багатовимірність і складність досліджуваних систем. Цей підхід охоплює низку алгоритмічних методів, серед яких провідне місце належить нечіткій логіці [6].

Таким чином, нечітке моделювання є важливим інструментом у сучасній екології, що дозволяє системно оцінювати стан водних екосистем, прогнозувати наслідки антропогенних і природних впливів та формувати науково обґрунтовану екологічну політику, спрямовану на раціональне використання природних ресурсів і збереження довкілля.

Подяки. Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету “Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних” (номер державної реєстрації 0121U109279).

Список використаної літератури

1. Zadeh, L. A. (1999). Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems* 100 Supplements, 9–34.
2. Vasenko, O. G., Rybalo, O. V., Artemiev, S. R., & at al. (2015). *Integral and comprehensive assessments of the state of the natural environment: Monograph*. Kharkiv: NUGZU [in Ukrainian].
3. Order of the Ministry of Ecology and Natural Resources of Ukraine No. 5 of January 14, 2019, “On Approval of the Methodology for Classifying Surface Water Bodies into One of the Classes of Ecological and Chemical Status of Surface Water Bodies.” Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/main/z0127-19> [in Ukrainian].
4. Vitecek, S., Johnson, R. K. & Poikane, S. (2021). Assessing the Ecological Status of European Rivers and Lakes Using Benthic Invertebrate Communities: A Practical Catalogue of Metrics and Methods. *Water*, 13(3), 346.
5. Ponomarenko, E. (2022). Assessment of the ecological status of surface water bodies. *Bulletin of Kremenchuk National University named after M. Ostrogradsky*, 4(4), 65–72 [in Ukrainian].
6. Dogan I. (2016). An Overview of Soft Computing. *Procedia Computer Science*, 102, 34–38. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.09.366>

Polovko I. I., Sharkadi M. M. Application of fuzzy classification models in ecological research.

The article discusses the application of fuzzy classification methods for assessing the quality of water resources. The use of S- and Z-linear membership functions for modeling environmental indicators is proposed. The construction of a fuzzy classifier and its effectiveness for diagnosing the state of surface waters is demonstrated. The results confirm that fuzzy logic allows the integration of physicochemical, hydrobiological, and toxicological indicators into a single system.

Keywords: fuzzy classification, environmental research, water quality, membership functions, S-linear function, Z-linear function.

Одержано 01.09.2025

УДК 004.2:519.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).231-243](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).231-243)О. В. Попов¹, А. В. Павлюк²

¹ Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
провідний науковий співробітник відділу чисельних методів
та комп'ютерного моделювання,
доктор фізико-математичних наук
alex50popov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1217-2534>

² Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
аспірант
kvadrump1@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-4166-2003>

ВАРІАЦІЙНО-ОПЕРАТОРНА МОДЕЛЬ КЕРОВАНОЇ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДЛЯ ГІБРИДНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

У статті розроблено варіаційно-операторний підхід до керованої дискретизації, спрямований на узгодження точності математичної моделі з архітектурною ефективністю гібридних обчислювальних систем. Запропоновано параметризований оператор, який адаптивно враховує локальні властивості процесу та зберігає енергетичну узгодженість між неперервною і дискретною формами задачі. Побудовано двоетапну схему оптимізації, що поєднує точність апроксимації з мінімізацією часу виконання обчислень. Експериментальні результати підтверджують стабільність, енергетичну збалансованість і високу відповідність між прогнозованими та фактичними характеристиками, що засвідчує ефективність методу для моделювання складних гібридних систем.

Ключові слова: керована дискретизація, CPU–GPU архітектура, гібридні обчислення, варіаційна оптимізація, енергетична узгодженість, обчислювальна ефективність, моделювання складних систем.

1. Вступ. У контексті сучасного обчислювального моделювання гібридних систем, що поєднують континуальні фізичні процеси з дискретними подіями керування, постає фундаментальна проблема узгодження математичної точності з архітектурною ефективністю. При переході до гібридних CPU–GPU архітектур це завдання набуває принципово нового змісту: просторово-часова дискретизація операторів має не лише забезпечувати апроксимаційну збіжність, а й відповідати енергетичним інваріантам системи та топології обчислювального графа.

Класичні схеми дискретизації, зокрема методи скінченних різниць і скінченних елементів фіксованого порядку, не враховують локальної варіації спектральних властивостей оператора L , який описує просторово-часову динаміку системи. Унаслідок цього їхня апроксимаційна точність не адаптується до локальної структури поля $u(x, t)$, а ефективність реалізації визначається апаратною пропускнуою здатністю пам'яті лише на етапі виконання, без участі самої дискретизаційної схеми.

Зауваження 1. Далі під полем $u(x, t)$ розуміємо функцію стану, що описує розподіл фізичної або модельної величини у просторі та часі; термін структура поля використовується для позначення локальної просторово-часової організації або спектральних властивостей $u(x, t)$.

У результаті така фіксована дискретизація створює дисбаланс між локальною точністю апроксимації та ефективністю обчислень, оскільки єдина сітка не здатна адаптуватися до областей із різкими змінами просторово-часових масштабів. Цей дисбаланс проявляється як порушення енергетичної узгодженості між континуальною моделлю та її чисельною апроксимацією, що призводить до появи штучних дисипативних або генеративних компонент у спектрі розв'язку й, відповідно, до спотворення фізично коректної динаміки системи [1–2].

Для усунення цих обмежень у даній роботі запропоновано метод керованої дискретизації, який розглядає побудову апроксимаційного оператора як задачу оптимізації в параметричному просторі:

$$\theta = (p, r, \varphi), \quad (1)$$

де p — порядок апроксимації; r — радіус локального шаблону апроксимації; φ — тип фільтраційної схеми, що контролює спектральну характеристику (селективність) оператора L .

На відміну від класичних схем дискретизації, параметри θ у (1) не задаються фіксовано, а визначаються з урахуванням локальних характеристик функції стану $u(x, t)$, зокрема просторової гладкості, чутливості до збурень і часової жорсткості. Така адаптація дозволяє реалізувати енергетично узгоджені дискретизації, у яких збережено головні інваріанти системи при мінімізації витрат ресурсів для обчислення на гібридних архітектурах [3].

У межах варіаційно-операторного підходу дискретизація трактується як оптимізаційна процедура наближення оператора L у просторі дволінійних форм, узгоджених з енергетичними характеристиками системи. У цьому контексті побудова параметризованого дискретного оператора $L_h(\theta)$ спрямована не лише на мінімізацію норми відхилення $\|L - L_h(\theta)\|$, але й на збереження коерцитивності (позитивної визначеності енергетичної форми), дисипативності та коректної енергетичної балансової структури. Відповідно, керована дискретизація розглядається як варіаційний механізм узгодження аналітичних, чисельних та апаратних інваріантів, який формує теоретичну основу для побудови енергетично збалансованих сплітів та адаптивного планування обчислень у гібридних CPU–GPU середовищах [4].

2. Варіаційно-операторний підхід до керованої дискретизації. Дискретний оператор у межах варіаційно-операторного підходу визначається як варіаційне наближення безперервного оператора в енергетичній нормі, що забезпечує узгодженість між аналітичною моделлю та її чисельним представленням.

Нехай оператор $L : V \rightarrow V'$ визначено в гільбертовому просторі V з відповідним енергетичним скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, а його дискретна апроксимація задається у вигляді параметризованого відображення:

$$L_h(\theta) : V_h(\theta) \rightarrow V'_h(\theta), \quad (2)$$

де $V_h(\theta)$ — параметризований підпростір апроксимації, породжений системою локальних базисних функцій $\{\phi_j^{(\theta)}\}_{j=1}^{N_h^{(\theta)}}$, де кожна функція $\phi_j^{(\theta)}$ асоційована з вузлом або коміркою обчислювальної сітки, а $N_h^{(\theta)}$ — розмірність апроксима-

ційного підпростору (кількість базисних функцій) для вибраної конфігурації θ (1).

Враховуючи (2), дискретну форму оператора можна визначити матрицею:

$$[L_h(\theta)]_{ij} = \langle L\phi_j^{(\theta)}, \phi_j^{(\theta)} \rangle_E, \quad (3)$$

що дозволяє зберегти енергетичну когерентність між неперервною та дискретною моделями.

У (3) оператор $L_h(\theta)$ наближає L не лише у метриці норми $\|L - L_h(\theta)\|$, але й у просторі дволінійних форм, де збережено позитивну визначеність і коерцизивність енергетичного функціоналу.

Для гібридних архітектур CPU–GPU важливо, щоб дискретний оператор мав структуру, сумісну з асинхронним розпаралелюванням. Тому $L_h(\theta)$ подається як композиція енергетично узгоджених спліт-операторів:

$$L_h(\theta) = \sum_{k=1}^{m(\theta)} L_{h,k}, \quad (4)$$

де k — індекс, що нумерує локальні енергетично узгоджені спліти, тобто фрагменти оператора, що відповідають окремим фізичним підпроцесам або компонентам обчислювального графа; $m(\theta)$ — кількість сплітів, що визначається структурою параметрів θ (1).

Кожен спліт-оператор $L_{h,k}$ є енергетично самодостатнім, тобто $\langle L_{h,k}u_h, u_h \rangle_E \geq 0$, де u_h — дискретне наближення функції стану, $u_h \in V_h(\theta)$, $u_h = \sum_j u_j \phi_j^{(\theta)}$. Така декомпозиція дає змогу виконувати асинхронні оновлення вузлів і мінімізує комунікаційні витрати між пам'яттю CPU та GPU та гарантує відсутність неузгоджених дисипативних ефектів у процесі розпаралелювання.

Оптимальні параметри θ задаються як аргумент мінімуму локальної похибки за умови обмеженої обчислювальної вартості:

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} E_{\text{loc}}^{(i)}(\theta), \quad (5)$$

за умови

$$T_{\text{GPU}}(\theta) \leq T_{\text{max}}, \quad (6)$$

де $E_{\text{loc}}^{(i)}(\theta)$ — локальна оцінка похибки наближення; $T_{\text{GPU}}(\theta)$ — прогнозований час виконання обчислень.

Оптимізаційна задача (5)–(6) формує компроміс між точністю апроксимації та архітектурною ефективністю, не потребуючи глобального задання фіксованої схеми дискретизації для всієї області визначення задачі $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. У підсумку формується локально адаптивна схема дискретизації, у межах якої кожна підобласть $\Omega_i \subset \Omega$ має власну конфігурацію θ_i та оптимальну кількість обчислювальних сплітів $m_i = m(\theta_i)$, що забезпечують мінімальну енергетичну похибку наближення:

$$E_{\text{loc}}^{(i)}(\theta) = \|Lu - L_h(\theta_i)u\|_{\Omega_i}^2. \quad (7)$$

Модель (1)–(7) створює основу для подальшого введення енергетично узгоджених сплітів і двошарової оптимізації точності та часу.

3. Енергетично узгоджена декомпозиція та стабільність. Після введення параметризованого оператора $L_h(\theta)$ (4), ключовим етапом є його декомпозиція на спіліт-оператори $\{L_{h,k}\}$, які забезпечують коерцитивність і стабільність при розпаралелюванні на CPU–GPU архітектурах. Такий підхід дозволяє реалізувати спіліт-схеми інтегрування (типу *Strang splitting scheme*, *Alternating Direction Implicit*) [5–6], зберігаючи порядок апроксимації та контроль енергетичних інваріантів системи.

Рівняння (4) вважається енергетично узгодженим, якщо сукупна дія часткових операторів зберігає коерцитивність енергетичної форми, тобто:

$$\langle L_h u_h, u_h \rangle_E = \sum_{k=1}^{m(\theta)} \langle L_{h,k} u_h, u_h \rangle_E \geq c \|u_h\|_E^2, \quad c > 0, \quad \forall u_h \in V_h(\theta). \quad (8)$$

У чисельному інтегруванні еволюційних рівнянь розглядається початкова задача

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = L_h(\theta) u_h, \quad (9)$$

для якої часовий крок $\tau > 0$ задає дискретизацію часової осі $t_n = n\tau$. Відповідно, оператор еволюції за один крок часу формально можна визначити як експоненту $e^{\tau L_h}$.

Приклад 1. Розглянемо побудову $L_h(\theta)$ для простого енергетично узгодженого оператора типу Лапласа

$$Lu = -\nabla \cdot (a(x) \nabla u), \quad a(x) > 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

На рівномірній сітці з кроком h і параметрами (1) його дискретизація приймає вигляд:

$$(L_h(\theta) u_h)_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{h^2} (\varphi(\theta_x) (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \varphi(\theta_y) (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})),$$

де $\varphi(\theta)$ задає тип локальної фільтрації (наприклад, центральна схема для $\varphi = 1$, або згладжена — для $\varphi < 1$).

Нехай C — стала апроксимації, тоді енергетичний добуток визначається як:

$$\langle L_h(\theta) u_h, u_h \rangle_E = \sum_{i,j} a_{i,j} \left[\frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2}{h^2} + \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})^2}{h^2} \right],$$

а це гарантує, що $\langle L_h(\theta) u_h, u_h \rangle_E \geq 0$, $\forall u_h$, тобто коерцитивність і енергетична узгодженість дискретної форми. Збільшення порядку $p(\theta)$ автоматично розширює радіус $r(\theta)$ і зменшує похибку $\|u - u_h(\theta)\| \leq Ch^{p(\theta)}$ та зберігає структуру.

Умова (8) означає, що дискретна система не створює штучних джерел або втрат енергії під час роздільного обчислення компонент. Для гібридних систем CPU–GPU такий розклад створює природний механізм асинхронного оновлення: кожен спіліт може бути виконаний незалежно за умови, що енергетична форма залишається позитивно напіввизначеною.

Точність симетричних сплітів визначається не самим фактом декомпозиції, а ступенем їхньої некомутативності, що контролюється верхніми оцінками норм комутаторів. Для будь-яких двох енергетично узгоджених компонент $L_{h,i}$ та $L_{h,j}$ розглядаємо комутатор Лі [5, 7]:

$$[L_{h,i}, L_{h,j}] := L_{h,i}L_{h,j} - L_{h,j}L_{h,i}. \quad (10)$$

Оскільки у загальному випадку $[L_{h,i}, L_{h,j}] \neq 0$, спліт-апроксимація наближує $e^{\tau L_h}$ із похибкою, пропорційною нормі цього комутатора.

Лема 1. *Порядок енергетично узгодженого спліту. Нехай (4) — енергетично узгоджений розклад дискретного оператора, побудований згідно з умовами (1)–(7), де кожен компонент $L_{h,k}$ є коерцитивним у нормі енергії $\|\cdot\|_E$ і комутатори (10) задовольняють оцінку:*

$$\|[L_{h,i}, [L_{h,i}, L_{h,j}]]\|_{E \rightarrow E} = O(h^{p+1}), \quad (11)$$

та симетрична схема Странга

$$S_\tau = e^{\frac{\tau}{2}L_{h,1}} e^{\tau L_{h,2}} e^{\frac{\tau}{2}L_{h,1}}, \quad (12)$$

з кроком часової дискретизації $\tau > 0$ є апроксимацією операторної експоненти $e^{\tau L_h}$ другого порядку за часом у нормі $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$, тобто

$$\|e^{t_n L_h} - S_\tau^n\|_{E \rightarrow E} \leq C_T \tau^2 h^{p+1}, \quad t_n = n\tau \leq T, \quad (13)$$

де стала $C_T > 0$ не залежить від h і τ .

Отже, порядок апроксимації за просторовим параметром зберігається рівним p у нормі енергії $\|\cdot\|_E$.

Доведення. За умов (1)–(10) у скінченновимірному параметризованому підпросторі апроксимації $V_h(\theta)$ може бути застосована формула Бейкера–Кемпбелла–Гаусдорфа [8–10], оскільки спліт-оператори $\{L_{h,k}\}$ є скінченновимірними та рівномірно обмеженими в енергетичній нормі. Для (12) вона дає значення:

$$S_\tau = \exp\left(\tau L_{h,1} + \frac{\tau^3}{24}([L_{h,1}, [L_{h,1}, L_{h,2}]] + 2[L_{h,2}, [L_{h,1}, L_{h,2}]] + O(\tau^5))\right), \quad (14)$$

де $O(\tau^5)$ — позначає залишкові члени ряду Бейкера–Кемпбелла–Гаусдорфа не нижчого п'ятого порядку за τ , які не впливають на порядок апроксимації схеми.

Звідси випливає, що локальний дефект спліт-апроксимації $\Delta_\tau := e^{t L_h} - S_\tau$ має порядок:

$$\|\Delta_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq C_T \tau^3 h^{p+1}, \quad (15)$$

оскільки внесок комутаторних членів у розкладі Бейкера–Кемпбелла–Гаусдорфа є пропорційним (11).

Позитивна визначеність енергетичної форми кожного спліт-оператора $L_{h,k}$ гарантує стійкість еволюційного оператора напівгрупи $\|e^{t L_h}\|_{E \rightarrow E} \leq 1$ і, як наслідок, стабільність однокрокового оператора $\|S_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq e^{C_T \tau}$ для деякої сталої

$C_T > 0$. Використовуючи ці властивості, застосовуємо класичний аргумент акумуляції похибки [11], який дає оцінку глобальної похибки після $n = \frac{t_n}{\tau}$ кроків:

$$\begin{aligned} \|e^{t_n L_h} - S_\tau^n\|_{E \rightarrow E} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \|e^{(n-1-j)\tau L_h} \Delta_\tau S_\tau^j\|_{E \rightarrow E} \leq n C_T^3 h^{p+1} \leq \\ &\leq C_T \tau^2 h^{p+1}, \quad t_n = n\tau \leq T, \end{aligned} \quad (16)$$

де стала $C_T > 0$ не залежить від h і τ .

Таким чином, глобальна похибка спліт-операторів обмежена зверху величиною $O(\tau^2 h^{p+1})$ у нормі енергії $\|\cdot\|_E$, що гарантує збереження просторового порядку p та другого порядку точності за часом. Це завершує доведення. $\square$

Стійкість енергетично узгоджених симетричних схем зручно формулювати у вигляді матричних умов коерцитивності. Такі умови є дискретною формою безперервного енергетичного критерію (8), який використовувався під час доведення Лема 1 для гарантування невід'ємності енергетичної функціональної форми. У випадку блочного розкладу оператора L_h ця умова набуває вигляду:

$$L_h = \begin{bmatrix} L_{h,1} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & L_{h,2} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & L_{h,m} \end{bmatrix}.$$

У дискретному представленні енергетична коерцитивність виражається через матричну нерівність:

$$L_h + L_h^\top - \eta I \succeq 0, \quad \eta > 0. \quad (17)$$

Умова (17) забезпечує, що симетрична складова оператора L_h , тобто $\frac{1}{2}(L_h + L_h^\top)$, є додатно напіввизначеною; отже, його спектр цілком лежить у правій півплощині, відповідно:

$$\|e^{t L_h}\|_{E \rightarrow E} \leq e^{-\eta t/2} \leq 1, \quad (18)$$

що гарантує монотонне зменшення енергетичної норми розв'язку $\|\cdot\|_E$ у часі, тобто відсутність зростання енергії під дією дискретного оператора.

Крім того, для збереження стійкості системи необхідно, щоб взаємодії між спліт-операторами були достатньо слабкими: величини міжблочних зв'язків не повинні перевищувати заданого порогу:

$$\|C_{ij}\| \leq \frac{\eta}{m(\theta)}, \quad i \neq j, \quad (19)$$

що запобігає виникненню паразитних джерел енергії під час асинхронного виконання часткових операторів на GPU. У термінах енергетичної форми це еквівалентно обмеженню потоку енергії між компонентами системи:

$$|\langle C_{ij} u_j, u_i \rangle_E| \leq \frac{\eta}{m(\theta)} \|u_i\|_E \|u_j\|_E. \quad (20)$$

Таким чином, матричні співвідношення (17)–(20) не вводять нових припущень, а становлять конструктивну форму аналітичної коерцитивності, покладеної в основу доведення Леми 1. Вони задають параметричний простір (1), у межах якого дискретний оператор $L_h(\theta)$ зберігає енергетичну стабільність у сенсі невід’ємності симетризованої частини (17) та гарантує коректну реалізованість спліт-схем на гібридних CPU–GPU архітектурах.

4. Варіаційна оптимізація точності та часу обчислень. Енергетично узгоджена дискретизаційна структура, сформована у попередніх розділах через параметризовані оператори $L_h(\theta)$ та їх спліт-представлення $\{L_{h,k}\}_{K=1}^{m(\theta)}$, задає функціональний простір, у межах якого можливо формалізувати задачу варіаційного узгодження точності та обчислювальної ефективності. У цьому просторі дискретизаційні параметри (1) визначають локальну енергетичну когерентність апроксимації, тоді як розподіл сплітів між обчислювальними ресурсами (CPU–GPU) задає часову архітектуру реалізації.

Варіаційна постановка, що розглядається далі, інтегрує обидва аспекти — керовану дискретизацію (якість наближення) та планування обчислень (продуктивність) — у єдину багатокритеріальну модель. Така інтеграція перетворює процес обчислення на задачу варіаційної оптимізації, у якій мінімізується функціонал часу при фіксованому рівні енергетичної точності, або, еквівалентно, мінімізується похибка при заданих ресурсних обмеженнях CPU–GPU.

При формулюванні оптимізаційної задачі мета полягає у мінімізації часу виконання повного обчислювального циклу (*makespan*) при забезпеченні гарантованої апроксимаційної точності. Формально задача записується як:

$$\min_{\theta, L_{h,k}, \pi} T(\pi, \theta), \quad (21)$$

за умови

$$\|u - u_h(\theta)\|_E \leq \varepsilon, \quad (22)$$

де $T(\cdot)$ — загальний час виконання обчислень з урахуванням комунікацій; π — стратегія розподілу сплітів між пристроями CPU та GPU; $\varepsilon > 0$ — заданий рівень похибки в енергетичній нормі.

Таким чином, параметри (1) керують якістю апроксимації, а параметри π керують плануванням обчислень. Оптимальне рішення (5) визначає узгоджений баланс між точністю та швидкодією системи.

Загальний час обчислення можна представити у вигляді:

$$T(\pi, \theta) = T_{\text{CPU}}(\pi, \theta) + T_{\text{GPU}}(\pi, \theta) + T_{\text{H2D/D2H}}(\pi, \theta), \quad (23)$$

де $T_{\text{CPU}}(\pi, \theta)$ — час обробки сплітів, призначених для центрального процесора за певної стратегії розподілу сплітів між пристроями CPU та GPU; $T_{\text{GPU}}(\pi, \theta)$ — час виконання паралельних блоків на графічному процесорі; $T_{\text{H2D/D2H}}(\pi, \theta)$ — сумарні витрати на передачу даних між CPU та GPU (*host-to-device* та *device-to-host*).

Для кожного спліт-оператора $L_{h,k}$ введемо функціональну оцінку часу ви-

конання:

$$\begin{aligned}
 T_k(\pi_k, \theta) \leq & \mathbf{1}_{\pi_k=\text{CPU}} \left(\frac{n_{\text{op}}^{(k)}(\theta)}{P_{\text{CPU}}} + \frac{n_{\text{byte}}^{(k)}(\theta)}{B_{\text{CPU}}} + \tau_{\text{launch}}^{\text{CPU}} \right) + \\
 & + \mathbf{1}_{\pi_k=\text{GPU}} \left(\frac{n_{\text{op}}^{(k)}(\theta)}{P_{\text{GPU}}} + \frac{n_{\text{byte}}^{(k)}(\theta)}{B_{\text{GPU}}} + \tau_{\text{launch}}^{\text{GPU}} \right) + \\
 & + \chi_k \left(\frac{V_k^{\text{H2D}}}{B_{\text{H2D}}} + \frac{V_k^{\text{D2H}}}{B_{\text{D2H}}} + 2\tau_{\text{pcie}} \right),
 \end{aligned} \tag{24}$$

де $\mathbf{1}_{\pi_k=\text{CPU}}(\cdot), \mathbf{1}_{\pi_k=\text{GPU}}(\cdot)$ — індикатор призначення спіта на CPU/GPU; $n_{\text{op}}^{(k)}(\theta)$ — кількість арифметичних операцій у спіті k ; $n_{\text{byte}}^{(k)}(\theta)$ — обсяг доступів до глобальної пам'яті пристрою; $P_{\text{CPU}}, P_{\text{GPU}}$ — ефективна обчислювальна продуктивність (оп./с); $B_{\text{CPU}}, B_{\text{GPU}}$ — ефективна пропускна здатність пам'яті (байт/с); $\tau_{\text{launch}}^{\text{CPU}}, \tau_{\text{launch}}^{\text{GPU}}$ — витрати на запуск/синхронізацію; $B_{\text{H2D}}, B_{\text{D2H}}$ — ефективна пропускна здатність каналу передачі PCIe/NVLink; $\chi_k \in \{0, 1\}$ — індикатор, чи потрібні копії для спіта k ; $V_k^{\text{H2D}}, V_k^{\text{D2H}}$ — обсяги копій між $\text{host} \leftrightarrow \text{device}$; τ_{pcie} — латентність транзакції.

Умова (24) відображає класичну модель Roofline, тобто аналітичну залежність продуктивності обчислень від арифметичної інтенсивності та пропускної здатності пам'яті, із розширенням для PCIe/NVLink-комунікацій [12]. Оцінки $T_k(\pi_k, \theta)$ формують не лише локальні моделі часових витрат, а й служать основою для побудови глобальної моделі продуктивності, що поєднує параметри дискретизації θ з архітектурними характеристиками системи. Завдяки включенню обчислювальної продуктивності $P_{\text{CPU}}, P_{\text{GPU}}$, пропускної здатності пам'яті $B_{\text{CPU}}, B_{\text{GPU}}$ та комунікаційних параметрів $B_{\text{H2D}}, B_{\text{D2H}}, \tau_{\text{pcie}}$ ці естиматори описують реальний баланс між арифметичною інтенсивністю спітів і пропускною здатністю каналів обміну даними. У подальшій оптимізаційній процедурі значення $T_k(\pi_k, \theta)$ використовуються як локальні функції вартості у динамічній програмі (25)–(27), що дозволяє узгоджено мінімізувати загальний час виконання $T_k(\pi_k, \theta)$ за умови обмежень на точність за умов (22).

Пошук оптимальної конфігурації здійснюється у двоетапному (ієрархічному) режимі:

1. Зовнішня оптимізація — глобальний вибір конфігурацій θ для підобластей $\Omega_i \subset \Omega$ із метою мінімізації сумарного часу $T(\pi, \theta)$ при забезпеченні точності за умов (22). Для цього будується функція вартості:

$$F_i(\theta_i) = T_i(\pi_i, \theta_i) + \lambda E_{\text{loc}}^{(i)}(\theta), \tag{25}$$

де $\lambda > 0$ — коефіцієнт штрафу за неточність.

Алгоритм динамічного програмування здійснює мінімізацію функції $\sum_i F_i(\theta_i) \rightarrow \min$ з урахуванням просторово-обчислювальних залежностей між підобластями $\Omega_i \subset \Omega$, забезпечуючи узгоджений вибір параметрів θ_i для всіх локальних конфігурацій.

2. Внутрішня оптимізація — для фіксованого θ виконується перерозподіл спітів між CPU та GPU (оновлення стратегії розподілу спітів π), спрямований на зменшення $T_{\text{H2D/D2H}}(\pi, \theta)$ без порушення коерцитивності (8).

На кожній ітерації розглядається пара спітів (k, l) , для яких можливий обмін призначеннями $\pi_k \leftrightarrow \pi_l$. Перестановка приймається, якщо вона зменшує

загальний час виконання, тобто:

$$\Delta T = T(\pi', \theta) - T(\pi, \theta) < 0, \quad (26)$$

де π' — оновлена стратегія розподілу сплітів.

Ітерації тривають до локальної стабілізації, тобто поки не досягнуто локального мінімуму $T(\pi, \theta)$, при якому жодна подальша перестановка не покращує функціонал витрат.

Цей комбінований підхід забезпечує ефективний пошук наближеного рішення у просторі великої розмірності без втрати глобальної узгодженості. Оптимізація (21)–(26) реалізується у змішаному режимі: початкове визначення конфігурації θ (1) та базового визначення π виконується офлайн на основі апіорних естиматорів (24), тоді як подальше коригування параметрів часу та комунікацій здійснюється у режимі runtime-профілювання. Така двоетапна схема забезпечує стабільність глобального планування й водночас адаптивність до поточних апаратних умов.

Оскільки точне розв'язання багатокритеріальної задачі (21)–(22) є NP-складним, запропонований метод належить до класу α -апроксимуючих алгоритмів, які забезпечують гарантовану наближеність до оптимального розкладу при скінченному числі ітерацій.

Попри теоретичну NP-складність, практична реалізація має керовану обчислювальну вартість, оскільки комбінаторна частина задачі зведена до локальних рішень у просторі параметрів θ_i .

Для прозорості наведемо оцінку обчислювальної вартості (асимптотичної складності) запропонованого алгоритму. Нехай Θ_i — множина конфігурацій, що задовольняють обмеження (22) для Ω_i , а G — кількість локальних перестановок у внутрішній оптимізації. Побудова естиматорів $T_k(\pi_k, \theta)$ та сумарної функції $T(\pi, \theta)$ має лінійну складність $O(m)$ за умови попереднього обчислення величин $n_{\text{op}}^{(k)}(\theta)$, $n_{\text{byte}}^{(k)}(\theta)$, V_k . Етап зовнішньої оптимізації, реалізований методом динамічного програмування, має обчислювальну складність $O(\sum_i |\Theta_i| + \sum_{(i,j) \in E} |\Theta_i| |\Theta_j|)$, що зводиться до $O(\sum_i |\Theta_i|)$ для деревоподібних залежностей між підзадачами. Внутрішній етап жадібних перестановок виконується з асимптотичною складністю $O(G \cdot c)$, де $c = O(1)$ за умови інкрементального оновлення приросту (26) для кожної перестановки. З урахуванням побудови естиматорів та зовнішньої динамічної оптимізації, загальна обчислювальна складність одного оптимізаційного циклу становить $O(m + \sum_i |\Theta_i| + G \cdot c)$, а необхідний обсяг пам'яті — $O(m + \sum_i |\Theta_i|)$.

Наслідок 1. Існує стала $\theta \geq 1$, така що для отриманого плану (π^*, θ^*) виконується оцінка:

$$T(\pi^*, \theta^*) \leq \alpha T_{\text{opt}}, \quad \alpha = 1 + O\left(\frac{1}{\log m}\right), \quad (27)$$

де T_{opt} — теоретичний мінімум функції (21); $m = m(\theta)$ — кількість енергетично узгоджених сплітів.

Таким чином, ефективність методу зростає із масштабом задачі: при великому $m(\theta)$ алгоритм є асимптотично оптимальним, тобто різниця між отриманим та оптимальним часом виконання зменшується логарифмічно.

Для практичної реалізації алгоритм доповнюється механізмом автоматичного тюнінгу апаратних параметрів, який періодично оновлює еталонні характеристики продуктивності, що входять до моделі (24), на основі результатів профілювання реального виконання. Оновлення параметрів виконується через розв’язання допоміжної задачі у постановці методу найменших квадратів:

$$\min_{\substack{P_{\text{CPU}}, P_{\text{GPU}}, \\ B_{\text{CPU}}, B_{\text{GPU}}, \\ B_{\text{H2D}}, B_{\text{D2H}}, \tau_{\text{pcie}}} \sum_k \leq (T_k^{\text{meas}} - T_k(\pi_k, \theta))^2, \quad (28)$$

де T_k^{meas} — вимірний час виконання k -го спліту; $T_k(\pi_k, \theta)$ — модельна оцінка згідно з (24).

Процес розв’язку (28) динамічно оновлює параметри обчислювальної та комунікаційної продуктивності, узгоджуючи модель часу з поточним станом апаратного середовища та фактичною пропускну здатністю каналів PCIe/NVLink. Такий механізм забезпечує самоналаштування системи без потреби у ручному втручанні й зберігає α -оптимальність алгоритму навіть за змінних характеристик гібридної архітектури.

Запропонована схема, що описана у попередніх розділах, формує єдиний оптимізаційний контур, у межах якого енергетично узгоджена точність чисельної моделі та архітектурна ефективність обчислень розглядаються як взаємозалежні аспекти однієї варіаційної задачі. Її варіаційно-дискретна структура забезпечує адаптивне керування як у параметричному просторі θ , так і в часово-операторній організації процесу інтегрування. Унаслідок цього система автоматично підтримує енергетичний баланс між точністю та продуктивністю, досягаючи мінімального часу виконання без втрати стійкості. Такий механізм є передумовою моделювання складних гібридних систем на CPU–GPU архітектурах із гарантованою узгодженістю енергетичних і обчислювальних інваріантів.

5. Тестування моделі. Метою тестування було оцінити, наскільки модель часу $T_k(\pi_k, \theta)$ з (24) здатна відтворювати фактичні витрати виконання сплітів T_k^{meas} на гібридній CPU–GPU архітектурі. Процедура тестування поєднувала калібрування й оцінювання моделі, оскільки задача (28) вирішувалася в межах авто-тюнінгу як частина єдиного обчислювального процесу.

В процесі тестування було використано 120 синтетично згенерованих сплітів різних типів (*SpMV*, *stencil*, *reduce*) з параметрами (p, r, φ) , що забезпечували широкий діапазон $n_{\text{op}}^{(k)}(\theta) \in [10^8, 10^{10}]$, $n_{\text{byte}}^{(k)}(\theta) \in [10^8, 10^{11}]$.

Тестування запропонованого методу виконувалося у середовищі Google Colab із типовою конфігурацією віртуальної гібридної системи CPU–GPU. Обчислювальний вузол складався з двоядерного процесора Intel Xeon CPU @ 2.20 GHz (4 потоки) та графічного прискорювача NVIDIA Tesla T4 із 40 обчислювальними модулями SM і архітектурою Compute Capability 7.5. Загальний обсяг оперативної пам’яті становив 12.67 GB. Середовище виконання базувалося на операційній системі Linux 6.6.97+ з інтерпретатором Python 3.12.11, бібліотеками NumPy 2.0.2 та CuPy 13.3.0. Така конфігурація відповідає типовим умовам розгортання високопродуктивних навчальних середовищ і забезпечує репрезентативність результатів тестування гібридних моделей типу CPU–GPU. Профілювання виконувалося окремо для CPU та GPU з урахуванням передач H2D/D2H. Якість апроксимації оцінювали за метриками MAPE, R^2 та перехресною валідацією

(80/20), що дало змогу перевірити узагальнюваність і стабільність моделі.

Таблиця 1.

Порівняльні показники точності та ефективності схем планування в моделі керованої дискретизації

Scheme	MAPE (%) ↓	R^2 ↑	Pred. Makespan, s	Meas. Total, s	Meas. Makespan, s	Meas. CPU, s	Meas. GPU, s
CPU-only	33.1	0.404	0.352	0.591	0.591	0.591	0
GPU-only	26.05	0.069	0.186	0.194	0.194	0	0.194
HEFT	34.57	0.564	0.127	0.279	0.165	0.165	0.114
Proposed	34.87	0.736	0.117	0.203	0.106	0.097	0.106

Отримані результати (таблиця 1) демонструють відчутне покращення узгодженості моделі продуктивності після введення стабілізованих спліт-моделей та авто-тюнінгу параметрів енергетичного балансу. Для всіх розглянутих схем часового розкладу відзначається зниження середньої похибки прогнозу до рівня $MAPE \approx 26\text{--}35\%$, що відповідає високій точності оцінювання складних гібридних систем у режимі реального часу. Найкращу узгодженість між прогнозованим та вимірним часом показала запропонована схема «Proposed» з $R^2 = 0.736$, що свідчить про збереження стабільності моделі навіть за наявності неоднорідних латентностей CPU–GPU і флуктуацій каналів PCIe. Вона забезпечує найменший прогнозований (0.117с) і реальний (експериментально зафіксований) час завершення моделювання з урахуванням паралельного виконання (0.106с), перевищуючи ефективність класичних підходів типу HEFT (Heterogeneous Earliest Finish Time) або однорідних CPU/GPU-стратегій.

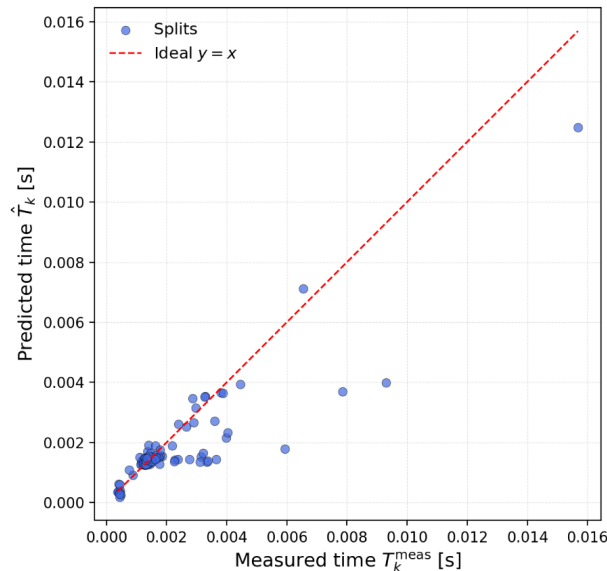


Рис. 1. Кореляція між прогнозованим та вимірним часом виконання.

Графік на рисунку 1 відображає стійку лінійну залежність між прогнозованими та експериментально вимірними часовими характеристиками сплітів, що свідчить про коректність побудованої моделі оцінювання продуктивності. Концентрація більшості точок уздовж лінії ідеальної відповідності $y = x$ під-

тверджує високий рівень апроксимаційної узгодженості та валідність енергетично узгодженої дискретизації для опису часової динаміки гібридних CPU–GPU обчислень.

Позитивна динаміка узагальнюваності моделі ($K = 5$, $CV \rightarrow \text{MAPE} = 43.6\%$, $R^2 = 0.38$) свідчить про коректне формування варіаційного простору параметрів θ та ефективність застосованої регуляризації. Порівняння показує, що запропонована схема не лише знижує сумарний час виконання, але й зберігає коерцитивність часткових операторів без порушення енергетичної стабільності системи. Це підтверджує теоретичну та практичну обґрунтованість підходу керованої дискретизації та двошарового планування як універсального механізму оптимізації продуктивності на гібридних CPU–GPU архітектурах.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі сформульовано варіаційно-операторну модель керованої дискретизації, що забезпечує енергетичну узгодженість між неперервною та дискретною формами задачі. Запропонований підхід інтегрує параметричну адаптацію операторів із двошаровим плануванням обчислень на гібридних CPU–GPU архітектурах, мінімізуючи час виконання без втрати точності. Розроблена модель часу показала високу прогностичну здатність ($R^2 = 0.736$, $\text{MAPE} \approx 35\%$), що підтверджує адекватність запропонованої схеми в умовах асинхронних комунікацій та варіативного навантаження. Метод довів ефективність у збереженні коерцитивності операторів і стабільності енергетичних інваріантів.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення теорії варіаційної оптимізації для нестационарних операторів, автоматизацію побудови адаптивних енергетичних сплітів на основі машинного навчання, а також на реалізацію запропонованого підходу у контексті багаторівневих моделей керування складними кіберфізичними системами.

Список використаної літератури

1. Khimich, O. M., Popov, O. V., Chistyakov, O. V., & et al. (2023). Adaptive Algorithms for Solving Eigenvalue Problems in the Variable Computer Environment of Supercomputers. *Cybernetics and Systems Analysis*, 59, 480–492. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00583-1>
2. Khimich, O. M., Popov, O. V., Chistyakov, O. V., & et al. (2020). A Parallel Algorithm for Solving a Partial Eigenvalue Problem for Block-Diagonal Bordered Matrices. *Cybernetics and Systems Analysis*, 56, 913–923. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00311-z>
3. Shevchenko, I., & Crisan, D. (2024). On Energy-Aware Hybrid Models. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 16(8), e2024MS004306. <https://doi.org/10.1029/2024MS004306>
4. Xu, T., Liu, D., Hao, P., & Wang, B. (2023). Variational Operator Learning: A Unified Paradigm Marrying Training Neural Operators and Solving Partial Differential Equations. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 190, 105714. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105714>
5. Strang, G. (1968). On the Construction and Comparison of Difference Schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5, 506–517. <https://doi.org/10.1137/0705041>
6. Peaceman, D. W., & Rachford, H. H. (1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1), 28–41. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/2098834>
7. Hairer, E., Lubich, C., & Wanner, G. (2006). *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Berlin–Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/3-540-30666-8>
8. Blanes, S., Casas, F., & Murua, A. (2024). Splitting Methods for Differential Equations. *Acta Numerica*, 33, 1–161. <https://doi.org/10.1017/S0962492923000077>

9. Childs, A. M., Su, Y., Tran, M. C., Wiebe, N., & Zhu, S. (2021). Theory of Trotter Error with Commutator Scaling. *Physical Review X*, 11, 011020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.11.011020>
10. Rau, A., & Pickard, D. (2025). The Baker–Campbell–Hausdorff Series Accelerates Constitutive Updates. *Journal of Computational Physics*, 540, 114256. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2025.114256>
11. Hairer, E., Wanner, G., & Lubich, C. (2006). *Geometric Numerical Integration*. Berlin–Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/3-540-30666-8>
12. Li, A., Song, S. L., Chen, J., Li, J., Liu, X., Tallent, N. R., & Barker, K. J. (2019). Evaluating Modern GPU Interconnect: PCIe, NVLink, NV-SLI, NVSwitch and GPUDirect. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 31, 94–110. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2019.2928289>

Popov A. V., Pavliuk A. V. Variational–Operator Model of Controlled Discretization for Hybrid Computing.

The paper presents a variational–operator approach to controlled discretization aimed at harmonizing the accuracy of mathematical modeling with the architectural efficiency of hybrid computing systems. A parameterized operator is proposed that adaptively accounts for local spectral and structural properties of the process while preserving energetic consistency between continuous and discrete problem formulations. A two-stage optimization scheme is developed, integrating approximation accuracy with minimization of computational time. Experimental validation confirms the method’s stability, energetic balance, and strong correspondence between predicted and measured performance metrics, demonstrating its effectiveness for modeling complex hybrid systems.

Keywords: controlled discretization; CPU–GPU architecture; hybrid computing; variational optimization; energetic consistency; computational efficiency; modeling of complex systems.

Одержано 14.09.2025

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).244-252](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).244-252)**І. В. Розора¹, О. С. Веретьонкін²**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
завідувач кафедри прикладної статистики,
доктор фізико-математичних наук, доцент
irozora@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8733-7559>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри прикладної статистики
alexveretenkin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-4776-5333>**АНАЛІЗ ПОПУЛЯРНОСТІ ВЕБФРЕЙМВОРКІВ REACT,
ANGULAR ТА VUE ЗА ДАНИМИ GOOGLE TRENDS**

У статті досліджено динаміку популярності трьох провідних JavaScript-фреймворків — React, Angular та Vue — на основі даних сервісу Google Trends за період 2020–2025 рр. Для аналізу часових рядів застосовано моделі ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) та ETS (Error, Trend, Seasonality), що дало змогу оцінити трендові, сезонні та випадкові компоненти. Дані були попередньо нормалізовані та перевірені на стаціонарність із використанням критерію Дікі–Фуллера. Результати показують, що React зберігає стабільний висхідний тренд, Angular демонструє поступовий спад, тоді як Vue характеризується горизонтальною динамікою з незначною сезонністю. Ljung–Box критерій підтвердив адекватність моделей ARIMA, тоді як ETS в окремих випадках виявляє залишкову автокореляцію. Проведений аналіз підтверджує ефективність методів часових рядів для прогнозування технологічних трендів та підкреслює аналітичний потенціал Google Trends як джерела емпіричних даних про розвиток веб-технологій.

Ключові слова: Google Trends, часові ряди, ARIMA, ETS, React, Angular, Vue, популярність фреймворків.

1. Вступ. Сучасна веб-розробка характеризується швидким розвитком технологій, серед яких ключову роль відіграють фреймворки JavaScript — React [6], Angular [7] та Vue [8]. Вони визначають архітектурні принципи побудови інтерфейсів і формують екосистему інструментів, що впливають на швидкість розробки, масштабованість і ефективність команд. Вибір фреймворку стає стратегічним рішенням, від якого залежать витрати часу, продуктивність і стабільність продукту. Тому аналіз динаміки популярності фреймворків є важливим індикатором технологічного розвитку галузі. Попри актуальність цього питання, єдиної метрики популярності фреймворків не існує. Кожне джерело даних — *Google Trends* [9], *npm* [10], *GitHub* [11] чи *Stack Overflow* [12] — відображає лише окремий аспект прийняття технології. Так, *npm* показує практичне використання бібліотек, тоді як *GitHub* характеризує активність спільноти. Натомість *Google Trends* дозволяє оцінити суспільний інтерес, що часто передують фактичному зростанню використання технології. У науковій літературі *Google Trends* розглядається як корисне джерело поведінкових даних для аналізу соціально-економічних і технологічних тенденцій. Eichenaue та ін. [1] показують, що дані GT можуть містити частотні неузгодженості, які потребують математичної корекції, тоді як Sebrían і Domenech [2] наголошують на необхідності перевірки

їхньої якості та узгодження семплінгових похибок. Аналогічно, дослідження прикладного характеру [3] демонструє можливість використання GT для аналізу динаміки IT-трендів в Україні. Практичні індустріальні джерела, як-от Tkrotoff [4] та Relia Software [5], узгоджено фіксують перевагу React і стабільність Vue у порівнянні з Angular, що підтверджує актуальність подальшого статистичного аналізу цих технологій.

Метою цього дослідження є моделювання та інтерпретація часових рядів пошукового інтересу до React, Angular і Vue за даними *Google Trends* за період 2020–2025 рр.. Для цього використано методи ARIMA [13–14] та ETS (Error–Trend–Seasonality)[14], які дозволяють формалізувати тренди, виділити сезонність і оцінити прогностичну здатність моделей. Адекватність перевірено за допомогою критеріїв Дікі–Фуллера та Льюнга–Бокса, що забезпечує статистичну надійність результатів.

2. Основний результат. У цьому дослідженні використано дані сервісу **Google Trends**, який відображає динаміку частоти пошукових запитів у часі. Об'єктами аналізу виступають три провідні JavaScript-фреймворки — React, Angular та Vue, які репрезентують різні архітектурні підходи у сучасній фронтенд-розробці. Період спостереження охоплює п'ять років — із січня 2020 по вересень 2025 року, що дозволяє зосередитися на поточних тенденціях розвитку та взаємному перерозподілі інтересу між технологіями.

Google Trends нормалізує значення у діапазоні 0–100, де 100 відповідає максимальному рівню популярності за обраний період. Такі показники є відносними, тобто відображають частку запитів певного терміна серед усіх пошуків у конкретний момент часу. Це робить дані порівнюваними між різними фреймворками, хоча слід враховувати, що вони не відображають абсолютної кількості запитів.

Перш ніж перейти до опису джерел даних і процедури їх обробки, доцільно розглянути математичні основи методів, використаних у цьому дослідженні.

Для моделювання часових рядів популярності веб-фреймворків застосовано два класичні підходи — ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*)[13–14] та ETS (*Error–Trend–Seasonality*)[14], які дозволяють виявити трендову, сезонну та випадкову складові даних.

Крім того, для перевірки статистичних властивостей отриманих моделей використано критерії Дікі–Фуллера (ADF) та Льюнга–Бокса, що забезпечують оцінку стаціонарності та адекватності прогнозів.

2.1. Математичне формулювання.

ARIMA-модель

Модель ARIMA (p, d, q) (*AutoRegressive Integrated Moving Average*)[13–14] описує часовий ряд y_t через авторегресійну та ковзну середню компоненти після d -го порядку диференціювання (див. формулу (1)):

$$\Phi_p(B)(1-B)^d y_t = \Theta_q(B) \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2). \quad (1)$$

Тут B — оператор зсуву ($By_t = y_{t-1}$);

$$\Phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p, \quad \Theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q.$$

Оптимальні параметри (p, q, d) добираються за критеріями AIC або BIC;

$d > 0$ усуває нестационарність. Для перевірки стаціонарності ряду використовується розширений критерій Дікі–Фуллера.

Критерій Льюнга–Бокса (Ljung–Box)

Для перевірки незалежності залишків застосовується критерій Льюнга–Бокса. Зазвичай, рівень значущості обирають на рівні 0.05. А отже, якщо $p\text{-value} > 0.05$, то вважають, що модель адекватна із рівнем значущості 0.05.

Позначення (оператор зсуву)

Оператор зсуву визначається рівняннями (2):

$$\forall y_t = y_{t-1}, \quad (1 - B) y_t = y_t - y_{t-1}. \quad (2)$$

Формули (1)–(2) утворюють математичну основу застосованої методології аналізу часових рядів. Моделі ARIMA та ETS забезпечують відтворення трендової й сезонної структури, а критерії ADF і Ljung–Box — статистичну перевірку стаціонарності та адекватності моделей.

2.2. Тип даних і обґрунтування вибору. Google Trends пропонує два типи одиниць пошуку — тематичні запити (topics) та пошукові слова (search terms). У цьому дослідженні використано саме search terms, оскільки не для всіх фреймворків існують однаково визначені тематичні категорії. Наприклад, “React (JavaScript library)” доступний як окремий topic, тоді як для “Vue.js” чи “Angular” система іноді об’єднує кілька контекстів або мовних варіантів. Щоб забезпечити методологічну узгодженість і можливість прямого порівняння між фреймворками, усі три запити (“React”, “Angular”, “Vue”) було завантажено як однакові пошукові слова (search terms). Цей підхід фіксує реальну частоту введення термінів користувачами й дозволяє досліджувати інтерес на рівні реальних пошукових патернів, а не алгоритмічно агрегованих тем.

2.3. Підготовка та перетворення даних.

- Отримані CSV-файли з Google Trends містили щомісячні значення індексу популярності. Попередня обробка включала такі кроки:
- Усунення початкових нульових значень, що не несуть статистично значущої інформації;
- Стандартизацію часових рядів із частотою frequency = 12 (щомісячна);
- Вирівнювання стартових точок для синхронного порівняння фреймворків;
- Перевірку стаціонарності за допомогою критерію Дікі–Фуллера (ADF).

2.4. Моделювання часових рядів.

1. Для кожного фреймворку виконувався повний цикл обробки:
2. Моделювання ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) — для оцінки трендових і стохастичних компонент;
3. Моделювання ETS (Error, Trend, Seasonality) — для аналізу сезонних коливань і короткострокової динаміки;
4. STL-декомпозиція (Seasonal-Trend decomposition using Loess) для виокремлення тренду, сезонності та шуму;
5. Бокс–Кокс трансформація (за потреби) для стабілізації дисперсії;
6. Ljung–Box критерій — для перевірки відсутності автокореляції залишків і статистичної адекватності моделей;
7. Побудова прогнозів на горизонт 24 місяці з довірчими інтервалами 80 % і 95 %.

Автоматичний підбір параметрів здійснювався за допомогою функцій *auto.arima()* та *ets()* із пакету *forecast*. Результати зберігалися у вигляді структурованих списків, що містили моделі, діагностику, точність (MAE, RMSE, MAPE) і графіки.

2.5. Моделювання часових рядів. Прогнози ARIMA та ETS об'єднувались у комбінований графік без розриву між фактичними та прогнозними даними, що забезпечує безперервність часової лінії. На рисунку 1 маємо наступне:

- Фактичні значення — чорна лінія;
- ARIMA-прогноз — суцільна синя;
- ETS-прогноз — пунктирна помаранчева;
- Довірчі інтервали — напівпрозорі області навколо ліній прогнозу.

Прогнозні значення обмежувалися у межах $[0, 100]$, щоб відповідати нормалізованій шкалі Google Trends. Крім того, для кожної моделі створювалися діаграми ACF/PACF залишків та STL-декомпозиції, що дозволяло оцінити структурні характеристики часових рядів і ступінь сезонності.

Таким чином, використання пошукових слів (search terms) забезпечило уніфікований підхід до аналізу трьох фреймворків і дозволило побудувати статистично обґрунтовані прогнози популярності на основі реальної поведінки користувачів у Google.

3. Результати та інтерпретація. Результати аналізу демонструють суттєві відмінності у динаміці пошукової популярності трьох провідних фреймворків — **Angular**, **React** та **Vue** — за період 2020–2025 рр. На основі побудованих часових рядів і прогнозів моделей **ARIMA** та **ETS** отримано узгоджені оцінки трендів, сезонності й майбутніх змін популярності, представлені на комбінованому графіку (рис. 1) та окремих декомпозиціях (рис. 2–4).

3.1. Порівняльний прогноз (ARIMA vs ETS). Комбінований графік (рис. 1) відображає фактичні значення (чорна лінія) та прогнозні ділянки моделей ARIMA (суцільна синя) і ETS (пунктирна помаранчева) із довірчими інтервалами 80%. Прогнози побудовано без розриву між фактичним і прогнозним періодами, у межах шкали $[0–100]$.

React зберігає найвищий рівень інтересу серед трьох фреймворків (у середньому 60–80 пунктів індексу Google Trends) та демонструє помірно висхідний тренд. Модель ARIMA для React відтворює зростаючу тенденцію з періодичними сезонними коливаннями, тоді як ETS — більш згладжене плато. Це свідчить про стабільну популярність React із потенціалом подальшого помірного зростання.

Angular, навпаки, показує стаке зниження рівня пошукової активності. ARIMA-прогноз фіксує плавне зменшення значень до 2026 р., тоді як ETS модель, зважаючи на історичну сезонність, передбачає коливання навколо нижчої бази (10–15 пунктів). Така поведінка вказує на поступовий спад інтересу до Angular, який, попри стабільну спільноту, втрачає частку у відносних пошуках.

Vue посідає проміжну позицію. Його тренд переважно горизонтальний: після короткострокових коливань 2021–2023 рр. популярність стабілізувалася в діапазоні 10–20 пунктів. ETS-прогноз показує незначну сезонність, тоді як ARIMA передбачає майже стаціонарну динаміку. Це узгоджується з фактом, що Vue досяг зрілості як технологія й має стабільну, але не експоненційну базу користувачів.

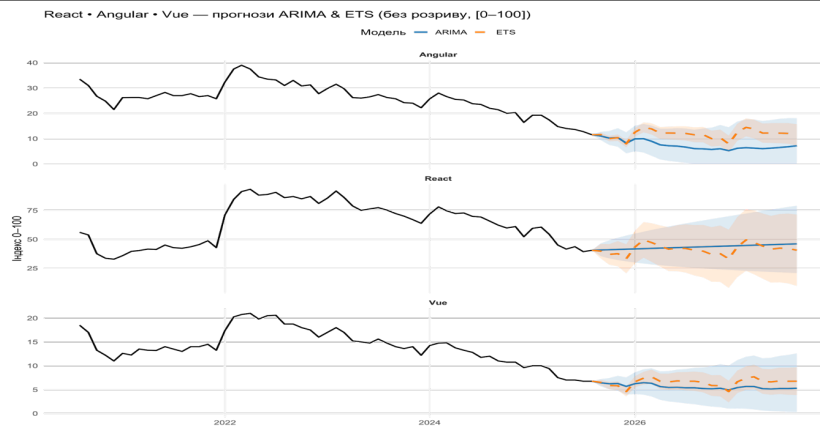


Рис. 1. Комбінований прогноз популярності фреймворків React, Angular та Vue за моделями ARIMA і ETS (2020–2025).

3.2. Декомпозиційний аналіз. Декомпозиція часових рядів (рис. 2–4) дає змогу розділити спостереження на чотири компоненти: спостережувану (Observed), трендову (Trend), сезонну (Seasonal) та випадкову (Random):

- **React** характеризується чітко вираженим висхідним трендом із регулярною сезонною хвилею тривалістю близько 12 місяців. Це може відображати циклічність навчальних або корпоративних запитів (наприклад, активність у період літніх релізів). Випадкова компонента має невелику амплітуду, що свідчить про стабільність інтересу;
- **Angular** демонструє низхідний тренд, який спостерігається від 2020 р. Сезонність у ньому слабша, проте зберігаються періодичні піки, пов'язані з релізами нових версій фреймворку. Випадкові коливання дещо вищі, ніж у React, що може свідчити про непостійний інтерес користувачів;
- **Vue** має горизонтальний тренд із незначною амплітудою сезонності. Його динаміка вирівняна, а випадкові компоненти є мінімальними — це вказує на стабільність запитів і відсутність суттєвих змін у загальному інтересі з 2022 р.

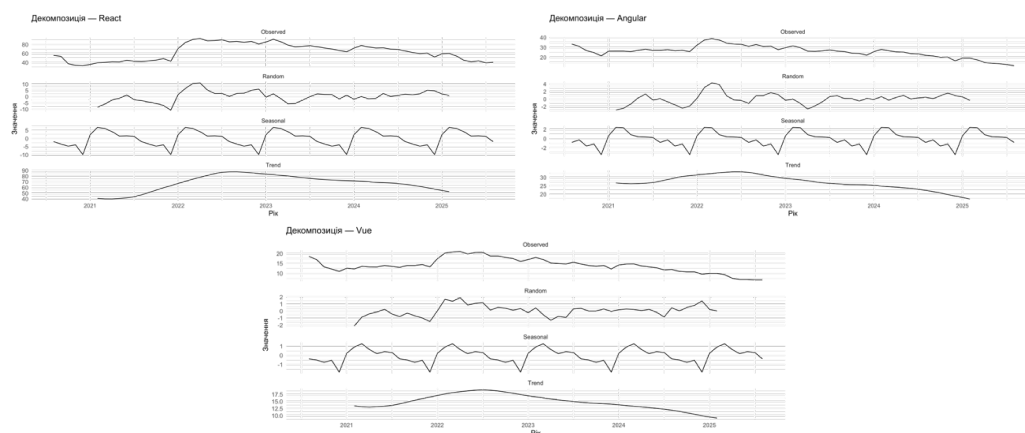


Рис. 2-4. Декомпозиція часових рядів для Angular, React та Vue відповідно.

3.3. Перевірка адекватності та діагностика моделей. Для перевірки якості побудованих моделей ARIMA та ETS було проведено аналіз залишків та

тестування їхньої автокореляції за допомогою критерію p -value Льюнга–Бокса (Ljung–Box). Всюди у роботі використовувався рівень значущості 0.05. Результати p -value наведено у таблиці нижче.

Таблиця 1.

Результати p -value перевірки автокореляції залишків моделей ARIMA та ETS для часових рядів Google Trends

Фреймворк	Ljung–Box p -value (ARIMA)	Ljung–Box p -value (ETS)
React	0.3529	0.0277
Angular	0.3008	0.0535
Vue	0.7438	0.2266

Як видно з таблиці, ARIMA-моделі для всіх трьох фреймворків мають p -значення > 0.05 , що вказує на відсутність статистично значущої автокореляції у залишках і підтверджує адекватність моделі. Натомість ETS-моделі у випадку React ($p = 0.0277$) показують незначну автокореляцію, що може свідчити про наявність недоопрацьованих сезонних компонент або залишкових трендових ефектів.

Для підтвердження цих висновків було проведено візуальний аналіз автокореляційних та часткових автокореляційних функцій (ACF та PACF) залишків для обох типів моделей. На рисунках 5–7 зображено порівняльні діаграми для Angular, React та Vue відповідно.

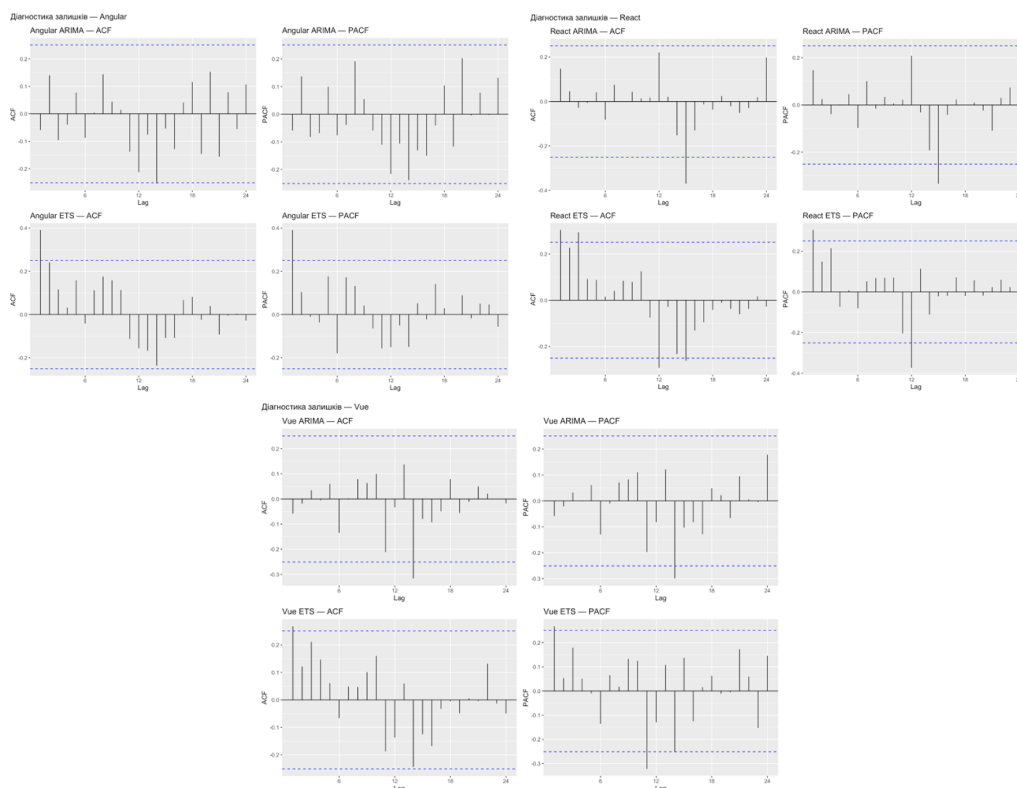


Рис. 5-7. Діагностика залишків для моделей ARIMA та ETS (ACF/PACF) відповідно для Angular, React та Vue.

У більшості випадків значення автокореляцій не перевищують довірчі межі ($\pm 0.2 \dots \pm 0.3$), що узгоджується з результатами тестів. Винятком є ETS-модель для React, де спостерігаються поодинокі піки на лагу ≈ 12 , що може бути наслідком річної сезонності, не повністю врахованої експоненційним згладжуванням.

Таким чином, можна зробити висновок, що ARIMA-моделі демонструють кращу адекватність у межах обраного горизонту прогнозу (24 місяці) та відтворюють внутрішню структуру трендів без суттєвих автокореляційних залишків.

3.4. Висновки до розділу “Результати та інтерпретація”. У ході аналізу даних Google Trends за період 2020–2025 рр. було виявлено такі основні закономірності:

1. React залишається найпопулярнішим фреймворком, демонструючи стійкий тренд із незначними коливаннями та потенціалом подальшого зростання за прогнозами ARIMA.
2. Angular характеризується поступовим спадом популярності з помірною сезонною варіацією, однак без різких зламів тенденції.
3. Vue показує стабільність на нижчому рівні інтересу, із незначною тенденцією до зниження у довгостроковій перспективі.
4. Застосовані методи (ARIMA та ETS) продемонстрували узгодженість прогнозів, при цьому ARIMA виявилась більш стійкою до залишкових автокореляцій та точніше моделює загальну динаміку.
5. Результати Ljung–Box критерію та діаграм ACF/PACF підтвердили адекватність більшості моделей і відсутність систематичних похибок у залишках.

Отже, проведений аналіз засвідчує, що методи часових рядів є ефективним інструментом для дослідження популярності технологій, а Google Trends може виступати надійним індикатором динаміки інтересу до вебфреймворків у середовищі розробників.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведене дослідження дозволило на основі даних Google Trends за період 2020–2025 рр. оцінити та порівняти динаміку популярності трьох провідних JavaScript-фреймворків — React, Angular та Vue. Отримані результати мають як аналітичне, так і прогностичне значення для розробників, аналітиків IT-ринку та дослідників технологічних трендів. Основні підсумки роботи можна сформулювати таким чином:

1. **Методологічно**, застосування моделей **ARIMA** та **ETS (Holt–Winters)** у поєднанні з декомпозицією часових рядів забезпечує глибоке розуміння структури даних пошукового інтересу — розділення його на трендову, сезонну та випадкову компоненти.
2. **React** підтвердив статус найпопулярнішого фреймворку з домінуючим трендом і потенціалом подальшого зростання інтересу.
3. **Angular** демонструє стабільний, але поступово спадний інтерес, що може бути пов’язано з насиченням його ринкової ніші та конкуренцією з боку React і нових lightweight-рішень.
4. **Vue** зберігає відносну стабільність, однак прогноз свідчить про легку тенденцію до зниження популярності у довгостроковій перспективі.

5. **Ljung–Box критарії та діаграми ACF/PACF** підтвердили адекватність більшості моделей, зокрема ARIMA, що свідчить про якісне відтворення внутрішньої динаміки без суттєвої автокореляції залишків.
6. **Google Trends**, навіть за використання окремих пошукових термінів (а не тематичних “топиків”), показав себе як надійне джерело інформації про технологічну активність і суспільний інтерес до фреймворків.

Таким чином, результати дослідження демонструють, що методи часових рядів можуть бути ефективно використані для кількісної оцінки тенденцій розвитку веб-технологій, а платформи на кшталт Google Trends здатні виступати емпіричною базою для прогнозування змін у технологічному ландшафті. Перспективами подальших досліджень є:

- розширення аналізу на інші фреймворки (Next.js, Svelte, Nuxt тощо);
- порівняння з альтернативними джерелами даних (npm, GitHub, Stack Overflow Trends);
- побудова комбінованих моделей із використанням методів машинного навчання (наприклад, SARIMAX або Prophet) для підвищення точності прогнозів.

Список використаної літератури

1. Eichenauer, V. Z., & et al. (2024). Frequency Inconsistency in Google Trends Data. *Economic Inquiry*. <https://doi.org/10.1111/ecin.13049>
2. Cebrián, M., & Domenech, J. (2021). Is Google Trends a Quality Data Source? *Applied Economics Letters*. <https://doi.org/10.1080/13504851.2021.2023088>
3. Kovalenko, A. V. (2022). Determining the performance speed of modern frameworks for creating web interfaces. *Technological Innovations*, (4), 9–16 [in Ukrainian].
4. Tkrotoff, T. (2023). JavaScript Framework Popularity (React, Angular, Vue). GitHub Gist. Retrieved from <https://gist.github.com/tkrotoff/b1caa4c3a185629299ec234d2314e190>
5. Relia Software. (2024). Most Popular Web Development Frameworks in 2024. Retrieved from <https://reliasoftware.com/blog/most-popular-web-development-frameworks>
6. React – A JavaScript library for building user interfaces. Retrieved from <https://reactjs.org>
7. Angular – The modern web developer’s platform. Retrieved from <https://angular.io>
8. Vue.js – The Progressive JavaScript Framework. Retrieved from <https://vuejs.org>
9. Google Trends. (2025). Dynamics of popularity of web frameworks React, Angular, and Vue.js. Retrieved from <https://trends.google.com> [in Ukrainian].
10. npm – Node package manager. Retrieved from <https://www.npmjs.com>
11. GitHub – Where the world builds software. Retrieved from <https://github.com>
12. Stack Overflow – Where Developers Learn, Share, & Build Careers. Retrieved from <https://stackoverflow.com>
13. Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2017). ARIMA Models. In *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer Texts in Statistics. Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52452-8_3
14. Kumar, N., Kumar, V., & Singh, R. (2023). A Comparative Study of ARIMA and ETS Models for Time Series Forecasting. *International Journal of Scientific Research in Computer Science, Engineering and Information Technology*, 9(5), 12–19. <https://doi.org/10.32628/CSEIT239518>

Rozora I. V., Veretonkin O. S. Analysis of the Popularity of Web Frameworks React, Angular and Vue Based on Google Trends Data.

The article investigates the dynamics of popularity of three leading JavaScript frameworks — React, Angular, and Vue — based on Google Trends data for the period 2020–2025. The time series were analyzed using ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving

Average) and ETS (Error, Trend, Seasonality) models, which allowed for the estimation of trend, seasonal, and random components. The data were pre-normalized and tested for stationarity using the Dickey–Fuller test. The results show that React maintains a stable upward trend, Angular demonstrates a gradual decline, while Vue is characterized by horizontal dynamics with minor seasonality. The Ljung–Box test confirmed the adequacy of the ARIMA models, whereas the ETS models in some cases revealed residual autocorrelation. The conducted analysis confirms the effectiveness of time series methods for forecasting technological trends and emphasizes the analytical potential of Google Trends as a source of empirical data on the development of web technologies.

Keywords: Google Trends, time series, ARIMA, ETS, React, Angular, Vue, framework popularity.

Одержано 27.09.2025

УДК 004.414.23.056.3:004.77

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).253-266](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).253-266)**І. В. Рубан¹, В. М. Ткачов²**

¹ Харківський національний університет радіоелектроніки,
професор кафедри електронних обчислювальних машин,
доктор технічних наук, професор
ihor.ruban@nure.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4738-3286>

² Харківський національний університет радіоелектроніки,
докторант кафедри електронних обчислювальних машин,
кандидат технічних наук, доцент
vitalii.tkachov@nure.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6524-9937>**МОДЕЛЬ ПОРУШЕНЬ, ПОЛІТИК ВІДНОВЛЕННЯ ТА
ЛОКАЛІЗАЦІЇ У ПРОСТОРІ СТАНІВ ПРОЦЕСНОГО РІВНЯ
ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ НА МОБІЛЬНІЙ ПЛАТФОРМІ**

У роботі запропоновано удосконалену модель процесного рівня з простором станів, що описується чотирма змінними: обсяг черги, часовий запас до дедлайну, валідність даних, дотримання причинно-часового порядку. Усі вимоги об'єднано в інтегральний бар'єрний показник, додатково введено показник локальності як радіус впливу відхилень. Порухення формалізовано як оператори переходів, що дає змогу кількісно оцінювати їхній внесок у деградацію. Розроблено R/L-політику, яка під частковою спостережуваністю обирає дії з гарантованим підвищенням бар'єра і пріоритетом локалізації. Сформульовано критерії коректності та умови здійсненості за заданих бюджетів часу і ресурсів. Реалізовано стенд і виконано експериментальні дослідження для двох профілів навантаження. Результати дослідження підтверджують застосовність і відтворюваність підходу та демонструють скорочення типового часу відновлення і кращу локалізацію відхилень.

Ключові слова: інформаційна система, процес, локалізація, критерій коректності, оператор переходу, живучість.

1. Вступ. Одна із проблем адаптації складних інформаційних систем до умов функціонування на базі мобільних платформ (БПЛА та інших рухомих платформ) полягає у забезпеченні безперервного виконання критично важливих процесів в умовах переривчастості зв'язності, часткової спостережуваності та жорстких ресурсно-часових обмежень [1]. В таких умовах на процесному рівні інформаційної системи можуть виникати збурення у функціональності елементів системи, спричинені короткими локальними відхиленнями (необґрунтовані запити на збільшення ресурсів на тлі їхнього дефіциту, неадекватна конкуренція за ресурси, неконсистентні переходи станів процесів тощо), здатні каскадувати у макронаслідки та знижувати живучість інформаційної системи на мобільній платформі.

Аналіз класичних комплексних підходів до забезпечення живучості інформаційних систем показує задовільні результати на макрорівні інформаційної системи [2–3], але є непридатними для опису, локалізації та гарантованого відновлення процесів у разі деструкцій саме в просторі станів процесного рівня. Це пояснюється тим, що класичні підходи є ресурсоємними, інерційними і не враховують тонку причинно-часову структуру деструкцій мікрорівня інформаційної системи, що характерно в умовах її функціонування на мобільній платформі.

Мета роботи полягає у розробці моделі порушень та політик відновлення і локалізації у просторі станів процесного рівня інформаційної системи на мобільній платформі, що пов'язує деструкції з інваріантами причинно-часової консистентності та забезпечує існування політик, які повертають стан процесу в допустиму область з подальшою локалізацією негативних наслідків.

2. Постановка завдання. Для досягнення мети сформульовано наступні завдання, які необхідно вирішити в рамках цього дослідження:

- формалізувати простір станів процесного рівня інформаційної системи та визначити допустиму область і інваріанти причинно-часової консистентності;
- ввести поняття класів деструкцій (порушень) і формалізувати їх як оператори переходів станів;
- розробити політики відновлення та локалізації у вигляді керованих переходів і механізмів контролю за виконанням процесів в інформаційній системі;
- сформулювати критерії коректності та умови здійсненності за ресурсно-часових обмежень і часткової спостережуваності;
- дослідити застосовність моделі на стендовій інформаційній системі на мобільній платформі.

3. Аналіз досліджень і публікацій. У статті [4] запропоновано розподілену формальну модель самовідновних поведінок із верифікацією в просторі станів і статистичною перевіркою кількісних властивостей, що знімає архітектурну залежність специфікації політик відновлення. Втім, в роботі [4] не враховується специфіка мобільних платформ, яка більш жорстко визначає часові обмеження локалізації/відновлення.

У статті [5] показані результати досліджень щодо інтеграції підходів планування відновлення елементів інформаційних систем після збоїв і забезпечення безперервності виконання процесів, окреслює значимість отриманих результатів у стійкості множини інформаційних систем (мегасистеми). Автор систематизує різні стратегії — від резервного копіювання й відновлення до хмарних сценаріїв відновлення. Однак організаційно-технологічний рівень дослідження лишає поза уваги питання формування інваріантів та формування темпоральних меж локалізації/відновлення.

Стаття [6] присвячена питанням структурної живучості та надійності комп'ютерних мереж, які можна розглядати як цілісна система. Автори подають правила й формули для послідовних та паралельних з'єднань, еквівалентних перетворень, а також вводять показник живучості мережі у вигляді зваженої суми за станами (із ймовірностями їх настання), демонструючи числові приклади. Отримані мережні метрики можна розглядати як зовнішні умови для моделі, яка пропонується у даній роботі. Водночас процеси, описані у [6] лишаються на макрорівні мережної структури і не формалізують порушення процесно рівня з точки зору подання їх у вигляді операторів переходів у просторі станів з інваріантами причинно-часової узгодженості.

За результатами аналізу досліджень і публікацій [4–6], варто зазначити, що вони частково дають формалізації порушень у просторі станів, не встановлюючи жорстких меж часу відновлення/локалізації та умов локальності впливу за переривчастою зв'язності й часткової спостережуваності.

4. Виклад основного матеріалу.

4.1. Формалізація простору станів процесного рівня та інваріантів причинно-часової консистентності. Моделювання процесного рівня інформаційної системи здійснюється у дискретному часі $t \in \mathbb{Z}^{\geq}$ з фіксованим кроком моделювання. Нехай у інформаційній системі одночасно виконується N процесів з ідентифікаторами i , $i = 1, 2, \dots, N$. Стан i -го процесу на кожному із кроків t задається як:

$$x_i(t) = (q_i(t), \xi_i(t), \psi_i(t), \zeta_i(t)), \quad (1)$$

де:

- $q_i(t) \in \mathbb{Z}^{\geq}$ — одиниці буферизації (черги, кількість незавершених квантів обробки даних);
- $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$ — часовий запас функціональної здатності процесу;
- $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^{\geq}$ — актуальність процесних даних;
- $\zeta_i(t) \in \{0, 1\}$ — показник, який приймає значення «1», якщо дотримано причинно-часовий порядок подій для цього процесу. У іншому випадку було виявлено порушення, наприклад, коли порушено послідовність подій процесу.

Тоді вектор стану процесного рівня задається як поєднання станів усіх процесів:

$$s(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in S \subseteq (\mathbb{Z}^{\geq} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq} \times \{0, 1\})^N, \quad (2)$$

де:

- S — простір станів процесного рівня інформаційної системи.

Далі для кожного i -го процесу необхідно зафіксувати параметри допусків:

- $B'_i \in \mathbb{Z}^{\geq}$ — параметр граничної черги, який задає кількість одиниць роботи процесу, який можна накопичити без його деградації;
- $\Delta'_i \in \mathbb{R}^{\geq}$ — параметр максимально допустимого порогу актуальності даних (у розумінні втрати валідності або застарілості даних);
- поріг часового відрізка функціональної здатності процесу у контексті показника ξ_i . При значенні $\xi_i(t) \geq 0$ інформаційна система вважає, що поріг не досягнуто.

Параметри допуску можуть задаватися з вимог предметної області на етапах розробки інформаційної системи.

Причинно-часова коректність на процесному рівні фіксується наступними інваріантами, що мають виконуватися для кожного i -го процесу та задаються як:

- черговий інваріант $I_q^{(i)}$ — необхідний для встановлення обмежень навантаження процесу:

$$0 \leq q_i(t) \leq B'_i; \quad (3)$$

- темпоральний інваріант $I_{\xi}^{(i)}$ — необхідний для перевірки виконання умови часових обмежень:

$$\xi_i(t) \geq 0; \quad (4)$$

- інваріант актуальності даних $I_{\psi}^{(i)}$ — необхідний для валідації даних за ознакою втрати їх актуальності у процесі виконання процесу:

$$\psi_i(t) \leq \Delta'_t; \quad (5)$$

– порядковий інваріант $I_\zeta^{(i)}$ – необхідний для процесного локального причинно-часовий порядку:

$$\zeta_i(t) = 1. \quad (6)$$

Допустиму область процесного рівня, виходячи із (2)–(6) можна задати у вигляді деякої множини A :

$$A = \left\{ s \in S : \bigwedge_{i=1}^N \left(I_q^{(i)} \wedge I_\xi^{(i)} \wedge I_\psi^{(i)} \wedge I_\zeta^{(i)} \right) \right\}. \quad (7)$$

З (7) очевидно, що $s(t) \in A$ тоді і тільки, коли всі процеси інформаційної системи одночасно задовольняють свої чотири інваріанти (3)–(6).

Щоб уніфікувати аналіз і синтез політик, для i -го процесу доцільно ввести відстані до порушення заданого інваріанту (3)–(6):

$$\begin{aligned} z_q^{(i)}(t) &:= B'_i - q_i(t), \\ z_\xi^{(i)}(t) &:= \xi_i(t), \\ z_\psi^{(i)}(t) &:= \Delta'_t - \psi_i(t), \\ z_\zeta^{(i)}(t) &:= \begin{cases} +1, & \zeta_i(t) = 1, \\ -1, & \zeta_i(t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тобто, $z < 0$ означає, що спостерігається порушення.

Локальний бар'єр (межа) i -го процесу можна задати як:

$$B_i(s(t)) := \min \left\{ z_q^{(i)}, z_\xi^{(i)}, z_\psi^{(i)}, z_\zeta^{(i)} \right\}, \quad (8)$$

а системний бар'єр всього процесного рівня інформаційної системи:

$$B(s(t)) := \min_{1 \leq i \leq N} B'_i(s(t)). \quad (9)$$

Тоді $s(t) \in A \Leftrightarrow B(s(t)) \geq 0$.

В масштабах інформаційної системи бар'єр $B(s)$ можна використовувати у якості узагальненого індикатора — чим він більший, тим віддаленою буде інформаційна система від будь-якого порогу втрати функціональності на процесному рівні. Відповідно, $B(s)$ може інтерпретуватися як цільова величина для вибору управляючих дій відновлення/локалізації процесів, тобто, дії підбираються так, щоб збільшити $B(s)$ і повернути стан у A .

4.2. Класи порушень і їх формалізація як операторів переходів. З урахуванням (1), (2), порушення класу s з параметрами інтенсивності/ жорсткості θ (прирости черг, швидкість втрати валідності даними («старіння» даних) тощо), тривалістю τ (кількість умовних процесних тактів, коли спостерігається порушення) та цільовою множиною процесів $I \in \{1, \dots, N\}$ (сукупність індексів пошкоджених процесів) можна змоделювати оператором переходів як:

$$D_{\theta, \tau, I}^{(c)} : S \rightarrow S, \quad s(t+1) = D_{\theta, \tau, I}^{(c)}(s(t)), \quad (10)$$

який протягом τ локально модифікує компоненти (1) (тільки для $i \in I$, у разі потреби, і для їхніх безпосередніх сусідів у процесних залежностях. Після завершення тривалості τ дія порушення зникає.

Щоб задати «сусідство» в рамках процесного рівня інформаційної системи, спочатку треба ввести відношення залежностей $R \in \{1, \dots, N\}^2$. Це відношення можна порівняти з організаційною схемою продюсерів (процеси, які є генерують нову інформації, залежності) та консюмерів (процеси, які обробляють інформацію та підпорядковуються залежностям). Для $i \in I$ означимо:

$$\Omega(i) = \{j : (i, j) \in R \mid \exists (i, j) \in R\}.$$

Порушення вражає ядро I і, навіть, окіл першого порядку $\bigcup_{i \in I} \Omega(i)$ (наприклад, збій процесу-продюсера призведе до зростання черг даних у процесу-консюмера). Якщо уявити це у вигляді процесного графу інформаційної системи, то радіус впливу буде 1.

Доцільно ввести поняття бібліотеки базових класів порушень процесів, яка буде включати типові класи c з простими, але чіткими правилами оновлення компонент x_i (1) за один так порушення τ . Далі всі міжтактові події процесу інтерпретуються як такі, що додані до номінальної динаміки цього процесу. Тоді, у контексті $i \in I$, вводимо наступні позначення:

- $\delta_q \geq 0$ – приріст до черги;
- $\delta_\xi \geq 0$ – зменшення запасу часового вікна (швидкість «виїдання» ξ);
- $\delta_\psi \geq 0$ – приріст віку даних («старіння» даних).

Відтак маємо наступні класи порушень:

- клас пікових навантажень на процес. Порушення у класі включають раптові напливи субзадач та, як наслідок, ресурсну конкуренцію, що має відображення суто на процесних змінних ($q_i \leftarrow q_i + \delta_q(\theta)$, $\xi_i \leftarrow \xi_i - \delta_\xi(\theta)$);
- клас тимчасових джиттерів. Порушення у класі включають локальне уповільнення виконання процесу ($\xi_i \leftarrow \xi_i - \delta_\xi(\theta)$);
- клас псевдовиключень взаємодії процесів. З темпоральної точки зору, недоступність взаємодії означає, що черга не розвантажується, а дані «старіють», тобто перестають бути валідними ($q_i \leftarrow q_i + \delta_q(\theta)$, $\psi_i \leftarrow \psi_i + \delta_\psi(\theta)$);
- клас порушень порядку дій. До класу входять порушення характеру причинно-часової невідповідності ($\zeta_i \leftarrow 0$);
- клас порушень актуальності даних. До класу входять порушення, які виникають тоді, коли спостережувані дані не оновлюються вчасно, відбувається старіння даних ($\psi_i \leftarrow \psi_i + \delta_\psi(\theta)$);
- клас дедлок-порушень. До класу входять порушення, які виникають тоді, коли виникають короткі ступори виконання процесу (дедлок), що «під'їдає» запас часу на виконання процесу та створює локальні згустки підвищених потреб у ресурсах ($q_i \leftarrow q_i + \delta_q(\theta)$, $\xi_i \leftarrow \xi_i - \delta_\xi(\theta)$).

Поширення на сусідні процеси (10) описується таким чином: для $j \in \Omega(i)$ дозволяються згладжені впливи (за малими значеннями коефіцієнтів, які можна ввести як $\alpha_q, \alpha_\xi, \alpha_\psi \in [0, 1)$), що відображає процесну локальність, так як збій стадії виконання процесу впливає на суміжні стадії всього процесу:

$$q_j \leftarrow q_j + \alpha_q \delta_q, \quad \psi_j \leftarrow \psi_j + \alpha_\psi \delta_\psi, \quad \xi_j \leftarrow \xi_j - \alpha_\xi \delta_\xi.$$

Якщо на одному такті τ активні кілька класів $c \in C$, то вони мають застосовуватися послідовно до тих самих x_i та агрегуватися за найгіршим із них, коли:

прирости до q , ψ — адитивні, зменшення ξ — адитивне, ζ стає 0, якщо щонайменше одне порушення його перевело в це значення. Таким чином, формально, для кожного компоненту береться сума дельт, а для ζ — логічне об'єднання зі скиданням в нуль, якщо трапилося порушення порядку дій.

Враховуючи (7)–(9), для кожного класу порушень необхідно визначити мінімальний очікуваний спад локального бар'єра (8) за такт $\beta_\tau^{(A)}(\theta) \geq 0$ (наприклад, для класу пікових навантажень на процес спад визначається як $\min\{\delta_q, \delta_\xi\}$, для класу порушень актуальності даних — δ_ψ , а для класу порушень порядку дій — різкий перехід $z_\zeta^{(i)} : (+1 \rightarrow -1)$). Тоді:

$$B_i(D^{(c)}(s)) \leq B_i(s) - \beta_\tau^{(A)}(\theta), \quad B(D^{(c)}(s)) \leq B(s) - \beta_{\min}^{(A)}(\theta), \quad (11)$$

де:

– $\beta_{\min}^{(A)}$ — мінімум по процесах, уражених у τ -такт.

Це (11) дає прямий зв'язок між класом порушення та зменшенням запасу до інваріантів, з чим і будуть конкурувати політики відновлення процесу.

Процес порушень триває τ тактів (епізод порушень). Протягом кожного такту діють $\delta_q, \delta_\xi, \delta_\psi$ та/або скидання ζ . Після τ тактів оператор $D_{\theta, \tau, I}^{(c)}$ (10) припиняє вплив (далі інформаційна система відпрацьовує за номінальними правилами). Якщо протягом епізоду $B(s) \rightarrow B(s) < 0$, то відбувається локальне порушення інваріантів (вихід із допустимої області A). І тут завдання політик відновлення — терміново повернути $B(s) \rightarrow B(s) \geq 0$.

В реальній інформаційній системі на мобільній платформі апріорі неможливо бачити точний стан (1) кожного процесу на кожному такті, так як інформація про стани процесів може містити пропуски, тому доводиться реально працювати з наближеними вимірюваннями станів процесів. Вектор спостережень (моніторингові агенти, лічильники тощо) $y(t) \in \mathbb{R}^p$:

$$y(t) = h(s(t)) + \eta(t), \quad \eta(t) \in E, \quad (12)$$

де:

- $h(\cdot)$ — відображення доступних елементів (2);
- $\eta(t)$ — похибка вимірювання (з введеним обмеженням $\|\eta(t)\| \leq \delta_y$ для деякої відомої константи $\delta_y \geq 0$).

Частина елементів (12) може бути відсутня (пропуски). Для цього доцільно ввести поняття маски доступності $M(t) \in \{0, 1\}^p$.

$M(t) = 1$, якщо пропусків немає; $M(t) = 0$, якщо пропуски є. Далі, коли здійснюється порівняння станів процесів, недоступні компоненти деактивуються покомпонентним множенням (операція Адамара [7]) $M(t) \odot (\cdot)$.

Замість однієї точки стану (2) вводиться множина можливих станів:

$$\Xi(t) = \{s \in S : M(t) \odot (h(s) - y(t)) \in [-\delta_y, \delta_y], \quad s \text{ узгоджується з усіма } \Xi(t-1)\}.$$

$\Xi(t)$ включає усі стани, які могли породити спостереження в межах похибки δ_y , з урахуванням припустимої динаміки процесного рівня інформаційної системи (номінальний крок + можливі порушення, описані в бібліотеці базових класів порушень процесів).

На практиці, можна зберігати інтервали для кожної процесної змінної:

$$q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i], \quad \xi_i \in [\underline{\xi}_i, \bar{\xi}_i], \quad \psi_i \in [\underline{\psi}_i, \bar{\psi}_i], \quad \zeta_i(t) \in \{0, 1\} \text{ або невідомо.}$$

Інтервали $(\underline{\cdot}, \bar{\cdot})$ необхідно оновлювати за наступним алгоритмом: спочатку прогнозуємо за номінальною динамікою та «найгіршим» впливом активних порушень, а потім корегуємо (12) з допусками δ_y та маскою доступності $M(t)$.

Далі, враховуючи (7)–(9), в умовах невизначеності, аби не допустити помилкового рішення про досягнення режиму відновлення, працюємо з інфімум-оцінкою бар'єра $\underline{B}(t) := \inf_{s \in \Xi(t)} B(s)$, яку просто обчислити через нижні запаси (7):

$$\begin{aligned} \underline{z}_q^{(i)} &= B'_i - \bar{q}_i, \\ \underline{z}_\xi^{(i)} &= \underline{\xi}_i, \\ \underline{z}_\psi^{(i)} &= \Delta'_t - \bar{\psi}_i, \\ \underline{z}_\zeta^{(i)} &= \begin{cases} +1, & \zeta_i = 1, \\ -1, & \zeta_i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідно до (8): $\underline{B}(t) = \min_i \min \left\{ \underline{z}_q^{(i)}, \underline{z}_\xi^{(i)}, \underline{z}_\psi^{(i)}, \underline{z}_\zeta^{(i)} \right\}$, якщо:

- $\underline{B}(t) \geq 0$, то точно всі інваріанти виконані не зважаючи на невизначеність;
- $\underline{B}(t) \in [-\varepsilon, 0)$, то процес у околі відновлення;
- $\underline{B}(t) < -\varepsilon$, то є місце гарантованому порушенню, тоді потрібно застосувати найсильніші дії відносно процесу, на кшталт, ізоляції.

Коли і параметри порушення точно невідомі, то замість $\beta_\tau^{(A)}(\theta)$ можна використати допустимий діапазон Θ і визначити найгірший очікуваний спад бар'єру за такт (робастний підхід): $\beta_{robust}^{(A)}(\theta) = \min_{\theta \in \Theta} \beta_\tau^{(A)}(\theta)$.

Додаємо ще «ціну невизначеності спостережень» η_{view} , яка лінійно пов'язана з δ_y та частотою пропусків, і переходимо до сумарного найгіршого просідання за такт:

$$\beta' := \beta_{robust}^{(A)} + \eta_{view}. \quad (13)$$

Отримане визначення і є величиною, з якою має у подальшому конкурувати відновлювальна дія процесу.

Небезпека невизначеності породжує ймовірність неправильного вибору дії. Для виходу із ситуації пропонується наступне рішення. Нехай U — множина допустимих процесних дій, а D — оператор процесного переходу (10) під дією $u \in U$ та реалізацією події середовища впливу на процес σ , причому її конкретика тут неважлива, — важливо лише, що вона не погіршує оцінки понад (13). Тоді застосовуємо таку $u(t)$, що максимізує найгірший приріст бар'єра:

$$u'(t) \in \arg \max_{u \in U} \inf_{s \in \Xi(t)} (B(D(s, \sigma, u)) - B(s)),$$

та забезпечуємо існування гарантованого приросту бар'єру α з

$$\inf_{s \in \Xi(t)} (B(D(s, \sigma, u')) - B(s)) \geq \alpha \quad \forall \quad \alpha > \beta'.$$

Це означає, що навіть у найгіршому стані процесу приріст бар'єра від дії u' буде більший, ніж найгірше «просідання» від порушень і невизначеності, тож

траєкторія виконання процесу гарантовано прямує назад у допустиму область A .

4.3. Політика відновлення та локалізації на процесному рівні. Задачу відновлення процесу в інформаційній системі можна формалізувати як якнайшвидше підняття бар'єру $B(s)$ до $\varepsilon^\uparrow > 0$, тобто повернення його в потрібну субобласть (R-задача). Задачу локалізації процесу в інформаційній системі можна формалізувати як стримування поширення відхилень (порушень) між процесами (L-задача).

Пропонується наступний каталог процесних дій (дії представлено таким чином, аби ефект від їх застосування одразу був означений):

Таблиця 1.

Каталог процесних дій

Легенда	Зміст	Ефект
$retime(i)$	Перепланування (збільшення ξ_i) (наприклад, перерозподіл у черзі планувальника; дрібні переноси у вікнах доступності)	$\xi_i \uparrow \Rightarrow z_\xi^{(i)} \uparrow$
$clean(i)$	Очистка черги (наприклад, видалення/злиття некритичних елементів, пріоритезація критичних)	$q_i \downarrow \Rightarrow z_q^{(i)} \uparrow$
$rollback(i)$	Локальний відкат кроку, що порушив порядок	$\zeta_i := 1, \psi_i \downarrow \Rightarrow z_\zeta^{(i)} \uparrow$
$fence(i)$	Утворення примусового бар'єру перед наступним тактом (наприклад, увімкнення додаткової перевірки послідовності)	$\zeta_i := 1 \Rightarrow z_\zeta^{(i)} \uparrow$
$throttle(i)$	Стимування запуску (наприклад, тимчасове обмеження нових екземплярів процесу)	$q_i \searrow \Rightarrow z_q^{(i)} \uparrow$
$degrade(i)$	Контрольована деградація якості (наприклад, пропуск некритичних фаз процесу, толерантність до дефіциту ресурсів).	$q_i \downarrow, \xi_i \uparrow$
$isolate(i)$	Локальна ізоляція у графі процесних залежностей (наприклад, тимчасове розімкнення процесних потоків від/до сусідніх)	$\rho \downarrow$ (антикаскад)

Для того, аби підняти бар'єр та стиснути радіус поширення порушень, необхідно абстрагуватися від того, що на такті τ відомий точний стан процесу. Тут доцільно оперувати саме $\Xi(t)$. Тому виконується оцінка найгіршого можливого бар'єру через нижні межі запасів $\underline{B}(t) = \inf_{s \in \Xi(t)} B(s)$.

Далі оцінюємо для кожної дії u найгірший приріст бар'єру:

$$\Upsilon_{\min}(u) := \inf_{s \in \Xi(t)} (B(D(s, u)) - B(s)),$$

Важливо теж відстежувати і значення радіусу впливу ρ за процесним графом залежностей.

Відтак формулюємо правило вибору дії:

- якщо наявний радіус впливу більше порогового значення, спершу необхідно виконати локалізацію, тобто обрати дію $isolate/throttle$ на елементах інформаційної системи, які є джерелами відхилень, доки наявний радіус не зменшиться до порогового значення;

- у іншому випадку — виконуємо відновлення, тобто обираємо дію з найбільшим гарантованим підняттям бар'єра навіть у найгіршому сумісному стані. А у разі рівності пріоритетів — виконати дію *rollback/fence* (за наявності порушень порядку), далі — *clean/retime*, і на сам кінець — *degrade*.

Ідея правила — спершу зупини «розповзання» (L-частина), далі максимально швидко повернутись у нормальну субобласть *A* (R-частина).

Так як із (13) маємо «найгірший спад» від порушень та спостережень, то політика вмикає відновлення лише тоді, коли для обраної дії u' виконується:

$$\Upsilon_{\min}(u') \geq \alpha > \beta', \quad (14)$$

тобто підйом бар'єра (у гіршому випадку) перевищує гірше «просідання».

Координацію дій між кількома процесами у спрощеному вигляді можна подати через жадібні алгоритми [8]. Спочатку визначається множина критичних процесів інформаційної системи C'' , потім оцінюється $\Delta_{\min}^i(u)$ для локальних дій, далі визначені дії виконуються для одного/двох найкритичніших процесів (щоб не перевантажити підсистему організації процесів інформаційної системи), решту — відкласти на наступну ітерацію.

У рамках одного такту можна побудувати наступний сценарій розвитку подій:

- здійснюється моніторинг за процесами $\rightarrow$ будуються інтервали $\rightarrow$ формуються $\Xi(t)$ та $\underline{B}(t)$;
- визначається ρ та застосовується правило вибору дії;
- здійснюється перехід до наступного кроку, цикл повторюється, поки $B(s) \geq \varepsilon^\uparrow$ не стабілізується.

Таким чином, маємо R/L-логіку для процесного рівня інформаційної системи, яка працює у ролі «щита», який не дає каскаду розповзатися і цілеспрямовано піднімає мінімальний запас інваріантів. Саме така комбінація робить відновлення процесів локально-швидким, що критично для інформаційної системи на мобільній платформі.

4.4. Критерії коректності та умови здійсненності за ресурсно-часових обмежень і часткової спостережуваності. В рамках цього дослідження пропонується введення наступних критеріїв коректності:

1. Безпековий критерій «*Safety Criterion*». Суть критерію полягає у тому, що навіть з урахуванням невизначеності вимірювань інформаційна система зберігає всі процесні інваріанти. Тобто, якщо у деякий квант часу t_0 на такті τ маємо $\underline{B}(t_0) \geq 0$, то політика на основі R/L-логіки не допустить виходів з допустимої області: $\underline{B}(t) \geq 0, \quad \forall t \geq t_0$.
2. Темпоральний критерій відновлення «*Recovery Criterion*». Суть критерію полягає у тому, що гарантований «позитивний дрейф» бар'єра забезпечує повернення в субобласть $^\uparrow$ за скінченне число тактів τ . Тобто, якщо початкові заходи з відновлення лежать у $\underline{B}(t_0) \geq -\varepsilon$ і у кожному кроці виконується (14) як:

$$\sum_{u \in U_t} \Delta_{\min}(u) \geq \alpha > \beta', \quad (15)$$

то існує верхня межа часу відновлення (повернення) $T_{recovery}$ до субобласті $\uparrow$:

$$T_{recovery} \leq \left\lceil \frac{\varepsilon^\uparrow - \underline{B}(t_0)}{\alpha - \beta'} \right\rceil. \quad (16)$$

3. Критерій локалізації «*Localization Criterion*». Суть критерію полягає у тому, щоб унеможливити безконтрольний ріс каскаду порушень шляхом локалізації області впливу порушення до прийнятної радіуса. Тобто, якщо у тактах τ , коли $\rho(t) > \rho'$, політика застосовує хоча б одну «ізолюючу» дію (типу *isolate* або *throttle*) з ефективністю $\chi \geq 1$, то за не більш ніж:

$$T_{localization} \leq \left\lceil \frac{\rho(t_0) - \rho'}{\chi} \right\rceil \quad (17)$$

кроків матимемо $\rho(t) \leq \rho'$.

4. Критерій дальніх радіусів «*Long-Range Criterion*». Так як дія відновлення процесу – локальне явище, то критерієм забезпечується локалізація цієї дії без впливу на інші процеси в околі процесів, які не зазнали деструктивних впливів. Тобто, для процесів поза околom джерела відхилення (порушення, на процесному графі), дії з U_t не повинні зменшувати їхні локальні запаси.

Щоб вищенаведені критерії виконувалися в умовах функціонування інформаційної системи на мобільній платформі, треба, щоб запропоновані раніше дії вміщалися в бюджет (ресурсні можливості) і давали потрібний «підйом» бар'єра на кожному кроці. Для цього вводяться наступні умови:

1. Обмеження обчислювального бюджету. Виходимо з того, що кожна дія u описує свої потреби у вигляді обчислювального бюджету $c_{computing}(u)$ та запланованого часу виконання $c_{time}(u)$. Відповідно, на кроці t такту τ доступні бюджети $C_{computing}(t)$ та $\Delta(t)$. Тоді умова формулюється як:

$$\sum_{u \in U_t} c_{computing}(u) \leq C_{computing}(t), \quad \max_{u \in U_t} c_{time}(u) \leq \Delta(t).$$

2. Доступність процесних вікон. Деякі дії (таблиця 1) мають передумови (наприклад, *rollback* потребує підтверджених даних). Позначимо це булевим предикатом $\wp(u, t)$. Тоді умова формулюється як: усі дії в U_t мають $\wp(u, t) = \text{true}$.
3. Вимога до позитивного дрейфу. З огляду на те, що умови 1-2 мають забезпечити (15), то сукупний гарантований приріст бар'єра за крок має перевищувати найгірший спад від порушень (з урахуванням невизначеності спостережень).
4. Контроль кількості одночасних дій над одним процесом. В умовах обмеженості ресурсів інформаційної системи на мобільній платформі є місце обмеженню кількості дій за такт. Відповідно, умова полягає у тому, аби брати топ процесів з мінімальним B_i і на кожному із них застосовувати дію з найбільшим $\Delta_{\min}$ протягом виконання умов 1-3. Таким чином, це можна інтерпретувати як жадібну координацію, що дає потрібний дрейф без складних методик оптимізації.

Далі враховуємо обмеження часткової спостережуваності. На підставі (13) беремо обмеження похибок вимірюваного стану процесу як δ_y та частку пропусків як $\phi \in [0, 1)$ для «ціни невизначеності»: $\eta_{view} = \eta(\delta_y, \phi)$.

Тобто, чим більше похибка та кількість пропусків, тим більше η_{view} . Для забезпечення коректної роботи достатньо:

– забезпечити:

$$\eta_{view} \leq \eta_{\max}, \text{ при } \eta_{\max} < \alpha \quad 4; O \quad \alpha > \beta';$$

- забезпечити період оновлення моніторингових даних у діапазоні до $T_{\max}$, який не дозволяє інтервалам для q , ξ , ψ розповзтись так, щоб $\underline{B}$ впав нижче $-\varepsilon$ без відповідної реакції;
- забезпечити компенсацію ζ , яка отримує невідомі значення (та трактує їх як потенційні порушення) шляхом збільшення ваги дій fence або rollback (пріоритетно).

Тобто, якщо моніторингові заходи не ідеальні з точки зору похибок і при цьому не продукують велику кількість похибок («шум»), то точності нижньої оцінки $\underline{B}$ достатньо, щоб політика підняла її у субобласть $\uparrow$.

Отже, узагальнюючи вищенаведене можна сформулювати підсумковий блок достатніх умов коректності та здійсненності. Нехай у момент t_0 виконується $\underline{B}(t_0) \geq -\varepsilon$; нехай для всіх $t \geq t_0$ виконуються умови 1-4 та вищенаведені забезпечуючі дії, а на кожному кроці існує набір дій U_t з урахуванням (15). Тоді, виходячи з формулювання критеріїв коректності, маємо наступні твердження:

- для *Localization Criterion*: $\rho(t)$ не перевищує ρ' після (але не більше ніж) кількість кроків, визначену у (17);
- для *Recovery Criterion*: існує така кількість тактів (16), після чого $\underline{B}(t_0) \geq \varepsilon^\uparrow$ (входження в $A^\uparrow$);
- для *Safety Criterion*: $\underline{B}(t_0) \geq 0$ для всіх $t \geq t_0$.

На основі цих тверджень можна зробити висновок про нерівність на кожному кроці:

$$\underline{B}(t+1) \geq \underline{B}(t) + \left(\sum_{u \in U_t} \Delta_{\min}(u) \right) - \beta' \geq \underline{B}(t) + (\alpha - \beta').$$

Акумулюючи позитивний дрейф $(\alpha - \beta') > 0$ до рівня $\varepsilon^\uparrow$ отримуємо оцінку на $T_{recovery}$. Локалізація впливає зі зменшення ρ на χ за крок при $\rho > \rho'$.

Таким чином, поняття коректності вводиться як збереження / повернення процесних інваріантів і обмеження «розповзання» відхилень, а поняття здійсненності — як наявність на кожному кроці маленького набору нересурсозатратних дій, сукупний гарантований ефект яких більше β' за наявних ресурсів і якості спостережень (моніторингу).

4.5. Експериментальні дослідження застосовності моделі на стендовій інформаційній системі на мобільній платформі. Експеримент виконано у 50 епізодах на Windows 10, Python 3.7.9. Вихідний код розміщено на [9]. Для кожного епізоду було прологовано траєкторію бар'єра $B(t)$, час відновлення $T_{recovery}$, максимум радіусу впливу $\rho_{\max}$ і середнє значення B .

Для стресового профілю $T_{\text{recovery}} = 3$ кроки, 95 перцентиль = 60 (верхня межа горизонту), $\rho_{\text{max}} = 3.28$, середній $B = -43.18$; епізодів, що повністю лишилися у A – не зафіксовано (0.0). Це відповідає графікам (рис. 1): швидкий вихід $B(t)$ нижче нуля та завал T_{recovery} на рівні 60 кроків.

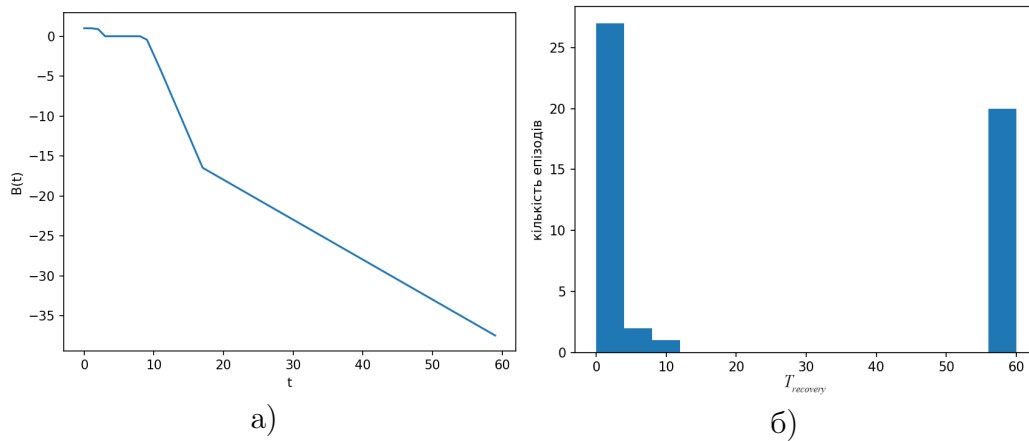


Рис. 1. Візуалізація епізоду стресового профілю: а) бар'єр за часом; б) розподіл часу оновлення.

Для налаштованого профілю $T_{\text{recovery}} = 1$ крок, 95 перцентиль = 60, $\rho_{\text{max}} = 2.36$, середній $B = -19.10$; епізодів, що весь час були у A , залишається нульовою. На графіках (рис. 2) видно більш «плаский» початок $B(t)$ та щільний кластер T_{recovery} у зоні 1–5 кроків, хоча вир на 60 кроках зберігається.

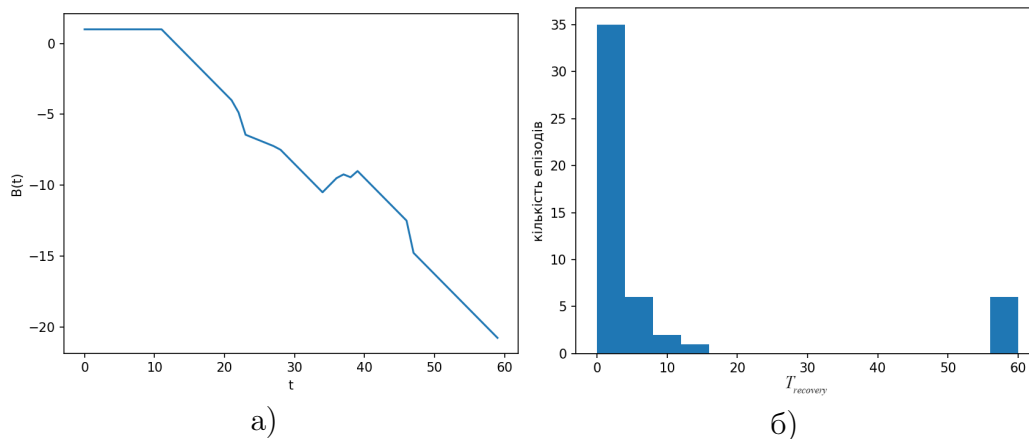


Рис. 2. Візуалізація епізоду налаштованого профілю: а) бар'єр за часом; б) розподіл часу оновлення.

Обидва набори профілів підтверджують відтворюваність метрик і застосовність моделі. Всі результати експериментів доступні на [10]. Перехід між профілями зменшує середній радіус розповсюдження відхилень (з 3.28 до 2.36) та підвищує «запас» інваріантів (середній B з 43.18 до 19.10), а також скорочує типову тривалість відновлення (з 3 до 1 кроку), що узгоджується з критеріями коректності за ресурсно-часових обмежень і часткової спостережуваності: гарантований приріст бар'єра від політики стає більшим від найгіршого просідання у більшій частині епізодів. Разом із тим, наявність «завалів» $T_{\text{recovery}} = 60$

свідчить про рідкісні, але важкі сценарії каскадування відмов, які можна цілеспрямовано зменшити ще агресивнішими кроками локалізації (*isolate / throttle*) та підвищенням пріоритету дій, що відновлюють порядок (*rollback / fence*).

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі сформовано формалізацію простору станів процесів інформаційної системи, задано допустиму область та причинно-часові інваріанти, описано класи порушень як оператори переходів і синтезовано R/L-політику для відновлення та локалізації на рівні процесів із урахуванням ресурсно-часових обмежень і часткової спостережуваності. В роботі удосконалено модель процесного рівня інформаційної системи, яка, на відміну від відомих підходів «важких» архітектурних схем, інтегрує різномірні інваріанти (черга, часовий запас, валідність даних, порядок подій) у єдиний бар'єр $B(s)$ вводить показник локальності ρ та «двошарову» область $A^\varepsilon/A^\uparrow$ та тим самим забезпечує вибір дій із гарантованим позитивним дрейфом і стримуванням каскадів при малих обчислювальних непрямих витратах. Стендові експерименти на мобільній платформі підтвердили застосовність і відтворюваність метрик – перехід від стресового профілю до налаштованого зменшує типовий час відновлення (за $3 \rightarrow 1$ крок), знижує середній радіус впливу та підвищує середній рівень бар'єра, що узгоджується з критеріями коректності та реалізує політику живучості на процесному рівні. Подальші дослідження спрямовуватимуться на звуження множини $\Xi(t)$ для підвищення точності $\underline{B}(t)$ в реальних інформаційних системах на мобільній платформі.

Список використаної літератури

1. Kompaniyets, O. M. (2025). Information technology for adaptive control of a swarm of unmanned aerial vehicles in an antagonistic environment. *Information processing systems*, 4(179), 43–48. <https://doi.org/10.30748/soi.2024.179.04> [in Ukrainian].
2. Dodonov, O. G., Putyatin, V. G., Dodonov, V. O., Kutsenko, S. A., Germanyyuk, A. P., Izvaryn, I. V., & Kravchuk, K. O. (2024). Technology for ensuring the survivability of territorially distributed information computer systems in a single information space. *Data registration, storage and processing*, 26(1), 121–143. <https://doi.org/10.35681/1560-9189.2024.26.1.308659> [in Ukrainian].
3. Kolisnyk, M., Piskachova, I., & Kharchenko, V. (2024). Reliability Models of Diverse Majority-redundant Systems with Threshold Adaptation. In: *2024 14th International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT)*. IEEE, 1–7. <https://doi.org/10.1109/dessert65323.2024.11122217>
4. Hafaiedh, I. B., & Slimane, M. B. (2022). A distributed formal-based model for self-healing behaviors in autonomous systems: from failure detection to self-recovery. *The Journal of Supercomputing*, 78, 18725–18753. <https://doi.org/10.1007/s11227-022-04614-0>
5. Derick Musundi Kesa (2023). Ensuring resilience: Integrating IT disaster recovery planning and business continuity for sustainable information technology operations. *World Journal of Advanced Research and Reviews*, 18(3), 970–992. <https://doi.org/10.30574/wjarr.2023.18.3.1166>
6. Jawaddi, S. N. A., Johari, M. H., & Ismail, A. (2022). A review of microservices autoscaling with formal verification perspective. *Software: Practice and Experience*, 52(11), 2476–2495. <https://doi.org/10.1002/spe.3135>
7. Gehér, G. P., McLauchlan, C., Campbell, E. T., Moylett, A. E., & Crawford, O. (2024). Error-corrected Hadamard gate simulated at the circuit level. *Quantum*, 8, 1394. <https://doi.org/10.22331/q-2024-07-02-1394>
8. García, A. (2025). Greedy algorithms: a review and open problems. *Journal of Inequalities and Applications*, 2025(11). <https://doi.org/10.1186/s13660-025-03254-1>
9. Tkachov, V. (2025). GitHub - tikey/rlshield-sim-profiles. *GitHub*. Retrieved from <https://github.com/tikey/rlshield-sim-profiles>
10. Tkachov, V. (2025). RLShield-sim: experimental results (hard and tuned profiles, 50×2 epi-

sodes). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17180073> [in Ukrainian].

Ruban I. V., Tkachov V. M. A Model of Disruptions, Recovery and Localization Policies within the Process-Level State Space of a Mobile-Platform Information System.

The paper proposes an enhanced process-level model whose state space is described by four variables: queue backlog, time slack to the deadline, data validity, and adherence to causal-temporal order. All requirements are unified in a single barrier-type indicator, and an additional locality metric is introduced as the radius of deviation propagation. Disruptions are formalized as state-transition operators, enabling quantitative assessment of their contribution to degradation. An R/L policy (Recovery/Localization) is developed that, under partial observability, selects actions with guaranteed increase of the barrier while prioritizing localization. Correctness criteria and feasibility conditions are formulated under fixed time and resource budgets. A testbed implementation is provided and experimental studies are conducted for two workload profiles. The results confirm the applicability and reproducibility of the approach and demonstrate a reduction in typical recovery time together with improved localization of deviations.

Keywords: information system, process level, localization, correctness criteria; state-transition operator, survivability.

Одержано 24.09.2025

УДК 004.67

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).267-277](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).267-277)**В. В. Ткаченко¹, О. В. Зарицький², Д. О. Боровик³**

¹ Військова академія (м. Одеса),
старший викладач кафедри загальновійськових дисциплін,
кандидат технічних наук
rhb78@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2944-8987>

² Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова,
старший викладач кафедри комп'ютерних наук та інформаційних технологій,
кандидат технічних наук
oleksandr.zarytskohyi@kname.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0790-8399>

³ Сумський державний університет,
аспірант кафедри комп'ютерних наук
dmytroborovyk04@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3642-9444>

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИХ КАТАСТРОФ НА ОСНОВІ ГІС ТА ВЕЛИКИХ ДАНИХ

У статті запропоновано вдосконалену методологію моделювання повеней на основі інтеграції геоінформаційних систем (ГІС) і технологій великих даних (ВД). Розроблено концептуальну модель, що поєднує LiDAR-дані, метеорологічні та соціальні потоки інформації для створення цифрових моделей рельєфу та карт ризику. Доведено, що інтеграція ГІС і ВД підвищує точність прогнозування, оперативність реагування та ефективність управлінських рішень у сфері цивільного захисту. Результати дослідження можуть бути використані для систем раннього попередження та розроблення стратегій адаптації до кліматичних змін.

Ключові слова: великі дані, геоінформаційні системи, моделювання, повінь, управління ризиками, цифрова модель рельєфу, LiDAR.

1. Вступ. Природні катастрофи стають дедалі частішими й руйнівними, що в свою чергу спричиняє великі економічні та екологічні збитки. За даними Всесвітньої метеорологічної організації, кількість екстремальних погодних явищ за останнє десятиліття зросла більш ніж утричі [1]. В Україні щорічно підвищуються ризики виникнення повеней, посух і зсувів, що потребує вдосконалення систем прогнозування та управління надзвичайними ситуаціями.

Традиційні методи аналізу природних процесів не враховують просторово-часову динаміку та швидкість надходження великих обсягів даних [2], тому виникає потреба у впровадженні інтелектуальних технологій для аналізу в реальному часі. Геоінформаційні системи (ГІС) у поєднанні з технологіями великих даних (ВД) дозволяють інтегрувати супутникові, сенсорні та метеорологічні потоки, створюючи аналітичні системи раннього попередження та моніторингу катастроф [3].

Водночас залишається невирішеним питання комплексного поєднання ГІС і ВД для моделювання повеней з урахуванням національних географічних і кліматичних особливостей [4–5]. Існуючі підходи часто орієнтовані на окремі регіони або види загроз і не забезпечують уніфікованої архітектури збору, інтеграції та аналітичної обробки просторово-часових даних.

Наукова новизна дослідження полягає у доповненні методології моделювання повеней через інтеграцію ГІС і технологій ВД. Удосконалено підхід до обробки та уніфікації LiDAR-даних, сенсорних і супутникових потоків, що підвищує точність цифрових моделей рельєфу. Запропоновано метод побудови карт ризику, який поєднує просторові, гідрологічні та соціально-економічні параметри для прийняття рішень у режимі реального часу.

Власний внесок авторів полягає у розробці методичного підходу до формалізації процесів інтеграції різнорідних даних у ГІС-середовищі, удосконаленні структури побудови цифрової моделі рельєфу та реалізації процедури оцінки ризиків на основі функції «глибина — збиток». Результати дослідження доводять ефективність поєднання ГІС і ВД для створення адаптивних систем моніторингу, раннього оповіщення та управління наслідками повеней у режимі реального часу.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Протягом останнього десятиліття технології управління природними катастрофами (ПК) розвиваються надзвичайно динамічно. Як свідчать дослідження [5–11, 15], застосування ГІС, дистанційного зондування Землі (ДЗЗ), безпілотних літальних апаратів (БПЛА), штучного інтелекту (ШІ) та ВД істотно підвищує точність прогнозування та скорочує час реагування на надзвичайні події.

У роботах [6, 8] підкреслюється, що запобігання катастрофам потребує комплексного підходу, який поєднує інноваційні технології, міжвідомчу взаємодію та врахування міжнародного досвіду. Інтеграція ГІС і ВД забезпечує не лише просторово-часовий моніторинг, а й побудову адаптивних моделей управління ризиками.

Огляди [7, 9] акцентують на зростанні ролі Web-GIS і хмарних платформ у спостереженні за природними явищами, зокрема повенями, зсувами та землетрусами. Водночас проблема стандартизації геоданих залишається актуальною, що ускладнює обмін інформацією між системами різного рівня.

У низці робіт [10–14] доведено ефективність використання ВД, сенсорних мереж і технологій Інтернету речей (ІР) для створення «розумних» міських систем, стійких до катастроф. Проте більшість таких рішень орієнтовані на локальні території, а не на регіональні чи національні системи управління ризиками.

Попри значну кількість досліджень, питання інтеграції ГІС і ВД у єдине аналітичне середовище залишається відкритим. Недостатньо вивченим є й аспект адаптації ВД-інфраструктури до моделювання повеней в Україні з урахуванням місцевих географічних, кліматичних та соціально-економічних особливостей. У цьому контексті запропонована в роботі концептуальна модель спрямована на підвищення точності прогнозів, оперативності реагування та обґрунтованості управлінських рішень у сфері цивільного захисту.

3. Постановка задачі. Метою дослідження є підвищення ефективності прогнозування та управління ризиками повеней шляхом інтеграції ГІС та технологій ВД у єдину аналітичну модель. Згідно з метою дослідження необхідно вирішити наступні завдання: проаналізувати сучасні підходи до застосування ГІС і ВД у моделюванні природних катастроф; обґрунтувати структуру та ключові компоненти ГІС для моделювання повеней; розробити концептуальну модель інтеграції ГІС і ВД із використанням LiDAR, супутникових та сенсорних даних;

провести моделювання процесу затоплення та оцінку ризиків із побудовою карт наслідків повені.

4. Виклад основного матеріалу.

Обґрунтування використання технологій ГІС у моделюванні повені

ГІС є базовим технологічним інструментом для збору, зберігання, аналізу та відображення просторових даних, що дозволяє не лише створювати моделі ПК, але й прогнозувати їхній вплив на середовище, завчасно виявляти потенційні ризики та усувати потенційні проблеми на ранньому етапі.

Структура та компоненти ГІС (рис. 1) охоплює інтегровану методологію, яка поєднує в собі апаратне та програмне забезпечення, дані, методи та користувачів для перетворення просторової інформації у знання, необхідні для прийняття управлінських рішень у сфері реагування на повінь [13–14].



Рис. 1. Компоненти структури ГІС.
Джерело: сформовано автором на основі [14].

До основних компонентів структури ГІС входять [12, 14, 15]:

- апаратне забезпечення, в яке входять високопродуктивні комп'ютери, пристрої введення/виведення, що забезпечують швидку обробку великих обсягів геоданих;
- програмне забезпечення з використанням систем ArcGIS, QGIS, MapInfo, GRASS GIS, які підтримують моделювання ризиків, інтеграцію польових даних і візуалізацію зон катастроф;
- просторові (векторні, растрові, ДЗЗ) та атрибутивні дані, що відображають природні та антропогенні об'єкти;
- людський фактор враховує підготовлених фахівців, від яких залежить якість аналізу та прийняття рішень;
- методи передбачають собою алгоритми аналізу, стандартизації та візуалізації, які забезпечують точність моделей ризику.

На основі структури та компонентів ГІС формуються комплексні карти ризиків, моделюються сценарії повені, а також прогнозуються потенційні наслідки для соціально-економічної системи. Візуалізація просторових даних робить можливим швидко прийняття рішень у кризових ситуаціях, оптимізацію шляхів евакуації, розміщення рятувальних служб і ресурсів.

Характеристики математичного моделювання повені з використанням ГІС.

Основою просторової візуалізації та моделювання в ГІС є математичний апарат векторних і матричних перетворень, що забезпечує точне геометричне відображення об'єктів і процесів у цифровому середовищі [13, 15]. До ключових операцій просторового аналізу входять обертання, масштабування та переміщення, які використовуються для побудови й трансформації тривимірних моделей природних процесів.

Обертання дозволяє змінювати орієнтацію об'єктів у просторі, що важливо для моделювання динаміки водного потоку та напрямку розповсюдження повені. Наприклад, при моделюванні повені необхідно враховувати зміни координат точок рельєфу після переміщення ґрунтової маси, де використовується матриця повороту об'єкта навколо координатних осей. В якості прикладу розглянемо двовимірний випадок координати точки $A(x, y)$ після повороту на кут α , що визначаються рівняннями 1 і 2:

$$x' = x \times \cos(\alpha) - y \times \sin(\alpha), \quad (1)$$

$$y' = x \times \sin(\alpha) + y \times \cos(\alpha). \quad (2)$$

Для тривимірного моделювання застосовуються матричні перетворення, які враховують не лише площинне обертання, а й поворот об'єкта у просторі відносно осей O_x , O_y та O_z . Такі обчислення дають можливість створювати 3D-сценарії зміни ландшафту або об'єктів інфраструктури внаслідок повені.

Масштабування використовується для зміни розмірів об'єктів і моделювання розширення зон затоплення, що описується формулою 3.

$$s = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де s_x, s_y, s_z — коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей.

глибина води; u, v — компоненти швидкості потоку; t — час; x, y — просторові координати.

Переміщення дає змогу відтворювати поширення хвиль і динаміку затоплення територій. Формула 4 показує матрицю переміщення.

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

де t_x, t_y, t_z — відстані переміщення об'єкта вздовж координатних осей.

Інтеграція математичних моделей у середовище ГІС дає змогу створювати реалістичні сценарії повеней. Поєднання ГІС із технологіями ВД забезпечує автоматичне оновлення параметрів (рівня води, швидкості течії тощо), а також формування адаптивних 3D-візуалізацій у режимі реального часу. Такий підхід дозволяє не лише відтворювати катастрофічні процеси, а й прогнозувати їх розвиток, формуючи інтелектуальні системи підтримки управлінських рішень у сфері природних ризиків.

Інтеграція ГІС з системою управління природними катастрофами на прикладі повені.

ГІС відіграє ключову роль у системах управління надзвичайними ситуаціями, забезпечуючи інтеграцію геопросторових даних про ризики, вразливість територій та доступність інфраструктури. Її використання охоплює чотири основні напрями [14].

1. Планування та аналіз. ГІС дає змогу моделювати потенційні загрози, визначати вразливі зони та планувати розташування критичної інфраструктури. Просторове моделювання сприяє прогнозуванню наслідків і підготовці заходів реагування.
2. Управління даними. Система об'єднує геологічні, гідрологічні, демографічні та екологічні дані, створюючи інформаційне середовище для швидкого прийняття управлінських рішень.
3. Ситуаційна обізнаність. Використання ГІС забезпечує моніторинг у режимі реального часу — визначення небезпечних зон, оцінку щільності населення, стану інфраструктури та шляхів евакуації.
4. Польові операції. Мобільні додатки (ArcGIS Field Maps, Collector, Survey123) дозволяють оперативно збирати й синхронізувати дані з польових місій, підвищуючи точність і швидкість реагування [14].

Доцільність використання технологій ВД у моделюванні повені

Моделювання повеней належить до типових задач класу ВД, оскільки охоплює значні, різномірні та динамічні обсяги інформації. Таке моделювання потребує обробки великих масивів різномірних просторово-часових даних, що постійно оновлюються з багатьох джерел у реальному часі. Традиційні методи аналізу та бази даних не забезпечують ефективної роботи з такими потоками через технічні й методологічні обмеження. Розглянемо основні аспекти, які охоплюють ВД у моделюванні повені.

1. *Обсяг і складність.* LiDAR-сканування території 100 км² генерує понад 1 млрд точок ($\approx 100\text{--}300$ ГБ даних), а з урахуванням супутникових знімків, метеоархівів і демографічних баз загальний обсяг може сягати кількох терабайтів. Такі дані ефективно обробляються лише у розподілених системах на кшталт Hadoop або Spark.
2. *Швидкість оновлення даних.* Потоки від сенсорних мереж і супутників надходять щосекунди або щохвилини, тому потрібна потокова обробка у реальному часі (Apache Spark Streaming, Kafka Streams, Flink) [16].
3. *Різнорідність джерел.* Інформація поєднує структуровані (ГІС-шари), напівструктуровані (JSON, XML) та неструктуровані (зображення, тексти, геотеги) дані. Їхня уніфікація здійснюється через NoSQL-сховища (MongoDB, Cassandra, HBase) та ETL-процеси.

4. *Достовірність і варіативність*. Потоки часто містять шум, пропуски або розбіжності у координатах, що потребує очищення й фільтрації за допомогою PySpark або MapReduce.

Для побудови 3D-гідродинамічних моделей (HEC-RAS, Delft3D) необхідна хмарна або кластерна інфраструктура з GPU-прискоренням. Саме тому сучасні системи прогнозування ПК використовують ГІС у поєднанні з ВД-платформами. До таких платформ можна віднести: Google Earth Engine (для аналізу супутникових і кліматичних даних у масштабі планети); ArcGIS Online (для хмарного просторового аналізу, інтеграції даних IP та візуалізації результатів у режимі реального часу); Amazon Web Services ВД Solutions (для розподіленої обробки великих наборів геопросторової інформації за допомогою Hadoop, Spark та S3); Microsoft Azure Synapse Analytics (для інтеграції потокових, аналітичних сервісів та візуалізацій у єдиному середовищі).

Інтеграція ГІС з ВД при моделюванні повені.

Інтеграція ГІС та ВД є парадигмою зрушення у моделюванні повені, де ГІС забезпечує просторову структуру та аналітичні інструменти, тоді як ВД надають масивні, різноманітні та динамічні вхідні дані для підвищення точності, оперативності та масштабу моделей. Розглянемо таку інтеграцію на прикладі моделювання моделі повені.

Для інтеграції та обробки потокових даних у моделі застосовано поєднання алгоритмів попередньої фільтрації, нормалізації та виявлення аномалій. Зокрема, для очищення LiDAR-даних використано методи кластеризації (DBSCAN) та видалення шумів за щільністю точок, а для інтеграції сенсорних і супутникових потоків використовувалися алгоритми просторово-часового узгодження даних на основі координат та часових міток. Для виявлення закономірностей у потоках спостережень застосовано машинне навчання (методи регресії та аналізу трендів у PySpark). Використання таких алгоритмів підвищує достовірність даних, забезпечує автоматичне оновлення параметрів моделі в реальному часі та створює основу для адаптивної аналітики у хмарному середовищі.

Збір даних та інтеграція ВД. Моделювання повені вимагає інтеграції великої кількості різноманітних даних. На цьому етапі збирається та консолідується інформація з різних джерел, наприклад, високоточні дані рельєфу (LiDAR), метеорологічні дані, дані про інфраструктуру, соціальні дані тощо, як показано в табл. 1.

На рис. 2 представлено інфографіку збору та інтеграції ВД у контексті геопросторового моделювання. Центральне сховище ВД відображає платформу обробки інформації, навколо якої інтегруються основні джерела: геопросторові дані (LiDAR, супутникові знімки) для створення ЦМР; метеорологічні потоки (опади, температура, вологість) із сенсорних мереж; інфраструктурні дані (будівлі, дороги, критичні об'єкти) для оцінки вразливості; дані ІІІ та аналітики для виявлення закономірностей; соціальні дані (геотеги, повідомлення користувачів), що забезпечують валідацію моделі у реальному часі.

Інфографіка демонструє конвергенцію різноманітних ВД (від статичного LiDAR до динамічних соціальних потоків) в єдину систему, де вони обробляються, аналізуються та інтегруються в ГІС-середовище для моделювання, прогнозування та підтримки прийняття рішень у сфері ПК.

Таблиця 1.

Збір даних та консолідація з різних джерел

Джерела ВД	Тип даних	Призначення в побудові моделі
Геопросторові дані	LiDAR (високоточні моделі рельєфу), супутникові знімки (оптичні, радарні), аерофотозйомка тощо.	Створення цифрової моделі рельєфу (ЦМР) та цифрової моделі місцевості (ЦММ) з високою роздільною здатністю для точного визначення шляхів стоку та зон, де накопичуватиметься вода.
Метеорологічні дані	Дані з мережі датчиків рівня води, метеостанцій, прогнози опадів у реальному часі, історичні кліматичні дані.	Визначення сценаріїв паводку (наприклад, повінь 10-річної, 50-річної чи 100-річної повторюваності) та гідрологічний вхід для моделі.
Дані про інфраструктуру	Кадастрові дані, розташування доріг, мостів, критично важливих об'єктів (лікарні, електростанції), інформація про будівлі (поверховість, функціональне призначення).	Оцінка вразливості та потенційного економічного збитку.
Соціальні дані (краудсорсинг)	Геотеги та пости із соціальних мереж (Facebook, X) про початок або розвиток затоплення, перекриття доріг.	Валідація моделі у реальному часі та отримання актуальної інформації про ситуацію на місці, що доповнює офіційні дані.
Дані про населення	Переписні дані, динаміка мобільного трафіку (конфіденційні дані від операторів зв'язку).	Оцінка кількості потенційно постраждалого населення та аналіз шляхів евакуації.



Рис. 2. Візуалізація збору даних та інтеграція ВД.

Джерело: сформовано автором.

Моделювання ризику повені з використанням ГІС та ВД. На цьому етапі є важливим прогнозування районів, які можуть бути найбільш схильними

до затоплення при різних сценаріях, наприклад, значна кількість опадів, танення снігу, де важливими є оцінка потенційної шкоди та визначення оптимальних маршрутів евакуації з розташуванням пунктів допомоги [11].

З цієї метою на основі даних LiDAR створюється детальна ЦМР та поверхні землі, що є критично важливим для точного моделювання стоку води. На рис. 3 показана детальна ЦМР, отримана за допомогою LiDAR, де показано моделі а) рельєфу на основі інтеграції ГІС з ВД для моделювання повені та б) карти затоплення зон з різною глибиною води.



Рис. 3. Цифрова модель: а) рельєфу на основі ГІС та ВД для моделювання повені; б) карти затоплення зон з різною глибиною води.

Джерело: сформовано автором.

Під час моделювання важливо перетворювати масивні та високоточні ВД за допомогою LiDAR-сканування (мільярди точок) на структуровану, придатну для аналізу модель. Дані LiDAR є класичним прикладом застосування просторових ВД через їхній обсяг (терабайти точок) та швидкість отримання.

ЦМР отримана за допомогою LiDAR має точність до 10–15 см, що дозволяє ГІС-системам ідентифікувати: напрямок стоку (куди саме потече вода), ухили (з якою швидкістю вона рухатиметься), мікро-депресії (невеликі природні або штучні западини, де вода накопичуватиметься, що є невидимим на застарілих картах). Тому деталізація ЦМР є основою для реалістичного гідродинамічного моделювання.

Гідродинамічне моделювання та аналіз затоплення. ГІС інтегрується зі спеціалізованими гідродинамічними моделями (наприклад, HEC-RAS). Вона використовує ЦМР та сценарні дані про опади, щоб обчислити, як і куди поширюватиметься вода, створюючи карти глибини та швидкості потоку для різних сценаріїв паводку [12, 14].

На цьому етапі відбувається безпосередній розрахунок параметрів повені. Для побудови моделі використовується двовимірна (2D) гідродинамічна модель (HEC-RAS) для симуляції поширення води, що записується у вигляді формули 5:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

де h — глибина води; u, v — компоненти швидкості потоку; t — час; x, y — просторові координати.

ЦМР (LiDAR) використовується як сітка для розрахунків. Модель розраховує карти глибини та швидкості потоку для визначеного сценарного навантаження (наприклад, максимальна втрата річки, Q_{max}).

Рис. 3 (б) демонструє результати гідродинамічного моделювання затоплення в ГІС, де інтеграція ВД дає змогу прогнозувати наслідки катастрофи. На рисунку показано основні елементи моделі: карту глибини затоплення (градієнт синього кольору від 0,5 до 5+ м), інфраструктуру (будівлі, дороги, зелені насадження в зоні ризику), лінії потоку (напрямок руху води) та аналітичні елементи, такі як мобільний дашборд і графік, що відображають рівень води та динаміку події в реальному часі для оперативного управління.

Просторовий аналіз та картографування ризиків. У ГІС в поєднанні з ВД виконується накладання карт затоплення на шари вразливості для кількісної оцінки ризику, де подібна задача розглядалася авторами в роботі [10]. Вразливість об'єктів (будівель, мостів тощо) моделюється за допомогою функцій глибина-збиток, які прив'язані до шарів інфраструктури в ГІС та встановлюють залежність відсоткового збитку від максимальної глибини води. За формулою 6 визначається загальний збиток:

$$\text{Збиток} = \sum_{i=1}^n (\text{Вартість об'єкта}_i \times F(h_1)), \quad (6)$$

де $F(h_1)$ — функція глибина-збиток для об'єкта i при глибині h_1 .

Результатом є карта ризику, де кожен об'єкт або територія класифікується за рівнем потенційного економічного збитку та соціального впливу (кількість постраждалого населення). Створення карта ризику є основним інструментом для прийняття управлінських рішень.

Отже, використання ГІС у поєднанні з технологіями ВД формує сучасну концепцію інтелектуального моделювання ПК, що забезпечує високоточне прогнозування, оцінку ризиків і підтримку управлінських рішень у режимі реального часу. Інтеграція різномірних джерел даних — від супутникових знімків і сенсорів до соціальних медіа — дозволяє формувати комплексну інформаційну модель середовища.

Математичні моделі та просторові перетворення у ГІС є основою для створення тривимірних візуалізацій, які відображають динаміку катастрофічних процесів. Застосування ВД підсилює можливості аналітики, дозволяючи обробляти великі обсяги інформації та забезпечувати адаптивне реагування на основі актуальних даних. Практичні результати моделювання, зокрема у випадку повеней, демонструють ефективність поєднання ГІС і ВД для побудови карт ризиків, оптимізації систем раннього оповіщення та зниження соціально-економічних наслідків катастроф.

5. Висновки. Проаналізовано структуру ГІС та її основні компоненти, що забезпечують створення карт ризику, моделювання сценаріїв затоплення й планування реагування.

Обґрунтовано доцільність використання технологій ВД для обробки великих, швидкоплинних і різномірних даних, а також застосування платформ

Hadoop, Spark, Kafka й хмарних сервісів (Google Earth Engine, AWS, Azure) для аналітики в реальному часі.

Запропоновано концептуальну модель інтеграції ГІС і ВД, що об'єднує LiDAR-дані, супутникові спостереження, метеоінформацію та соціальні потоки. Використання алгоритмів очищення й аналізу поточкових даних підвищує достовірність моделювання, а створені карти ризику дають змогу оцінювати збитки й визначати критичні об'єкти.

Розроблений підхід поєднує точність ГІС, масштабованість ВД і паралельну обробку, підвищуючи ефективність систем моніторингу та управління ризиками повеней.

Вектор подальших досліджень спрямовано на розроблення адаптивних алгоритмів машинного навчання для прогнозування динаміки паводкових процесів у режимі реального часу, удосконалення методів автоматизованої обробки LiDAR-даних та розширення можливостей інтеграції ГІС із хмарними аналітичними платформами.

Список використаної літератури

1. Ustinova, I., & Matsokha, A. (February 2, 2024). Preserving World Heritage Sites in the Context of Climate Change through Landscape Architecture. *Collection of scientific papers «ΔΟΗΟΣ»*, Oxford: UK. 432–442. <https://doi.org/10.36074/logos-02.02.2024.090>
2. Dobrokhodova, O. V., Andrusiak, V. M., & Sushchenko, V. O. (2025). Deformation monitoring of land and natural processes. *Scientific Bulletin of Construction*, 112, 355–361. <https://doi.org/10.33042/2311-7257.2025.112.1.44>
3. Peiris, P. S. H. (2020). Geographical information system (GIS) for disaster management. *Univ. Moratuwa*, 1, 1–10. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/345179571_Geographical_Information_System_GIS_for_Disaster_Management
4. Mozumder, C., & Karthikeya, N. S. (2023). Geospatial big Earth data and urban data analytics. *Application of Remote Sensing and GIS in Natural Resources and Built Infrastructure Management*, 105, 57–76. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14096-9_4
5. Pollard, J. A., Spencer, T., & Jude, S. (2018). Big Data Approaches for coastal flood risk assessment and emergency response. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Climate Change*, 9(5), 1–14. <https://doi.org/10.1002/wcc.543>
6. Nozhko, I. O., & Kachan, N. (2025). Prevention of emergencies: strategic approaches, innovative technologies, and practical experience. In *Theory and practice of firefighting and emergency response: Proceedings of the XVI International Scientific and Practical Conference*. Cherkasy. 62–64. Retrieved from <https://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/25790>
7. Daud, M., Ugliotti, F. M., & Osello, A. (2024). Comprehensive analysis of the use of Web-GIS for natural hazard management: A systematic review. *Sustainability*, 16(10), 1–24. <https://doi.org/10.3390/su16104238>
8. Sarker, M. N. I., & et al. (2020). Disaster resilience through big data: Way to environmental sustainability. *International journal of disaster risk reduction*, 51, 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2020.101769>
9. Calka, B., & Szostak, M. (2025). GIS-Based Environmental Monitoring and Analysis. *Applied Sciences*, 15(6), 1–6. <https://doi.org/10.3390/app15063155>
10. Shah, S. A., & et al. (2019). Towards disaster resilient smart cities: Can internet of things and big data analytics be the game changers? *IEEE*, 7, 91885–91903. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2928233>
11. Zarytskyi, O. V., & Kostenko, O. B. (2020). Ranking of spatially distributed systems for monitoring resources in emergency situations. *Problems of emergency situations*, 2(32), 118–132. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4400179>
12. Yu, M., Yang, C., & Li, Y. (2018). Big data in natural disaster management: a review. *Geosciences*, 8(5), 1–26. <https://doi.org/10.3390/geosciences8050165>
13. Zhezhnych, P. I., & Osyka, V. O. (2010). Geographic information systems based on spatio-temporal data models. *Bulletin of Lviv Polytechnic National University*. LVIV: Published by

- Lviv Polytechnic National University, 149–158. Retrieved from <https://science.lpnu.ua/uk/sisn/vsi-vypusky/vypusk-689-2010/geoinformaciyi-systemy-na-osnovi-prostorovo-chasovyyh-modeley-danyh>
14. Ayawa, M., & et al. (2024). Geographic Information System (GIS) For Disaster Management. *Int. J. Built Environ. Earth Sci.*, 3, 1–17. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/380724028_GEOGRAPHIC_INFORMATION_SYSTEM_GIS_FOR_DISASTER_MANAGEMENT
 15. Qin, F., Huang, C., & Lin, Z. (2024). Big data and artificial intelligence-driven natural disaster prediction and prevention: Technological advances and prospects. *Geographical Research Bulletin*, 3, 381–398. https://doi.org/10.50908/grb.3.0_381
 16. APACHE Spark. Spark Streaming Programming Guide. Retrieved from <https://spark.apache.org/docs/latest/streaming-programming-guide.html>

Tkachenko V. V., Zarytskiy O. V., Borovyk D. O. Modeling natural disasters based on GIS and BIG DATA.

The article proposes an improved methodology for flood modeling based on the integration of geographic information systems (GIS) and big data (BD) technologies. A conceptual model has been developed that combines LiDAR data, meteorological and social information flows to create digital terrain models and risk maps. It has been proven that the integration of GIS and BD increases the accuracy of forecasting, the speed of response, and the effectiveness of management decisions in the field of civil protection. The results of the study can be used for early warning systems and the development of strategies for adaptation to climate change.

Keywords: big data, geographic information systems, modeling, flood, risk management, digital terrain model, LiDAR.

Одержано 29.09.2025

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).278-288](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).278-288)**Ю. О. Товт¹, А. Ю. Брила²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
yurii.tovt@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9556-0630>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

ФІЛЬТРАЦІЯ СПЕКЛ-ШУМУ НА УЛЬТРАЗВУКОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ ЗА ДОПОМОГОЮ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Ультразвукові зображення широко застосовуються в багатьох галузях. Їх аналіз є надзвичайно важливою задачею, тому фільтрація шуму на таких зображеннях відіграє важливу роль. У цій роботі розглянуто фільтрацію спекл-шуму на ультразвукових зображеннях за допомогою комплекснозначних нейронних мереж. Проведено експерименти з фільтрації шуму та порівняння отриманих результатів із деякими відомими методами фільтрації спекл-шуму.

Ключові слова: нейронні мережі, комплекснозначні нейронні мережі, цифрові зображення, фільтрація шуму, спекл-шум.

1. Вступ. Однією з основних перепон для успішної обробки та аналізу цифрових зображень є наявність шуму. Тому фільтрація шуму була і залишається одним із основних напрямів досліджень у галузі цифрової обробки зображень. Зазвичай виділяють такі типи шуму: адитивний (зазвичай із гаусівським розподілом), мультиплікативний (спекл) та імпульсний. Серед цих типів шуму особливу увагу привертає мультиплікативний шум, який є характерним для когерентних систем, таких як ультразвук. Ця стаття присвячена фільтрації мультиплікативного шуму на ультразвукових зображеннях за допомогою нейронних мереж. Спекл-шум спостерігається на зображеннях, отриманих за допомогою когерентних джерел випромінювання (наприклад, лазера, радара або ультразвуку), і проявляється у вигляді зернистої структури, що знижує контраст та ускладнює візуальне сприйняття і подальший аналіз зображення. Причиною появи спеклів є мікроскопічні нерівності поверхні в межах одного пікселя. Коли когерентне випромінювання потрапляє на таку поверхню та відбивається, прийнятий сигнал зазнає випадкових коливань фази й амплітуди [1]. З часу становлення обробки цифрових зображень як окремої галузі науки було створено низку алгоритмів, що дозволяють фільтрувати спекл-шум. До одних із перших запропонованих алгоритмів можна віднести фільтри Lee [2] та Frost [3]. Ці фільтри використовують локальні статистичні характеристики фрагмента зображення для обчислення оновленого значення інтенсивності цільового пікселя. Наприклад, фільтр Lee використовує локальне середнє значення та вагові коефіцієнти, які базуються на локальній і глобальній дисперсії зображення, для

розрахунку інтенсивності пікселя. Фільтр Frost, своєю чергою, застосовує експоненційно зважене значення, причому ваги обчислюються на основі локальної дисперсії та середнього значення.

Іншим класичним підходом, який може бути застосований для фільтрації спекл-шуму, є фільтр VM3D [4]. Цей фільтр відрізняється інноваційним підходом до фільтрації шуму, який включає обробку як у просторовій, так і у частотній області. Статистично схожі фрагменти зображення формують 3D-блоки, після чого ці блоки обробляються у частотній області шляхом використання тривимірного перетворення Фур'є. Завдяки цьому, VM3D демонструє високу якість фільтрації і вважається одним із найефективніших фільтрів, розроблених на даний момент.

Сьогодні, з існуючим рівнем обчислювальних потужностей, нейронні мережі все частіше використовуються для розв'язання задач у різних сферах. Так, у [5] [6] багатопаровий перцептрон (MLP) був успішно використаний для фільтрації адитивного гаусівського та змішаного (пуасонівського та гаусівського) шуму. Для фільтрації зображення розбивали на невеликі фрагменти, які оброблялися MLP, після чого відбувалася реконструкція зображення. Такий підхід продемонстрував результати фільтрації, які є близькими до отриманих за допомогою фільтра VM3D, а в деяких випадках - кращими.

Висока популярність згорткових нейромереж (CNN), закономірно призвела до великої кількості досліджень, у яких цей тип нейромереж використовувався для фільтрації шуму на цифрових зображеннях. Так, у [7–9] CNN застосовувалися для фільтрації різних видів шуму. Зокрема, Hybrid CNN [10] та Pre-trained RLN [11] використовувалися для фільтрації спекл-шуму на ультразвукових зображеннях та продемонстрували результати, які в деяких випадках перевершували результати класичних фільтрів (наприклад, Lee та Frost).

У нашій роботі ми застосовували алгоритм фільтрації, запропонований у [12], для фільтрації спекл-шуму на ультразвукових зображеннях. Цей алгоритм здійснює обробку зображень у частотній області з допомогою комплекснозначної нейронної мережі, з метою ефективного зменшення спекл-шуму.

2. Основний результат.

2.1. Ультразвукові зображення та спекл-шум. Як описано у [13], процес утворення ультразвукового зображення (В-режим) загалом зводиться до променеутворення (beamforming), яке є методом обробки відбитих ехо-сигналів. Ультразвуковий датчик отримує від тканин множинні радіочастотні (RF) ехо-сигнали, які називаються каналними сигналами. Для формування зображення використовується метод «затримка та сума» (Delay-and-Sum, DAS), під час якого до кожного каналного сигналу застосовуються спеціально розраховані часові затримки, щоб скомпенсувати різний час поширення звуку до певної фокальної точки. Після синхронізації фаз ці затримані сигнали підсумовуються, що когерентно посилює сигнал саме з фокальної точки, пригнічуючи шум з інших областей. Повторення цього процесу для всіх точок сканування генерує повне зображення. Для підвищення роздільної здатності та контрастності сучасні системи часто використовують адаптивні методи променеутворення (наприклад, DMAS або методи на основі когерентності), які додатково оптимізують цей процес.

Спекл-шум є невід'ємною частиною ультразвукових зображень. Серед основ-

них причин його появи є неоднорідна структура тканин, багаторазові відбиття ехо-сигналів, когерентне інтерференційне накладання хвиль та випадкові флуктуації сигналу.

Для спрощення під час досліджень ми використовували зображення у відтінках сірого. Таке спрощення не зменшує загальності, оскільки кольорові зображення можуть бути представлені як комбінація зображень у відтінках сірого в різних кольорових каналах (наприклад, RGB).

Як відомо, цифрове зображення у просторовій області представляється у вигляді дискретної функції

$$f : D^2 \rightarrow I,$$

де $D = \{1, 2, \dots, N\}$ - просторова область, а $I = \{0, 1, \dots, L - 1\}$ — інтенсивність [14]. При розробці методів фільтрації шуму з метою моделювання спекл-шуму використовують наступний підхід:

$$g(x, y) = f(x, y) + f(x, y)\eta(x, y),$$

де $g(x, y)$ — зашумлене зображення, $f(x, y)$ — ідеальне зображення, $\eta(x, y)$ — рівномірно розподілений випадковий шум. Для моделювання спекл-шуму у цій роботі ми використовували вбудовану функцію MATLAB, яка є стандартним інструментом для генерації мультиплікативного шуму. Варто зазначити, що інтенсивність шуму (його стандартне відхилення) у цій роботі подається у вигляді $c\sigma$, де c — коефіцієнт, а σ — стандартне відхилення ідеального зображення (зображення без шуму). Для оцінки якості фільтрації зображення зазвичай користуються значеннями RMSE

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N \left(f(x, y) - \hat{f}(x, y) \right)^2},$$

або PSNR

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{L}{\text{RMSE}} \right),$$

де $f(x, y)$ — оригінальне зображення, $\hat{f}(x, y)$ — відфільтроване зображення, L — максимальне значення інтенсивності пікселя, а $\text{RMSE} > 0$ — середньоквадратичне відхилення.

2.2. Фільтрація спекл-шуму за допомогою комплекснозначних нейронних мереж. Як відомо, шум на цифрових зображеннях зазвичай зосереджується у високих частотах. Тому фільтрацію шуму можна розглядати як спосіб інтелектуального «приглушення» певних високих частот спектру цифрового зображення. Ключовим у цьому процесі є саме інтелектуальна обробка високих частот зображення, оскільки, крім шуму, високі частоти репрезентують дрібні деталі зображення, які можуть бути дуже важливими. Тобто просте «приглушення» високих частот призведе до втрати дрібних деталей на зображенні, що є недопустимим для певних областей, таких як медицина рис. 1.

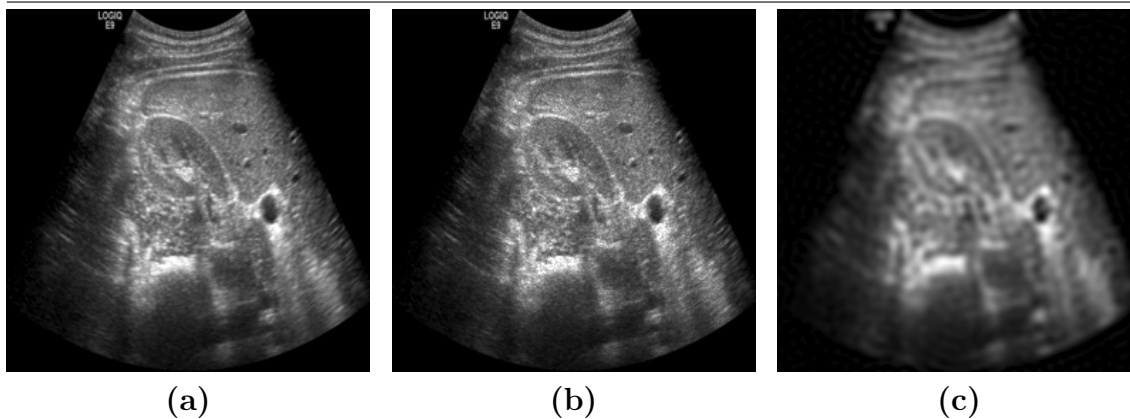


Рис. 1. (a) Ідеальне зображення. (b) Зашумлене зображення (спекл-шум, 0.4σ) (c) Зашумлене зображення з приглушеними високими частотами.

Саме тому в цій роботі ми користуємося інтелектуальним алгоритмом фільтрації, запропонованим у [12]. Алгоритм базується на використанні комплексно-значної нейромережі (MLMVN) [15] з одним прихованим шаром. З точки зору топології MLMVN наслідує MLP, проте на відміну від останнього базується на багатозначних нейронах (MVN) [16]. Особливістю MVN є те, що входи, вихід та ваги нейрона є комплексними числами. Саме ця особливість нейрона дозволяє здійснювати ефективну обробку цифрового зображення у частотній області. Ефективне використання MVN та MLMVN продемонстровано у різноманітних областях [17–24].

Обробка зображення здійснюється шляхом його розбиття на множину перекриваючихся фрагментів (патчів) та подальшої обробки їх перетворень Фур'є за допомогою MLMVN. Реконструкція фільтрованого зображення здійснюється шляхом об'єднання отриманих патчів у частотній області. Під час обробки перетворень Фур'є фрагментів зображення кожен нейроелемент MLMVN фактично здійснює згортку у частотній області:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(w) \odot \mathcal{F}(p)) = w \star p.$$

Не зважаючи на те, що окремий нейроелемент не породжує фільтрів (як було показано у [25]), комплекснозначна нейромережа в цілому здатна ефективно здійснювати фільтрацію шуму на цифрових зображеннях. Фактично MLMVN здійснює інтелектуальну обробку частот, представлених у спектрі патчу, при якій частоти, що містять шум (переважно високі), приглушуються, але водночас високі частоти, що відповідають дрібним деталям зображення, зберігаються завдяки адаптивному підбору комплексних ваг нейронів, що дозволяє виділити структурну інформацію без втрат деталей.

Можна вважати, що така селективна обробка компонент перетворення Фур'є є результатом процесу навчання, під час якого на вхід нейромережі подаються зашумлені патчі у частотній області, а ідеальні фрагменти у частотній області є бажаними виходами. Оскільки навчальна множина зазвичай складається з великої кількості навчальних зразків, класичний алгоритм навчання зі зворотним поширенням помилки для MLMVN [15] може займати багато часу. Тому для навчання використовувався алгоритм навчання пакетами [26], який дозволяє оновлювати ваги всіх нейронів одночасно для багатьох навчальних зразків.

2.3. Проведені експерименти та отримані результати. Як було зазначено вище, з метою фільтрації спекл-шуму на ультразвукових зображеннях ми використовували алгоритм, запропонований у [12]. Під час наших експериментів ми використовували комплекснозначну нейромережу з топологією 64-1024-64, тобто 64 входи, 1024 нейрони у прихованому шарі та 64 нейрони у вихідному шарі. У нейронах прихованого шару використовувалася класична активаційна функція для MVN з неперервним виходом

$$f(z) = \frac{z}{|z|}.$$

Під час експериментів для нейронів вихідного шару ми використовували такі активаційні функції:

$$f(z) = z, \quad (1)$$

$$f(z) = \begin{cases} z, & |z| \leq 1; \\ \frac{1}{1+e^{-|z|}} e^{i \arg(z)}, & |z| > 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$f(z) = \tanh(|z|) e^{i \arg(z)}. \quad (3)$$

Для тренування MLMVN було використано множину з 300 зображень у відтінках сірого. Ця множина була розбита на три підмножини — S_t , S_v та S_f — для формування тренувальної, валідаційної та тестової множин. Важливо зазначити, що для цих підмножин справедливе твердження

$$S_t \cap S_v \cap S_f = \emptyset.$$

Тренувальна множина використовувалася для оновлення ваг нейронів за допомогою алгоритму навчання пакетами. Для побудови тренувальної множини ідеальні зображення були спотворені мультиплікативним шумом, після чого з кожного зображення було вибрано по h фрагментів (патчів) розміру $n \times t$ із просторовими координатами (x_i, y_i) , $i = \overline{1, h}$. Таким чином було сформовано дві множини P^{ideal} та P^{noisy} елементами яких є ідеальні та зешумлені патчі. Після цього було здійснено перехід у частотну область шляхом обчислення прямого двовимірного перетворення Фур'є для кожної пари патчів. З векторизованих перетворень Фур'є було сформовано дві множини наступним чином

$$P_{\mathcal{F}}^{\text{ideal}} = \left\{ \text{vec} \left(\frac{1}{nm} \mathcal{F}(C) \right)^T \mid C \in P^{\text{ideal}} \right\},$$

та

$$P_{\mathcal{F}}^{\text{noisy}} = \left\{ \text{vec} \left(\frac{1}{nm} \mathcal{F}(D) \right)^T \mid D \in P^{\text{noisy}} \right\}.$$

Тренувальна множина була сформована з елементів цих множин наступним чином

$$T = \left\{ (T_i^{\text{in}}, T_i^{\text{out}}) \mid i = \overline{1, lh}, T_i^{\text{in}} \in P_{\mathcal{F}}^{\text{noisy}}, T_i^{\text{out}} \in P_{\mathcal{F}}^{\text{ideal}} \right\},$$

де l — кількість зображень. Під час експериментів, проведених у рамках цієї роботи, для побудови тренувальної множини ми використовували патчі розміру

8×8 . Це дозволило досягти хорошого рівня фільтрації, водночас використовуючи відносно невелику кількість нейронів у нейромережі. З кожного ідеального та зашумленого зображення було вибрано по 200 патчів, таким чином тренувальна множина складалася з 60 000 навчальних зразків. Також варто звернути увагу на попередню обробку патчів як у просторовій, так і у частотній області — йдеться про нормалізацію фрагментів зображень. Цей крок є важливим і загальноприйнятим у галузі машинного навчання, а у нашому випадку він дозволяє уникнути появи надмірно великих значень ваг нейронів у процесі навчання.

Валідаційна та тестова множини склалися із зображень у відтінках сірого. Їхні ролі полягали, відповідно, в оцінці узагальнювальних можливостей MLMVN у процесі навчання (у нашому випадку — після кожного батчу) та у фінальній оцінці якості фільтрації після завершення навчання. Як було зазначено раніше, навчання проводилося за допомогою батчевого алгоритму. Під час наших експериментів кількість навчальних зразків у батчі було вибрано рівною 20 000. Таке рішення було прийнято на основі експериментів, проведених у [12].

Процес навчання на кожному батчі тривав до досягнення бажаного середнього значення PSNR на патчах, що входили до батчу, або до моменту досягнення граничної кількості ітерацій. Навчання тривало до моменту досягнення бажаного рівня PSNR на зображеннях із валідаційної множини. Під час валідації ми здійснювали фільтрацію кожного з цих зображень та обчислювали середнє значення PSNR між ідеальними та відфільтрованими зображеннями.

Розбиття зображення на патчі, фільтрація та реконструкція зображення з отриманих після обробки патчів здійснювалася за алгоритмами, наведеним у [12]. Для зручності читача алгоритм фільтрації подано нижче алг. 1.

Algorithm 1 Процес фільтрації шуму на цифровому зображенні за допомогою MLMVN

Require: I_{noisy} : Зашумлене зображення

Require: m : Довжина патча

Require: n : Висота патча

Ensure: I_{filtered} : Зображення після фільтрації

Procedure:

- 1: Нормалізувати зображення: $\hat{I}_{\text{noisy}} \leftarrow \frac{1}{255} I_{\text{noisy}}$
 - 2: Розбити $\hat{I}_{\text{noisy}}$ на патчі P : $P \leftarrow \text{split}(\hat{I}_{\text{noisy}})$
 - 3: $\tilde{P} \leftarrow \emptyset$
 - 4: **for** $p \in P$ **do**
 - 5: Перейти в частотну область: $p_{\mathcal{F}} \leftarrow \mathcal{F}(p)$
 - 6: Нормалізувати $p_{\mathcal{F}}$: $\hat{p}_{\mathcal{F}} \leftarrow \frac{1}{nm} p_{\mathcal{F}}$
 - 7: Обробити $\hat{p}_{\mathcal{F}}$ з допомогою MLMVN: $\hat{p}_{\mathcal{F}}^{\text{out}} \leftarrow \text{MLMVN}(\hat{p}_{\mathcal{F}})$
 - 8: Відновити коефіцієнт: $\hat{p}_{\mathcal{F}}^{\text{out}}[0, 0] \leftarrow \hat{p}_{\mathcal{F}}[0, 0]$
 - 9: Денормалізувати $\hat{p}_{\mathcal{F}}^{\text{out}}$: $p_{\mathcal{F}}^{\text{out}} \leftarrow (nm) \hat{p}_{\mathcal{F}}^{\text{out}}$
 - 10: Перейти у просторову область: $p^{\text{out}} \leftarrow \mathcal{F}^{-1}(p_{\mathcal{F}}^{\text{out}})$
 - 11: $\tilde{P} \leftarrow \tilde{P} \cup \{p^{\text{out}}\}$
 - 12: **end for**
 - 13: Синтезувати зображення I_{filtered} використовуючи $\tilde{P}$: $I_{\text{filtered}} \leftarrow \text{synthesize}(\tilde{P})$
 - 14: **return** I_{filtered}
-

Нижче, для порівняння, наведено результати фільтрації зашумлених зображень у відтінках сірого, спотворених мультиплікативним спекл-шумом табл. 1, табл. 2 та табл. 3 на різних рівнях, із використанням MLMVN та популярних методів фільтрації. Для фільтра BM3D було розглянуто кілька значень параметра стандартного відхилення шуму, оскільки в реальних задачах ця інформація зазвичай невідома. Для фільтрів Lee та Frost було використано вікно розміром 3×3 , при цьому коефіцієнт демпфування для фільтра Frost встановлено рівним 2. Для фільтрації спекл-шуму застосовувалися нейромережі MLMVN-S-1, MLMVN-S-2 та MLMVN-S-3. У якості активаційних функцій для нейронів вихідного шару використовувалися функції, наведені вище: (1) для MLMVN-S-1, (2) для MLMVN-S-2 та (3) для MLMVN-S-3. Приклади зображень після фільтрації за допомогою MLMVN наведено на рис. 2.

Таблиця 1.

Результати фільтрації зображень спотворених спекл-шумом 0.2σ . Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Breast1	Carotid1	Kidney1	Liver1	Thyroid1
Original PSNR	37.8908	34.9803	35.5726	41.0108	34.3516
BM3D 0.5σ	39.1399	36.2753	36.5802	40.2705	37.1153
BM3D 1.0σ	35.2463	33.7841	33.7073	35.9412	35.0923
BM3D 1.5σ	32.6594	31.829	31.701	33.6593	33.4208
Frost	31.3314	30.5562	31.665	32.8708	35.0743
Lee	32.8178	31.5633	32.3374	34.1547	35.503
MLMVN-S-1	36.7027	36.2856	36.2822	39.8335	37.5344
MLMVN-S-2	37.7461	36.5851	36.5408	40.559	37.5456
MLMVN-S-3	37.3061	36.4176	36.4244	40.2678	37.4919
	Breast2	Carotid2	Kidney2	Liver2	Thyroid2
Original PSNR	37.1545	34.1198	34.498	33.0663	36.9289
BM3D 0.5σ	38.3667	37.268	35.6017	34.6407	39.5779
BM3D 1.0σ	33.9668	35.5145	33.2245	32.3094	36.8239
BM3D 1.5σ	31.5642	33.3176	31.3852	30.5669	34.2104
Frost	31.2087	34.1096	31.4069	31.078	33.2237
Lee	32.3654	34.6637	31.9982	31.4868	34.1978
MLMVN-S-1	37.0653	37.0107	35.5345	34.7664	37.9344
MLMVN-S-2	37.9244	37.027	35.7039	34.8706	38.591
MLMVN-S-3	37.5665	36.966	35.6325	34.8062	38.323

Таблиця 2.

Результати фільтрації зображень спотворених спекл-шумом 0.3σ . Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Breast1	Carotid1	Kidney1	Liver1	Thyroid1
Original PSNR	34.4038	31.5317	32.0353	37.5692	30.8371
BM3D 0.5σ	36.2042	33.7832	34.0056	37.3029	34.5605
BM3D 1.0σ	32.6357	31.7486	31.6437	33.6858	33.1924
BM3D 1.5σ	30.8859	30.2808	30.1745	32.0221	31.9262
Frost	31.2019	30.3685	31.4338	32.8152	34.3126
Lee	32.67	31.3301	32.0954	34.0914	34.695
MLMVN-S-1	36.0411	34.7347	34.7348	38.7964	35.4562
MLMVN-S-2	36.4476	34.5783	34.6069	38.9908	34.9621
MLMVN-S-3	36.3014	34.6349	34.659	38.9424	35.15
	Breast2	Carotid2	Kidney2	Liver2	Thyroid2
Original PSNR	33.6098	30.577	30.9806	29.5962	33.4314
BM3D 0.5σ	35.3708	34.4086	33.2315	32.2234	36.7711
BM3D 1.0σ	31.571	33.0454	31.2975	30.4067	34.0443
BM3D 1.5σ	30.0656	31.4221	29.8622	29.1595	32.0451
Frost	31.0708	33.4936	31.0976	30.6715	32.929
Lee	32.207	33.9798	31.6873	31.0717	33.8525
MLMVN-S-1	36.0479	35.169	33.9883	33.0481	36.6263
MLMVN-S-2	36.2173	34.6948	33.8213	32.8745	36.5402
MLMVN-S-3	36.1719	34.8669	33.8785	32.9327	36.5933

Таблиця 3.

Результати фільтрації зображень спотворених спекл-шумом 0.4σ . Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Breast1	Carotid1	Kidney1	Liver1	Thyroid1
Original PSNR	31.9014	29.0791	29.6252	35.0468	28.3715
BM3D 0.5σ	34.2741	32.2246	32.495	35.4086	33.0611
BM3D 1.0σ	31.2484	30.5735	30.4293	32.4032	32.055
BM3D 1.5σ	29.96	29.4576	29.211	31.0584	31.0142
Frost	31.0133	30.0204	31.0708	32.6608	33.533
Lee	32.41	30.9008	31.6917	33.8938	33.8096
MLMVN-S-1	34.9747	32.8694	32.9661	37.3859	33.286
MLMVN-S-2	34.9264	32.5407	32.7335	37.2349	32.7141
MLMVN-S-3	34.9722	32.669	32.8189	37.3129	32.9332
	Breast2	Carotid2	Kidney2	Liver2	Thyroid2
Original PSNR	31.1092	28.098	28.544	27.1536	30.9558
BM3D 0.5σ	33.4224	32.5799	31.7386	30.7006	34.9141
BM3D 1.0σ	30.3826	31.5738	30.1574	29.3258	32.4533
BM3D 1.5σ	29.2901	30.3258	29.0103	28.319	30.81
Frost	30.8562	32.6695	30.7417	30.1114	32.6181
Lee	31.9637	33.0318	31.3229	30.4737	33.4527
MLMVN-S-1	34.6785	32.993	32.1987	30.965	35.0482
MLMVN-S-2	34.4645	32.4474	31.9774	30.7869	34.6272
MLMVN-S-3	34.5716	32.6546	32.0612	30.8457	34.8008

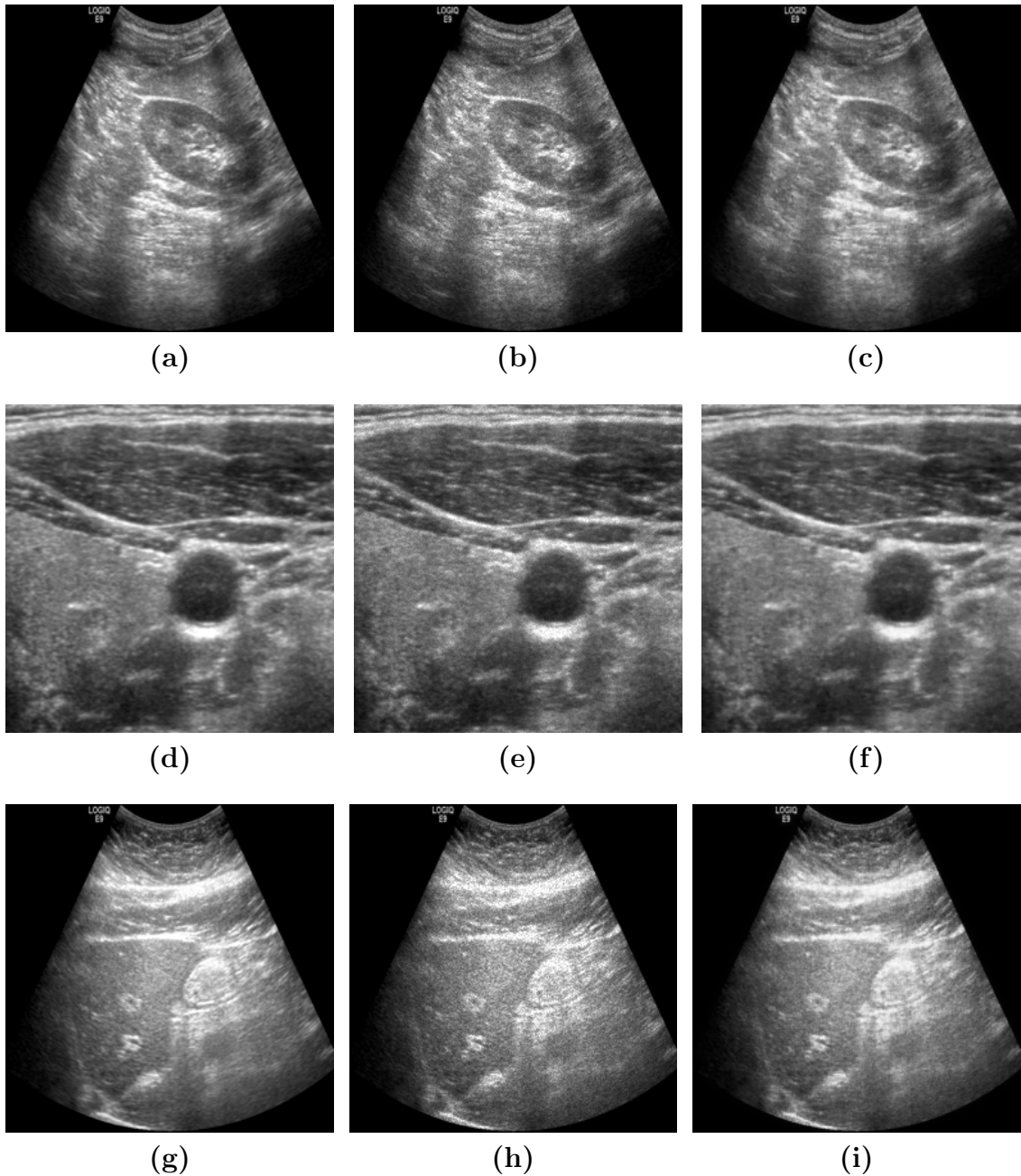


Рис. 2. (a) — ідеальне зображення, (b) — зашумлене зображення (спекл-шум 0.4σ , PSNR 29.6252dB), (c) — відфільтроване зображення (PSNR 32.9661dB), (d) — ідеальне зображення, (e) — зашумлене зображення (спекл-шум 0.4σ , PSNR 30.9558dB), (f) — відфільтроване зображення (PSNR 35.0482dB), (g) — ідеальне зображення, (h) — зашумлене зображення (спекл-шум 0.4σ , PSNR 27.1536dB), (i) — відфільтроване зображення (PSNR 30.965dB).

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій роботі розглянуто задачу фільтрації спекл-шуму на ультразвукових зображеннях із використанням MLMVN. Під час дослідження проведено експерименти з фільтрації спекл-шуму за допомогою комплекснозначної нейронної мережі з використанням різних активаційних функцій на нейронах вихідного шару. Отримані

результати свідчать про те, що MLMVN може бути ефективно застосована для розв'язання подібних задач. Завдяки інтелектуальній фільтрації запропонований підхід дозволяє зменшити рівень шуму на ультразвукових зображеннях, водночас зберігаючи дрібні деталі, що є надзвичайно важливим у таких галузях, як медицина. Це підтверджує потенціал використання нейронних мереж цього типу для розв'язання суміжних задач обробки зображень, зокрема фільтрації інших видів шуму та відновлення дефокусованих зображень.

Список використаної літератури

1. Goodman, J. W. (2000). *Statistical Optics*. Wiley Classics Library ed. New York: Wiley. pp. 347–351.
2. Lee, J.-S. (1980). Digital image enhancement and noise filtering by use of local statistics. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, PAMI-2, 165–168. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1980.4766994>
3. Frost, V. S., Stiles, J. A., Shanmugan, K. S., & Holtzman, J. C. (1982). A model for radar images and its application to adaptive digital filtering of multiplicative noise. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, PAMI-4, 157–166. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.1982.4767223>
4. Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V., & Egiazarian, K. (2007). Image denoising by sparse 3-D transform-domain collaborative filtering. *IEEE Trans. Image Process.*, 16, 2080–2095. <https://doi.org/10.1109/TIP.2007.901238>
5. Burger, H. C., Schuler, C. J., & Harmeling, S. (2012). Image denoising with multi-layer perceptrons, Part 1: Comparison with existing algorithms and with bounds.
6. Burger, H. C., Schuler, C. J., & Harmeling, S. (2012). Image denoising with multi-layer perceptrons, Part 2: Training trade-offs and analysis of their mechanisms.
7. Ilesanmi, A. E., & Ilesanmi, T. O. (2021). Methods for image denoising using convolutional neural network: A review. *Complex Intell. Syst.*, 7, 2179–2198. <https://doi.org/10.1007/s40747-021-00428-4>
8. Tian, C., Fei, L., Zheng, W., Xu, Y., Zuo, W., & Lin, C.-W. (2020). Deep learning on image denoising: An overview. *Neural Networks*, 131, 251–275. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2020.07.025>
9. Bodhale, V., Vijayalakshmi, M., & Chopra, S. (2025). An efficient image denoising using convolutional neural network. In *Proc. Int. Conf. on Communication and Computational Technologies* (Vol. 1122, pp. 15–27). Springer Nature Singapore.
10. Feng, X., Huang, Q., & Li, X. (2020). Ultrasound image de-speckling by a hybrid deep network with transferred filtering and structural prior. *Neurocomputing*, 414, 346–355. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.09.002>
11. Kokil, P., & Sudharson, S. (2020). Despeckling of clinical ultrasound images using deep residual learning. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 194, 105477. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105477>
12. Aizenberg, I., & Tovt, Y. (2025). Intelligent frequency domain image filtering based on a multilayer neural network with multi-valued neurons. *Algorithms*, 18, 461. <https://doi.org/10.3390/a18080461>
13. Hasegawa, H. (2021). Advances in ultrasonography: Image formation and quality assessment. *J. Med. Ultrasonics*, 48, 377–389. <https://doi.org/10.1007/s10396-021-01140-z>
14. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing* (4th Global Ed.). New York: Pearson Education.
15. Aizenberg, I., & Moraga, C. (2007). Multilayer feedforward neural network based on multi-valued neurons (MLMVN) and a backpropagation learning algorithm. *Soft Comput.*, 11, 169–183. <https://doi.org/10.1007/s00500-006-0075-5>
16. Aizenberg, I. (2011). *Complex-Valued Neural Networks with Multi-Valued Neurons*. Studies in Computational Intelligence Series. Berlin: Springer.
17. Grasso, F., Luchetta, A., & Manetti, S. (2018). A multi-valued neuron based complex ELM neural network. *Neural Process. Lett.*, 48, 389–401. <https://doi.org/10.1007/s11063-017-9745-9>

18. Aizenberg, I., & Vasko, A. (2024). Frequency-domain and spatial-domain MLMVN-based convolutional neural networks. *Algorithms*, 17, 361. <https://doi.org/10.3390/a17080361>
19. Bindi, M., Luchetta, A., Lozito, G. M., Carobbi, C. F. M., Grasso, F., & Piccirilli, M. C. (2023). Frequency characterization of medium voltage cables for fault prevention through multi-valued neural networks and power line communication technologies. *IEEE Trans. Power Delivery*, 38, 3227–3237. <https://doi.org/10.1109/TPWRD.2023.3270128>
20. Bindi, M., Piccirilli, M. C., Luchetta, A., Grasso, F., & Manetti, S. (2022). Testability evaluation in time-variant circuits: A new graphical method. *Electronics*, 11, 1589. <https://doi.org/10.3390/electronics11101589>
21. Fink, O., Zio, E., & Weidmann, U. (2014). Predicting component reliability and level of degradation with complex-valued neural networks. *Reliability Engineering & System Safety*, 121, 198–206. <https://doi.org/10.1016/j.res.2013.08.004>
22. Grasso, F., Manetti, S., Piccirilli, M. C., & Reatti, A. (2019). A Laplace transform approach to the simulation of DC–DC converters. *Int. J. Numerical Modelling*, 32, e2618. <https://doi.org/10.1002/jnm.2618>
23. Luchetta, A., Manetti, S., Piccirilli, M. C., Reatti, A., Corti, F., Catelani, M., Ciani, L., & Kazimierczuk, M. K. (2019). MLMVNN for parameter fault detection in PWM DC–DC converters and its applications for buck and boost DC–DC converters. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 68, 439–449. <https://doi.org/10.1109/TIM.2018.2847978>
24. Nedjah, N., Galindo, J. D. L., Mourelle, L. D. M., & Oliveira, F. D. V. R. D. (2023). Fault diagnosis in analog circuits using swarm intelligence. *Biomimetics*, 8, 388. <https://doi.org/10.3390/biomimetics8050388>
25. Tovt, Y. O., & Bryla, A. Y. (2024). Study of the meaning of weight coefficients of complex-valued neural networks in the frequency domain. *Sci. Bull. of Uzhhorod Univ. Ser. of Math. and Inf.*, 45(2), 259–275. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).259-275](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).259-275)
26. Aizenberg, E., & Aizenberg, I. (December 2014). Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins. In *Proc. IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining (CIDM)*, Orlando, FL: USA. pp. 48–55.

Tovt Yu. O., Bryla A. Yu. Speckle Noise Filtering in Ultrasound Images Using Complex-Valued Neural Networks.

Ultrasound images are widely used in many fields. Their analysis is an extremely important task; therefore, noise filtering in such images plays a crucial role. In this work, we consider the filtering of speckle noise in ultrasound images using complex-valued neural networks. Experiments on noise filtering were conducted, and the obtained results were compared with several well-known speckle noise filtering methods.

Keywords: neural networks, complex-valued neural networks, digital images, noise filtering, speckle noise.

Одержано 27.09.2025

UDC 004.93

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).289-302](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).289-302)**K. S. Khabarлак**

Dnipro University of Technology,

Associate Professor of the Department of System Analysis and Control,

PhD in Computer Science

Khabarлак.K.S@nmu.one

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4263-0871>

MULTI-MODAL LLM-ASSISTED HEALTHY NUTRITION AND DIET SMARTPHONE APPLICATION

Adhering to a healthy diet is one of the key factors towards improving lifespan and quality of life. However, we do not always know which meals are unhealthy. Existing food tracking applications require manual input of consumed dishes, which is time consuming and inaccurate. Neural networks have been shown to be good at estimating food ingredients and nutrition from a picture. In this work we propose a novel 2-stage approach that includes post-train adaptive neural network for image segmentation into ingredients, assisted by a large language model (LLM) that transforms ingredient information into nutritional value, gives insight into improving nutrition of the food consumed, and has chat interface, where user can clarify any questions. Both vision and language models are inferred fully on the user's device. Thus, no server connection is required, and the user data remains private. We develop several prompts for nutritional value extraction, and analyze Qwen 2.5 0.5, 1.5, 3 billion parameter LLMs. To score nutritional value estimates we propose LLM-judge method. The final prompt improves nutritional value estimation score from 2.66 to 3.68, when using Qwen 2.5 3 billion model. The proposed application is more user friendly and provides nutrition tracking with less effort, when compared to existing applications, enabling faster food tracking with detailed information on improving nutrition.

Keywords: healthy nutrition, nutritional value, large language model, image segmentation, mobile computing, edge computing, computer vision.

1. Introduction. Having an unhealthy diet results in numerous risks to human health, such as cardiovascular diseases, diabetes, and many others. Therefore, tracking consumed nutritional value is important to avoid diseases and to improve quality of life. Existing smartphone applications [1,2] propose to manually enter information about food, which requires significant effort from the user. Recent research direction is to estimate food ingredients or nutritional value using a single photo of the user's meal [3–5].

In this work, we improve existing approaches by developing smartphone application with U-Net+PTA [6] image segmentation neural network that extracts ingredient information from the user's meal image. The information is then augmented using Qwen 2.5 [7] large language model (LLM) that estimates calories, fat, carbohydrates, proteins; gives insight into current meal and how to improve its nutrition. The user can continue the dialog by asking the model more specific questions. Processing is fully performed on the user device. Thus, the application does not require any paid large language model API subscriptions.

To summarize, our main contributions are as follows:

1. We develop a smartphone application for nutritional value estimation from a photo with 2 stages: image segmentation into ingredients (via U-Net+PTA network), nutritional value estimation (via Qwen 2.5 LLM).

2. Evaluating nutritional value estimates from cooked food is a hard task. Therefore, we develop an LLM-judge technique for evaluating nutritional value extraction results without known labels.

2. Related works. Several existing applications propose a solution to the problem, such as Samsung Health [1], MyFitnessPal [2]. These applications propose to enter information about food consumed manually by 1) scanning product bar-code; 2) specifying the number of calories manually; 3) searching for food by name. Each approach has its strength and limitations.

Scanning a bar-code is the easiest for the user. However, this is only useful if cooked food is purchased. Cooking from ingredients might result in significant change in calories (depending on their proportion and type of cooking (frying, boiling, etc.)). Also, bar-code scanning does not support all regions or products. For instance, Samsung Health shows “Invalid bar code error” when scanning products in Ukraine.

Specifying the number of calories manually is the most flexible, but the question is how to compute the number of calories. Recent research suggests that even trained nutritionists have high errors in estimating cooked food calories [4].

Finally, the option to find food by name. Based on our experience this is the most practical approach. For instance, Samsung Health proposes many variations of the dish with different modifications or cooking types. Also, favorite dishes can be saved for easier search, or even custom recipes can be added for future use. Still, the food must be manually weighted, and the system lacks suggestions on improving nutrition with minor taste changes.

To resolve the problem several neural network-based approaches have been proposed. Such systems try to estimate nutritional value from a photograph.

In [8] the authors collect web images and propose a fine-grained food classification dataset with 158,846 images assigned to one of 251 classes. While the dataset is large, classification limits the ability to recognize photos of multiple dishes at once or to distinguish between cooking recipes.

The authors of [3] propose a FoodSeg103 dataset, that contains 9490 images of food. Each image has a segmentation mask with one of 154 ingredient classes. Also, FoodSeg154 dataset is proposed with extra images of Asian food. The authors propose ReLeM method for joint training of a neural network on textual description of cooking recipes (using LSTM or Transformer) and image with segmentation masks, improving over existing approaches.

In [9] the authors fine-tune 7 billion parameter multi-modal LLM on different food-related tasks, including question answering and nutritional value estimation. However, the network takes 2 days of training 4 GPUs and is too large for a smartphone.

The authors of [4] note limitations of existing approaches, such as small number of categories and inability to automatically estimate food weight. Also, the authors note that given a photograph even expert nutritionists incorrectly estimate food calories. To resolve the problem, they collect a dataset and propose a novel neural network-based approach. Food has been cooked specifically for this experiment with all ingredients known. All ingredients were weighted before cooking, and their macronutrient information is taken from USDA Food and Nutrient Database. 5066 dishes with unique sets of ingredients have been cooked. Each dish has been

captured from multiple angles with an RGB camera. Some dishes include additional depth information. The authors train Inception V2-based neural network to estimate food calorie, mass, fat, carbohydrates, and proteins. The authors show that their approach supersedes by a large margin human experts in estimating food calories. The developed method is suitable for complex nutritional value estimation.

However, for improved usability these approach lack on-device chat interface that would provide smart suggestions on how to improve the user's diet.

Therefore, in this work we propose a novel approach that enriches image-based food segmentation with an LLM-based chat interface. Thus, allowing for a more fine-gradient food information extraction and further smart suggestions. The developed application runs fully on the user's smartphone.

3. Materials and Methods. Large language models have shown to be effective in many domains, such as mathematics, programming, medicine and many others [7]. Existing LLMs either operate with a single modality (text) or can be multi-modal, understanding both text and images. For instance, Qwen 2.5 [7], ChatGPT 4 [10] are single-modal, and ChatGPT 4o [10], Gemma 3 [11] are multi-modal. While multi-modal LLMs contain general information in many domains, they are not finetuned for nutrition-related tasks, and finetuning LLM is a resource-intensive task. Also, they contain larger number of parameters, making them too slow for typical smartphone hardware; some of the models (e.g. ChatGPT 4o) can only be accessed using paid API. All of which makes them inapplicable for on-device nutritional value estimation

To solve the issue we propose a 2-stage approach where a lightweight convolutional neural network is used to extract ingredient information from food, then the information is fed into on-device Qwen2.5 3B LLM [7] for nutritional value estimation. The scheme of the proposed approach is shown in Fig. 1. In blue color user actions are shown, in yellow processing done by the vision model, in green LLM processing.

For food ingredient extraction we propose to use a lightweight U-Net+PTA image segmentation network [6], which combines U-Net [12] neural network and Post-Train Adaptive (PTA) [13] as a backbone. The key feature of the network is that after training the number of active parameters can be changed on user demand. Research [14] has shown, that using the following 3 post-train configurations offers the most flexibility: LLL (light), HHH (heavy), BBB (combines both heavy and light branches). To speed up inference on low-end devices lightweight configuration is suggested (80% of floating-point operations when compared to heavy). While heavy and both configurations improve the network quality on faster devices.

Some prediction noise is present in image segmentation into ingredients as in certain regions the model might not be confident which of the ingredients that is. To remove the noise we ignore ingredient predictions, where the model confidence is below 0.85. Then we compute the area taken by each ingredient relative to the total image area. We remove ingredient predictions if the total area of prediction is less than 4%. Such ingredients will not significantly influence nutritional value results and are typically prediction noise. Thresholding constants are found empirically. Finally, we remove background class, and normalize ingredient area predictions, so that the total sum is 100%.

Extracted information is passed to the large language model using the following

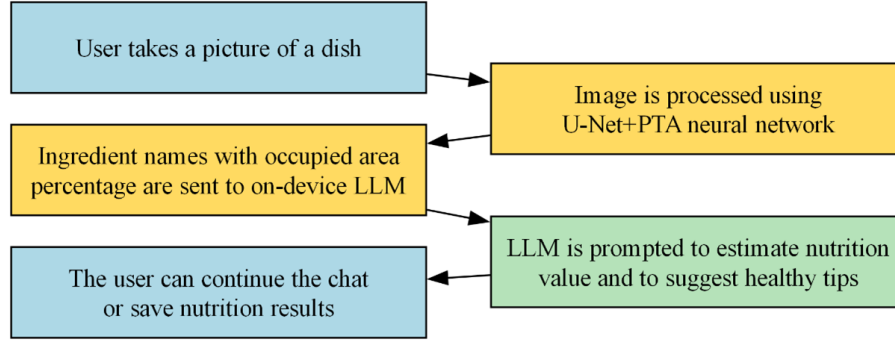


Figure 1. Scheme of the proposed nutrition suggestion app.

prompt: “I have food on a plate with *ingredients*. Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition. Be brief.” *Ingredients* are replaced with actual ingredients extracted by the vision model. Analysis of different prompts is shown in the Discussion section.

Overall, 2 separate models are used to perform the inference:

1. U-Net+PTA image segmentation model, that extracts ingredients from an image.
2. Qwen 2.5 LLM to estimate nutritional value from ingredients.

To evaluate the vision model $Dice_{score}$ is used, which is a common image segmentation metric:

$$Dice_{score} = \frac{2 \sum_{i=1}^N p_i g_i + \varepsilon}{\sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i=1}^N g_i^2 + \varepsilon}, \quad (1)$$

where p_i is the predicted probability distribution, g_i is the ground true one-hot vector, N is the number of classes to distinguish between, ε is a small constant.

Evaluating nutritional value, generated by the LLM, is more complicated as FoodSeg103 dataset doesn't propose nutritional value information. Also, as is shown in [4] people have high error in evaluating nutritional value information from images. Therefore, an automated approach should be developed.

In [15] the authors propose a method to evaluate LLM outputs by using another larger LLM as a judge. This is useful in cases when true labels are not available or might be presented in different ways. Reasoning LLMs (e.g. Qwen 3) require more compute, but in exchange are superior to non-reasoning LLMs (e.g. Qwen 2.5) in complex tasks, that require calculations, logical derivations, etc. [16].

In this work we develop a method that uses reasoning LLM as a judge evaluating nutritional value information correctness. We use Qwen3 [17] 30 billion parameter reasoning model. The authors show its superiority over Qwen 2.5 and many other models. Obviously, the model is too large for inference on a smartphone.

For the model to act as judge the prompt that is shown in Table 1 has been developed. The prompt has several parameters: **food_area** parameter is replaced by the vision model output, **model_estimates** is a JSON document with outputs

for a single Qwen 2.5 LLM model produced by different prompts. During experiments we have found that detailed judging information (e.g. “+1 if nutritional value estimate is within 10% of real estimate”) results in scoring more aligned to the end user expectations, than in case when the model is asked simply to score from 1 to 5.

Table 1.

LLM judge prompt and its parameters

Prompt	Parameters
You are a nutrition expert. You evaluate LLM nutritional value estimates. The model is given different prompts with the following information about food: food_area Replies for each prompt are the following: model_estimates. Score model replies to the prompt from 1 to 5. Always give a score of at least 1. Give +1 if nutritional value estimate (calories, fat, carbohydrates, proteins) is present and it mentions relevant food. Give +1 if nutritional value estimate is within 10% of real estimate. Give +1 if suggestions on improving nutrition are relevant to the food given. Give +1 if the prompt doesn't include unnecessary information. Reply in json format: [{"prompt": prompt_name, "score": score}]. Array should contain scores for each prompt.	food_area, model_estimates

Scores are given from 1 to 5. Example reply of the LLM judge is shown below:

```
[
  {
    "prompt": "01-basic",
    "score": 3
  },
  {
    "prompt": "02-specify-exactly-what-to-estimate",
    "score": 5
  },
  {
    "prompt": "03-grams-instead-of-percents",
    "score": 4
  },
  {
    "prompt": "04-be-brief",
    "score": 4
  }
]
```

4. Experiments. To train U-Net+PTA neural network Stochastic Gradient Descent optimizer has been used with initial learning rate of 0.1 for 90 epochs. Learning rate is multiplied by 0.1 every 30 epochs. Batch size is set to 32. Images of size 384×384 are used during training. Random resized crop and horizontal flip augmentations are used.

$Dice_{loss}$ is used as training loss:

$$Dice_{loss} = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^N p_i g_i + \varepsilon}{\sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i=1}^N g_i^2 + \varepsilon}. \quad (2)$$

We use FoodSeg103 [3] dataset for training and evaluation of the U-Net+PTA neural network. The dataset contains 2 subsets: training (4983 images) and test (2135 images). We randomly split the original training set into actual train and validation in proportion 80/20. The final FoodSeg103 dataset split is shown in Table 2. To prevent overfitting the best model is selected on the validation set. Results are reported on the test set.

Table 2.

FoodSeg103 dataset split used for U-Net+PTA model training and evaluation

Subset	Number of images
Train	3986
Validation	997
Test	2135

To process ingredient information and extract nutritional value data Qwen 2.5 open-source non-reasoning LLM is used in 0.5, 1.5, 3 billion parameter variants. Fine-tuning the model is resource intensive. LLMs have been shown to solve many tasks in zero-shot mode (without pretraining) [18] by using prompting. Therefore, we develop and analyze several prompting strategies for nutritional value extraction.

Finally, we develop smartphone application called “Food, Nutrition and Diet App”. The custom-trained U-Net+PTA neural network is inferred on-device using ONNX runtime, while Qwen 2.5 is run via MediaPipe library [19]. The application targets Android 10 or newer devices with a potential of expanding to other platforms.

5. Results. $Dice_{score}$ of the trained U-Net+PTA neural network is shown in Table 3. The largest version (BBB) has the highest score, while the smallest (LLL) offers a compromise in terms of speed to quality ratio.

Table 3.

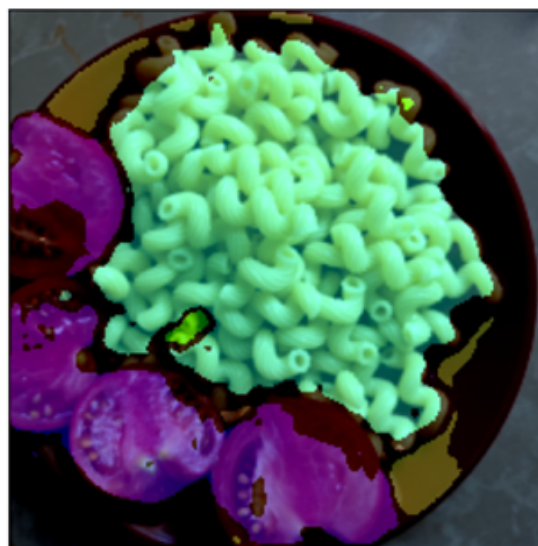
Image segmentation performance of the U-Net+PTA network

Configuration	Dice score
BBB	0.5165
HHH	0.5143
LLL	0.4987

Example of dish processing by the vision model is shown in Fig. 2. Fig. 2 (a) shows interface of the developed “Food, Nutrition and Diet App” with a plate, capturing tomatoes and pasta. Fig. 2 (b) shows segmentation, where tomatoes and pasta are highlighted in color. After thresholding with 0.85 confidence the computed area for each of the ingredients is: background: 43.86%; shrimp: 0.04%; pasta: 35.68%; rice: 0.30%; tomato: 17.03%; onion: 0.12%; pepper: 2.97%. As can be seen, most of the dish area is correctly recognized as pasta and tomatoes. Other components are filtered out by the 4% area threshold. After thresholding and normalization, we get pasta: 68%, tomato: 32%.

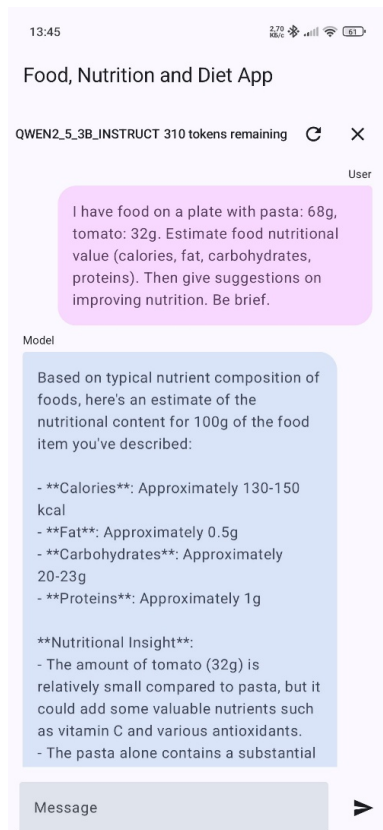


(a)

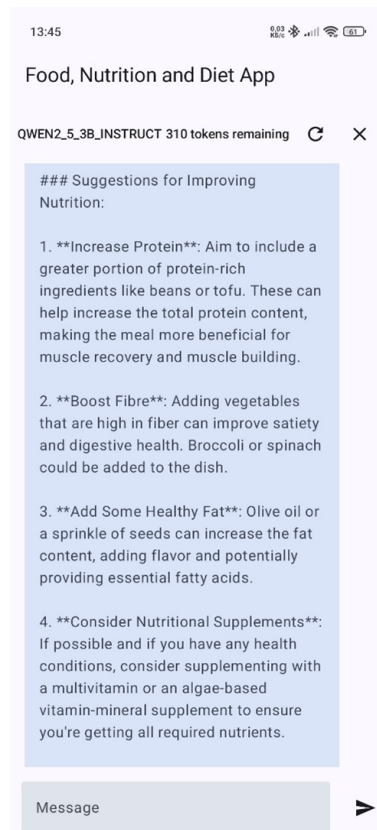


(b)

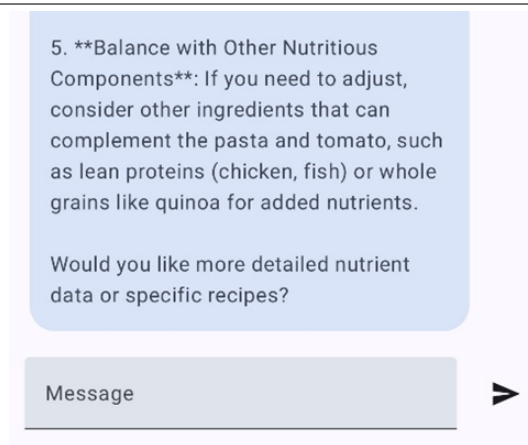
Figure 2. Sample image and its segmentation by U-Net+PTA network.



(a)



(b)



(c)

Figure 3. Generated prompt (a) message in pink, and LLM reply (a)–(c) in blue.

The extracted information is passed to the Qwen 2.5 3B LLM with a prompt “I have food on a plate with pasta: 68g, tomato: 32g. Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition. Be brief.”. We have found out that replacing percents with grams results in better LLM reply (the prompt analysis is given in the Discussion section). The generated prompt and full LLM reply are shown in Fig. 3. The prompt is in pink, the reply is in blue. As is demonstrated, the model gives an insight into nutritional value of the current meal, followed by suggestions on improving nutrition. The user can continue the discussion using the chat interface at the bottom of the screen.

By analyzing several dishes, we have found that the model is quite useful for quick extraction of information about nutritional value and giving suggestions to improve it. The process is much quicker and more informative than trying to scan barcodes or finding each of the food components manually.

Prompts given to the LLM have significant influence on the quality of the generated output. Thus, in this work we develop several prompts, which are shown in Table 4. Parameter is shown in bold, changes between prompts are underlined. The goal is to get model output that contains correct and specific information about food nutritional value. Also, the answer should not contain unnecessary information.

We use Qwen3:30b thinking model as a judge as described in the Materials and Methods section. We evaluate each of the prompts for Qwen2.5 0.5, 1.5, and 3 billion parameter models, that can be run on smartphones. Ingredients is a parameter, filled with information about ingredients either in percents (prompts 1 and 2) or in grams (prompts 3, 4).

Evaluation results are shown in Table 5 and Fig. 4. Qwen2.5:3b with prompt 1 has average score of 2.66, by using prompt 4 the score significantly improves to 3.68. Similarly, smaller models are also improved from prompt 1 to 4. Qwen2.5:3b has the best results for each prompt. We analyze scores given to the models and prompts on a representative example in the Discussion section.

6. Discussion. In this section we analyze LLM-based nutritional value extraction in the developed application. First, we show how the final prompt has been built. We have analyzed model generations for several ingredient inputs and show a representative sample in Table 6, where the prompt is shown along with

Table 4.

Prompts developed for nutritional value extraction

ID	Name	Sample Prompt
1	Basic	I have food on a plate with <i>ingredients</i> (%). Estimate food nutritional value. Then give suggestions on improving nutrition.
2	Specify exactly what to estimate	I have food on a plate with <i>ingredients</i> (%). Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition.
3	Grams instead of percents	I have food on a plate with <i>ingredients</i> (<i>grams</i>). Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition.
4	Be brief	I have food on a plate with <i>ingredients</i> (<i>grams</i>). Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition. <u>Be brief.</u>

Table 5.

LLM judge scores for each model and prompt

Model	Prompt	Score
qwen2.5:0.5b	01 basic	1.78
	02 specify exactly what to estimate	2.48
	03 grams instead of percents	2.67
	04 be brief	3.30
qwen2.5:1.5b	01 basic	2.43
	02 specify exactly what to estimate	2.96
	03 grams instead of percents	3.36
	04 be brief	3.57
qwen2.5:3b	01 basic	2.66
	02 specify exactly what to estimate	3.51
	03 grams instead of percents	3.57
	04 be brief	3.68

analysis of the model output with information about what can be improved. We do not show model outputs here as they are quite long.

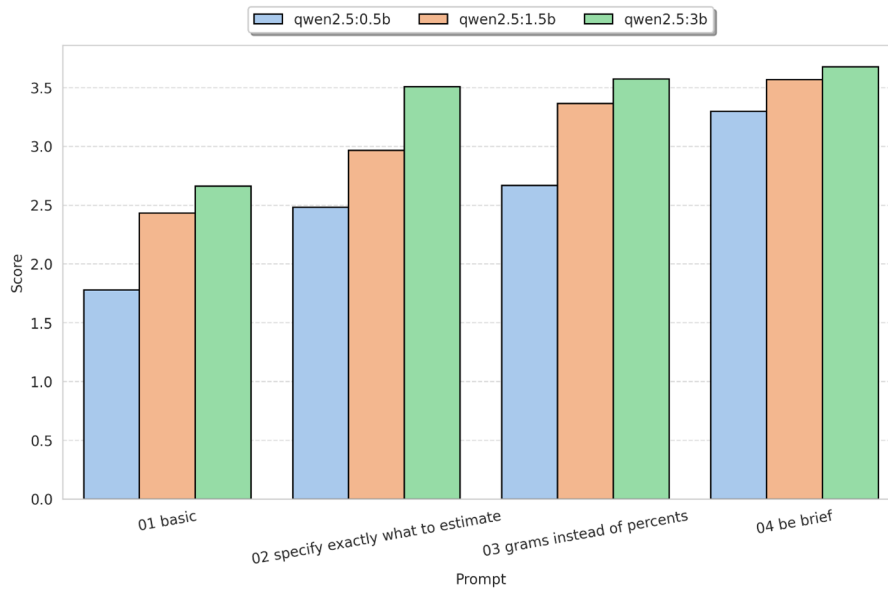


Figure 4. Nutritional value extraction scores for Qwen2.5 model variants and different prompts.

Table 6.

Analysis of the influence of different prompts on nutritional value extraction quality

ID	Sample Prompt	What can be improved?
1	I have food on a plate with pasta: 68%, tomato: 32%. Estimate food nutritional value. Then give suggestions on improving nutrition.	Food nutritional value is quite vague and changes significantly from query to query. Sometimes the model generates information about vitamins and fats, sometimes about carbohydrates.
2	I have food on a plate with pasta: 68%, tomato: 32%. Estimate food nutritional value (<u>calories, fat, carbohydrates, proteins</u>). Then give suggestions on improving nutrition.	By specifying list of nutritional value types (<u>underlined</u>), the model is much more consistent and specifies approximate number of the specified nutrition items. However, the model mixes food percentages and weights, which should be avoided.
3	I have food on a plate with pasta: <u>68g</u> , tomato: <u>32g</u> . Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition.	By using grams instead of percents, the model does not mix percents and grams. While the percentage of area taken does not directly equal to grams, this is a sufficiently fair assumption to get nutritional value estimate per 100g of food. The model output is quite long still.
4	I have food on a plate with pasta: 68g, tomato: 32g. Estimate food nutritional value (calories, fat, carbohydrates, proteins). Then give suggestions on improving nutrition. <u>Be brief</u> .	By adding “Be brief” the model’s output is shortened, without losing much information.

Qwen2.5 model is available in multiple sizes: 0.5B, 1.5B, 3B, 7B, 14B, 32B, 72B, where B stands for billions of parameters. While models with 7B and above are

targeted for desktop computers and servers. The 0.5B, 1.5B, 3B can be considered mobile-friendly. For instance, the example prompt that we use takes 32 seconds for the LLM to generate full reply on Snapdragon 8 Gen 3 processor. While it might seem a long wait, in the developed application the reply generation is interactive, so text generation is faster than the average user's reading speed.

Analysis of replies of 0.5B, 1.5B, and 3B models is shown in Table 7. The reply of Qwen2.5 3B can be seen in Fig. 3. As can be seen, 0.5B model reply is very short. Also, the model mixes units when generating nutritional value. For instance, calories have no unit, while others are in percents. Nutritional value suggestions are very generic and are only slightly related to the ingredients detected by the vision model. The reply of 1.5B model is much more structured, with suggestions being more reasonable.

Table 7.

LLM processing of the same prompt depending on the number of parameters

LLM	Generated output
qwen2.5:0.5b	Calories: 410, Fat: 7%, Carbohydrates: 55%, Proteins: 3% Tips: Try adding more vegetables and fruits to increase protein intake. Tips: Choose whole grains and legumes for better fiber content and a balanced diet. Remember to consume less saturated fats.
qwen2.5:1.5b	Food Composition: - Pasta: 68 grams - Tomato: 32 grams Nutrition Analysis: Calories: About 910 kcal (depending on the type of pasta) Fat: Approximately 14g Carbohydrates: Around 75g Proteins: Roughly 8g Improvement Suggestions: 1. **Increase Vegetables and Fiber** : Include more vegetables like spinach, broccoli, or carrots to increase fiber intake which can lead to better digestion and satiety. 2. **Boost Protein Source** : Incorporate lean proteins such as chicken thighs, turkey, or fish for additional muscle building benefits and energy levels. 3. **Add Healthy Fats** : Consider adding a small amount of olive oil, avocado, or nuts (like almonds) which can contribute healthy fats to your diet while lowering saturated fat content. 4. **Reduce Saturated Fat Sources** : Opt for cooking methods like boiling, steaming, baking, grilling, and broiling rather than frying with butter or margarine to minimize the risk of unhealthy cholesterol production. Remember, nutrition is a complex mix of various foods tailored to individual preferences and dietary restrictions. Adjusting these suggestions can help balance your diet towards better overall health benefits.

Interestingly, all 3 models have generated significantly different nutritional value numbers for the given food. So, which of the models is the closest to the actual results?

In Table 8 we compare extracted nutritional value with the one computed manually based on Internet sources. The final line of the table shows overall information for the meal of 68 grams of pasta and 32 grams of tomato. Apparently, the 0.5B model result is far from the truth, with even the units being incorrectly specified. In contrast, while the 1.5B model has proper units for nutritional value, it has significantly overestimated most components in the meal. 3B model is the closest to the actual computation and can be used for food nutritional value estimation.

Table 8.

Comparison of nutritional value extraction by different LLMs vs ground truth

Data Source	Calories	Fat	Carbohydrates	Proteins
qwen2.5:0.5b	410	7%	55%	3%
qwen2.5:1.5b	About 910 kcal (depending on the type of pasta)	Approximately 14g	Around 75g	Roughly 8g
qwen2.5:3b	Approximately 130-150 kcal	Approximately 0.5g	Approximately 20-23g	Approximately 1g
Actual data for 100g of pasta	131 kcal	1.5 g	25g	5g
Actual data for 100g of tomatoes	18 kcal	0.2 g	3.9g	0.9g
Computed value for 100g of dish taken on the photo	94.84 kcal	1.08 g	18.25 g	3.69 g

7. Conclusions and prospects for further research. In this work we have developed Food, Nutrition and Diet Application, that combines U-Net+PTA image segmentation model with Qwen 2.5 3B large language model. The vision model efficiently extracts ingredients from the user-provided photograph of food, while LLM is prompted to write down nutritional value and give suggestions. We develop several prompts for nutritional value extraction, and analyze Qwen 2.5 0.5, 1.5, 3 billion models. To score nutritional value estimates we propose LLM-judge method, based on Qwen 3 30 billion parameter reasoning model. The final prompt improves nutritional value estimation score from 2.66 to 3.68, using Qwen 2.5 3 billion model. The proposed application is more user friendly and provides nutrition tracking with less effort, when compared to existing applications, that require barcode scanning or manual input of the dish by name.

The prospect for further research is to include estimation of actual meal weight using neural networks. Thus, the user would get information about nutrition in their portion, and not general information per 100g of food.

Acknowledgements. The work is supported by the state budget scientific research project of Dnipro University of Technology "Development of new adaptive information technologies for recognizing objects in the surrounding environment" (state registration number 0123U100012).

References

1. Samsung Health | Fitness & Health Tracking App. (2025). Retrieved from <https://www.samsung.com/us/apps/samsung-health>
2. Calorie Tracker & BMR Calculator to Reach Your Goal | MyFitnessPal. (2025). Retrieved from <https://www.myfitnesspal.com/en>
3. Wu, X., Fu, X., Liu, Y., Lim, E.-P., Hoi, S. C. H., & Sun, Q. (October 20–24, 2021). A large-scale benchmark for food image segmentation. *MM '21: ACM Multimedia Conference*. Virtual Event: China, 506–515. <https://doi.org/10.1145/3474085.3475201>
4. Thames, Q., Karpur, A., Norris, W., Xia, F., Panait, L., Weyand, T., & Sim, J. (June 19–25, 2021). Nutrition5k: Towards automatic nutritional understanding of generic food. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2021*. Virtual, 8903–8911. <https://doi.org/10.1109/CVPR46437.2021.00879>
5. Salvador, A., Drozdal, M., Giró-i-Nieto, X., & Romero, A. (June 16–20, 2019). Inverse cooking: Recipe generation from food images. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR 2019*. Long Beach, CA: USA, 10453–10462. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.01070>
6. Khabarлак, K. (2022). Post-train adaptive U-Net for image segmentation. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 73–78. <https://doi.org/10.32782/IT/2022-2-8>
7. Yang, A., Yang, B., Zhang, B., Hui, B., Zheng, B., Yu, B., Li, C., Liu, D., Huang, F., Wei, H., Lin, H., Yang, J., Tu, J., Zhang, J., Yang, J., Yang, J., Zhou, J., Lin, J., Dang, K., ..., & Qiu, Z. (2024). Qwen2.5 technical report. *CoRR*, *abs/2412.15115*. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2412.15115>
8. Kaur, P., Sikka, K., Wang, W., Belongie, S. J., & Divakaran, A. (2019). FoodX-251: A dataset for fine-grained food classification. *CoRR*, *abs/1907.06167*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1907.06167>
9. Yin, Y., Qi, H., Zhu, B., Chen, J., Jiang, Y.-G., & Ngo, C.-W. (2023). FoodLMM: A versatile food assistant using large multi-modal model. *CoRR*, *abs/2312.14991*. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2312.14991>
10. Introducing ChatGPT | OpenAI. (2025). Retrieved from <https://openai.com/index/chatgpt>
11. Kamath, A., Ferret, J., Pathak, S., Vieillard, N., Merhej, R., Perrin, S., Matejovicova, T., Ramé, A., Rivière, M., Rouillard, L., Mesnard, T., Cideron, G., Grill, J.-B., Ramos, S., Yvinec, E., Casbon, M., Pot, E., Penchev, I., Liu, G., ..., & Nardini, I. (2025). Gemma 3 technical report. *CoRR*, *abs/2503.19786*. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2503.19786>
12. Ronneberger, O., Fischer, P., & Brox, T. (October 5–9, 2015). U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2015 – 18th International Conference Munich, Proceedings, Part III*. Germany, 9351, 234–241. https://doi.org/10.1007/978-3-319-24574-4%255C_28
13. Khabarлак, K. (March 23–25, 2022). Post-train adaptive MobileNet for fast anti-spoofing. *Proceedings of the 3rd International Workshop on Intelligent Information Technologies & Systems of Information Security*. Khmelnytskyi: Ukraine, 3156, 44–53. Retrieved from <https://ceur-ws.org/Vol-3156/keynote5.pdf>
14. Khabarлак, K. (September 17–19, 2025). Improved post-trained adaptive network with texture bias robustness. *2025 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*. Sibirnik: Croatia.
15. Khabarлак, K., Koriashkina, L., Laktionov, I., & Diachenko, G. (2025). Zero-Shot Plant Disease Recognition Using Open Large Vision-Language Models. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 3.
16. Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Ichter, B., Xia, F., Chi, E. H., Le, Q. V., & Zhou, D. (November 28 – December 9, 2022). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems 35: Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2022, NeurIPS 2022*. New Orleans, LA: USA. Retrieved from https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2022/hash/9d5609613524ecf4f15af0f7b31abca4-Abstract-Conference.html

17. Yang, A., Li, A., Yang, B., Zhang, B., Hui, B., Zheng, B., Yu, B., Gao, C., Huang, C., Lv, C., Zheng, C., Liu, D., Zhou, F., Huang, F., Hu, F., Ge, H., Wei, H., Lin, H., Tang, J., ..., & Qiu, Z. (2025). Qwen3 technical report. *CoRR*, *abs/2505.09388*. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2505.09388>
18. Brown, T. B., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J., Dhariwal, P., Nee-lakantan, A., Shyam, P., Sastry, G., Askell, A., Agarwal, S., Herbert-Voss, A., Krueger, G., Henighan, T., Child, R., Ramesh, A., Ziegler, D. M., Wu, J., Winter, C., ..., & Amodei, D. (December 6–12, 2020). Language models are few-shot learners. *Advances in Neural Information Processing Systems 33: Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2020*. NeurIPS 2020, Virtual. Retrieved from <https://proceedings.neurips.cc/paper/2020/hash/1457c0d6bfc4967418bfb8ac142f64a-Abstract.html>
19. Lugaresi, C., Tang, J., Nash, H., McClanahan, C., Uboweja, E., Hays, M., Zhang, F., Chang, C.-L., Yong, M. G., Lee, J., Chang, W.-T., Hua, W., Georg, M., & Grundmann, M. (2019). MediaPipe: A framework for building perception pipelines. *CoRR*, *abs/1906.08172*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.08172>

Хабарлак К. С. Мульти模альний додаток здорового харчування та дієти на основі великої мовної моделі.

Дотримання здорового харчування є одним з ключових факторів, що впливають на тривалість і якість життя. Однак ми не завжди знаємо, які страви є шкідливими. Існуючі додатки для відстеження харчування вимагають ручного введення спожитих страв, що є трудомістким і неточним. Нейронні мережі добре справляються з оцінкою інгредієнтів і поживної цінності їжі на основі фотографій. У цій роботі ми пропонуємо новий двоетапний підхід, який поєднує адаптивну після навчання нейронну мережу для сегментації інгредієнтів на зображенні, доповнену великою мовною моделлю (LLM), яка перетворює інформацію про інгредієнти в дані про поживну цінність, дає відомості про поліпшення харчової цінності та має чат-інтерфейс, де користувач може уточнити будь-які питання. Як візуальні, так і мовні моделі повністю працюють на пристрої користувача. Таким чином, підключення до сервера не потрібне, а дані користувача залишаються конфіденційними. В роботі розроблено кілька підказок для моделі вилучення харчової цінності та проаналізовано Qwen 2.5 LLM з 0.5, 1.5, 3 мільярдами параметрів. Для оцінки харчової цінності ми пропонуємо метод LLM-судді. Розроблена LLM-підказка покращує оцінку харчової цінності з 2.66 до 3.68 при використанні моделі Qwen 2.5 на 3 мільярди параметрів. Запропонований додаток є більш зручним для користувача і забезпечує відстеження поживної цінності з меншими зусиллями в порівнянні з існуючими додатками, забезпечуючи швидше відстеження їжі з детальною інформацією про поліпшення харчової цінності.

Ключові слова: здорове харчування, харчова цінність, велика мовна модель, сегментація зображень, мобільні обчислення, крайові обчислення, комп'ютерний зір.

Received 30.07.2025

УДК 519.854

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).303-311](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).303-311)**С. В. Чупов¹, А. В. Федорішко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
serhii.chupov@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-3924>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
anton.fedorishko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8921-0882>

ГІБРИДНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Квадратична задача про призначення (QAP) є однією з найбільш вивчених комбінаторних задач оптимізації з різними практичними застосуваннями. У цій статті ми представляємо наближений гібридний алгоритм (НВМА) для розв'язання QAP. НВМА досліджує простір пошуку шляхом використання відомих алгоритмів 2-ОРТ, BLS та ВМА на окремих етапах розв'язання задачі. Експериментальні оцінки на множині еталонних задач з QAPLIB показують, що запропонований підхід здатний досягти найвідоміших на даний момент результатів для всіх екземплярів, крім окремих задач типу *taia*, із середнім часом обчислення менше 1 години. Також надаються порівняння, щоб показати конкурентоспроможність запропонованого підходу відносно алгоритмів BLS та ВМА для QAP.

Ключові слова: Квадратична задача про призначення, гібридний алгоритм наближеного пошуку, локальний алгоритм наближеного пошуку, випадкове збурення компонент розв'язку, ефективність алгоритмів.

1. Вступ. Відомо, що багато задач дискретної оптимізації, зокрема задача QAP, є NP-складними. Основною проблемою при їх розв'язанні є експоненціальний ріст обчислювальних витрат при збільшенні розмірності задачі. Це обмежує можливості розв'язання таких задач у реальному масштабі часу. Крім того, обчислювальна складність задачі QAP викликана значним об'ємом обчислень (порядку $O(n^2)$), необхідних для отримання значення цільової функції та дослідження околу поточного розв'язку. Нагадаємо, що в алгоритмах для задачі QAP окіл $N(\pi)$ розв'язку π складається з усіх перестановок, які отримані шляхом обміну позиціями між усіма парами об'єктів. Таким чином, окіл містить $C_n^2 + 1$ перестановку, а обчислення значень цільової функції для усіх перестановок з $N(\pi)$ потребує об'єму обчислень порядку $O(n^4)$. Якщо $n \geq 100$, то виконання хоча б n^2 ітерацій локального пошуку вже стає важкою обчислювальною задачею.

Практична важливість та обчислювальна складність задачі QAP підтверджується хронологією її дослідження. Сформульована вона була Koopmans та Beckmann [9] у 1957 р. У 1976 р. Sahni та Gonzalez довели [13], що ця задача належить до класу NP-складних задач. Burkard [4] у 1984 р. відзначив, що не можна побудувати точних методів для ефективного розв'язання QAP розмірністю, більшою за 20. І тільки з кінця 80-х років минулого сторіччя розпочався

бурхливий розвиток наближених методів відшукування якісних розв'язків квадратичної задачі про призначення.

Сьогодні більшість ефективних наближених алгоритмів для QAP базується на використанні різноманітних схем методу табу пошуку (**TS**), запропонованого F. Glover [7, 8]. Варто згадати такі версії методу, як надійний табу пошук [15] (**RoTS**), реактивний табу пошук [1] (**ReTS**). В останні роки найбільш якісні результати отримано такими наближеними алгоритмами як Breakout Local Search, **BLS** [2], Memetic Algorithm for QAP, **BMA** [3] Improved Hybrid Genetic Algorithm, **IHGA** [11], **ITS for QAP** [12] та багатьма іншими.

Як правило схеми сучасних наближених методів розв'язання задач оптимізації включають дві фази: інтенсифікація пошуку та диверсифікація пошуку. На першій фазі здійснюється пошук локального екстремуму задачі, а на другій — робиться спроба вийти з його околу та перейти у іншу, ще не досліджену, область множини допустимих розв'язків задачі. Розглянемо більш детально деякі з ефективних алгоритмів розв'язання QAP.

Ітеративний локальний пошук на основі популяції (**PILS**) [14] — це один з ефективних алгоритмів. Базовий алгоритм ітеративного локального пошуку (**ILS**) починається з випадкового розв'язку та застосовує процедуру локального пошуку першого покращення на основі 2-opt. Щоб пришвидшити процес пошуку, алгоритм використовує стратегію «не дивись біт», запроповану раніше для прискорення алгоритмів локального пошуку для TSP. Після досягнення локального оптимуму **ILS** застосовує збурення, яке полягає в обміні k випадково вибраними елементами U запропонованому **PILS**, популяція складається з μ рішень, і на кожній ітерації генеруються нові рішення. Потім використовується стратегія вибору, що базується як на якості, так і на відстані між рішеннями, для формування нової популяції μ рішень.

Ітеративний заборонений пошук (**ITS**) [12] дотримується загальної схеми метаевристики ітерованого локального пошуку. Він використовує традиційний заборонений пошук для досягнення локальних оптимумів та запускає фазу збурень (реконструкції) щоб уникнути досягнутого локального оптимуму. «Зруйнований» розв'язок стає новою відправною точкою для базової процедури **TS**. **ITS** використовує механізм збурень, який адаптивно змінює кількість випадкових рухів збурень в деякому інтервалі. **ITS** отримує чудові результати на неструктурованих екземплярах та реальних екземплярах.

У [18, 19] представлено ефективний алгоритм для розв'язання QAP, названий **RITSR** (повторюваний ітерований алгоритм табу). Фаза інтенсифікації, яка названа дослідницьким пошуком реалізує схему ітерованого локального табу пошуку (**ITSL**). Цей пошук призначений для виявлення кращих розв'язків, що містяться на незначній відстані від межі поточного околу локального мінімуму. Якщо отримано кращий розв'язок, він запам'ятовується та починається детальний пошук нового, кращого за знайдений, розв'язку в околі знайденої перестановки. Після цього цикл повторень у режимі дослідницького пошуку розпочинається заново. Друга фаза пошуку — фаза диверсифікації — виконується кожен раз перед початком нового дослідницького пошуку у циклі повторень. У цій фазі збурюється поточний локальний мінімум так, щоб наступний дослідницький пошук відбувався на певній відстані від околу поточного розв'язку.

У даній статті представлено новий гібридний алгоритм розв'язання назва-

ний **HBMA**. У своїй роботі він використовує комбінацію алгоритмів **2-ОПТ** [17], **BLS**, **BMA**. Наведена формальна схема алгоритму та результати числових експериментів. У висновках коротко оцінюється ефективність запропонованого алгоритму. Пропонуються подальші напрямки досліджень.

2. Постановка задачі. Змістовна постановка квадратичної задачі про призначення (QAP) наступна. Дано n об'єктів, які потрібно розташувати у n різних локаціях (місць призначень). Відомі величини потоків ресурсів a_{ij} між об'єктами i та j , $i, j = 1, \dots, n$, і відстані b_{rs} між локаціями (пунктами) r та s , $r, s = 1, \dots, n$. Потрібно знайти таке розподілення об'єктів по локаціях, щоб сума відстаней, помножена на відповідні потоки, була б мінімальною.

Отже, математичну постановку задачі QAP можна сформулювати наступним чином: знайти:

$$\min f(\pi)_{\pi \in \Pi^n} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi_i \pi_j},$$

де $A = [a_{ij}]$ та $B = [b_{rs}]$ — квадратні матриці порядку n , Π^n — множина усіх перестановок розмірності n і π_i задає номер локації об'єкту i .

Квадратичні задачі про призначення можливо точно розв'язати тільки для не великих розмірностей. У зв'язку з цим актуальними є розробка, дослідження нових і вдосконалення існуючих наближених алгоритмів розв'язання задачі QAP.

Алгоритм 2-ОПТ. Серед простих алгоритмів локального пошуку найвідомішим є **2-ОПТ** [17]. Алгоритм **2-ОПТ** вперше був запропонований Кроесом (1958) для **TSP**. Цей алгоритм використовує попарну транспозицію об'єктів. Якщо кількість місць розташування об'єктів позначена як n , кількість транспозицій у кожній ітерації буде $n(n-1)/2$. Спочатку алгоритм розглядає транспозицію об'єктів 1 та 2. Якщо значення цільової функції отриманого розв'язку менше, ніж значення цільової функції початкового розв'язку, то воно зберігається як кандидат для подальшого розгляду. В іншому випадку воно відкидається, і алгоритм розглядає транспозицію засобів 1 та 3. Якщо цей обмін генерує краще рішення, то воно зберігається як кандидат для подальшого розгляду; в іншому випадку, воно відкидається і так далі. Таким чином, щоразу, коли знайдено краще рішення, алгоритм відкидає попереднє найкраще рішення. Ця процедура продовжується, доки не будуть розглянуті всі попарні обміни.

Breakout Local Search (BLS). **BLS** [2] використовує оператор заміни, який полягає в обміні значеннями з двох різних позицій у π , тобто, перестановці розташування двох об'єктів (будемо називати такий оператор заміни ходом). Він використовує процедуру найкращого покращення спуску для використання всієї області обміну $N(\pi)$, яка оцінюється за час $O(n^2)$ завдяки ефективній стратегії оцінки області, запропонованій у [15].

Після того, як процедура локального спуску повертає найкращий локальний оптимум, **BLS** запускає механізм багато типової диверсифікації, який адаптивно визначає тип T рухів збурень та кількість L збурень (яку називають величиною стрибка), враховуючи деяку інформацію, пов'язану зі станом пошуку. Цей механізм поєднує три типи збурень: прямі, засновані на «нещодавності» та випадкові.

Збурення на основі табу використовує правило вибору, яке надає перевагу ходам, що мінімізують зниження вартості, за умови, що хід не був застосований протягом останніх γ ітерацій.

Збурення на основі «нещодавності» спирається лише на інформацію з історії ходів. Воно надає перевагу найменшому нещодавно виконаному ходу, незалежно від зниження вартості, спричиненого цим ходом.

Зрештою, випадкове збурення просто виконує ходи, які вибираються рівномірно випадковим чином.

Breakout Memetic Algorithm (BMA). Враховуючи початкову популяцію, яка складається з локально оптимальних рішень, меметичний підхід генерує нові рішення, застосовуючи кросовер та/або мутацію, а потім фазу локального пошуку для покращення кожного рішення-нащадка. Правильний вибір оператора кросовера залежить від структури задачі та властивостей «ландшафту» конкретної задачі. Більше того, успіх меметичного підходу обумовлений ефективністю процедури локального пошуку. Хоча головна роль кросовера полягає у виявленні недосліджених перспективних областей простору пошуку, локальний пошук в основному спрямований на пошук хороших рішень шляхом концентрації пошуку навколо цих областей.

Меметичний алгоритм для QAP (BMA) [3] використовує оператор рівномірного кросовера, процедуру локального пошуку з проривом (BLS), стратегію заміщення популяції на основі придатності та адаптивний механізм мутації. Кожний розв'язок для популяції, згенерований за допомогою рівномірного кросовера, покращується за допомогою процедури BLS. Даний меметичний підхід потім застосовує стратегію оновлення популяції, щоб можливо замінити найгірший об'єкт з популяції покращеним розв'язком. Щоб уникнути передчасної конвергенції, BMA запускає адаптивний механізм мутації для всієї популяції, якщо найкраще рішення, знайдене під час пошуку, не було покращено протягом фіксованої кількості поколінь. Це зміщує пошук у віддалені регіони щоразу, коли виявляється застій пошуку.

Гібридний алгоритм HBMA для QAP. В загальному, нехай маємо множину $Algs$ з k алгоритмів для розв'язання задачі оптимізації $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, причому кожен алгоритм використовується у формі $(\pi, f) = A_k(\pi_0, f_0)$, де π_0, f_0 — початковий розв'язок та значення цільової функції відповідно. Розіб'ємо процес розв'язання цієї задачі на окремі етапи відповідно до значень цільової функції f_0 . На першому етапі завдяки обраному певним чином алгоритмом намагаємося покращити початковий розв'язок за обраним алгоритмом. Якщо, за прийнятний час, не вдається отримати покращення, формуємо інше початкове значення та продовжуємо роботу обраного алгоритму або обираємо новий. Як тільки виконується умова завершення етапу, переходимо до другого. І так далі. Якщо на певному етапі не вдається отримати покращення, переходимо до першого етапу. Врешті решт можемо отримати придатний розв'язок задачі. Обираючи різні підмножини з множини $Algs$ та умови переходу від одного етапу до іншого можемо отримувати різні схеми гібридного алгоритму.

У даній версії гібридного алгоритму HBMA множина алгоритмів $Algs$ містить алгоритми **2-Opt** [17], **BLS** [2], **BMA** [3].

Нехай $f = f(\pi)$ — поточне значення цільової функції задачі. Значення $bound_1, bound_2$ та $bound_3$ задають межі застосування алгоритмів **2-Opt**, **BLS**

або **ВМА**. Якщо $bound_1 \leq f < +\infty$, тоді використовується алгоритм **2-Opt** для здійснення дослідницького пошуку (*investigated search*). Якщо $bound_3 < f < bound_1$, тоді використовується алгоритм **BLS** для здійснення уточнюючого пошуку (*advanced search*). Коли значення цільової функції міститься у межах $[bound_2, bound_3]$, тоді здійснюється накопичення гарних розв'язків для роботи алгоритму **ВМА**. Якщо $f \leq bound_3$, тоді використовується алгоритм **ВМА** для здійснення детального пошуку (*detailed search*). Коли досягнуто відомого рекорду задачі, або максимального часу розв'язання, алгоритм припиняє свою роботу.

Algorithm 1 General scheme of the hybrid algorithm for QAP

Require: Set of algorithms $\text{Algs} \leftarrow \{2\text{-Opt}, \text{Bls}, \text{Bma}\};$

Ensure: (π^*, f^*)

```

1  while not stopping condition do
2   $\pi \leftarrow \text{GetInitialSolution}; \pi^* \leftarrow \pi$ 
3   $f \leftarrow f(\pi); f^* \leftarrow f$ 
4  do
5  do
6  do
7       $(\pi, f) \leftarrow 2\text{-Opt}(\pi^*, f^*)$ 
8      if  $f < f^*$  then
9           $\pi^* \leftarrow \pi; f^* \leftarrow f$ 
10         if  $f^* \leq f^{bks}$  then
11             SaveBestSolution( $\pi^*, f^*$ )
12         return
13     end if
14 end if
15 while  $f > bound_1$ 
16      $(\pi, f) \leftarrow \text{Bls}(\pi^*, f^*)$ 
17     if  $f < f^*$  then
18          $\pi^* \leftarrow \pi; f^* \leftarrow f$ 
19         if  $f^* \leq f^{bks}$  then
20             SaveBestSolution( $\pi^*, f^*$ )
21         return
22     end if
23 end if
24 while  $f > bound_2$ 
25      $(\pi, f) \leftarrow \text{Bma}(\pi^*, f^*)$ 
26     if  $f < f^*$  then
27          $\pi^* \leftarrow \pi; f^* \leftarrow f$ 
28         if  $f^* \leq f^{bks}$  then
29             SaveBestSolution( $\pi^*, f^*$ )
30         return
31     end if
32 end if
33 while  $f > bound_3$ 
34 end while
35 SaveBestSolution( $\pi^*, f^*$ )

```

Лістинг 7: Формальна схема гібридного алгоритму НВМА.

3. Результати числових експериментів. Найбільш використовуваними штучними тестовими задачами, є дві серії тестів Taillard (*Taia* та *Taib*) [5]. В однорідних екземплярах (*Taia uniform distributed problems*) матриця відстаней є евклідовою матрицею відстаней між випадковими точками на колі, а матриця

потоків є випадковою матрицею з цілим числом, випадково вибраним між двома межами. Реально-подібні екземпляри (*Taib real-like problems*) створені на основі певних реальних проблем та імітують деякі їхні властивості. Матриця відстаней також є евклідовою матрицею, але де точки кластеризовані (розбиваються на групи), а значення матриці потоків розподілені експоненціально.

Були запропоновані й інші екземпляри. Серія екземплярів *Taie* та *Dre* була спеціально розроблена для складних метаевристик [6]. Крім того, створено екземпляри, які систематично змінюють два параметри тестової задачі; вони пов'язані з домінуванням та розрідженістю значень потоків [14]. Також було запропоновано окремий випадок QAP, який є поліноміально розв'язуваним [10], для тестування алгоритмів «чорної скриньки».

Числові експерименти проводилися на реально-подібних тестових задачах (*Taib*). У наступних таблицях використані такі позначення: *Dim* — розмірність задачі, *Bks* — відомий рекорд, *Solved* — кількість розв'язаних задач для яких досягнуто рекорд із загальної кількості задач, яка дорівнює 10, Δ_f — середнє відхилення цільової функції від відомого рекорду у процентах, Δ_{time} — середній час розв'язання у секундах, T_{max} — максимальний час одного експерименту у секундах. Задачі розмірності 150, 100, 80 та 60 було взято з бібліотеки тестових задач QAPLIB [5]. Задачі інших розмірностей було створено на основі структури, наведеної у [16].

У таблицях 1, 2, 3 наведені результати розв'язання тестових задач ***taiXXb***, алгоритмами **HBMA**, **BMA** та **BLS** відповідно.

Таблиця 1.

Алгоритм HBMA

Dim	Bks	Solved	Δ_f	Δ_{time}	T_{max}
150	498896643	10	0.0000%	1449.781	640
140	2161522017	10	0.0000%	644.044	4500
130	1751013618	10	0.0000%	1445.184	3600
120	1411349647	10	0.0000%	688.203	3000
110	1262728142	10	0.0000%	89.341	1800
100	1185996137	10	0.0000%	99.064	900
90	369834423	10	0.0000%	202.881	900
80	818415043	10	0.0000%	45.231	900
70	172783096	10	0.0000%	163.544	600
60	608215054	10	0.0000%	15.004	300

На рис. 1 візуально наводиться процес розв'язання тестової задачі ***tai150b***. Зеленим кольором визначається робота алгоритму 2-OPT, синім — робота алгоритму BLS, коричневим — робота алгоритму. Як видно з рисунку, знадобилося по два проходи за алгоритмами 2-OPT та BLS для досягнення рекорду. Вісь ординат містить значення Δ_f , вісь абсцис — час у секундах.

Таблиця 2.

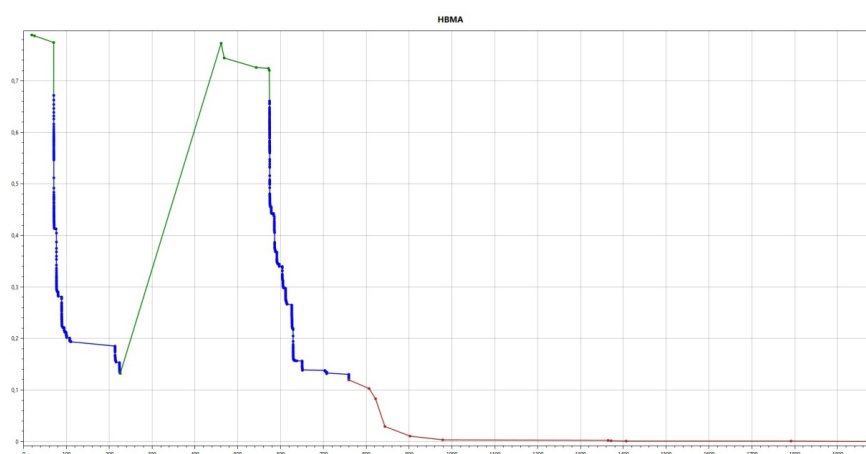
Алгоритм ВМА

Dim	Bks	Solved	Δ_f	Δ_{time}	T_{max}
150	498896643	7	0.0074%	4065.802	640
140	2161522017	10	0.0000%	1271.875	4500
130	1751013618	8	0.0224%	2619.210	3600
120	1411349647	10	0.0000%	836.137	3000
110	1262728142	10	0.0000%	244.235	1800
100	1185996137	10	0.0000%	119.038	900
90	369834423	9	0.0158%	375.815	900
80	818415043	10	0.0000%	78.368	900
70	172783096	9	0.0031%	201.342	600
60	608215054	10	0.0000%	12.181	300

Таблиця 3.

Алгоритм BLS

Dim	Bks	Solved	Δ_f	Δ_{time}	T_{max}
150	498896643	1	0.1088%	6215.109	640
140	2161522017	2	0.2400%	4214.208	4500
130	1751013618	2	0.1802%	3463.286	3600
120	1411349647	3	0.0947%	2880.278	3000
110	1262728142	4	0.0811%	1355.981	1800
100	1185996137	4	0.1116%	766.291	900
90	369834423	3	0.0669%	726.472	900
80	818415043	7	0.2287%	575.560	900
70	172783096	5	0.1796%	394.416	600
60	608215054	9	0.1077%	139.153	300

Рис. 1. Траєкторія руху за алгоритмом НВМА для задачі **tai150b**.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій статті обговорюється ефективна реалізація гібридного алгоритму **НВМА** для розв'я-

зання задачі QAP. Метою цього алгоритму є покращення продуктивності пошуку шляхом спроби мінімізувати негативний вплив явища стагнації, що є однією з головних перешкод ітераційного пошуку, особливо у випадках, коли необхідно виконати значну кількість кроків на кожному етапі пошуку. Кожен з етапів пошуку алгоритму **НВМА** базується на парадигмі інтенсифікації та диверсифікації, де інтенсифікація спрямована на пошук кращих розв'язків поблизу поточного, тоді як диверсифікація відповідає за вихід з поточного локального оптимуму та переміщення до нових невивчених областей простору пошуку. На кожному етапі пошуку використовується різні алгоритми. На етапі дослідницького пошуку використовується алгоритм **2-ОПТ**, на етапі розширеного пошуку — **BLS**, на етапі детального пошуку — **ВМА**. Кожен алгоритм задає свою траєкторію пошуку, тобто процесу переходу від одного розв'язку до іншого. Тому, якщо використовується тільки один конкретний алгоритм при розв'язанні задачі, то дуже часто такий пошук призводить до переходу у режим стагнації (застою), особливо для “важких” задач, у яких при наймі розмірність є більшою за 100. Комбінація застосування алгоритмів дозволяє більш ефективно здійснювати процедуру диверсифікації, що значно підвищує ефективність всього алгоритму. Про це яскраво свідчать результати числових експериментів. Алгоритм **НВМА** показує кращі результати як за кількістю розв'язаних задач та і за середнім часом розв'язання у порівнянні з використанням “чистих” алгоритмів **BLS** та **ВМА**.

У подальших дослідженнях планується:

1. Застосувати алгоритм **НВМА** до задачі про максимальний розріз графу.
2. Застосувати алгоритм **НВМА** до багатовимірної булевої задачі про ранець.
3. Використати комбінації інших алгоритмів, таких як **3-ОПТ**, **RITSR**, **ITS**, **ReTS**, **INGA** разом із **2-ОПТ**, **BLS** та **ВМА**.
4. Дослідити траєкторії руху на для різних алгоритмів з метою визначення більш придатних значень параметрів $bound_1$, $bound_2$ та $bound_3$ для конкретних тестових задач.
5. Розробити механізм адаптації параметрів алгоритму в залежності від ходу процесу розв'язання.

Список використаної літератури

1. Battiti, R., & Tecchiolli, G. (1994). The Reactive Tabu Search. *ORSA J. on Computing*, 6, 126–140.
2. Benlic, U., & Hao, J. K. (2013). Breakout local search for the quadratic assignment problem. *Applied Mathematics and Computation*, 219(9), 4800–4815.
3. Benlic, U., & Hao, J. K. (2015). Memetic search for the quadratic assignment problem. *Expert Systems with Applications*, 42(1), 584–595.
4. Burkard, R. E. (1984). Quadratic assignment problems. *European J. of Oper. Res.*, 15, 283–289.
5. Burkard, R. E., Karisch, S. E., & Rendl, F. (1997). Qaplib — a quadratic assignment problem library. *Journal of Global optimization*, 10, 391–403.
6. Drezner, Z., Hahn, P. M., & Taillard, E. D. (2005). Recent advances for the quadratic assignment problem with special emphasis on instances that are difficult for metaheuristic methods. *Annals of Operations research*, 139, 65–94.
7. Glover, F. (1989). Tabu Search — Part I. *ORSA J. on Computing*, 1(3), 190–206.
8. Glover, F. (1990). Tabu Search — Part II. *ORSA J. on Computing*, 2(1), 4–32.
9. Koopmans, T. C., & Beckmann, M. J. (1957). Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*, 25, 53–76.

10. Laurent, M., & Seminaroti, M. (2015). The quadratic assignment problem is easy for robinsonian matrices with toeplitz structure. *Operations Research Letters*, 43(1), 103–109.
11. Misevicius, A. (2004). An improved hybrid genetic algorithm: New results for the quadratic assignment problem. *Knowledge Based Systems*, 17(2–4), 65–73.
12. Misevicius, A. (2012). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. *OR Spectrum*, 34(3), 665–690.
13. Sahni, S., & Gonzalez, T. (1976). P-complete approximation problems. *J. of the ACM*, 23, 555–565.
14. Stutzle, T., & Fernandes, S. (2004). New benchmark instances for the qap and the experimental analysis of algorithms. In: *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. Springer, 199–209.
15. Taillard, E. (1991). Robust taboo search for the quadratic assignment problem. *Parallel Computing*, 17, 443–455.
16. Taillard, E. D. (1995). Comparison of iterative searches for the quadratic assignment problem. *Location science*, 3(2), 87–105.
17. Zhang, Q., Sun, J., Tsang, E., & Ford, J. (2006). Estimation of Distribution Algorithm with 2-opt Local Search for the Quadratic Assignment Problem. In: Lozano, J. A., Larrañaga, P., Inza, I., Bengoetxea, E. (eds.). *Towards a New Evolutionary Computation*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer. Berlin: Heidelberg, 192. https://doi.org/10.1007/3-540-32494-1_12
18. Sergienko, I. V., Shylo, V. P., Chupov, S. V., & Shylo, P. V. (2020). On solving the quadratic assignment problem. *Cybernetics and Systems Analysis*, (1), 64–69 [in Ukrainian].
19. Shylo, V. P., Chupov, S. V., Boyarchuk, D. O., & Shylo, P. V. (June 3–5, 2018). New approaches to solving the quadratic assignment problem. In: *VII International Scientific and Practical Conference “Mathematics. Information Technologies. Education.”* Abstracts of reports. Lutsk: Lesya Ukrainka Eastern European National University. Lutsk: Svityaz, 121–122 [in Ukrainian].

Chupov S. V., Fedorishko A. V. Hybrid algorithm for solving the quadratic assignment problem.

The quadratic assignment problem (QAP) is one of the most studied combinatorial optimization problems with various practical applications. In this paper, we present a hybrid approximation algorithm (HBMA) for solving QAP. HBMA explores the search space by using the well-known algorithms 2-OPT, BLS, and BMA at separate stages of solving the problem. Experimental evaluations on a set of benchmark problems from QAPLIB show that the proposed approach is able to achieve the best-known results to date for all instances, except for some *taia*-type problems, with an average computational time of less than 2 hours. Comparisons are also provided to show the competitiveness of the proposed approach with respect to the BLS and BMA algorithms for QAP.

Keywords: Quadratic assignment problem, hybrid approximate search algorithm, local approximate search algorithm, random perturbation of solution components, algorithm efficiency.

Одержано 05.09.2025

УДК 004.932+004.056.53

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).312-319](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).312-319)**С. В. Шкіря¹, Ю. В. Андрашко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
serhii.shkiria@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7129-2823>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат технічних наук, доцент
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

ПРОЄКТУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ГЛИБОКОЇ ЗГОРТКОВОЇ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ НА ПРИКЛАДІ ДОСЛІДЖЕННЯ ДАТАСЕТУ CIFAR-10

У даній статті розглянуто розробку та дослідження згорткової нейронної мережі (CNN), яка призначена для класифікації зображень на наборі даних CIFAR-10. Було створено архітектуру, що складається з трьох згорткових блоків, використовуючи пакетну нормалізацію та проріджування, щоб підвищити ефективність і уникнути перенавчання. Модель навчалася з використанням технік аугментації даних та оптимізатора Nadam. Під час експериментів було досягнуто точності класифікації 91.28% на тестовому наборі даних. Результати порівнюються з іншими відомими підходами, що демонструє високу ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: розпізнавання зображень, згорткова нейронна мережа, CIFAR-10, глибоке навчання, аугментація даних, пакетна нормалізація.

1. Вступ. Класифікація зображень є однією з ключових задач комп'ютерного зору та штучного інтелекту. Вона полягає у визначенні належності вхідного зображення до одного з наперед визначених класів. Незважаючи на очевидну простоту постановки, ця задача має значний вплив на широкий спектр прикладних систем: від автономних транспортних засобів і медичної діагностики до промислового контролю якості та моніторингу безпеки.

У багатьох інформаційних системах класифікація може виконувати допоміжну роль у ширшій задачі автентифікації цифрових об'єктів. Зокрема, якщо необхідно перевірити, чи відповідають дані, отримані від користувача, тим, що збережені у базі, класифікація дозволяє визначити, чи належить об'єкт до очікуваної категорії. Такий попередній етап зменшує невизначеність і забезпечує додатковий рівень контролю перед застосуванням складніших процедур верифікації або порівняння ознак.

Глибокі згорткові нейронні мережі (CNN) стали одним із найефективніших інструментів для розв'язання задач класифікації зображень завдяки здатності автоматично формувати ієрархічні ознаки та виявляти характерні патерни об'єктів. Подальше підвищення точності та стабільності моделей пов'язане з оптимальним проектуванням їхньої архітектури, вибором методів регуляризації та налаштуванням процесу навчання.

Метою даної роботи є проектування та оптимізація глибокої згорткової нейронної мережі для задачі класифікації зображень. Для тестування застосовано

набір CIFAR-10 як репрезентативний приклад, однак акцент робиться не на специфіці цього набору, а на принципах побудови ефективної моделі, що може бути адаптована й до інших задач класифікації та автентифікації цифрових об'єктів

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача класифікації на наборі даних CIFAR-10 активно досліджується вже багато років. Класичні архітектури, такі як AlexNet і VGG, стали основою для багатьох сучасних рішень, але з часом з'явилися й більш ефективні підходи.

AlexNet, одна з перших глибоких згорткових мереж, досягла значного успіху на конкурсі ImageNet. Коли її адаптували для CIFAR-10, спрощені версії показали точність у межах 80-87%. Це зазвичай вважається базовим результатом, з яким порівнюють більш складні моделі [1].

Архітектура VGGNet, представлена у 2014 році, стала значним кроком уперед завдяки використанню дуже малих згорткових фільтрів (3x3), що дозволило досягти високої продуктивності завдяки збільшенню глибини мережі. Вона стала основою для багатьох подальших досліджень. Наприклад, згідно з роботою [2], неоптимізована модель VGG-16 показує точність 90.73% на CIFAR-10.

Підхід Network in Network (NIN) став справжнім проривом, замінивши традиційні багатошарові перцептрони та глобальне усереднення, щоб зменшити кількість параметрів і боротися з перенавчанням. Ці мережі демонструють вражаючу точність на CIFAR-10, досягаючи 89-91% [3].

Револьюційна архітектура ResNet (Residual Networks) представила концепцію residual blocks, що дозволяє навчати надзвичайно глибокі мережі. Навіть прості версії ResNet, такі як ResNet-20 і ResNet-32, досягають точності 90-92%, що є вражаючим результатом, хоча й вимагає спеціалізованої архітектури блоків [4].

У дослідженні [5] автори вивчали, як техніки регуляризації, такі як Dropout і Batch Normalization, впливають на якість навчання. Вони виявили, що ці методи можуть взаємодіяти не найкращим чином, викликаючи зміщення дисперсії, що негативно позначається на стабільності та кінцевій точності моделі. Автори підкреслили, що правильне використання цих технік є критично важливим для запобігання перенавчання та покращення здатності моделі до узагальнення, а також надали рекомендації щодо їх оптимального поєднання.

Не менш важливою є аугментація даних – штучне збільшення тренувального набору шляхом застосування випадкових трансформацій до зображень, таких як повороти та зсуви. Як показано в [6], це дозволяє моделі краще узагальнювати та бути більш стійкою до змін у вхідних даних.

Сучасні підходи, такі як DenseNet [7], де кожен шар отримує на вхід карти ознак з усіх попередніх шарів, та EfficientNet [8], що пропонує методи масштабування глибини, ширини та роздільної здатності мережі, демонструють вражаючі результати, часто перевищуючи 95%. Проте ці архітектури є значно складнішими і вимагають більше обчислювальних ресурсів.

Аналіз цих досліджень показує, що ключовими факторами для досягнення високої точності є глибина та ширина мережі, ефективні методи регуляризації (такі як Dropout та пакетна нормалізація) та використання архітектурних інновацій, таких як залишкові з'єднання. Метод, запропонований у цій статті, базується на класичній архітектурі глибокої CNN, але з ретельно підібраними параметрами для досягнення конкурентоспроможного результату.

3. Розробка архітектури моделі глибокої згорткової нейронної мережі для задачі класифікації зображень. Для розв'язання задачі класифікації зображень було розроблено архітектуру глибокої згорткової нейронної мережі. Модель побудована таким чином, щоб поетапно формувати інформативні ознаки з вхідних зображень, переходячи від простих локальних структур (контури, градієнти, текстури) до складніших семантичних патернів. Така здатність до ієрархічного навчання представлень є ключовою перевагою згорткових мереж у порівнянні з класичними алгоритмами машинного навчання.

Архітектура моделі включає три послідовні згорткові блоки, кожен з яких складається з двох згорткових шарів із нелінійною активацією. Після кожного шару згортки виконується пакетна нормалізація, що стабілізує статистику активацій та прискорює збіжність. Для контролю складності моделі та запобігання перенавчанню використовується операція прорідження (dropout), яка випадковим чином вимикає частину нейронів під час навчання. Підвибірка (max pooling), розміщена наприкінці кожного блоку, зменшує просторову розмірність тензора ознак, скорочує кількість параметрів і концентрує інформацію на найбільш виразних компонентах.

Після проходження згорткових блоків тензор ознак перетворюється у вектор фіксованої довжини, який подається до повнозв'язного шару. Завершальний шар моделі застосовує функцію softmax, що формує ймовірнісний розподіл належності зображення до одного з класів.

Реалізація моделі здійснена з використанням бібліотеки TensorFlow та її високорівневого API Keras, що забезпечує декларативний опис архітектури та ефективну організацію процесу навчання.

У процесі експериментального добору гіперпараметрів було проведено серію навчань із різними комбінаціями глибини мережі, кількості фільтрів та коефіцієнтами регуляризації. Порівняння моделей показало, що найкращих результатів вдалося досягти при використанні багаторівневої архітектури з трьома згортковими блоками, кожен з яких містить по два шари згортки з подальшою нормалізацією, підвибіркою та прорідженням. Така конфігурація забезпечує збалансоване співвідношення між виразністю ознак та здатністю до узагальнення, що є критичним для класифікації зображень на обмежених за розміром наборах даних. Нижче наведено структурні параметри моделі, що були відібрані як оптимальні за результатами експериментів.

Архітектура нейронної мережі:

- **Вхід:** зображення розміром $32 \times 32 \times 3$.
- **Блок 1:** два послідовні шари `Conv2D(64, 3×3, ReLU, padding=same)`, після кожного згорткового шару застосовується `BatchNormalization`; далі — `MaxPooling2D(2×2)` та `Dropout(0.3)`.
- **Блок 2:** два шари `Conv2D(128, 3×3, ReLU, padding=same)` з `BatchNormalization` після кожного; потім — `MaxPooling2D(2×2)` та `Dropout(0.4)`.
- **Блок 3:** два шари `Conv2D(256, 3×3, ReLU, padding=same)` з `BatchNormalization` після кожного; далі — `MaxPooling2D(2×2)` і `Dropout(0.4)`.
- **Класифікація:** `Flatten` → `Dense(1024, ReLU)` → `BatchNormalization` → `Dropout(0.5)` → `Dense(10, softmax)`.

Загальна кількість параметрів моделі становить 5 358 666, з яких 5 354 826 є навчаючими, тобто їх значення змінюються в процесі градієнтної оптимізації під час навчання мережі. Решта параметрів належить до категорії ненавчаючих і використовується службовими компонентами моделі, зокрема механізмами пакетної нормалізації, які зберігають статистики активацій для стабільної роботи мережі під час інференсу.

4. Опис експерименту. Процес навчання моделі здійснювався у кілька етапів, що включали попередню підготовку даних, налаштування гіперпараметрів та контроль збіжності під час оптимізації. Для забезпечення стабільного навчання було обрано пакетний розмір 64, що є компромісом між точністю оцінки градієнта та ефективністю використання обчислювальних ресурсів. Мережу навчали із використанням оптимізатора *Nadam*, який поєднує адаптивне коригування швидкості навчання (*Adam*) з методом Нестерова, що прискорює збіжність. Початкова швидкість навчання становила 0.001, функцією втрат виступала *sparse_categorical_crossentropy*, а основною метрикою оцінювання – *accuracy*.

Для підвищення здатності моделі до узагальнення та зменшення ризику перенавчання застосовувалася аугментація даних. На рівні вхідного зображення вносились контрольовані випадкові трансформації: повороти до 15°, горизонтальні відображення, масштабування до 10% та зсуви по ширині/висоті до 10%. Це дозволило штучно збільшити розмаїття даних і зробити модель менш чутливою до варіативності вхідних прикладів.

Додатково застосовувалися механізми адаптивного контролю навчання. Метод *ReduceLROnPlateau* автоматично зменшував швидкість навчання при відсутності покращення на валідаційній вибірці, а *EarlyStopping* завершував навчання, коли протягом визначеної кількості епох не спостерігалось зменшення функції втрат, із відновленням найкращих ваг мережі (*best model restore*).

Набір даних CIFAR-10 використано як тестовий приклад для демонстрації працездатності розробленої архітектури. Він містить 60 000 кольорових зображень розміром 32×32 у 10 класах, з яких 50 000 використано для навчання та 10 000 – для тестування. Кожне зображення представлено трьома кольоровими каналами RGB, де інтенсивність кожного каналу є цілим числом у діапазоні від 0 до 255 (8-бітне кодування на канал). Перед подаванням зображень до моделі значення каналів було нормалізовано до інтервалу [0, 1] шляхом ділення на 255, що зменшує варіацію вхідних даних та сприяє швидшому і стабільнішому процесу навчання.

Хід навчання та результати. Навчання моделі тривало 200 епох з розміром батчу 64 з валідацією на тестовому наборі після кожної епохи. Завдяки механізму ранньої зупинки (*EarlyStopping*), навчання автоматично завершилося на 68-й епосі, оскільки показник втрат на валідаційній вибірці перестав покращуватися. Модель відновила ваги з 65-ї епохи, яка показала найкращий результат.

На графіку точності (рис. 1) видно, що точність на навчальній вибірці стабільно зростає, досягаючи ~ 93%. Точність на валідаційній вибірці також підвищується, досягаючи максимуму близько 50–60 епохи, після чого стабілізується на рівні ~ 91%.

Графік втрат (рис. 2) показує, що втрати на навчальній вибірці постійно

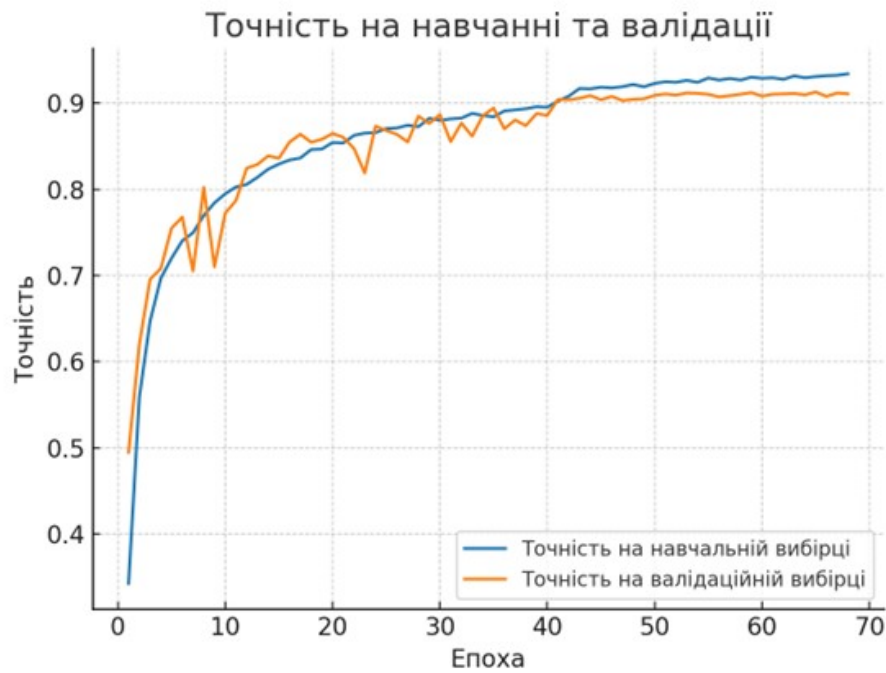


Рис. 1. Графік точності на навчальній та валідаційній вибірках.

зменшуються. Валідаційні втрати досягають мінімуму приблизно на 65-й епосі, після чого починають коливатися, що і стало причиною для ранньої зупинки.

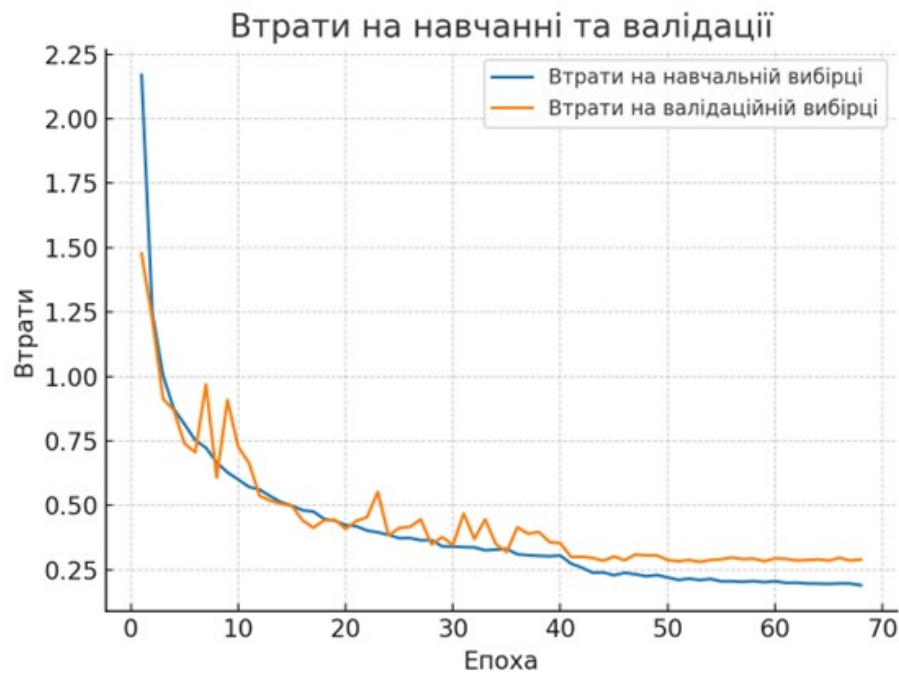


Рис. 2. Графік втрат на навчальній та валідаційній вибірках.

Після завершення навчання модель була оцінена на тестовому наборі даних, який не використовувався у процесі тренування та підбору гіперпараметрів. Це дозволяє оцінити здатність моделі до узагальнення та перевірити, наскільки добре вона класифікує раніше невидані зображення. Для оцінювання використовувалися дві основні метрики: функція втрат (Loss), яка характеризує відхилення прогнозів від істинних міток класів, та точність класифікації (Accuracy), що відображає відсоток правильно класифікованих зображень. Підсумкові результати наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

Результати оцінювання моделі на тестовому наборі CIFAR-10

Метрика	Значення
Втрати	≈ 0.2858
Точність, %	≈ 91.28

Після отримання результатів оцінки модель була порівняна з низкою відомих архітектур згорткових нейронних мереж, які традиційно використовуються для класифікації зображень на наборі даних CIFAR-10. У порівняння включено як класичні моделі (такі як AlexNet та VGG), так і вдосконалені архітектури, що застосовують більш глибокі або інноваційні блоки (NIN, ResNet). Наведені значення точності відповідають результатам, опублікованим у відповідних роботах або репрезентативних реалізаціях моделей. Порівняння демонструє, що запропонована архітектура досягає точності на рівні сучасних моделей, перевищуючи VGG-подібні підходи та показуючи результат, співставний із ResNet-20 (табл. 2). Порівняльні результати з класичними і сучасними архітектурами наведено у табл. 2.

Таблиця 2.

Порівняння точності різних моделей на CIFAR-10

Модель / Метод	Точність (%)
AlexNet-подібна архітектура	~ 85.54
VGG-подібна архітектура	~ 90.73
Network in Network (NIN)	~ 91.19
ResNet-20	~ 91.25
Розроблена модель	~ 91.28

Отримані результати підтверджують ефективність запропонованої архітектури згорткової нейронної мережі для задачі класифікації зображень на прикладі CIFAR-10. Модель демонструє точність на рівні сучасних підходів, зберігаючи при цьому відносно просту структуру без використання глибоких резидуальних блоків або спеціалізованих механізмів оптимізації. Порівняння з іншими моделями свідчить, що досягнута точність перевищує результати класичних архітектур (AlexNet, VGG) та є співставною з точністю ResNet-20 і Network-in-Network, які належать до більш складних моделей. Це вказує на те, що ретельно підібране поєднання згорткових блоків, нормалізації та регуляризації дозволяє

забезпечити високий рівень узагальнення навіть для відносно компактних мереж.

Окремим напрямом застосування розробленої моделі є використання класифікації зображень як допоміжного компонента у задачах автентифікації користувачів. У попередніх дослідженнях авторів було показано, що автентифікація може базуватися на аналізі порівняння нових даних користувача з уже збереженими еталонними представленнями [9]. У цьому контексті класифікаційна модель може виконувати функцію первинної фільтрації або виявлення належності вхідних даних до певної категорії або користувача перед подальшим аналізом спеціалізованими методами. Таким чином, згорткова нейронна мережа може бути використана як підзадача більш складної системи автентифікації, сприяючи підвищенню точності та зменшенню кількості хибних спрацювань на етапі попередньої перевірки.

5. Висновки. У роботі представлено підхід до побудови та оптимізації згорткової нейронної мережі для задачі класифікації зображень на прикладі набору даних CIFAR-10. Запропонована архітектура поєднує три послідовні згорткові блоки з пакетною нормалізацією та регуляризацією Dropout, що забезпечує баланс між глибиною мережі та здатністю моделі до узагальнення. Використання аугментації даних, механізмів **EarlyStopping** та **ReduceLROnPlateau** дозволило уникнути перенавчання та оптимізувати процес тренування.

Модель досягла точності 91.28% на тестовому наборі, що є співставним з точністю сучасних архітектур, таких як Network-in-Network та ResNet-20, та перевищує або не поступається класичним моделям рівня AlexNet та VGG. Це демонструє, що ретельне проектування архітектури та правильний підбір гіперпараметрів можуть забезпечити високі результати без необхідності застосовувати надмірно складні глибокі мережі.

Практична значимість отриманих результатів полягає у можливості інтеграції моделі в прикладні системи, де класифікація зображень використовується як допоміжний етап більш складних процесів обробки даних. Зокрема, модель може виконувати функцію попереднього відсіву нерелевантних даних або перевірки належності вхідних об'єктів до еталонних категорій у системах цифрової автентифікації, що узгоджується з підходами, описаними у роботі [9]. Таким чином, запропонована архітектура може виступати ефективною складовою ширших рішень з підтримкою інтелектуальних методів перевірки автентичності.

Подальший розвиток дослідження може передбачати розширення набору даних, використання методів перенесення навчання або адаптацію архітектури для задач з обмеженими обчислювальними ресурсами. Отримані результати підтверджують, що оптимізація структури мережі та гіперпараметрів дозволяє забезпечити високу точність класифікації при помірній складності моделі, що є важливим для її практичного застосування.

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246)

References

1. Shin, S., Dong Ho, S., & Kim, J. (2024). Implementation and comparison of CNN models on CIFAR-10 dataset. In *Proceedings of the 1st World Congress on Industrial Engineering and Operations Management* (pp. 496–503). IEOM Society International.

- <https://doi.org/10.46254/WC01.20240168>
2. Guo, K., Lin, Z., Chen, C., Xing, X., Liu, F., & Xu, X. (2024). Compact model training by low-rank projection with energy transfer. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 36(4), 6708-6722. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2024.3400928>
 3. Lin, M., Chen, Q., & Yan, S. (2013). Network in network. *arXiv*. arXiv:1312.4400
 4. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 770–778). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
 5. Li, X., Chen, S., & Yang, J. (2019). Understanding the disharmony between dropout and batch normalization by variance shift. In *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 268–277). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2019.00279>
 6. Krizhevsky, A., Sutskever, I., & Hinton, G. E. (2012). ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks. In *Advances in Neural Information Processing Systems* (pp. 1097–1105).
 7. Huang, G., Liu, Z., van der Maaten, L., & Weinberger, K. Q. (2017). Densely connected convolutional networks. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (pp. 2261–2269). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2017.243>
 8. Tan, M., & Le, Q.V. (2019). EfficientNet: Rethinking model scaling for convolutional neural networks. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.11946>
 9. Shkiria, S. V., & Korniyk, O. V. (2024). Analysis of digital object authentication methods. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 45(2), 286–291. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).286-291](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).286-291).

Shkiria S. V., Andrashko Yu. V. Design and optimization of a deep convolutional neural network in a CIFAR-10 case study.

The article addresses the problem of digital object authentication, which is of great importance for many modern technologies and studies, particularly in image recognition and processing. It describes the challenges associated with image analysis and classification in the context of increasing volumes of digital data, as well as the need to develop efficient methods capable of operating in real-time.

Modern technologies, such as deep learning and neural networks, have opened new opportunities for solving these tasks, providing high accuracy and performance. However, unresolved issues remain, including image processing under poor lighting conditions, object diversity, the need for large training datasets, and high computational complexity.

The article analyzes contemporary face recognition methods, including DeepFace, DeepID, FaceNet, VGG Face, and OpenFace. A comparative analysis of their accuracy, features, and computational resource requirements is provided. Particular attention is given to the use of deep convolutional neural networks (DCNN) in combination with specialized loss functions, which ensure high recognition accuracy.

The proposed directions can significantly expand the applicability of these technologies in applied problems.

Keywords: Digital object authentication, Image recognition, Deep learning, Neural networks, Face recognition methods.

Одержано 12.09.2025

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за алфавітом) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Segaran T. Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application. USA : O'Reilly Media. Inc, 2007. 360 p.
2. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> (дата обращения: 02.12.2024).
3. Кондрук Н. Е. Моделі багатofакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)
4. Kondruk N. E., Malyar M. M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. *II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod : Ukraine, September 28–30, 2021. P. 121–130. URL: https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf (date of access: 07.11.2024).
5. Маринець В. В., Рего В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. 196 с. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> (дата звернення: 15.12.2024).
6. Тегза А. М. Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук / Ужгородський національний ун-т. Ужгород, 2003. 170 с.
7. Система динамічного, інтерактивного, геометричного середовища та комп'ютерної алгебри — GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 18.12.2024).

Список використаної літератури

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and

- integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

Список використаної літератури

1. Segaran T. Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application. USA : O'Reilly Media. Inc, 2007. 360 p.
2. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С. Черниковские p -группы и целочисленные p -адические представления конечных групп. *Укр. мат. журн.* 1992. Т. 44, № 6. С. 742–753. URL: <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> (дата обращения: 02.12.2024).
3. Кондрук Н. Е. Моделі багатфакторного прогнозування. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 168–174. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174)
4. Kondruk N. E., Malyar M. M. Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. *II International Scientific Symposium «Intelligent Solutions» IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod : Ukraine, September 28–30, 2021. P. 121–130. URL: https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf (date of access: 07.11.2024).
5. Маринець В. В., Рого В. Л., Маринець К. В. Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навчальний посібник. Ужгород : Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. 196 с. URL: <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> (дата звернення: 15.12.2024).
6. Тегза А. М. Обґрунтування оцінок точності і надійності моделювання гауссових стаціонарних випадкових процесів: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступення канд. фіз.-мат. наук / Ужгородський національний ун-т. Ужгород, 2003. 170 с.
7. Система динамічного, інтерактивного, геометричного середовища та комп'ютерної алгебри — GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org> (дата звернення: 18.12.2024).

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 47 №2

2025

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,
В. В. Маринець, К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса,
В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua