МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (30)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №1 (30). – 155 с.

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 5 від 27.04.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 1 (30)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 1 (30). – 155 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 5 dated by April 27, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University “Uzhhorod National University”.
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty “UzhNU”, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 512

М. С. Герич (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ГУСАК ДМИТРО ВАСИЛЬОВИЧ — ДО 80-ТИ РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ

It is given a short scientific biography of Professor Dmytro V. Husak.

У статті приводиться коротка наукова біографія професора Дмитра Васильовича Гусака.

Дмитро Васильович Гусак

3 травня 2017 року відсвяткував свій 80-ий день народження провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор Гусак Дмитро Васильович.

Народився Д. В. Гусак в селі Велятино (тоді ще Чехословаччина) Хустського району Закарпатської області в багатодітній сім'ї селянина. Дитинство Д. В. Гусака припало на тяжкі воєнні та перші післявоєнні роки. Тому з ранніх років він привчений до нелегкої селянської праці, відповідальності за себе і за родину. У 1951 р. закінчив Велятинську семирічну школу й продовжив навчання в Хустській середній школі № 1 (бувша гімназія), яка мала на той час кращу навчальну базу, особливо з математики, фізики, хімії. Та й вели ці предмети досвідчені й талановиті педагоги. Учителем математики був син талановитого освітянина, фольклориста й письменника Закарпаття О. І. Маркуша - Олександр Олександрович Маркуш. Саме вони виявили неабиякі здібності юнака, кмітливість, допитливий розум, привили йому любов до цариці наук – математики, яка стала справою всього його життя.

Після закінчення десятирічки в 1954 році Д. В. Гусак поступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Ужгородського державного університету. Вже в студентські роки під керівництвом надзвичайно талановитого викладача Юрія Петровича Студнєва він одержав свої перші наукові результати. Після закінчення у 1959 році фізико-математичого факультету Ужгородського держуніверситету працював учителем математики й фізики спочатку в Драгівській середній школі, а з 1960 року – у своєму рідному селі. Того ж року вступив до аспірантури Інституту математики НАН України, до талановитого вченого ймовірнісника Володимира Семеновича Королюка, яку закінчив 1963 року. В 1964 році, під науковим керівництвом В.С. Королюка, захистив кандидатську дисертацію на тему "До асимптотики часу першого виходу однорідного процесу з незалежними приростами" і з цього часу постійно працює в Інституті математики. Спочатку на посаді молодшого, а потім старшого наукового співробітника, згодом з 1985 року – провідного наукового співробітника. Дисертацію на ступінь доктора фізико-математичних наук на тему "Метод факторизації в граничних задачах для одного класу випадкових процесів" захистив у 1980 році під науковим керівництвом В.С. Королюка (вже на той час академік АН УРСР). Звання професора присвоєно в 1991 році. Гусак Д. В. — відомий вчений в галузі теорії ймовірностей та теорії ризику. Коло його наукових інтересів формувалося під впливом його наукового керівника академіка НАН України В.С. Королюка та академіка НАН України А.В. Скорохода. У 1965 - 1969 роках за сумісництвом працював у КДУ ім. Т. Шевченка. На вечірньому відділенні механіко-математичного факультету він читає курс з математичного аналізу та на стаціонарному відділенні – спецкурс з теорії процесів з незалежними приростами. У 1981-1988 роках працює на посаді професора кафедри вищої математики в Київському Інституті інженерів цивільної авіації (КІЦА). У 1993 - 1998 роках очолює кафедру вищої математики в вищому економічному коледжі ім. В.Якуба і читає лекції з вищої математики та лінійного програмування. З 2000 року зарахований на 0,25 ставки професора кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу і веде спецкурси по розподілу граничних функціоналів для процесів з незалежними приростами на 4-5 курсах математичного факультету Ужгородського національного університету. У 1999 - 2014 роках на посаді професора кафедри теорії ймовірностей і математичної статистики в Київському національному університеті ім. Т. Шевченка читає спецкурси з теорії випадкових процесів та з граничних задач для процесів Леві із застосуванням їх в теорії ризику.

Перші наукові результати були одержані в дипломній роботі (науковий керівник Юрій Петрович Студнєв) і процитовані в його (Ю.П. Студнєва) статті "К вопросу о приближении сумм независимых случайных величин неограниченно делимыми распределениями" в журналі "Теория вероятностей и её применения"(1960, т. V, № 4). З 1961 по 1964 роки Д. В. Гусак (згідно з темою кандидатської дисертації) вивчав асимптотику розподілу екстремумів процесів з незалежними приростами. З 1965 р. займається вивченням розподілу граничних функціоналів для звичайних процесів з незалежними приростами, а з 1970 р. для процесів на скінченних ланцюгах Маркова. У своїх роботах розвинув факторизаційно-проекційний метод дослідження граничних задач для процесів з незалежними приростами і для напівмарковських процесів, а також метод матричної факторизації для процесів на ланцюгах Маркова. Деякі роботи присвячені вивченню осцилюючих випадкових блукань та процесів, процесів з одностороннім та двостороннім відбиттям, встановленню співвідношень для дограничних та граничних розподілів цих блукань та процесів. З 1998 р. займається дослідженням граничних задач для процесів ризику і застосуванням результатів вивчення розподілу граничних функціоналів для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. Лекції зі спецкурсу по процесах з незалежними приростами (н.п.) прочитані в КДУ ім. Т. Шевченка на механіко-математичному факультеті в 1965-1969 рр. доповнені результатами докторської дисертації послужили матеріалом для спецкурсів прочитаних в Ужгородському державному університеті на математичному факультеті у 80-х роках минулого століття. Ці результати частково увійшли до спільної з М.С. Братійчуком монографії [1, 1990]. В 90-х роках Д. В. Гусак продовжив читання спецкурсів в Ужгородському державному університеті, присвячених розвитку метода факторизації в граничних задачах для процесів Леві (однорідних процесів з н.п.) та узагальненню метода факторизації для процесів Леві на Ланцюгах Маркова (ЛМ). Лекції по застосуванню матричної факторизації в граничних задачах для процесів Леві на ЛМ склали основу монографії [2, 1998]. В 2000-2009 роках Д. В. Гусак, працюючи за сумісництвом в Ужгородському національному університеті на посаді професора (0,25 ст.) кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, продовжив читання спецкурсів з теорії процесів Леві. Ці спецкурси присвячені дослідженню компонент основної факторизаційної тотожності для напівнеперервних та майже напівнеперервних процесів Леві й застосуванню цих процесів у теорії ризику та в теорії систем масового обслуговування. Матеріали прочитаних лекцій з 2000 року в УжНУ частково увійшли до монографій [3, 2007], [4, 2011] та до навчальних посібників [5, 2008], [6, 2009], а також до виданих англомовних монографій [7, 2010], [8, 2014].

Першою сходинкою участі Гусака Д. В. в широкоплановий наукових зібраннях була участь у Всесоюзній зимовій школі з теорії ймовірностей та математичної статистики (Ужгород, 1964 р., голова оргкомітету школи В.С. Королюк, заступник і відповідальний організатор від Ужгородського держуніверситету — Ю.П. Студнєв). Потім Гусак Д. В. був неодноразовим учасником Вільнюських Міжнародних конференцій з теорії ймовірностей та математичної статистики (I-VIII, Литва), Радянсько-Японських симпозіумів (Хабаровськ, Ташкент, Тбілісі, Кіото, Київ), Празьких Міжнародних конференцій з теорії інформації (VI-VIII, Чехословаччина), Всесвітнього конгресу товариства Бернуллі по теорії ймовірностей та математичній статистиці (Ташкент), Міжнародної школи з теорії масового обслуговування (Закопане, Польща), Всесоюзної школи по теорії масового обслуговування (Баку, Азербайджан; Диліжан, Вірменія), Всесоюзних нарад і колоквіумів з теорії ймовірностей та математичної статистики (Ташкент, Фергана, Узбекистан), VI Балканського математичного конгресу (Варна, Болгарія), V Міжнародної літньої школи з теорії ймовірностей та математичної статистики (Варна, Болгарія), Second European congress of mathematics (Будапешт, Угорщина), Українсько-угорських конференцій (Мукачево, Ужгород), Українсько-скандинавських конференцій з теорії ймовірностей та математичної статистики (Київ; Ужгород; Умеа, Швеція), Міжнародної школи з математичних та статистичних застосувань в економіці (Вастерас, Швеція), Міжнародної конференції "Стохастичний аналіз і його застосування "(Львів, Чернівці), Міжнародної конференції "Stochastic analysis and random dynamic"(Львів), Міжнародної конференції присвяченій 90-річчю Б.В. Гнеденка (2008 р., Київ), Міжнародного літнього семінару "Стохастичні динамічні системи "(Судак, Крим), Міжнародних конференцій "Modern Stochastics: Theory and Applications"(I, II, III, Київ), Міжнародних симпозіумів "Питання оптимізації обчислень "(Одеса, Карабах, Кацивелі, Крим).

Плідну наукову працю вчений поєднує з педагогічною діяльністю, спрямованою на пошуки талановитої молоді з метою її залучення до наукової роботи. Під керівництвом професора Д. В.Гусака 6 аспірантів захистили кандидатські дисертації. Чимало сил і енергії Д. В. Гусак віддав науково-організаційній роботі: він був членом Вченої ради по захисту дисертацій в Київському Національному університеті ім. Тараса Шевченка, був опонентом та рецензентом багатьох докторських та кандидатських дисертацій, організатором ряду конференцій та семінарів.

За 55 років науково-педагогічної діяльності, список наукових робіт Д. В. Гусака нараховує 180 найменувань. З них нижче наведемо лише список наукових монографій.

1. Гусак Д. В., Братийчук Н.С. Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. - К.: Наукова думка, 1990. -264 с.

2. Гусак Д. В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. - К.: Праці ін-ту математики НАН України, т.18, 1998.- 320 с.

3. Гусак Д. В. Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику. - К.: Праці ін-ту математики НАН України, т. 65, 2007. - 459 с.

4. Гусак Д. В. Процеси з незалежними приростами в теорії ризику. - К.: Праці ін-ту математики НАН України, т. 88, 2011. - 544 с.

5. Гусак Д. В., Кулик О.М. та інші. Збірник задач з теорії випадкових процесів та їх застосувань. - К.: Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, ВПЦ "Київський університет 2008. - 287 с.

6. Гусак Д. В., Кукуш О.Г., Кулик О.М. та інші. Збірник задач з теорії випадкових процесів та їх застосувань. - К.: Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, ВПЦ "Київський університет 2009. - 398 с.

7. Gusak D., Kukush A. et al. Theory of stochastic processes. With applications to financial mathematics and risk theory. - New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2010. - 376 p.

8. Gusak D. Boundary functionals for Levy processes and their applications. - : LAP Lambert, 2014. - 412 p.

Одержано 11.03.2017

УДК 512.643.8

В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош (Інститут математики НАН України)

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗВІДНОСТІ В КАТЕГОРІЇ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМ ЛОКАЛЬНИМ КІЛЬЦЕМ

It is proved the reducibility of cyclic monomial matrices over a commutative local ring in the case when their defining sequences contain subsequences of a fixed form.

Доведена звідність циклічних мономіальних матриць над комутативним локальним кільцем у випадку, коли їх визначальні послідовності містять в собі підпослідовності фіксованого вигляду.

1. Вступ. Нехай K — комутативне кільце з одиницею. Під *мономіальною матрицею* $M = (m_{ij})$ *над* K будемо розуміти матрицю порядку n (тобто, розміру $n \times n$), в кожному рядку і в кожному стовпці якої стоїть не більше одного ненульового елемента Такій матриці можна природнім чином зіставити орінтований граф $\Gamma(M)$ з вершинами $1, \dots, n$, і стрілками $i \to j$ для всіх $m_{ij} \neq 0$. Очевидно, що $\Gamma(M)$ є неперетинним об'єднанням ланцюгів і циклів (кожний з яких має однаковий напрямок стрілок). До того ж така матриця перестановочно подібна прямій сумі мономіальних матриць, яким відповідають ланцюги і цикли графа $\Gamma(M)$. Якщо ланцюг (відповідно цикл) лише один, то мономіальну матрицю будемо називати *ланцюговою* (відповідно *циклічною*).

Мономіальні матриці над K утворюють категорію, якщо морфізмом із A в B вважати довільну матрицю X таку, що $AX = XB$. Називатимемо її *категорією мономіальних матриць над* K. Ізоморфізми цієї категорії — це, на матричній мові, матриці, що здійснюють подібність. Матрицю A над кільцем K (як об'єкт цієї категорії) називається *звідною*, якщо вона подібна матриці вигляду $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, де A_{11} і A_{22} — матриці порядку $p \geq 1$ і $q \geq 1$ відповідно. Таку матрицю A називатимемо також (p,q)-*звідною* або $(*,q)$-*звідною*, якщо нас не цікавить число. p. Очевидно, що при $n > 1$ незвідними можуть бути лише циклічні матриці. У цій статті вивчаються незвідні об'єкти вказаної категорії.

Будь-яка циклічна матриця порядку n перестановочно подібна матриці вигляду

$$A = M_t(\overline{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\overline{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Така матриця A називається *канонічно циклічною*, а послідовність $\overline{a}$ — її *визначальною послідовністю*. У випадку, коли всі ненульові елементи a_i мають вигляд t^{s_i}, де t — зафіксований елемент із K ($s_i \geq 0$), матриця A називається *канонічно* t-*циклічною*. В цьому випадку пишуть також $A = M_t(\overline{a})$. Число s_i називається *вагою* елемента t^{s_i}, а послідовність $\overline{w} = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$ — ваговою послідовністю матриці A.

Канонічно t-циклічні матриці вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, [1]– [4]. Відносно вищеприведених означень і позначень див., наприклад, [4].

2. Теореми про $(*,3)$-звідність. Нехай K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^2 = 0$.

Теорема 1. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 9$ з ваговою послідовністю $(0,1,0,1,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

Теорема 2. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 9$ з ваговою послідовністю $(0,0,0,0,0,p_1,\dots,p_s,1,1,0,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

Теорема 3. *Канонічно t-циклічна матриця порядку $n \geq 12$ з ваговою послідовністю $(0,1,1,0,1,0,1,0,p_1,\dots,p_s,1,1,1,1)$ є $(n-3,3)$ звідною.*

В умовах усіх теорем $s \geq 0$.

3. Доведення теореми 1. Спочатку введемо деякі позначення для перетворень довільної квадратної матриці над кільцем K. $P_{ij}(a)$ позначає додавання i-го рядка, помноженого на елемент $a \in K$, до j-го рядка. $Q_{ij}(a)$ позначає аналогічне перетворення для стовпців. Через $[m \xrightarrow{a} s]^+$ позначимо перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $P_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $Q_{sm}(-a)$, а через $[m \xrightarrow{a} s]^-$ — перетворення подібності, яке полягає в тому, що спочатку застосовується перетворення $Q_{ms}(a)$, а потім обернене до нього перетворення $P_{sm}(-a)$.

Завжди вважаємо, що α_i позначає елемент $t^{p_i} \in R$.

Маємо $M_t(1,t,1,t,1,\alpha_1,\dots,\alpha_s,t,t,t,t) =$

$$= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

Покажемо, що N подібна матриці $M_t(1,t,1,t,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,t,t)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \overset{-t}{\to} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \overset{-1}{\to} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \overset{-t}{\to} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою (чи, іншими словами, перестановкою) рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

4. Доведення теореми 2. Доведення проводимо по тій же схемі, що і доведення теореми 1.

Маємо $M_t(1,1,1,1,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,1,t) =$

$$= \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&t\\ 1&0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&\ldots&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&\ldots&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\alpha_1&\ldots&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&0&\ldots&\alpha_s&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\ldots&0&t&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\ldots&0&0&t&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$N = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&-t&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&-t&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\alpha_1&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\ldots&\alpha_s&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&t&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&t\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right).$$

Покажемо, що N подібна матриці $M_t(1,1,1,1,1,\alpha_1,\ldots,\alpha_s,t,t,1,t)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^-$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&-t&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\alpha_1&\ldots&0&0&0&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\ldots&\alpha_s&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&t&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&0&t\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&t&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&\ldots&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \overset{-1}{\to} n-1]^+$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \overset{-1}{\to} n]^+$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \overset{-t}{\to} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc} 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \overset{-t}{\to} 1]^+$:

$$N_5 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -t & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \overset{-t}{\to} 2]^+$:

$$N_6 = \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Матриця N_6 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, 1, 1, 1, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, 1, t)$.

5. Доведення теореми 3. Доведення проводимо по тій же схемі, що і доведення теореми 1.

Маємо $M_t(1, t, t, 1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t) =$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{pmatrix}.
$$

Розглянемо $(n-3,3)$-звідну матрицю

$$
N = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -t & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

Покажемо, що N подібна $M_t(1, t, t, 1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

На 1-му кроці застосуємо до матриці N перетворення $[n-2 \xrightarrow{t} n-3]^{-}$:

$$N_1 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 2-му кроці застосуємо до матриці N_1 перетворення $[1 \xrightarrow{-1} n-1]^{+}$:

$$N_2 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 3-му кроці застосуємо до матриці N_2 перетворення $[2 \xrightarrow{-1} n]^{+}$:

$$N_3 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 4-му кроці застосуємо до матриці N_3 перетворення $[3 \stackrel{-1}{\to} n-2]^+$:

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).$$

На 5-му кроці застосуємо до матриці N_4 перетворення $[4 \stackrel{-1}{\to} 1]^+$:

$$
N_5 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

На 6-му кроці застосуємо до матриці N_5 перетворення $[5 \xrightarrow{-1} 2]^+$:

$$
N_6 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

На 7-му кроці застосуємо до матриці N_6 перетворення $[6 \xrightarrow{-t} 3]^+$:

$$
N_7 = \left(\begin{array}{cccccccccccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0
\end{array}\right).
$$

Матриця N_7 однаковою перестановкою рядків і стовпців приводиться до матриці $M_t(1, t, t, 1, t, 1, t, 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, t, t, t, t)$.

6. Теореми про 2-спадкову звідність (формулювання і доведення). Канонічно циклічну матрицю A назвемо 2-*спадково звідною* або *спадково звідною довжини* 2, якщо у приведеному вище означенні звідної матриці діагональні блоки A_{11} і A_{22} є також канонічно циклічними.

Як і для попередніх теорем, вважаємо, що K — комутативне локальне кільце з радикалом $R \neq 0$ і t — ненульовий елемент із R такий, що $t^2 = 0$.

Під підпослідовністю послідовності завжди розуміємо зв'язну (з точністю до циклічної перестановки послідовності) підпослідовність.

Теорема 4. *Канонічно t-циклічна матриця 2-спадково звідна, якщо її вагова послідовність містить підпослідовності* $(0, 0)$ *і* $(1, 1, 1, 1)$.

Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теорем 1–3. Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$
N = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_s & 0
\end{array}\right)
$$

перетворення $[r+4 \xrightarrow{1} r+3]^-$, $[1 \xrightarrow{-t} r+5]^+$, $[n \xrightarrow{t} r+2]^-$, маємо матрицю

$$
N_3 = \left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right),
$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1, 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, t, t, t, t, \alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_s)$.

Теорема 5. *Канонічно t-циклічна матриця 2-спадково звідна, якщо її вагова послідовність містить підпослідовності* $(0, 0, 0)$ *і* $(1, 1, 0, 1, 1)$.

Доведення проводиться за тією ж схемою, що і доведення теорем 1–3. Застосувавши до звідної матриці (з канонічно циклічними діагональними блоками)

$$
N = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right)
$$

перетворення $[r+5 \xrightarrow{1} r+4]^-$, $[1 \xrightarrow{-1} r+6]^+$, $[2 \xrightarrow{-t} r+7]^+$, $[n \xrightarrow{t} r+3]^-$, маємо матрицю

$$N_4 = \left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{r+2} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_s & 0
\end{array}\right),$$

яка однаковою перестановкою рядків і стовпців може бути приведена до вигляду $M(1,1,1,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,t,t,1,t,t,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_s)$.

Список використаної літератури

1. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Reducibility and irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, no 2. – P. 171–187.
2. *Бортош М. Ю.* Про один клас звідних мономіальних матриць над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2014. – Вип. 25, №1. – С. 15–20.
3. *Бондаренко В. М., Бортош М. Ю.* Про $(*,2)$-звідні мономіальні матриці над комутативними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, №2. – С. 22–30.
4. *Bondarenko Vitaliy M., Bortos Maria Yu., Dinis Ruslana F., Tylyshchak Alexander A.* Indecomposable and irreducible t-monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, no 1. – P. 11–20.

Одержано 15.02.2017

УДК 512.53

В. М. Бондаренко, Я. В. Заціха (Інститут математики НАН України)

ПРО КОМБІНАТОРНІ ВЛАСТИВОСТІ НАПІВГРУП ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

In this paper we study combinatorial semigroups of order 4 (up to isomorphism and duality, their number is 126).

У цій роботі вивчаються комбінаторні властивості напівгруп порядку 4 (з точністю до ізоморфізму та дуальності, їх число дорівнює 126).

Групам малих порядків присвячено багато робіт і вони досить добре вивчені (див., напр., [1]). Напівгрупи малих порядків вивчені не в такій мірі і це пов'язано з тим, що число напівгруп конкретного порядку набагато більше, ніж груп (наприклад, число напівгрупп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021). Більшість задач про повний опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. Зауважимо, що під описом традиційно мається на увазі опис з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні (число різних напівгруп відповідно 1 і 4). Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. (див. роботу [2]). Вони вивчалися, зокрема, в [3] – [5].

Напівгрупи порядку 4 описав Т. Тамура в 1954 р. (див. [6]), а в 1955 р. — Г. Е. Форсайт (див. [7]); друга робота виконана за допомогою комп'ютерної програми. Вкажемо таблиці Келі всіх таких (попарно різних) напівгруп, число яких дорівнює 126; елементи кожної напівгрупи позначені числами $0, 1, 2, 3$.

1 – 5	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
6 – 10	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0
11 – 15	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 0 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 1 2 3
16 – 20	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1
21 – 25	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 1 0 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 2 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 2 3

26 – 30	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 0 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 0 0 3 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 3 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 0 3 3 3 3
31 – 35	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 0 1 2 2	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 0 1 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 0 1 3 2
36 – 40	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2 3 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 2	0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 2 2 3	0 0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 1 3
41 – 45	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 2 0 0 1 0 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 2 2 0 1 2 3
46 – 50	0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 2 0 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 2 1 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 0 0 0 3	0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 0 0 2 3
51 – 55	0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 0 1 0 3	0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 0 1 2 2 2 2 2 2 2 3	0 0 0 0 0 0 0 2 2 2 2 2 3 3 3 3	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 2 2 0 1 2 2
56 – 60	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 2 2 0 1 3 3	0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 2 3 0 1 3 2	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 0 0 0 3	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 0 3 3 3 3
61 – 65	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 2 0 0 2 2	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 2 0 0 2 3	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 2 0 0 3 3	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 3 0 0 3 2	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 2 3 3 3 3 3
66 – 70	0 0 0 0 0 1 0 0 2 2 2 2 2 2 2 3	0 0 0 0 0 1 0 0 2 2 2 2 3 3 3 3	0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 2 2 0 1 0 1	0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 2 2 0 1 0 3
71 – 75	0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 2 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 2 2 0 3 0 3	0 0 0 0 0 1 0 1 2 2 2 2 2 3 2 3	0 0 0 0 0 1 0 3 2 2 2 2 0 1 0 3	0 0 0 0 0 1 0 3 2 2 2 2 0 3 0 1
76 – 80	0 0 0 0 0 1 0 3 2 2 2 2 3 3 3 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 1	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 2	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 1 2 3
81 – 85	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 3 3 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 2 0 1 2 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 2 1 0 1 1 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 2 1 0 3 3 3	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 2 2 0 1 2 2

$86-90$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&2&3\\0&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&2&2&2\\0&3&3&3\end{matrix}$
$91-95$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&1&3\\0&3&3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&1&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&2&3\\0&3&3&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&1&3\\0&2&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$
$96-100$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&2\\0&2&1&1\\0&2&1&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&1&2&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&1&3\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\0&2&3&1\\0&3&1&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\2&2&2&2\\2&3&0&1\end{matrix}$
$101-105$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\0&1&2&3\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&0\\1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&0&0&3\\0&0&0&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&0&0&3\\0&0&1&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&0&0&3\\0&0&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$
$106-110$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&0&0&3\\0&1&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&0&1&3\\0&1&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&1&0&3\\0&0&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&1&1&3\\0&1&1&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&1&1&3\\0&1&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$
$111-115$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&1&1&3\\0&2&2&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&0&3\\0&1&2&3\\0&2&1&3\\3&3&3&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&0&2&2\\2&2&0&0\\2&2&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&0&2&2\\2&2&0&0\\2&2&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&1&2&2\\2&2&0&0\\2&2&0&0\end{matrix}$
$116-120$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&1&2&2\\2&2&0&0\\2&3&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&1&2&3\\2&2&0&0\\2&3&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\0&1&2&3\\2&2&0&0\\2&3&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\1&1&3&3\\0&0&2&2\\1&1&3&3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&2\\1&1&3&3\\2&2&0&0\\3&3&1&1\end{matrix}$
$121-125$	$\begin{matrix}0&0&2&3\\0&0&2&3\\2&2&3&0\\3&3&0&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&0&2&3\\0&1&2&3\\2&2&3&0\\3&3&0&2\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&1&3\\1&3&3&0\\1&3&3&0\\3&0&0&1\end{matrix}$	$\begin{matrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&0&1\\3&2&1&0\end{matrix}$
126	$\begin{matrix}0&1&2&3\\1&0&3&2\\2&3&1&0\\3&2&0&1\end{matrix}$				

Метою цієї статті є опис для всіх напівгруп 4-го порядку основних числових характеристик. Ми розглядаємо наступні властивості напівгруп.

C: комутативність;
NC: некомутативність;
$P(1)$: існування одиничного елемента;
$P(0)$: існування нульового елемента;
$P^{+}(1)$: існування приєднаного одиничного елемента;
$P^{+}(0)$: існування приєднаного нульового елемента;
n_{id}: число ідемпотентів;
n_{gen}: найменше число твірних;
$ns(m)$: число напівгруп порядку m.

Сформулюємо основний результат цієї статті, який описує вказані властивості для всіх напівгруп 4-го порядку.

Теорема. *Напівгрупи* 1–126 *мають наступні властивості:*

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
1	+	-	-	+	-	-	1	3	1	3	3
2	+	-	-	+	-	-	1	2	1	2	2
3	+	-	-	+	-	-	2	3	2	3	3
4	-	+	-	+	-	-	1	2	1	3	2
5	-	+	-	+	-	-	1	2	1	2	2
6	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
7	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
8	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
9	-	+	-	-	-	-	2	3	2	3	3
10	+	-	-	+	-	-	1	2	1	3	2
11	+	-	-	+	-	-	1	2	1	2	2
12	+	-	-	+	-	-	1	1	1	2	1
13	+	-	-	+	-	-	2	3	2	3	3
14	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
15	-	+	-	+	-	-	2	3	2	3	3
16	+	-	-	+	-	-	1	2	1	1	2
17	+	-	-	+	-	-	2	2	2	2	2
18	-	+	-	+	-	-	1	2	1	1	2
19	-	+	-	-	-	-	2	2	2	2	2
20	+	-	-	+	-	-	1	2	1	1	2
21	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	3
22	-	+	-	+	-	-	3	3	3	3	3
23	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
24	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
25	+	-	-	+	-	-	3	3	3	4	3
26	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
27	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
28	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
29	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
30	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
31	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
32	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
33	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
34	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
35	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
36	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
37	-	+	-	-	-	-	2	2	2	3	2
38	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
39	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
40	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^+(1)$	$P^+(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
41	-	+	-	+	-	-	2	2	2	3	2
42	+	-	+	+	+	-	2	3	2	3	3
43	+	-	+	+	+	-	2	2	2	2	2
44	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	3
45	+	-	+	+	+	-	3	3	3	4	3
46	-	+	-	+	-	-	3	3	3	3	3
47	-	+	-	+	-	-	3	2	3	3	2
48	-	+	+	+	+	-	3	3	3	4	3
49	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
50	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
51	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	3
52	-	+	+	-	+	-	3	3	3	4	3
53	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
54	-	+	-	-	-	-	3	2	3	4	2
55	+	-	-	+	-	-	2	2	2	3	2
56	+	-	+	+	+	-	3	3	3	4	3
57	-	+	-	+	-	-	3	3	3	4	3
58	+	-	+	+	-	-	2	2	2	3	2
59	+	-	-	+	-	-	4	3	4	3	3
60	-	+	-	-	-	-	4	3	4	3	3
61	+	-	-	+	-	-	3	3	3	3	2
62	+	-	-	+	-	-	4	3	4	4	3
63	-	+	-	+	-	-	4	3	4	4	3
64	+	-	-	+	-	-	3	2	3	3	2
65	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
66	-	+	-	-	-	-	4	2	4	3	2
67	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
68	+	-	+	+	+	-	4	3	4	5	3
69	-	+	-	-	-	-	3	2	3	3	2
70	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
71	-	+	+	-	+	-	4	3	4	5	3
72	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
73	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	2
74	-	+	-	-	-	-	4	3	4	4	3
75	-	+	-	-	-	-	3	3	3	3	2
76	-	+	-	-	-	-	4	3	4	5	3
77	+	-	-	+	-	+	2	3	2	3	3
78	+	-	-	+	-	+	2	2	2	2	2
79	+	-	-	+	-	+	3	3	3	4	3
80	-	+	-	+	-	+	3	3	3	4	3
81	-	+	-	+	-	+	3	3	3	4	3
82	+	-	+	+	+	+	3	3	3	4	3
83	+	-	-	+	-	+	4	3	4	5	3
84	-	+	-	+	-	+	4	3	4	5	3

№	C	NC	P(1)	P(0)	$P^{+}(1)$	$P^{+}(0)$	n_{id}	n_{gen}	ns(1)	ns(2)	ns(3)
85	+	-	-	+	-	+	3	3	3	4	3
86	+	-	+	+	+	+	4	4	4	6	4
87	-	+	-	+	-	+	4	4	4	6	4
88	+	-	+	+	-	+	3	3	3	4	3
89	-	+	+	+	+	+	4	4	4	6	4
90	-	+	-	+	-	+	4	4	4	6	4
91	+	-	-	+	-	+	2	3	2	3	3
92	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
93	+	-	+	+	+	+	3	3	3	4	3
94	-	+	+	-	+	-	4	4	4	6	4
95	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
96	+	-	-	+	-	+	2	2	2	2	2
97	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
98	-	+	+	-	-	-	3	3	3	4	3
99	+	-	+	+	-	+	2	2	2	1	1
100	-	+	+	-	-	-	3	2	3	4	1
101	-	+	+	-	+	-	4	4	4	6	4
102	-	+	-	-	-	-	4	4	4	6	4
103	+	-	-	-	-	-	1	3	1	3	3
104	+	-	-	-	-	-	1	2	1	2	2
105	+	-	-	-	-	-	2	3	2	3	3
106	-	+	-	-	-	-	2	3	2	3	3
107	+	-	+	-	+	-	2	3	2	3	3
108	+	-	-	-	-	-	3	3	3	3	3
109	+	-	-	-	-	-	2	2	2	3	2
110	+	-	+	-	+	-	3	3	3	4	3
111	-	+	-	-	-	-	3	3	3	4	3
112	+	-	+	-	-	-	2	2	2	3	2
113	+	-	-	-	-	-	1	2	1	2	2
114	+	-	-	-	-	-	1	1	1	2	1
115	+	-	-	-	-	-	2	2	2	2	2
116	-	+	-	-	-	-	2	2	2	2	2
117	+	-	+	-	+	-	2	2	2	2	2
118	+	-	+	-	-	-	2	2	2	3	1
119	-	+	-	-	-	-	4	2	4	4	0
120	-	+	-	-	-	-	2	2	2	3	0
121	+	-	-	-	-	-	1	2	1	1	1
122	+	-	+	-	+	-	2	2	2	1	1
123	+	-	-	-	-	-	1	2	1	1	2
124	+	-	-	-	-	-	1	1	1	0	1
125	+	-	+	-	-	-	1	2	1	3	0
126	+	-	+	-	-	-	1	1	1	1	0

Доведення теореми проводиться комбінаторним методом: для кожної напівгрупи описуються всі її піднапівгрупи, породжені одним, двома та трьома елементами, з послідуючим аналізом отриманих даних.

Список використаної літератури

1. *Холл М.* Теория групп. М.: Иност. лит., 1962. – 468 с.
2. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.
6. *Tamura T.* Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1954. – **5**, – P. 17–27.
7. *Forsythe G. E.* SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4 // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**. – P. 443–447.

Одержано 10.03.2017

УДК 519.21

Т. В. Боярищева, М. В. Далекорей, М. М. Михасюк, І. Й. Поляк, П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ОЦІНОК ЗОЛОТАРЬОВА ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ

Estimates of Zolotarev in the central limit theorem generalized for sequences series random variables.

Оцінки Золотарьова в центральній граничній теоремі узагальнюються для послідовності серій випадкових величин.

У даній роботі результати роботи [1] узагальнюються на випадок послідовності серій випадкових величин.

Нехай $\xi_{n1}, \ldots, \xi_{nn}$ — послідовність серій незалежних і однаково розподілених в кожній серії випадкових величин, $F_n(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}, $f_n(t)$ – характеристична функція ξ_{ni} , $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$.

Позначимо: $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$, $\Phi_n(x)$ – функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону, $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$, $H_n(x) = F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)$.

Введемо псевдомоменти такого вигляду:

$$\varkappa_n = 3\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |H_n(x)|\, dx, \qquad \varkappa_{n0} = \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) |H_n(x)|\, dx.$$

Теорема 1. *Для всіх $n \geq 1$ справедливі нерівності:*

$$\rho_n \leq C_1 \frac{max\left\{\varkappa_{n0}, \quad (\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}}\right\}}{\sqrt{n}}, \qquad \rho_n \leq C_2 \frac{max\left\{\varkappa_{n}, \quad (\varkappa_{n})^{\frac{n}{3n+1}}\right\}}{\sqrt{n}},$$

де C_1, C_2 – деякі абсолютні сталі.

Для довільного $y > 0$ позначимо

$$\nu_{n0}^{(1)}(y) = \int_{|x|\leq y} \max\left(1, |x|^3\right) |dH_n(x)|, \quad \nu_{n0}^{(2)}(y) = \int_{|x|>y} \max\left(1, x^2\right) |dH_n(x)|.$$

Теорема 2. *Для всіх $n \geq 1$ справедлива нерівність*

$$\rho_n \leq C_3 \inf_{y>0} \left\{ \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right\},$$

де C_3 – абсолютна стала.

Наслідок. *Для всіх $n \geq 1$*

$$\rho_n \leq C_3 \frac{\nu_{n0}}{\sqrt{n}},$$

де $\nu_{n0}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left(1, |x|^3\right) |dH_n(x)|$.

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ - послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$, $\mathrm{M}\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$. Якщо покладемо $\xi_{ni} = \xi_i/\sqrt{n}$, то $F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = F(x)$. Тоді із теореми 1 і наслідку одержуємо результати роботи [1].

Для доведення теореми необхідні наступні леми.

Лема 1. *Нехай* $\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|$. *Тоді для всіх* $t \in \mathfrak{R}$ *мають місце наступні нерівності*:

$$\omega_n(t) \le \varkappa_n \frac{|t|^3}{6}, \tag{1}$$

$$\omega_n(t) \le \varkappa_{n0} min\left(|t|, \frac{t^3}{6}\right) \le \varkappa_{n0} \frac{t^2}{\sqrt{6}}, \tag{2}$$

$$\omega_n(t) \le \nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{3}$$

$$\omega_n(t) \le \frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{4}$$

$$\omega_n(t) \le \frac{1}{2} t^2 \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right). \tag{5}$$

Доведення. Із умов $M\xi_{nk} = 0$, $D\xi_{nk} = \frac{1}{n}$, одержуємо

$$\omega_n(t) = \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx\sqrt{n}} dF_n(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\Phi(x) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) e^{itx} dx \right| =$$

$$= \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right|. \tag{6}$$

Із нерівності ([1], ст.372)

$$\left| e^{iz} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(iz)^j}{j!} \right| \le \frac{2^{1-\gamma} |z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \ 0 \le \gamma \le 1, \tag{7}$$

одержуємо

$$\omega_n(t) = \left| t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itx} - 1 - itx\right) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right| \le$$

$$\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{itx} - 1 - itx\right| \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_n.$$

Отже, нерівність (1) леми 1 доведена. За щойно доведеною нерівністю маємо:

$$\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}.$$

Із рівності (6)

$$\omega_n(t) = \left|t \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) e^{itx} dx\right| \leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx \leq$$

$$\leq |t| \int_{-\infty}^{+\infty} max\left(1, 3x^2\right) \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx = |t| \varkappa_{n0}.$$

Оскільки, $\omega_n(t) \leq |t| \varkappa_{n0}$ і $\omega_n(t) \leq \frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0}$, то

$$\omega_n(t) \leq min\left(\frac{|t|^3}{6} \varkappa_{n0},\ |t| \varkappa_{n0}\right) = \varkappa_{n0} min\left(\frac{|t|^3}{6}, |t|\right).$$

Перша частина нерівності (2) леми 1 доведена.

Нехай $min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = |t|$, тоді $|t| \leq \frac{|t|^3}{6}$, $1 \leq \frac{t^2}{6}$, $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \geq 1$. Тому

$$min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = |t| \leq |t| \frac{|t|}{\sqrt{6}} = \frac{t^2}{\sqrt{6}}.$$

Якщо ж $min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = \frac{|t|^3}{6}$, то $\frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq 1$, тому

$$min\left(|t|, \frac{|t|^3}{6}\right) = \frac{|t|^3}{6} = \frac{t^2}{\sqrt{6}} \frac{|t|}{\sqrt{6}} \leq \frac{t^2}{\sqrt{6}}\ .$$

Нерівність (2) доведена.

$$\omega_n(t) = \left|f_n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right).$$

Із (6) і (7) для довільного $y > 0$

$$\omega_n(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| \leq$$

$$\leq \int_{|x| \leq y} \max\left(1,\ |x|^3\right) \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| +$$

$$+\int_{|x|>y}\max\left(1,\ x^2\right)\ \left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|=\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right),$$

$$\omega_n\left(t\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\int_{|x|\le y}\left|\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)\right|\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|+$$

$$+\int_{|x|>y}\left|\left(e^{itx}-1-it-\frac{\left(itx\right)^2}{2}\right)\right|\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\frac{|t|^3}{6}\int_{|x|\le y}|x|^3\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|+t^2\int_{|x|>y}x^2\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\le\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+t^2\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right).$$

Крім того,

$$\omega_n\left(t\right)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx}-1-it\right)d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le$$

$$\omega_n\left(t\right)\le\frac{1}{2}t^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left|d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(x\right)\right)\right|\le\frac{1}{2}t^2\left(\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right)\right).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2.1 *Нехай* $c\epsilon\left(0,2^{-1}\right)$. *Якщо* $\varkappa_{n0}\le c$ *і* $|t|\le T_{11}=\sqrt{-2\ln\varkappa_{n0}}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_{11}t^2}, \tag{8}$$

де $c_{11}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}>0$,
а якщо $\varkappa_{n0}\le c$ *і* $|t|>T_{11}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le 2\varkappa_{n0}\left|t\right|. \tag{9}$$

Якщо ж $\varkappa_{n0}>c$, *то при* $|t|\le T_{12}=\frac{c}{\varkappa_{n0}}$,

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_{12}t^2}, \tag{10}$$

де $c_{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}c\sqrt{e}>0$.

Доведення. Будемо використовувати нерівність

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|=\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}}+e^{\frac{-t^2}{2}}\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right). \tag{11}$$

Нехай $\varkappa_{n0}\le c$ *і* $|t|\le T_{11}$.

Із (11), нерівності (2) леми 1, визначення T_{11} ($e^{\frac{\left(T_{11}\right)^2}{2}}=\left(\varkappa_{n0}\right)^{-1}$) і нерівності $1+x\le e^x$

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-\frac{t^2}{2}}+\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{(T_{11})^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\,e^{\frac{t^2}{\sqrt{6}}}=e^{-t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}.$$

Нехай $\varkappa_{n0}\leq c, |t|>T_{11}$.

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right)\leq e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}}+\varkappa_{n0}\left|t\right|.$$

Оскільки, $e^{-\frac{(T_{11})^2}{2}}=\varkappa_{n0},\quad \varkappa_{n0}\leq c<2^{-1}$, а

$$T_{11}=\sqrt{-2\ln\varkappa_{n0}}\geq\sqrt{-2\ln c}>\sqrt{-2\ln 2^{-1}}=\sqrt{\ln 4}>1,$$

то ми отримаємо наступне:

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq\varkappa_{n0}\left(1+|t|\right)\leq 2\varkappa_{n0}\left|t\right|.$$

Розглянемо наступний випадок: $\varkappa_{n0}>c, |t|\leq T_{21}$, де $T_{21}=\frac{c}{\varkappa_{n0}}$.
За умовою $T_{12}<1$. Із (11) і (2)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\omega_n\left(t\right)\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\varkappa_{n0}\frac{|t|^3}{6}\right)\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{(T_{12})^2}{2}}\varkappa_{n0}\,T_{12}\frac{t^2}{6}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\,\varkappa_{n0}\,\frac{c}{\varkappa_{n0}}\frac{t^2}{\sqrt{6}}\right)\leq e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\frac{t^2c\sqrt{e}}{6}}=$$
$$=e^{-t^2c_{12}}.$$

Лема 2 доведена.
Лема 2.2. *Нехай* $c\in\left(0,e^{-1}\right)$.
Якщо $\varkappa_n\leq c$ *і* $|t|\leq T_{21}=\sqrt{-2\ln\varkappa_n}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-t^2c_{21}},\tag{12}$$

де $c_{21}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}>0$;
Якщо $\varkappa_n\leq c$ *і* $|t|>T_{21}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq\ \varkappa_n|t|^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\right).\tag{13}$$

Якщо $\varkappa_n>c$ *і* $|t|\leq T_{22}=\frac{c}{\varkappa_n}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-t^2c_{22}},\tag{14}$$

де $c_{22}=1-\frac{\sqrt{e}}{6}c$.
Доведення. Нехай $\varkappa_n\leq c$, Із (11) і нерівності (1) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right)\leq e^{\frac{-t^2}{4}}\left(e^{\frac{-t^2}{4}}+e^{\frac{t^2}{4}}\omega_n\left(t\right)\right)\leq$$

$$\leq e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+\left(\varkappa_n\right)^{-\frac{1}{2}}\varkappa_n\frac{t^2}{6}T_{21}\right)=e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+t^2\frac{1}{6}\sqrt{-2\varkappa_n\ln\varkappa_n}\right).$$

Оскільки, $x\ln x$ спадає на $(0,\ e^{-1}]$, а $0<\varkappa_n\le c<e^{-1}$, то

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{4}}\left(1+t^2\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\right)\le e^{-t^2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\right)}=e^{c_{21}t^2}.$$

Із умови $0<c\le e^{-1}$ і того, що $x\ln x$ спадає на $(0,\ e^{-1}]$, випливає $\sqrt{-2c\ln c}\le\sqrt{2e^{-1}}$. Тому $c_{21}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{-2c\ln c}\ge\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\sqrt{2e^{-1}}>0$.

Нехай $\varkappa_n\le c, |t|>T_{21}$. Оскільки $\varkappa_n\le c\le e^{-1}$, $\ln\varkappa_n\le\ln c\le -1$, то

$$T_{21}=\sqrt{-2\ln\varkappa_n}\ge\sqrt{2}.$$

Із (11) і (1)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\omega_n\left(t\right)\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\varkappa_n\frac{|t|^3}{6}\le e^{-\frac{(T_{21})^2}{2}}+\varkappa_n\frac{|t|^3}{6}=$$

$$=\varkappa_n\left(1+\frac{|t|^3}{6}\right)\le\varkappa_n|t|^3\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6}\right).$$

Нехай $\varkappa_n>c,\ |t|\le T_{22}$, тоді із (11) і (1) леми 1 ($T_{22}<1$)

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{\frac{-t^2}{2}}+\frac{|t|^3}{6}\varkappa_n=e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\frac{|t|^3}{6}\varkappa_n\right)\le$$

$$\le e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+t^2e^{\frac{(T_{22})^2}{2}}\frac{T_{22}}{6}\varkappa_n\right)\le e^{\frac{-t^2}{2}}\left(1+t^2\frac{\sqrt{e}}{6}c\right)\le e^{c_{22}t^2}.$$

Лема доведена.

Лема 2.3. *Нехай* $c\in\left(0,2^{-4}\right)$, $\nu_{n0}^{(2)}\le c$, $\nu_{n0}\left(y\right)=max\left\{\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right);\ \nu_{n0}^{(2)}\left(y\right)\right\}$. *Якщо* $\nu_{n0}\left(y\right)\le c$ і $|t|\le X_1=\sqrt{-2\ln\nu_{n0}\left(y\right)}$, *де*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_1t^2},\tag{15}$$

де $c_1=\frac{1}{4}-\sqrt{c}>0$, *а при* $\nu_{n0}\left(y\right)\le c$ і $|t|>X_1$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le 3\nu_{n0}\left(y\right),\tag{16}$$

якщо ж $\nu_{n0}\left(y\right)>c$, *то при* $|t|\le X_2=\frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)}$, *то*

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-c_2t^2},\tag{17}$$

де $c_2=\frac{1}{2}-\frac{7}{6}c\sqrt{e}>0$.

Доведення. Нехай $\nu_{n0}\left(y\right)\le c, |t|\le X_1$. Тоді із (11) і (5) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(e^{-\frac{t^2}{4}}+e^{\frac{t^2}{4}}\omega_n\left(t\right)\right)\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+e^{\frac{t^2}{4}}\frac{t^2}{2}\left(\nu_{n0}^{(1)}\left(y\right)+\nu_{n0}^{(2)}\left(y\right)\right)\right)\le$$

$$\le e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+e^{\frac{{X_1}^2}{4}}t^2\nu_{n0}\left(y\right)\right)=e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+t^2\sqrt{\nu_{n0}\left(y\right)}\right)\le$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1+t^2\sqrt{c}\right)\leq e^{-c_1t^2}.$$

Якщо $\nu_{n0}(y)\leq c$ і $|t|>X_1$, то із (11) і (3) леми 1

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{{X_1}^2}{2}}+\nu_{n0}^{(1)}(y)+\nu_{n0}^{(2)}(y)\leq 3\nu_{n0}(y).$$

У випадку $\nu_{n0}(y)>c$ із умов леми 2.3 випливає, що $\nu_{n0}^{(1)}(y)>c$. Із (4) леми 1 і (11) при $|t|\leq X_2\,(X_2\ <1)$

$$\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+e^{\frac{t^2}{2}}\omega_n(t)\right)\leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\left(\frac{|t|^3}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2\nu_{n0}^{(2)}(y)\right)\right)\leq e^{-c_2t^2}.$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1+\sqrt{e}\left(\frac{c}{\nu_{n0}^{(1)}(y)}\frac{t^2}{6}\nu_{n0}^{(1)}(y)+t^2c\right)\right)\leq e^{-c_2t^2}.$$

Лема доведена.

Доведення теореми 1. Використаємо нерівність ([3], ст.299):

$$\sup_{\text{x}}|F(x)-G(x)|\ \leq\frac{2}{\pi}\int_0^T|f(t)-g(t)|\,\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi T}\left|\sup_x G'(x)\ \right|. \tag{18}$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x)=\Phi_n(x)\,;\ G(x)=\Phi(x)\,;\ f(t)=(f_n(t))^n;\ g(t)=e^{\frac{-t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n=\sup_x|\Phi_n(x)-\Phi(x)|\ \leq\frac{2}{\pi}\ \int_0^T\left|f_n^n(t)-e^{\frac{-t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi T}}.$$

Зробимо заміну $t=z\sqrt{n}$ в інтегралі із правої частини нерівності, тоді

$$\rho_n\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}}\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi\sqrt{2\pi T}}. \tag{19}$$

Використаємо рівність

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}b^{k-1},$$

де покладемо $a=f_n\left(t\sqrt{n}\right),\ b=e^{\frac{-t^2}{2}}$, тоді

$$\left|f_n^n\left(t\sqrt{n}\right)-e^{\frac{-t^2}{2}n}\right|\leq\omega_n(t)\sum_{k=1}^{n}\left|f_n\left(t\sqrt{n}\right)\right|^{n-k}\cdot e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)}. \tag{20}$$

Із (2) леми 1 і (8), (10) леми 2.1 при $|t| \leq T_{1m}$ ($m = 1$ при $\varkappa_{n0} \leq c$ і $m = 2$ при $\varkappa_{n0} > c$)

$$\left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \leq \frac{|t|^3}{6}\varkappa_{n0}\sum_{k=1}^{n} e^{-c_{1m}t^2(n-k)}e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq \tag{21}$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6}\varkappa_{n0}\cdot ne^{-c_{1m}t^2(n-1)}.$$

Ми використали, що $c_{1m} \leq \frac{1}{2}$.

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} > c$. У (19) покладемо $T = T_{12}\sqrt{n}$, а в нерівності (21) $m = 2$, тоді одержимо таку оцінку:

$$I = \int_0^{T_{12}} \left| f_n^n\left(z\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-z^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \frac{\varkappa_{n0}n}{6}\int_0^{T_{12}} t^2 e^{-c_{12}t^2(n-1)}dt \leq$$

$$\leq \varkappa_{n0}\frac{n}{12[c_{12}\,(n-1)]^{3/2}}\int_0^{\infty} z^{1/2}e^{-z}dz \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{c_{12}^3}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \tag{22}$$

Тоді із (19) для $n \geq 2$ одержимо

$$\rho_n \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}}\,C_4,$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_{12}^3}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi c}}.$$

Нехай $n \geq 2$, $\varkappa_{n0} \leq c$, $X = \varkappa_{n0}^{-\frac{n}{n+1}}c, T' = min\left(T_{11}, X\right)$. Покладемо в (19) $T = X\sqrt{n}$. Тоді

$$I = \int_0^{X} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{T'} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^{X} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^{X} e^{\frac{-t^2}{2}n}\frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{23}$$

Будемо розглядати випадок $T' = T_{11}$, бо інакше $I_2 = 0$, $I_3 = 0$ і доведення стає очевидним. Із нерівності (21), аналогічно до (22),

$$I_1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}}C_5, \tag{24}$$

де $C_5 = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{2\pi}{c_{11}^3}}$.

Оцінимо спочатку інтеграл $I_2 = \int_{T'}^{X} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) \right| \frac{dt}{t}$.

Із нерівності (2) леми 1 і нерівності (9) леми 2.1 при $n \geq 2$

$$I_2 \leq \left(2\varkappa_{n0}\right)^n \int_{T_{11}}^{X} t^n \frac{dt}{t} \leq \left(2\varkappa_{n0}\right)^n \frac{X^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}(2c)^n \varkappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}} \frac{(2c)^2}{\sqrt{2}}. \tag{25}$$

Залишилось оцінити I_3. Враховуємо, що $T_{11} > 1$. Тоді

$$I_3 = \int_{T_{11}}^{X} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} \leq \int_{T_{11}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = \int_{T_{11}\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(T_{11}\sqrt{n})^2} e^{-\frac{1}{2}(T_{11}\sqrt{n})^2} \leq \frac{(\varkappa_{n0})^n}{n} \leq \frac{\varkappa_{n0}}{\sqrt{n}} \frac{c}{\sqrt{2}}. \tag{26}$$

Із (19), (23)–(26) випливає справедливість першого твердження теореми у випадку $\varkappa_{n0} \leq c$, $n > 1$.

Нехай $n = 1$. Якщо $\varkappa_{n0} > c$, то $\rho_1 \leq 1 \leq \frac{\varkappa_{n0}}{c}$.

Якщо $\varkappa_{n0} \leq c$. Тоді із (2) леми 1, нерівності (19), у якій покладемо $T = X$,

$$\rho_1 = sup\left|\Phi_1(x) - \Phi(x)\right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \left| f_1(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^X \varkappa_{10} t \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = \frac{2}{\pi}\varkappa_{10} X + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\varkappa_{10}\varkappa_{10}^{-\frac{1}{2}} c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}} \frac{(\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}}}{c} = (\varkappa_{10})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\pi}c + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \right).$$

Перше твердження теореми повністю доведене.

Друге твердження теореми доводиться повністю аналогічно. Лише відзначимо, що у випадку $n \geq 2$, $\varkappa_n \leq c$ у (19) вибираємо $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\varkappa_n)^{-\frac{n}{3n+1}}, T' = min\,(T_{21}, X)$.

Доведення теореми 2. Будемо вважати, що $\nu_{n0}^{(2)}(y) \leq c$, бо у випадку $\nu_{n0}^{(2)}(y) > c$

$$\rho_n \leq 1 \leq \frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c}$$

і теорема 2 стає очевидною.

Із лем 1 і 2.3, нерівності (4). (15), (17), при $|t| \leq X_m$ ($m = 1$ при $\nu_{n0}(y) \leq c$ і $m = 2$ при $\nu_{n0}(y) > c$) одержимо

$$\left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \leq \omega_n(t) \sum_{k=1}^{n} \left| f_n(t\sqrt{n}) \right|^{n-k} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) \sum_{k=1}^{n} e^{-c_m t^2(n-k)} e^{\frac{-t^2}{2}(k-1)} \leq$$

$$\leq n \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_m t^2(n-1)}. \tag{27}$$

Нехай $n \geq 2, \nu_{n0}(y) > c$. Тоді в (19) покладемо $T = X_2\sqrt{n}$, а в останній нерівності $m = 2$, тоді зі (27) одержимо

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{X_2} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} n \int_0^{X_2} \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_2 t^2 (n-1)} \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \frac{n}{3\pi} \nu_{n0}^{(1)}(y) \int_0^{\infty} t^2 e^{-c_2 t^2 (n-1)} dt + \frac{2n}{\pi} \nu_{n0}^{(2)}(y) \int_0^{\infty} t e^{-c_2 t^2 (n-1)} dt +$$

$$+ \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} = \nu_{n0}^{(1)}(y) \frac{n}{3\pi} \cdot \frac{1}{2\left[c_2(n-1)\right]^{3/2}} \int_0^{\infty} z^{1/2} e^{-z} dz +$$

$$+ \nu_{n0}^{(2)}(y) \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{c_2(n-1)} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c} \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq C_6 \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + C_7 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{28}$$

де $C_6 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_2^3}} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}c}$, $C_7 = \frac{2}{c_2}$.

При $n = 1$і $\nu_{n0}(y) > c$

$$\rho_n \leq 1 \leq \frac{\nu_{n0}^{(2)}(y)}{c} \leq \frac{1}{c} \left(\nu_{n0}^{(1)}(y) + \nu_{n0}^{(2)}(y) \right).$$

Отже, у випадку $\nu_{n0}(y) > c$, теорема 2 доведена.

Нехай $n \geq 2$, $\nu_{n0}(y) \leq c$, тоді в (26) покладемо $T = Y\sqrt{n}$, $Y = \frac{c}{\nu_{n0}(y)}$ і $X' = min\{X_1, Y\}$. Інтеграл у (19)

$$I = \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \leq \int_0^{X'} \left| f_n^n\left(t\sqrt{n}\right) - e^{\frac{-t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{X'}^{Y} \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) \right|^n \frac{dt}{t} + \int_{X'}^{Y} e^{\frac{-t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = J_1 + J_2 + J_3. \tag{29}$$

Для оцінки інтеграла J_1, аналогічно до (28), із (27) $(m = 1)$ одержимо

$$J_1 \leq \frac{2}{\pi} n \int_0^{X'} \left(\frac{|t|^3}{6} \nu_{n0}^{(1)}(y) + t^2 \nu_{n0}^{(2)}(y) \right) e^{-c_1 t^2 (n-1)} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq C_8 \frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + C_9 \nu_{n0}^{(2)}(y), \tag{30}$$

де $C_8 = \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{\pi c_1^3}}, C_9 = \frac{2}{c_1}$.

Будемо вважати, що $X' = X_1$, бо інакше $J_2 = 0, J_3 = 0$ і (**??**) для $n \geq 2$ є очевидною.

Із леми 2.2, нерівність (**??**), одержимо

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int_{X'}^{Y} \left| f_n\left(t\sqrt{n}\right) \right|^n \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (3\nu_{n0}(y))^n \int_{X'}^{Y} \frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi} (3\nu_{n0}(y))^n \frac{Y}{X'}.$$

Оскільки, $\nu_{n0}(y) \le c < \frac{1}{16}$, то $X_1 = \sqrt{-2\ln\nu_{n0}(y)} \ge \sqrt{-2\ln c} > 2$. Тому,

$$J_2 \le \frac{2}{\pi}(3\nu_{n0}(y))^{n-1} \cdot \frac{3c}{2} \le 3\nu_{n0}(y) \cdot \frac{3c}{\pi} \cdot (3c)^{n-2} \le$$
$$\le \left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right)\frac{1}{\pi c}\sqrt{n}(3c)^n.$$

При $n \ge 2$, вираз $\sqrt{n}(3c)^n$ є обмеженим, тому існує така стала C_{10}, що

$$J_2 \le C_{10}\left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right). \tag{31}$$

Оцінимо J_3 наступним чином,

$$J_3 = \frac{2}{\pi}\int_{X'}^{Y} e^{\frac{-t^2}{2}n}\,\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_{\frac{X_1{}^2 n}{2}}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u} \le \frac{1}{\pi}\left(\frac{X_1{}^2 n}{2}\right)^{-1} \cdot e^{-\frac{X_1{}^2 n}{2}} \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi n}(\nu_{n0}(y))^n \le \frac{\nu_{n0}(y)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{c}{2\pi} \le c_8\left(\frac{\nu_{n0}^{(1)}(y)}{\sqrt{n}} + \nu_{n0}^{(2)}(y)\right). \tag{32}$$

Із (19), (29)–(**??**) одержуємо справедливість теореми 2 при $n \ge 2$ у випадку $\nu_{n0}(y) \le c$. Нехай $n = 1$, тоді

$$\rho_1 = \sup_x |\Phi_1(x) - \Phi(x)| = \sup_x |H_1(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |dH_1(x)| =$$
$$= \int_{|x|\le y} |dH_1(x)| + \int_{|x|>y} |dH_1(x)| \le \nu_{10}^{(1)}(y) + \nu_{20}^{(2)}(y).$$

Теорема 2 доведена.

Список використаної літератури

1. *Zolotarev V.M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem / V.M. Zolotarev // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531-543.
2. *Золотарев В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Лоев М.* Теория вероятностей / М. Лоев. – М.: из-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 30.03.2017

УДК 519.8

А. Ю. Брила, В. І. Гренджа (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО РАНЕЦЬ З АЛЬТЕРНАТИВНИМИ КРИТЕРІЯМИ

The method of finding of attainable optimum solutions of lexicographic knapsack problem with alternative criteria by reducing it to the problem of onecriterion optimization with a scalar objective function is considered.

Розглядається метод знаходження досяжних оптимальних розв'язків задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями шляхом зведення її до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією.

Вступ. Прикладні задачі лексикографічної оптимізації про ранець виникають у випадку, коли оптимальний набір у класичній задачі про ранець необхідно знайти на основі багатьох критеріїв, які строго ранжировані за важливістю. Для розв'язання цієї задачі в [1, 4] запропоновано підхід, що ґрунтується на використанні схеми скаляризації. Такий підхід для задачі про ранець має суттєвий недолік, оскільки на першому кроці розв'язується класична задача про ранець з одним (першим) критерієм, але на усіх наступних на множину допустимих розв'язків накладається додаткове обмеження, яке не дозволяє застосувати на цих кроках класичні методи розв'язання задачі про ранець. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець шляхом побудови функціоналу, що представляє лексикографічний порядок віддачі переваги на множині допустимих розв'язків розглянуто у [2, 5].

У даній статті розглянуто задачу знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець, у якій на деякі із критеріїв накладено умови допустимості [3]. Якщо для деякого із таких критеріїв умови допустимості не виконуються, то цей критерій повинен бути виключений із подальшого розгляду. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід, що дозволяє звести дану задачу до задачі однокритеріальної оптимізації.

Розглядається також задача лексикографічної оптимізації з альтернативними залежними критеріями. Такі задачі виникають у випадку, коли допустимість одного із критеріїв залежить від допустимості інших, пов'язаних із даним критерієм.

1. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець з альтернативними критеріями. Розглядається задача

$$max^L \bar{c}(x)\,, \;\; x \in X, \tag{1}$$

де множина допустимих розв'язків X задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le C,$$
$$x_j \in Z,\; j = \overline{1, n}.$$

Цільова функція $\bar{c}(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))$, за якою порівнюються допустимі альтернативи, є векторною згорткою критеріїв $c_k(x)$, $k = 1, 2, ..., q$ у субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$, а кожен з критеріїв $c_k(x)$– лінійна скалярна функція n змінних:

$$c_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j, \quad 1 \le k \le q.$$

Ця функція є однією із числових оцінок допустимих альтернатив.

Нехай $\alpha_q > 0$ – деяке додатне число, а інші додатні числа $\alpha_{q-1}, \alpha_{q-2}, ..., \alpha_1$ поступово знаходяться з умови

$$\alpha_r > \frac{1}{\mu_r} \sum_{k=r+1}^{q} \alpha_k M_k, r = q-1, q-2, ..., 1,$$

де $0 < \mu_r \le \min\limits_{i,j \in \{1,2,...,n\}, c_{ri} \ne c_{rj}} |c_{ri} - c_{rj}|$,

$$M_k \ge \left(\max_j c_{kj}\right) \left[\frac{C}{\min\limits_j w_j}\right] - \left(\min_j c_{kj}\right) \left[\frac{C}{\max\limits_j w_j}\right],$$

([ ] – ціла частина числа).

У [2] показано, що одержані таким чином коефіцієнти можуть бути використані для знаходження досяжних оптимальних розв'язків шляхом розв'язання задачі

$$\max \; L(x) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k c_k(x), \quad x \in X. \tag{2}$$

На основі задач (1), (2) розглянемо задачу, в якій оптимальний розв'язок необхідно знайти, враховуючи тільки один критерій якнайвищого рангу з групи критеріїв якнайвищого рангу, для якого виконується умова

$$c_k(x) \ge m_k, \; m_k \in R, \; k \in \{1, 2, ..., q\}. \tag{3}$$

Такий критерій є допустимим, а дана задача є задачею лексикографічної оптимізації з альтернативними критеріями.

Розглянемо задачу знаходження максимуму функціоналу

$$L(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\alpha}_k c_k(x) \tag{4}$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le C, \tag{5}$$

$$x_j \in Z, \; j = \overline{1, n}, \tag{6}$$

$$c_k(x) \ge m_k y_k, \; k = 1, 2, ..., q, \tag{7}$$

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k y_k, \ k = 1, 2, ..., q, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = 1, \tag{9}$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \ k = 1, 2, ..., q. \tag{10}$$

Нехай $\left(\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{\alpha}\right) = \left(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, ..., \widehat{x}_n, \widehat{y}_1, \widehat{y}_2, ..., \widehat{y}_q, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, ..., \widehat{\alpha}_q\right)$ є оптимальним розв'язком цієї задачі .

Теорема 1. *Вектор $\widehat{x}$ є розв'язком задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів α_k.

Очевидно, якщо оптимальний розв'язок необхідно знайти в залежності від вибору d, $d \geq 1$ допустимих критеріїв, то обмеження (9) необхідно замінити обмеженням

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = d.$$

2. Знаходження досяжних оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець з альтернативними залежними критеріями. Розглянемо випадок, коли у задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними критеріями для допустимості критерію $c_k(x)$, $k \in D \subset \{1, 2, ..., q\}$, крім виконання умови (3), додатково вимагається, щоб така умова виконувалась хоча б для одного із критеріїв $c_i(x), i \in I_k \subset \{1, 2, ..., q\}$. Задача знаходження оптимального розв'язку в залежності від вибору $p(p > 1)$ допустимих критеріїв якнайвищого рангу є задачею лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними залежними критеріями.

Нехай $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\alpha}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, ..., \tilde{y}_q, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, ..., \tilde{\alpha}_q)$ є оптимальним розв'язком задачі

$$L(x) = \sum_{k=1}^{q} \bar{\alpha}_k c_k(x)$$

на допустимій множині, що задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq C,$$

$$x_j \in Z, \ j = \overline{1, n},$$

$$c_k(x) \geq m_k y_k, \ k = 1, 2, ..., q,$$

$$\bar{\alpha}_k = \alpha_k y_k, \ k = 1, 2, ..., q,$$

$$\sum_{k=1}^{q} y_k = p,$$

$$\sum_{j\in I_k} y_j \ge y_k,\ k \in D,$$

$$y_k \in \{0,1\}\,,\ k = 1,2,...,q.$$

Теорема 2. *Вектор $\tilde{x}$ є розв'язком лексикографічної задачі про ранець з альтернативними залежними критеріями.*

Доведення теореми легко отримати, враховуючи вибір коефіцієнтів α_k.

Висновки. Розглянуті у роботі підходи дозволяють звести задачі лексикографічної оптимізації про ранець з альтернативними і альтернативними залежними критеріями до задач однокритеріальної оптимізації. В цьому і є перевага запропонованих підходів, оскільки вони дозволяють для знаходження досяжних оптимальних розв'язків застосувати класичні методи однокритеріальної оптимізації.

Список використаної літератури

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. Брила А.Ю., Гренджа В.І. Досяжність оптимальних розв'язків лексикографічної задачі про ранець/ А.Ю. Брила, В.І. Гренджа, //Computation Inteligence (Results, Problems and Perspectives): Proceeding of the Second International Conference (14-17 May 2013, Cherkasy). — Cherkasy:McLaut, 2013. — P.334.
3. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации с альтернативными критериями в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила// Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". — 2011. — №4. — С. 68-72.
4. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
5. Брила А. Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации/ А.Ю. Брила // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — №5. — С. 135–138.

Одержано 05.01.2017

УДК 519.21

О. М. Гопкало (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УЗАГАЛЬНЕНІ ТЕОРЕМИ ЛЕВІ-БАКСТЕРА ДЛЯ ПСЕВДОГАУСОВИХ ВИПАДКОВИХ ВЕКТОРІВ

This paper is devoted pseudo-Gaussian random vectors that are both sub-Gaussian and super-Gaussian. For these vectors prove theorem generalized Levy-Baxter.

Робота присвячена псевдогаусовим випадковим векторам, які є одночасно субгаусовими та супергаусовими. Для таких векторів доведено узагальнену теорему Леві-Бакстера.

1. Вступ. Нехай (Ω, F, P) — стандартний ймовірнісний простір, $(\xi_{n,k}, k = 1, \dots, p_n)$ — послідовність серій центрованих випадкових величин, де $(p_n, n \geq 1)$ — послідовність натуральних чисел, така що:

$$p_n \to \infty, \text{ при } n \to \infty.$$

Класичні теореми Леві-Бакстера — це твердження про асимптотичну поведінку сум

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{p_n} \xi_{n,k}^2, n \geq 1.$$

Цікавими є умови, за яких

$$\mathsf{E}\left(S_n^{(2)} - \mathsf{E}S_n^{(2)}\right)^2 \to 0, n \to \infty.$$

Найцікавішим є випадок, коли $S_n^{(2)} \to const$ при $n \to \infty$.

Теоремам Леві-Бакстера присвячено багато робіт, зокрема роботи [1] - [3]. В основному в цих роботах вивчалися умови збіжності до нуля в середньому квадратичному або з ймовірністю 1.

У даній роботі розглядаються узагальнені теореми Леві-Бакстера, в яких досліджується поведінка різниці сум квадратів псевдогаусових випадкових векторів: $\sum_n \xi_k^2 - \sum_m \xi_k^2$.

Крім цього наводиться оцінка розподілу для квадратичної форми псевдогаусового випадкового вектора.

2. Базові визначення. У цьому розділі наведемо кілька означень, які будуть використані при доведенні основних результатів.

Означення 1 (див. [1]). *Випадкову величину $\xi, \mathsf{E}\xi = 0$, будемо називати субгаусовою, якщо існує таке $a \geq 0$, що $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас субгаусових випадкових величин позначатимемо $\mathrm{Sub}(\Omega)$.

Числова характеристика $\tau(\xi) = \inf\left\{a \geq 0 : \mathsf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається *субгаусовським стандартом випадкової величини.*

Означення 2 (див. [1]). *Центорований випадковий вектор* $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *називається субгаусовим, якщо існує симетричний невід'ємно визначений оператор* $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *такий що*

$$\mathsf{E}\exp\{(\vec{u};\vec{\xi})\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{u};\vec{u})\right\}, u \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати B оператором, що супроводжує субгаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 3 (див. [2]). *Центрована випадкова величина* ξ *називається супергаусовою, якщо існує таке* $r > 0$, *що* $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i\lambda\xi\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас супергаусових випадкових величин позначатимемо: $\mathrm{Super}(\Omega)$.

Функціонал $r(\xi) = \sup\left\{r > 0 : \left|\mathsf{E}\exp\{i\lambda\xi\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{r^2\lambda^2}{2}\right\}; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ називається *супергаусовим стандартом випадкової величини.*

Означення 4 (див. [2]). *Центрований випадковий вектор* $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ *називається супергаусовим, якщо існує симетричний додатньо визначений оператор* $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *такий що:*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\}, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Будемо називати R оператором, що супроводжує супергаусовий вектор $\vec{\xi}$.

Означення 5 (див. [1]). *Нехай* $\vec{\xi}$ — n*-вимірний випадковий вектор,* $n \geq 1$. *Якщо* $\vec{\xi}$ *є одночасно субгаусовим та супергаусовим випадковим вектором, то* $\vec{\xi}$ *називається псевдогаусовим. При* $n = 1$, ξ — *псевдогаусова випадкова величина.*

Клас псевдогаусових випадкових векторів позначатимемо $\mathrm{Psg}(\Omega,\mathbb{R}^n) = \mathrm{Sub}(\Omega,\mathbb{R}^n)\bigcap\mathrm{Super}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. За означенням існує симетричний невід'ємно визначений оператор $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ та існує симетричний додатньо визначений оператор $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такі що $\forall\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\mathsf{E}\exp\{(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\}.$$

Оператори (матриці) B та R називаються *операторами (матрицями), що супроводжують псевдогаусовий вектор* $\vec{\xi}$.

Позначимо B – *sub*-оператор, R – *super*-оператор.

Теорема 1 (див. [1]). *Нехай* $\vec{\xi} \in Psg\ (\Omega,\mathbb{R}^n)$, $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$, $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ – *матриці, що супроводжують вектор* $\vec{\xi}$. *Тоді* $\forall s \in (0,\ 1)$:

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2\hat{D}_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2 - b_{kk})\right\} \leq \exp\left\{-\frac{s}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-s}},$$

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2\check{D}_n}\sum_{k=1}^{n}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\le\exp\left\{\frac{s^2}{4}\right\},$$

де $\hat{D}_n=\left(\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\check{D}_n=\left(\sum_{i,j=1}^{n}(r_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Теореми про псевдогаусові випадкові вектори.

Теорема 2. *Нехай* $(\xi_1,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+m})^T$ *— псевдогаусовий випадковий вектор,* $n,m\ge 1$, *такий що* $\forall\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^{n+m}$ *виконується наступне:*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{i(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right|\le\exp\left\{-\frac{1}{2}(R\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

де $R=(r_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ *— super-оператор (симетрична додатньо визначена матриця), та*

$$\left|\mathsf{E}\exp\{(\vec{\lambda};\vec{\xi})\}\right|\le\exp\left\{\frac{1}{2}(B\vec{\lambda};\vec{\lambda})\right\},$$

де $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ *— sub-оператор (симетрична невід'ємно визначена матриця), причому* $B=\varkappa R,\varkappa\ge 1$.

Розглянемо

$$I_{n,m}(s)=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\},$$

де $G_{n+m}=\sum_{k,j=1}^{n+m}r_{kj}^2$. *Тоді*

$$I_{n,m}(s)\le\exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-1/4},$$

де $s<\frac{1}{2\varkappa}$.

Доведення. Доведемо обмеження на $I_{n,m}(s)$:

$$\begin{aligned}I_{n,m}(s)&=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right)\right\}=\\&=\mathsf{E}exp\left\{\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})+\frac{s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\le\\&\le\left(\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})\right\}\right)^{1/2}\times\\&\times\left(\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Позначимо R_n,R_{n+m} — матриці, такі що $R_n=(r_{ik})_{i,k=1}^{n}$; $R_{n+m}=(r_{ik})_{i,k=n+1}^{n+m}$. Крім того, $B_n=\varkappa R_n, g_n=\sum_{k,j=1}^{n}r_{kj}^2, g_{n+m}=\sum_{k,j=n+1}^{n+m}r_{kj}^2$.

З теореми 1 маємо:

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\frac{\varkappa(g_n)^{1/2}}{\varkappa(g_n)^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^2-\varkappa r_{kk})\right\}\le\exp\left\{-\frac{2u_n\varkappa}{2}\right\}\frac{1}{\sqrt{1-2u_n\varkappa}},$$

якщо позначити $u_n = \frac{s(g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $u_n \varkappa * 2 < 1$.

Також, з теореми 1, маємо:

$$\mathsf{E}exp\left\{\frac{2s}{2(G_{n+m})^{1/2}}\frac{(g_{n+m})^{1/2}}{(g_{n+m})^{1/2}}\sum_{k=n+1}^{n+m}(r_{kk}-\xi_k^2)\right\} \leq \exp\left\{\frac{(2v_n)^2}{4}\right\},$$

якщо позначити $v_n = \frac{s(g_{n+m})^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}$, та при $2v_n < 1$.

Отже,

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{-\frac{u_n\varkappa}{2}\right\}\frac{1}{(1-2u_n\varkappa)^{1/4}}\exp\left\{\frac{2v_n^2}{4}\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s\varkappa(g_n)^{1/2}}{2(G_{n+m})^{1/2}} + \frac{2s^2 g_{n+m}}{4G_{n+m}}\right\}\left(1-\frac{2s\varkappa(g_n)^{1/2}}{(G_{n+m})^{1/2}}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Оскільки $g_n + g_{n+m} \leq G_{n+m}$, то $g_{n+m} \leq G_{n+m} - g_n$. Звідси маємо наступне:

$$\frac{g_{n+m}}{G_{n+m}} \leq \frac{G_{n+m}-g_n}{G_{n+m}} = 1 - \frac{g_n}{G_{n+m}}.$$

Позначимо $f_n = \left(\frac{g_n}{G_{n+m}}\right)^{1/2}$, $f_n \leq 1$.

Тоді

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{-\frac{s\varkappa f_n}{2} + \frac{s^2}{2}(1-f_n^2)\right\}(1-2sf_n\varkappa)^{-\frac{1}{4}} =$$
$$= \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{sf_n\varkappa}{2} - \frac{s^2f_n^2}{2}\right\}(1-2sf_n\varkappa)^{-\frac{1}{4}}.$$

Позначимо $L(u) = \exp\left\{-\frac{u\varkappa}{2} - \frac{u^2}{2}\right\}(1-2u\varkappa)^{-\frac{1}{4}}$.

Легко бачити, що максимум цієї функції досягається в точці $u = \frac{1}{2\varkappa}$.

Підставимо це значення у нерівність вище та отримаємо наступне:

$$I_{n,m}(s) \leq \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2} - \frac{s^2}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-\frac{1}{4}} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{s\varkappa}{2}\right\}(1-2s\varkappa)^{-\frac{1}{4}},$$

де $s < \frac{1}{2\varkappa}$.

Наступна теорема випливає з теореми 2. Оскільки, якщо переномерувати величини ξ_i випадкового вектора $\vec{\xi}$, то твердження теореми 2 не зміниться.

Теорема 3. *Нехай* $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *— псевдогаусовий випадковий вектор,* $N \geq 1$, *із супроводжуючими матрицями* R_N*— супергаусова,* B_N*— субгаусова:* $B_N = \varkappa_N R_N$, *де* $\varkappa_N \geq 1$, $G_N = \sum_{j,k=1}^{N}(r_{kj}^{(N)})^2$, *де* $r_{k,j}^{(N)}$ *— елементи матриці* R_N.

Позначимо

$$I_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}Y_{Z^+,Z^-}\right\},$$

де $Y_{Z^+,Z^-} = \sum_{k\in Z^+}(\xi_k^2 - \varkappa_N r_{kk}^{(N)}) + \sum_{k\in Z^-}(r_{kk}^{(N)} - \xi_k^2)$*; тут* Z^+, Z^- *— множини цілих чисел від 1 до* N *такі, що* $Z^+ \bigcap Z^- = \varnothing$, $Z^+ \bigcup Z^- = (1,\dots,N)$.

Тоді при $0 \le s < \frac{1}{2\varkappa_N}$ *та* $\forall Z^-, Z^+$ *маємо:*

$$I_{Z^+,Z^-}(s) \le \exp\left\{-\frac{s\varkappa_N}{2}\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \tag{1}$$

Наслідок 1. *Позначимо*

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\}.$$

Тоді при $0 \le s < \frac{1}{2\varkappa_N}$*, має місце нерівність:*

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) \le 2\exp\left\{-\frac{s\varkappa_N}{2}\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}.$$

Доведення. Доведемо твердження наслідку. Маємо наступне:

$$\hat{I}_{Z^+,Z^-}(s) = \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\} \le$$
$$\le \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}Y_{Z^+,Z^-}\right\} + \mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}(-Y_{Z^+,Z^-})\right\}.$$

Для першого доданку справедлива нерівність (1). Для другого також справджується ця нерівність, оскільки вона не залежить від Z^+, Z^-.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді* $\forall x > 0$ *справджується нерівність:*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{x\varkappa_N}{2}\right\}(1-2\varkappa_N x)^{\frac{1}{4}}.$$

Доведення. З нерівності Чебишева при $x > 0$, $s > 0$ випливає наступне:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > sx\right\} \le \frac{\mathsf{E}\exp\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right|\right\}}{\mathsf{E}\exp\{sx\}}.$$

З теореми 3 маємо:

$$\mathsf{P}\left\{\frac{s}{2(G_N)^{1/2}}\left|Y_{Z^+,Z^-}\right| > x\right\} \le 2\exp\left\{-(\frac{s\varkappa_N}{2} + sx)\right\}(1-2s\varkappa_N)^{-\frac{1}{4}}. \tag{2}$$

Мінімум правої частини досягається при $s = \frac{\varkappa_N^2 x}{1+2\varkappa_N x}$.

Легко бачити, що тут $s < \frac{1}{2\varkappa_N}$.

Підставимо це значення в (2) та отримаємо твердження теореми.

4. Узагальнені теореми Леві-Бакстера для псевдогаусових випадкових векторів.

Теорема 5. *Нехай $\vec{\xi}_N$ — послідовність псевдогаусових випадкових векторів, $N \geq 1$, для кожного з яких виконуються умови теореми 3.*

Нехай існує константа c, така що $\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)} \to c$, при $N \to \infty$.

Введемо наступні позначення: $I_{Z^+,Z^-,N} = \sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2$ та $F_N = \sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)} - c$, де $r_{kj}^{(N)}$ — елементи матриці R_N.

Тоді

$$I_{Z^+,Z^-,N} \to c$$

за ймовірністю, якщо $G_N \to 0$, при $N \to \infty$, та справджується наступна нерівність при $y > F_N$:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - c\right| > y\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{(y-F_N)\varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}}\right\}\left(1+\frac{2\varkappa_N(y-F_N)}{(G_N)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{4}},$$

де $G_N = \sum_{j,k=1}^{N} (r_{kj}^{(N)})^2$.

Доведення. З теореми 4 випливає, що

$$\mathsf{P}\left\{\left|\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - c\right| > y\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)}) + F_N}{4(G_N)^{1/2}} > \right.$$

$$\left. > \frac{y}{4(G_N)^{1/2}}\right\} =$$

$$= \mathsf{P}\left\{\frac{\sum_{k\in Z^+} \xi_k^2 - \sum_{k\in Z^-} \xi_k^2 - (\sum_{k\in Z^+} \varkappa_N r_{kk}^{(N)} - \sum_{k\in Z^-} r_{kk}^{(N)})}{4(G_N)^{1/2}} > \right.$$

$$\left. > \frac{y-F_N}{4(G_N)^{1/2}}\right\} \leq$$

$$\leq 2\exp\left\{-\frac{(y-F_N)\varkappa_N}{8(G_N)^{1/2}}\right\}\left(1+2\varkappa_N\frac{(y-F_N)}{4(G_N)^{1/2}}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

З цієї нерівності випливає твердження теореми.

Зауваження 1. *Узагальнена теорема Леві-Бакстера при $Z^- = \varnothing$ набуває вигляду теореми Леві-Бакстера.*

Список використаної літератури

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. – 257 p.
2. *Козаченко Ю. В., Вовк Л. Б.* Про швидкість збіжності в теоремах Леві-Бакстера для деяких класів випадкових процесів // Теорія ймовір. та матем. статист. – 1992. – Вип. 46. – С. 25–36.
3. *Козаченко Ю. В., Бесклинская Е. П.* Сходимость в нормах пространства Орлича и теоремы Леви-Бакстера// Теорія ймовір. та матем. статист. – 1986. – Вип. 35. – С. 3–6.

Одержано 02.03.2017

УДК 512.53+512.64

Е. М. Костишин (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ НАПІВГРУПИ ВСІХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДВОЕЛЕМЕНТНОЇ МНОЖИНИ

It is described the Auslander algebra for the matrix representations of the semigroup of all transformations of the two elements set over a field of any characteristic.

Описана алгебра Ауслендера для матричних зображень напівгрупи всіх перетворень двоелементної множини над полем довільної характеристики.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля K не ділить порядку скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; більш того, у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силівська p-підгрупа є циклічною. У модулярному випадку більшість скінченних груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності; точні означення ручних та диких задач див. в [1]. Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описані в роботі [2].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячена вивченню незвідних зображень та класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [3,4]), тощо. Серед інших випадків виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп (наприклад, опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ [5,6] чи алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ [7,8]) і деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [9] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [10, 11].

У цій статті ми описуємо алгебру Ауслендера для матричних зображень напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів, як у звичайному випадку, коли характеристика поля не дорівнює 2, так і в модулярному випадку, коли характеристика поля дорівнює 2. Нерозкладні зображення у цих випадках описано відповідно в роботах [10] і [12] (див. нижче пункт 2).

1. Напівгрупа representation type of the full transformation T_2. Напівгрупа всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ позначається нами через T_2. Вона складається із чотирьох елементів e, a, b, c:

$$e(1) = 1, \quad e(2) = 2; \quad a(1) = 2, \quad a(2) = 1;$$
$$b(1) = 2, \quad b(2) = 2; \quad c(1) = 1, \quad c(2) = 1.$$

Оскільки e — одиничний елемент напігрупи і $a^2 = e$, $b^2 = b$, $ab = b$, $ba = c$, $c^2 = c$, $ac = c$, $bc = c$, $ca = b$, $cb = b$, то e, a, b утворюють систему твірних із наступними визначальними співвідношеннями:

1) $e^2 = e, ea = ae = a, eb = be = b$;
2) $a^2 = e$, $b^2 = b$;
3) $ab = b$.

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $T = T_2$ над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $X : T \to M_n(K)$ напівгрупи T в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць розміру $n \times n$ над полем К (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (див. нижче); ми будемо розглядати лише такі зображення). Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи $T = T_2$ однозначно задається парою матриць

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$.

Еквівалентність матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 означає існування оборотної матриці C такої, що $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ (або, що те ж саме, $A'C = CA$ і $B'C = CB$, що практично більш зручніше, бо маємо лінійні відносно C рівності).

Пряма сума матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 — це матричне зображення $R \oplus R' = \{A \oplus A', B \oplus B'\}$, де

$$A \oplus A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad B \oplus B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $T = T_2$ (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи $T = T_2$ називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, породжену елементом a порядку 2).

Вище ми говорили, що у випадку, коли напівгрупа має одиничний елемент, практично можна вважати, що матричне зображення зіставляє йому одиничну матрицю.

Більш точно, має місце наступний факт.

Якщо $X : S \to M_n(K)$ — матричне зображення деякої напівгрупи S (див. вище відповідні позначення) і S містить одиничний елемент e, то зображення X еквівалентне прямій сумі зображень X_1 і X_2, таких що $X_1(e)$ — одинична матриця і $X_2(s) = 0$ для довільного $s \in S$. Іншими словами, якщо в означенні матричного зображення напігрупи з одиницею ми додатково будемо вимагати, щоб одиничному елементу відповідала одинична матриця, то ми втратимо лише одне нерозкладне зображення, а саме зображення, всі матриці якого є нульовими порядку 1.

Дійсно, оскільки матриця $Q = X_1(e)$ ідемпотентна, то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що існує оборотна матриця C така, що $Q = CQ_0C^{-1}$, де

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут і надалі E позначає одиничну матрицю (довільного порядку $m \geq 0$).

Розглянемо матричне зображення $\widehat{X} : s \to C^{-1}X(s)C$ (еквівалентне зображенню X), яке зіставляє одиничному елементу e матрицю Q_0. Із рівностей $\widehat{X}(e)\widehat{X}(s) = \widehat{X}(s)\widehat{X}(e) = \widehat{X}(s)$ (для довільного $s \in S$) і $\widehat{X}(e) = Q_0$, випливає, що в матриці

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{X}(s)_{11} & \widehat{X}(s)_{12} \\ \widehat{X}(s)_{21} & \widehat{X}(s)_{22} \end{pmatrix}$$

(розбитої на горизонтальні та вертикальні смуги таким же чином, як і матриця Q_0) блоки $\widehat{X}(s)_{12}$, $\widehat{X}(s)_{21}$, $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими, звідки маємо, що зображення $\widehat{X}(s)$ є прямою сумою зображення $X_1 : s \to \widehat{X}(s)_{11}$, яке зіставляє одиничному елементу e одиничну матрицю $\widehat{X}(e)_{11}$, та зображення $X_2 : s \to \widehat{X}(s)_{22}$, для якого всі матриці $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими.

2. Опис матричних зображень напівгрупи T_2. Скінченновимірні нерозкладні модулі над напівгруповою алгеброю KT_2 у немодулярному випадку описані (з точністю до ізоморфізму) в роботі [10]. Переформулюємо цей результат на мові матричних зображень самої напівгрупи T_2.

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики $p \neq 2$ вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0$;

2) $a \to -1, \quad b \to 0$;

3) $a \to 1, \quad b \to 1$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 у модулярному випадку описані в роботі [12].

Теорема 2. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0$;

2) $a \to 1, \quad b \to 1$;

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$$5) \quad a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Формулювання основних теорем. Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу (тобто, яка має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то алгебра Ауслендера буде реалізовуватись також в матричному вигляді і в цьому випадку природно називати її матричною алгеброю Ауслендера.

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T алгебры Λ — це довільна матриця X така, що $T(y)X = XT(y)$ для будь-якого $y \in \Lambda$.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в классах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Оскільки між зображеннями напівгрупи та зображеннями її напівгрупової алгебри існує природна взаємно однозначна відповідність, то можна говорити про алгебру Ауслендера напівгруп.

Сформулюємо основні результати цієї статті.

Теорема 3. *Якщо K — поле характеристики $p \neq 2$, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K.

Теорема 4. *Якщо K — поле характеристики 2, то матрична алгебра Ауслендера для напівгрупи T_2 складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0 \\ 0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29} \\ 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0 \\ 0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69} \\ 0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 \\ 0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij}— елементи поля K.

4. Доведення теореми 3. Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 1:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нехай $X-$ елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду $(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij}$ і $(B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$ будемо позначати відповідно $(1; i, j)$ і $(2; i, j)$.

Розглянемо спочатку рівність $A_0X = XA_0$. Вона еквівалентна наступним скалярним рівностям:

$$\begin{array}{lll} (1;1,2): x_{12} = -x_{12}, & (1;2,4): -x_{24} = x_{24}, & (1;4,5): x_{45} = -x_{45}, \\ (1;1,5): x_{15} = -x_{15}, & (1;3,2): x_{32} = -x_{32}, & (1;5,1): -x_{51} = x_{51}, \\ (1;2,1): -x_{21} = x_{21}, & (1;3,5): x_{35} = -x_{35}, & (1;5,3): -x_{53} = x_{53}, \\ (1;2,3): -x_{23} = x_{23}, & (1;4,2): x_{42} = -x_{42}, & (1;5,4): -x_{54} = x_{54}. \end{array}$$

Отже, матриця X має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & x_{14} & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & x_{25} \\ x_{31} & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ x_{41} & 0 & x_{43} & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Тепер використаємо рівність $B_0X = XB_0$:

$$\begin{array}{lll} (2;1,2): x_{22} = x_{11}, & (2;3,2): 0 = x_{31}, & (2;4,1): 0 = x_{41}, \\ (2;1,4): x_{14} = 0, & (2;3,4): x_{34} = 0, & (2;4,3): 0 = x_{43}, \\ (2;1,5): x_{25} = 0. & & \end{array}$$

Звідси маємо, що

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Теорема доведена.

5. Доведення теореми 4. Доведення проводиться по тій же схемі, що і доведення попередньої теореми.

Розглянемо наступну пряму суму нерозкладних зображень, вказаних в теоремі 2:

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Нехай $X-$ елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} & x_{49} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} & x_{58} & x_{59} \\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} & x_{66} & x_{67} & x_{68} & x_{69} \\ x_{71} & x_{72} & x_{73} & x_{74} & x_{75} & x_{76} & x_{77} & x_{78} & x_{79} \\ x_{81} & x_{82} & x_{83} & x_{84} & x_{85} & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} \\ x_{91} & x_{92} & x_{93} & x_{94} & x_{95} & x_{96} & x_{97} & x_{98} & x_{99} \end{pmatrix}$$

така, що $A_0X = XA_0$, $B_0X = XB_0$. Скалярні рівності вигляду $(A_0X)_{ij} = (XA_0)_{ij}$ і $(B_0X)_{ij} = (XB_0)_{ij}$ будемо позначати відповідно $(3; i, j)$ і $(4; i, j)$.

Розглянемо спочатку матричну рівність $B_0X = XB_0$. Вона еквівалентна наступним скалярним рівностям:

$$
\begin{array}{llll}
(3;1,2): x_{12}=0, & (3;3,1): 0=x_{31}, & (3;5,1): 0=x_{31}, & (3;8,2): x_{82}=0,\\
(3;1,3): x_{13}=0, & (3;3,4): 0=x_{34}, & (3;5,4): 0=x_{34}, & (3;8,3): x_{83}=0,\\
(3;1,5): x_{15}=0, & (3;3,8): 0=x_{38}, & (3;5,8): 0=x_{38}, & (3;8,5): x_{85}=0,\\
(3;1,6): x_{16}=0, & (3;4,2): x_{42}=0, & (3;6,1): 0=x_{61}, & (3;8,6): x_{86}=0,\\
(3;1,7): x_{17}=0, & (3;4,3): x_{43}=0, & (3;6,4): 0=x_{64}, & (3;8,7): x_{87}=0,\\
(3;1,9): x_{19}=0, & (3;4,5): x_{45}=0, & (3;6,8): 0=x_{68}, & (3;8,9): x_{89}=0,\\
(3;2,1): 0=x_{21}, & (3;4,6): x_{46}=0, & (3;7,1): 0=x_{71}, & (3;9,1): 0=x_{91},\\
(3;2,4): 0=x_{24}, & (3;4,7): x_{47}=0, & (3;7,4): 0=x_{74}, & (3;9,4): 0=x_{94},\\
(3;2,8): 0=x_{28}, & (3;4,9): x_{49}=0, & (3;7,8): 0=x_{78}, & (3;9,8): 0=x_{98}.
\end{array}
$$

Отже, матриця X має наступний вигляд:

$$
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & 0 & 0 & x_{14} & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0\\
0 & x_{22} & x_{23} & 0 & x_{25} & x_{26} & x_{27} & 0 & x_{29}\\
0 & x_{32} & x_{33} & 0 & x_{35} & x_{36} & x_{37} & 0 & x_{39}\\
x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0\\
0 & x_{52} & x_{53} & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 & x_{59}\\
0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69}\\
0 & x_{72} & x_{73} & 0 & x_{75} & x_{76} & x_{77} & 0 & x_{79}\\
x_{81} & 0 & 0 & x_{84} & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0\\
0 & x_{92} & x_{93} & 0 & x_{95} & x_{96} & x_{97} & 0 & x_{99}
\end{pmatrix}.
$$

Тепер використаємо рівність $A_0X = XA_0$:

$$
\begin{array}{lll}
(4;1,2): x_{32}=0, & (4;4,2): x_{52}=0, & (4;6,5): x_{75}=0,\\
(4;1,3): x_{33}=x_{11}, & (4;4,3): x_{53}=x_{41}, & (4;6,6): x_{76}=0,\\
(4;1,5): x_{35}=x_{14}, & (4;4,5): x_{55}=x_{44}, & (4;6,7): x_{77}=x_{66},\\
(4;1,6): x_{36}=0, & (4;4,6): x_{56}=0, & (4;6,9): x_{79}=0,\\
(4;1,7): x_{37}=0, & (4;4,7): x_{57}=0, & (4;8,3): 0=x_{81},\\
(4;1,9): x_{39}=0, & (4;4,9): x_{59}=0, & (4;8,5): 0=x_{84},\\
(4;2,3): x_{33}=x_{22}, & (4;6,2): x_{72}=0, & (4;9,3): 0=x_{92},\\
(4;2,5): x_{35}=0, & (4;6,3): x_{73}=x_{62}, & (4;9,7): 0=x_{96},\\
(4;2,7): x_{37}=x_{26}. & &
\end{array}
$$

Звідси маємо, що

$$
X = \begin{pmatrix}
x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{18} & 0\\
0 & x_{11} & x_{23} & 0 & x_{25} & 0 & x_{27} & 0 & x_{29}\\
0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
x_{41} & 0 & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & x_{48} & 0\\
0 & 0 & x_{41} & 0 & x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{62} & x_{63} & 0 & x_{65} & x_{66} & x_{67} & 0 & x_{69}\\
0 & 0 & x_{62} & 0 & 0 & 0 & x_{66} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0\\
0 & 0 & x_{93} & 0 & x_{95} & 0 & x_{97} & 0 & x_{99}
\end{pmatrix}.
$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: “Мир”, 1972. – 285 с.
4. Okninski, J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
5. Гельфанд И. М., Пономарьов В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
7. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
8. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
9. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
10. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
11. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – **61**, № 3. – P. 429–434.
12. Бондаренко В. М., Костишин Е. М., Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – **22**, № 1. – С. 26–34.

Одержано 02.03.2017

УДК 519.21, 519.71

Т. О. Лукашів, І. В. Малик (Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ СТОХАСТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ТА ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ В *l.i.m.* ДЛЯ СТОХАСТИЧНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З МАРКОВСЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ І ПЕРЕМИКАННЯМИ

Sufficient conditions equivalent concepts of stochastic stability and exponential stability in the mean square for stochastic dynamic systems random structure with Markov switching are obtained.

Встановлено достатні умови еквівалентності концепцій стохастичної стійкості та експоненціальної стійкості в середньому квадратичному для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями.

1. Вступ. У задачах стабілізації для стохастичних систем концепції стохастичної стійкості та експоненціальної стійкості у *l.i.m.* стоять поруч. Так, розв'язання задачі стабілізації для таких систем передбачає побудову оптимального керування, яке, окрім мінімізації вартості керування, стабілізує систему до стохастично стійкої [1]– [4], у той же час, коли допустимим є таке керування, при якому система є експоненціально стійкою в середньому квадратичному [1]– [5]. Враховуючи те, що оптимальне керування є одночасно допустимим, очевидною є практична потреба чітко окреслити клас допустимих керувань, для яких окрім концепції експоненціальної стійкості в середньому квадратичному властива концепція стохастичної стійкості.

Для лінійних систем з марковськими параметрами з неперервним або дискретним часом еквівалентність вказаних концепцій стійкості доведена в [6]. В даній роботі за схожою методикою встановлено достатні умови еквівалентності концепцій стохастичної стайкості й експоненціальної стійкості в середньому квадратичному для стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями.

2. Постановка задачі та означення. На ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{F} := \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ [7] розглядається стохастична динамічна система випадкової структури, яка описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t) = a(t, x(t), \xi(t))dt + b(t, x(t), \xi(t))dw(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{T}, \tag{1}$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x(t_k-), \xi(t_k-), \eta_k),$$
$$t_k \in \mathbb{T} := \{t_k \uparrow, k = 0, 1, 2, \ldots\}, \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty, \tag{2}$$

і початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \xi(0) = y \in \mathbb{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Тут $x(t), t \geq 0$ — вектор стану системи, $\xi(t), t \geq 0$ — марковський процес із значеннями у вимірному просторі $\mathbb{Y}$; $\eta_k, k \geq 0$ — ланцюг Маркова із значеннями у вимірному просторі $\mathbb{H}$, $w(t), t \geq 0$ — стандартний одновимірний вінерів процес; процеси ξ, η та w — $\mathfrak{F}_t$-вимірні і незалежні в сукупності [7], [8].

Припускається, що вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$, $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$ і $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^m$ задовольняють за другим аргументом умову Ліпшиця рівномірно за всіма іншими аргументами

$$|a(t,x_1,y) - a(t,x_2,y)|^2 + |b(t,x_1,y) - b(t,x_2,y)|^2 +$$
$$+ |g(t,x_1,y,h) - g(t,x_2,y,h)|^2 \leq L|x_1 - x_2|^2, \quad L > 0, \tag{4}$$

$\forall t \geq 0, y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, і умову обмеженості

$$\sup_{t\geq 0,\ y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H}} (|a(t,0,y)| + |b(t,0,y)| + |g(t,0,y,h)|) = c < \infty, \tag{5}$$

і, крім того, $\forall\ T < \infty$

$$\sup_{y\in\mathbb{Y},\ x\in\mathbb{R}^m} \int_0^T |b(t,x,y)|^2 dt < +\infty. \tag{6}$$

Зрозуміло, що виконання умов (4)–(6) гарантує існування єдиного розв'язку (1)–(3) [9].

Можна довести, що трійка $\{x(t), \xi(t), \eta(t)\}$, де $\eta(t) = \eta_k, t_k \leq t < t_{k+1}, k \geq 0$, являє собою феллерівський марковський процес і розглянути оператор Ляпунова на вимірних функціях $v(x,y,h) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1$, який заданий рівністю [8]

$$\mathcal{L}v(x,y,h) := \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \big[\mathbb{E}^{(t)}_{y,h,x}\{v(x(t+\Delta t), \xi(t+\Delta t), \eta(t+\Delta t))\} - v(x,y,h)\big], \tag{7}$$

де $\mathbb{E}^{(t)}_{y,h,x} v := \mathbb{E}\{v / x(t) = x, \xi(t) = y, \eta(t) = h\}$.

Означення 1. Функцією Ляпунова для системи випадкової структури (1)-(3) назвемо невід'ємну функцію $v(x,y,h)$, для якої виконуються умови:

– при всіх $y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{R}^m$ визначений оператор Ляпунова (7);

– при $r \to \infty$ $\quad \overline{v}(r) := \inf_{y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H},\ |x|\geq r} v(x,y,h) \to \infty$;

– при $r \to 0$ $\quad \underline{v}(r) := \sup_{y\in\mathbb{Y},\ h\in\mathbb{H},\ |x|\leq r} v(x,y,h) \to 0$;

— $\overline{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні і монотонні.

Оскільки сильний розв'язок $x(t), t \geq 0$, рівняння (1) з марковськими перемиканнями (2) однозначно визначається початковими умовами (3), то далі позначатимемо його $x(t, x_0, y, h)$.

Означення 2. Для системи (1)–(3) точка рівноваги 0 є

– стохастично стійкою, якщо для кожного початкового стану $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і початкових станів y для ξ та h для η

$$\mathbb{E}\Big\{ \int_0^\infty |x(t,x_0,y,h)|^2 dt \Big\} < \infty;$$

– експоненціально стійкою в середньому квадратичному, якщо для кожного початкового стану $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і початкових станів y для ξ та h для η існують константи $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такі, що

$$\mathbb{E}|x(t,x_0,y,h)|^2 \leq \alpha |x_0|^2 e^{-\beta t}, \forall t \geq 0.$$

3. Основний результат. Має місце твердження.

Теорема 1. Достатньою умовою стохастичної стійкості й експоненцальної стійкості в середньому квадратичному для системи (1)–(3) є існування послідовності функцій Ляпунова $v_k(x, y, h), k \geq 0$, та строго зростаючих додатних функцій $c(\cdot), f(\cdot)$ та $z(\cdot)$, $c(0) = 0$, $f(0) = 0$, $z(0) = 0$, таких, що за умови

$$f(|x(t, x_0, y, h)|^2) \leq v_k(x, y, h) \leq z(|x(t, x_0, y, h)|^2) \tag{8}$$

має місце нерівність

$$\mathcal{L}v_k(x, y, h) \leq -c(|x(t, x_0, y, h)|), \tag{9}$$

для $t \in [t_k, t_{k+1}), k \geq 0$, і

$$\sum_{j=kN_T}^{kN_T+n-1} \mathbb{E}\{v_j(x, \xi(t_j), \eta_j)\} \leq \chi_k(v_k(x(t_k-), \xi(t_k-), \eta_k)), \tag{10}$$

для деякого цілого $N_T \geq 0$, $k \geq 0$, $n = 1, 2, ..., N_T$, де $\chi_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є неспадною функцією і $\chi_k(s) \leq s$.

Зауваження. Умови (9), (10) є послабленням класичних умов експоненціальної стійкості для системи (1)–(3) [10].

Доведення. На інтервалі $[t_k, t_{k+1}), k \geq 0$, розглянемо слабкий інфінітезимальний оператор на функції Ляпунова $v_k(x, y, h)$. На основі (9) маємо

$$\mathcal{L}v_k(x, y, h) \leq -c(|x(t, x_0, y, h)|) = -\frac{c(|x(t, x_0, y, h)|)}{v_k(x, y, h)} \cdot v_k(x, y, h) \leq -\alpha v_k(x, y, h),$$

де скаляр $\alpha > 0$ визначається як

$$\alpha = \min_x \frac{c(|x(t, x_0, y, h)|)}{z(|x(t, x_0, y, h)|)}.$$

За формулою Динкіна [8] для будь-якого $t \in [t_{\overline{k}}, t_{\overline{k}+1})$, і деякого $\overline{k} \geq 0$

$$\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1} \int_{t_j}^{t_j+1} \mathcal{L}v_j(x(s), y, h)ds + \int_{t_{\overline{k}}}^{t} \mathcal{L}v_{\overline{k}}(x(s), Y, h)ds\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\overline{k}-1} \mathbb{E}\{v_{j+1}(x(t_{j+1}-), \xi(t_{j+1}-), \eta(t_{j+1}-))\} - v_j(x(t_j), \xi(t_j), \eta(t_j))+$$

$$+\mathbb{E}v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}), \xi(t_{\overline{k}}), \eta(t_{\overline{k}})) - v_{\overline{k}}(x, y, h) =$$

$$\mathbb{E}\{v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}), \xi(t_{\overline{k}}), \eta(t_{\overline{k}}))\} - v_0(x_0, y, h)+$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{\overline{k}}{N_T}\right]-1} \sum_{j=kN_T}^{(k+1)N_T-1} \mathbb{E}\{v_j(x(t_j-), \xi(t_j-), \eta(t_j-))\} - v_j(x(t_j), \xi(t_j), \eta(t_j))+$$

$$+\sum_{j=\left[\frac{\overline{k}}{N_T}\right]N_T}^{\overline{k}} \mathbb{E}\{v_j(x(t_j-),\xi(t_j-),\eta(t_j-))\} - v_j(x(t_j),\xi(t_j),\eta(t_j)).$$

Тоді з (10) отримуємо, що

$$\mathbb{E}\{v_{\overline{k}}(x(t_{\overline{k}}),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))\} - v_0(x_0,y,h) \le$$

$$\le \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathcal{L}v_j(x(s),\xi(t_j),\eta(t_j))ds + \int_{t_{\overline{k}}}^{t} \mathcal{L}v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\} \le$$

$$\le -\alpha\mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\overline{k}-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j(x(s),\xi(t_j),\eta(t_j))ds + \int_{t_{\overline{k}}}^{t} v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\} =$$

$$= -\alpha\mathbb{E}\left\{\int_0^t v_{\overline{k}}(x(s),\xi(t_{\overline{k}}),\eta(t_{\overline{k}}))ds\right\}.$$

З останньої нерівності випливає, що

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\{v_k(x,\xi(t_k),\eta_k)\} \le -\alpha\frac{d}{dt}\int_0^t \mathbb{E}\{v_k(x(s),\xi(t_k),\eta_k)\}ds = -\alpha\mathbb{E}\{v_k(x,y,h)\},$$

тобто, згідно з лемою Гронуолла-Беллмана

$$\mathbb{E}\{v_k(x,y,h)\} \le v_0(x_0,y,h)e^{-\alpha t}.$$

З останньої нерівності і (8) випливає, що система (1)–(3) експоненіально стійка в середньому квадратичному і тому є стохастично стійкою. Теорема доведена.

4. Виновки. У даній роботі встановлено достатні умови еквівалентності концепцій стохастичної стійкості та експоненціальної стійкості в середньому квадратичному для стохастичної динамічної системи з марковськими параметрами і перемиканнями, тобто вдалося послабити класичні умови експоненціальної стійкості для системи (1)–(3). Практичне значення отриманого результату диктується необхідністю якнайточнішого окреслення класу допустимих розв'язків для задачі оптимальної стабілізації для вказаних систем, і, як наслідок, економії затрат (наприклад, часу) при виборі оптимального керування.

Список використаної літератури

1. *Кац И.Я.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. – Екатеринбург: УГАПС, 1998. – 222 с.
2. *Лукашив Т.О., Ясинская Л.И., Ясинский В.К.* Стабилизация стохастических динамических систем с импульсными марковскими переключениями и параметрами. Часть 2. Стабилизация динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 2. – С. 14–29.
3. *Лукашів Т.О.* Стабілізація одного виду системи випадкової структури // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. – Вип. №2 (29). – Ужгород: Вид-во УжНУ "Говерла – 2016. – С. 59–71.

4. *Hu L., Shi P., Huang B.* Stochastic stability and robust control for semped-datas with Markovian jump parameters // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – no. 313. – pp. 504–517.
5. *Лукашів Т.О.* Достатні умови стабілізовності лінійних стохастичних систем випадкової структури із зовнішніми марковськими перемиканнями // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. Вип. 485: Математика. – Чернівці: Рута, 2009. – С. 35–40.
6. *Feng X., Loparo K.A., Ji Y., Chizek H.J.* Stochastic stability poperties of jump linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1992. – no. 37. – pp. 38–53.
7. *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: в 2 т. – М.: Физматгиз, 1994. – Т. 1. – 554 с., – Т. 2. – 473 с.
8. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1969. – 859 с.
9. *Лукашів Т.О., Ясинський В.К.* Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням // Волинський математичний вісник. Прикладна математика. – 2013. – Вип. 10 (191). – С. 140–151.
10. *Лукашів Т.О., Ясинський В.К.* Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т., 2013. – 136 с.

Одержано 10.01.2017

УДК 517.9

К. В. Маринець, О. Т. Мауриц (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ТОПОЛОГІЧНИХ ІНДЕКСІВ

We give new existence results of the boundary–value problem investigation, in the case of two–point non–linear boundary conditions, that base upon the theory of topological indexes, i. e. the Brauwer topological index.

У роботі наведено нові результати дослідження існування розв'язків нелінійних двоточкових крайових задач, які базуються на використанні теорії топологічних індексів, а саме — топологічного індексу Брауера.

1. Вступ. Результати, які наведено у даній роботі, є новими та базуються на одержаних раніше результатах дослідження нелінійних багатоточкових та інтегральних крайових задач [1–7], та є продовженням роботи [3].

2. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу для системи нелінійних диференціальних рівнянь з нелінійними двоточковими граничними умовами вигляду:

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = f\,(t, x\,(t))\,,\ t \in [0, T]\,,\ x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g\,(x\,(0)\,, x\,(T)) = 0, \tag{2}$$

де функції $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ та $g : D \times D \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ неперервні, а множина $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у встановленні необхідних та достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1), (2) у класі неперервно диференційовних функцій $x : [0, T] \times D$.

3. Побудова наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2). У науковій статті [3] обгрунтовано, що доцільно, замість крайової задачі (1), (2) з нелінійними крайовими умовами, досліджувати задачу з деякими параметризованими лінійними умовами. Таким чином, за допомогою параметризації вигляду:

$$z := x(0),\ \ \lambda := x(T). \tag{3}$$

одержимо крайову задачу з лінійними розділеними крайовими умовами:

$$x(0) = z,\ \ x(T) = d(z, \lambda), \tag{4}$$

де $d(z, \lambda) := \lambda + g\,(z, \lambda)$.

Зауваження 1. *Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1), (4), які задовольняють додатковим умовам (3).*

Припустимо, що крайова задача (1), (4) задовольняє наступні умови:

1) Функція f неперервна в області $[0, T] \times D$ та задовольняє умову Ліпшиця:

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K\,|u - v|\,, \tag{5}$$

для всіх $t \in [0, T]\,,\ \{u, v\} \subset D$, де $K = (k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами.

2) множина

$$D_\beta := \left\{ z \in D : B\left(z + \frac{t}{T}\left[d(z,\lambda) - z \right], \frac{T}{2}\delta_D(f) \right) \subset D, \forall \lambda \in D \right\}$$

є непорожньою, тобто

$$D_\beta \neq \emptyset, \tag{6}$$

де

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) \right]. \tag{7}$$

3) Спектральний радіус матриці

$$Q := \frac{3T}{10}K \tag{8}$$

задовольняє нерівність:

$$r(Q) < 1. \tag{9}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1), (4) будуємо послідовність функцій $\{x_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням [3]:

$$x_m(t,z,\lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds -$$

$$- \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s,z,\lambda))ds + \frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z \right], \tag{10}$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots,$ $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$, а в якості початкового наближення розглядається функція:

$$x_0(t,z,\lambda) = z + \frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right) - z \right] \in \ D_\beta,$$

Для доведення необхідних та достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1), (4) наведемо основні теореми.

Теорема 1. *[3] Нехай функція $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1), а також параметризовані розділені крайові умови (4) задовольняють умови (5), (6), (9).*

Тоді при всіх фіксованих $\lambda \in D$, $z \in D_\beta$:

1) *Усі функції послідовності (10) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$x_m(0,z,\lambda) = z, \ \ x_m(T,z,\lambda) = d\left(z,\lambda\right),$$

m=1,2,3,....

2) *Послідовність функцій (10) рівномірно збігається відносно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$ до граничної функції*

$$x_\infty(t,z,\lambda) = \lim_{m\to\infty} x_m(t,z,\lambda). \tag{11}$$

3) Гранична функція x_∞ задовольняє параметризовані лінійні граничні умови:

$$x_\infty(0,z,\lambda)=z,\ x_\infty(T,z,\lambda)=d(z,\lambda).$$

4) Гранична функція (11) для всіх $t\in[0,T]$ є единим неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння:

$$x(t)=z+\int_0^t f(s,x(s))ds-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds+\frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right)-z\right],$$

або еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\Delta(z,\lambda),$$

$$x(0)=z, \tag{12}$$

де

$$\Delta\left(z,\lambda\right):=\frac{1}{T}\left[d\left(z,\lambda\right)-z\right]-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x(s))ds. \tag{13}$$

5) Має місце оцінка відхилення x_m від її граничної функції:

$$|x_\infty(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)|\le\frac{20}{9}t\left(1-\frac{t}{T}\right)Q^m(I_n-Q)^{-1}\delta_D(f), \tag{14}$$

де I_n — одинична n–вимірна матриця, $K,Q,\delta_D(f)$ задаються співвідношеннями (5), (8) та (7) відповідно.

Розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)+\mu, t\in[0,T] \tag{15}$$

з початковими умовами (12), де $\mu=col(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ є керуючим параметром.

Теорема 2. *[3] Нехай $z\in D_\beta$, $\lambda\in D$ та $\mu\in\mathbb{R}^n$ — довільно задані вектори. Припустимо, що для системи (1) виконуються всі умови Теореми 1.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (15), (12) задовольняв також і двоточкові параметризовані крайові умови (4), необхідно і достатньо, щоб параметр μ в (15) був заданий рівністю:

$$\mu=\mu_{z,\lambda}=\frac{1}{T}\left[d(z,\lambda)-z\right]-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x_\infty(s,z,\lambda))ds.$$

де x_∞ має вигляд (10).

Теорема 3. *[3] Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови (5), (6), (9).*

Тоді пара $(x_\infty(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ *є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (4) тоді і тільки тоді, коли* $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ *задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних рівнянь:*

$$\Delta(z,\lambda) = \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s,z,\lambda))ds = 0, \tag{16}$$

$$x_\infty(T,z,\lambda) = \lambda. \tag{17}$$

Зауваження 2. *При деякому* $m \geq 1$ *визначимо функцію* $\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ *згідно формули:*

$$\Delta_m(z,\lambda) := \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))ds, \tag{18}$$

де z *та* λ *задаються співвідношеннями (3). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1), (4) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних рівнянь, що має вигляд:*

$$\Delta_m(z,\lambda) = \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda))ds = 0, \tag{19}$$

$$x_m(T,z,\lambda) = \lambda, \tag{20}$$

де $x_m(\cdot, z, \lambda)$ *вектор–функція, задана рекурентним співвідношенням (10).*

При зростанні m *системи (16), (17) і (19), (20) досить близькі, щоб забезпечити необхідну точність знаходження наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).*

4. Достатні умови існування розв'язків крайової задачі

Означення 1. *[4] Для всіх індексів* i_1 *та* i_2, *що приймають значення від* 1 *до* n, *визначимо матрицю* J_{i_1,i_2} *розмірності* $(i_2 - i_1 + 1) \times n$ *наступним чином:*

$$J_{i_1,i_2} := \left(O_{i_2-i_1+1,i_1-1}, I_{i_2-i_1+1}, O_{i_2-i_1+1,n-i_2}\right).$$

Таким чином, множення зліва деякого вектора матрицею J_{i_1,i_2} еквівалентно вибору його компонент з номерами від i_1 до i_2.

Лема 1. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді для кожного $m \geq 1$ *та* z, λ *вигляду (3) для точної та наближеної визначальних функцій*

$$\Delta : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n,$$
$$\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$$

визначених згідно з (13) та (18), випливає оцінка:

$$|\Delta(z,\lambda) - \Delta_m(z,\lambda)| \leq \frac{10T}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f), \tag{21}$$

де $K, Q, \delta_D(f)$ *задаються співвідношеннями (5), (8) та (7) відповідно.*

Доведення. Зафіксуємо параметри z, λ вигляду (3). З урахуванням умови Ліпшиця (5), оцінки (14) та рівності

$$\int_0^T \alpha_1(t)dt = \frac{T^2}{3},$$

маємо:

$$|\Delta(z,\lambda) - \Delta_m(z,\lambda)| =$$

$$= \left| \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_\infty(s,z,\lambda)\right) ds - \frac{1}{T} \int_0^T f\left(s, x_m(s,z,\lambda)\right) ds \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T} \int_0^T K \left| x_\infty(s,z,\lambda) - x_m(s,z,\lambda) \right| ds \leq \frac{1}{T} K \int_0^T \frac{10}{9} \alpha_1(s) Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) ds =$$

$$= \frac{10}{9T} K Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f) \int_0^T \alpha_1(s) ds = \frac{10T}{27} K Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \delta_D(f),$$

що і доводить лему.

На основі систем визначальних рівнянь (16), (17) та (19), (20) введемо в розгляд наступні відображення:

$$\Phi : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^{2n},$$
$$\Phi_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^{2n},$$

які для всіх z, λ з (3) мають вигляд:

$$\Phi(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_\infty(s,z,\lambda)) ds \\ x_\infty(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\Phi_m(z,\lambda) := \begin{pmatrix} \frac{1}{T}\left[d(z,\lambda) - z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s,z,\lambda)) ds \\ x_m(T,z,\lambda) - \lambda \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Означення 2. *[4] Нехай $H \subset \mathbb{R}^{2n}$ деяка непорожня множина. Для всякої пари функцій*

$$f_j = col\left(f_{j1}(x), \ldots, f_{j,2n}(x)\right) : H \to \mathbb{R}^{2n}, j = 1,2$$

має місце запис:

$$f_1 \triangleright_H f_2$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція

$$g : H \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$$

така, що

$$f_{1,g(x)} > f_{2,g(x)}$$

для всіх $x \in H$, це означає, що в кожній точці $x \in H$ принаймні одна з компонент вектора $f_1(x)$ більша, ніж відповідна їй компонента вектора $f_2(x)$.

Розглянемо множину:

$$\Omega = D_1 \times \Lambda_1, \tag{24}$$

де $D_1 \subset D_\beta$, $\Lambda_1 \subset D_0$ — деякі відкриті множини.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови Теореми 1 і можна вказати деяке $m \geq 1$ та множину $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ вигляду (24) такі, що має місце співвідношення:*

$$|\Phi_m| \rhd_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} KQ^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{20}{9} t(1 - \frac{t}{T}) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

.

Крім того, якщо індекс Брауера векторного поля Φ_m на множині Ω відносно нуля задовольняє нерівність:

$$deg\,(\Phi_m, \Omega, 0) \neq 0, \tag{26}$$

тоді існує пара $(z^*, \lambda^*) \in \Omega$ така, що

$$x_\infty(t) = x_\infty\,(t, z^*, \lambda^*) = \lim_{m\to\infty} x_m\,(t, z^*, \lambda^*) \tag{27}$$

є розв'язком нелінійної крайової задачі (1), (2) з початковою умовою

$$x_\infty(0) = z^*. \tag{28}$$

Доведення. Доведемо, що векторні поля Φ та Φ_m гомотопні. Для цього введемо в розгляд сім'ю векторних відображень:

$$P(\theta, z, \lambda) := \Phi_m(z, \lambda) + \theta\,[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)]\,, \tag{29}$$

де $(z, \lambda) \in \partial\Omega$, $\theta \in [0, 1]$.

Очевидно, що $P(\theta, \cdot, \cdot)$ — неперервне на $\partial\Omega$ для кожного $\theta \in [0, 1]$. Крім того,

$$P(0, z, \lambda) = \Phi_m(z, \lambda), P(1, z, \lambda) = \Phi(z, \lambda)$$

для всіх $(z, \lambda) \in \partial\Omega$.

Для довільної пари $(z, \lambda) \in \partial\Omega$, з урахуванням (29), маємо

$$|P\,(\theta, z, \lambda)| = |\Phi_m(z, \lambda) + \theta\,[\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda]| \geq$$
$$\geq |\Phi_m(z, \lambda)| - |\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)|\,. \tag{30}$$

З іншого боку, на основі позначеннь (22), (23), з використанням апроксимації (10) та оцінки (21), одержимо покомпонентні нерівності:

$$|\Phi(z, \lambda) - \Phi_m(z, \lambda)| \leq \begin{pmatrix} \frac{10T}{27} KQ^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \\ \frac{20}{9} t(1 - \frac{t}{T}) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_D(f) \end{pmatrix}, \tag{31}$$

звідки, на основі співвідношень (25), (30), (31), випливає, що:

$$|P\,(\theta, \cdot, \cdot)| \rhd_{\partial\Omega} 0, \theta \in [0, 1]. \tag{32}$$

Вираз (32) зокрема показує, що $P\,(\theta, \cdot, \cdot)$ не перетворюється в 0, для жодного значення $\theta \in [0, 1]$, тобто збурення (29) невироджене, а отже, векторні поля, Φ_m та Φ гомотопні..

Беручи до уваги співвідношення (26) та властивість інваріантності індексу Брауера відносно гомотопії, можемо зробити висновок, що

$$deg\,(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0) = deg\,(\Phi(z, \lambda), \Omega, 0) \neq 0.$$

Класичний топологічний результат гарантує існування пари:

$$(z^*, \lambda^*) \in \Omega$$

такої, що

$$\Phi\left(z^*, \lambda^*\right) = 0.$$

Тому пара (z^*, λ^*) задовольняє систему визначальних рівнянь (15), (16).

Беручи до уваги умови Теореми 3, приходимо до висновку, що функція (27) є розв'язком вихідної нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) з початковою умовою (28).

Зауваження 3. *Для перевірки умови (25) Теореми 4 на конкретних прикладах, потрібно використати рекурентну формулу (10), щоб обчислити значення функції $x_m(\cdot, z, \lambda)$, яка залежить від параметрів $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ та встановити чи принаймні одна з компонент вектора Φ_m у лівій частині співвідношення (25) більша ніж відповідна їй компонента вектора у правій частині його у кожній точці границі $\partial\Omega$.*

Після цього встановити, згідно з (26), чи топологічний індекс відображення Φ_m відмінний від нуля. У загальному це є досить складною задачею, але в ряді випадків можна застосувати додаткові критерії для дослідження цього питання.

Зокрема, коли Φ_m не парне відображення, тобто

$$\Phi_m(-z, -\lambda) = -\Phi_m(z, \lambda),$$

тоді згідно з теоремою Борсука індекс Брауера є непарним числом, а отже відмінним від нуля.

Зауваження 4. *Безпосередньо з визначення топологічного індексу випливає, що якщо якобіан функції Φ_m вигляду (23) вироджений в ізольованому нулі*

$$z = z_{m,0},\ \lambda = \lambda_{m,0},$$

тобто

$$det \frac{\partial}{\partial(z, \lambda)} \Phi_m(z_{m,0}, \lambda_{m,0}) \neq 0,$$

тоді нерівність (26) має місце.

5. Необхідні умови існування розв'язків. Введемо у розгляд матрицю

$$R := \sup_{t \in [0,T]} \left| 1 - \frac{t}{T} \right| I_n \tag{33}$$

та вектор

$$\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1) = d(z^0, \lambda^0) - d(z^1, \lambda^1). \tag{34}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді гранична функція (11) відносно змінних z та λ задовольняє умову ліпшицевого типу наступного вигляду:

$$\left| x_\infty\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_\infty\left(t, z^1, \lambda^1\right) \right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} \alpha_1(t)\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|, \tag{35}$$

де $z^j \in D_\beta,\ \lambda^j \in D_0,\ j = 0, 1,\ t \in [0, T]$.

Доведення. З виразу (10) при $m = 1$ випливає

$$x_1\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_1\left(t, z^1, \lambda^1\right) = \left(z^0 - z^1\right) +$$

$$+ \int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T} \int_0^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds +$$

$$+ \frac{t}{T}\Big[d(z^0, \lambda) - z^0 - d(z^1, \lambda) + z^1\Big] =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{T}\right) I_n \left(z^0 - z^1\right) + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds -$$

$$- \frac{t}{T} \int_t^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T}\left[d(z^0, \lambda) - d(z^1, \lambda)\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{t}{T}\right) I_n \left(z^0 - z^1\right) + \left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds -$$

$$- \frac{t}{T} \int_t^T \left[f\left(s, z^0\right) - f\left(s, z^1\right)\right] ds - \frac{t}{T} \rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1),$$

де $\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)$ визначена згідно з (34).

Використовуючи рекурентну формулу (10) та беручи до уваги співвідношення (5), (33), (34) одержимо:

$$\left|x_1\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_1\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq R\left|z^0 - z^1\right| + K\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t ds + \frac{t}{T} \int_t^T ds\right] \left|z^0 - z^1\right| + \frac{t}{T} |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| \leq$$

$$= \left[R + \alpha_1(t) K\right] \left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|, \tag{36}$$

для всіх $t \in [0, T]$.

Аналогічно, враховуючи вирази (10), (5) та (36), при $m = 2$ маємо:

$$\left|x_2\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_2\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq R\left|z^0 - z^1\right| + K\Bigg[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \int_0^t \left[\left(R + K\alpha_1(s)\right)\left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|\right] ds +$$

$$+ \frac{t}{T} \int_t^T \left[\left(R + K\alpha_1(s)\right)\left|z^0 - z^1\right| + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|\right] ds\Bigg] + |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| =$$

$$= (R + KR\alpha_1(t) + K^2\alpha_2(t))|z^0 - z^1| + K\alpha_1(t)|\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| +$$

$$+ |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \tag{37}$$

За індукцією, на основі оцінок, одержаних у (36), (37), можна показати, що:

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \sum_{i=1}^{m-1} K^i R\alpha_i(t) + K^m \alpha_m(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| + \sum_{i=0}^{m-1} K^i \alpha_i(t) |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \quad (38)$$

З нерівності (38) отримаємо:

$$\left|x_m\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_m\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \sum_{i=1}^{m-2} Q^i R\alpha_1(t) + \frac{10}{9} K Q^{m-1} \alpha_1(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K\alpha_1(t) \sum_{i=1}^{m-2} Q^i\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|. \quad (39)$$

При переході в оцінці (39) до границі при $m \to \infty$, одержимо:

$$\left|x_\infty\left(t, z^0, \lambda^0\right) - x_\infty\left(t, z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \left[R + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} R\alpha_1(t)\right] \left|z^0 - z^1\right| +$$

$$+ \left[I_n + \frac{10}{9} K \left(I_n - Q\right)^{-1} \alpha_1(t)\right] \left|\rho\left(z^0, \lambda^0, z^1, \lambda^1\right)\right|.$$

Лема 3. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*

Тоді для функції $\Delta : D_\beta \times D_0 \to \mathbb{R}^n$ *системи визначальних рівнянь (16),(17) справедлива оцінка:*

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq KR\left[I_n + \frac{10T}{27} K (I_n - Q)^{-1}\right] |z^0 - z^1| +$$

$$+ K\left[I_n + \frac{10T}{27} K (I_n - Q)^{-1}\right] |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)| + \frac{1}{T} |\rho(z^0, z^1, \lambda^0, \lambda^1)|. \quad (40)$$

де $z^j \in D_\beta$, $\lambda^j \in D$, *j=0,1.*

Доведення. Згідно із співвідношеннями (13) маємо:

$$\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{T} \int_0^T \left[f\left(s, x_\infty\left(s, z^1, \lambda^1\right)\right) - f\left(s, x_\infty\left(s, z^0, \lambda^0\right)\right)\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{T} \left[d(z^0, \lambda^0) - d(z^1, \lambda^1) - z^0 + z^1\right]. \quad (41)$$

А тоді, з урахуванням (5), (33) – (35), із (41) отримаємо:

$$\left|\Delta\left(z^0, \lambda^0\right) - \Delta\left(z^1, \lambda^1\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\left|z^0-z^1\right|+\frac{1}{T}\int_0^T K\left|x_\infty\left(s,z^1,\lambda^1\right)-x_\infty\left(s,z^0,\lambda^0\right)\right|ds+\frac{1}{T}|\rho(z^0,z^1,\lambda^0,\lambda^1)|\leq$$

$$\leq \frac{1}{T}\left|z^0-z^1\right|+\frac{1}{T}K\int_0^T\left\{R+\frac{10}{9}K(I_n-Q)^{-1}R\alpha_1(s)\right\}ds|z^0-z^1|+$$

$$+\frac{1}{T}K\int_0^T\left\{I_n+\frac{10}{9}K(I_n-Q)^{-1}\alpha_1(s)\right\}ds|\rho(z^0,z^1,\lambda^0,\lambda^1)|+\frac{1}{T}|\rho(z^0,z^1,\lambda^0,\lambda^1)|=$$

$$=KR\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|z^0-z^1|+K\left(I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right)|\rho(z^0,z^1,\lambda^0,\lambda^1)|+$$

$$+\frac{1}{T}|\rho(z^0,z^1,\lambda^0,\lambda^1)|,$$

що і доводить справедливість оцінки (40).

Теорема 5. *Нехай виконуються умови Теореми 1. Крім того, нехай існують деякий номер $m\in\mathbb{N}$ і пара*

$$\left(\bar z,\bar\lambda\right)\in\Omega,$$

де множина Ω має вигляд (24), такі, що покомпонентна нерівність:

$$\left|\Delta_m\left(\bar z,\bar\lambda\right)\right|\leq$$

$$\leq\sup_{z\in D}\left\{R\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|z-\overline{z}|\right\}+$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n+\frac{10T}{27}K(I_n-Q)^{-1}\right]|\rho(z,\overline{z},\lambda,\overline{\lambda})|+\frac{1}{T}|\rho(z,\overline{z},\lambda,\overline{\lambda})|\right\}+$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n-Q\right)^{-1}\delta_D(f),\tag{42}$$

не справджується, де вектор $\delta_D(f)$ має вигляд (7) і матриці K,Q,R та вектор ρ визначені згідно з (5), (8), (33) та (34) відповідно.

Тоді не існує пари $(z^*,\lambda^*)\in\Omega$, для якої вихідна двоточкова крайова задача (1), (2) матиме розв'язок $x=x(t)$ такий, що:

$$x(0)=z^*,$$

$$x(T)=\lambda^*.$$

Доведення.

Нехай $m\in\mathbb{N}$ та $\left(\bar z,\bar\lambda\right)\in D\times\Lambda$ — довільні. Покажемо, що при зроблених припущеннях система визначальних рівнянь (16), (17) не має на множині Ω жодного розв'язку. Доведемо це від супротивного. Припустимо, що пара $\left(\bar z,\bar\lambda\right)$ є розв'язком (16), (17). Згідно з Теоремою 4 розв'язок крайової задачі (1), (4) задається формулою (27). Використаємо оцінку (40), покладаючи

$$\left(z^0,\lambda^0\right)=\left(z^*,\lambda^*\right),\left(z^1,\lambda^1\right)=\left(\bar z,\bar\lambda\right),$$

Тоді з (40) випливає:

$$\left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \le KR\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|z^* - \overline{z}| +$$

$$+K\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|\rho(z^*, \overline{z}, \lambda^*, \overline{\lambda})| + \frac{1}{T}|\rho(z^*, \overline{z}, \lambda^*, \overline{\lambda})|. \tag{43}$$

З урахуванням нерівності (21) Леми 1, матимемо:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \le \left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| + \left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right) - \Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\Delta\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| + \frac{10T}{27}KQ^m(I_n - Q)^{-1}\delta_D(f). \tag{44}$$

Поєднуючи нерівності (43) та (44), можемо записати, що:

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \le$$

$$\le R\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|z^* - \overline{z}| +$$

$$+K\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|\rho(z^*, \overline{z}, \lambda^*, \overline{\lambda})| + \frac{1}{T}|\rho(z^*, \overline{z}, \lambda^*, \overline{\lambda})| +$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f) \tag{45}$$

або

$$\left|\Delta_m\left(\bar{z},\bar{\lambda}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{z\in D}\left\{R\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|z - \overline{z}|\right\} +$$

$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega}\left\{K\left[I_n + \frac{10T}{27}K(I_n - Q)^{-1}\right]|\rho(z, \overline{z}, \lambda, \overline{\lambda})| + \frac{1}{T}|\rho(z, \overline{z}, \lambda, \overline{\lambda})|\right\} +$$

$$+\frac{10T}{27}KQ^m\left(I_n - Q\right)^{-1}\delta_D(f),$$

тобто отримали нерівність, яка співпадає з (42). Але, за припущенням теореми, для пари $(\bar{z},\bar{\lambda})$ покомпонентна нерівність (42) не виконується. Отримали протиріччя, яке означає, що визначальна система (16), (17) не має розв'язків на множині Ω. Тому, на основі Теореми 3, функція x_∞, що визначена формулою (11), не є розв'язком крайової задачі (1), (4) при будь–якому виборі пари $(\bar{z},\bar{\lambda})$ з області Ω. Тому, згідно з Теоремою 4, це означає, що нелінійна крайова задача (1), (2) не має жодного розв'язку $x(\cdot)$, для якого пара $(x(0), x(T))$ належить області Ω.

Зауваження 5. *На основі Теореми 5 можемо задати алгоритм для наближеного відшукання пари (z^*, λ^*), яка визначає розв'язок (27) вихідної крайової задачі (1), (2). Для цього представимо множину Ω вигляду (24) як об'єднання скінченої кількості підмножин:*

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = D_i \times \Lambda_i. \tag{46}$$

У кожній підмножині Ω_i *з* (46) *вибираємо довільну точку*

$$\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right) \in \Omega_i, \tag{47}$$

та для деякого m *обчислюємо* m*–ве наближення* $x_m\left(t, \bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$*, користуючись рекурентним співвідношенням (10), а тоді знаходимо значення "визначальної функції"* $\Delta_m\left(\bar{z}^i, \bar{\lambda}^i\right)$ *згідно з формулою (19). Виключаємо з множини (46) ті підмножини* Ω_i *, для яких нерівність не виконується.*

Це обумовлюється тим, що, за Теоремою 5, вони не можуть містити пару (z^*, λ^*)*, яка визначає розв'язок (27) крайової задачі (1), (2).*

Решта підмножин

$$\Omega_{i_1}, \Omega_{i_2}, \ldots, \Omega_{i_s}$$

утворюють деяку множину

$$\Omega_{m,N} = D_{m,N} \times \Lambda_{m,N} \tag{48}$$

таку, що тільки $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ *може визначити розв'язок (27).*

Коли N *та* m *прямують до* ∞, $\Omega_{m,N}$ *"прямує" до множини*

$$\Omega^* = D^* \times \Lambda^*, \tag{49}$$

яка може містити значення (z^*, λ^*) *, що визначає розв'язок крайової задачі (1), (2) у вигляді (27).*

Кожну пару $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right) \in \Omega_{m,N}$ *можна розглядати як наближення до пари* (z^*, λ^*)*, яка визначає розв'язок вихідної крайової задачі (1), (2).*

У цьому випадку очевидно, що

$$|\tilde{z} - z^*| \le \sup_{z \in D_{m,N}} |\tilde{z} - z|, \left|\tilde{\lambda} - \lambda^*\right| \le \sup_{\lambda \in \Lambda_{m,N}} \left|\tilde{\lambda} - \lambda\right|,$$

а значення функції $x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$*, що обчислюється згідно з рекурсивним співвідношенням (10), може бути взяте в якості наближеного розв'язку крайової задачі (1), (2).*

Теорема 6. *Нехай мають місце умови Теореми 1. Крім того, пара* (z^*, λ^*)*, визначена на множині (49) є розв'язком точної системи визначальних рівнянь (16), (17), та* $\left(\tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)$ *— довільна пара з множини* $\Omega_{m,N}$ *вигляду (48).*

Тоді справедлива наступна оцінка:

$$\begin{aligned}
&\left|x_\infty\left(t, z^*, \lambda^*\right) - x_m\left(t, \tilde{z}, \tilde{\lambda}\right)\right| \le \\
&\qquad \le \frac{10}{9}\alpha_1(t) Q^m \left(I_n - Q\right)^{-1} \sup_{(z,\lambda) \in \Omega_{m,N}} \delta_D(f) + \\
&\qquad + \sup_{z \in D_{m,N}} \left[R + \frac{10}{9} K \alpha_1(t) \left(I_n - Q\right)^{-1} R \alpha_1(t)\right] |z - \tilde{z}|.
\end{aligned} \tag{50}$$

Доведення. Використаємо нерівність:

$$\left|x_\infty(t,z^*,\lambda^*)-x_m\left(t,\tilde z,\tilde\lambda\right)\right|\le\left|x_\infty(t,z^*,\lambda^*)-x_m(t,z^*,\lambda^*)\right|+$$
$$+\left|x_m(t,z^*,\lambda^*)-x_m\left(t,\tilde z,\tilde\lambda\right)\right|. \qquad (51)$$

Оцінимо перший доданок у правій частині (51) нерівністю (14).

З використанням (38), другий доданок нерівності (51) будемо оцінювати наступним чином:

$$\left|x_m(t,z^*,\lambda^*)-x_m\left(t,\tilde z,\tilde\lambda\right)\right|\le$$
$$\le\left[R+\frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2}Q^iR\alpha_1(t)+\frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_1(t)\right]|z^*-\tilde z|+$$
$$+\left[I_n+\frac{10}{9}K\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{m-2}Q^i\right]\left|\rho\left(z^*,\lambda^*,\tilde z,\tilde\lambda\right)\right|\le$$
$$\le\sup_{z\in D_{m,N}}\left[R+\frac{10}{9}K\sum_{i=1}^{m-2}Q^iR\alpha_1(t)+\frac{10}{9}KQ^{m-1}\alpha_1(t)\right]|z-\tilde z|+$$
$$+\sup_{(z,\lambda)\in\Omega_{m,N}}\left[I_n+\frac{10}{9}K\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{m-2}Q^i\right]\left|\rho\left(z,\lambda,\tilde z,\tilde\lambda\right)\right| \qquad (52)$$

Об'єднуючи (14) та (52), отримуємо оцінку (50), що й доводить теорему.

Список використаної літератури

1. *Rontó M., Marynets, K.* On the parametrization of boundary-value problems with three-point non-linear restrictions // Miskolc Math. Notes – 2012. –**13**, №1. – P. 91–106.
2. *Rontó Miklós, Marynets Kateryna.* Parametrization for non-linear problems with integral boundary conditions // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2012. –**99**. – P. 1–23.
3. *Rontó Miklós, Marynets Kateryna.* On parametrization for non-linear BVP with non–linear boundary conditions // Miskolc Math. Notes. –2011. –**12**, №2. – P. 209–223.
4. *Rontó M., Marinets K..* On the parametrization of boundary value problems with two-point nonlinear boundary conditions // Nelīnīĭnī Koliv. –2011. –**14**, No.3.– P. 359–391.
5. *Rontó A., Rontó M.* Successive approximation techniques in non-linear boundary value problems for ordinary differential equations:Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2008.–**8**.– P. 441–592.
6. *Rontó Miklós, Varha Yana, Marynets Kateryna.* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problemsg //Tatra Mountains –2015. –**63**. – P. 247–267.
7. *Marynets Kateryna.* On construction of the approximate solution of the special type integral boundary-value problem // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2016. –**6**. – P. 1–14.

Одержано 20.01.2017

УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПОВНІ СИСТЕМИ ТОТОЖНОСТЕЙ В ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The class of universal algebras, which are defined under binary square matrices of order n is considered. The algebra's signature consists of two binary operations and a set of unary operations which determines the rotation of matrix elements. In this class the standard canonical forms based on complete identities systems were created.

У роботі розглядається клас універсальних алгебр, які задані над бінарними квадратними матрицями порядку n і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій max, min і множини унарних операцій T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, які задають поворот елементів матриці, кратних 90° відносно осей або центра симетрії. У даному класі алгебр описані повні системи тотожностей, на основі яких побудовані стандартні канонічні форми.

1. Вступ. У роботах [1,2] алгебру U визначають як впорядковану пару множин (A, Ω), де A — деяка множина, на якій задані операції з Ω.

Нехай U — деяка алгебра, а $T(U)$ — множина всіх її тотожностей. Позначимо через $S(H)$ систему всіх тотожностей, які отримуємо з $H \subset T(U)$ на основі таких правил виводу [3]: $\Pi_1 : \frac{\emptyset}{\chi_i = \chi_i}$, де $\emptyset$ — порожня множина, $\Pi_2 : \frac{\phi(\eta_1)=\psi;\ \eta_1=\eta_2}{\phi(\eta_2)=\psi}$, $\Pi_3 : \frac{\phi(\ldots\chi_i\ldots)=\psi(\ldots\chi_i\ldots)}{\phi(\ldots\eta_i\ldots)=\psi(\ldots\eta_i\ldots)}$.

Система тотожностей H називається повною в алгебрі U, якщо $S(H) = T(U)$. Дві однотипні алгебри U_1 і U_2 називаються екваціонально еквівалентними, якщо $T(U_1) = T(U_2)$ (див. [3]).

Алгебра U називається екваціонально повною в класі алгебр M, якщо для всякої алгебри $U_i \in$ M, $i = 1, 2, \ldots, n$, $T(U) \neq T(U_i) \Leftrightarrow T(U) \subset T(U_i)$ (див. [3]).

Алгебра U називається функціонально повною, якщо множина її операцій утворює функціонально повну систему функцій. Проблема описання екваціональних підкласів алгебр часто зводиться до задачі знаходження скінченних повних систем тотожностей. Питання чи має алгебра скінченні повні системи тотожностей, залишається відкритим навіть для скінченних алгебр. В [4] Ліндон показав, що всі двозначні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей. Мурський [5, 6] побудував 3-значну логіку, яка не має скінченних повних систем тотожностей, та довів, що "майже всі" скінченні алгебри мають скінченні повні системи тотожностей. Скінченні повні системи тотожностей можна побудувати в алгебрах, формули яких можемо привести до канонічного вигляду, аналогічному досконалій диз'юнктивній (кон'юнктивній) нормальній формі булевої алгебри [7], або які в своєму складі містять характеристичні функції [8].

На початку 70-их років XX ст. І.В.Вітеньком була поставлена задача екваціонального описання алгебри де Моргана, яка була розв'язана для деяких класів [9].

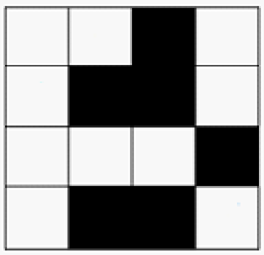
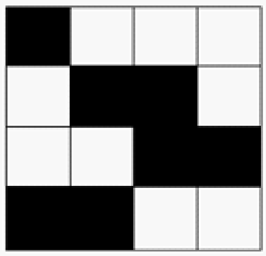
2. Повні системи тотожностей та замкнені класи операцій поворотів в алгебрі P. Визначимо клас алгебр $\mathrm{P} = \{U_n = (A_n, \Omega)\}$, де A_n — множина всіх бінарних квадратних матриць порядку n, $\Omega = \{\vee, \wedge, T_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$, $X \vee Y = \max(X, Y)$, $X \wedge Y = \min(X, Y)$, T_i — множина унарних операцій, які в даній роботі задають перестановку елементів матриці, що еквівалентно поворотам кратним 90° відносно осей або центра симетрії квадрата.

Розглянемо алгебру $U_4 = (A_4, \Omega) \in \mathrm{P}$. Бінарні матриці A_4 представляють собою булеві зображення, які зручно розглядати на множині пікселів (клітинок), які мають таку нумерацію

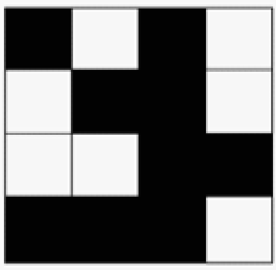
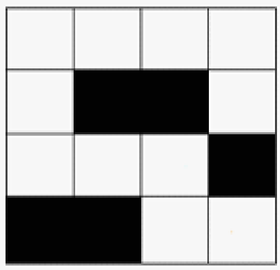
$$T_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}$$

У бінарному зображенні знаком ■ позначені пікселі, в яких значення відповідної клітини бінарної матриці рівне одиниці і порожні клітинки — у протилежному випадку. Операції диз'юнкції і кон'юнкції на бінарних зображеннях в алгебрах класу P еквівалентні операціям перетину і об'єднання.

Наприклад, якщо

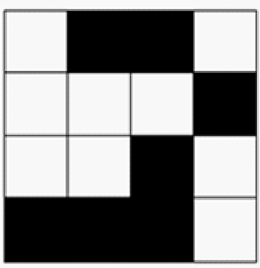
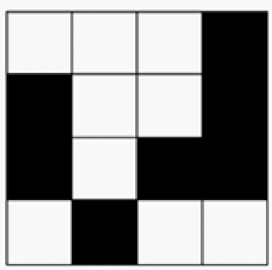
$A_1 =$  , $A_2 =$  ,

то

$A_1 \vee A_2 =$  , $A_1 \wedge A_2 =$  .

Унарні операції T_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$, які виконують поворот зображення A, будемо позначати через A^{T_i}. Визначимо ці операції наступним чином.

1. Операція T_1 задає поворот A^{T_0} на 180° навколо головної діагоналі квадрата (операція транспонування): перший рядок A^{T_0} записується в перший стовпчик A^{T_1} ; другий рядок — в другий стовпчик і т.д. Наприклад, якщо

$A^{T_0} =$  , то $A^{T_1} =$  .

2. Операція T_2 задає поворот A^{T_0} на 90° за годинниковою стрілкою відносно

центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній стовпчик A^{T_2}, другий — в передостанній і т.д.

3. Операція T_3 задає поворот A^{T_0} на 90° проти годинникової стрілки відносно центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується у перший стовпчик A^{T_3} у зворотному порядку; другий рядок — у другий стовпчик у зворотному порядку і т.д.

4. Операція T_4 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно допоміжної діагоналі квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній стовпчик A^{T_4} із зворотнім записом елементів і т.д.

5. Операція T_5 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно осі симетрії квадрата паралельно осі OX : перший рядок A^{T_0} записується в останній рядок A^{T_5} і т.д.

6. Операція T_6 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно осі симетрії квадрата паралельно осі OY : перший рядок A^{T_0} записується як перший рядок A^{T_6} у зворотному порядку і т.д.

7. Операція T_7 задає поворот A^{T_0} на 180° відносно центра симетрії квадрата: перший рядок A^{T_0} записується в останній рядок A^{T_7} у зворотному порядку і т.д.

8. Операція T_8 : перший рядок A^{T_0} записується в перший стовпчик A^{T_8} з інверсією і т.д. Очевидно, що $T_8 = T_7$.

Операції $T_1 - T_7$ визначені таким чином, щоб зберігалась структура зображення A. На рис. 1 показано виконання операцій $T_i,\ i = 1, 2, \ldots, 8$ за допомогою матриць перетворень, а на рис. 2 — застосування цих операцій до заданого зображення A.

У подальшому використаємо позначення $Z_k = \{0, 1, \ldots, k-1\},\ k \geqslant 2$, зокрема $Z_8 = \{0, 1, \ldots, 7\}$. Суперпозицію поворотів T_i і T_k, $i, k \in Z_8$, будемо позначати як T_iT_k, і $A^{T_iT_k} = \left(A^{T_i}\right)^{T_k}$.

Теорема 1. *Суперпозицією двох операцій повороту T_i і T_k, $i, k \in Z_8$, є операція T_j, $j \in Z_8$, тобто для $\forall\ i, k \in Z_8$, $\exists\ j \in Z_8$ таке, що $T_iT_k = T_j$.*

Доведення. Розглянувши суперпозицію операцій поворотів T_i і T_k, для всіх $i, k \in Z_8$, отримаємо рівності, які представимо за допомогою табл. 1.

Таблиця 1

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_0	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
T_1	T_1	T_0	T_6	T_5	T_7	T_3	T_2	T_4
T_2	T_2	T_5	T_7	T_0	T_6	T_4	T_1	T_3
T_3	T_3	T_6	T_0	T_7	T_5	T_1	T_4	T_2
T_4	T_4	T_7	T_5	T_6	T_0	T_2	T_3	T_1
T_5	T_5	T_2	T_1	T_4	T_3	T_0	T_7	T_6
T_6	T_6	T_3	T_4	T_1	T_2	T_7	T_0	T_5
T_7	T_7	T_4	T_3	T_2	T_1	T_6	T_5	T_0

Табл. 1 доводить справедливість теореми, оскільки задає 64 рівностей типу $T_iT_k = T_j$ для $\forall\ i, k, j \in Z_8$. Теорема доведена.

У кожному рядку або стовпці табл. 1 операція T_i, $i \in Z_8$ зустрічається тільки один раз. Кожну з цих семи операцій можна реалізувати як суперпозицію двох

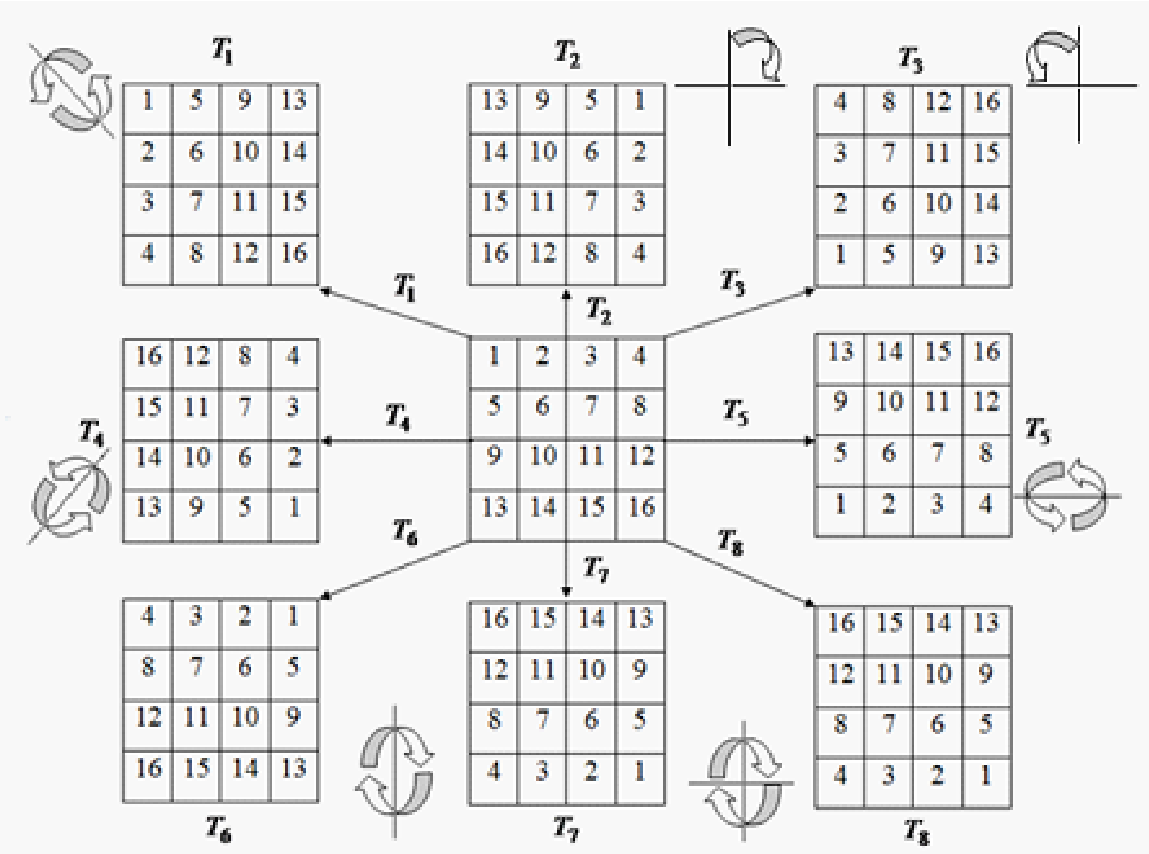


Рис. 1. Матриці операцій повороту $T_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, 8$

поворотів різними способами. Наприклад:

1) $T_1 = T_3\ T_5$; $T_1 = T_4 T_7$; $T_1 = T_5\ T_2$; $T_1 = T_6\ T_3$; $T_1 = T_7 T_4$.

2) $T_2 = T_1\ T_6$; $T_2 = T_3\ T_7$; $T_2 = T_4\ T_5$; $T_2 = T_5\ T_1$; $T_2 = T_6\ T_4$; $T_2 = T_7\ T_3$ і т.д.

Крім того, мають місце такі рівності:

1) $T_1^2 = T_0$;

2) $T_1 T_2 = T_6$; $T_2 T_1 = T_5$; $T_2 T_5 = T_4$; $T_1 T_5 = T_3$; $T_2^2 = T_7$;

3) $T_2 \left(T_2 T_1 \right) = T_1 \left(T_2 T_1 \right)$.

Використовуючи суперпозицію операцій T_1 і T_2 можемо реалізувати довільну операцію T_i, $i \in Z_8$. Нехай $T = \{T_0, T_1, \ldots, T_7\}$.

Означення 1. *Множину операцій повороту $M_k = \{T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots, T_{j_k}\} \subset T$, $j_1, j_2, \ldots, j_k \in Z_8$ будемо називати повною, якщо в результаті суперпозиції операцій цієї множини можемо отримати всі операції T.*

Тотожності $T_1^2 = T_4^2 = T_6^2 = T_7^2 = T_0$; $T_2^2 = T_7$; $T_2^3 = T_3$; $T_2^4 = T_0$; $T_3^2 = T_7$; $T_3^3 = T_2$; $T_3^4 = T_0$ вказують на те, що системи, які складаються з однієї унарної операції T_i, $i \in Z_8$ не утворюють повну систему.

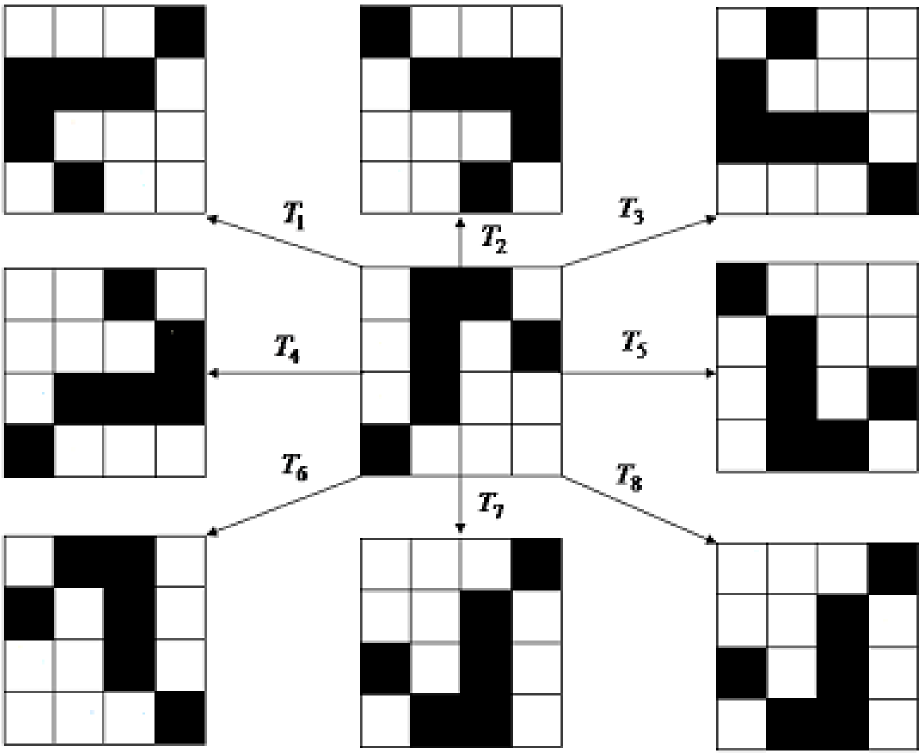


Рис. 2. Приклад повороту A^{T_i}, $i = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 8$

Твердження 1. *Множини операцій* $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, T_6\}$, $\{T_2, T_6\}$, $\{T_2, T_4\}$,$\{T_2, T_5\}$, $\{T_4, T_5\}$, $\{T_3, T_4\}$, $\{T_3, T_6\}$, $\{T_4, T_6\}$,$\{T_1, T_3\}$, $\{T_3, T_5\}$, $\{T_1, T_5\}$ *є повними.*

Доведення. Розглянемо кожний випадок окремо.

1) Повнота системи операцій $\{T_1, T_2\}$ випливає з рівностей, які вказують як з T_1 і T_2 можна отримати всі операції T_i, $i \in Z_8$: $T_1T_2 = T_6$; $T_2T_1 = T_5$; $T_2^2 = T_7$; $T_2T_5 = T_4$; $T_1T_5 = T_3$; $T_1^2 = T_0$.

2) Згідно пункту 1 множина операцій $\{T_1, T_2\}$ повна. На основі тотожності $T_1T_6 = T_2$ отримаємо повноту множини $\{T_1, T_6\}$.

3) Множина операцій $\{T_2, T_6\}$ повна. Рівність $T_2T_6 = T_1$ зводить повноту цієї множини до попереднього випадку.

4) Рівність $T_2T_4 = T_6$ зводить повноту множини $\{T_2, T_4\}$ до повноти множини $\{T_2, T_6\}$.

5) Аналогічно рівність $T_2T_5 = T_4$ зводить повноту системи $\{T_2, T_5\}$ до повноти $\{T_2, T_4\}$.

6) З повноти системи $\{T_4, T_5\}$ на основі рівності $T_4T_5 = T_2$ отримаємо повноту системи $\{T_2, T_5\}$.

7) Аналогічно, з повноти множини $\{T_3, T_4\}$ на основі рівності $T_3T_4 = T_5$ отримаємо повноту системи $\{T_4, T_5\}$.

8) Рівність $T_3T_6 = T_4$ зводить повноту системи $\{T_3, T_6\}$ до повноти $\{T_3, T_4\}$.

9) Аналогічно, на основі рівності $T_4T_6 = T_3$ з повноти системи $\{T_4, T_6\}$ отримаємо повноту системи $\{T_3, T_4\}$.

10) З повноти множини $\{T_1, T_3\}$ на основі рівності $T_3T_1 = T_6$ отримаємо повноту $\{T_3, T_6\}$.

11) Аналогічно, рівність $T_3T_5 = T_1$ зводить повноту множини операцій $\{T_3, T_5\}$ до повноти множини $\{T_1, T_3\}$.

12) І на кінець, повнота системи $\{T_1, T_5\}$ на основі рівності $T_1T_5 = T_3$ доводить повноту системи $\{T_1, T_3\}$.

Твердження 2. *Якщо до класів формул $\{T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_5, T_6, T_7\}$ додати довільну формулу T_i, $i = 1, ..., 7$, яка йому не належить, то отриманий клас формул буде повним.*

Справедливість твердження випливає з табл. 1 та твердження 1.

Теорема 2. 1) *Для операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ не існує повної системи, яка складається з однієї операції.*

2) *Існує 12 пар повних систем операцій повороту $\{T_1, T_2\}$, $\{T_1, T_3\}$, $\{T_1, T_5\}$, $\{T_1, T_6\}$, $\{T_2, T_4\}$, $\{T_2, T_5\}$, $\{T_2, T_6\}$, $\{T_3, T_4\}$, $\{T_3, T_5\}$,$\{T_3, T_6\}$, $\{T_4, T_5\}$,$\{T_4, T_6\}$.*

3) *Існує тільки три не повних системи, які складаються з трьох операцій повороту: $\{T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_5, T_6, T_7\}$.*

Доведення теореми випливає з наведених вище тотожностей та тверджень 1, 2.

Теорема 3. *Число повних систем операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ рівне 108.*

Доведення. Використовуючи пункти 2, 3 теореми 2, отримаємо

$$12 + \left(C_7^3 - 3\right) + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 12 + (35 - 3) + 35 + 21 + 7 + 1 = 108,$$

що доводить справедливість теореми.

Означення 2. *Множину операцій $M_k = \{T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots, T_{j_k}\} \subset T$, $j_1, j_2, \ldots, j_k \in Z_8$ будемо називати замкненою, якщо в результаті суперпозиції операцій цієї множини отримуємо тільки операції множини M_k.*

Розглянемо замкнені класи формул відносно операції суперпозиції, які задаються двома операціями T_i, T_j, $i, j \in Z_8$.

Твердження 3. 1) *Множини операцій $\{T_1, T_7\}$, $\{T_1, T_4\}$, $\{T_4, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_1, T_4, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_1, T_4, T_7\}$;*

2) *Множини операцій $\{T_2, T_3\}$, $\{T_2, T_7\}$, $\{T_3, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_2, T_3, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_2, T_3, T_7\}$;*

3) *Множини операцій $\{T_5, T_6\}$, $\{T_5, T_7\}$, $\{T_6, T_7\}$ відносно суперпозиції операцій T_5, T_6, T_7 утворюють замкнений клас $\{T_5, T_6, T_7\}$.*

Доведення. Справедливість твердження 3 випливає з тотожностей:

1) $T_1T_7 = T_7T_1 = T_4$, $T_1T_4 = T_4T_1 = T_7$, $T_4T_7 = T_7T_4 = T_1$,

2) $T_2T_3 = T_3T_2 = T_0$, $T_2^2 = T_7$, $T_2T_7 = T_7T_2 = T_3$, $T_3T_7 = T_7T_3 = T_2$,

3) $T_5T_6 = T_6T_5 = T_7$, $T_5T_7 = T_7T_5 = T_6$, $T_6T_7 = T_7T_6 = T_5$.

Теорема 4. *Відносно операцій повороту T_i, $i \in Z_8$ існують такі замкнені класи формул:* $\{T_0, T_1\}$, $\{T_0, T_4\}$, $\{T_1, T_2\}$, $\{T_0, T_6\}$, $\{T_0, T_7\}$, $\{T_0, T_2, T_3, T_7\}$, $\{T_0, T_1, T_4, T_7\}$, $\{T_0, T_5, T_6, T_7\}$, $\{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$.

Справедливість теореми безпосередньо випливає з означення 2 та твердження 3.

3. Стандартні форми формул алгебри P. Нехай A, B, C — формули алгебри P. Тоді:

1) A^{T_i}, $i \in Z_8$ — формула;

2) $A \vee B$ — формула;

3) $A \wedge B$ — формула.

Формули алгебри P задовольняють такі тотожності:

1) $A \wedge A = A$; $A \vee A = A$.

2) $A \wedge B = B \wedge A$; $A \vee B = B \vee A$.

3) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

4) $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$; $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

5) $A \vee B \wedge A = A$; $A \wedge (B \vee A) = A$.

6) $A^{T_iT_j} = A^{T_k}$, $i, j, k \in Z_8$ (тотожності, що задаються табл.1).

7) $(A \vee B)^{T_i} = A^{T_i} \vee B^{T_i}$, $i \in Z_8$.

8) $(A \wedge B)^{T_i} = A^{T_i} \wedge B^{T_i}$, $i \in Z_8$.

Елементарною формулою будемо називати формули типу A^{T_i}, $i \in Z_8$.

Кон'юнкцію довільного числа елементарних формул будемо називати елементарним перетином.

Диз'юнкцію довільного числа елементарних перетинів будемо називати стандартним об'єднанням.

Означення 3. *Стандартне об'єднання називається канонічним, якщо:*

1) *кожний елементарний перетин не має однакових елементарних формул;*

2) *ніякий елементарний перетин не є підформулою іншого.*

Побудуємо алгоритм зведення довільної формули до канонічного вигляду.

Нехай задана деяка формула $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ алгебри P.

1) Використовуючи формули 7 і 8 досягаємо того, що операції повороту T_i, $i \in Z_8$ будуть знаходитись тільки над зображенням A_j, $j \in Z_8$.

2) Використовуючи рівності 6, над кожною елементарною формулою отримаємо не більше однієї операції повороту.

3) За допомогою формул 4 розкриваємо дужки.

4) На основі рівностей 5 виконуємо поглинання надлишків формул.

У результаті виконання цього алгоритму отримаємо канонічну форму формули $\varphi(A_1, A_2, \ldots, A_k)$.

Розглянемо приклади побудови канонічних об’єднань формул алгебри P .

Приклад 1. $\left(\left(A^{T_2} \wedge B^{T_1}\right)^{T_3T_2} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} = \left(\left(A^{T_2} \wedge B^{T_1}\right)^{E} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} =$

$$= \left(A^{T_2} \wedge B^{T_1} \vee C^{T_1}\right)^{T_4} = A^{T_2T_4} \wedge B^{T_1T_4} \vee C^{T_1T_4} = A^{T_6} \wedge B^{T_7} \vee C^{T_7}.$$

Приклад 2. $\left(\left(\left(A^{T_1} \vee B^{T_2}\right)^{T_6} \wedge A^{T_3T_4}\right)^{T_2} \vee \left(B^{T_3} \wedge A^{T_1}\right)^{T_3}\right)^{T_1} =$

$$= \left(A^{T_1T_6} \vee B^{T_2T_6}\right)^{T_2} \wedge A^{T_3T_4T_2} \vee \left(B^{T_3^2T_1} \wedge A^{T_1^2T_3}\right) =$$

$$= \left(A^{T_2T_2} \vee B^{T_1T_2}\right) \wedge A^{T_5^2} \vee B^{T_7T_1} \wedge A^{T_2} =$$

$$= \left(A^{T_7} \vee B^{T_6}\right) \wedge A^{T_1} \vee B^{T_4} \wedge A^{T_2} = A^{T_1} \wedge A^{T_7} \vee A^{T_1} \wedge B^{T_6} \vee A^{T_2} \wedge B^{T_4}.$$

На основі отриманих результатів будуються досконалі канонічні форми алгебри P.

Список використаної літератури

1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
2. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. *Янов Ю. И.* О системах тождеств для алгебр // Проблемы кибернетики. – 1962. – **8**, №8. – С. 75–90.
4. *Линдон Р. К.* Тождества в конечных алгебрах // Кибернетический сборник. – 1960. – **1**, №. – С. 246–248.
5. *Мурский В. Л.* Существование в трехзначной логике замкнутого класса с конечным базисом, не имеющего конечной полной системы // Докл. АН СССР. – 1965. – **8**, №4. – С. 815–818.
6. *Мурский В. Л.* Конечная базируемость тождеств и другие свойства «почти всех» конечных алгебр // Проблемы кибернетики. – 1978. – **8**, №30. – С. 43–56.
7. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1974. – 313 с.
8. Многозначные элементы и структуры. – К.: Наукова думка, 1967. – 208 с.
9. *Витенько И. В., Николенко В.В.* Об одном многообразии алгебр // Сиб. мат. журнал. – 1974. – **15**, №2. – С. 430–433.

Одержано 10.01.2017

УДК 512.547.25

V. M. Petechuk (Transcarpathian Institute of Postgraduate Education),
Yu. V. Petechuk (Transcarpathian Hungarian Institute by Ferenc Rakoczy II)

FIXED AND RESIDUAL MODULES

The article deals with the properties of fixed and residual endomorphism submodules of modules over arbitrary associative rings with 1. It is shown how they can be used to represent formal matrices images of group homomorphisms generated by elementary transvections when 2 or 3 elements are circulating in the ring. The homomorphisms with condition (*) are described with the help of this approach.

У роботі розглядаються властивості нерухомих та лишкових підмодулів ендоморфізмів модулів над довільними асоціативними кільцями з одиницею. Покозано як з їх допомогою можна зображати формальними матрицями гомоморфні образи груп породжених елементарними трансвекціями у випадках коли елементи 2 або 3 є оборотними в кільці. За допомогою цього підходу описані гомоморфізми з умовою (*).

Introduction. Let R and K be associative ring with 1. $E\left(n,R\right)$ is the subgroup of $GL\left(n,R\right)$, generated by all elementary transvections $t_{ij}(r) = 1 + re_{ij}$, $r \in R$, $1 \le i \ne j \le n$, $t_{ij} = t_{ij}\left(-1\right)t_{ji}\left(1\right)t_{ij}\left(-1\right)$.

The group homomorphisms of $\Lambda : G \to GL\left(W\right)$, $E\left(n,R\right) \subseteq G \subseteq GL\left(n,R\right)$, $n \ge 4$ described in [1], if W is its left K-module of finite dimension, Λ is an isomorphism, $G = GL\left(n,R\right)$ and [2, 3], if W is an arbitrary (not necessarily free) left K-module and Λ is an homomorphism with condition (*).

Recall that a homomorphism Λ satisfies the condition (*) if for any nonzero nilpotent element $m \in EndW$, $m^2 = 0$ there are natural numbers s_1 and, which are working in K and $h \in G$ such that $\Lambda h = 1 + s_1 m$ and of equality $\Lambda h \cdot \Lambda g = \Lambda g \cdot \Lambda h$, $g \in G$ it follows that $h^{s_2} g = g h^{s_2}$.

It turns out that while describing homomorphism with the condition (*) among which are isomorphisms, key role is played by fixed and residual submodules and modules that they generate. Since the possibility of such an approach is seen endless, it is justified to have a more thorough study of the properties of fixed and residual submodules. The article reflects the efforts of the authors on the above-mentioned direction.

1. General properties of fixed and residual submodules. Let V be arbitrary R-module over the associative ring R with 1, σ an arbitrary endomorphism of module V.

Residual and fixed submodules of V module endomorphism σ will be called submodules $R\left(\sigma\right) = \left(\sigma - 1\right)V$ and $P\left(\sigma\right) = \ker\left(\sigma - 1\right)$ respectively. Then $R\left(\sigma\right) = \left\{\left(\sigma - 1\right)v \mid v \in V\right\}$ and $P\left(\sigma\right) = \left\{v \in V \mid \sigma v = v\right\}$, also $R\left(1 - \sigma\right) = \sigma V$ and $P\left(1-\sigma\right) = \ker\sigma$.

It is easy to see that if σ is an automorphism of module V, then with the equality $\sigma^{-1} - 1 = \left(\sigma - 1\right)\left(-\sigma^{-1}\right)$ it follows that

$$R\left(\sigma^{-1}\right) = R\left(\sigma\right) \text{ and } P\left(\sigma^{-1}\right) = P\left(\sigma\right).$$

Then $\sigma V_0 = (\sigma - 1 + 1)V_0 \subseteq R(\sigma) + V_0$, $\sigma^{-1}V_0 = (\sigma^{-1} - 1 + 1)V_0 \subseteq R(\sigma^{-1}) + V_0 = R(\sigma) + V_0$, if V_0 is a submodule of V. In particular if $R\left(\sigma\right) \subseteq V_0$ then $\sigma^{\pm 1}V_0 \subseteq V_0$ and $\sigma V_0 = V_0$.

If g is an arbitrary endomorphism of module V such that $g\sigma = \sigma^{\pm 1}g$, then $g\left(\sigma - 1\right) = \left(\sigma^{\pm 1} - 1\right)g$ and $\left(\sigma - 1\right)g = g\left(\sigma^{\pm 1} - 1\right)$. That is why

$$gR(\sigma) \subseteq R(\sigma^{\pm 1}) = R(\sigma) \text{ and } gP(\sigma) \subseteq P(\sigma^{\pm 1}) = P(\sigma).$$

It is followed that if g is an automorphism of module V such that $g\sigma g^{-1} = \sigma^{\pm 1}$, then

$$gR(\sigma) = R(\sigma) \text{ and } gP(\sigma) = P(\sigma).$$

This statement also follows from the general formulas

$$gR(\sigma) = R(g\sigma g^{-1}) \text{ and } gP(\sigma) = P(g\sigma g^{-1}),$$

which due to the equality $g\sigma g^{-1} - 1 = g(\sigma - 1) g^{-1}$ is true for any endomorphism σ of module V and any isomorphism g of module V.

There are the obvious inclusions

$$R(\sigma_1\sigma_2) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2)\ ,\ P(\sigma_1\sigma_2) \supseteq P(\sigma_1) \bigcap P(\sigma_2),$$

arising from the equalities $\sigma_1\sigma_2 - 1 = (\sigma_1 - 1)\sigma_2 + \sigma_2 - 1 = \sigma_1(\sigma_2 - 1) + \sigma_1 - 1$.

In particular if $[\sigma_1,\sigma_2] = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$, then

$$R([\sigma_1,\sigma_2]) = R(\sigma_1) + R(\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}) \subseteq R(\sigma_1) + \sigma_2 R(\sigma_1) \subseteq R(\sigma_1) + R(\sigma_2),$$

$$P([\sigma_1,\sigma_2]) \supseteq P(\sigma_1) \bigcap P(\sigma_2).$$

It is obviously that $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)$ if and only if $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ and $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1) = 0$ if and only if $\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2); \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1). \end{cases}$

Then, if $\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2); \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1), \end{cases}$ then $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

If $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$, then $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)V = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)V \subseteq R(\sigma_1) \bigcap R(\sigma_2)$, $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1)(P(\sigma_1) + P(\sigma_2)) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1)(P(\sigma_1) + P(\sigma_2)) = 0$. Then, if $\begin{cases} \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1; \\ R(\sigma_1) \bigcap R(\sigma_2) = 0 \text{ or } P(\sigma_1) + P(\sigma_2) = V, \end{cases}$ then $(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) = (\sigma_2 - 1)(\sigma_1 - 1) = 0$. Then $\begin{cases} R(\sigma_1) \subseteq P(\sigma_2) \\ R(\sigma_2) \subseteq P(\sigma_1) \end{cases}$. It is easy to see that $\sigma^2 = 1$ if and only if $\sigma(\sigma - 1) = -(\sigma - 1)$ if and only if $\sigma\big|_{R(\sigma)} = -1$. It turns out that fixed and residual submodules of finite order, which is reversible in the ring are matched with the Peirce decomposition of idempotents which they defined.

Lemma 1. *Let R be an associative ring with 1, V is left R- module (not necessarily free), $\sigma \in GL(V)$, $\sigma^m = 1$, $m \in R^*$, $e = (1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})\, m^{-1}$. Then $e^2 = e$ is an idempotent, $V = R(\sigma) \oplus P(\sigma)$, where $P(\sigma) = \{v \in V\,|(\sigma - 1)\,v = 0\} = eV$ and*

$$R(\sigma) = \{v \in V\,|(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})\,v = 0\} = (1 - e)\,V.$$

Proof. Because $e\sigma^i = \sigma^i e = e$ to all $i \geq 0$, then

$$e^2 = e\,(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1})\,m^{-1} = e$$

is an idempotent and the Peirce decomposition is used $V = eV \oplus (1 - e)\,V$, where $v = ev + (1 - e)\,v$, $v \in V$. It is clear that

$$eV = \{v \in V\,|(1 - e)\,v = 0\} = \ker(1 - e)$$

and $(1 - e)\,V = \{v \in V\,|ev = 0\} = \ker e$. Because $e\,(1 - \sigma) = (1 - \sigma)\,e = 0$ and $1 - e = (1 - \sigma)\,t$, where $t \in EndV$ and $\sigma t = t\sigma$, then $eV \subseteq P(\sigma) \subseteq \ker(1 - e) = eV$ and $(1 - e)\,V \subseteq R(\sigma) \subseteq \ker e = (1 - e)\,V$. Thus it is proved that $P(\sigma) = eV = \ker(1 - e) = \{v \in V\,|(\sigma - 1)\,v = 0\}$, $R(\sigma) = (1 - e)\,V = \ker e = \left\{v \in V\,\middle|\left(1 + \sigma + \dots + \sigma^{m-1}\right) v = 0\right\}$.

Note that $\sigma - 1$ is a reversible element to $R(\sigma)$. Indeed, $e - 1 = (\sigma^{m-1} - 1 + \cdots + \sigma - 1)\, m^{-1}$, $eR(\sigma) = 0$, $\sigma^{m-1} - 1 + \cdots + \sigma - 1 = -mE$ to $R(\sigma)$. Similarly, $\sigma^{-1} - 1$ is a reversible element to $R(\sigma^{-1}) = R(\sigma)$.

In particular, if $m = 2 \in K^*$, then $P(\sigma) = \{v \in V \,|\sigma v = v\}$, $R(\sigma) = \{v \in V \,|\sigma v = -v\}$.

If $m = 3 \in K^*$, then $\sigma^3 = 1$, $P(\sigma) = \{v \in V \,|\sigma v = v\}$, $R(\sigma) = \{v \in V \,|(1 + \sigma + \sigma^2)\, v = 0\}$.

Lemma 2. *Let K be an associative ring with 1, $m \in K^*$, $a, b \in EndV$, $a^m = b^m = 1$, $ab = ba$. Then*

$$P(a) \bigcap P(ab) = P(a) \bigcap P(b) = P(b) \bigcap P(ab),$$
$$P(a) \bigcap R(ab) = P(a) \bigcap R(b),\ P(b) \bigcap R(ab) = P(b) \bigcap R(a),$$
$$R(a) \bigcap P(ab) \subseteq R(a) \bigcap R(b),\ R(b) \bigcap P(ab) \subseteq R(b) \bigcap R(a).$$

Proof. From the properties of fixed and residual submodules of the elements of finite order, which are described in Lemma 1 the equalities arise,

$$\begin{cases} P(a) \bigcap P(ab) = P(a) \bigcap P(b); \\ P(b) \bigcap P(ab) = P(a) \bigcap P(b), \end{cases} \quad \begin{cases} P(a) \bigcap R(ab) = P(a) \bigcap R(b); \\ P(b) \bigcap R(ab) = P(b) \bigcap R(a). \end{cases}$$

Let $v \in P(ab)$ be. Then $abv = v$ and $av = b^{-1}v$, $bv = a^{-1}v$. By induction $a^l v = b^{-l} v$, $b^l v = a^{-l} v$ to all $l \geq 0$. That is why $R(a) \bigcap P(ab) \subseteq R(a) \bigcap R(b)$, $R(b) \bigcap P(ab) \subseteq R(b) \bigcap R(a)$.

Corollary 1. *Let K be an associative ring with 1, $m \in K^*$, $a, b \in EndV$, $a^m = b^m = 1$, $ab = ba$. If $m = 2 \in K^*$, then $R(a) \bigcap R(b) = R(a) \bigcap P(ab) = R(b) \bigcap P(ab)$. If $m = 3 \in K^*$, then $b = a$ on $R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$ and $b = a^2$ on $R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$.*

Proof. In the case of $m = 2 \in K^*$ the inclusions of Lemma 2 are converted to equality. Indeed, in this case, $R(a) \bigcap R(b) = \{v \in V \,|av = -v, bv = -v\} \subseteq \{v \in V \,|abv = v\} \subseteq P(ab)$. That is why $R(a) \bigcap R(b) = R(a) \bigcap P(ab) = R(b) \bigcap P(ab)$. In particular,

$$R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) = 0\ ,\ R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab) = R(a) \bigcap R(b)\ .$$

In the case of $m = 3$ it is revealed $(b - a)\, \nu = 0$, if $\nu \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$ and $(b - a^2)\, \nu = 0$, if $\nu \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$. Indeed, if $\nu \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$, then

$$\left(a^2 + a + 1\right) \nu = \left(b^2 + b + 1\right) \nu = \left((ab)^2 + ab + 1\right) \nu = 0$$

So, $(ab - 1)\,(a - b)\, \nu = (a^2 + ab + a)(a - b)\nu = a\,(a + b + 1)\,(a - b)\, \nu = a\left(a^2 - b^2 + a - b\right) \nu = 0$. Consequently there is the equality

$$0 = \left((ab)^2 + ab + 1\right) (a - b)\, \nu = 3\,(a - b)\, \nu.$$

Thus it is proved that $(a - b)\, \nu = 0$ for $\nu \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab)$.

Obviously, if $\nu \in R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$, then $ab\nu = \nu$ and $(b - a^2)\, \nu = 0$.

Lemma 3. *Let a, b be some elements of associative ring K with 1, $3 \in K^*$ such that $b^2 = 1$, $a^2 + a + 1 = 0$, $bab^{-1} = a^2$, $e = (1 - a)\,(1 - b)\, 3^{-1}$. Then $e^2 = e$, $eae = (1 - e)\, a^2\, (1 - e) = 0$.*

Proof. It is hard not to see that $b\,(1 - b) = -(1 - b)$ and $(1 - b)\,(1 - a)\,(1 - b) = (1 - a - b + ba)\,(1 - b) = (1 - a + 1 - a^2)\,(1 - b) = 3\,(1 - b)$. That is why $(3e)^2 = (1 - a)\, 3\,(1 - b) = 9e$ and $e^2 = e$. Similarly, it can be proved that $(1 - b)\, a\,(1 - a)\ (1 - b) = (a - a^2 - ba + ba^2)\,(1 - b) = (a - a^2 + a^2 - a)\,(1 - b) =$

0 . That is why $9eae = (1-a)(1-b)a(1-a)(1-b) = 0$ and $eae = 0$. So, $ea^2e = e(-1-a)e = -e$. It is easy to see that $(1-b)a^2 + a^2(1-b) = 2a^2 - (a+a^2)b = 2a^2 + b$. That is why $3(ea^2 + a^2e) = (1-a)((1-b)a^2 + a^2(1-b)) = (1-a)(2a^2+b)$. Thus it is proved that

$$3(1-e)a^2(1-e) = 3a^2 - 3(ea^2 + a^2e) + 3ea^2e = 3a^2 - (1-a)(2a^2+b) - 3e =$$
$$= 3a^2 - (1-a)(2a^2+b+1-b) = 3a^2 - (1-a)(2a^2+1) = 0$$

and $(1-e)a^2(1-e) = 0$.

Lemma 3 implies that $ae = (1-e)ae$ and $a^2(1-e) = ea^2(1-e)$. It is possible to convince that $e_1 = e - ab$ is also an idempotent which satisfies the equality $e_1ae_1 = (1-e_1)a^2(1-e_1) = 0$. Besides that $(a^2b-1)e_1 = 0$. It can be proved that e_1 is unambiguously certain idempotent which is a linear combination of elements of group $\langle a, b\rangle$ with the whole coefficients and satisfies above-mentioned equalities.

2. Image of endomorphism by formal matrices.

Lemma 4. *Let K be an associative ring with $1, 3 \in K^\star$, W be left K-module, a, b be elements $GL(W)$ such that $a^3 = b^2 = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$. Then there are isomorphism modules $g : W \longrightarrow W_g$, which induces isomorphism $\Lambda_g : GL(W) \longrightarrow GL(W_g)$ so that the elements $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$ can be represented by formal matrices*

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \gamma\right).$$

where $\alpha, \beta \in EndL$, $\gamma \in EndP$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$, $W_g = L\oplus L\oplus P$. In particular, if $W = R(a)$, then

$$\Lambda_g a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \Lambda_g b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $R(a) = (a-1)W$ and $P(a) = \ker(a-1)$. Submodule $R(a)$ and $P(a)$ is relatively invariant a and b, $a^2+a+1 = 0$ for submodules $R(a)$ and $a = 1$ for submodules $P(a)$. Let $e = (1-a)(1-b)3^{-1}$, where 1 means a unit of $GL(W)$. Obviously, submodules $R(a)$ and $P(a)$ are relatively invariant e. Narrowing items a, b, e for submodules $R(a)$ satisfying lemma 4. Because $eP(a) \subseteq (1-a)P(a) = 0$, then $e^2 = e = 0$ on $P(a)$. Therefore $e^2 = e$ – idempotent on $R(a)$. This means that $e^2 = e$ – idempotent rings $EndW$, which defines the schedule module W,

$$W = R(a) \oplus P(a) = eR(a) \oplus (1-e)R(a) \oplus P(a), \text{ where}$$
$$R(a) = eR(a) \oplus (1-e)R(a).$$

Let $L = eR(a)$, $P = P(a)$. Since $a \neq 1$, then $R(a) \neq 0$. Under the lemma 4 $aeR(a) \subseteq (1-e)R(a)$ and $a^2(1-e)R(a) \subseteq eR(a)$, $(1-e)R(a) \subseteq aeR(a)$. So, $(1-e)R(a) = aeR(a) = aL$. Thus it is proved that $R(a) = L \oplus aL$, $L \neq 0$, $W = L \oplus aL \oplus P$. Let $W_g = L \oplus L \oplus P$ and $g : W \longrightarrow W_g$ be an isomorphism of modules, which is defined by the rules $g(l_1 + al_2 + p) = l_1 + l_2 + p$, where $l_1 \in L$, $1 \leq i \leq 2$, $p \in P$, and $\Lambda_g : GL(W) \longrightarrow GL(W_g)$ – induced g group isomorphism. This means that the elements of the ring $End(W_g)$ can be represented by formal 3×3 matrices

$$\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}, 1\right),\ \Lambda_g b = diag\left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \gamma\right).$$

Given equality $(1+a+a^2)R(a) = 0$ get that $a_1 = a_2 = -1$. With equality $ba = a^{-1}b$ it follows that $b_3 = b_2$, $b_4 = -b_1$ and with equality $b^2 = 1$ get that $b_1b_2 = b_2b_1$, $b_1^2 + b_1b_2 + b_2^2 = 1$. Let $\alpha = b_1$ and $\beta = b_2$. Then

$$\Lambda_g a = diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right), 1\right), \Lambda_g b = diag\left(\left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & -\alpha \end{array}\right), \gamma\right)$$

where $\alpha, \beta \in EndL$, $\gamma \in EndP$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 1$. $\gamma^2 = 1$.

If instead of the idempotent e we choose the idempotent $e_1 = e - ab$ it is possible to prove that $\alpha = 0$ as $\beta = 1$.

Lemma 5. *Let K be an associative ring with 1, $3 \in K^*$, V be a left K-module, $a, b \in GL(V)$, $a^3 = b^3 = 1$, $ab = ba$. Then a and b can be represented by the formal matrices $a = diag(z, E, x, y, E)$, $b = diag(E, z_1, x, y^2, E)$, where $x^2 + x + 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$, $z^2 + z + 1 = 0$, $z_1^2 + z + 1 = 0$.*

Proof. Submodules $R(a)$, $R(b)$, $P(a)$, $P(b)$ are invariant relatively to the elements a and b and there are decompositions $V = R(a) \oplus P(a)$, $R(a) = R(a) \bigcap R(b) \oplus R(a) \bigcap P(b)$, $P(a) = P(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$ Because of $(ab)^3 = 1$, the decompositions is also occured

$$R(a) \bigcap R(b) = R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) \oplus R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab)$$

This means that there is a decomposition of the module V in to the direct sum of modules (some of which may be zero)

$$V = R(a) \bigcap P(b) \oplus P(a) \bigcap R(b) \oplus R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) \oplus$$
$$\oplus R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab) \oplus P(a) \bigcap P(b)$$

Thus it is proved that the elements a and b have a image which is shown in Lemma 5. Because of $(x-1)(x+2) = -3 = (x^2-1)(x+1)$, then $x - 1$, $x^2 - 1$ and similarly $y - 1$, $y^2 - 1$, $z - 1$, $z^2 - 1$, $z_1 - 1$, $z_1^2 - 1$ are circulating on the respective non-zero submodules. It is followed from Lemma 5 that if such an element $t \in EndV$ commutes with the product $ab = diag(z, z_1, x^2, E, E)$ then t has a form of $t = diag(t_1, t_2)$, where t_1 commutes with $diag(z, z_1, x^2)$. In particular if $t \in GL(V)$, $R(a) \bigcap P(b) = R(b) \bigcap P(a) = 0$, then $V = R(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$, $ab = diag(x^2, E, E)$, $ab^2 = diag(E, y^2, E)$, t_1 commute with x^2 and as it followed that with $x = -x^2 + 1$, $[a, t] = diag(E, *)$, $[b, t] = diag(E, *)$. In this case the elements in the form of $diag(T, 0, 0)$ commute with the elements ab^2 , $[a, t]$, $[b, t]$ for any $T \in End(R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab))$.

Lemma 6. *Let K be an associative ring with 1, $3 \in K^*$, V be a left K-module, $a, b, c, d, t \in GL(V)$, $a^3 = b^3 = 1$, $ab = ba$, $b \neq a^2$, $cac^{-1} = a^2$, $cbc^{-1} = b^2$, $c^2 = 1$, $dad^{-1} = b$, $d^2 = 1$, $tab = abt$. Let to any $m \in EndV$, $m^2 = 0$ in condition of m commutes with ab^2 , $[a, t]$, $[b, t]$ it is followed that m commutes with a. Then $R(a) \bigcap P(b) \neq 0$.*

Proof. Let $R(a) \bigcap P(b) = 0$. Then $R(b) \bigcap P(a) = d(R(a) \bigcap P(b)) = 0$, $V = R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) \oplus R(a) \bigcap R(b) \bigcap P(ab) \oplus P(a) \bigcap P(b)$, $a = diag(x, y, E)$, $b = diag(x, y^2, E)$, where $x^2 + x + 1 = 0$, $y^2 + y + 1 = 0$. Because of $b \neq a^2$, then $R(a) \bigcap R(b) \bigcap R(ab) \neq 0$. According to Lemma 4 we can assume that $x = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$. Let $m = diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right), 0, 0\right)$. As noted above, m commutes with ab^2 , $[a, t]$, $[b, t]$. According to the condition m commutes with a. However, according to the form m does not commutes with a. From this contradiction it is followed that $R(a) \bigcap P(b) \neq 0$.

Theorem 1. *Let K be an associative ring with 1, $2 \in K^*$, W be left K-module, a,b,c,d be the elements of group $GL(W)$ such that $a^2 = b^2 = 1$, $ab = ba$, $ca = ac$, $cbc^{-1} = ab$, $db = bd$, $dad^{-1} = ab$, $a \neq 1$. Then there is the isomorphism of modules $g : W \to W_g$, which induces isomorphism $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ so that the elements $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ can be represented by formal matrices $\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1)$, $\Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1)$, $\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right)$, $\Lambda_g d = diag\left(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right)$, where $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in EndL$, $\gamma, \gamma_1 \in EndP$, $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$.*

Proof. By condition $R(a) \neq 0, bR(a) = R(a), bP(a) = P(a)$. Therefore, there is a decomposition $W = R(a) \oplus P(a) = R(a) \bigcap R(b) \oplus R(a) \bigcap P(b) \oplus P(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$. Let $L = R(a) \bigcap P(b)$, $P = P(a) \bigcap P(b)$. Then $cL = R(a) \bigcap P(ab) = R(a) \bigcap R(b)$ and $dcL = R(ab) \bigcap R(b) = P(a) \bigcap R(b)$. Because of $R(a) = L \oplus cL \neq 0$, than $L \neq 0$ and $W = L \oplus cL \oplus dcL \oplus P$, where $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus P$. Let us consider the isomorphism of the modules $g : W \to W_g$, which is defined by the rule $g(l_1 + cl_2 + dcl_3 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + p$, where $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 3$, $p \in P$ and group homomorphism $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ which is induced by the isomorphism of the modules $g : W \to W_g$, where $\Lambda_g \sigma = g\sigma g^{-1}$ for all. We represent the elements of the ring by formal matrices. In particular, we find that $\Lambda_g a = diag(-1,-1,1,1)$, $\Lambda_g b = diag(1,-1,-1,1)$, where 1 is a unit of $EndL$ or $EndP$ a ring respectively. Beside this,

$$c^2L = cR(a) \cap P(b) = R(a) \cap P(ab) = L,$$
$$cdcL = cdR(a) \cap R(b) = P(a) \cap R(ab) = cL,$$
$$cP = P(a) \cap P(ab) = P.$$

Therefore

$$\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta, \gamma\right),$$

where $\alpha, \beta \in EndL$, $\gamma \in EndP$. Similarly proved that $dcL = cL$, $d^2L = L$, $dP = P$ and

$$\Lambda_g d = diag\left(\beta_1, \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_1\right),$$

where $\alpha_1, \beta_1 \in EndL$, $\gamma_1 \in EndP$.

In particular, if $c^2 = a$, then $\alpha = -1$, $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$. If $c^2 = 1$, then $\alpha = 1$, $\beta^2 = 1$, $\gamma^2 = 1$. Thus, Theorem 1 is proved.

Remark 1. *If G be a group such that $E(n,R) \subseteq G \subseteq GL(n,R)$, where R is an associative ring with $1, n \geq 3$ and $\Lambda : G \longrightarrow GL(W)$ is non-trivial arbitrary homomorphism, who in the group $GL(W)$ as elements a,b,c,d, appearing in the Theorem 1, provided $\Lambda t_{ij}(2) \neq 1$ you can choose*

$$a = \Lambda diag(-1,-1,1,\ldots,1),\ b = \Lambda diag(1,-1,-1,1,\ldots,1),$$
$$c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1\right),\ d = \Lambda diag\left(1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1,\ldots,1\right).$$

This $c^2 = a$, $d^2 = b$. If $\Lambda t_{ij}(2) \neq 1$ for some, and hence for all $1 \leq i \neq j \leq n$, then as elements a,b,c,d elements can be selected $a = \Lambda t_{12}(1)$, $b = \Lambda t_{13}(1)$, $c = \Lambda t_{32}(-1)$, $d = \Lambda t_{23}(-1)$.

In fact, according to the formula $[t_{ij}, t_{jk}(1), t_{ij}(r)] = t_{ik}(-r)$, where $1 \leq$

$i, j, k \leq n$ are pairly different numbers, there is an inequality $a \neq 1$.

Theorem 2. *Let K be an associative ring with 1, $3 \in K^*$, W be a left K-module, a,b,c,d are the elements of group $GL(W)$ such that $a^3 = b^3 = 1$, $ab = ba$, $cac^{-1} = a^{-1}$, $cbc^{-1} = b^{-1}$, $c^2 = 1$, $dad^{-1} = b$, $d^2 = 1$, $dc = cd$, $R(a) \bigcap P(b) \neq 0$. Then there is the isomorphism of modules $g : W \to W_g$, which induces the isomorphism of group $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ so that the elements $\Lambda_g a$, $\Lambda_g b$, $\Lambda_g c$, $\Lambda_g d$ can be represented by formal matrices $\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right)$, $\Lambda_g b = diag\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right)$, $\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right)$, $\Lambda_g d = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \delta\right)$ where $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$, $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, $\gamma^2 = \delta^2 = 1$, $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\gamma\alpha = \alpha^2\gamma$, $\delta\alpha = \beta\delta$, $E = diag(1, 1)$, 1 is a unit $EndL$ or $EndP$ respectively.*

Proof. Let $e = (1-a)(1-c)3^{-1}$, $f = (1-b)(1-c)3^{-1}$ as in the Lemma 4. Then $e^2 = e$, $eae = 0$, $f^2 = f$, $fbf = 0$, $ded^{-1} = f$, $dfd^{-1} = e$. $W = R(a) \bigcap P(b) \oplus R(b) \bigcap P(a) \oplus R(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$, $R(a) = eR(a) \oplus (1-e) R(a)$, $R(b) = fR(b) \oplus (1-e) R(b)$ As in the Lemma 4 we have $ceR(a) = (1-e) R(a)$, $cfR(b) = (1-f) R(b)$. Under the condition $dR(a) \bigcap P(b) = R(b) \bigcap P(a)$. Let $L = eR(a) \bigcap P(b)$, $P = R(a) \bigcap R(b) \oplus P(a) \bigcap P(b)$. Then $R(a) \bigcap P(b) = L \oplus cL$, $L \neq 0$, $dL = fR(b) \bigcap P(a)$, $R(b) \bigcap P(a) = dL \oplus dcL$. Thus it is proved that $W = L \oplus cL \oplus dL \oplus dcL \oplus P$. Let $W_g = L \oplus L \oplus L \oplus L \oplus P$, $g : W \to W_g$ be an isomorphism of modules, which is defined by the rule $g(l_1 + cl_2 + dl_3 + dcl_4 + p) = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + p$, where $l_i \in L$, $1 \leq i \leq 4$, $p \in P$ and $\Lambda_g : GL(W) \to GL(W_g)$ is an induced group homomorphism. Represent the elements of the ring $End(W_g)$ by formal 5×5 matrices $\Lambda_g a = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, 1, \alpha\right)$, $\Lambda_g b = diag\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \beta\right)$, $\Lambda_g c = diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma\right)$, $\Lambda_g d = diag \left(\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}, \delta\right)$ where $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in EndP$ and $A \in (EndL)_2$ are formal 2×2 matrix that commute with formal 2×2 matrices $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, where $1 \in EndL$. Therefore, up to conjugation, in the formal matrix $diag(A, 1, 1)$ we can assume that $A = 1$. Thus, Theorem 2 is proved.

Remark 2. *If G is a group such that $E(n, R) \subseteq G \subseteq GL(n, R)$, where R is an associative ring with 1, $n \geq 4$, and $\Lambda : G \to GL(W)$ is an arbitrary non-trivial homomorphism with condition (*) on $E(n, R)$, then the elements a,b,c,d, which appear in the theorem 2 in group you can choose $a = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right)$, $b = \Lambda diag\left(1, 1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right)$, $c = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right)$, $d = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, 1, ..., 1\right)$, where $E = diag(1, 1)$ is a single 2×2 matrix.*

In fact, according to the formula $[t_{ij}t_{ij}(-1), t_{jk}(1), t_{ji}(r)] = t_{ik}(-r)$, where $1 \leq i, j, k \leq n$ are pairly different numbers, there is an inequality $a \neq b^2$. As Λ is a homomorphism with the condition (*), so all the other conditions of Lemma 6 are fulfilled. Therefore, if you put $t = \Lambda diag\left(\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$ in Lemma 6, then t commutes with ab, where $a = \Lambda diag\,(A, E, E)$, $b = \Lambda diag\,(E, A, E)$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL\,(2, R)$. Let m be an arbitrary element of the ring $EndW$, $m^2 = 0$, which commutes with ab^2 , $[a, t]$, $[b, t]$. It can be considered that $m \neq 0$. Under condition (*) there is an element $h \in GL\,(n, R)$ such that $\Lambda h = 1 + s_1 m$ and h^{s_2} commutes with $diag\,(A, A^2, E)$, $diag\left(\begin{pmatrix} E & A-E \\ 0 & E \end{pmatrix}, E\right)$, $diag\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ A-E & E \end{pmatrix}, E\right)$. In this case, as the test shows, h^{s_2} commutes with $diag\,(A, E, E)$. That is why the element $\Lambda h^{s_2} = 1 + s_1 s_2 m$ and, consequently, the element $m$commute with a. According to the Lemma 6 $R\,(a) \bigcap P\,(b) \neq 0$. Therefore the above mentioned elements a, b, c, d satisfy the conditions of the theorem 2.

References

1. I.Z. Golubchik, Isomorphisms of the General Group$GL\,(n, R)$, $n \geq 4$, over an associative Ring, Contemporary Mathematics, 131(1)(1992), 123-136.
2. V.M. Petechuk, J.V. Petechuk, Homomorphisms matrix groups over associative rings. Part I, Science. News of Uzhgorod. un-ty. Ser. Mat. and inform, 25(2)(2014), 152-171 (in Russian).
3. V.M. Petechuk, J.V. Petechuk, Homomorphisms of matrix groups over associative rings. Part II, Science. News of Uzhgorod. un-ty. Ser. Mat. and inform, 1(26)(2015), 99-114 (in Russian).

Одержано 20.03.2017

УДК 515.146.3

A. I. Plakosh (Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine),
I. V. Shapochka (State University "Uzhhorod National University")

ON COHOMOLOGIES OF THE KLEIN FOUR-GROUP

A free resolution of the trivial G-module $\mathbb{Z}$, where G is the Klein four-group, is constructed. Its relation with the standard resolution is established. Also $H^2(G, M)$ for some modules M is calculated.

Ми будуємо вільну резольвенту тривіального G-модуля $\mathbb{Z}$, де G — четверна група Клейна, встановлюємо зв'язок із стандартною резольвентою та обчислюємо $H^2(G, M)$ для деяких модулів M.

Theory of group cohomology is widely used in the theory of representations and the theory of groups, in particular, for the description of special classes of groups. Thus group cohomology plays an important role in the study of group extensions, for instance, in the study of Chernikov groups [1]. In the last case the corresponding G-modules are just dual to integral representations. The usual way to calculate cohomologies is by the standard resolution [2, 3]. Nevertheless, sometimes it is convenient to simplify this resolution. We propose a simplified resolution for the Klein four-group and use it to calculate cohomologies for duals of indecomposable integral representations with at most 3 irreducible components.

Let $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$ be the Klein four-group. We construct a free resolution of the trivial $\mathbb{Z}G$-module $\mathbb{Z}$, which can be used to calculate cohomologies of this group.

A resolution of $\mathbb{Z}$ for the cyclic group $C_2 = \langle a\rangle$ is well-known:

$$P_A: \ \ldots \xrightarrow{a-1} \mathbb{Z}C_2 \xrightarrow{a+1} \mathbb{Z}C_2 \xrightarrow{a-1} \mathbb{Z}C_2 \longrightarrow \ldots$$

From the Künneth formulas [3] it follows that a resolution for $G \cong \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ can be constructed as $P = P_A \otimes_{\mathbb{Z}} P_B$, where P_A is a resolution for the first factor and P_B is a resolution for the second factor. We write the resolution P_A for the first factor C_2 as

$$\ldots \longrightarrow Rx^3 \longrightarrow Rx^2 \longrightarrow Rx \longrightarrow R$$

with the differential $dx^k = (a + (-1)^k)x^{k-1}$, and the resolution P_B for the second factor as

$$\ldots \longrightarrow Ry^3 \longrightarrow Ry^2 \longrightarrow Ry \longrightarrow R$$

with the differential $dy^k = (b + (-1)^k)y^{k-1}$. Then the n-th component

$$P_n = \bigoplus_{i+j=n} P_{A,i} \otimes P_{B,j}$$

can be considered as the module of homogeneous polynomials of degree n from $R[x, y]$, where $R = \mathbb{Z}G$ and

$$d(x^i y^j) = (a + (-1)^i)x^{i-1}y^j + (-1)^i(b + (-1)^j)x^i y^{j-1}.$$

So we can write the matrix defining this differential as

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1-b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a-1 & b+1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a+1 & 1-b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

if n is even and as

$$\begin{pmatrix} a-1 & -(b+1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a+1 & b-1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a-1 & -(b+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

if n is odd. Note that for $n = 2$ this results was obtained in [4].

Recall that in the standard resolution

$$F: \ \dots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

the $\mathbb{Z}G$-module F_n has a basis $[g_1|g_2|\dots|g_n]$, where $g_i \in G\backslash\{1\}$ (we also set $[g_1|g_2|\dots|g_n] = 0$ if some $g_i = 1$) and

$$d[g_1|g_2|\dots|g_n] = g_1[g_2|\dots|g_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|g_2|\dots|g_ig_{i+1}|\dots|g_n] + \\ +(-1)^n[g_1|g_2|\dots|g_n].$$

There is a map $\sigma : F \longrightarrow P$, which defines a homotopy equivalence of these resolutions such that

$$\begin{array}{lll} \sigma_1[a] = x, & \sigma_1[b] = y, & \sigma_2[a|a] = x^2, \\ \sigma_2[b|b] = y^2, & \sigma_2[a|b] = 0, & \sigma_2[b|a] = -xy, \\ \sigma_2[ab|ab] = bx^2 - xy + y^2, & \sigma_2[ab|b] = ay^2, & \sigma_2[ab|a] = bx^2 + xy, \\ \sigma_2[a|ab] = x^2, & \sigma_2[b|ab] = -xy + ay^2. & \end{array} \tag{1}$$

We calculate $H^2(G, M)$, for G-modules M such that M as an abelian group is mQ, where Q is the quasicyclic p-group (or the group of type p^∞). Then the action of G on M is given by an integral p-adic representation of G [1]. We consider the cases when M is indecomposable and not faithful as $\mathbb{Z}_pG$-module.

If $m = 1$, there are 4 such representations $M_{\alpha,\beta}$ (α, $\beta \in \{1, -1\}$) which map $a \mapsto \alpha$, $b \mapsto \beta$. Evidently M_{+-} (M_{-+}) can be obtained from M_{--} if we replace a by ab (resp. b by ab). So we only have to calculate cohomology for M_{++} and M_{--}.

For M_{++} that's why $a = b = 1$, $a + 1 = b + 1 = 2$, $a - 1 = b - 1 = 0$ we have

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\gamma(x^2) = 0,$$

$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\gamma(y^2) = 0,$$

$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\gamma(xy) + (b-1)\gamma(x^2) = 2\gamma(xy),$$

as well as $\partial\gamma(xy^2) = 2\gamma(xy)$.

We can replace γ by $\partial\xi$ for some $\xi : P_1 \to M_{++}$. Note that

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\xi(x) = 2\xi(x),$$
$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\xi(y) = 2\xi(y),$$
$$\partial\xi(xy) = (a-1)\xi(y) - (b-1)\xi(x) = 0.$$

As M is a divisible group, choosing appropriate $\xi(x)$ and $\xi(y)$, we can make $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0$. Therefore, $H^2(G, M_{++}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the non-zero element γ of this group can be chosen as $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0$, $\gamma(xy) = \varepsilon$, where ε is the unique element of Q of order 2.

Just in the same way we obtain that $H^2(G, M_{--}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ and its elements are the classes of cocycles γ such that $\gamma(x^2)$ and $\gamma(y^2)$ are from $\{0, \varepsilon\}$, while $\gamma(xy) = 0$.

If $m = 2$, there is an exact sequence

$$0 \longrightarrow M_{\alpha,\beta} \longrightarrow M \longrightarrow M_{\alpha',\beta'} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Moreover, if M is indecomposable, $(\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta')$ and M is defined by (α, β) and (α', β'). Note that if there is a sequence (2), there is also an exact sequence

$$0 \longrightarrow M_{\alpha',\beta'} \longrightarrow M \longrightarrow M_{\alpha,\beta} \longrightarrow 0.$$

As before, applying an automorphism of G, we can suppose that $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ and $(\alpha', \beta') = (-1, -1)$ or $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ and $(\alpha', \beta') = (1, -1)$.

Let $0 \longrightarrow M_{-+} \longrightarrow M \longrightarrow M_{+-} \longrightarrow 0$ be exact. Then M corresponds to the representation of G such that

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thus

$$a - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$
$$a + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b + 1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let

$$\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ -2v_2 \end{pmatrix} = 0,$$
$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} + (b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 - v_1 \\ 2v_3 - 2v_1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 - 2u_3 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

So, we have $v_1 = v_3 = 2u_1 = 2u_2 + 2u_3$, $v_2 = 0$.

Let

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \qquad \xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 - d_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + d_2 + d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix},$$

Therefore, changing γ by $\gamma + \partial\xi$, we can make $u_1 = u_2 = 0$, whence also $v_1 = v_3 = 0$, $2u_3 = 0$. Thus $H^2(G, M) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the non-zero elements γ of this group is the class of the cycle γ such that

$$\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Let now $0 \longrightarrow M_{--} \longrightarrow M \longrightarrow M_{++} \longrightarrow 0$ is exact, i.e.

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a - 1 = b - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a + 1 = b + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Let

$$\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} + (b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 - 2u_1 + v_1 \\ 2v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 - v_3 \\ -2v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

So, we have $v_3 = 0$, $2u_1 = v_1$, $2u_2 = v_2$.

Let

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \qquad \xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ 2d_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + d_2 - 2c_1 + d_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hence, changing γ by $\gamma + \partial\xi$, we can make $u_1 = u_2 = 0$ as well as $u_3 = 0$ (as M is divisible). Therefore, $H^2(G, M) = 0$.

Let $m = 3$. If M is indecomposable, there is a chain of submodules

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset M_3 = 0$$

such that all quotients $L_i = M_{i-1}/M_i$ are of the form M_{α_i,β_i} and all M_{α_i,β_i} are different. Moreover, we can change the ordering of L_i arbitrarily. Up to an automorphism of G, there are four cases:

1) M_1 is cyclic $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 1)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1, -1)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (-1, 1)$;
2) M_2 is cyclic $(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (-1, 1)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (1, -1)$;
3) M_3 is not cyclic $(\alpha_1, \beta_1) = (-1, 1)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1, -1)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (1, 1)$;
4) M_4 is not cyclic $(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (-1, 1)$, $(\alpha_3, \beta_3) = (1, -1)$.

Case 1. Here

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Let

$$\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v_2 + w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} + (b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 \\ 2v_3 - 2v_1 + w_1 \\ 2w_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + w_2 - 2u_3 \\ -w_3 \\ -2w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

So, we have $w_3 = 0$, $w_1 = 2u_1$, $w_2 = 2v_2$.

Let

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \qquad \xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Then

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 2d_1 \\ 2f_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ f_2 \\ 2f_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + f_2 \\ 2d_1 - f_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

So we can make $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$, which gives $H^2(M) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, consisting of the classes of cocycles γ such that

$$\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},$$

where $u, v \in \{0, \varepsilon\}$.

The calculations in other cases are quite similar, so we only present the results, with some comments in Case 3.

Case 2.

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Here we have $H^2(G, M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the nonzero element of this group is the class of the cocycle γ with $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0$, while

$$\gamma(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Case 3.

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

For $\gamma : G \to M$ such that

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

we obtain

$$\partial\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} 2c_1 + f_1 \\ 2d_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial\gamma(y^2) = \begin{pmatrix} 2c_2 + d_2 \\ 0 \\ 2f_2 \end{pmatrix}, \qquad \partial\gamma(xy) = \begin{pmatrix} f_2 - d_1 \\ 2d_1 \\ -2f_2 \end{pmatrix}.$$

Therefore, changing ξ by $\xi + \partial\gamma$, we can make

$$\xi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \qquad \xi(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

The condition $\partial\xi = 0$ implies that $w = v = 0$, $v_3 = w_3 = 2u_3$ and $2v_3 = 0$. Hence $v_3 \in \{0, \varepsilon\}$, whence $H^2(G, M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ with the non-zero element being the class of the cocycle ξ such that $\xi(x^2) = \xi(y^2) = 0$,

$$\xi(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

where ε' is an element of order 4 (any of two such elements can be chosen).

Case 4.

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Here $H^2(G, M) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ consists of the classes of cocycles ξ such that

$$\xi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix}, \qquad \xi(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \qquad \xi(xy) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v + w \end{pmatrix},$$

where $v, w \in \{0, \varepsilon\}$.

Note that, using formula (1), we can find the cocycles in the "standard" form. For instance, in Case 4 above, we obtain:

$$\gamma(a, a) = \gamma(a, ab) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix}, \quad \gamma(a, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(b, b) = \gamma(ab, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix},$$

$$\gamma(b,a)=\begin{pmatrix}0\\v\\v+w\end{pmatrix},\quad \gamma(b,ab)=\begin{pmatrix}w\\v\\v+w\end{pmatrix},$$

$$\gamma(ab,a)=\begin{pmatrix}v\\0\\v+w\end{pmatrix},\quad \gamma(ab,ab)=\begin{pmatrix}v\\0\\w\end{pmatrix}.$$

References

1. *Gudivok P. M., Shapochka I. V.* On the Chernikov p-groups // Ukr. Mat. Zh. – 1999. – **51**, no 3. – P. 291–304.
2. *Brown K. S.* Cohomology of groups. – Moscow: Nauka, 1987. – 384 p.
3. *Cartan H., Eilenberg S.* Homological Algebra. – New Jersey: Princeton University Press, 1956. – 390 p.
4. *Shapochka I. V.* The second cohomology group of Klein four-group // Nauk. visnik Uzhhorod. Univ. Ser. matem. i inform. – 2014. – Vip. 2 (25). – P. 208–215.

Одержано 11.03.2017

УДК 517.9

І. В. Романюк (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ІСНУВАННЯ НЕТРИВІАЛЬНОГО АТРАКТОРУ ДЛЯ ОДНІЄЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

In this paper was proved existence of nontrivial global attractor for impulsive dynamical system, generated by the two-dimensional parabolic system. Solutions of this system have multi-valued impulsive perturbations at the moments of intersection with given subset of the phase space.

У роботі доведено існування нетривіального глобального атрактору для імпульсної динамічної системи, що породжується двовимірною параболічною системою, розв'язки якої зазнають многозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

1. Вступ. Одним з основних методів дослідження нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем є теорія глобальних атракторів [1]. Характер поведінки розподілених систем із збуреннями у фіксовані моменти часу [2] досліджувався у роботах [3–5]. Зокрема, були встановлені критерії існування та властивості глобальних атракторів. Важливим класом систем з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу є імпульсні динамічні системи [2, 6]. У роботах [7–10] у випадку скінченновимірного фазового простору досліджувалась якісна поведінка таких систем. У нескінченновимірному випадку для класу імпульсних динамічних систем із скінченною кількістю стрибків вздовж траєкторії, основним об'єктом вивчення є глобальні атрактори [11, 12]. Більш загальний підхід щодо дослідження поведінки розв'язків таких систем було розроблено в [13, 14]. Його реалізація для скалярного параболічного рівняння з многозначним імпульсним збуренням здійснена в [15]. У даній роботі цей підхід застосовується до імпульсної двовимірної параболічної системи, розв'язки якої зазнають многозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

2. Постановка задачі. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ – обмежена область. Відносно невідомих функцій $u(t,x), v(t,x)$ в $(0,+\infty)\times\Omega$ розглядається параболічна система:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = a\Delta v + 2b\Delta u, \\ u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де

$$a > 0, \ |b| < a. \tag{2}$$

Фазовим простором задачі (1) є простір $H = L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ з нормою $\|z\|_H = \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$, де тут і надалі $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — це норма та скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Система (1) породжує напівгрупу $V : R_+ \times H \to H$, для якої в силу (2)

$$\exists \delta > 0, \ \ \forall t \geq 0, \ \ \forall z_0 \in H \ \ \|V(t,z_0)\|_H \leq e^{-\delta t}\|z_0\|_H \tag{3}$$

та справедлива така формула:

$$\forall t \geq 0, \ \ \forall z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H \ \ \ V(t,z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (u_0,\psi_i) \\ (v_0,\psi_i) - 2b\lambda_i(u_0,\psi_i)t \end{pmatrix} e^{-a\lambda_i t}\psi_i, \tag{4}$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ — розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\lambda\psi, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

За функцію ψ, выдповыдно до [14], вызьмемо розв'язок (5):

$$\psi := \psi_1, \quad \lambda := \lambda_1.$$

Очевидно, що в силу оцінки (3) напівгрупа V має тривіальний глобальний атрактор $A = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$.

Для фіксованих $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \mu > 0$ на розв'язках (1) розглядається наступна імпульсна задача:
коли фазова точка $z(t)$ досягає імпульсної множини

$$M = \left\{ z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \in H \;\middle|\; |(u,\psi_1)| \leq \gamma, \;\; \alpha u + \beta v = 1 \right\}, \tag{6}$$

імпульсне многозначне відображення $I : M \mapsto M'$ переводить її в нове положення $z^+ \in Iz \subset M'$, де

$$M' = \left\{ z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \in H \;\middle|\; |(u,\psi)| \leq \gamma, \; \alpha u + \beta v = 1 + \mu \right\}. \tag{7}$$

У роботі для певного класу відображень I доведено, що імпульсна задача (1), (6), (7) породжує імпульсну многозначну динамічну систему, для якої в фазовому просторі H існує нетривіальний глобальний атрактор і встановлено його явну формулу.

3. Основні результати. За побудовою

$$M \cap M' = \varnothing,$$

$$\forall z_0 = \left(\begin{array}{c} u_0 \\ v_0 \end{array} \right) \in M \text{ для } z(t) = \left(\begin{array}{c} u(t) \\ v(t) \end{array} \right) = V(t,z_0) \text{ в силу (4)}$$

$$\forall t \geq 0 \;\; \alpha(u(t),\psi) + \beta(v(t),\psi) = e^{-\alpha\lambda t}(1 - 2b\lambda t\beta(u_0,\psi)).$$

Отже, $\exists \tau = \tau(z_0) > 0,\ \forall t \in (0,\tau)\ \ V(t,z_0) \notin M$.
Введемо позначення:

$$\forall z \in H \;\; M^+(z) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,z) \right) \cap M.$$

Тоді, якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то існує момент часу $s = \phi(z)$ такий, що

$$\forall\ t \in (0,s)\ V(t,z) \notin M \text{ та } V(s,z) \in M.$$

Таким чином, побудуємо імпульсну траєкторію $\varphi : R_+ \to H$, яка стартує з точки $z \in H$.

Якщо $M^+(z) = \varnothing$, тоді $\varphi(t) = V(t,z)\ \forall t \geq 0$.

Якщо $M^+(z) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(z)$, $z_1 = V(s_0, z)$ та $z_1^+ \in Iz_1$ визначимо φ на $[0, s_0]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t, z), \ t \in [0, s_0), \\ z_1^+, \qquad t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(z_1^+) = \varnothing$, тоді $\varphi(t) = V(t - s_0, z_1^+)$ $\forall t \geq s_0$.

Якщо $M^+(z_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(z_1^+)$, $z_2 = V(s_1, z_1^+)$ та $z_2^+ \in Iz_2$ визначимо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - s_0, z_1^+), \ t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ z_2^+, \qquad t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{z_n^+\}_{n\geq 1}$ та відповідних моментів часу $\{s_n\}_{n\geq 0}$. Покладемо $t_0 = 0$, $\ t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k$, $\ n \geq 0$.

Якщо $\tilde{\varphi}$ має нескінченну кількість імпульсних збурень, тоді траєкторія описується наступним чином:

$$\forall n \geq 0, \ \ \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \ \ \varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, z_n^+), \ t \in [t_n, t_{n+1}), \\ z_{n+1}^+, \qquad t = t_{n+1}. \end{cases} \tag{8}$$

Позначимо через K_z множину всіх імпульсних траєкторій, що починають рух з точки z та доведемо, що вони визначені на $[0, +\infty)$.

Для цього, в силу (3), дане твердження достатньо довести для $z_0 \in M'$.
Для $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = V(t, z_0)$ розглянемо функцію

$$g(t) = \alpha(u(t), \psi) + \beta(v(t), \psi) = e^{-a\lambda t}(1 + \mu - 2\beta b\lambda t(u_0, \psi)).$$

В силу (4) $\forall t \geq 0$ $|(u(t), \psi)| \leq \gamma$. Крім того, $g(0) = 1 + \mu$, $\ \lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 0$.

Отже, $\exists s_0 > 0$ — момент першого потрапляння фазової точки на множину M, тобто

$$\forall s_0 > 0 : |(u(s_0), \psi)| \leq \gamma, \ g(s_0) = 1.$$

Зі наступних співвідношень

$$\begin{cases} e^{a\lambda s_0} = 1 + \mu - 2\beta b\lambda s_0(u_0, \psi), \\ |(u_0, \psi)| \leq \gamma, \end{cases}$$

одержуємо, що

$$s_0 \geq \overline{s}, \tag{9}$$

де $\overline{s} > 0$ є коренем рівняння $e^{a\lambda s} = 1 + \mu - 2\beta|b|\lambda\gamma s$. Зокрема, $\overline{s}$ не залежить від z_0.

Отже, кожна імпульсна траєкторія, що стартує з множини M', має нескінчену кількість імпульсних точок і $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$. Отже, φ визначена на $[0, +\infty)$.

Таким чином, коректно визначена імпульсна многозначна динамічна система $G : R_+ \times H \to 2^H$:

$$\forall t \geq 0, \ \ \forall z \in H \ \ G(t, z) = \{\varphi(t) | \ \varphi \in K_z\}. \tag{10}$$

Означення 1 ([14]). *Підмножина $A \subset X$ називається глобальним атрактором многозначної динамічної системи G, якщо*

1) *A — компактна множина,*

2) *A — рівномірно притягуюча, тобто для будь-якої обмеженої $B \subset H$*

$$dist(G(t,B),A) \to 0,\ t \to \infty;$$

3) *A — мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 2).*

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай імпульсне відображення I має такий вигляд:*

$$\text{для } z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M$$

$$Iz = \left\{ \begin{pmatrix} c_1' \\ d_1' \end{pmatrix} \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \mid |c_1'| \le \gamma,\ \ \alpha c_1' + \beta d_1' = 1 + \mu \right\}. \qquad (11)$$

Тоді многозначна динамічна система G, задана формулою (10)*, має в фазовому просторі H глобальний атрактор A, причому*

$$A = \bigcup_{t\in[0,\overline{\tau}],\ |c_1|\le\gamma} \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 - 2b\lambda c_1 t \end{pmatrix} e^{-a\lambda t}\psi_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha c_1 + \beta d_1 = 1 + \mu \\ (1+\mu - 2b\beta\lambda c_1 \overline{\tau})e^{-a\lambda\overline{\tau}} = 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \qquad (12)$$

Доведення. Згідно [4], [5] для існування глобального атрактору необхідно перевірити наступні умови:

1) дисипативність:

$$\exists R_0 > 0, forall R > 0\ \ \exists T = T(R),\ \ \forall t \ge T,\ \ \forall z_0 \in H,\ \|z_0\|_H \le R,$$

$$\forall \varphi \in K_{z_0},\ \ \|\varphi(t)\|_H \le R_0, \qquad (13)$$

2) асимптотичну компактність:

$$\forall t_n \to \infty \text{ будь-яка обмежена } \{z_n^0\} \subset H\ \ \forall \xi_n \in G(t_n, z_n^0) \qquad (14)$$

$$\text{послідовність } \{\xi_n\} \text{ передкомпактна в } H.$$

Доведемо (13). Нехай $\|z_0\|_H \le R$, де $R > 0$ достатньо велике. Якщо траєкторія $\varphi \in K_{z_0}$ не зазнає імпульсних збурень, то в силу (3)

$$\forall t \ge \frac{1}{\delta} \ln R \|\varphi(t)\|_H \le 1. \qquad (15)$$

Інакше для моменту $s_0 > 0$ маємо рівняння

$$e^{-a\lambda s_0}(\alpha(u_0,\psi) + \beta(v_0,\psi) - 2\beta b\lambda s_0(u_0,\psi)) = 1.$$

Таким чином, отримуємо $s_0 \le s(R)$, де $s(R) > 0$ — корінь наступного рівняння

$$e^{a\lambda s} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}R + 2\beta|b|\lambda s R.$$

Після цього фазова точка опиняється в положенні $z_1^+ \in I(V(s_0, z_0))$. З (11) виводимо оцінку:

$$\forall z \in H, \ \ \forall z^+ \in I(z) \ \ \|z^+\|_H^2 \le \zeta^2 + \|z\|_H^2, \tag{16}$$

де $\zeta^2 := \gamma^2 + (\frac{1+\mu+\alpha\gamma}{\beta})^2$.
Зокрема

$$\|z_1^+\|_H^2 \le \zeta^2 + \|V(s_0, z_0)\|_H^2 \le \zeta^2 + R^2.$$

Таким чином, властивість дисипативності достатньо довести для

$$z_0 \in M^{'}, \ \|z_0\|_H \le R.$$

Нехай $\varphi \in K_{z_0}$ має стрибки в моменти $\{s_0, s_0+s_1, ...\}$ з імпульсними точками $\{z_i^+\}_{i=1}^{\infty}$. З (9) отримуємо $\forall i \ge 0 \ \ s_i \ge \overline{s}$.
Тоді з (3), (16) одержуємо:

$$\|\varphi(s_0)\|_H^2 \le e^{-2\delta\overline{s}}R^2 + \zeta^2,$$

$$\|\varphi(s_0+s_1)\|_H^2 \le e^{-4\delta\overline{s}}R^2 + e^{-2\delta\overline{s}}\zeta^2 + \zeta^2.$$

Після $k \ge 1$ одержуємо

$$\left\|\varphi\left(\sum_{i=0}^{k} s_i\right)\right\|_H^2 \le e^{-2\delta(k+1)\overline{s}}R^2 + \frac{\zeta^2}{1-e^{-2\delta\overline{s}}}. \tag{17}$$

Таким чином з (3), (17) одержуємо шукану дисипативність.

Доведемо асимптотичну компактність (14).
Нехай $z_n^0 = \sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix} c_i^{(n)} \\ d_i^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \psi_i, \ \ \|z_n^0\|_H \le R$ — довільна обмежена послідовність початкових даних і $t_n \nearrow +\infty$.
Якщо для нескінченно багатьох $n \ge 1$ $M^+(z_n^0) = \varnothing$, то в силу (3)

$$G(t_n, z_n^0) = V(t_n, z_n^0) \to 0, n \to \infty.$$

Інакше, для моментів імпульсів $\{s_i^{(n)}\}_{i=0}^{\infty}$ та імпульсних точок $\{z_i^{(n)+}\}_{i=1}^{\infty}$ маємо:

$$\forall i \ge 0 \ \ t_{i+1}^{(n)} := \sum_{k=0}^{i} s_k^{(n)} \ge (i+1)\overline{s}, \tag{18}$$

$$z_i^{(n)+} = \begin{pmatrix} \bar{c_1}^{(n)} \\ \bar{d_1}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot \psi_1 + \sum_{j=2}^{\infty}\begin{pmatrix} c_j^{(n)} \\ d_j^{(n)} - 2bc_j^{(n)}\lambda_j t_{j+1}^{(n)} \end{pmatrix} \cdot e^{-a\lambda_j t_{j+1}^{(n)}}, \tag{19}$$

де $|\bar{c_1}^{(n)}| \le \gamma, \ \alpha\bar{c_1}^{(n)} + \beta\bar{d_1}^{(n)} = 1 + \mu$.

Так як $\forall n \geq 1 \ \ \exists k(n) \geq n$ таке, що $t^{(n)}_{k(n)-1} \leq t_n < t^{(n)}_{k(n)}$, то для $\xi_n = G(t_n, z^0_n)$ маємо:

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n), \tag{20}$$

де $\eta_n = z^{(n)+}_{k(n)}$, $\tau_n = t_n - t^n_{k(n)-1} \in [0, \bar{s}]$.
Отже, з (19) по підпослідовності

$$\eta_n \to \eta = \left(\begin{array}{c} \bar{c_1} \\ \bar{d_1} \end{array} \right) \psi_1, \ n \to \infty, \tag{21}$$

де $|\bar{c_1}| \leq \gamma, \ \alpha\bar{c_1} + \beta\bar{d_1} = 1 + \mu$.

Оскільки по підпослідовності $\tau_n \to \tau$, то з (20) та властивостей напівгрупи V виводимо предкомпактність $\{\xi_n\}$, що і доводить існування глобального атрактора A.

Оскільки за побудовою [4] A складається з часткових границь всіх послідовностей виду $\xi_n \in G(t_n, B_{R_0})$, де $t_n \nearrow \infty$, $B_{R_0} = \Big\{ z \mid \|z\|_H \leq R_0 \Big\}$, то або $\xi_n \to 0$, або з (20) та (21)

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \to \xi = V(\tau, \eta),$$

де $\tau \in [0, \bar{\tau}], \bar{\tau} > 0$ однозначно визначається з рівності

$$e^{-a\lambda\bar{\tau}}(1 + \mu - 2\beta b\bar{c_1}\bar{\tau}) = 1,$$

де $|\bar{c_1}| \leq \gamma, \ \alpha\bar{c_1} + \beta\bar{d_1} = 1 + \mu$. Звідси виводимо (12).

Теорема доведена.

Зауваження 1. *Аналогічно міркуванням роботи* [15] *можна показати виконання наступної властивості:*

$$\forall t \geq 0 \ \ G(t, A \setminus M) = A \setminus M.$$

Список використаної літератури

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.
2. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. // — К.: Вища школа. 1987. – 287 с.
3. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Глобальний атрактор еволюційного включення з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу // УМЖ. —- 2003. — Т.55, № 8. — С. 1283 – 1294.
4. *Iovane G., Kapustyan O.V., Valero J.* Asymptotic behavior of reaction-diffusion equations with non-damped impulsive effects // Nonlinear Analysis. — 2008. – Vol. 68. – P. 2516 – 2530.
5. *Perestyuk M.O., Kapustyan O.V.* Long-time behavior of evolution inclusion with non-damped impulsive effects // Memoirs of Differential equations and Mathematical physics. — 2012. – Vol. 56. – P. 89 – 113.
6. *Kaul S.K.* On impulsive semidynamical system // J. Math. Anal. Appl. — 1990. – Vol. 150. – №1. – P. 120 – 128.
7. *Bonotto E.M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. — 2007. – Vol.332. – P. 81 – 96.
8. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2004. – Vol.52. – P. 81 – 91.

9. *Kaul S.K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems// J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 1994. – Vol. 7. – №4. – P. 509 – 523.
10. *Перестюк Ю.М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі. // Нелінійні коливання. -— 2012. — Т. 15, № 4. — С. 494 – 503.
11. *Bonotto E.M., Bortolan M.C., Carvalho A.N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems – a precompact approach, // J. Diff. Eqn. — 2015. – vol. 259. – P. 2602 – 2625
12. *Bonotto E.M., Demuner D.P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. — 2013. – Vol. 137. – P. 617 – 642
13. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем // Доповіді НАН України. —- 2015. — № 12. — С. 13 – 17.
14. *Капустян О.В., Перестюк М.О.* Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем // УМЖ. -— 2016. — Т.68, № 4. — С. 517 – 528.
15. *Романюк І.* Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи // Вісник Київ. нац. унів. імені Тараса Шевченка. Серія: Математика. Механіка. — 2016. – Vol. 35. – С. 14 – 19.

Одержано 28.03.2017

УДК 512.44

Г. І. Сливка-Тилищак (Пряшівський ун-т в Пряшеві, ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ОЦІНКИ ДЛЯ РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ СТРУНИ З ВИПАДКОВИМИ ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ

In the paper the estimates for distribution of supremum for the solution of the hyperbolic equation of mathematical physics whis random initial conditions on the unbounded domain are found.

В роботі отримано оцінку для розподілу супремуму розв'язку гіперболічного рівняння математичної фізики з випадковими початковими умовами в нескінченній області.

1. Вступ. Багато науковців досліджували властивості розподілів супремумів випадкових процесів, працювали над знаходженням оцінок ймовірності, вивчали проблему існування моментів розподілу супремумів процесів. Оцінки для розподілів супремумів різних орлічевських процесів розглядалися в роботах [2, 4–6]. У монографії Дарійчук І. В., Козаченко Ю. В., Перестюк М. М. [9] розглядаються питання пов'язані з розподілом супремуму випадкових процесів з простору Орліча випадкових величин. Зауважимо, що в [9] процеси визначені як на скінченному інтервалі, та і на $\mathbb{R}$. Оцінки для розподілу супремуму гауссових випадкових процесів на компактах розглядалися в багатьох роботах, зокрема в монографії [7], де можна знайти посилання і на інші статті. Оцінки для розподілу супремуму $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкових процесів на компактах розглядалися в [8]. У статті [3] отримано оцінки розподілу супремуму для випадкових полів з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ на нескінченності.

Дана робота присвячена застосуванню оцінок для розподілу супремуму випадкових полів в нескінченній області з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики з випадковими початковими умовами.

Отримані оцінки можна застосовувати при вивченні швидкості росту розвязків задач математичної фізики при $t \to \infty$. Результати в цьому напрямку можна використовувати в наступних ситуаціях: Нехай диференціальне рівняння описує деякий фізичний процес. Відомо, що при перевищенні деякого рівня даним процесом відбувається катастрофа. Ці перевищення відбуваються досить рідко. Якщо мати оцінки зростання процесу на нескінченості, то можна оцінити ймовірність катастрофи за певний проміжок часу.

2. Основний результат. Розглянемо крайову задачу гіперболічного типу математичної фізики про коливання неоднорідної струни:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u - \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \qquad (1)$$

$$x \in [0, l]\,,\ t \in [0, T]\,,\ T > 0;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0,\ t \in [0, T]\,; \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \xi(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \eta(x), \ x \in [0,l]\,. \tag{3}$$

Припустимо, що початкове положення струни $(\xi(x), \ x \in [0,\pi])$ і початкова швидкість $(\eta(x), \ x \in [0,\pi])$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси, де $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| > 1$, $p > 1$.

Означення 1 ([1]). *Парна неперервна опукла функція $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$ така, що $u(0) = 0$, $u(x) > 0$ при $x \neq 0$ і $\lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x)}{x} = \infty$ називається N -функцією.*

Означення 2 ([1]). *Для N-функції $\varphi(x)$ виконується умова Q, якщо*

$$\liminf_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Означення 3 ([1]). *Нехай $\varphi(x)$ — N-функція, для якої виконується умова Q. Простором $Sub_\varphi(\Omega)$ породженим N-функцією $\varphi(x)$ називається простір випадкових $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $(\mathbb{E}\xi = 0)$, таких, що існує константа a_ξ, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}^1$ виконується нерівність*

$$\mathbb{E}\exp\{\lambda\xi\} \leqslant \exp\{\varphi(\lambda a_\xi)\}\,.$$

Означення 4 ([1]). *Випадковий процес $X = \{X(t)\,, \ t \in T\}$ належить простору $Sub_\varphi(\Omega)$ $(X \in Sub_\varphi(\Omega))$, якщо для $t \in T$ випадкова величина $X(t) \in Sub_\varphi(\Omega)$.*

Приклад 1. *Гауссів центрований випадковий процес $X(t)$ є $Sub_\varphi(\Omega)$, де $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$ і $\tau(X(t)) = (\mathbb{E}(X(t))^2)^{1/2}$.*

Означення 5 ([1]). *Випадкова величина $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ називається строго $Sub_\varphi(\Omega)$, $(SSub_\varphi(\Omega))$, якщо $\tau_\varphi(\xi) = (\mathbb{E}\xi^2)^{1/2}$.*

Означення 6 ([11]). *Сім'я випадкових величин ξ з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ називається $SSub_\varphi(\Omega)$, якщо для довільної не більш ніж зліченної множини I, $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in I$ і для всіх $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ виконується нерівність*

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \leqslant \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Розв'язок задачі зображується у вигляді ряду [12]

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\left[A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right], \tag{4}$$

$$x \in [0,l]\,, \ t \in [0,T]\,, \ T > 0;$$

де

$$A_k = \int_0^l \xi(x)X_k(x)\rho(x)dx,$$

$$B_k = \int_0^l \eta(x)X_k(x)\rho(x)dx, \ k \geq 1,$$

$\lambda_k,\ k \geq 1$ — власні значення, $X_k = (X_k)(x),\ x \in [0,l]),\ k \geq 1$ — відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right) - q(x)x(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad x \in [0,l],$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Ряд (4) згідно [10], є також $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковим полем.

Теорема 1 ([3]). *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t) \in V\}$, $V = [-A;A] \times [0,+\infty)$ — *сепарабельне випадкове поле з простору* $Sub_\varphi(\Omega)$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ — *сім'я таких відрізків, що* $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [-A;A] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$;

2) *існують такі неперервні монотонно зростаючі функції* $\sigma_k(h),\ 0 < h < b_{k+1} - b_k$, *що* $\sigma_k(h) \longrightarrow 0$ *при* $h \longrightarrow 0$, *що на кожному* V_k *виконується умова*
$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leq h,\\ |t-t_1|\leq h\\ (x,t),(x_1,t_1)\in V_k}} \tau_\varphi\left(\xi\left(x,t\right) - \xi\left(x_1,t_1\right)\right) \leqslant \sigma_k\left(h\right) \tag{5}$$
і
$$\int\limits_{0+} \Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)}\right)d\varepsilon < \infty, \tag{6}$$
де $\Psi\left(u\right) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma_k^{(-1)}(\varepsilon)$ — *обернені функції до* $\sigma_k(\varepsilon)$;

3) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція така, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \min\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t)$;

4) $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k}{c_k} < \infty$, $\sup\limits_k \frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k} < \infty$, *де* $\varepsilon_k = \sup\limits_{(x,t)\in V_k} \tau_\varphi\left(\xi(x,t)\right)$,

5) *для деякого* s, *такого що,* $\sup\limits_k \frac{4\varepsilon_k}{c_k(1-\theta)} < s < \frac{u}{2}$, *збігається ряд*
$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}.$$

Тоді для $u > \sup\limits_k \frac{I_\varphi(\theta\varepsilon_k)}{c_k} \cdot \frac{4}{\theta(1-\theta)}$, *де*
$$\tilde{I_\varphi}\left(\delta\right) = \int\limits_0^\delta \Psi\left[\left(\ln\left(\frac{A}{\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)} + 1\right)\right) + \left(\ln\left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}\left(\varepsilon\right)} + 1\right)\right)\right]d\varepsilon,$$
$k = 0,1,\ldots,\ 0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*
$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > u\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{s}\right)\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)\right\}. \tag{7}$$

Теорема 2 ([3]). *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t) \in V\}$, $V = [-A;A] \times [0,+\infty)$ — *сепарабельне випадкове поле з простору* $Sub_\varphi(\Omega)$, *де* $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ *при* $|x| > 1$, $p > 1$, *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ — *сім'я таких відрізків, що* $0 \le b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [-A;A] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$;

2) *існують такі константи* $a_k > 0$ *і* $d > 1$, *що* $A > \frac{1}{d}$, $\frac{b_{k+1}-b_k}{2} > \frac{1}{d}$ *і для довільного* $|h|$ *виконується умова*

$$\sup_{|x-x_1|\leqslant h, |t-t_1|\leqslant h (x,t),(x_1,t_1)\in V_k} \tau_\varphi\left(\xi\left(x,t\right) - \xi\left(x_1,t_1\right)\right) \leqslant \frac{a_k}{\left|\ln\left(\frac{1}{|h|}+d\right)\right|^\alpha},$$

при $\alpha > 1 - \frac{1}{p}$;

3) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція така, що* $c(t) > 0$, $t \in R$, $c_k = \min\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t)$;

4) $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k}{c_k} < \infty$, $\sup\limits_k \frac{(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}(\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{c_k} < \infty$, $\sup\limits_k \frac{\varepsilon_k \ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} < \infty$;

5) *для деякого* s *такого, що,* $\sup\limits_k \frac{4\varepsilon_k}{c_k(1-\theta)} < s < \frac{u}{2}$,

де $\varepsilon_k = \sup\limits_{(x_k,t_k)\in V_k} \tau_\varphi\left(\xi(x_k,t_k)\right)$, $k = 0,1,\ldots$ *збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^q\right\}$$

.

Тоді для $u > \sup\limits_k \frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_k)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}} + \theta\varepsilon_k \ln\left(A\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)}{c_k} \cdot \frac{4}{\theta(1-\theta)}$,

$0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V} \frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > u\right\} \leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{u}{s}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\varepsilon_k}\right)^q\right\}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Нехай* $\{u(x,t),\ (x,t) \in D\}$, $D = [0;l] \times [0,+\infty)$ — *розв'язок задачі (1)—(3) сепарабельне випадкове поле з простору* $SSub_\varphi(\Omega)$, *де* $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$ *при* $|x| > 1$, $p > 1$, *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ — *сім'я таких відрізків, що* $0 \le b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $D_k = [0;l] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k D_k = D$;

2) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \min\limits_{t \in [b_k, b_{k+1}]} c(t)$;

3) $\sup\limits_k \frac{1}{c_k} < \infty, \quad \sup\limits_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} < \infty$;

4) *для деякого* s, *такого що,* $\sup\limits_k \frac{4\varepsilon_0}{c_k(1-\theta)} < s < \frac{v}{2}$,

де $\varepsilon_0 \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty}\sum\limits_{l=n}^{\infty}\left[|\mathbb{E}A_kA_l| + \frac{|\mathbb{E}B_kB_l|}{ml} + \frac{|\mathbb{E}A_kB_l|}{l}\right]^{\frac{1}{2}}$, *збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} < \infty.$$

Тоді для $v > \sup\limits_k \frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(2^{\frac{1}{q}}(a_k)^{\frac{1}{\alpha q}}\frac{(\theta\varepsilon_0)^{1-\frac{1}{\alpha q}}}{1-\frac{1}{\alpha q}} + \theta\varepsilon_0 \ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)}{c_k}\cdot\frac{4}{\theta(1-\theta)}$, $0 < \theta < 1$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in D}\frac{|u(x,t)|}{c(t)} > v\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{v}{s}\right)^q\right\}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}.$$

Доведення.

Оскільки $\{u(x,t),\ (x,t) \in D\}$ — строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкове поле, то будемо мати

$$\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \tau_\varphi\left(u(x,t) - u(x_1,t_1)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\left|u(x_k,t_k) - u(y_k,s_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k + \frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k\right) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k + \frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(\mathbb{E}A_l^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k - \sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k\right| + \right.$$

$$\left. \frac{(\mathbb{E}B_l^2)^{\frac{1}{2}}}{l}\left|\sin(l\gamma(x_k))\sin lt_k - \sin(l\gamma(y_s))\sin ls_k\right|\right].$$

Розглянемо

$$|\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k - \sin(l\gamma(y_k))\cos ls_k| \leq$$
$$\leqslant |\sin(l\gamma(x_k)) - \sin(l\gamma(y_k))| + |\cos lt_k - \cos ls_k| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{c_0|x_k-y_k|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}} + \frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|t_k-s_k|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}} \leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}.$$

Аналогічно

$$|\sin(l\gamma(x_k))\sin lt_k - \sin(l\gamma(y_s))\sin ls_k| \leqslant 2\frac{\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}}.$$

Отже,

$$\sup_{\substack{|x_k-y_k|\leqslant h\\ |t_k-s_k|\leqslant h\\ (x_k,t_k),(y_k,s_k)\in V_k}} \tau_{\varphi}\left(u\left(x,t\right)-u\left(x_1,t_1\right)\right) \leqslant \frac{\widetilde{C}}{\left(\ln\left(\frac{1}{|h|}+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}},$$

де

$$\widetilde{C} = 2\sum_{l=1}^{\infty}\left[\left(\mathbb{E}A_l^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\mathbb{E}B_l^2\right)^{\frac{1}{2}}}{l}\right]\left(\ln\left(l+e^{\delta}\right)\right)^{\delta}.$$

Оскільки, $\{u(x,t),\ (x,t)\in D\}$ з імовірністю одиниця є розв'язком задачі (1)—(3), то ряд $\widetilde{C}$, згідно теореми 3.9 роботи [10], є збіжним.

Отже, умова 2) теореми 2 виконується.

Розглянемо

$$\varepsilon_k = \sup_{(x_k,t_k)\in D_k}\tau_{\varphi}\left(u(x_k,t_k)\right) = \sup_{(x_k,t_k)\in V_k}\left(\mathbb{E}\left|u(x_k,t_k)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$\sup_{(x_k,t_k)\in V_k}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{\infty}\left(A_l\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k + \frac{B_l}{l}\sin(l\gamma(x_k))\cos lt_k\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left[|\mathbb{E}A_kA_l| + \frac{|\mathbb{E}B_kB_l|}{kl} + \frac{|\mathbb{E}A_kB_l|}{l}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки, $\{u(x,t),\ (x,t)\in D\}$ з імовірністю одиниця є розв'язком задачі (1)—(3), то останній ряд, згідно теореми 3.9 роботи [10], є збіжним. Тому

$$\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_0 = const.$$

Отже, умови 4) теореми 2 можна переписати у вигляді

$$\sup_k\frac{1}{c_k} < \infty, \quad \sup_k\frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} < \infty.$$

Тому дана теорема випливає з теореми 2.

Приклад 2. *Нехай* $b_0 = 0$, $b_k = e^k$, $k \geq 1$, $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $B = const$. *Покажемо, що функція* $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$ *задовольняє умовам теореми* 3. *Розглянемо ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\}.$$

$$c_k = \min_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t) = \min_{t\in[e^k,e^{k+1}]} B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon} = B(\ln e^k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon} = B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}.$$

Тоді

$$\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sc_k(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{sBk^{\frac{1}{q}+\varepsilon}(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\widetilde{B}k^{1+\varepsilon q}\right\},$$

де $\widetilde{B} = -\frac{1}{q}\left(\frac{sB(1-\theta)}{2\tilde{\varepsilon}_0}\right)^q$. *Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\widetilde{B}k^{1+\varepsilon q}\right\}$ *є збіжним.*

Перевіримо виконання умов 3) теореми 3.

$$\sup_k \frac{1}{c_k} = \sup_k \frac{1}{B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} < \infty,$$

$$\sup_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{b_{k+1}-b_k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{c_k} = \sup_k \frac{\ln\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{e^{k+1}-e^k}{2}\right)^{\frac{1}{q}}}{B(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} =$$

$$= \frac{1}{qB}\sup_k\left[\frac{\ln\frac{l}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} + \frac{\ln\frac{e^k(e-1)}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}\right] =$$

$$= \frac{1}{qB}\sup_k\left[\frac{\ln\frac{l}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}} + \frac{1}{k^{\frac{1}{q}+\varepsilon-1}} + \frac{\ln\frac{(e-1)}{2}}{(k)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}}\right] < \infty.$$

Отже, функція $c(t) = B(\ln t)^{\frac{1}{q}+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $B = const$ *задовольняє умовам теореми* 3.

Список використаної літератури

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000.
2. *Fernique X.* Regularite le fonctions aleatoires non gaussiennes// Lecture Notes in Mathematics. – 1983. – Vol. 976. – P. 1–74.
3. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* On the increase rate of random fields from space on unbounded domains// Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol. 2. – P. 79–92.
4. *Kono N.* Sample path properties of stochastic processes// J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – 20, № 2. – P. 295–313.
5. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications a l'analyze harmonique// Semin. Anal. Fonct. – 1979 – 1980. – № 13-14. – 43p.
6. *Pisier G.* Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis// Lect. Notes Math. – 1983. – 995. – P. 123–154.

7. *Piterbarg V. I.* Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields, 2012, – 207p.
8. *Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є.* φ-субгауссові випадкові процеси. Монографія. «Київський університет» 2008 – 231 с.
9. *Дарійчук І. В.,Козаченко Ю. В.,Перестюк М. М.* Випадкові процеси з просторів Орліча – Чернівці: Видавництво «Золоті литаври», 2011. – 212 с.
10. *Довгай Б. В.,Козаченко Ю. В., Сливка-Тилищак Г. І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. – 175 с.
11. *Козаченко Ю. В., Ковальчук Ю. А.* Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_{\varphi}(\Omega)$. I// Укр. мат. журнал. – 1998 . – т. 50, №4. – С. 504–515.
12. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964.

Одержано 15.03.2017

УДК 517.9

С. М. Чуйко, Д. В. Сисоєв (Донбаський держ. пед. ун-т)

ЛІНІЙНА МАТРИЧНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА У ВИПАДКУ ПАРАМЕТРИЧНОГО РЕЗОНАНСУ

We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of linear boundary value problem for a parametric excitation system of differential-algebraic equations. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the linear boundary value problem for a parametric excitation system of differential-algebraic equations in the critical case have been found.

Знайдено необхідні та достатні умови існування розв'язків лінійної крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу. Побудовано збіжну ітераційну схему для знаходження наближень до розв'язків лінійної крайової задачі для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь у випадку параметричного резонансу.

1. Вступ. Традиційне вивчення періодичних і нетерових крайових задач у критичних випадках було пов'язано з припущенням, що диференціальне рівняння, а також крайова умова, відомі та фіксовані [1, 2]; крім того, вивчення періодичних задач у випадку параметричного резонансу було пов'язано з дослідженням насамперед питань стійкості [3–5]. У той же час дослідження періодичних крайових задач у випадку параметричного резонансу, пов'язаними з численними застосуваннями в електроніці [3], теорії плазми [6], нелінійній оптиці, механіці [7], теорії стійкості руху [3], біології, радіотехніці та верстатобудуванні [8] передбачає, як побудову розв'язків періодичних крайових задач, так і обчислення власної функції відповідного диференціального рівняння. Таким чином, основною відмінністю даної статті є знаходження конструктивних умов існування та побудова розв'язків нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від власної функції крайової задачі. Істотною відмінністю даної статті є також матричний запис невідомої, який узагальнює вигляд, як матричного диференціального рівняння, так і крайової умови. У статті знайдені умови розв'язності та схема побудови розв'язків нелінійної нетерової крайової задачі для матричного диференціального рівняння.

Використовувана класифікація нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу в залежності від простоти або кратності рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від аналогічної класифікація періодичних задач у випадку параметричного резонансу [4, 5] і відповідає загальній класифікації періодичних і нетерових крайових задач [1]. Крім того, отримане для нетерових крайових задач у випадку параметричного резонансу рівняння для породжуючих констант істотно відрізняється від традиційного рівняння для породжуючих констант за відсутності параметричного резонансу залежністю від малого параметра, як самого рівняння, так і його коренів.

2. Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язків $Z(t, \varepsilon)$:

$$Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a; b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0; \varepsilon_0] := \mathbb{C}[0; \varepsilon_0] \otimes \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного диференціально-алгебраїчного рівняння

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) + \mathcal{F}(t,\varepsilon) + \varepsilon\,\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad h(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0;\varepsilon_0], \tag{1}$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}(\varepsilon), \quad \mathfrak{A}(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}[0;\varepsilon_0]. \tag{2}$$

Розв'язок матричної крайової задачі (1), (2) шукаємо у малому околі розв'язку породжуючої диференціально-алгебраїчної задачі

$$\mathcal{A}Z_0'(t,\varepsilon) = \mathcal{B}Z_0(t,\varepsilon) + \mathcal{F}(t,\varepsilon), \quad \mathcal{L}Z_0(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}(\varepsilon). \tag{3}$$

Тут [15, 16]

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t,\varepsilon)R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t,\varepsilon) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t,\varepsilon)\Psi_j(t)$$

— лінійні матричні оператори,

$$S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\alpha}[a,b], \quad R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{C}_{\beta\times\delta}[a,b],$$

$$\mathcal{F}(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[a,b], \quad \mathcal{F}(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\gamma\times\delta}[0;\varepsilon_0]$$

— неперервні матриці; крім того $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ — довільні натуральні числа. Матричний оператор $\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon)$ припускаємо лінійним за першим аргументом $Z(t,\varepsilon)$ у малому околі розв'язку $Z_0(t,\varepsilon)$ породжуючої задачі (3), а також неперервно диференційовним за другим аргументом $h(\varepsilon)$, і, крім того, неперервним за $t \in [a,b]$ та $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$. Крім того, $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) : \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma},$$

неперервний за $\varepsilon \in [0;\varepsilon_0]$. Поставлена задача продовжує дослідження крайових задач у випадку параметричного резонансу [9–11] на випадок лінійних матричних крайових задач [20–22], а також матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач [12–16].

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A] : \ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор, який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений з n стовпців матриці A, а також обернений оператор [16, 17]

$$\mathcal{M}^{-1}\left[\mathcal{B}\right] : \ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Задача про знаходження розв'язків матричного диференціально-алгебраїчного рівняння (3) приводить до задачі про знаходження вектора

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a;b], \quad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0;\varepsilon_0],$$

компоненти якого $z_j(t,\varepsilon)$ визначають розвинення матриці

$$Z(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}z_j(t,\varepsilon),\quad z_j(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1[a;b],\quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійний диференціально-алгебраїчний матричний оператор $\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon)$, за визначенням, зображується у вигляді

$$\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\alpha\beta}\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)z_j'(t,\varepsilon),$$

при цьому

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{A}Z'(t,\varepsilon)\Big]=\Omega(t)\cdot z'(t,\varepsilon),\quad \Omega(t):=\Big[\Omega_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\in\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\Omega_j(t)=\mathcal{M}\left[\mathcal{A}\ \Xi^{(j)}(t)\right],\quad j=1,2,\ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta.$$

Аналогічно

$$\mathcal{M}\Big[\mathcal{B}Z(t,\varepsilon)\Big]=\Theta(t)\cdot z(t,\varepsilon),\ \ \Theta(t):=\Big[\Theta_j(t)\Big]_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\in\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta},\ \ \Theta_j(t)=\mathcal{M}\left[\mathcal{B}\ \Xi^{(j)}(t)\right].$$

Таким чином, задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного рівняння (3) приведено до задачі про побудову розв'язків $z_0(t,\varepsilon):=\mathcal{M}[Z_0(t,\varepsilon)]$ традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [13, 23–25]

$$\Omega(t)\cdot z_0'(t,\varepsilon)=\Theta(t)\cdot z_0(t,\varepsilon)+\mathcal{M}\mathcal{F}(t,\varepsilon). \tag{4}$$

Умови розв'язності та структура розв'язків матричного диференціального рівняння [12, 20]

$$Z'(t)=AZ(t)+Z(t)B+F(t),\quad F(t)\in\mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \tag{5}$$

наведені у монографії [20]. Конструктивні умови розв'язності та структура періодичного розв'язку системи (5) за умови $\alpha=\beta=\lambda=\mu$ отримані у статті [22] з використанням узагальненого обернення матриць та операторів, наведених у статті [18]. Дослідження матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у даній статті грунтується на дослідженні алгебраїчних матричних рівнянь, зокрема, результати, отримані для матричного диференціального рівняння Ляпунова [18] та результати дослідження матричних рівнянь, у тому числі, рівнянь типу Сильвестра [17, 19]. За умови [14, 15]

$$P_{\Omega^*(t)}\Theta(t)=0,\quad P_{\Omega^*(t)}\mathcal{M}\mathcal{F}(t,\varepsilon)=0, \tag{6}$$

у випадку

$$\Omega^+(t)\Theta(t),\quad \Omega^+(t)\mathcal{F}(t),\quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t)\in\mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a,b] \tag{7}$$

система (4) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz_0}{dt}=\Omega^+(t)\Theta(t)z_0+\mathfrak{F}(t,\varphi(t));$$

тут

$$\mathfrak{F}(t, \varphi(t)) := \Omega^+(t)\mathcal{F}(t, \varepsilon) + P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t);$$

$P_{\Omega^*}(t)$ — $(\gamma \cdot \delta \times \gamma \cdot \delta)-$ матриця-ортопроектор: $P_{\Omega^*}(t) : \mathbb{R}^{\gamma \cdot \delta} \to \mathbb{N}(\Omega^*(t))$, $P_{\Omega_\varrho}(t)$ — $(\alpha \cdot \beta \times \varrho)-$ матриця, утворена з ϱ лінійно-незалежних стовпців $(\alpha \cdot \beta \times \alpha \cdot \beta)-$ матриці-ортопроектора

$$P_\Omega(t) : \mathbb{R}^{\alpha \cdot \beta} \to \mathbb{N}(\Omega(t)).$$

Позначимо $X(t)$ нормальну фундаментальну матрицю [1]

$$\frac{dX(t)}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)X(t), \quad X(a) = I_{\alpha\beta}$$

одержаної традиційної системи звичайних диференціальних рівнянь. За умови (6), (7) система (4) має розв'язок вигляду

$$z_0(t, c_0(\varepsilon)) = X(t)c_0(\varepsilon) + K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t), \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \cdot \beta}[0, \varepsilon_0],$$

$$K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t) := X(t)\int_a^t X^{-1}(s)\mathfrak{F}(s, \varphi(s))ds,$$

який визначає розв'язок диференціально-алгебраїчного рівняння (3)

$$Z_0(t, \varepsilon) = W(t, c_0(\varepsilon)) + \mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t, \varepsilon). \tag{8}$$

Таким чином, доведено наступну достатню умову [15, 16] розв'язності задачі Коші для системи (3).

Лема 1. *За умов (6) та (7) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\mu\times\nu}[0, \varepsilon_0]$. За умов (6) та (7) загальний розв'язок (9) матричної задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) визначає узагальнений оператор Гріна*

$$\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t, \varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{K\Big[\mathfrak{F}(s, \varphi(s))\Big](t)\Big\}$$

задачі Коші $Z(a) = 0$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) та загальний розв'язок

$$W(t, c_0(\varepsilon)) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)c_0(\varepsilon)\Big], \quad c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha \cdot \beta}[0, \varepsilon_0]$$

задачі Коші $Z(a) = \mathfrak{A}$ для однорідної частини рівняння (3).

Зазначимо, що за умов (6), (7), та у випадку $\varrho := \operatorname{rank} P_\Omega(t) := 0$ матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon)$. Якщо ж $\varrho \neq 0$, то за умов (6), (7) матрична задача Коші $Z(a) = \mathfrak{A}(\varepsilon)$ для диференціально-алгебраїчної системи (3) однозначно розв'язна для будь-якого початкового значення $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ та довільної фіксованої функції

$$\varphi(t) : \quad P_{\Omega_\varrho}(t)\varphi(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta\times\varrho}[a, b].$$

Припустимо, що для породжуючої матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) має місце критичний випадок: ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$), при цьому умову

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathfrak{A}(\varepsilon) - \mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot)\Big\} = 0 \tag{9}$$

виконано. Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$; матриця $P_{\mathcal{Q}_d^*}$ утворена з d лінійно незалежних рядків ортопроектора $P_{\mathcal{Q}^*}$ матриці $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. Позначимо $\alpha(\varepsilon) := \mathcal{M}\{\mathfrak{A}(\varepsilon)\}$ За умови (7) і тільки за неї отримуємо загальний розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^+\Big\{\alpha(\varepsilon) - \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}+$$

$$+\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon); \quad \Theta_0(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r}c_r(\varepsilon)\Big];$$

тут $P_{\mathcal{Q}_r}$ — матриця утворена з r лінійно незалежних стовпців ортопроектора $P_{\mathcal{Q}}$ матриці $\mathcal{Q}$. Наступна лема визначає достатню умову [15, 16] розв'язності матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3).

Лема 2. *За умов (6) та (7) матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (3) розв'язна за умови (9) і тільки за неї. За умов (6), (7) та (9) загальний розв'язок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3)*

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

визначає узагальнений оператор Гріна

$$G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big\{X(t)\mathcal{Q}^+\Big\{\alpha(\varepsilon) - \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](\cdot,\varepsilon)\Big\}\Big\}+$$

$$+\mathcal{K}\Big[\mathfrak{F}(s,\varphi(s))\Big](t,\varepsilon)$$

матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3) та загальний розв'язок

$$W(t,\Theta_0(\varepsilon)) := \mathcal{M}^{-1}\Big[X(t)P_{\mathcal{Q}_r}c_r(\varepsilon)\Big], \quad c_r(\varepsilon) \in \mathbb{C}_r[0,\varepsilon_0]$$

однорідної частини матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (3).

Припустимо далі, що задача (1), (2) у малому околі розв'язку

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[\mathcal{F}(s,\varepsilon);\mathfrak{A}(\varepsilon)\Big](t,\varepsilon)$$

породжуючої задачі (3) має розв'язок

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0],$$

для якого у достатньо малому околі початкового значення власної функції $h_0(\varepsilon)$ існує неперервна власна функція

$$h(\varepsilon) = h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0].$$

Таким чином, приходимо до задачі про знаходження розв'язку

$$X(t, \varepsilon): \quad X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0, \varepsilon_0]$$

та власної функції $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$ матричної крайової задачі

$$\mathcal{A}X'(t, \varepsilon) = \mathcal{B}X(t, \varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\, \Pi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}X(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Задачу про побудову розв'язків диференціально-алгебраїчного рівняння (10) приводимо до задачі про побудову розв'язків

$$z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\cdot\beta}[a; b], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\cdot\beta}[0; \varepsilon_0]$$

традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [13, 23–25]

$$\Omega(t) \cdot z_0'(t, \varepsilon) = \Theta(t) \cdot z_0(t, \varepsilon) + \mathcal{M}\mathcal{F}(t, \varepsilon)+ \tag{11}$$

$$+\varepsilon\, \mathcal{M}\Pi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon).$$

За умови (6), (7), у випадку

$$P_{\Omega^*}\mathcal{M}\Pi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = 0 \tag{12}$$

система (11) розв'язна відносно похідної

$$\frac{dz}{dt} = \Omega^+(t)\Theta(t)z + \mathfrak{F}(t, \varphi(t)) + \varepsilon\, \Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(t, c_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

при цьому вихідна матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) у критичному випадку ($P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$) розв'язна за умови

$$P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(s, c_0(\varepsilon)) + X(s, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{13}$$

Позначимо вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_r(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{r+\rho}[0, \varepsilon_0].$$

У наслідок неперервності по $Z(t, \varepsilon)$ та $h(\varepsilon)$ нелінійної функції $\Pi(Z, h, t, \varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої задачі (3) та початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$, за умови (6), (7), (12) для розв'язку $Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та для початкового значення $h_0(\varepsilon)$ власної функції крайової задачі (1), (2) має виконуватись рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) := P_{\mathcal{Q}_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{K}\Big[\Omega^+(t)\mathcal{M}\Pi(Z_0(s, c_r(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Необхідну умову існування розв'язку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу визначає наступна лема, яка є узагальненням відповідного твердження [11] на випадок матричної крайової задачі, узагальненням відповідного твердження [1,2] на випадок параметричного резонансу та явної залежності неоднорідностей породжуючої крайової задачі (3) від малого параметра, а також узагальненням відповідного твердження для матричної крайової задачі [30].

Лема 3. *Припустимо, що для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок та виконуються умови розв'язності (6), (7) та (9) породжуючої задачі (3). Припустимо також, що у малому околі породжуючого розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ та початкового значення $h_0(\varepsilon)$ власної функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має розв'язок*

$$Z(t,\varepsilon): \quad Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0],$$

при цьому у досить малому околі функції $h_0(\varepsilon)$ існує функція $h(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$; у цьому випадку має місце рівність

$$\mathcal{F}(\check{c}_0(\varepsilon)) = 0. \tag{15}$$

Аналогічно до нетерових слабконелінійних крайових задач у критичному випадку [1], а також періодичними крайовими задачами [2,4,5], рівняння (15) будемо називати рівнянням для породжуючих функцій матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу. Корені рівняння для породжуючих функцій (15), у даному випадку — матриці $\Theta_0(\varepsilon)$, а також власні функції $h_0(\varepsilon)$ визначають породжуючий розв'язок $Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon))$, у малому околі якого можуть існувати шукані розв'язки вихідної матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) у випадку параметричного резонансу. Якщо ж рівняння (15) не має розв'язків

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0], \quad h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0],$$

то вихідна матрична крайова задача (1), (2) у випадку параметричного резонансу не має шуканих розв'язків.

3. Достатня умова існування розв'язку крайової задачі (1), (2). Припустимо, що рівняння для породжуючих функцій (15) має неперервні дійсні розв'язки. Фіксуючи один із розв'язків $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{r+\rho}$ рівняння (15), отримуємо задачу про існування розв'язку

$$X(t,\varepsilon): \quad X(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad X(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

матричної крайової задачі (1), (2) в околі породжуючого розв'язку

$$Z_0(t,\Theta_r(\varepsilon)) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + G\Big[F(s);\mathcal{A}\Big](t), \quad \Theta_r(\varepsilon) := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{\mathcal{Q}_r} c_r(\varepsilon)\Big],$$

а також функції $h(\varepsilon) := h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0,\varepsilon_0]$ в околі точки $h_0(\varepsilon)$. У зазначеному околі має місце розвинення

$$\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon\Big] = \Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), t, \varepsilon\Big] +$$

$$+D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big]+D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),\zeta(\varepsilon)\Big]+$$
$$+R\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big].$$

Дійсно, у малому околі розв'язку $\check{c}_0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{r+\rho}$ рівняння для породжуючих функцій (15) має місце розвинення вектор-функції [31, с. 636]

$$\mathcal{M}\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]=$$
$$=\mathcal{M}\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]+\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]x(t,\varepsilon)+$$
$$+\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)+\mathcal{R}\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big].$$

Тут

$$\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]:=\frac{\partial}{\partial x}\Pi\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta)$ – матриця,

$$\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]:=\frac{\partial}{\partial \zeta}\Pi\Big[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\gamma\cdot\delta\times\rho)$ – матриця, $\mathcal{R}[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]\in\mathbb{R}^{\gamma\delta}$ — залишок цього розвинення та

$$x(t,\varepsilon):=\mathcal{M}X(t,\varepsilon):\quad x(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1_{\alpha\beta}[a,b],\quad x(t,\cdot)\in\mathbb{C}_{\alpha\beta}[0,\varepsilon_0]$$

— невідома вектор-функція. Таким чином

$$D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{A}_x\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]x(t,\varepsilon)\Big\}$$

та

$$D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon),\zeta(\varepsilon)\Big]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathfrak{A}_\zeta\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),h_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)\Big\}$$

— диференціали матричної функції

$$\Pi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))+X(t,\varepsilon),h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

та

$$R[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]:=\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{R}[Z(t,\varepsilon),h(\varepsilon),t,\varepsilon]\Big\}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— залишок цього розвинення. Враховуючи рівняння для породжуючих функцій (15), зазначимо, що задача про знаходження розв'язку

$$X(t,\varepsilon)=W(t,\Theta_r(\varepsilon))+X^{(1)}(t,\varepsilon)$$

та власної функції $\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ матричної крайової задачі (10) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X(t,\varepsilon)\Big] + D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)\Big] +$$

$$+R\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot) = 0.$$

Тут $W(t, \Theta_r(\varepsilon))$ — загальний розв'язок однорідної частини крайової задачі (10) та

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon);\ 0\ \Big](t)$$

— частковий розв'язок неоднорідної матричної крайової задачі (10). Позначимо $\xi_j(\varepsilon)$ скалярні функції, які визначають розвинення матриці

$$\Theta_r(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon), \quad \xi_j(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0], \quad j = 1, 2, \ \dots\ ,\ \alpha\cdot\beta$$

за векторами $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, та вектор

$$\check{c}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} \xi(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta+\rho}[0, \varepsilon_0], \quad \xi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\beta}, \quad \zeta(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\rho} \theta^{(j)}\zeta_j(\varepsilon);$$

тут $\theta^{(j)} \in \mathbb{R}^\rho,\ j = 1, 2,\ \dots\ ,\ \rho$ — природний базис [32] простропу $\mathbb{R}^\rho$ та $\zeta_j(\varepsilon)$ — константи, які визначають розвинення векторної функції

$$\zeta(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$$

за векторами $\theta^{(j)}$ базиса простору $\mathbb{R}^\rho$. Таким чином, матрична крайова задача (10) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), W(t,\Theta_r(\varepsilon))\Big] +$$

$$+D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \zeta(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) =$$

$$= -\ P_{Q^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big] + R\Big[Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot).$$

Знайдена необхідна та достатня умова розв'язності матричної крайової задачі (10) являє собою лінійне алгебраїчне рівняння відносно матриці $\Theta_r(\varepsilon)$, а також векторної функції $\zeta(\varepsilon)$. Позначимо матрицю

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(\check{c}_0(\varepsilon)) := \Big\{\ \mathcal{D}_0^{(0)}\ ;\ \mathcal{D}_0^{(1)}\ \Big\} \in \mathbb{C}_{d\times(\alpha\cdot\beta+\rho)}[0, \varepsilon_0];$$

тут

$$\mathcal{D}_0^{(0)} := \Big\{\ P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), W\Big(t, \Xi^{(i)}\Big)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}\ \Bigg|\ \begin{matrix} \alpha\cdot\beta \\ \\ i=0 \end{matrix}\ ,$$

$$\mathcal{D}_0^{(1)} := \left\{ \left. P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_h\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), \theta^{(j)}\Big]\Big\}(\cdot) \right\} \right|_{j=0}^{\rho}.$$

крім того

$$\mathcal{D}_0^{(0)} \in \mathbb{C}_{d\times\alpha\cdot\beta}[0,\varepsilon_0], \quad \mathcal{D}_0^{(1)} \in \mathbb{C}_{d\times\rho}[0,\varepsilon_0].$$

Для знаходження вектора $\check{c}(\varepsilon)$ отримуємо рівняння

$$\mathcal{D}_0\,\check{c}(\varepsilon) = -P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]+$$

$$+R\Big[Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot).$$

За умови [11]

$$P_{\mathcal{D}_0^*}P_{Q_d^*} = 0, \quad \mathcal{D}_0^+\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}_{(\alpha\cdot\beta+\rho)\times d}[0,\varepsilon_0] \tag{16}$$

матрична крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок. Тут $P_{\mathcal{D}_0^*}$ — $(d\times d)-$ матриця-ортопроектор [1, 32]:

$$P_{\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))}:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{N}\Big(\mathcal{D}_0^*(\check{c}_0(\varepsilon))\Big).$$

Таким чином, за умови (9) принаймні один розв'язок матричної крайової задачі (1), (2) визначає наступна операторна система

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon),$$

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{D}_0^+\,P_{Q_d^*}\mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{D_X\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}(t,\varepsilon)\Big]+ \tag{17}$$

$$+R\Big[Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot), \quad \Theta_r(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\,\check{c}(\varepsilon)\Big], \quad \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\,\check{c}(\varepsilon),$$

$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\,G\Big[\Pi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon), h_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon), s, \varepsilon;\ 0\Big](t);$$

тут

$$\mathfrak{J}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times(\rho+\alpha\beta)}, \quad \mathfrak{J}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & I_\rho \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho\times(\rho+\alpha\beta)}$$

— сталі матриці. Для знаходження наближеного розв'язку операторної системи (17) можна застосувати метод послідовних наближень [1, 2, 31]. Таким чином, доведено наступне твердження, яке узагальнює відповідні твердження для нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь на випадок параметричного резонансу [4, 11], а також матричних задач у випадку параметричного резонансу [30] на випадок диференціально-алгебраїчних крайових задач.

Теорема 1. *Припустимо, що для матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі (1), (2) має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок та виконуються умови розв'язності (6), (7) та (9) породжуючої задачі (3). У цьому разі для кожного розв'язку $c_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_r[0, \varepsilon_0]$, $h_0(\varepsilon) \in \mathbb{C}_\rho[0, \varepsilon_0]$ рівняння для породжуючих функцій (15) за умови (16) у малому околі розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та у достатньо малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функции $h(\varepsilon)$ задача (10) має принаймні один розв'язок*

$$X(t, \varepsilon): \quad X(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b], \quad X(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0, \varepsilon_0]$$

та існує неперервна функція $h(\varepsilon) : h(0) := h_0^*$. При цьому у малому околі розв'язку $Z_0(t, c_0(\varepsilon))$ породжуючої задачі (3) та в досить малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (1), (2) має принаймні один розв'язок

$$Z(t, \varepsilon): \; Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a, b], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0, \varepsilon_0],$$

який визначає операторна система (17); для знаходження цього розв'язку застосовна ітераційна схема

$$Z_{k+1}(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t, \varepsilon), \; X_{k+1}(t, \varepsilon) = W(t, \Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathcal{D}_0^+ P_{Q_d^*} \mathcal{M}\mathcal{L}K\Big\{ D_X\Big[Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), X^{(1)}_k(t, \varepsilon)\Big] +$$

$$+R\Big[Z_k(t, \varepsilon), h_k(\varepsilon), t, \varepsilon\Big]\Big\}(\cdot), \quad \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon)\Big], \tag{18}$$

$$X^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Pi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s, \varepsilon), h_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon); \; 0\Big](t),$$

$$\zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 0, \; 1, \; 2 \; \dots \; .$$

Проміжок значень малого параметру $[0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon_0 \geq \varepsilon^*$, на якому зберігається збіжність ітераційної схеми (18), може бути знайдений як безпосередньо з означення оператора стиснення [28, 29], так і за допомогою мажоруючих рівнянь Ляпунова [1, 2]. Крім того, для побудови розв'язків операторної системи (17) можна застосувати метод малого параметру Пуанкаре. У випадку параметричного резонансу теорема 1 узагальнює відповідні твердження [9–11] на випадок матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі та векторної функції $h(\varepsilon)$. У випадку відсутності параметричного резонансу теорема 1 узагальнює відповідні твердження [1,2] на випадок явної залежності неоднорідностей $\mathcal{F}(t, \varepsilon)$ та $\mathfrak{A}(\varepsilon)$ породжуючої крайової задачі (2) від малого параметру.

Приклад 1. *Умови теореми 1 виконуються у випадку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Матьє*

$$\mathcal{A}Z'(t, \varepsilon) = \mathcal{B}Z(t, \varepsilon) + \mathcal{F}(t, \varepsilon) + \varepsilon\, \Pi(Z(t, \varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) = 0, \tag{19}$$

де

$$\mathcal{A}Z'(t, \varepsilon) := \sum_{i=1}^{2} S_i(t) Z'(t, \varepsilon) R_i(t), \quad \mathcal{B}Z(t, \varepsilon) := \sum_{j=1}^{2} \Phi_j(t) Z(t, \varepsilon) \Psi_j(t),$$

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t,\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

крім того

$$\Pi(Z(t,\varepsilon), h(\varepsilon), t, \varepsilon) := h_1(\varepsilon)\Lambda_1 Z(t,\varepsilon)\Lambda_2 + h_2(\varepsilon)\Lambda_3 Z(t,\varepsilon)\Lambda_4 + \Lambda_5(t) Z(t,\varepsilon)\Lambda_6(t),$$

$$\Lambda_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_5(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_6(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin t & 2\sin 2t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) := \check{\Lambda}(Z(0,\varepsilon) - Z(2\pi,\varepsilon)), \quad \check{\Lambda} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$h(\varepsilon) := \begin{pmatrix} h_1(\varepsilon) \\ h_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_2[0,\varepsilon_0].$$

Природний базис простору $\mathbb{R}^{3\times 2}$ утворюють матриці

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ключові при дослідженні рівняння (19) матриці мають вигляд

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*$$

та

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^*,$$

причому умови (6) та (7) виконуються, при цьому матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача (19) являє критичний випадок: $P_{\mathbb{Q}^*} = I_2 \neq 0$. Рівняння (15) у випадку матричної диференціально-алгебраїчної крайової задачі для рівняння типу Матьє (19) має дійсний розв'язок

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} c_0(\varepsilon) \\ h_0(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, \quad h_0(\varepsilon) := \begin{bmatrix} h_1(\varepsilon) \\ h_2(\varepsilon) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

де

$$c_0(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^*, \quad h_1(\varepsilon) = 1, \quad h_2(\varepsilon) = 0.$$

Цьому розв'язку відповідає матриця повного рангу

$$D_0\Big(\check{c}_0(\varepsilon)\Big) = -2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

для якої умову (16) виконано, отже, згідно до теореми 1, у малому околі породжуючого розв'язку

$$Z_0(t, c_0(\varepsilon)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \sin t & 2 - \cos t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та у досить малому околі початкового значення $h_0(\varepsilon)$ функції $h(\varepsilon)$ матрична диференціально-алгебраїчна крайова задача для рівняння типу Матьє (19) має принаймні один розв'язок

$$Z(t, \varepsilon): \ Z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{3\times 2}[0, 2\pi], \quad Z(t, \cdot) \in \mathbb{C}_{3\times 2}[0, \varepsilon_0].$$

Зазначимо, що матриця $\mathcal{D}_0$, ключова при дослідженні матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач (1), (2) у випадку параметричного резонансу, як і у випадку нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, може бути знайдена безпосередньо з рівняння для породжуючих функцій (15):

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}} P_{\mathbb{Q}_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Pi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), h_0(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = \mathcal{D}_0(\varepsilon).$$

Запропоновану схему дослідження матричних диференціально-алгебраїчних крайових задач (1), (2) у випадку параметричного резонансу, як і у випадку нетерових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь, аналогічно [1, 15] може бути перенесено на матричні крайові задачі з імпульсним впливом [33]. Зазначимо також, що для знаходження наближеного розв'язку операторної системи (17) можна застосувати чисельно-аналітичний метод [34].

Список використаної літератури

1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2-th edition). — Berlin; Boston: De Gruyter, 2016. — 298 p.

2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.
3. *Мандельштам Л.И., Папалекси Н.Д.* О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Журн. техн. физики. 1934. № 3. С. 5 — 29.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.
5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.
6. *Силин В.П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М.: Наука, 1973. — 287 с.
7. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. — 600 с.
8. *Копелев Ю.Ф.* Параметрические колебания станков. — Металлорежущие станки: респ межвед. науч. – техн. сб. — Киев, 1984. Вып. 12. — С. 3 — 8.
9. *Чуйко С.М., Кулиш П.В.* Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — **24**. — С. 243 — 252.
10. *Чуйко С.М., Чуйко Е.В., Кулиш П.В.* Периодическая краевая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. — **3(32)**. —№1. — 2013.
11. *Чуйко С.М.* Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014. — **17**, № 1. — С. 137 — 148.
12. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — **4 (32)**, № 1-2. — С. 101 — 107.
13. *Boichuk A.A., Pokutnyi A.A., Chistyakov V.F.* Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — **53**. — №6. — P. 777 — 788.
14. *Чуйко С.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. — 2013. — **5**, №5. — С. 769 — 783.
15. *Chuiko S.M.* The Green's operator of a generalized matrix linear differential-algebraic boundary value problem // Siberian Mathematical Journal. – 2015. –**56**, № 4. – P. 752 – 760.
16. *Chuiko S.M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). – 2015. – **210**, № 1. – P. 9 – 21.
17. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика. — 2014, **19**, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.
18. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**, № 8. — P. 1162 — 1169.
19. *Чуйко С.М.* О решении линейных матричных уравнений // Научный вестник Харьковского университета им. В.Н. Каразина. Сер. матем., прикладная матем., механика. — **81**. — 2015. — С. 28 — 34.
20. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука: 1969. — 367 с.
21. Chuiko S.M., Chuiko A.S., Sysoev D.V. Weakly Nonlinear Matrix Boundary-Value Problem in the Case of Parametric Resonance // Journ. of Math. Sciences. — April – June 2016. — **19**, № 2 — P. 276 — 288.
22. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. – 2001. – **37**, № 4. – P. 464 – 471.
23. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.
24. *Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск; Наука, 1996. — 280 с.
25. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — К.: Вища школа, 2000. — 296 с.
26. *Chuiko S.M.* Generalized Green Operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russian Mathematics. — 2016. — **60**, № 8. — P. 64 — 73.
27. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
28. *Чуйко А.С.* Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания.– 2005.— **8**, № 2.– С. 278 — 288.

29. Chuiko S.M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — **9**. — № 3, 2006. — P. 405 – 422.
30. *Чуйко С.М., Сысоев Д.В.* Линейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Кібернетика. – 2016. **1 (16)**. — С. 54 – 58.
31. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
32. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
33. *Perestyuk N.A., Vlasenko L.A.* On the Solvability of Impulsive Differential-Algebraic Equations // Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal Volume. — 2005. — **57**, № 4. — P. 458 — 468.
34. *Korol I.I., Ronto M.I.* Investigation and solution of boundary-value problems with parameters by numerical-analytic method // Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal. — 1994. — **46**, № 8. — P. 1031 — 1042.

Одержано 30.03.2017

УДК 519.854

С. В. Чупов(ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

БІНАРНІ АЛГОРИТМИ ПОШУКУ ЛЕКСИКОГРАФІЧНИХ ЕКСТРЕМУМІВ МНОЖИН У ЗАДАЧАХ ПРО ПОКРИТТЯ ТА УПАКОВКУ СКІНЧЕННОЇ МНОЖИНИ.

One of the possibilities to find the solutions to the problems of covering and packing of the set are the algorithms of lexicographical search. A key component of these algorithms is the search for the lexicographical extrema of sets that are subsets of feasible solutions set of the problem. The coefficients of the constraint matrix in the problems of covering and packing are boolean. That is why the columns of the constraint matrix are boolean vectors which can be considered as the whole numbers written in binary notation. The paper describes and justifies the search algorithms of the lexicographical extrema set for the above mentioned problems in which, in contrast to standard lexicographic search algorithms, all actions are binary operations "and" and "or" over the columns of the constraint matrix of the corresponding problem. The analysis of the effectiveness of the proposed algorithm demonstrates a significant advantage compared with the standard algorithms of lexicographical search.

Однією з можливостей відшукання розв'язків задач про покриття та упаковку множини є алгоритми лексикографічного пошуку. Ключовою складовою у таких алгоритмах є пошук лексикографічних екстремумів множин, які є підмножинами множини допустимих розв'язків задачі. Коефіцієнти матриці обмежень у задачах про покриття та упаковку – булеві. Тому стовпці матриці обмежень задачі це булеві вектори, які можна розглядати як цілі числа, записані у двійковій системі числення. У роботі описуються та обґрунтовуються алгоритми пошуку лексикографічних екстремумів множин для вищевказаних задач у яких, на відміну від стандартних алгоритмів лексикографічного пошуку, усі дії – порозрядні операції "and" і "or" над стовпцями матриці обмежень відповідної задачі. Аналіз ефективності роботи запропонованих алгоритмів свідчить про значну перевагу у порівнянні з стандартними алгоритмами лексикографічного пошуку.

1. Вступ. До задач про зважене покриття та упаковку скінченної множини зводиться багато прикладних задач. На сьогоднішній день розмірність таких задач є дуже великою. Враховуючи NP - складність цих задач, які відносяться до задач булевого лінійного програмування, на перший план виходять питання розробки нових алгоритмів пошуку їх розв'язків, або підвищення ефективності роботи вже існуючих методів. Однією з можливостей відшукання розв'язків задач про покриття та упаковку є алгоритми лексикографічного пошуку [1]. Ключовою складовою у таких алгоритмах є пошук лексикографічних екстремумів множин, що є підмножинами множини допустимих розв'язків задачі [2,3]. Коефіцієнти матриці обмежень та вектору вільних членів у задачах про покриття та упаковку є булевими. Тому стовпці матриці обмежень задачі це булеві вектори, які можна розглядати як цілі числа, записані у двійковій системі числення. У роботі описуються та обґрунтовуються алгоритми пошуку лексикографічних екстремумів множин для вищевказаних задач, у яких, на відміну від стандартних алгоритмів лексикографічного пошуку, усі дії – порозрядні (бінарні) операції "and" та "or" над стовпцями матриці обмежень відповідної задачі. Аналіз ефективності роботи запропонованих алгоритмів свідчить про значну перевагу над стандартними алгоритмами лексикографічного пошуку.

2. Постановка задачі. Нехай $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ — скінченна множина елементів довільної природи та $V^j \subset V$, $j = 1, \ldots, n$ — сімейство підмножин множини V. Кожну множину V^j, $j = 1, \dots, n$ можна однозначно представляти за допомогою булевого вектору $A^j \in B^m$, де $a_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \in V^j, \\ 0, v_i \notin V^j. \end{cases}$

У такому представленні математична модель класичної задачі про зважене покриття (упаковку) скінченної множини формулюється наступним чином: мінімізувати(максимізувати)

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j, \tag{1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, 1, i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

де $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $w_j > 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Множину допустимих розв'язків задачі про покриття, яка визначається умовами (2), (3), позначатимемо через X^{Cover}:

$$X^{Cover} = \left\{ x \in B^n | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, i = 1, \dots, m \right\},$$

множину допустимих розв'язків задачі про упаковку — X^{Pack}:

$$X^{Pack} = \left\{ x \in B^n | \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, i = 1, \dots, m \right\}.$$

У роботі розглядаються питання підвищення ефективності пошуку лексикографічного мінімуму множини $\left\{ x \in X^{Cover} \middle| x \geq^L \bar{x} \right\}$ для задачі про покриття та пошуку лексикографічного максимуму множини $\left\{ x \in X^{Pack} \middle| x \leq^L \bar{x} \right\}$ у задачі про упаковку, де $\bar{x} \in B^n$ – фіксований вектор.

3. Властивості допустимих розв'язків. Систему нерівностей (2) для задачі про покриття представимо у векторній формі: $\sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j \geq \bar{1}$, де $A^j \in B^m$, $j = 1, \dots, n$, — булеві вектори розмірності m, $\bar{1} \in B^m$ — вектор, усі координати якого рівні 1. У такій формі булевий вектор A^j, $j = 1, \dots, n$ можна розглядати як ціле число без знаку, що записане у двійковій системі числення. Для довільного булевого вектору x через S_1^x позначатимемо множину індексів цього розв'язку для яких $x_j = 1$, $S_1^x = \{ j \in \{1, \dots, n\} | \, x_j = 1 \}$.

Теорема 1. *У задачі про покриття розв'язок $x \in B^n$ допустимий тоді і тільки тоді коли $\bigvee\limits_{j \in S_1^x} A^j = \bar{1}$.*

Доведення. Знаком "$\vee$" позначено порозрядну операцію "or". Нехай x — допустимий розв'язок. Це означає, що $\sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j = \sum\limits_{j \in S_1^x} A^j \geq \bar{1}$. Для довільних двох булевих значень b_1 та b_2 таких, що $b_1 + b_2 \geq 1$ випливає $b_1 \vee b_2 = 1$. Це факт залишається вірним і при довільній кількості булевих значень. Отже, для кожного $i = 1, \ldots, m$, з того, що $\sum\limits_{j \in S_1^x} a_{ij} \geq 1$ слідує $\bigvee\limits_{j \in S_1^x} a_{ij} = 1$. З іншого боку, нехай $\bigvee\limits_{j \in S_1^x} A^j = \bar{1}$. Тоді для кожного $i = 1, \ldots, m$ маємо $\bigvee\limits_{j \in S_1^x} a_{ij} = 1$. Виходячи з властивостей порозрядної операції "or", остання рівність має місце тільки тоді коли $\sum\limits_{j \in S_1^x} a_{ij} \geq 1$. Тому має виконуватись $\sum\limits_{j \in S_1^x} A^j = \sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j \geq \bar{1}$, або $x \in X^{Cover}$.

Систему нерівностей (2) для задачі про упаковку також можна представити у вигляді: $\sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j \leq \bar{1}$. Крім того, через n_x позначимо потужність множини S_1^x, $n_x = |S_1^x|$.

Теорема 2. *У задачі про упаковку розв'язок $x \in B^n$ допустимий тоді і тільки тоді коли для усіх $k = 2, \ldots, n_x$ виконується* $\left(\bigvee\limits_{j=1}^{k-1} A^{S_{1,j}^x} \right) \wedge A^{S_{1,k}^x} = \bar{0}$.

Доведення. Знаком "$\wedge$" позначено порозрядну операцію "and", $\bar{0} \in B^m$ — нульовий вектор . Нехай x — допустимий розв'язок. Це означає, що $\sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j = \sum\limits_{j \in S_1^x} A^j \leq \bar{1}$. Для довільних двох булевих значень b_1 та b_2 умови $b_1 + b_2 \leq 1$ та $b_1 \wedge b_2 = 0$ є еквівалентними. Для більшої кількості булевих значень це не так. З того, що $\sum\limits_{j=1}^{K} b_j \leq 1$ $(K > 2)$ випливає, що $\bigwedge\limits_{j=1}^{K} b_j = 0$, але навпаки ні. Умова $\bigwedge\limits_{j=1}^{K} b_j = 0$ вказує лише на те, що серед значень $b_1, \ldots, b_K$ є хоча б одне, яке рівне 0. Для того щоб серед значень $b_1, \ldots, b_K$ було не більше одного із значенням 1 потрібно, щоби для усіх пар індексів j та s, таких що $j \neq s$, виконувалося б $b_j \wedge b_s = 0$, або $\bigvee\limits_{\substack{(j,s) \\ j \neq s}} b_j \wedge b_s = 0$. Але $\bigvee\limits_{\substack{(j,s) \\ j \neq s}} b_j \wedge b_s = \bigvee\limits_{s=2}^{K} \left(\left(\bigvee\limits_{j=1}^{s-1} b_j \right) \wedge b_s \right)$.

Таким чином умови $\sum\limits_{j=1}^{K} b_j \leq 1$ та $\bigvee\limits_{s=2}^{K} \left(\left(\bigvee\limits_{j=1}^{s-1} b_j \right) \wedge b_s \right) = 0$ — еквівалентні. На підставі цього можна казати що, система нерівностей $\sum\limits_{j \in S_1^x} a_{ij} \leq 1$, $i = 1, \ldots, m$, або $\sum\limits_{j=1}^{n} A^j x_j \leq \bar{1}$ еквівалентна умові $\bigvee\limits_{k=2}^{n_x} \left(\left(\bigvee\limits_{j=1}^{k-1} A^{S_{1,j}^x} \right) \wedge A^{S_{1,k}^x} \right) = \bar{0}$, що і доводить теорему.

Теореми 1 та 2 дозволяють побудувати нові схеми перевірки розв'язків на допустимість у задачах про покриття та упаковку скінченної множини. На рис. 1 та рис. 2 представлені відповідні алгоритми.

4. Пошук лексикографічного мінімуму множини у задачі про покриття. Основною складовою алгоритмів лексикографічного пошуку є відшукання лексикографічних екстремумів множин, які є підмножинами множини допустимих розв'язків задачі оптимізації. У стандартному алгоритмі пошуку лексикографічного мінімуму множини [2] на кожному кроці k, $k = 1, \ldots, n$, здійснюється процес скалярної мінімізації значення змінної x_k. В результаті

```
bool CoverFeasible(x ∈ B^n){
 s = 0̄;
  for(int j = 1; j ≤ n; j++)
    if(x_j == 1) s = s ∨ A^j;
 return s == 1̄;
}
```

Рис. 1. Алгоритм перевірки допустимості розв'язку у задачі про покриття.

```
bool PackFeasible(x ∈ B^n){
 s = 0̄;
  for(int j = 1; j ≤ n; j++)
   if(x_j == 1){
      if(s ∧ A^j == 0̄)
         s = s ∨ A^j;
      else
         return false;
   }
 return true;
}
```

Рис. 2. Алгоритм перевірки допустимості розв'язку у задачі про упаковку.

отримуємо значення $\delta_k = \max\left\{1-\sum\limits_{j=1}^{k-1}a_{ij}x_j^*-\sum\limits_{j=k+1}^{n}a_{ij}\,\middle|\,a_{ik}=1\right\}$ та $x_k^*=\max\{0,\delta_k\}$. Крім того, слід зауважити, що завжди $\delta_k\le 1$ [2].

Використовуючи вказані властивості допустимих розв'язків у задачі про покриття з попереднього пункту, виникає можливість побудувати нову схему пошуку лексикографічного мінімуму множини допустимих розв'язків задачі про покриття скінченної множини. Визначимо булеві вектори: $U^k=\bigvee\limits_{j=k}^{n}A^j,\ k=1,\dots,n,\ U^{n+1}=\bar 0,\ Y^k=\bar 0,\ k=0,1,\dots,n$. На початку пошуку $x^*=\bar 1$. На кожному кроці $k,\ k=1,\dots,n$, пошуку лексикографічного мінімуму перевіряється умова: чи вектор $Y^{k-1}\vee U^{k+1}$ рівний $\bar 1$. Якщо умова виконується, тоді значення x_k^* стає рівним 0, якщо ні, тоді значення x_k^* залишається рівним 1. При цьому, якщо умова виконується, тоді $Y^k=Y^{k-1}$, інакше $Y^k=Y^{k-1}\vee A^k$.

Теорема 3. *Визначення вектору $Y^{k-1}\vee U^{k+1}$ на кожному k-му кроці, $k=1,\dots,n$, еквівалентно обчисленню значення δ_k у стандартному алгоритмі пошуку лексикографічного мінімуму множини для задачі про покриття.*

Доведення. Значення δ_k є мінімально можливим значенням при якому розв'язок $\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,\delta_k,1,\dots,1\right)$ задовольняє умову (2). Для допустимості розв'язку це значення коригується так, щоб воно було булевим. В решті решт, можна казати, що значення δ_k дозволяє визначити чи є допустимим розв'язок $\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,0,1,\dots,1\right)$. Не важко помітити, що на кожному кроці $k,\ k=1,\dots,n$, розглянутих вище дій, $Y^{k-1}=\bigvee\limits_{\substack{j=1\\ x_j^*=1}}^{k-1}A^j,\ U^{k+1}=\bigvee\limits_{j=k+1}^{n}A^j$ та $Y^{k-1}\vee U^{k+1}=\bigvee\limits_{\substack{j=1\\ x_j^*=1}}^{k-1}A^j\vee\bigvee\limits_{j=k+1}^{n}A^j=\bigvee\limits_{j=1}^{n}A^jx_j^k$, де $x^k=\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,0,1,\dots,1\right)$. Якщо

$\bigvee\limits_{j=1}^{n} A^j x_j^k = \bar{1}$, тоді, згідно теореми 1, це означає, що розв'язок x^k — допустимий.

Слід відзначити, що коли на деякому кроці k, $k = 1, \ldots, n$, значення $x_k^* = 0$, тоді вектор Y^k не змінюється. Тому для підвищення ефективності роботи запропонованого бінарного алгоритму пошуку лексикографічного мінімуму у задачі про покриття, замість того щоб кожен раз визначати вектор Y^k, може використовуватись масив індексів iy, у якому кожне значення iy_k містить останній номер кроку на якому відбувалася зміна вектору Y^{iy_k}, тобто $iy_k = \max\{j \in \{1, \ldots, k-1\} \,|Y^j = Y^{j-1} \vee A^j\}$. Нехай цілочислове значення $lastK$ містить номер останнього кроку, на якому відбувалася зміна вектору Y^k. На початку роботи алгоритму значення $lastK = 0$.

При такому уточненні, на кожному кроці k, $k = 1, \ldots, n$, пошуку лексикографічного мінімуму:

1) $iy_k = lastK$;

2) перевіряється умова: чи дорівнює вектор $Y^{k-1} \vee U^{k+1}$ вектору $\bar{1}$;

3) якщо так, тоді значення $x_k^* = 0$;

4) якщо ні, тоді $Y^k = Y^{lastK} \vee A^k$, $lastK = k$.

На рис. 3 представлена структурна схема алгоритму пошуку лексикографічного мінімуму множини допустимих значень задачі про покриття $LexMinCover$.

```
int[] LexMinCover(){
  int[] x* = 1̄; int lastK = 0;
  for(int k = 1; k ≤ n; k++){
    iy_k = lastK;
    if(Y^lastK ∨ U^(k+1) == 1̄)
      x*_k = 0;
    else
      {Y^k = Y^lastK ∨ A^k; lastK = k;}
  }
  return x*;
}
```

Рис. 3. Алгоритм пошуку лексикографічного мінімуму у задачі про покриття.

Алгоритм $LexMinCover$ призначений для пошуку лексикографічного мінімуму x^* множини X^{Cover}, $x^* = \min^L X^{Cover}$. Але, враховуючи те, що в процесі пошуку лексикографічного мінімуму усі зміни у послідовності векторів Y^k, $k = 1, \ldots, n$, фіксуються, алгоритм $LexMinCover$ може бути використаний для пошуку лексикографічного мінімуму множини $\left\{x \in X^{Cover} \middle| \, x \geq^L \bar{x}\right\}$, де $\bar{x} \in B^n$ — фіксований булевий вектор. Для цього цикл пошуку у алгоритмі $LexMinCover$ слід починати не з першої координати, а із координати, що забезпечує виконання прямого лексикографічного обмеження $x \geq^L \bar{x}$.

5. Пошук лексикографічного максимуму множини у задачі про упаковку. У стандартному алгоритмі пошуку лексикографічного максимуму множини [3], враховуючи специфічність коефіцієнтів обмежень задачі про упаковку, на кожному кроці $k,\ k=1,\dots,n$, здійснюється процес скалярної максимізації за змінною x_k. В результаті якого обчислюється $\delta_k = \min\left\{ 1-\sum\limits_{j=1}^{k-1} a_{ij}x_j^* \,\middle|\, a_{ik}=1 \right\}$ та $x_k^* = \min\{1,\delta_k\}$. Слід зауважити, що значення δ_k завжди невід'ємне, $\delta_k \ge 0$ [3].

Спираючись на властивість допустимих розв'язків у задачі про упаковку, що обґрунтовується теоремою 2, опишемо схему бінарного пошуку лексикографічного максимуму множини допустимих розв'язків задачі про упаковку X^{Pack}. На початку пошуку $x^*=\bar{0}$, $Y^k=\bar{0}$, $k=0,1,\dots,n$. На кожному кроці пошуку лексикографічного максимуму $k,\ k=1,\dots,n$ перевіряється умова: чи є нульовим вектор $Y^{k-1}\wedge A^k$. Якщо умова виконується, тоді значення x_k^* стає рівним 1, якщо ні, тоді значення x_k^* залишається рівним 0. При цьому, якщо умова виконується, тоді $Y^k=Y^{k-1}\vee A^k$, інакше $Y^k=Y^{k-1}$.

Теорема 4. *Визначення вектору $Y^{k-1}\wedge A^k$ на кожному k-му кроці, $k=1,\dots,n$, еквівалентно обчисленню значення δ_k у стандартному алгоритмі пошуку лексикографічного максимуму множини для задачі про упаковку.*

Доведення. Значення δ_k є максимально можливим значенням при якому розв'язок $\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,\delta_k,0,\dots,0\right)$ задовольняє умову (2) для задачі про упаковку. Для допустимості розв'язку це значення коригується так, щоб воно не перевищувало 1. Таким чином, значення δ_k дозволяє визначити допустимість розв'язку $\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,1,0,\dots,0\right)$. Не важко помітити, що на кожному кроці $k,\ k=1,\dots,n$, розглянутих вище дій, $Y^{k-1} = \bigvee\limits_{\substack{j=1\\ x_j^*=1}}^{k-1} A^j = \bigvee\limits_{j=1}^{k-1} A^j x_j^k$ та

$Y^{k-1}\wedge A^k = \left(\bigvee\limits_{j=1}^{k-1} A^j x_j^k\right)\wedge A^k$, де $x^k=\left(x_1^*,\dots,x_{k-1}^*,1,0,\dots,0\right)$. Усі розв'язки вигляду $\left(x_1^*,\dots,x_p^*,0,\dots,0\right)$, $p=1,\dots,k-1$ є допустимим, тому $Y^{k-1}\le\bar{1}$. Якщо $Y^{k-1}\wedge A^k\ne\bar{0}$, тоді знайдеться така координата $q>k$, для якої $Y_q^{k-1}=1$, $A_q^k=1$ та $Y_q^{k-1}\wedge A_q^k=1$, тобто обмеження задачі з номером q для розв'язку x^k містить два не нульові значення, що порушує допустимість цього розв'язку. Якщо ж $Y^{k-1}\wedge A^k=\bar{0}$, тоді розв'язок x^k — допустимий.

По аналогії з бінарним алгоритмом пошуку лексикографічного мінімуму у задачі про покриття, для підвищення ефективності роботи бінарного алгоритму пошуку лексикографічного максимуму у задачі про упаковку, використаємо масив індексів iy у якому кожне значення iy_k містить останній номер кроку на якому відбувалася зміна вектору Y^k, $iy_k=\max\left\{j\in\{1,\dots,k-1\}\,|Y^j=Y^{j-1}\vee A^j\right\}$. Нехай цілочислове значення $lastK$ містить номер останнього кроку на якому відбувалася зміна вектору Y^k. На початку роботи алгоритму значення $lastK=0$.

Враховуючи вище сказане, на кожному кроці $k,\ k=1,\dots,n$, пошуку лексикографічного максимуму виконаємо дії:

1) $iy_k=lastK$;

2) перевіряється умова: чи є вектор $Y^{k-1}\wedge A^k$ нульовим;

3) якщо так, тоді значення $x_k^* = 1$, $Y^k = Y^{lastK} \vee A^k$, $lastK = k$.

На рис. 4 представлена структурна схема алгоритму пошуку лексикографічного максимуму множини допустимих значень задачі про упаковку скінченної множини $LexMaxPack$.

Рис. 4. Алгоритм пошуку лексикографічного максимуму у задачі про упаковку.

```
int[] LexMaxPack(){
  int[] x* = 0̄; int lastK = 0;
    for(int k = 1; k ≤ n; k++){
      iy_k = lastK;
      if(Y^lastK ∧ A^k == 0̄)
        {x*_k = 1; Y^k = Y^lastK ∨ A^k; lastK = k;}
    }
  return x*;
}
```

Алгоритм $LexMaxPack$ призначений для пошуку лексикографічного максимуму x^* множини X^{Pack}, $x^* = \max^L X^{Pack}$. Враховуючи те, що в процесі пошуку лексикографічного максимуму усі зміни у послідовності векторів Y^k, $k = 1,\ldots,n$, фіксуються, алгоритм $LexMaxPack$ також може бути використаний для пошуку лексикографічного максимуму множини $\left\{ x \in X^{Pack} \middle| \, x \leq^L \bar{x} \right\}$, де $\bar{x} \in B^n$ — фіксований булевий вектор. Для цього цикл пошуку у алгоритмі $LexMaxPack$ слід починати не з першої координати, а із координати $startK$, що забезпечує виконання прямого лексикографічного обмеження $x \leq^L \bar{x}$. Її значення легко відшукується за правилом: $startK = \max\left\{ j \in \{1,\ldots,n\} \middle| \, \bar{x}_j = 1;\ \bigvee_{i=1}^{j-1} A^i \bar{x}_i \leq \bar{1} \right\} + 1$.

6. Аналіз ефективності бінарних алгоритмів пошуку лексикографічних екстремумів у задачах про покриття та упаковку. Сучасні процесори мають можливість здійснювати порозрядні операції з 128-и, 256-и і навіть 512-и розрядними двійковими числами. У реальних задачах про покриття або упаковку скінченної множини кількість лінійних обмежень коливається від декількох сотень до декількох тисяч. Тому для представлення одного стовпця матриці обмежень у двійковому вигляді одного бінарного числа навіть максимальної розмірності може виявитись не достатньо. У програмній реалізації стовпець матриці обмежень задачі представляється як послідовність двійкових чисел, розмірність яких підтримується процесором. Наприклад, якщо кількість обмежень задачі $m = 500$, а процесор має можливість працювати з 128-и розрядними числами, тоді стовпець матриці обмежень задачі A^k може бути представлений як послідовність з 4-х 128-и розрядних двійкових чисел:

$$A^k = (\underbrace{a_{1,k},\ldots,a_{128,k}}_{128bit}, \underbrace{a_{129,k},\ldots,a_{256,k}}_{128bit}, \underbrace{a_{257,k},\ldots,a_{384,k}}_{128bit}, \underbrace{a_{385,k},\ldots,a_{500,k},0,\ldots,0}_{128bit})$$

У такому представленні одна порозрядна операція над стовпцями матриці обмежень реалізується як послідовність з 4-х порозрядних операцій над 128-и розрядними двійковими числами.

У роботі розроблено два способи представлення стовпців матриці обмежень задачі, як послідовність 128-и розрядних двійкових чисел ($Bin128$) та як 256-и розрядних двійкових чисел ($Bin256$). Бінарний пошук лексикографічних екстремумів множин у цих представленнях порівнювався з роботою стандартного алгоритму пошуку (Std) [2,3]. Оскільки алгоритми $LexMaxPack$ та $LexMinCover$ базуються на одних і тих самих принципах, то ефективність їх роботи для матриць обмежень з однаковою структурою у порівнянні із стандартним алгоритмом теж однакова. Тому аналіз результатів представлено тільки для алгоритму $LexMinCover$. Дослідження проводилося для задач про покриття з випадково побудованою матрицею обмежень, щільність не нульових елементів якої становила 5%. Для отримання середнього часу роботи алгоритмів, генерувалося 10 задач однієї розмірності. У кожній з 10 задач 1000 разів викликався кожен з 3-х алгоритмів пошуку лексикографічного мінімуму множини: стандартний (Std), $LexMinCover$ з 128-и розрядною реалізацією ($Bin128$) та $LexMinCover$ з 256-и розрядною реалізацією ($Bin256$). Таким чином для кожної розмірності кожен з 3-х алгоритмів викликався 10000 разів.

На рис. 5 представлено графік залежності часу роботи алгоритмів від кількості обмежень задачі. При цьому кількість обмежень у задачі про покриття змінювалась від 50 до 2000 з кроком 50. Кількість змінних n задачі була фіксованою і дорівнювала 20000, $n = 20000$.

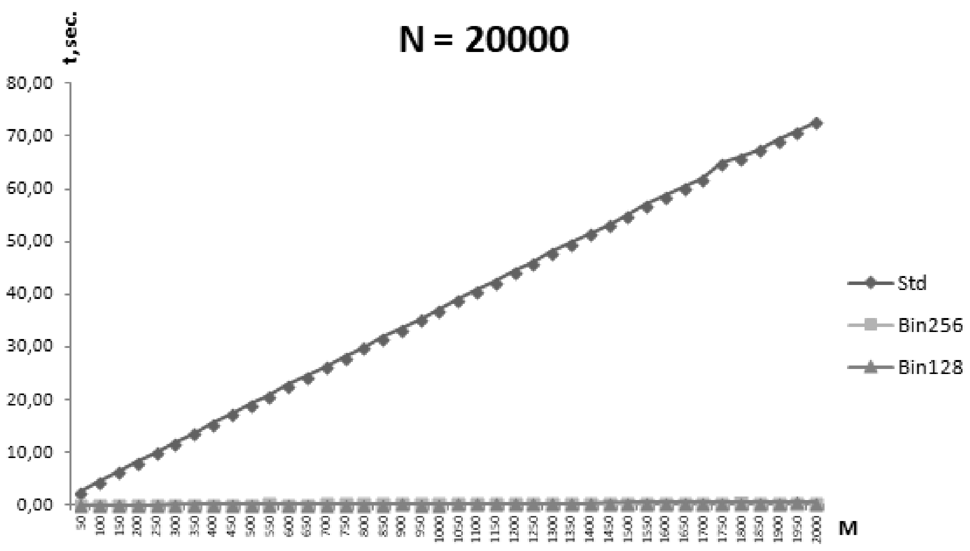


Рис. 5. Залежність між кількістю обмежень задачі про покриття та середнім часом роботи стандартного алгоритму та алгоритму $LexMinCover$.

Легко бачити, що із збільшенням кількості обмежень час роботи стандартного алгоритму пошуку лексикографічного мінімуму множини лінійно зростає і при $m = 2000$ становить $72,71$ сек. В той же час, у порівнянні із стандартним алгоритмом, ефективність бінарних алгоритмів змінюється не значно. Для більшої деталізації, на рис. 6 представлено графік залежності часу роботи тільки бінарних алгоритмів пошуку від кількості обмежень задачі.

Час роботи алгоритму $LexMinCover$ у реалізаціях $Bin256$ та $Bin128$ із збільшенням m теж зростає майже лінійно, але значно повільніше у порівнянні

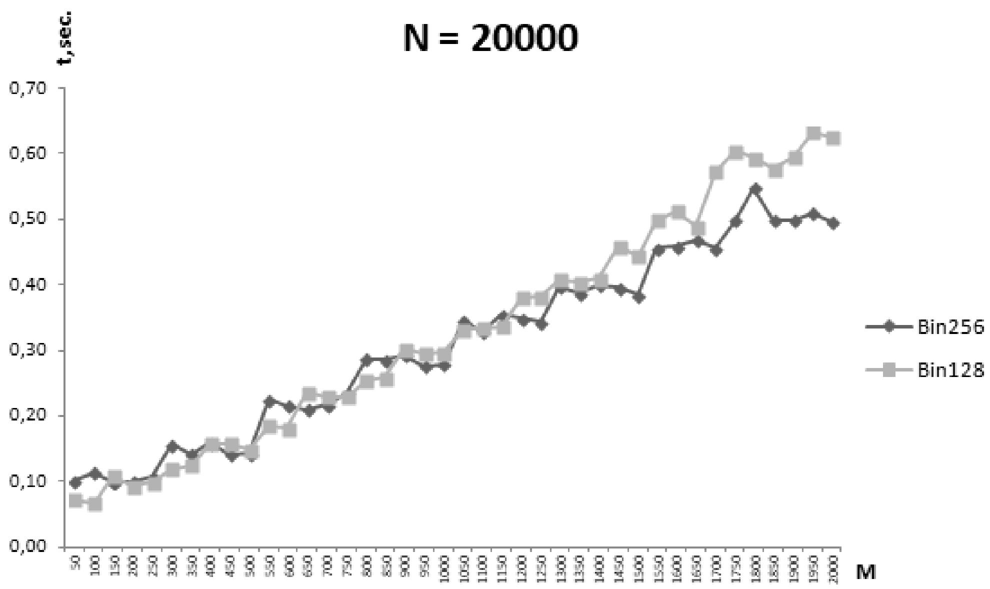


Рис. 6. Залежність між кількістю обмежень задачі про покриття та середнім часом роботи алгоритму $LexMinCover$ для різних представлень стовпців матриці обмежень.

із стандартним алгоритмом. Так, у реалізації $Bin256$ найбільший середній час роботи становив $0,548$ сек. при $m = 1800$, а у реалізації $Bin128$ — $0,633$ сек. при $m = 1950$. Варто відзначити, що ефективність бінарних алгоритмів пошуку лексикографічних екстремумів множини залежить від фактичної кількості двійкових розрядів, що використовуються для представлення стовпців матриці обмежень задачі та реальної кількості, що виділяється для вмісту послідовності двійкових значень на рівні процесору. Чим більше двійкових розрядів з виділеної кількості використовується, тим ефективніше працюють алгоритми бінарного пошуку. Наприклад, при $m \geq 1800$, у реалізації $Bin256$, потрібно виділити 8 256-и розрядних двійкових значень для збереження одного стовпця матриці обмежень. При $m = 1800$ не використаними лишаються 248 розрядів з 2048, а при $m = 2000$ — 48. На графіку з рис. 6 для $Bin256$ видно, що при $m = 2000$ середній час роботи бінарного алгоритму становив $0,496$ сек. В той же час, при $m = 1800$ — $0,548$ сек.

На рис. 7 представлено графік залежності часу роботи алгоритмів від кількості змінних задачі. При цьому кількість змінних у задачі про покриття змінювалась від 500 до 20000 з кроком 500. Кількість обмежень m задачі була фіксованою і дорівнювала 1000, $m = 1000$.

Із збільшенням кількості змінних час роботи стандартного алгоритму пошуку лексикографічного мінімуму множини лінійно зростає і при $n = 20000$ становить $37,1$ сек. В той же час, у порівнянні із стандартним алгоритмом, середній час роботи бінарних алгоритмів змінюється не значно. Так, при $n = 20000$ середній час роботи алгоритму $LexMinCover$ у 256-и розрядній реалізації становив $0,282$ сек., а у 128-и розрядній реалізації – $0,293$ сек. Зауважимо, що збільшення кількості змінних задачі менше впливає на ефективність роботи алгоритмів пошуку лексикографічного мінімуму. При зміні кількості обмежень

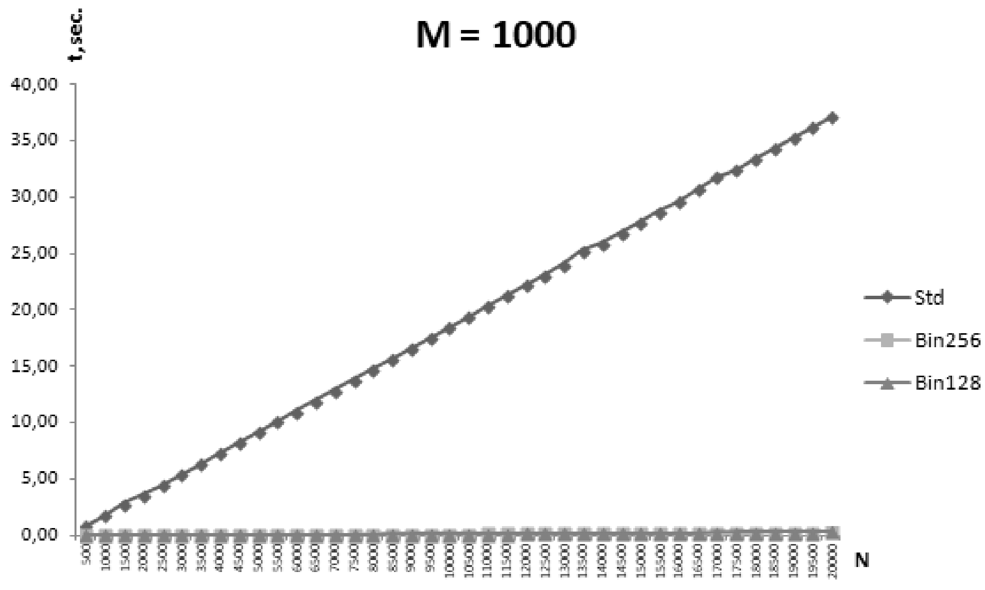


Рис. 7. Залежність між кількістю змінних задачі про покриття та середнім часом роботи стандартного алгоритму та алгоритму $LexMinCover$.

задачі лінійна залежність часу у стандартному алгоритмі може бути виражена формулою: $t = 0.036m+t_0$. Коли ж міняється кількість змінних, тоді залежність виражається як $t = 0.0018n + t_0$.

7. Висновки. Побудовані та досліджені нові алгоритми пошуку лексикографічних екстремумів множин, які є підмножинами множини допустимих розв'язків задач про покриття та упаковку скінченої множини. Особливості матриці обмежень та вектору вільних членів цих задач дозволили представити схему стандартного алгоритму пошуку лексикографічного екстремуму множини у нових термінах – через бінарні або порозрядні операції над булевими векторами. Порівняння ефективності роботи бінарних алгоритмів з стандартним алгоритмом пошуку здійснювалось на основі задач, отриманих випадковим чином. Аналіз результатів показав, що в залежності від розмірності задачі, в першу чергу від кількості обмежень, бінарний алгоритм працює у 50 – 150 разів швидше ніж стандартний алгоритм пошуку. Причому, із збільшенням розмірності задачі ефективність роботи бінарного алгоритму зростає.

Список використаної літератури

1. *Чупов С.В.* Новые подходы к решению задач дискретного программирования на основе лексикографического поиска // Кибернетика и систем. анализ. – 2016.– № 4.– С. 43–54.
2. *Чупов С.В.* Эффективные алгоритмы поиска лексикографического минимума множества// Компьютерная математика. – К.: Ин-т кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, 2015.– № 2.– С. 123–131.
3. *Чупов С.В.* Модифікації алгоритму пошуку лексикографічного максимуму множини// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2015.– Вип. № 2(27). – С. 168–173.

Одержано 22.01.2017

УДК 519.21

В. К. Ясинський, І. В. Юрченко, У. М. Кисілюк (Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

It is obtained sufficient conditions for the existence of a strong solution (almost surely) of the stochastic diffusion equation with finite aftereffect under external random processes of arbitrary nature, and found sufficient conditions for the existence of even points of such equations.

У роботі одержано достатні умови існування майже напевно сильного розв'язку дифузійного стохастичного рівняння зі скінченною післядією під дією зовнішніх випадкових процесів довільної природи, а також знайдені достатні умови існування парних моментів таких рівнянь.

1. Вступ. При розгляді диференціальних рівнянь з випадковими функціями слід розглядати два випадки. У першому випадку випадкові функції, що входять у диференціальне рівняння можна розв'язувати за допомогою класичних методів теорії звичайних диференціальних рівнянь. У другому випадку доводиться розглядати диференціальні рівняння, що містять узагальнені випадкові процеси типу «білого шуму». Такі рівняння можна отримати в результаті граничного переходу від рівнянь, які описують системи, на які діють швидкозмінні впливи (наприклад, хаотичний тепловий рух молекул, що діють на частинку, броунівський рух тощо). До таких рівнянь класичні методи застосовувати неможливо, тому для них розроблено спеціальну теорію стохастичних диференціальних рівнянь.

Термін «стохастичне диференціальне рівняння» був започаткований С. Н. Бернштейном. Й. І. Гіхман [1] вперше обгрунтував граничний перехід. У своїх роботах він дає загальне поняття стохастичного диференціального рівняння та обгрунтовує рівняння А.М. Колмогорова для перехідних імовірностей розв'язків.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння у відомих монографіях [1], [5], [6], [11] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [3], [7], [8], [13], [14] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотики сильного розв'язку для математичних моделей складних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри (див., наприклад, роботи [4], [10], [12], [15] та ін.).

У даній роботі розглядається клас дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з урахуванням зовнішніх випадкових збурень іншої природи, відмінної від вінерівського процесу, вивчається питання існування та єдиності сильного розв'язку для цього класу рівнянь.

2. Постановка задачі. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, \ t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння Іто (дифузійне) під дією зовнішніх випадкових збурень (СДФРзЗЗ)

$$dx(t) = f_1(t, \omega)\, a(t, x_t)\, dt + f_2(t, \omega)\, b(t, x_t)\, dw(t, \omega) \tag{1}$$

$$x_t|_{t=0} \equiv x\left(t+\theta\right)|_{t=0} = \varphi(\theta) \in \mathbb{R}^1; -\tau \leq \theta \leq 0, \tag{2}$$

де $f_j\left(t,\omega\right), \ j=1,2$ — одновимірні випадкові процеси із заданим законом розподілу

$$F_{jt}\left(f_j\left(t,\omega\right]\right) \equiv \mathbb{P}\left\{\omega : f_j\left(t,\omega\right) < x\right\}, \forall x \in \mathbb{R}^1. \tag{3}$$

Коефіцієнт зносу $a : [0,T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^1$, де $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}([\tau,0])$ — простір функцій, які не мають розривів другого роду.

Коефіцієнт дифузії $b : [0;T] \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, $a, \ b$ – вимірні за сукупністю змінних; $x_t \equiv \left\{x\left(t+\theta\right)\right\}, \ \theta \in [-\tau,0], -\infty \leq -\tau \leq 0$.

Означення 1. Випадковий процес $x\left(t\right) \equiv x\left(t,\omega\right) \in \mathbb{D}$ назвемо сильним розв'язком СДФРзЗЗ (1), (2), якщо $x\left(t\right)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірним випадковим процесом $\forall \ t \in [0,T]$ і задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$x\left(t\right) = \varphi\left(0\right) + \int_0^t f_1\left(s\right) a\left(s,x_s\right) ds + \int_0^t f_2\left(s\right) b\left(s,x_s\right) dw\left(s\right) \tag{4}$$

за початковою умовою (2), де $f_j\left(s\right) \equiv f_j(s,\omega)$.

У просторі $\mathbb{D}$ для $\varphi\epsilon\mathbb{D}$ визначимо норму $\|\varphi\left(\varphi\right)\| = sup_{\theta\epsilon[-r,0]}\left|\varphi(\theta)\right|$.

Зауважимо, що у рівномірній нормі простір Скорохода $\mathbb{D}$ [1] є неповним простором. Тому всі результати будуть мати місце в розширеному просторі $\overline{\mathbb{D}}$ який надалі будемо позначати $\mathbb{D}$.

3. Про єдиність сильного розв'язку СДФРзЗЗ. Доведемо спочатку єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку задачі Коші (1), (2).

Теорема 1. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega, \ \mathcal{F}, \ \left\{\mathcal{F}_t, \ t \geq 0\right\}, \mathbb{P})$ *задано СДФРзЗЗ* (1), (2), *коефіцієнти якого задовольняють умови:*

1) *функції $a(t,x)$, $b(t,x)$ визначені для $t \in [0,T]$, $x \in (-\infty,+\infty)$ та вимірні за сукупністю змінних;*

2) *існує така стала $0 < K < \infty$, що $\forall t \in [0, \ T]$, $x,y \in (-\infty,+\infty)$ справджується умова Ліпшиця та умова обмеженості*

$$\left|a\left(t,x\right) - a\left(t,y\right)\right| + \left|b\left(t,x\right) - b\left(t,y\right)\right| \leq K_1|x-y|, \tag{5}$$

$$|a(t,x)|^2 + \left|b\left(t,x\right)\right|^2 \leq K_2(1+|x|^2); \tag{6}$$

3) *$f_j\left(t\right) \equiv f_j\left(t,\omega\right)$, $j=1,2$ — випадкові процеси зі своїми законами розподілу* (3);

4) *виконуються $\mathbb{E}\left\{{f_1}^2\left(t\right) \leq K_3\right\}; \mathbb{E}\left\{{f_2}^4\left(t\right) \leq K_4\right\}; \mathbb{E}\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання;*

5) *попарно незалежні випадкові процеси $f_j\left(t\right)$, $j=1,2$ не залежать від вінерівського процесу $w(t) \equiv w\left(t,\omega\right) \in \mathbb{R}^n$, при цьому $\mathbb{E} \ \left\{\|x_0\left(\theta\right)\|\right\} < \mathbb{K} < \infty$;*

6) *інтеграли у (4) є неперервні по t майже напевно.*

Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1), (2) *з точністю до стохастичної еквівалентності.*

Зауваження 1. Існування єдиного розв'язку задачі Коші (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності означає [2] наступне: якщо $x_1(t) \equiv x_1(t,\omega)$ та $x_2(t) \equiv x_2(t,\omega)$ — два сильних розв'язки задачі Коші (1), (2), то

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \underset{0\leq t\leq T}{sup}\left|x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right| \quad = 0\right\} = 1. \tag{7}$$

Доведення. Якщо $x_i(t) \equiv x_i\left(t,\omega\right) \in \mathbb{R}^1$ два розв'язки (1), (2), то для $i = 1,2$ матимемо інтегральні рівняння:

$$x_i\left(t\right) = x_i\left(0\right) + \int_0^t f_1\left(s\right) a\left(s, x_s\right) ds + \int_0^t f_2\left(s\right) b\left(s, x_s\right) dw\left(s\right). \tag{8}$$

Віднімемо вираз (8), для $x_1(t)$, вираз (8), для $x_2(t)$, піднесемо до квадрату ліву та праву частину виразу для $x_1(t)$- $x_2(t)$, обчислимо вірно математичне сподівання $\mathbb{E}\{|x_1\left(t\right) - x_2(t)|^2\}$, в результаті матимемо:

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\right\} = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1(s,\omega)(a\left(s, x_{1_s}\right) - a\left(s, x_{2_s}\right)) ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t f_2\left(s,\omega\right)\left(b\left(s, x_{1_s}\right) - b\left(s, x_{2_s}\right) dw(s)\right]^2. \tag{9}$$

Уведемо позначення $a_i\left(s\right) \equiv a\left(s,\ x_{i_s}\right),\ b_i\left(s\right) \equiv b_i\left(s, x_{i_s}\right),\quad i = 1,2$. Очевидна нерівність $\left(a + b\right)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$. Властивість математичного сподівання від квадрату інтегралу Іто, як функції верхньої межі [1], [2] дає рівність

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t l\left(s\right) dw\left(s\right)\right)^2\right\} = \int_0^t \mathbb{E}\left\{l^2(s)\right\} ds,$$

де $l(s) \equiv l(s,\omega)$.

Враховуючи вище згадане зауваження, матимемо:

$$\mathbb{E}\left\{\left|x_1\left(t\right) - x_2\left(t\right)\right|^2\right\} \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\left(s,\omega\right)\left(a_{1_s} - a_{2_s}\right) ds\right]^2 +$$

$$+2\int_0^t \mathbb{E}\left[f_2(s)\left(b_{1_s} - b_{2_s}\right)\right]^2 ds. \tag{10}$$

Для доданку під знаком $\mathbb{E}\{\circ\}$ виразу (10) використаємо нерівність Коші-Буняковського [7]

$$\left(\int_0^t \xi\eta\right)^2 \leq \int_0^t \xi^2 ds \int_0^t \eta^2 ds,$$

де $\xi \equiv \xi\left(\omega\right) \in \mathbb{R}^1$; $\eta \equiv \eta\left(\omega\right) \in \mathbb{R}^1$. Для другого доданку нерівність Гельдера [7], [3] $\mathbb{E}\{f_1\ f_2\} \leq (\mathbb{E}\{f_1^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}\{f_2^q\})^{\frac{1}{q}}$ при $p = q = 2$, тобто

$$\mathbb{E}f_2^2\left(s\right)\left[b\left(s, x_{1_s}\right) - b(s, x_{2_s})\right]^2 \leq \left(\mathbb{E}\left\{\left(f_2^2(s)\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left\{\left(b_1\left(s\right) - b_2\left(s\right)\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\mathbb{E}\left\{f_2^4(s)\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\mathbb{E}\{(b_1(s) - b_2(s))^4\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В результаті одержимо нерівність

$$\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \leq 2\mathbb{E}\{\int_0^t f_1^2(s)\,ds \cdot \int_0^t (a_1(s) - a_2(s))^2 ds +$$

$$+2\int_0^t \left(\mathbb{E}\left\{f_2^4(s)\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left\{(b_1(s) - b_2(s))^4\right\}\right)^{\frac{1}{2}} ds \leq$$

$$\leq 2T \cdot K_3 \cdot K_1^2 \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\right\} ds + 2 \cdot K_4^{\frac{1}{2}} \cdot K_1^4 \cdot \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\right\} ds \leq$$

$$\leq L \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\right\} ds, \tag{11}$$

де $L \equiv 2K_1^2\left(TK_3 + \sqrt{K_4} \cdot K_1^2\right)$. Має місце [1] наступне твердження

Лема. *Нехай $\varphi(t)$ та $\alpha(t)$ вимірні обмежені функції та при деякому $L > 0$ виконується нерівність $\varphi(t) \leq \alpha(t) + L\int_0^t \varphi(s)ds$.*

Тоді

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + L\int_0^t \varphi(s)\exp(-L(t-s))ds. \tag{12}$$

Доведення. Позначимо праву частину у (12) через

$$\psi(t) \equiv \alpha(t) + L\int_0^t \varphi(s)\exp(-L(t-s))\,ds. \tag{13}$$

Зрозуміло, що $\psi(t)$ задовольняє задачу Коші

$$\psi(t) = \alpha(t) + L\int_0^t \psi(s)\,ds, \quad \psi(0) = \alpha(0). \tag{14}$$

Позначаючи $\triangle(\mathrm{t}) \equiv \psi(\mathrm{t}) - \alpha(\mathrm{t})$, можемо записати:

$$\triangle(t) \geq L\int_0^T \triangle(s)ds \geq L^2\int_o^t \int_0^s \triangle(u)\,du =$$

$$= L^2\int_0^t (t-u)\triangle(u)du \geq L^3\int_0^t (t-u)\int_0^u \triangle(s)\,dsdu =$$

$$= L^3\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}\triangle(s)ds \geq \cdots \geq \frac{L^n}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\triangle(s)ds.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L^n}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\triangle(s)\,ds = 0,$$

тоді $\triangle(t) \geq 0$, тобто $\psi(t) - \alpha(t) \geq 0$. Отже, виконується (12). Лему 3 доведено.

Продовжимо доведення теореми. Використаємо нерівність (11), тобто

$$\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \leq L\int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\right\} ds,$$

$$\varphi(t) \equiv \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\}. \tag{15}$$

Якщо взяти $\alpha(t) \equiv 0$ в лемі 1 з $L > 0$, одержимо:

$$0 \le \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \le L \int_0^t \exp(-L(t-s))\, \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|\}\, ds.$$

Остання нерівність має місце при

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\right\} = 0. \tag{16}$$

Оскільки $x_1(t) - x_2(t)$є мартингалом [4], то з (16) випливає $\forall t \in [0,\ T]$

$$\mathbb{P}\{\omega : |x_1(t) - x_2(t)|\} = 1.$$

Отже, для довільної зліченної підмножини N відрізку $[0, T]$ виконується рівність

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \ \underset{t \in N}{sup} |x_1(t) - x_2(t)| \ = 0\right\} = 1.$$

Якщо N всюди щільне на $[0, T]$, то з неперервності майже напевно $x_1(t)$ та $x_1(t)$ випливає

$\mathbb{P}\left\{\omega : \ \ sup_{0 \le t \le T} |x_1(t) - x_2(t)| \ = 0\right\} = \mathbb{P}\{\omega : sup_{t?N} |x_1(t) - x_2(t)\ | = 0\} = 1$, що доводить теорему 1.

Зауваження 1. Неперервність $x_1(t)$ та $x_2(t)$ майже напевно, як сильних розв'язків задачі Коші (1), (2), наведемо нижче у теоремі 2.

4. Про існування сильного розв'язку задачі Коші з простору Скорохода. Нехай виконуються умови задачі (1), (2) (теорема 1).

Теорема 2. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ \ t \ge 0\}, \mathbb{P})$ *задана задача Коші* (1), (2), *для якої виконуються умови 1) — 6) теореми 1.*
Тоді:

A) розв'язок задачі (1), (2) $x(t)$ *майже напевно неперервний для довільного* $t \in [0, T]$ *та* $x(t)|_{t=0} = x(0)$.

B) $\sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}\ \left\{|x(t)|^2\right\} < \infty$.

Доведення. A) Покладемо $x_0(t) = x(0)$, тоді $(n+1)$-е та n-те наближення для розв'язку (4) задачі (1), (2) набувають вигляду

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s)\, a(s, x_n(s))\, ds + \int_0^t f_2(s)\, b(s, x_n(s))\, dw(s), \tag{17}$$

$$x_n(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s)\, a(s, x_{n-1}(s))\, ds + \int_0^t f_2(s)\, b(s, x_{n-1}(s))\, dw(s). \tag{18}$$

Віднімемо від $x_{n+1}(t)$ за рівністю (17) $x_n(t)$ за рівністю (18), піднесемо до квадрату та, обчислюючи математичне сподівання, одержимо

$$\mathbb{E}\left\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} = \mathbb{E}\{\int_0^t f_1(s)(a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))\}ds +$$

$$+ \int_0^t f_2(s)[b(s, x_n(s)) - b(s,\ x_{n-1}(s))\, dw(s)]^2 \le L \int_0^t \mathbb{E}\left\{|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\right\} ds, \tag{19}$$

де $L = 2K_1^2(TK_3 + \sqrt{K_1} \cdot K_1^2)$.

Інтеруючи нерівність (19) $n-1$ разів, одержимо оцінку з L вигляду

$$\mathbb{E}\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \leq L \int_0^t \frac{(t-s)}{(n-1)!} \mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\right\} ds,$$

де

$$\mathbb{E}\left\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\right\} = \mathbb{E}[\int_0^t f_1(s) a(s, x(0)) ds]^2 + \mathbb{E}\int_0^t f_2^2(s)\, b^2(s, x(0))\, ds.$$

Враховуючи умову (6) теореми 1, одержимо з вище записаної рівності

$$\mathbb{E}\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\} \leq LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\{|x(0)|^2\}).$$

Тому існує стала C така, що

$$\mathbb{E}\left\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} \leq C\frac{(LT)^n}{n!}, \tag{20}$$

де $C = LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\left\{|x(0)|^2\right\})$.

Уведемо простір $\mathbb{H}_2[0, T]$, як простір випадкових функцій $f(t, \omega)$, визначений для $\forall\ t \in [0,\ T]$ та при кожному $t \in [0, T]$ вимірних відносно $\mathcal{F}_t$ з імовірнісного базису $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}_t,\ \ t \geq 0\}, \mathbb{P})$, для яких

$$\mathbb{P}\left\{\omega :\ \int_0^T f^2(t) dt < C_1 < \infty\right\} = 1.$$

Лема 4. *Нехай* $f(t) \in \mathbb{H}_2\ [0, T]$ *та* $\int_0^T \mathbb{E}\left\{|f(t)|^2\right\} ds < \infty$.

Тоді майже напевно сепарабельний процес $\mathbb{I}(t, \omega) = \int_0^t f(s) dw(s)$*неперервний за* $t \in [0,\ T]$, *а також виконуються нерівності [4]*

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^T f(s)\, dw(s)\right| > a\right\} \leq \frac{1}{a^2}\int_0^T \mathbb{E}\left\{|f(t)|^2 dt\right\};$$

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t f(s)\, dw(s)\right|^2\right\} \leq 4\int_0^T \mathbb{E}\{|f(t)|\, dw\}.$$

Продовжимо доведення теореми 2. Зауважимо, що

$$\sup\nolimits_{t\in[0,T]} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| \quad \leq \int_0^T |a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))|\, ds +$$

$$+ \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))) dw(s)|.$$

Тоді слід використати нерівність Коші-Буняковського, лему 4, а також умову Ліпшиця, в результаті одержимо нерівність

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{t\in[0,T]} \ |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\right\} \leq 2T\int_0^t K_1^2 \mathbb{E}\left\{|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\right\} ds +$$

$$+8K_1^2\int_0^T \mathbb{E}\left\{\left|x_n\left(t\right)-x_{n-1}(t)\right|^2\right\}ds \leq \frac{C_1L^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!},$$

де $C_1 = K_1^2\left(2T+8\right)$.

Якщо зауважити, що збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{\omega : \sup_{t\in[0,T]}\left|x_{n-1}\left(t\right)-x_n\left(t\right)\right| > \frac{1}{n^2}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1L^{n-1}T^{n-1}}{(n-1)!}n^4,$$

тоді з цього факту випливає майже напевно рівномірна збіжність ряду

$$x_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left[x_{n+1}\left(t\right)-x_n\left(t\right)\right].$$

Сума цього ряду є майже напевно рівномірною границею $x_n(t)$, а це означає, що $x_n\left(t\right)$ збігається до деякого процесу $x\left(t\right)$ з імовірністю 1.

Якщо перейти до границі у рівності (18) при $n \to \infty$, то можна стверджувати, що $x\left(t\right)$ є розв'язком рівняння (1), при цьому $x\left(t\right)$ є вимірний відносно σ-алгебри $\mathfrak{F}_{t_0}$, $\mathfrak{F}_t$ є мінімальною σ-алгеброю, відносно якої вимірні $x\left(0\right)$, $w\left(s\right)$, $f\left(t\right)$, $j = 1, 2$, при $s \leq t$. Відносно цієї σ-алгебри вимірні всі $x_n\left(t\right)$, $f_j\left(t\right)$, $j = 1, 2$, а, отже, вимірна границя $\lim_{n\to\infty} x_n\left(t\right) = x\left(t\right)$.

Належність $x\left(t\right)$ простору $\mathbb{D}$ випливає з того, що $x\left(t\right)$ майже напевно є границею процесів з $\mathbb{D}$. Доведення твердження А завершено.

В) Очевидна нерівність

$$\mathbb{E}\left\{x_n^2\left(t\right)\right\} \leq 3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}+\mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t f_1\left(s\right)a\left(s,x_{n-1}\left(s\right)\right)ds\right]^2\right\}+$$

$$+\mathbb{E}\left\{\left[f_2\left(t\right)b\left(s,x_{n-1}\left(s\right)\right)dw\left(s\right)\right]^2\right\} \leq 3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}+3L\int_0^t \mathbb{E}\left\{x_{n-1}^2\left(s\right)\right\}ds. \quad (21)$$

Застосовуючи оцінку (21), одержимо

$$\mathbb{E}\left\{x_n^2\left(t\right)\right\} \leq 3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}+3\mathbb{E}\{x^2\left(0\right)3LT+(3L)^2\int_0^t\left(t-s\right)\mathbb{E}\left\{x_{n-2}^2(s)\right\}ds \leq$$

$$\leq 3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}+3L+3\mathbb{E}\left\{x^2\left(t\right)\right\}+3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}\frac{\left(3Lt\right)^2}{2}+\cdots \leq 3\mathbb{E}\left\{x^2\left(0\right)\right\}e^{3Lt}.$$

Якщо перейти до границі при $n \to \infty$, а потім обчислити sup по $t \in [0,T]$, тоді переконаємося в справедливості нерівності

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\{x^2(t)\} \leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\}e^{3LT}.$$

Теорема 2 повністю доведена.

5. Про існування парного моменту розв'язку задачі. Два вище доведених твердження дають достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку СДФРзЗЗ (1), (2) за заданими початковими умовами.

Теорема 3. *Нехай на ймовірнісному базисі* $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ \{\mathfrak{F}_t,\ \ t \geq 0\}, \mathbb{P})$ *задана задача* (1), (2), *для якої виконуються умови:*

1) *коефіцієнти* (1) *визначені та вимірні* $\forall t \in [0, T], \forall x \in (-\infty, \infty)$;

2) *для деякого* $\mathbb{K}_1 > 0$ *виконана нерівність* $|a(t, \ x_t)|^2 + |b(t, x_t)|^2 \leq K_1(1 + \|x_t\|)$;

3) *випадкові процеси* $f_j(t)$, $j = 1, \ 2$ *визначені та неперервні відносно* $\forall t \in [0, T]$;

4) *існують* $\mathbb{E}\{f_2^4(t)\} < K_3 < \infty$; $\mathbb{E}\{f_1^2(t)\} < K_2 < \infty$;

5) *для довільного* $N > 0$ *існує стала* $L_N > 0$, *що для* $\|x_t\| \leq N; \|y_t\| \leq N$ *виконується нерівність Ліпшиця* $|a(t, \ x_t) - a(t, y_t)| + \|b(t, x_t) - b(t, y_t)\| \leq L_N \|x_{t-} y_t\|$.

6) $\mathbb{E}\left\{x(0)^{2m}\right\} < \infty$, $m > 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

Тоді знайдеться стала C, *яка залежить лише від* m, K_j, $j = \overline{1, 3}$ *та* $T > 0$, *для якої справедлива нерівність*

$$\mathbb{E}\left\{|x(t)|^{2m}\right\} \leq \mathbb{E}\left\{\left[1 + (x(0))^{2m}\right] e^{Ct}\right\}. \tag{22}$$

Доведення. Покладемо $x_N(0) = x(0)$ для $\|x_0(0)\| \leq N$; $x_N(0) = N sign\ x(0)$ для $\|x(0)\| > N$; $a_n(t, x_t) = a(t, x_t)$ для $\|x_t\| \leq N$; $a_N(t, x_t) = a(t, N sign\ x_t)$ при $\|x_t\| > N, b_N(t, x_t) = b(t, x_t)$ для $\|x_t\| \leq N$; $b_N(t, x_t\ ) = b(t, N sign\ x_t)$ для $\|x_t\| > N$; $|f_j(t, w)| \leq N$.

Позначимо $x_N(t)$ через розв'язок рівняння

$$dx_N(t) = x_N(0) + a_N(t, \ x_{tN})\, dt + b_n(t, x_{tN}) dN(t) \tag{23}$$

за початковою умовою $x_{Nt}|_{t=0} = \varphi(\theta)$, $\quad -2 \leq \theta \leq 2$.

Для задачі Коші рівняння (23) виконуються умови теорем 1, 2, тому існує єдиний розв'язок майже напевно рівняння (23) за умовами A), B) теореми 2.

За формулою Іто [2], [13] маємо для цілого $m > 0$:

$$|x_N(t)|^{2m} = |x_N(0)|^{2m} + \int_0^t [f_1(s)\, 2m(x_N(s))^{2m-1} a_N(s, x_{sN}) +$$

$$+ m(2m-1)(x_N(s))^{2m-2} b_N^2(s, x_{sN})] ds + \int_0^t 2m(x_N(s))^{2m-1} b_N(s, x_{sN})\, dw(s). \tag{24}$$

Зауважимо, що справджується (23), для якого $\mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} < \infty$, де $a_N(t, x_t)$, $b_N(t, x_t)$ обмежені, тоді $\mathbb{E}\left\{[x_N(t)]^{2m}\right\} < \infty$.

Обчислимо математичне сподівання від (24), в результаті одержимо

$$\mathbb{E}\left\{[x_N(t)]^{2m}\right\} = \mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} +$$

$$+ \int_0^t \mathbb{E}\{[2m f_1(t)\, a_N(s, x_{sN})\, x_N^{2m-1}(s) + m(2m-1) f_2(t) b_N^2(s, x_{tN}(s))]\} \cdot$$

$$\cdot x_{sN}^{2m-1} ds \leq \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m} + (2m+1) m K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(1 + x_n^2(s)[x_N(s)]^{2m-2} ds\}.$$

Врахувавши нерівність $[x_N(s)]^{2m-2} \leq 1 + [x_N(s)]^{2m-1}$, матимемо нерівність

$$\mathbb{E}\{[x_N(t)]^{2m}\} \leq \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m}\} + (2m+1)mK^2 \int_0^t \left\{1 + 2\mathbb{E}\{[x_N(s)]^{2m}\}\right\} ds.$$

З леми 4 та останньої нерівності випливає нерівність

$$\mathbb{E}[x_N(t)]^{2m} \leq \mathbb{E}[x(0)]^{2m} + m(2m+1)K^2 t + 2m+$$

$$+K^2 \int_0^t e^{2m(2m+1)K^2(t-s)} \left[\mathbb{E}(x(0))^{2m} + sm(2m+1)K^2\right] ds\ . \tag{25}$$

Якщо вибрати $c = 2m(m+1)K^2$, тоді нерівність (22) випливає з (25). Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $f(t) \in H_2[0,T]$ *та при* $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^t \mathbb{E}\left\{f^{2m}(t)\right\} dt < \infty.$$

Тоді

$$\mathbb{E}[\int_0^T f(t,\omega)dw(t,\omega)]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1} T^{m-1} \int_0^T \mathbb{E}\left\{f^{2m}(t)\right\} dt. \tag{26}$$

Доведення. Якщо застосувати формулу Іто [2] до функції $\varphi(x) = x^{2m}$ (m — ціле невід'ємне число) та $\xi(t,\omega) \equiv \xi(t)$ має стохастичний диференціал $d\xi(t) = \xi(0) + f(t)\,dw(t)$, тоді

$$\left[\int_0^t f(s)dw(s)\right]^{2m} = 2m \int_0^t \left(\int_0^s f(z)\,dw(z)\right)^{2m-1} f(s)\,dw(s) + \frac{2m(2m-1)}{2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left[\int_0^s f(z)\,dw(z)\right]^{2m-2} f^2(s)\,ds.$$

Нехай $f(s) = f_n(s)$ — обмежена сталою та є простою функцією. Тоді легко бачити, що $\int_0^T \mathbb{E}\left(\int_0^s f_n(z)\,dw(z)\right) f_n^2(s)\,ds < \infty$.
Значить,

$$\mathbb{E}[\int_0^t f_n(s)dw(s)]^{2m} = \frac{2m(2m-1)}{2} \int_0^t \mathbb{E}\left[\int_0^s f_n(z)\,dw(z)\right]^{2m-1} f_n^2(s)\,ds. \tag{27}$$

Застосувавши до (27) нерівність Гельдера, матимемо

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(s)dw(s)]^{2m}$$

$$\leq \frac{2m(m-1)}{2} \left\{\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_0^t f_n(z)\,dw(z)\right]^{2m} dt\right\}^{\frac{2m-1}{2}} \cdot \left\{\int_0^T \mathbb{E} f_n^{2m}(s)\,ds\right\}^{\frac{2}{2m}};$$

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(t)dw(t)]^{2m} \leq$$

$$\leq \frac{2m\,(m-1)}{2}\left\{\int_0^T \mathbb{E}\left[\int_0^T f_n\,(s)\,dw\,(s)\right]^{2m} dt\right\}^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{\int_0^T \mathbb{E}f_n^{2m}\,(t)\,dt\right\}^{\frac{1}{m}}. \qquad (28)$$

Далі піднесемо до степеня m нерівність (28) та, скорочуючи дві частини одержаної нерівності на$\{\mathbb{E}[\int_0^T f_n(s)dw(s)]^{2m}\}^m$, одержимо нерівність

$$\mathbb{E}[\int_0^T f_n(t,\omega)dw(t,\omega)]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1}\int_0^T \mathbb{E}\left\{f_n^{2m}\,(t,\omega)\right\}dt.$$

Залишиться перейти до границі при $n \to \infty$ в останній нерівності, що дає нерівність (26) теореми 4. Доведення завершено.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді існує стала* $\overline{K} \equiv \overline{K}\,(m,\ K_1, K_2, K_3, T)$, *для якої* $\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq \overline{K}\left[\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right]e^{ct}t^m$.

Доведення. З інтегральної нерівності матимемо

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x\,(0)]^{2m} =$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\,ds + \int_0^t f_2\,(s,\omega)\,b\,(s,x\,(s))\,dw\,(s)\right]^{2m} \leq$$

$$\leq 2^{2m-1}\left\{\mathbb{E}\left[\int_0^t f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\,ds\right]^{2m} + \mathbb{E}\left[\int_0^t f_2(s,\omega)b(s,x(s))dw(s)\right]^{2m}\right\}.$$

Використаємо нерівність Гельдера та теорему 4. В результаті матимемо

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq 2^{2m-1}\left[t^{2m-1}\int_0^t \mathbb{E}\left[f_1\,(s,\omega)\,a\,(s,x\,(s))\right]\right]^{2m} ds+$$

$$+t^{m-1}[m(2m-1)]^m\mathbb{E}\int_0^t f_2^{2m}\,(s,\omega)\ \ b^{2m}(s,x(s))ds$$

Значить, існує стала $\overline{K}$, що

$$\mathbb{E}[x\,(t)-x(0)]^{2m} \leq \overline{K}t^{m-1}\int_0^t \mathbb{E}(1+x^2(s))^m ds \leq$$

$$\leq \overline{K}t^{m-1}\int_0^t \left[2^{m-1}+2^{m-1}\mathbb{E}x^{2m}\,(s)\right]ds \leq 2^{m-1}\overline{K}t^{m-1}\times$$

$$\times\int_0^t \left[1+\left(1+\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right)e^{cs}\right]ds = 2^m\overline{K}t^m + 2^{m-1}t^m\overline{K}\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\frac{e^{ct}+1}{ct} \leq$$

$$\leq 2^m\overline{K}t^m\left[1+\mathbb{E}[x\,(0)]^{2m}\right]e^{ct}.$$

В останній нерівності застосували очевидне співвідношення $\frac{e^x-1}{x} \leq e^x$ для $x>0$. Теорема 5 доведена.

Висновки. У роботі одержано достатні умови існування майже напевно сильного розв'язку дифузійного стохастичного рівняння зі скінченною післядією під дією зовнішніх випадкових процесів довільної природи, а також знайдені достатні умови існування парних моментів таких рівнянь.

Список використаної літератури

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их применения.— Киев: Наукова думка,1982.— 612 с.
2. *Ито К., Нисио М.* Стационарные решения стохастического дифференциального уравнения // Математика: Сб перев. иностр. ст.— 1967.— Т.11, № 5.— С.117—170.
3. *Королюк В. С., Королюк В. В.* Стохастические модели систем.— Киев: Наук. думка, 1989.— 208 с.
4. *Свердан М. Л., Царков Є. Ф., Ясинський В. К.* Стохастичні динамічні системи Іто-Скорохода зі скінченною післядією.— Чернівці: Зелена Буковина, 2000.— 560 с.
5. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов.— К.:Изд-во Киевского ун-та, 1961.— 216 с.
6. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.– Киев: Наук.думка, 1987.— 328 с.
7. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функционалных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
8. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 328 с.
9. *Ясинський В. К.* Сучасна теорія випадкових процесів.— Чернівці: Видавничий дім «Родовід». 2014.— 292 с.
10. *Ясинський В. К., Комар А. В.* Стійкість диференціально-функціональних рівнянь з марковськими параметрами // Нелинейые краевые задачи математической физики и их приложения. Сб.научн.тр.— Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 1995.— С.296—299.
11. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.– М.: Наука, 1969.– 367 с.
12. *Ясинський В.К., Ясинський Є.В.* Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією.— Київ: Вид-во «ТВіМС», 2005.— 580 с.
13. *Ito K.* Nagaya Math. I.1951, Vol.- P.55-65 (Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. переводов)).—1959.— Т.3, В.5.—С.131-141.
14. *Koroljuk V. S.* Stability of Stochastic systems in diffusion approximation Scheme// Укр. мат. журн.— 1998.— Т.50, №1.— С.36—47.
15. *Tsarkov Ye., Yasinski V.* The second Lyapunov Method for Stochastic Functional Differentional Equations with Poisson Disturbance // Random Operators and Stochastic Equations.— 1997.— Vol.4.— P.47.—58.

Одержано 18.03.2017

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

1) Стаття повинна містити короткий вступ, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
2) Рукопис повинен бути надрукований за допомогою комп'ютера на аркушах формату A4 (з одного боку). Об'єм статті не повинен перевищувати 15 сторінок.
3) Рукопис подається у двох екземплярах, а також електронною копією у вигляді LaTeX-файлу (див. пункт 4). Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською. Перша сторінка оформляється таким чином:
   УДК №
   Ініціали, прізвище автора, офіційна назва установи, де працює автор
   Назва роботи
   Текст анотації англійською мовою.
   Текст анотації українською мовою.
   Текст статті.
4) Вимоги до набору:
   а) програма набору — LaTeX2ε;
   б) стильовий файл набору — Uzhgorod-Mathematical-Paper-2017.cls (його можна одержати електронною поштою; звертатись у редколегію журналу за адресою `f-mat@uzhnu.edu.ua`)
   в) обов'язковий аргумент команд \label{...} і \cite{...} повинен містити прізвище першого автора статті латиницею (наприклад \label{IvanenkoEqaution1}).
5) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
6) Використана література подається загальним списком (у порядку посилань на джерела в тексті статті). Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

References

1. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
2. *Іванчук І. І.* Назва // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №2. – С. 274–278.
3. *Петравчук П. П., Іванчук І. І.* Назва // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. №1 (30). – С. 94–109.
4. *Можаев В. М.* Название. – М., 1981. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №8884.
5. *Карпенко С. М.* Назва // Чисельні методи і застосування: Тез. допов. конф. (Київ, 27 серп.–2 вер. 1997 р.). – Київ, 1997. – С. 21–22.

7) Рукопис слід старанно вичитати.
8) Рукописи, оформлені без дотримання зазначених правил, розглядатися редакцією не будуть.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №1 (30)

2017

Адреса редакційної колегії: 88020, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат математичного факультету УжНУ: редакція збірника наукових праць
«Науковий вісник Ужгородського університету»,
серія «математика і інформатика».
Тел. +380 (312) 642725
E-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua