МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

Ужгород 2017

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. матем. і інформ. / Редкол.: В. В. Маринець (гол. ред.) та інші. – Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2017. – випуск №2 (31). – 145 с.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Рекомендовано до друку Вченою радою ДВНЗ «Ужгородський національний університет», протокол № 15 від 21.12.2017 р.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія КВ №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.
Засновник і видавець – Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет».
Виходить два рази на рік.
Збірник наукових праць видається з 1994 року.

Адреса редакційної колегії: Україна, 88020 Ужгород, вул. Університетська, 14, математичний факультет УжНУ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Issue no 2 (31)

Uzhhorod 2017

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: V. Marynets (Chief edit.) and others. – Uzhhorod: Scientific Bulletin of UzhNU «Hoverla», 2017. – Issue no 2 (31). – 145 p.

EDITORIAL

Recommended for publication by the Scientific Council of UzhNU, record no 15 dated by December 21, 2017.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.
Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".
Published twice a year.
The collection of scientific articles has been published since 1994.

Address of publishing house: Mathematical faculty "UzhNU", Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88020, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

CONTENTS

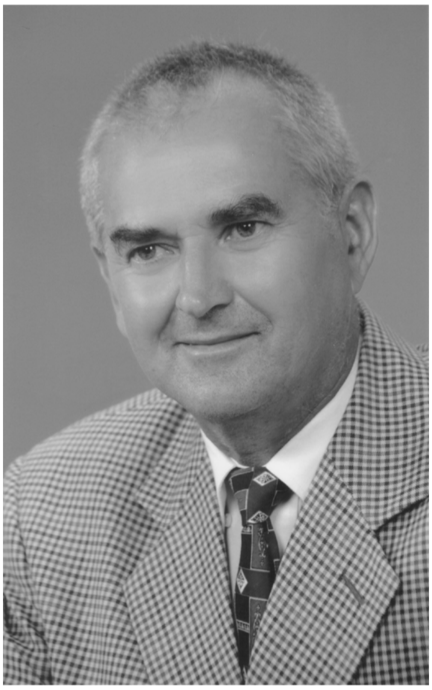
УДК 512

В. В. Маринець (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

МІКЛОШ ЙОСИПОВИЧ РОНТО — ДО 75-ТИ РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ

It is given a short scientific biography of Professor Miclos Ronto.

У статті приводиться коротка наукова біографія професора Міклоша Йосиповича Ронто.



Міклош Йосипович Ронто

31 березня 2018 року виповниться красивих 75 років визначному українському та угорському математику, доктору фізико-математичних наук, професору. Відомий вчений в області звичайних диференціальних рівнянь М.Й.Ронто народився 31 березня 1943 року в м. Берегові Закарпатської області. В 1959 році зі срібною медаллю закінчив Берегівську середню школу № 2. Після п'яти років навчання на фізико-математичному факультеті Ужгородського державного університету отримав диплом з відзнакою зі спеціальності «Математик. Математик-обчислювач.» Служив в лавах Збройних сил, після чого за направленням працював в Інституті кібернетики АН УРСР (1965 – 1971). З 1969 року був аспірантом заочної форми навчання в Інституті математики АН УРСР, де в 1971 році під керівництвом доктора фіз.-мат.наук А.М.Самойленка захистив кандидатську дисертацію на тему: «Отыскание периодических решений методом коллокации». З 1971 по 1989 рік М.Й.Ронто працював на посадах молодшого, старшого та провідного наукового співробітника в Інституті електродинаміки АН УРСР та Інституті проблем моделювання в енергетиці АН УРСР. У 1986 році Микола Йосипович захищає дисертацію «Конструктивные

численно-аналитические методы исследования решений краевых задач» на здобуття наукового ступеня доктора фіз.-мат.наук зі спеціальності «Диференціальні рівняння та математична фізика». У 1989–1992 рр. завідував лабораторією наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь в Інституті математики АН УРСР. Основною сферою наукових інтересів проф.Ронто М.Й. є теорія крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Ним розроблено нові конструктивні модифікації чисельно-аналітичного методу академіка А.М.Самойленка, що дозволяють ефективно досліджувати умови розв'язності широких класів нелінійних крайових задач, а також наближено знаходити розв'язки з наперед заданою точністю. Він є автором більше ніж 250 наукових робіт за вказаною тематикою, серед них 3 російсько- та 2 англомовні монографії.

У 1996 році як співавтор циклу робіт «Нові математичні методи нелінійного аналізу» в складі авторського колективу Микола Йосипович одержав Державну Премію України в галузі науки і техніки.

Свою наукову діяльність він уміло поєднував з педагогічною роботою. Так, із 1986 р. по 1992р. Микола Йосипович працював за сумісництвом на посаді професора кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь Київського національного університету, де читав оригінальні спеціальні курси, тематика яких присвячена новим конструктивним методам розв'язання нелінійних крайових задач.

Проф. М.Й.Ронто завжди був активним учасником в організації та роботі багаточисленних міжнародних наукових конференцій. Як визнаного вченого його запрошено до роботи ряду редакційних колегій провідних наукових видань. Зокрема,з 2001 року він є членом редакційної колегії міжнародного журналу «Нелінійні коливання», Наукового Вісника Ужгородського університету, серія «Математика і інформатика».

Проф. Ронто Міклош велику увагу звертав на підготовку науково-педагогічних кадрів. Під його керівництвом понад 10 пошукачів успішно захистили кандидатські дисертації, один з яких згодом став доктором фіз.-мат. наук. У 1992 році Микола Йосипович був запрошений на посаду професора кафедри аналізу Мішкольцського університету (Угорщина), а в 1997 році обирається завідувачем цієї кафедри. За час роботи в Мішкольцському університеті ним підготовлено та видано угорською мовою два підручники з курсу диференціальних рівнянь. У 2000 році він започаткував серію робочих наукових форумів з теорії крайових задач, які проводяться на базі Мішкольцського університету. У цьому ж році ним засновано міжнародний математичний журнал «Miskolc Mathematical Notes», головним редактором якого є по сьогоднішній день. За визначні успіхи в науковій роботі та в підготовці науково-педагогічних кадрів в Угорщині у 1997 році він одержав Премію «Szechenuyi Professzori Osztondiij», у 2003р. став лауреатом Премії «Charles'a Simonyi», а у 2007 році отримав академічну відзнаку «MTA-MAB Kitunteto Tudomanyos dij».

За весь час своєї трудової науково-педагогічної діяльності він постійно підтримував тісні зв'язки зі своєю альма-матер – Ужгородським національним університетом, зокрема, математичним факультетом. Для математичного факультету УжНУ ним підготовлено чотири кандидати фізико-математичних наук. Він більше десяти років очолював ДЕК на математичному та угорському природничо-гуманітарному факультетах УЖНУ.

Визнаючи вагомі наукові здобутки в теорії диференціальних рівнянь та підготовці науково-педагогічних кадрів для математичного факультету, Вчена рада УжНУ в 2003 році присвоїла проф. Ронто Миколі Йосиповичу почесне звання DOCTOR HONORIS CAUSA.

Дорогий Микола Йосипович! З нагоди Вашого славного ювілею колектив математичного факультету УжНУ щиросердечно вітає Вас, професора-емерітуса кафедри аналізу Мішкольцського університету, сповненого сил, енергії та творчих задумів, і бажає Вам міцного здоров'я, подальших наукових звершень, талановитих та вдячних учнів і довгих років життя.

Многая Вам і благая літ!

Одержано 17.12.2017

УДК 519.21

Н. С. Аюбова (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАНЬ

Consistent estimation of the Hurst parameter of tne Fractional Brownian Motion by observations with errors is found.

Отримана консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

1. Вступ. Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$ з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}), t, s \in \mathbb{R}$$

називається випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста $H \in (0,1)$.

Задача статистичного оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху виникла у сучасних моделях гідромеханіки, метеорології, актуарної та фінансової математики і досліджувалася багатьма авторами. У статтях [1]–[3] для оцінювання параметра Хюрста були застосовані бакстерівські суми. На відміну від інших методів, метод бакстерівських сум дозволяє отримувати неасимптотичні довірчі інтервали. Теореми Леві–Бакстера забезпечують консистентність відповідних оцінок. Монографія Пракаса Рао [4] містить підрозділ, в якому розглянуто оцінювання параметрів методом бакстерівських сум.

Останнім часом зріс інтерес до задач оцінювання невідомих параметрів у моделях з похибками у спостереженнях. Так, у монографії [5] досліджені моделі регресії з похибками вимірювання. Робота [6] присвячена оцінці параметра в моделі з похибками.

У цій статті отримана консистентна оцінка параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

2. Постановка задачі оцінювання. Нехай $0 < a < 1$, a — фіксоване. Випадковий процес $\xi_H(t), t \geq 0$ спостерігається у моменти часу $k \cdot a$, $k \geq 0$ похибками δ_k, $k \geq 0$. Далі припускаємо, що (δ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених гауссових випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсією σ^2. Послідовність випадкових величин (δ_k) незалежна від дробового броунівського руху $\xi_H(t), t \geq 0$.

За спостереженнями випадкових величин $\eta_{H,k} = \xi_H(ak) + \delta_k$, $k \geq 0$ потрібно побудувати оцінку параметра Хюрста H.

Покладемо $\xi_k = \xi_{k,H} = \eta_{k+1,H} - \eta_{k,H}$, $0 \leq k \leq n$.

3. Основний результат.

Лема 1. $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$ — *стаціонарна гауссова випадкова послідовність з нульовим математичним сподіванням.*

Доведення. Для $k, j \in \mathbb{Z}$ обчислимо

$$E\xi_k\xi_j = E(\eta_{k+1} - \eta_k)(\eta_{j+1} - \eta_j) =$$

$$= E(\xi_H(a(k+1)) + \delta_{k+1} - \xi_H(ak) - \delta_k)(\xi_H(a(j+1)) + \delta_{j+1} - \xi_H(aj) - \delta_j).$$

Маємо

$$E(\delta_{k+1} - \delta_k)(\delta_{j+1} - \delta_j) = \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j; \end{cases}$$

$$E(\xi_H(a(k+1)) - \xi_H(ak))(\xi_H(a(j+1)) - \xi_H(aj)) =$$

$$= \frac{1}{2}(|a(k+1)|^{2H} + |a(j+1)|^{2H} - |a(k-j)|^{2H} - |a(k+1)|^{2H} - |aj|^{2H} +$$

$$+ |a(k+1-j)|^{2H} - |ak|^{2H} - |a(j+1)|^{2H} + |a(k-1-j)|^{2H} + |ak|^{2H} + |aj|^{2H} -$$

$$- |a(k-j)|^{2H}) = \frac{1}{2}(|a(k-j+1)|^{2H} - 2|a(k-j)|^{2H} + |a(k-j-1)|^{2H}).$$

Таким чином

$$E\xi_k\xi_j = \frac{|a|^{2H}}{2}(|k-j+1|^{2H} - 2|k-j|^{2H} + |k-j-1|^{2H}) +$$

$$+ \begin{cases} 0, & |k-j| \geq 2; \\ -\sigma^2, & |k-j| = 1; \\ 2\sigma^2, & k = j. \end{cases} \tag{1}$$

Отже, $E\xi_k\xi_j$ залежить лише від $k - j$. Лема доведена.

З формули (1) при $k = j$ маємо

$$E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2, H \in (0,1).$$

Позначимо $\kappa(H) = E\xi_{k,H}^2 = a^{2H} + 2\sigma^2$, $H \in (0,1)$.

Функція $\kappa(H), H \in (0,1)$ неперервна і спадна на $(0,1)$ з множиною значень $(a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$.

Функція

$$H = \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), y \in (a^2 + 2\sigma^2, 1 + 2\sigma^2)$$

— обернена до функції $\kappa(H)$.

Покладемо

$$\beta(y) = \begin{cases} 0, & y \geq 1 + 2\sigma^2; \\ \frac{1}{2}\log_a(y - 2\sigma^2), & y \in (2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2); \\ 1, & y \leq a^2 + 2\sigma^2; \end{cases}$$

$$S_n = S_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{k,H}^2, n \geq 1.$$

Теорема 1. *Для довільного* $H \in (0,1)$

$$S_n = S_{n,H} \to \kappa(H)$$

за ймовірністю при $n \to \infty$.

Доведення. Доведемо, що для довільного $H \in (0,1)$ дисперсія $VarS_{n,H} \to \to 0$, при $n \to \infty$. Тоді $S_n - ES_n \to 0$ у середньому квадратичному при $n \to \infty$ а, отже, і за ймовірністю.

Внаслідок стаціонарності гауссової випадкової послідовності $(\xi_k, k \in \mathbb{Z})$,

$$ES_n = ES_{n,H} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(\xi_{k,H}^2) = \kappa(H).$$

Знайдемо дисперсію випадкової величини $S_{n,H}$:

$$VarS_{n,H} = E(S_{n,H} - ES_{n,H})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}^2\xi_{j,H}^2) - E\eta_{k,H}^2 E\eta_{j,H}^2)).$$

Для математичного сподівання добутку випадкових величин $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, що мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням, має місце формула Іссерліса [7]:

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E\eta_1\eta_2 E\eta_3\eta_4 + E\eta_1\eta_3 E\eta_2\eta_4 + E\eta_1\eta_4 E\eta_2\eta_3.$$

У цій формулі покладемо $\eta_1 = \eta_2 = \xi_{k,H}$,$\eta_3 = \eta_4 = \xi_{j,H}$ і отримаємо:

$$VarS_{n,H} = \frac{2}{n^2}\sum_{k,j=1}^{n}(E(\xi_{k,H}\xi_{j,H}))^2 = \frac{2}{n^2}n\kappa^2(H) + \frac{4}{n^2}\sum_{k,j=1,k<j}^{n} E(\xi_{k,H}\xi_{j,H})^2 =$$

$$= \frac{2\kappa^2(H)}{n} + \frac{4}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}(n-l)(E\xi_{0,H}\xi_{l,H})^2,$$

де $l = j - k$.

Маємо

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(l)a) - \delta_l).$$

При $l = 1$ одержимо

$$E\xi_{0,H}\xi_{1,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H(2a) - \xi_H(a) + \delta_2 - \delta_1) =$$

$$= E\xi_H(a)(\xi_H(2a) - \xi_H(a)) + E(\delta_1 - \delta_0)(\delta_2 - \delta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}(a^{2H} + (2a)^{2H} - a^{2H} - a^{2H}) - \sigma^2 = \frac{a^{2H}}{2}(2^{2H} - 1) - \sigma^2.$$

При $l > 1$

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H} = E(\xi_H(a) + \delta_1 - \delta_0)(\xi_H((l+1)a) + \delta_{l+1} - \xi_H(la) + \delta_l).$$

Оскільки $E(\delta_1-\delta_0)(\delta_{l+1}-\delta_l)=0$ при $l>1$, то

$$E\xi_{0,H}\xi_{l,H}=E\xi_H(a)(\xi_H((l+1)a)-\xi_H(la))=$$

$$=\frac{a^{2H}}{2}(1+(l+1)^{2H}-l^{2H}-1-l^{2H}+(l-1)^{2H})=$$

$$\frac{a^{2H}}{2}((l+1)^{2H}-2l^{2H}+(l-1)^{2H}).$$

Таким чином,

$$VarS_{n,H}=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\Big((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2+$$

$$+\sum_{l=2}^{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\Big).$$

Позначимо

$$A_n=\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n^2}\left((n-1)\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2\right)$$

і оцінимо цей вираз:

$$A_n\le\frac{2k^2(H)}{n}+\frac{4}{n}\left(\frac{a^{2H}}{2}(2^{2H}-1)-\sigma^2\right)^2.$$

Очевидно, для довільного $H\in(0,1)$ $A_n\to 0, n\to\infty$.
Позначимо

$$B_n=\frac{4}{n^2}\left(\sum_{l=2}^{n-1}\left(\frac{a^{2H}}{2}\right)^2(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\right)=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n^2}\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$=\frac{a^{4H}}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2\le$$

$$\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2,$$

так як $a^{4H}\le 1$.

Розглянемо функцію $f(x)=x^{2H}$. Вираз $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}$ є приростом другого порядку функції f на відрізку $[l-1,l+1]$.

Тому $(l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H}=f''(\theta_{l+1})\cdot 1^2$, де $\theta_l\in(l-1,l+1)$. Тоді

$$B_n\le\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)((l-1)^{2H}-2l^{2H}+(l+1)^{2H})^2=$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(\frac{2H(2H-1)}{\theta_l^{2-2H}}\right)^2 \le \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{(2H(2H-1))^2}{(l-1)^{4-4H}} \le$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{l=2}^{n-1}\frac{4}{(l-1)^{4-4H}} \le \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k^{4-4H}} \le \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\int_1^n \frac{dx}{x^{4-4H}}, & H\in[\frac{3}{4},1);\end{cases}$$

$$\le \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

де $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — дзета–функція Рімана.

Остаточно

$$VarS_{n,H} \le A_n + \frac{4}{n}\begin{cases}\zeta(4-4H), & H\in(0,\frac{3}{4});\\ 1+\ln n, & H=\frac{3}{4};\\ 1+\frac{n^{4H-3}}{4H-3}, & H\in(\frac{3}{4},1).\end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного $H\in(0,1) : VarS_n \longrightarrow 0, n\longrightarrow\infty$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Неважко бачити, що для будь-якого* $H\in(0,1)$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} VarS_{2^n,H}$ *збіжний, звідки слідує, що* $S_{2^n,H}\longrightarrow\kappa(H)$ *з ймовірністю* 1 *при* $n\longrightarrow\infty$ *[8].*

Із теореми 1 випливає наступна теорема.

Теорема 2. *Статистика*

$$\Theta_n=\beta(S_n), n\ge 1$$

— консистентна оцінка параметра Хюрста H *дробового броунівського руху. При цьому статистика* $\tilde{\Theta}_n=\beta(S_{2^n}), n\ge 1$ *— строго консистентна оцінка цього параметра.*

Список використаної літератури

1. *Kurchenko O. O.* Confidence intervals and rate of convergence for the estimates of Hurst parameter of FBM // Theory Stoch. Process. – 2002. – Vol. 8(24). – P. 242–248.
2. *Курченко О. О.* Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2002. Вип. 67. – С. 88–96.
3. *Breton J. C., Nourdin I., Peccati G.* Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – 2009. – Vol. 3. – P. 416–425.
4. *Prakasa Rao B. L. S.* Statistical Inference for Fractional Diffusion Processes. – Chichester: John Wiley and Sons., 2010. – 280 p.
5. *Кукуш О. Г., Ліхтарьов І. А., Масюк С. В., Чепурний М. І., Шкляр С. В.* Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків. – К.: ДІА., 2015. – 288 с.
6. *Synyavska O. O.* Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error // Theory Stoch. Process. – 2016. – Vol. 21(37). – P. 84–90.
7. *Isserlis L.* On a formula for the product–moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables // Biometrika. – 1918. – Vol. 12. – P. 134–139.
8. *Ламперти Дж.* Случайные процессы. – К.: Вища школа, 1983. – 227 с.

Одержано 06.10.2017

УДК 519.74

В. Ф. Баранник (Ужгородський нац. ун-т)

ТЕНЗОРНІ ДОБУТКИ НЕЗВІДНИХ ПРОЕКТИВНИХ ЦІЛОЧИСЛОВИХ 2-АДИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЦИКЛІЧНОЇ 2-ГРУПИ

The paper deals with a subalgebra of the algebra of projective integer 2-adic images of a cyclic 2-group, generated by irreducible projective integers of 2-adic representations.

В роботі вивчається підалгебра алгебри проективних цілочислових 2-адичних зображень циклічної 2-групи, породжена незвідними проективними цілочисловими 2-адичними зображеннями.

Нехай G – скінченна група, e — одиничний елемент G, K — комутативне кільце з одиницею, K^* — мультиплікативна група кільця K, $GL(n,K)$ — група всіх оборотних матриць порядку n над K і E — одинична матриця порядку n. Проективним зображенням групи G степеня n над K називається відображення Γ групи G в групу $GL(n,K)$, яке задовольняє умови: $\Gamma(e)=E$, $\Gamma(a)\Gamma(b)=\lambda_{a,b}\Gamma(ab)$ $(\lambda_{a,b}\in K^*; a,b\in G)$. Відображення $\lambda : G\times G\to K^*$, $\lambda : (a,b)\to\lambda_{a,b}$ називається системою K^*-факторів групи G. Якщо λ, μ — система K^*-факторів групи G, то відображення $\lambda\times\mu : G\times G\to K^*$, $(\lambda\times\mu)(a,b)=\lambda_{a,b}\cdot\mu_{a,b}$ називається добутком систем факторів λ і μ. Два проективні зображення Γ_1 і Γ_2 називаються еквівалентними, якщо існує така матриця $S\in GL(n,K)$ і такі елементи $\alpha_g\in K^*$, що $S^{-1}\Gamma_1(g)S=\alpha_g\Gamma_2(g)$ $(g\in G)$.

Нехай $K=\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих раціональних p-адичних чисел. Кожному класу еквівалентних над $\mathbb{Z}_p$ нерозкладних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G поставимо у відповідність символ $[\Gamma]$ (Γ — нерозкладне проективне $\mathbb{Z}_p$-зображення групи G). Позначимо через $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ Q-модуль (Q — поле раціональних чисел) з базисом $W'=\{[\Gamma_i]\}$, де $W=\{\Gamma_i\}$ — множина всіх попарно нееквівалентних нерозкладних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Введемо наступним чином в $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ операцію множення. Нехай $\Gamma_i,\Gamma_j\in W$. Очевидно, відображення $\Gamma : g\to\Gamma_i(g)\otimes\Gamma_j(g)$ $(g\in G)$ є проективним $\mathbb{Z}_p$-зображенням групи G. Зображення Γ $\mathbb{Z}_p$-еквівалентне зображенню $\Gamma' : g\to \mathrm{diag}[\Gamma_{r_1}(g),\ldots,\Gamma_{r_m}(g)]$ $(g\in G)$, де $\Gamma_{r_t}\in W$ $(t=1,\ldots,m)$. Задамо добуток $[\Gamma_i]$, $[\Gamma_j]$ наступним чином:

$$[\Gamma_i][\Gamma_j]=[\Gamma_{r_1}]+\cdots+[\Gamma_{r_m}]. \tag{1}$$

Нехай $(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)$ — схрещене групове кільце групи G і кільця $\mathbb{Z}_p$ при системі факторів $\lambda_{a,b}$, $\lambda_{a,b}\in\mathbb{Z}_p^*$; $a,b\in G$. Враховуючи, що для $(G,\mathbb{Z}_p,\lambda)$-модулів справедлива теорема Крулля–Шмідта (див. [1]), легко показати, що означення (1) коректне. Таким чином, ми одержали, що $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$ є алгеброю над Q.

Нехай $V=\{\Delta_i\}$ — множина всіх незвідних проективних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Позначимо через $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$ підалгебру алгебри $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$, породжену множиною $V'=\{[\Delta_i]\}$. Нехай $A(\mathbb{Z}_pG)$ – підалгебра алгебри $A_1(G,\mathbb{Z}_p)$, породжена множиною $\{[\Gamma_i']\}$, де $\{\Gamma_i'\}$ — множина всіх нерозкладних лінійних $\mathbb{Z}_p$-зображень групи G. Аналогічно вводиться підалгебра $B(\mathbb{Z}_pG)$ алгебри $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$.

Алгебри $A(RG)$ і $A_1(G,R)$, де R — кільце всіх цілих величин скінченного розширення поля раціональних p-адичних чисел Q_p, вивчалися в [2–7]. В роботах [2–7] розв'язана задача про напівпростоту (в розумінні Джекобсона) алгебр $A(RG)$ і $A_1(G,R)$. Питання про напівпростоту алгебри $B(\mathbb{Z}_pG)$ розв'язане в [8–10]. Алгебра $B_1(G,\mathbb{Z}_p)$, де G — циклічна група порядку p^n $(p\neq 2)$, $\mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел, вивчалася в [11]. Питання про напівпростоту алгебри $B_1(G,R)$, де R — кільце всіх цілих величин скінченного нерозгалуженого розширення F поля раціональних p-адичних чисел Q_p $(p\neq 2)$, розв'язане в [12].

В даній роботі вивчається питання про скінченновимірність та напівпростоту алгебри $B_1(H,\mathbb{Z}_2)$, де H — циклічна група порядку 2^n, $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел.

Нехай $K=\mathbb{Z}_2[x]$, де $\mathbb{Z}_2$ — кільце цілих 2-адичних чисел, $\alpha=\pm 1$, $t\in\mathbb{Z}$, де $\mathbb{Z}$ — кільце цілих раціональних чисел. Покладемо $\Gamma(n,t,\alpha)=K/<x^{2^n}-\alpha\cdot 5^t>$.

K-модулі $\Gamma(n,t,\alpha)$, $\Gamma(n',t',\alpha')$ ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $n=n'$, $\alpha=\alpha'$, $t\equiv t'(\mathrm{mod}\ 2^n)$. В дальнійшому будемо вважати, що в $\Gamma(n,t,\alpha)$ $t\in\mathbb{Z}_{2^n}=\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Очевидно, K-модуль $\Gamma(n,t,\alpha)$ незвідний тоді і тільки тоді, коли $\alpha=-1$ або $t\in\mathbb{Z}^*_{2^n}$, де $\mathbb{Z}^*_{2^n}$ — мультиплікативна група кільця $\mathbb{Z}_{2^n}$.

Нехай $u_e,u_a,\ldots,u_a^{2^n-1}$ — $\mathbb{Z}_2$-базис схрещеного групового кільця $\Lambda=(H,\mathbb{Z}_2,\lambda)$, де $u_a^{2^n}=\gamma^{2^k}u_e$ $(\gamma=5^s, s\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2), s\cdot 2^k<2^n)$. Для $0\le m<2^{n-k-1}$ введемо в розгляд K-підмодулі в K-модулі $\Gamma(n-k,t,1)$:

$$\Gamma_m(n-k,t)=(x-1)^m\Gamma(n-k,t,1)+2\Gamma(n-k,t,1).$$

Якщо $t\in\mathbb{Z}^*_{2^n}$, то K-модуль $\Gamma(n-k,t,1)$ незвідний, $\Gamma_m(n-k,t,1)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t,1)$, $\Gamma_0(n-k,t,1)\cong\Gamma_{2^{n-k}}(n-k,t,1)\cong\Gamma(n-k,t,1)$. Модулі $\Gamma_m(n-k,t)$ $(0\le m<2^{n-k-1})$ попарно неізоморфні.

Якщо $t\in\mathbb{Z}_{2^n}$, то K-модулі $\Gamma_m(n-k,t,1)$ звідні, але нерозкладні, за винятком випадку $m=2^{n-k-1}-1$:

$$\Gamma_{2^{n-k-1}-1}\cong\Gamma\left(n-k-1,\frac{t}{2},1\right)\oplus\Gamma\left(n-k-1,\frac{t}{2},-1\right).$$

Для K-модуля M через $\overline{M}$ будемо позначати K-модуль $\overline{M}=M/2M$. Тоді $\overline{M}$-модуль над полем $\overline{\mathbb{Z}}_2$ з двох елементів, в якому діє лінійний оператор x.

Нехай $V_m=\overline{\mathbb{Z}}_2[x]\,/\,\langle(x-1)^m\rangle$. Очевидно,

$$\overline{\Gamma}(n-k,t,\alpha)=V_{2^{n-k}},$$
$$\overline{\Gamma}_m(n-k,t)=V_{m+1}\oplus V_{2^{n-k}-m-1}.$$

Мають місце наступні точні послідовності K-модулів:

$$0\to 2\Gamma(n-k,t,\alpha)\to\Gamma(n-k,t,\alpha)\to V_{2^{n-k}}\to 0,$$
$$0\to 2\Gamma_m(n-k,t)\to\Gamma(n-k,t,1)\to V_m\to 0\ \ (0\le m<2^{n-k-1}).$$

Лема [13]. Нехай $1\le r\le m\le 2^n$ і

$$V_r\otimes V_m\cong V_{\alpha_1}\oplus\ldots\oplus V_{\alpha_r}\ \ (1\le\alpha_1\le\ldots\le\alpha_r\le 2^n).$$

Тоді

$$V_r\otimes(V_m\oplus V_{2^n-m})\cong(V_{\alpha_1}\oplus V_{2^n-\alpha_1})\oplus\ldots\oplus(V_{\alpha_r}\oplus V_{2^n-\alpha_r}).$$

Має місце точна послідовність K-модулів

$$0 \to \Gamma(n-k-1,t,\alpha) \to \Gamma(n-k,2t,1) \to \Gamma(n-k,t,-\alpha) \to 0.$$

Якщо $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\alpha = \pm 1$, $\alpha' = \mp 1$, то

$$\Gamma(n-k,t,\alpha) \oplus \Gamma(n-k',t',\alpha') \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', \alpha\alpha').$$

Очевидно,

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma(n-k,t',\alpha) \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k,t+t',\alpha).$$

Лема 1. *Нехай* $1 \leq r \leq m \leq 2^{n-k-1}$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k,t') \cong \sum_{i=1}^{l} \left(\Gamma_{\alpha_i}(n-k,t+t') \oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k,t+t')\right) +$$

$$+ \left(2^{n-k}-2l\right)\Gamma(n-k,t+t',1) \quad \left(V_r \oplus V_m \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}\right).$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \to \Gamma(n-k,t,1) \to V_m \to 0.$$

Помножимо дану послідовність тензорно на $\Gamma_r(n-k,t)$:

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k,t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k,t+t',1) \to V_m \otimes (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k}-r-1}) \to 0. \quad (2)$$

Точну послідовність (2) можна записати у вигляді

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k,t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k,t+t',1) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0, \quad (3)$$

де $V_{r+1} \otimes V_m \cong \oplus \sum\limits_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}$.

Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \sum_{i=1}^{l} \left(\Gamma_{\alpha_i}(n-k,t+t')\right) \otimes \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k,t+t') \to$$

$$\to 2l\Gamma(n-k,t+t',1) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_i \oplus V_{2^{n-k}-i}) \to 0. \quad (4)$$

З (2) і (3) випливає, що

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k,t') \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1) \oplus$$

$$\oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k,t+t')) \oplus (2^{n-k}-2l)\Gamma(n-k,t+t',1).$$

Лема доведена.

Лема 2. *Нехай* $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^{n-k}}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^{n-k'}}$, $r \leq m$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \cong \oplus \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus$$

$$\oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \Big) \oplus (2^{n-k} - 2l)\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1). \qquad (5)$$

Доведення. Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \to \Gamma(n-k,t,1) \to V_m \to 0.$$

Тоді

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k, 2^{k-k'}t+t', 1) \to V_m \oplus (V_{r+1} \oplus V_{2^{n-k}-r-1}) \to 0.$$

Нехай $V_m \otimes V_{r+1} \cong \otimes \sum\limits_{i=1}^{l} V_{\alpha_i}$. Тоді

$$0 \to \Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma_r(n-k',t') \to 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t+t', 1) \to$$

$$\to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0. \qquad (6)$$

Розглянемо точну послідовність

$$0 \to \sum_{i=1}^{l} \Big(\Gamma_{\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \oplus \Gamma_{2^{n-k}-\alpha_i}(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1) \Big) \to$$

$$\to 2l \Big(\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', 1 \Big) \to \oplus \sum_{i=1}^{l} (V_{\alpha_i} \oplus V_{2^{n-k}-\alpha_i}) \to 0. \qquad (7)$$

Порівнюючи (6) і (7) одержимо формулу (5). Лема доведена.

Лема 3. *Нехай* $k \geq k'$, $t \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $t' \in \mathbb{Z}_{2^n}$. *Тоді*

$$\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma(n-k',t',\alpha) \cong 2^{n-k}\Gamma(n-k', 2^{k-k'}t + t', \alpha).$$

Доведення. Нехай $a \to A$ — незвідне $\mathbb{Z}_2$-зображення циклічної групи H порядку 2^{n-k}, яке реалізується в модулі $\Gamma_m(n-k,t)$. Тоді в $\Gamma_m(n-k,t) \otimes \Gamma(n-k',t',\alpha)$ реалізується $\mathbb{Z}_2$-зображення

$$a \to \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & A(\alpha \cdot 5^t) \\ A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A & 0 \end{pmatrix} = \Gamma(a).$$

Нехай

$$C = \begin{pmatrix} A & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & A^2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A^{2^{n-k}} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$C^{-1}\Gamma(a)C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A^{2^{n-k'}}(\alpha 5^{t'}) \\ E & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & E & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A^{2^{n-k'}}=\left(A^{2^{n-k}}\right)^{2^{k-k'}}=(5^t)^{2^{k-k'}}E$ (E — одинична матриця порядку 2^{n-k}), то $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma(n-k',t',\alpha)\cong 2^{n-k}\Gamma(n-k',2^{k-k'}t+t',\alpha)$. Лема доведена.

Нехай $\omega_m(n-k,t)=\Gamma_m(n-k,t)-\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$ $(0\le m<2^{n-k-1})$. При $t\in\mathbb{Z}_{2^n}$ $\omega_m(n-k,t)=0$.

Лема 4. *При* $0\le m<2^{n-k-1}$, $t\in 2\mathbb{Z}_{2^n}$ *виконується рівність* $\omega_m^2(n-k,t)=0$.

Доведення. Доведемо, що $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_m(n-k,t)\otimes\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$.

Розглянемо точну послідовність $0\to\Gamma_m(n-k,t)\to\Gamma(n-k,t,1)\to V_m\to 0$.

Нехай $V_m\otimes V_m\cong\sum\limits_{i=1}^{l}V_{\alpha_i}$. Тоді $V_m\otimes V_{2^{n-k}-m}\cong\oplus\sum\limits_{i=1}^{l}V_{2^{n-k}-\alpha_i}$.

Мають місце наступні точні послідовності:

$$0\to\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\to 2^{n-k}\Gamma(n-k,2t,1)\to V_m\otimes(V_m\oplus V_{2^{n-k}-m})\to 0,$$
$$0\to\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\to 2^{n-k}\Gamma(n-k,2t,1)\to V_m\otimes(V_{2^{n-k}-m})\to 0.$$

Звідси одержимо, що $\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)$.

Аналогічно доводимо, що

$$\Gamma_m(n-k,t)\otimes\Gamma_m(n-k,t)\cong\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)\otimes\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t).$$

Таким чином, $\omega_m^2(n-k,t)=0$. Лема доведена.

Лема 5. *Елементи* $[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]$, *де* $0\le m<2^{n-k-1}$ $(t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$ *кільця* $a'(\mathbb{Z}_2H)$ $\mathbb{Z}_2$*-зображень* H (H *— циклічна 2-група порядку* 2^n) *утворюють* $\mathbb{Z}_2$*-базис нільпотентного ідеалу*

$$V=\{[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\mid 0\le m<2^{n-k-1}\}$$

кільця $a'(\mathbb{Z}_2H)$ *і при цьому* $V^2=0$.

Доведення. Очевидно, елементи

$$[\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\ \ (0\le m<2^{n-k-1},\ t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$$

лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$. На основі доведених формул тензорних добутків можна перевірити, що якщо $\nu\in a'(\mathbb{Z}_2H)$, то $\nu\Big([\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\Big)\in V$ і $\omega\Big([\Gamma_m(n-k,t)]-[\Gamma_{2^{n-k}-m}(n-k,t)]\Big)=0$ для $\omega\in V$ $(0\le m<2^{n-k-1},\ t\in 2\mathbb{Z}_{2^{n-k}})$. Лема доведена.

Теорема 1. *Алгебра* $\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2)=B_1(H,\mathbb{Z}_2)/V$ *скінченновимірна і напівпроста*

$$\dim_Q\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2)=\sum_{k=1}^{n-1}(2^n-2^{n-k}-k)2^{n-k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}(2^{n-k-1}+1+k)2^{n-k-1}.$$

Доведення. Нехай $M=\{[\lambda]\big|\lambda\in\mathbb{Z}_2^*\}$ — група класів еквівалентних систем $\mathbb{Z}_2$-факторів групи H (мультиплікатор) і $\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2$. Розглянемо лінійне відображення ψ алгебри $\overline{B}_1(H,\mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM\otimes_Q A(\mathbb{Z}_2H):\psi([\Gamma])=[\lambda]\otimes[\overline{\Gamma}]$, де Γ — проективне $\mathbb{Z}_2$-зображення групи H з системою $\mathbb{Z}_2$-факторів $\lambda_{a,b} \in [\lambda]$ $(a, b \in H)$, $\overline{\Gamma}$ — $\mathbb{Z}_2$-зображення групи $H = \langle a \rangle$, одержане з $\mathbb{Z}_2$-зображення $\Gamma : a \to \Gamma(a)$ групи H зведенням елементів матриці $\Gamma(a)$ за модулем $2\mathbb{Z}_2$. Легко бачити, що ψ — гомоморфізм алгебри $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ в алгебру $QM \otimes_Q A(\mathbb{Z}_2 H)$. З точністю до $\mathbb{Z}_2$-еквівалентності мають місце формули:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}(n-k, t, \alpha) &\cong V_{2^{n-k}}, \\ \overline{\Gamma}_m(n-k, t, \alpha) &\cong V_m \oplus V_{2^{n-k}-m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Нехай $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ — всі різні нерозкладні проективні $\mathbb{Z}_2$-зображення групи $H = \langle a \rangle$, які входять в множину, що складається з всіх зображень вигляду $\Gamma_m(n-k, t)$, $\Gamma(n-k, t, \pm 1)$. Згідно попередніх лем $\Delta_1, \ldots, \Delta_l$ є Q-базисом алгебри $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ і $l = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (2^n - 2^{n-k} - k) 2^{n-k-1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2^{n-k-1} + 1 + k) 2^{n-k-1}$.

З (8) випливає, що $\overline{\Delta}_i$ і $\overline{\Delta}_j$ $(i \neq j)$ $\overline{Z}_2$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають. Далі, якщо степені зображень Δ_i і Δ_j співпадають $(i \neq j)$, то в них не еквівалентні системи факторів. Звідси одержуємо, що $\ker \psi = 0$. Як відомо [13], алгебра $A(\overline{Z}_2 H)$ напівпроста. Оскільки алгебра QM сепарабельна, то алгебра $QM \otimes_Q A(\overline{Z}_2 H)$ напівпроста. З вищесказаного випливає, що алгебра $\overline{B}_1(H, \mathbb{Z}_2)$ напівпрооста. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Боревич З. И., Фаддеев Д. К.* Теория гомологий в группах // Вестник Ленингр. ун-та. – 1959. – № 7. – С. 72–87.
2. *Reiner I.* Integral representation algebras // Trans. Amer. Math. Soc.–1966.–**124**. – P. 111–121.
3. *Zemanek J. R.* Nilpotent elements in representation rings // J. Algebra.–1971.–**19**. – P. 453–469.
4. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* Об алгебре целочисленных представлений конечной группы // Докл. АН СССР. – 1976. – **198**, № 3. – С. 509–512.
5. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Об алгебре модулярных и целочисленных представлений конечных групп // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – **53**, № 5. – С. 963–987.
6. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Про алгебру проективних цілочислових зображень скінченних груп // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 4. – С. 291–293.
7. *Баранник А. Ф., Гудивок П. М.* Кільце проективних цілочислових P-адичних зображень скінченної групи // Матем. зб. наук. праць Львів. Матем. тов-ва.–1991. – Вип. I. – С. 44–54.
8. *Гудивок П. М., Гончарова С. Ф., Рудько В. П.* О тензорных произведениях целочисленных p-адических представлений конечных групп // Укр. матем. ж. – 1982. – **4**, № 6. – С. 688–694.
9. *Баранник В. Ф., Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорні добутки зображень скінченних груп над повними дискретно нормованими кільцями // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 4. – С. 9–12.
10. *Баранник В. Ф., Рудько В. П.* Алгебра целых p-адических представлений абелевой группы, порожденная неприводимыми представлениями. – М., 1975. – С. 195–209. – Деп. в ВИНИТИ, № 705–76.
11. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових p-адичних зображень циклічної p-групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 1998. – Вип. 3. – С. 19–24.
12. *Баранник В. Ф.* Тензорні добутки незвідних проективних цілочислових P-адичних зображень циклічної p-групи // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 4–10.
13. *Гудивок П. М., Рудько В. П.* Тензорые произведения представлений конечных групп. – Ужгород: Ужгор. ун-т, 1985. – 115 с.

Одержано 08.09.2017

УДК 517.95+511.42

І. О. Бобик (Нац. ун-т «Львівська політехніка»),
М. М. Симотюк (Ін-т прикладних проблем мех. і мат. ім. Я. С. Підстригача НАН України)

ЗАДАЧА ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З ВІДХИЛЕНИМ АРГУМЕНТОМ

The correctness of the Dirichlet-type problem for the linear partial differential equations with delay is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of the estimation of small denominators of the problem are proved.

Досліджено коректність задачі типу Діріхле для рівнянь із частинними похідними з відхиленим аргументом. Встановлено умови існування єдиного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Диференціальні рівняння з відхиленим аргументом пов'язують значення невідомої функції та її похідних при різних значеннях аргументу. Такі рівняння виникають при математичному описі багатьох систем, коли враховується, що взаємодія між частинами системи відбувається не миттєво, а з деяким запізненням. Задачі, при математичному описі яких є суттєвим врахування відхилень аргументу, виникають у теорії ядерних реакторів, теорії автоматичного регулювання, імунології, епідеміології, математичній економіці та інших областях природничих наук (див. [1, 4, 5, 9] та бібліографію в них).

Різноманітним аспектам теорії диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом та її застосуванням присвячено обширну літературу [1, 4, 5, 9, 10].

У даній роботі розглядаємо задачу типу задачі Діріхле для рівняння з частинними похідними з відхиленим аргументом

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^{2n} u(t, x+2jh)}{\partial t^{2n-2j}\partial x^{2j}} = 0, \quad a_0 = 1, \quad (t,x) \in (0,T)\times\Omega, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,n},\\ &\frac{\partial^{2j-2}u(t,x)}{\partial t^{2j-2}}\Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j=\overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\Omega = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — коло одиничного радіуса, $h \in [0, 2\pi)$, a_j, $j=\overline{1,n}$, — такі комплексні числа, що $a_n \neq 0$ і рівняння

$$\sigma^n - a_1\sigma^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n = 0$$

має різні прості корені $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, які є відмінними від нуля, бо $a_n \neq 0$.

У випадку $h = 0$ задача (1), (2) вивчалася в роботах [2, 3, 6]. У цих роботах встановлено умови коректної розв'язності задачі з умовами (2) для рівняння (1) при $h = 0$ (відхилення аргументу відсутнє) і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ та для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Основна мета даної роботи — знайти умови розв'язності задачі (1), (2) (при $h \neq 0$), дослідити вплив відхилення h і показати, що такі умови виконуються для майже всіх (за мірою Лебега) значень $h \in [0, 2\pi)$.

1. Нижче використовуємо такі позначення: $\operatorname{mes} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}$; H_α ($\alpha \in \mathbb{R}$) — простір, отриманий в результаті поповнення простору тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \varphi_k e^{ikx}$ скінченного степеня за нормою

$$\|\varphi(x); H_\alpha\| = \sqrt{\sum_{|k|\geq 0} |\varphi_k|^2 w_k^2(\alpha)}, \quad w_k(\alpha) = (1+|k|)^\alpha, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$C^n([0,T]; H_\alpha)$ — простір функцій $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k(t) e^{ikx}$, $u_k \in C^n[0,T]$, $k \in \mathbb{Z}$, таких, що при фіксованому $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u/\partial t^j \equiv \sum\limits_{|k|\geq 0} u_k^{(j)}(t) e^{ikx}$, $0 \leq j \leq n$, належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в $C^n([0,T]; H_\alpha)$ задаємо формулою

$$\|u(t,x); C^n([0,T]; H_\alpha)\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\|\partial^j u(t,x)/\partial t^j; H_\alpha\right\|.$$

2. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geq 0} u_k(t) e^{ikx}. \tag{3}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, є розв'язком такої двоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j (ik)^{2j} e^{i2jhk} u_k^{(2n-2j)}(t) = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &u_k^{(2j-2)}(0) = \varphi_{j,k}, \quad j = \overline{1,n}, \\ &u_k^{(2j-2)}(T) = \varphi_{n+j,k}, \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,2n}$, відповідно. Для $k=0$ задача (4), (5) має єдиний розв'язок $u_0(t)$. Дійсно, з рівняння (4) при $k=0$ випливає, що функція $u_0(t)$ є многочленом $(2n-1)$-го степеня, коефіцієнти якого однозначно визначаються з умов $u_0^{(2j-2)}(0) = \varphi_{j,0}$, $j = \overline{1,n}$, $u_0^{(2j-2)}(T) = \varphi_{n+j,0}$, $j = \overline{1,n}$, які випливають з умов (5) при $k=0$.

Якщо $k \neq 0$, то розв'язок задачі (4), (5) зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{k,q} \operatorname{ch}(\lambda_q k t e^{ikh}) + \sum_{q=1}^{n} D_{k,q} \operatorname{sh}(\lambda_q k t e^{ikh}), \tag{6}$$

де $\lambda_j = \sqrt{\sigma_j}$, $j = \overline{1,n}$, а гілку кореня вибрано так, що $\sqrt{1} = 1$. З умов (5) випливає, що сталі $C_{k,q}$, $k \neq 0$, $q = \overline{1,n}$, знаходяться із системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{k,q} (\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2} = \varphi_{j,k}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7}$$

і до того ж однозначно, бо система (7) має відмінний від нуля визначник

$$\delta(k) = \prod_{n\geq j>q\geq 1}\Big((\lambda_j k e^{ikh})^2 - (\lambda_q k e^{ikh})^2\Big) = (ke^{ikh})^{n(n-1)}\prod_{n\geq j>q\geq 1}(\sigma_j - \sigma_q),$$

а сталі $D_{k,q}$, $k\neq 0$, $q=\overline{1,n}$, є розв'язками наступної системи рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} D_{k,q}(\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2}\operatorname{sh}(\lambda_q kTe^{ikh}) =$$

$$= \varphi_{n+j,k} - \sum_{q=1}^{n} C_{k,q}(\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2}\operatorname{ch}(\lambda_q kTe^{ikh}), \quad j=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Через $\Delta(k), k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, позначимо визначник системи (8):

$$\Delta(k) = \det\|(\lambda_q k e^{ikh})^{2j-2}\operatorname{sh}(\lambda_q kTe^{ikh})\|_{j,q=1}^{n}.$$

Легко перевірити, що

$$\Delta(k) = \delta(k)\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sh}(\lambda_j kTe^{ikh}). \tag{9}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^{2n}([0,T];H_\alpha)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k\neq 0}}\{i\lambda_j kTe^{ikh}\}\Big)\cap\pi\mathbb{Z} = \emptyset. \tag{10}$$

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 2.1 у [6, с. 97].

Зауваження 1. Умову (10) в теоремі 1 можна записати у вигляді

$$\prod_{j=1}^{n}\Big(\sin^2(|\lambda_j|kT) + \cos^2(kh+\theta_j)\Big)\neq 0, \quad k\neq 0,$$

де $\theta_j = \arg\lambda_j$, $j=\overline{1,n}$.

Наступне твердження означає, що за рахунок вибору відхилення h можна добитися єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Наслідок 1. *Якщо задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *без відхилення* ($h=0$) *має більш, ніж один розв'язок, то існує* $h_0\in[0,2\pi)$ *таке, що задача з умовами* (2) *для рівняння* (1) *з відхиленням* $h=h_0$ *може мати не більше одного розв'язку.*

Доведення. Для кожного $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ розглянемо функції

$$g_k(h)\equiv\prod_{j=1}^{n}\Big(\sin^2(|\lambda_j|kT) + \cos^2(kh+\theta_j)\Big).$$

Зрозуміло, що кожна функція $g_k(h)$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, є аналітичною за h, відмінною від тотожного нуля, і, отже, має не більш, ніж зліченну множину M_k нулів. Тоді для довільного $h_0\in\mathbb{R}\backslash\Big(\bigcup\limits_{k\neq 0} M_k\Big)$ маємо, що $g_k(h_0)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Проаналізуємо можливість виконання умови (10) для задачі типу задачі Діріхле для рівняння Лапласа з відхиленим аргументом та для рівняння коливання струни з відхиленим аргументом.

Приклад 1. Для рівняння Лапласа з відхиленим аргументом

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2} = 0, \tag{11}$$

задача з умовами

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \ u(T,x) = \varphi_2(x), \tag{12}$$

згідно з теоремою 1, може мати не більше одного розв'язку, тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sin^2(kT) + \cos^2(kh) \neq 0, \quad k \neq 0. \tag{13}$$

Для рівняння Лапласа без відхилення ($h = 0$) умова (13) виконується для довільного $T > 0$. Ця умова виконується для довільного $T > 0$, якщо h не є числом вигляду

$$\frac{\pi(2m-1)}{2l}, \quad m, l \in \mathbb{Z}, \quad l \neq 0.$$

Умова (13) порушується, якщо $T \in \pi\mathbb{Q}$, а число h має вигляд

$$h = \frac{\pi(2m^0-1)}{2l^0}$$

для деяких $m^0, l^0 \in \mathbb{Z}$, $l^0 \neq 0$.

Приклад 2. Розглянемо задачу з умовами (12) для рівняння коливання струни з відхиленим аргументом

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x+2h)}{\partial x^2} = 0. \tag{14}$$

За теоремою 1 задача (12), (14) може мати не більше одного розв'язку тоді і тільки тоді, коли виконується умова:

$$\sin^2(kT) + \sin^2(kh) \neq 0, \quad k \neq 0. \tag{15}$$

Для рівняння малих коливань струни (при $h = 0$) умова (15) виконується, якщо число T/π є ірраціональним. Якщо ж обидва числа T/π, h/π — раціональні, то умова (15) порушується. Якщо хоча б одне з чисел T/π, h/π є ірраціональним, то умова (15) справджується. Таким чином, за рахунок вибору відхилення аргументу можна добитися виконання умови єдиності для задачі типу Діріхле для рівняння малих коливань струни.

Для задач з умовами (12) для рівнянь (11) та (14) справедлива альтернатива.

Теорема 2. *Однорідна задача, яка відповідає задачі* (11), (12) *(або задачі* (14), (12)*) має в просторі $C^2([0,T];H_\alpha)$ єдиний нульовий розв'язок або зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Доведення проводиться за схемою, наведеною у роботі [8].

4. Припустимо, що умова (10) виконується. Із формул (3), (6) отримуємо формальне зображення для розв'язку задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx)\times$$

$$\times\Big(\sum_{q=1}^{n} \frac{\delta_{j,q}(k)}{\delta(k)}\varphi_{j,k}\operatorname{ch}(\lambda_q kte^{ikh}) + \sum_{q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{q+n,k}\operatorname{sh}(\lambda_q kte^{ikh})\Big), \tag{16}$$

де $\delta_{j,q}(k)$, $\Delta_{j,q}(k)$, $j,q=\overline{1,n}$, — алгебричні доповнення елементів, що стоять на перетині j-го рядка та q-го стовпця визначників $\delta(k)$, $\Delta(k)$ відповідно.

Збіжність ряду (16), взагалі, пов'язана із проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел k.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (10) *і нехай існує така стала δ, що для всіх чисел $k\in\mathbb{Z}$ виконується нерівність*

$$\big|\operatorname{sh}\big(\lambda_j kTe^{ikh}\big)\big| \ge (1+|k|)^{-\omega} e^{T|\operatorname{Re}(\lambda_j ke^{ikh})|}, \quad j=\overline{1,n}. \tag{17}$$

Якщо $\varphi_j\in H_{\alpha+\omega+2n}$, $j=\overline{1,2n}$, то в просторі $C^{2n}([0,T];H_\alpha)$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), *який неперервно залежить від φ_j, $j=\overline{1,2n}$.*

Доведення. Нехай $\varphi_j\in H_{\alpha+\omega+2n}$, $j=\overline{1,2n}$. Покажемо, що тоді ряд (16) належить до простору $C^{2n}([0,T];H_\alpha)$ і є розв'язком задачі (1), (2). Правильними є такі нерівності:

$$\max_{t\in[0,T]} |u_k^{(q)}(t)| \le C_1 \sum_{j=1}^{2n} |\varphi_{jk}|(1+|k|)^{\omega+2n}, \quad q=\overline{0,2n}. \tag{18}$$

З нерівностей (18) випливає, що

$$\big\|u(t,x);C^{2n}([0,T];H_\alpha)\big\| \le C_2 \sum_{q=0}^{2n}\Big(\sum_{|k|\ge 0}\max_{t\in[0,T]}|u_k^{(q)}(t)|^2(1+|k|)^{2\alpha}\Big)^{1/2} \le$$

$$\le C_3 \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{|k|\ge 0}|\varphi_{jk}|^2 w_k(\alpha+\omega+2n)\Big)^{1/2} = C_3\sum_{j=1}^{n}\big\|\varphi_j(x);H_{\alpha+\omega+2n}\big\| < \infty. \tag{19}$$

З нерівності (19) отримуємо твердження теореми 3.

5. Дослідимо питання про можливість виконання оцінок (17).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $h\in(0,2\pi)$ кожна з нерівностей* (17) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{Z}$ при $\omega>1$.*

Доведення. Оскільки для довільного $z\in\mathbb{C}$ виконується оцінка

$$|e^z-1| \ge \max\{1;e^{\operatorname{Re} z}\}\cdot|\sin(\operatorname{Im} z)|,$$

то $|\operatorname{sh} z| \ge \frac{1}{2}\max\{e^{-\operatorname{Re} z};e^{\operatorname{Re} z}\}\cdot|\sin(\operatorname{Im} z)|$. Тому для доведення теореми досить перевірити, що при $\omega>1$ для майже всіх значень $h\in\Omega$ кожна з нерівностей

$$|\sin(T\operatorname{Im}(\lambda_j ke^{ikh}))| \ge (1+|k|)^{-\omega}, \quad j=\overline{1,n}.$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) цілих чисел k. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [6] для цього досить встановити, що при $\omega > 1$ збігаються ряди $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{mes} M_{j,\omega}(k)$, $j = \overline{1,n}$, де

$$M_{j,\omega}(k) \equiv \Big\{ h \in \Omega : |\sin(T\mathrm{Im}(\lambda_j k e^{ikh}))| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Нехай $\lambda_j = |\lambda_j| e^{i\eta_j}$, $j = \overline{1,n}$, де η_j — аргумент комплексного числа λ_j. Тоді

$$\mathrm{Im}(\lambda_j e^{ikh}) = |\lambda_j| \sin(kh + \eta_j), \quad j = \overline{1,n}.$$

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Очевидно, що

$$\operatorname{mes} M_{j,\omega}(k) = k^{-1} \operatorname{mes} \Big\{ H \in (0, 2\pi k) : |\sin(T|\lambda_j k| \sin(H + \eta_j))| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\} =$$

$$= k^{-1} \operatorname{mes} \Big\{ H \in (\eta_j, \eta_j + 2\pi k) : |\sin(T|\lambda_j k \sin H|) \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\}.$$

Для заданого $\delta \in (0, \omega - 1)$ розіб'ємо відрізок $[\eta_j, \eta_j + 2\pi k]$ на такі непродовжувані відрізки I_q $(q = \overline{1, N_1(k)})$ та відрізки J_q $(q = \overline{1, N_2(k)})$, щоб виконувались умови

$$\forall\, H \in I_q \quad |\cos H| \ge \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q = \overline{1, N_1(k)},$$

$$\forall\, H \in J_q \quad |\cos H| \le \frac{1}{k^{\delta+1}}, \quad q = \overline{1, N_2(k)}.$$

Для кількостей $N_1(k)$, $N_2(k)$ цих відрізків, очевидно, справджуються оцінки

$$N_1(k) \le C_4 k, \quad N_2(k) \le C_5 k.$$

Оскільки

$$\operatorname{mes} J_q \le C_6 k^{-\delta-1}, \quad q = \overline{1, N_2(k)},$$

то $\operatorname{mes} \left(\bigcup_{q=1}^{N_2(k)} J_q \right) \le C_7 k^{-\delta}$. Очевидно, що виконуються оцінки

$$\operatorname{mes} \Big\{ H \in I_q : |\sin(T|\lambda_j k| \sin H)| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\} \le$$

$$\le k^{1+\delta} \operatorname{mes} \Big\{ t \in \sin(I_q) : |\sin(T|\lambda_j k| t)| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\} \le$$

$$\le k^{1+\delta} \operatorname{mes} \Big\{ t \in [-1; 1] : |\sin(T|\lambda_j k| t)| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\}.$$

За лемою 2.2 на с. 15 у [6]

$$\operatorname{mes} \Big\{ t \in [-1; 1] : |\sin(T|\lambda_j k| t)| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\} \le C_8 (1+|k|)^{-\omega}.$$

Таким чином, для $k > 0$ отримуємо

$$\operatorname{mes} M_{j,\omega}(k) \le C_9 \sum_{q=1}^{N_2(k)} \operatorname{mes} \Big\{ H \in I_q : |\sin(T|\lambda_j k| \sin H)| \le (1+|k|)^{-\omega} \Big\} +$$

$$+C_{10}\sum_{q=1}^{N_2(k)} \operatorname{mes} J_q \leq C_{11}k^{-1-\delta} + C_{12}k^{\delta-\omega}.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли $k < 0$. Таким чином, при $\omega > 1$ отримуємо збіжність рядів $\sum\limits_{|k|>0} \operatorname{mes} M_{j,\omega}(k)$, $j = \overline{1,n}$.

Теорему доведено.

Зауваження 2. Результати роботи перенесено на випадок задачі типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними із відхиленням аргументу.

Список використаної літератури

1. *Антоневич А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход.– Минск: Университетское, 1988. – 232 с.
2. *Білусяк Н.І., Пташник Б.Й.* Крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 9. – С. 1281–1286.
3. *Мосолов П.П.* О задаче Дирихле для уравнений в частных производных // Изв. вузов. Математика, 1960, № 3. – С. 213–218.
4. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
5. *Мышкис А.Д.* О некоторых проблемах теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи мат. наук. – 1977. – Т. 32, вып. 2. – С. 173–202.
6. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Матем. Вісник НТШ. – 2004. – Вип. 1. – С. 130–149.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 422 с.
10. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with transformed argument an algebraic approach. – Warszawa: PWN, 1973. – 354 p.

Одержано 08.09.2017

УДК 512.53+512.64

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України)
Е. М. Костишин (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ З ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ НАПІВГРУПИ $T_2 \times S_2$

We describe matrix problems of finite type associated with modular representations of the direct product of the symmetric semigroup and symmetric group of degree 2. In each case we obtain an explicit classification of the corresponding representations.

Описуються матричні задачі скінченного типу, пов'язані з модулярними зображеннями прямого добутку симетричної напівгрупи та симетричної групи степеня 2. В кожному випадку отримано явний опис відповідних зображень.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля K не ділить порядок скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силовська p-підгрупа є циклічною. Більшість скінченних груп у цьому випадку є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності (точні означення ручних та диких задач див. в [1]). Ручні та дикі групи для модулярного випадку описані в роботі [1].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячена вивченню незвідних зображень та класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними (див., напр., монографії [2, 3]), тощо. Серед інших результатів виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп — опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ [4, 5] чи алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ [6, 7], деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [8] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [9,10]. Серед нових результатів виділимо результати про опис ручних та диких напівгруп, породжених ідемпотентами з частковим нульовим множенням [11] та напівгруп, породжених двома потентними елементами [12].

У роботі [13] описані модулярні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів. У цій статті вивчаються модулярні зображення з деякими додатковими умовами прямого добутку двох напівгруп T_2.

1. Попередні відомості. Напівгрупа T_2 всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ складається із чотирьох елементів e, a, b, c: $e(1) = 1, e(2) = 2; a(1) = 2, a(2) = 1; b(1) = 2, b(2) = 2; c(1) = 1, c(2) = 1$. Легко бачити, що елементи e, a, b утворюють систему твірних із визначальними співвідношеннями $a^2 = e$, $b^2 = b$, $ab = b$ (для одиничного елемента e ми не виписуємо природні співвідношення).

Матричне зображення розмірності n напівгрупи T_2 над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи T_2 в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (як показано в роботі [13], при цьому втрачається лише одне нерозкладне зображення, яке складається із нульових матриць розмірності 1); ми будемо розглядати лише такі зображення. Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи T_2 однозначно задається парою матриць $R = \{A = X(a), B = X(b)\}$, що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$. Для матричних зображень напівгрупи T_2 (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи T_2 називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, яка породжена елементом a порядку 2).

У роботі [13] доведена наступна класифікаційна теорема (з формальних міркувань нумерація зображень змінена).

Теорема 1. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Сформульований результат лежить в основі нових означень та постановки задачі, які приведено в наступному параграфі.

2. Формулювання основних теорем. Модулярні зображення ручної групи $S_2 \times S_2$ описані (з точністю до еквівалентності) в роботі [15]; тут S_2 позначає, як звичайно, симетричну групу степеня 2 (яка є циклічною групою порядку 2). Напівгрупа $T_2 \times T_2$, яка має фактор-напівгрупу ізоморфну групі $S_2 \times S_2$, вже є дикою (відносно модулярних зображень, тобто зображень над полем характеристики 2); більш того, дикою є напівгрупа $T_2 \times S_2$, яка має фактор-напівгрупу ізоморфну групі $S_2 \times S_2$ і сама є фактор-напівгрупою напівгрупи $T_2 \times T_2$ [16].

Модулярним матричним зображенням (дикої) напігрупи $T_2 \times S_2$ і присвячена ця стаття.

Напівгрупа $T_2 \times S_2$ породжується елементами e, a, b і g (твірний елемент S_2) з наступними співвідношеннями: $a^2 = e$, $b^2 = b$. $ab = b$; $g^2 = e$. $ga = ag$, $gb = bg$.

Матричне зображення напівгрупи $T_2 \times S_2$ однозначно задається трійкою матриць (A, B, G) (якщо, як і раніше, одиничному елементі зіставляти одиничну матрицю), що задовольняють рівності $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$, $G^2 = E$, $GA = AG$, $GB = BG$. Ми будемо ототожнювати зображення з відповідною йому трійкою матриць.

Розглянемо наступну класифікаційну задачу для довільного поля K характеристики 2. Зафіксуємо в множині $M = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ всіх нерозкладних зображень напівгрупи T_2 (які вказані в теоремі 1) деяку власну підмножину N і будемо розглядати лише такі матричні зображення R напівгрупи $T = T_2 \times S_2$, обмеження яких на напівгрупу T_2 розкладаються в пряму суму зображень із N. Для пар (T, N) можна розглядати традиційні задачі теорії зображень. Одна із них, а саме задача про опис пар (T, N) скінченного типу, розглядається в цій статті ("скінченний тип" означає, що число нерозкладних зображень, з точністю до еквівалентності, скінченне).

Теорема 2. *Якщо $|N| = 1$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \neq R_4, R_5$.*

Теорема 3. *Якщо $|N| = 2$, то (T, N) — пара скінченного типу тоді і лише тоді, коли $N \cap \{R_4, R_5\} = \varnothing$.*

3. Доведення теореми 2. Ми ототожнюємо одноелементні множини із самими елементами.

Необхідність. Легко показати, що у випадку $N = R_4$ трійки матриць $R_P = (A, B, G_P)$ і $R_Q = (A, B, G_Q)$, де

$$A = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

подібні тоді і лише тоді, коли подібні P і Q; окрім того, зображення R_X нерозкладне тоді і лише тоді, коли нерозкладна матриця X.

У випадку $N = R_5$ маємо подібну ситуацію, якщо покласти

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & E \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_X = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & X \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Отже, пари (T, R_4) і (T, R_5) мають скінченний тип.

Зауважимо, що в першому випадку трійка матриць R_X задає по суті зображення групи $S_2 \times S_2$ (бо $B = 0$), а тому сказане для $N = R_4$ випливає із результатів роботи [15].

Достатність випливає з теореми 3 (достатність), яка буде доведена нижче.

4. Доведення теореми 3. *Необхідність* випливає з теореми 2 (необхідність).

Достатність. Розглянемо послідовно випадки $N = \{R_1, R_2\}$, $N = \{R_1, R_3\}$, $N = \{R_2, R_3\}$. виписуючи на початку деякий загальний нормальний вигляд матричного зображення з відповідною додатковою умовою. Через E позначаємо, як звичайно, довільну одиничну матрицю (розмірності $n \geq 0$).

Випадок $N = \{R_1, R_2\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, а з $G^2 = E$ — $G_{11}^2 = E$, $G_{22}^2 = E$. Значить кожна із матриць G_{11} і G_{22} подібна матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \qquad (1).$$

який легко отримати з жорданової нормальної форми одночасною перестановкою рядків та стовпців.

Оскільки ці подібності продовжуються до подібності трійок матриць $(A.B.G)$ і (A, B, G'), де G' — деяка матриця така, що $G'_{12} = 0$, $G'_{21} = 0$, а G'_{11} і G'_{22} мають вигляд (1), то отримуємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 3) і 4) нерозкладні, бо нерозкладні її обмеження на підгрупу $\{e, g\}$ (порядку 2).

Випадок $N = \{R_1, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{23} = 0$, $G_{32} = 0$, а із $AG = GA$ — $G_{31} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & G_{13} \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{11}G_{13} + G_{13}G_{33} = 0. \qquad (2)$$

Враховуючи перші дві рівності, аналогічно як у випадку $N = \{R_1, R_2\}$, можна вважати, що матриці G_{11} і G_{22} мають вигляд (1).

Розіб'ємо матриці A, B, G на блоки у відповідності до розбиття G_{11} та G_{33}. Зокрема. матимемо

$$G_{13} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix}.$$

Із останньої рівності в (2) випливає, що $H_{11} = 0$, $H_{21} = 0$, $H_{31} = 0$, $H_{32} = 0$, $H_{33} = 0$. Тоді, як легко бачити, при

$$X = \begin{pmatrix} E & 0 & X_{13} \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \text{ де } X_{13} = \begin{pmatrix} H_{13} & 0 & 0 \\ H_{23} & 0 & 0 \\ 0 & H_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

трійка матриць $(XAX^{-1}, XBX^{-1}, XGX^{-1})$ дорівнює трійці матриць (A, B, G'), де матриця G' відрізняється від матриці G лише блоком G'_{13}, який має наступний (більш простий) вигляд:

$$G'_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

І оскільки еквівалентність матриць $H_{22} \to PH_{22}Q^{-1}$ продовжується до подібності трійок матриць $(A.B.G')$ і (A, B, G''), де G'' отримується із G' заміною H_{22} на $PH_{22}Q^{-1}$, то можна вважати, що

$$H_{22} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 1, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 2) (відповідно 3)) нерозкладне, бо нерозкладне її обмеження на підгрупу $\{e, a\}$ (відповідно $\{e, g\}$), а зображення 4) і 5) нерозкладні, бо нерозкладні (згідно [15]) їх обмеження.. на підгрупу $\{e, a, g, ag\} \cong S_2 \times S_2$.

Випадок $N = \{R_2, R_3\}$:

$$A = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $BG = GB$ отримуємо $G_{12} = 0$, $G_{13} = 0$, $G_{21} = 0$, $G_{31} = 0$, а із $AG = GA$ — $G_{23} = 0$, $G_{11} = G_{22}$. Отже,

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 \\ 0 & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix},$$

причому із $G^2 = E$ маємо наступні співвідношення:

$$G_{11}^2 = E, \quad G_{33}^2 = E, \quad G_{32}G_{11} + G_{33}G_{32} = 0.$$

Далі доведення проводиться по тій же схемі, що у випадку $N = \{R_1, R_3\}$.

В результаті маємо наступну повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень:

1) $a \to 1, \quad b \to 0, \quad g \to 1;$

2) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Зауважимо, що зображення 2) – 5) нерозкладні по тій же причині, що і зображення у випадку $N = \{R_1, R_3\}$.

Теорема 3 доведена.

5. Обчислення матричних алгебр Ауслендера. Алгеброю Ауслендера матричної задачі скінченного типу (пов'язаної із матричними зображеннями групи, напівгрупи, алгебри, тощо) називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник).

Нагадаємо, що ендоморфізм матричного зображення T — це довільна матриця X, яка комутує з кожною матрицею зображення.

Очевидно, що матрична алгебра Ауслендера не залежить від вибору представників в класах еквівалентності у тому сенсі, що всі отримані таким чином алгебри будуть спряжені як підалгебри відповідної повної матричної алгебри.

Ми обчислимо матричну алгебру Ауслендера для всіх задач скінченного типу, про які сказано в теоремі 3.

Теорема 4. *Для довільного поля характеристики* 2 *матрична алгебра Ауслендера у випадку* $N = \{R_1, R_2\}$ *складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 & x_{36} \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{64} & 0 & x_{66} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Доведення. Розглянемо пряму суму нерозкладних зображень, вказаних у випадку $N = \{R_1, R_2\}$ (див. попередній параграф).

$$a \to A = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad b \to B = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$g \to G = \left(\begin{array}{cc|cc|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

Нехай $X = (x_{ij}), i, j = 1, ldots, 6,$ — елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто $AX = XA$, $BX = XB$ і $GX = XG$. Перша рівність буде тотожністю, оскільки матриця A є одиничною.

Використаємо співвідношення $BX = XB$. Отримаємо наступні рівності:

$$\begin{array}{lll}
(1.1; 1, 1) : 0 = 0, & (1.1; 3, 1) : x_{31} = 0, & (1.1; 5, 1) : 0 = 0, \\
(1.1; 1, 2) : 0 = 0, & (1.1; 3, 2) : x_{32} = 0, & (1.1; 5, 2) : 0 = 0, \\
(1.1; 1, 3) : 0 = x_{13}, & (1.1; 3, 3) : x_{33} = x_{33}, & (1.1; 5, 3) : 0 = x_{53}, \\
(1.1; 1, 4) : 0 = x_{14}, & (1.1; 3, 4) : x_{34} = x_{34}, & (1.1; 5, 4) : 0 = x_{54}, \\
(1.1; 1, 5) : 0 = 0, & (1.1; 3, 5) : x_{35} = 0, & (1.1; 5, 5) : 0 = 0, \\
(1.1; 1, 6) : 0 = x_{16}, & (1.1; 3, 6) : x_{36} = x_{36}, & (1.1; 5, 6) : 0 = x_{56}, \\
 & & \\
(1.1; 2, 1) : 0 = 0, & (1.1; 4, 1) : x_{41} = 0, & (1.1; 6, 1) : x_{61} = 0, \\
(1.1; 2, 2) : 0 = 0, & (1.1; 4, 2) : x_{42} = 0, & (1.1; 6, 2) : x_{62} = 0, \\
(1.1; 2, 3) : 0 = x_{23}, & (1.1; 4, 3) : x_{43} = x_{43}, & (1.1; 6, 3) : x_{63} = x_{63}, \\
(1.1; 2, 4) : 0 = x_{24}, & (1.1; 4, 4) : x_{44} = x_{44}, & (1.1; 6, 4) : x_{64} = x_{64}, \\
(1.1; 2, 5) : 0 = 0, & (1.1; 4, 5) : x_{45} = 0, & (1.1; 6, 5) : x_{65} = 0, \\
(1.1; 2, 6) : 0 = x_{26}, & (1.1; 4, 6) : x_{46} = x_{46}, & (1.1; 6, 6) : x_{66} = x_{66}.
\end{array}$$

Враховуючи вже отримані рівності, використаємо тепер співвідношення $GX = XG$, записане в еквівалентній формі як $(G+E)X = X(G+E)$.

Отримаємо наступні рівності:

$$\begin{array}{lll}
(1.2;1,1): x_{21} = 0, & (1.2;3,1): 0 = 0, & (1.2;5,1): 0 = 0,\\
(1.2;1,2): x_{22} = x_{11}, & (1.2;3,2): 0 = 0, & (1.2;5,2): 0 = x_{51},\\
(1.2;1,3): 0 = 0, & (1.2;3,3): x_{43} = 0, & (1.2;5,3): 0 = 0,\\
(1.2;1,4): 0 = 0, & (1.2;3,4): x_{44} = x_{33}, & (1.2;5,4): 0 = 0,\\
(1.2;1,5): x_{25} = 0, & (1.2;3,5): 0 = 0, & (1.2;5,5): 0 = 0,\\
(1.2;1,6): 0 = 0, & (1.2;3,6): x_{46} = 0, & (1.2;5,6): 0 = 0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(1.2;2,1): 0 = 0, & (1.2;4,1): 0 = 0, & (1.2;6,1): 0 = 0,\\
(1.2;2,2): 0 = x_{21}, & (1.2;4,2): 0 = 0, & (1.2;6,2): 0 = 0,\\
(1.2;2,3): 0 = 0, & (1.2;4,3): 0 = 0, & (1.2;6,3): 0 = 0,\\
(1.2;2,4): 0 = 0, & (1.2;4,4): 0 = x_{43}, & (1.2;6,4): 0 = x_{63},\\
(1.2;2,5): 0 = 0, & (1.2;4,5): 0 = 0, & (1.2;6,5): 0 = 0,\\
(1.2;2,6): 0 = 0, & (1.2;4,6): 0 = 0, & (1.2;6,6): 0 = 0.
\end{array}$$

Отже, відповідна матрична алгебра Ауслендера складається з усіх матриць, вказаних в умові теореми.

Теорема 5. *Для довільного поля характеристики 2 матрична алгебра Ауслендера у випадку $N = \{R_1, R_3\}$ складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix}
x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & x_{17} & x_{18} & 0 & x_{1\,10} & x_{1\,11} & x_{1\,12}\\
0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0\\
0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & x_{18} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & x_{57} & x_{58} & 0 & x_{5\,10} & x_{5\,11} & x_{5\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & x_{58} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & x_{5\,10} & 0\\
0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{87} & x_{88} & 0 & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12}\\
0 & 0 & 0 & x_{82} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,7} & 0 & 0 & x_{10\,10} & x_{10\,11} & x_{10\,12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{12\,7} & 0 & 0 & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12}
\end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля.

Теорема 6. *Для довільного поля характеристики 2 матрична алгебра Ауслендера у випадку $N = \{R_2, R_3\}$ складається із усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 & 0 \\ 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & 0 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{1\,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{52} & 0 & x_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{52} & x_{74} & 0 & x_{76} & x_{55} & 0 & x_{79} & 0 & x_{7\,11} & x_{7\,12} \\ 0 & 0 & x_{83} & x_{84} & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{88} & x_{89} & 0 & x_{8\,11} & x_{8\,12} \\ 0 & 0 & 0 & x_{83} & 0 & x_{87} & 0 & 0 & x_{88} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{10\,2} & 0 & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{10\,2} & 0 & x_{10\,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10\,10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{12\,4} & 0 & x_{12\,6} & 0 & 0 & x_{12\,9} & 0 & x_{12\,11} & x_{12\,12} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля.*

Доведення теорем 5, 6 проводиться по такій же схемі, як і доведення теореми 4.

Список використаної літератури

1. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: "Мир", 1972. – 285 с.
3. *Okninski J.* Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
4. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
5. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
6. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
7. *Ringel C.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
8. *Понизовский И. С.* О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
9. *Понизовский И. С.* Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
10. *Ringel C.* The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429–434.
11. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M.* On tame semigroups generated by idempotents with partial null multiplication // Algebra Discrete Math. – 2008. – no. 4. – P. 10–19.
12. *Bondarenko V. M., Tertychna O. M., Zubaruk O. V.* On classifications of pairs of potent linear operators with the simplest annihilation condition // Algebra Discrete Math. – 2016. – **21**, no 1. – P. 18–23.
13. *Бондаренко В. М., Костишин Е. М.* Модулярні зображення напівгрупи T_2 // Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика). – 2011. – вип. 22, №1. – С. 26–34.
14. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
15. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // ДАН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015–1018.
16. *Bondarenko V. M., Kostyshyn E. M.* On modular representations of semigroups $S_p \times T_p$ // Algebra and Discrete Mathematics. – **16**, no. 1. – 2013. – P. 16–19.

Одержано 21.10.2017

УДК 512.547+512.58

В. М. Бондаренко (Ін-т математики НАН України)
І. В. Литвинчук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОПИС КАТЕГОРІЇ ЗОБРАЖЕНЬ ПОСТІЙНОГО ЖОРДАНОВОГО ТИПУ НАЙМЕНШОЇ НЕЦИКЛІЧНОЇ ГРУПИ

We describe the category of matrix representations of the fourth Klein group over an algebraically closed field of characteristic 2 that have constant Jordan type.

Описується категорія матричних зображень четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2, які мають постійний жордановий тип.

Зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. Якщо говорити про зображувальний тип, то в класичному випадку, коли характеристика поля не ділить порядок групи, група завжди має, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень (більш того, відповідна групова алгебра напівпроста); у протилежному ж випадку, який називається модулярним, скінченне число нерозкладних зображень мають тільки групи з циклічною силовською p -підгрупою, де p - характеристика поля. У модулярному випадку більшість груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень містить в собі класичну нерозв'язну задачу лінійної алгебри про класифікацію пари матриць з точністю до подібності; групи, що допускають опис зображень, називаються ручними. Ручні і дикі скінченні групи в модулярному випадку повністю описані в роботі [1][1].

У роботі [41] для скінченної групи (і навіть в більш загальній ситуації — для скінченної групової схеми) G і поля характеристики $p > 0$ вводиться поняття модулів постійного жорданового типу, а також вивчаються такі модулі. Дана тематика стала важливим напрямом сучасної теорії зображень (див., зокрема, [42–47]).

У роботі [48], яка була написана під впливом статті [41], розглядаються властивості різних матричних задач, пов'язані з рангами матриць; зокрема, описуються зображення постійного жорданового типу четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем характеристики 2. У роботі [49] авторами доведено, що задача про опис зображень постійного жорданового типу нециклічної елементарної абелевої p-групи G порядку $|G| > 4$ є дикою (випадок циклічної групи тривіальний).

У даній роботі описується категорія зображень постійного жорданового типу четверної групи Клейна (найменшої нециклічної групи).

1. Зображення четверної групи Клейна постійного жорданового типу. У роботі [41] для скінченної групової схеми G і поля характеристики

[1]Формальні означення ручних і диких матричних задач, а також основні загальні теореми про такі задачі, розглянуті Ю. А. Дроздом в [2, 3]. Дослідження, що проводяться впродовж багатьох десятиліть, про вивчення зображень ручних і диких об'єктів відносяться не тільки до зображень груп над полями (див., зокрема, посилання в [1] і роботи [4–7]), але і до зображень груп над кільцями (див. [8–17]), зображень сагайдаків і частково впорядкованих множин (див. [18–33]), а також до операторів в скінченновимірних векторних просторах (див. [34–37]), класифікації самих об'єктів (див. [38–40]) та інших ситуацій.

$p > 0$ вводиться поняття модулів постійного жорданового типу. В окремому випадку, для четверної групи Клейна $G_2 = (2, 2)$ із стандартними твірними g_1, g_2 і алгебраїчно замкнутого поля k характеристики 2, це означає (на мові матричних зображень), що самоанулюючі попарно комутуючі матриці A_1, A_2, які відповідають елементам $a_1 = 1 + g_1, a_2 = 1 + g_2$ групової алгебри kG, задовольняють наступній умові: жорданова форма матриці $\alpha A_1 + \beta A_2$, де $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, не залежить від вибору елементів α і β.

Оскільки жорданова форма матриці, рівної в квадраті нулю, однозначно визначається її рангом, то надалі замість „зображення постійного жорданового типу“ будемо говорити „зображення постійного рангу“.

Покладемо $a = g_1$, $b = g_2$. Одиничну матрицю розмірності s позначаємо через E_s. $J_t(b)$, де $b \in k$, позначає клітку Жордана розміру $t \times t$ з власним числом b, а $\overline{0}$ і $\widetilde{0}$ — відповідно нульовий стовпець і нульовий рядок матриці.

У роботі [48] доведена наступна теорема, яка описує нерозкладні зображення четверної групи Клейна, що мають постійний ранг.

Теорема 1. *Зображення групи* G_2 (*над алгебраїчно замкнутим полем* k *характеристики* 2) *вигляду*

a) $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

b) $$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c) $$a \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & E_s \quad \overline{0} \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_s & \overline{0} \quad E_s \\ \hline 0 & E_{s+1} \end{array}\right),$$

d) $$a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

де $s \geq 1$, *утворюють повну систему нерозкладних попарно нееквівалентних зображень постійного рангу.*

Таким чином, з точністю до еквівалентності, в кожній розмірності число нерозкладних зображень постійного рангу скінченне (зокрема, може бути рівним нулю).

2. Формулювання основного результату. Наша мета — описати категорію матричних зображень постійного рангу четверної групи Клейна над алгебраїчно замкнутим полем k характеристики 2. Згідно загального означення (для зображень довільної групи над довільним полем) множина морфізмів

$Hom(S, S')$ матричних зображень

$$S : a \to A,\ b \to B, \quad S' : a \to A',\ b \to B'$$

групи G_2 над полем k складається з усіх матриць X (з елементами з k) таких, що $AX = XA'$ і $BX = XB'$. Множина морфізмів є, очевидно, векторним простором.

Для задання категорії достатньо в кожному класі еквівалентних нерозкладних зображень вказати по одному представнику і обчислити для них всі множини морфізмів. В якості таких представників будемо брати вказані в теоремі 1 нерозкладні зображення. При цьому зображення, вказані в пунктах a), b), c), d), будемо позначати відповідно через T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Введемо деякі поняття.

Нехай $X = (x_{ij})$ — матриця розміру $n \times m$ над деяким полем. Її s^+-ю діагоналлю, де s — ціле число, назвемо сукупність елементів вигляду $x_{i,i+s}$, а s^--ю діагоналлю — сукупність елементів вигляду $x_{i,m+1-s-i}$ (з формальних міркувань ми не виписуємо допустимі значення для індексів, вважаючи, що символ x з неприпустимими індексами відсутній і, як наслідок, допускаючи пусті діагоналі). Такі діагоналі називаємо відповідно $(+)$-діагоналями і $(-)$-діагоналями. Будемо називати $(\pm)$-діагональ скалярною, якщо всі її елементи рівні між собою (зокрема, нульовою, якщо всі елементи нульові).

Матрицю X будемо називати d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), якщо кожна її $(+)$-діагональ (відповідно $(-)$-діагональ) скалярна. Очевидно, що якщо матриця X є d^+-скалярною (відповідно d^--скалярною), то вона однозначно задається елементами першого рядка і першого стовпця (відповідно першого рядка і останнього стовпця). В цьому випадку вводимо відповідно позначення

$$X = S_{nm}^+(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{21}, \ldots, x_{n1}),$$

$$X = S_{nm}^-(x_{11}, \ldots, x_{1m}; x_{2m}, \ldots, x_{nm}).$$

Матрицю X, яка є d^+-скалярною, назвемо d_0-скалярною, якщо у випадку $n \le m$ (відповідно $n \ge m$) s^+-а діагональ є нульовою при $s < 0$ і при $s > m - n$ (відповідно при $s > 0$ і при $s < m - n$); в цьому випадку вводимо позначення $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{1,m-n+1})$, якщо $n \le m$ і $X = S_{nm}(x_{11} \ldots, x_{n-m+1,1})$, якщо $n \ge m$.

Наступна теорема описує множини морфізмів між зображеннями вигляду T_1, T_2, T_3^s, T_4^s.

Теорема 2. *Множина морфізмів наступна:*

$Hom\,(T_1, T_1) = \{(\boldsymbol{x_{11}})\}$;

$Hom\,(T_1, T_2) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \end{pmatrix}\right\}$;

$$Hom\,(T_2, T_1) = \left\{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_{11}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_2)=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \boldsymbol{x_{14}}\\ 0 & x_{11} & 0 & x_{13}\\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12}\\ 0 & 0 & 0 & x_{11}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_1,T_3^s)=\left\{\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\,| & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_1)=\left\{\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{x_{11}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x_{s1}}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_1,T_4^s)=\left\{\begin{pmatrix}0 & \dots & 0\,| & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\end{pmatrix}\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s,T_1)=\left\{\left(\begin{array}{c}\boldsymbol{x_{11}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x_{s+1,1}}\\ \hline 0\\ \vdots\\ 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_3^s)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccccc} x_{11} & \dots & x_{1s} & \boldsymbol{x_{1,s+1}} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s}} & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & x_{11} & \dots & x_{1,s-1} & x_{1s}\\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1s} & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_3^s,T_2)=\left\{\left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & x_{22} & \boldsymbol{x_{14}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_{s-1,2} & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s-1,4}}\\ 0 & x_{s2} & x_{s3} & \boldsymbol{x_{s4}}\\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & x_{s2}\\ 0 & 0 & 0 & x_{s3}\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_2,T_4^s)=\left\{\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \dots & x_{1,s+1} & \boldsymbol{x_{1,s+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2s+1}}\\ 0 & \dots & 0 & x_{12} & \dots & x_{1,s+1}\\ 0 & \dots & 0 & x_{11} & \dots & x_{1s}\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\end{array}\right)\right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_2) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & x_{12} & 0 & \boldsymbol{x_{14}} \\ 0 & x_{22} & x_{12} & \boldsymbol{x_{24}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x_{s2} & x_{s-1,2} & \boldsymbol{x_{s4}} \\ 0 & 0 & x_{s2} & \boldsymbol{x_{s+1,4}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_{s2} \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_3^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ S_{st}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S_{s+1,t+1}(x_{11}, \dots, x_{t-s+1,1})} \end{array} \right) \right\}$$

при $s \leq t$,

$$Hom\,(T_3^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s > t$;

$$Hom\,(T_3^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} S^-_{s,t+1}(x_{11}, \dots, x_{1,t+1}; & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ {}_{2,t+1}, \dots, x_{s,t+1}) & \vdots & & \vdots \\ & \boldsymbol{x_{s,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s,2t+1}} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{S^-_{s+1,t}(x_{11}, \dots, x_{1,t}; \; {}_{1,t+1}, \dots, x_{s,t+1})} \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_3^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+1}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\};$$

$$Hom\,(T_4^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \dots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \right\}$$

при $s < t$,

$$Hom\,(T_4^s, T_4^t) = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} S_{s+1,t+1}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1}) & \begin{matrix} \boldsymbol{x_{1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{1,2t+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x_{s+1,t+2}} & \cdots & \boldsymbol{x_{s+1,2t+1}} \end{matrix} \\ \hline 0 & S_{st}(x_{11}, \ldots, x_{s-t+1,1}) \end{array} \right) \right\}$$

при $s \geq t$.

У всіх випадках множини морфізмів зображені як сукупність матриць, елементи x_{ij} яких пробігають все поле k. Жирним шрифтом позначені елементи матриць, які зустрічаються один раз.

3. Доведення теореми 2. Покладемо $M^{\varnothing} = M$ для довільної матриці M. Тоді кожне канонічне нерозкладне зображення четверної групи Клейна (вказане в теоремі 1) має вигляд T_i^x, де $i \in \{1,2,3,4\}$, $x = \varnothing$, якщо $i = 1,2$ і x — натуральне число, якщо $i = 3,4$.

Якщо $T_i^x : a \to A_1, b \to B_1$ і $T_j^y : a \to A_2, b \to B_2$ — канонічні нерозкладні зображення, то (згідно сказаному вище) множина морфізмів $Hom(T_i^x, T_j^y)$ у категорії зображень постійного рангу четверної групи Клейна складається зі всіх матриць X таких, що $A_1X = XA_2$ і $B_1X = XB_2$. В цьому випадку скалярна рівність $(A_1X)_{pq} = (XA_2)_{pq}$ і $(B_1X)_{pq} = (XB_2)_{pq}$ позначається відповідно через $[a; i, j; p, q]$ і $[b; i, j; p, q]$; у вказаному означенні через M_{pq} позначається елемент матриці M, що стоїть на перетині p-го рядки і q-го стовпця (де M приймає значення $(A_1X), (XA_2), (B_1X), (XB_2)$).

При доведенні теореми елементи матриці X позначаються (як і в умові теореми) традиційно — через x_{pq}. При цьому, для простоти, замість x_{pq} пишемо просто pq, використовуючи, якщо потрібно, круглі дужки (наприклад, замість $x_{s+1,1}$ пишемо $(s+1)1$). Випадок, коли обчислюється $Hom(T_i^x, T_j^y)$ позначається через (i, j).

Переходимо до розгляду всіх можливих випадків. У кожному з них вказуються всі наслідки з рівностей вигляду $[a; i, j; p, q]$ і $[b; i, j; p, q]$, які разом забезпечують вигляд матриці X, вказаний в умові теореми.

$\mathbf{(1,1)}$ — очевидний випадок.

$\mathbf{(1,2)}$ $[a;1,2;1,3] : 0 = 11$, $[a;1,2;1,4] : 0 = 12$, $[b;1,2;1,4] : 0 = 13$ $\Rightarrow 11 = 0, 12 = 0, 13 = 0$.

$\mathbf{(2,1)}$ $[a;2,1;1,1] : 31 = 0$, $[a;2,1;2,1] : 41 = 0$, $[b;2,1;1,1] : 21 = 0$ $\Rightarrow 31 = 0, 41 = 0, 21 = 0$.

$\mathbf{(2,2)}$ $[a;2,2;1,1]$, $[a;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,1]$, $[a;2,2;2,2]$, $[b;2,2;1,1]$, $[b;2,2;1,3]$, $[b;2,2;4,4] \Rightarrow 31 = 0, 32 = 0, 41 = 0, 42 = 0, 21 = 0, 23 = 0, 43 = 0$;

$[a;2,2;1,3]$, $[b;2,2;1,2]$, $[a;2,2;2,4] \Rightarrow 33 = 11 = 22 = 44$;

$[a;2,2;1,4]$, $[a;2,2;2,3]$, $[b;2,2;1,4] \Rightarrow 12 = 34, 21 = 43, 24 = 13$.

$\mathbf{(1,3)}$ $[a;1,3;1,s+l] \Rightarrow 1l = 0$ $(l = 1, \ldots, s)$.

$\mathbf{(3,1)}$ $[a;3,1;k,1] \Rightarrow (s+k)1 = 0$ $(k = 1, \ldots, s)$;

$[b;3,1;s,1] \Rightarrow (2s+1)1 = 0$.

$\mathbf{(1,4)}$ $[a;1,4;1,s+1+l] \Rightarrow 1l = 0$ $(l = 1, \ldots, s)$;

$[b;1,4;1,2s+1] \Rightarrow 1(s+1) = 0$.

$\mathbf{(4,1)}$ $[a;4,1;k,1] \Rightarrow (s+1+k)1 = 0$ $(k = 1, \ldots, s)$.

(2, 3) $[b; 2, 3; 1, l] \Rightarrow 2l = 0 \ (l = 1, \dots, s+1)$;
$[b; 2, 3; 1, s+l] \Rightarrow 2(s+l) = 1(l-1) \ (l = 2, \dots, s+1)$;
$[a; 2, 3; 1, l] \Rightarrow 3l = 0 \ (l = 1, \dots, s)$;
$[a; 2, 3; 1, s+l] \Rightarrow 3(s+l) = 1l \ (l = 1, \dots, s)$;
$[a; 2, 3; 1, 2s+1] \Rightarrow 3(2s+1) = 0$;
$[b; 2, 3; 3, l] \Rightarrow 4l = 0 \ (l = 1, \dots, s+1)$;
$[b; 2, 3; 3, l]$ (враховуючи, що $3k = 0$ при $k = 1, \dots, s$)
$\Rightarrow 4l = 0 \ (l = s+2, \dots, 2s+1)$.

(3, 2) $[a; 3, 2; k, 3] \Rightarrow k1 = 0 \ (k = s+1, \dots, 2s+1)$;
$[a; 3, 2; k, 4] \Rightarrow k2 = 0 \ (k = s+1, \dots, 2s+1)$;
$[b; 3, 2; k, 4] \Rightarrow k3 = 0 \ (k = s+1, \dots, 2s+1)$;
враховуючи рівності $[a; 3, 2; k, 3]$, маємо: $k1 = (s+k)3 = 0 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[a; 3, 2; k, 4] \Rightarrow (s+k)4 = k2 \ (k = 1, \dots, s)$;
порівнюючи рівності $[a; 3, 2; k, 4]$ і $[b; 3, 2; k-1, 4]$, маємо:
$(s+k)4 = k2 = (k-1)3 \ (k = 2, \dots, s)$;
$[b; 3, 2; s, 4] \Rightarrow (2s+1)4 = s3$.

(2, 4) $[b; 2, 4; 1, l] \Rightarrow 2l = 0 \ (l = 1, \dots, s+1)$;
$[b; 2, 4; 1, s+l] \Rightarrow 2(s+l) = 1l \ (l = 2, \dots, s+1)$;
$[a; 2, 4; 1, l] \Rightarrow 3l = 0 \ (l = 1, \dots, s+1)$;
$[a; 2, 4; 1, s+l] \Rightarrow 3(s+l) = 1(l-1) \ (l = 2, \dots, s+1)$;
$[a; 2, 4; 1, l] \Rightarrow 4l = 0 \ (l = 1, \dots, s+1)$;
$[a; 2, 4; 1, s+l] \Rightarrow 4(s+l) = 2(l-1) = 0 \ (l = 2, \dots, s+1)$.

(4, 2) $[a; 4, 2; k, 1] \Rightarrow (s+1+k)1 = 0 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[a; 4, 2; k, 2] \Rightarrow (s+1+k)2 = 0 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[b; 4, 2; k+1, 3] \Rightarrow (s+1+k)3 = 0 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[a; 4, 2; k, 3] \Rightarrow (s+1+k)3 = k1$ і оскільки $(s+1+k)3 = 0$,
то $k1 = 0 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[b; 4, 2; s+1, 2] \Rightarrow (s+1)1 = (2s+1)2 = 0$;
$[a; 4, 2; k, 4], [b; 4, 2; k+1, 4] \Rightarrow (s+1+k)4 = k2 = (k+1)3 \ (k = 1, \dots, s)$;
$[b; 4, 2; 1, 4] \Rightarrow 13 = 0$;
$[a; 4, 2; s+1, 3] \Rightarrow (s+1)1 = 0$;
$[a; 4, 2; s+1, 4] \Rightarrow (s+1)2 = 0$.

(3, 3) Покладемо

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right),$$

де A — матриця розміру $s \times t$, B — матриця розміру $(s+1) \times t$, C — матриця розміру $s \times (t+1)$, D — матриця розміру $(s+1) \times (t+1)$.

У свою чергу, матрицю D зобразимо у вигляді блочної матриці з блоками D_0, Q, S, T:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_0 & Q \\ \hline S & T \end{array} \right),$$

де D_0 — матриця розміру $s \times t$, Q — вектор-стовпчик розміру $s \times 1$, S — вектор-рядок розміру $1 \times t$, T — матриця розміру 1×1.

$[a; 3, 3; k, t+l] \Rightarrow B = 0 \ (k = s+1, \dots, 2s+1, l = 1, \dots, t)$;
$[a; 3, 3; k, l] \Rightarrow D_0 = A \ (k = 1, \dots, s, l = t+1, \dots, 2t)$;

$[a;3,3;k,2t+1] \Rightarrow Q=0$ $(k=1,\dots,s)$;

$[b;3,3;s,l] \Rightarrow S=(0,s1,s2,...,s(t-1)), T=(st)$ $(l=t+1\dots,2t+1)$.

Залишилося визначити вид матриці A.

$[a;3,3;k,t+1]$ і $[b;3,3;k-1,t+1] \Rightarrow (s+k)(t+1)=k1=0$ $(k=2,\dots,s)$ і, отже, для елементів матриці A маємо: $k1=0$ при $k=2,\dots,s$ $(*)$;

$[a;3,3;k,2t+1]$ і $[b;3,3;k-1,2t+1] \Rightarrow (s+k)(2t+1)=0=(k-1)t$ $(k=2,\dots,s)$ і, отже, для елементів A маємо: $(k-1)t=0$ при $k=2,\dots,s$ $(**)$;

$[a;3,3;k,t+l]$ і $[b;3,3;k-1,t+l] \Rightarrow (s+k)(t+l)=kl=(k-1)(l-1)$ $(k=2,\dots,s, l=2,\dots,t)$; тоді $(*) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, що лежать під діагоналлю $11=22=33=\dots$, є нульовими. А якщо (додатково) $t<s$, то з $(**)$ випливає, що і сама ця діагональ нульова.

(3, 4) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $s\times(t+1)$, B — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, C — матриця розміру $s\times t$, D — матриця розміру $(s+1)\times t$.

$[a;3,4;k,l] \Rightarrow (s+k)l=0$ $(k=1,\dots,s, l=1,\dots,t+1)$;

$[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l=0$ $(l=1,\dots,t+1)$. Отже, $B=0$.

З рівностей $[a;3,4;k,l]$ при $k=1,\dots,s, l=t+2,\dots,2t+1$ випливає, що матриця D без останнього рядка дорівнює матриці A без останнього стовпця.

$[a;3,4;p,q]$ і $[a;3,4;p-1,q]$ при $p=2,\dots,s, q=t+2,\dots,2t+1 \Rightarrow$ $kl=(k+1)(l-1)$ при $k=1,\dots,s-1, l=1,\dots,t+1$;

$[a;3,4;s,l+1]$ і $[b;3,4;s,l] \Rightarrow (2s+1)l=(2s)(l+1), .(2s+1)(2t+1)=s(t+1)$ $(l=t+2,\dots,2t)$.

(4, 3) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(t+1)\times s$, B — матриця розміру $t\times s$, C — матриця розміру $(t+1)\times(s+1)$, D — матриця розміру $t\times(s+1)$.

$[b;4,3;k,l] \Rightarrow (t+k)l=0$ $(k=2,\dots,t+1, l=1,\dots,s+1)$, тобто $B=0$ і нульовим є перший стовпець матриці D;

$[a;4,3;k,2s+1] \Rightarrow (t+1+k)(2s+1)=0$ $(k=1,\dots,t)$, тобто останній стовпець матриці D — нульовий;

$[a;4,3;t+1,s+l] \Rightarrow (t+1)l=0$ $(l=1,\dots,s)$, тобто останній рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;1,l]$ при $l=s+2,\dots,2s+1 \Rightarrow 1k=0$ при $k=1,\dots,s$, тобто перший рядок матриці A — нульовий;

$[a;4,3;k,l]$ при $k=1,\dots,t, l=s+1,\dots,2s \Rightarrow$ матриця D без останнього стовпця дорівнює матриці A.

Далі, ліві частини рівностей $[a;4,3;k,s+l]$ і $[b;4,3;k+1,s+l]$ при $k=2,\dots,t, l=1,\dots,s+1$ рівні між собою, а саме дорівнюють $(k+t+1)(s+l)$. Прирівнюючи їх праві частини, одержуємо наступні рівності: $k1=0$, $kp=(k+1)(p-1)$ при $p=2,\dots,s$, $(k+1)s=0$. Враховуючи, що перший і останній рядки матриці A нульові, з цієї рівності маємо, що $A=0$.

(4, 4) Розглядаємо матрицю X розміру $(2s+1)\times(2t+1)$ як блочну матрицю (див. випадок $(3,3)$), де вже A — матриця розміру $(s+1)\times(t+1)$, B — матриця розміру $s\times(t+1)$, C — матриця розміру $(s+1)\times t$, D — матриця розміру $s\times t$.

$[a;4,4;s+1,t+1+l] \Rightarrow (s+1)l=0$ $(l=1,\dots,t)$;

$[a; 4, 4; k, l] \Rightarrow (s + k + 1)l = 0$ $(k = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, t + 1)$, тобто $B = 0$;

$[a; 4, 4; k, l]$ при $k = 1, \ldots, s, l = t + 2, \ldots, 2t + 1 \Rightarrow$ матриця D дорівнює матриці A без останнього рядка і останнього стовпця.

Отже, залишилося визначити елементи матриці A.

$[b; 4, 4; 1, t + l] \Rightarrow 1l = 0(l = 2, \ldots, t + 1)$;

$[a; 4, 4; s + 1, t + 1 + l] \Rightarrow (s + 1)l = 0$ $(l = 1, \ldots, t)$ $(* * *)$;

$[a; 4, 4; k, t + l + 1]$ і $[b; 4, 4; k + 1, t + l + 1]$ (з однаковими лівими частинами) $\Rightarrow kl = (k + 1)(l + 1)$ $(k = 1, \ldots, s, l = 1, \ldots, t)$; тоді $(* * *) \Rightarrow$ всі елементи матриці A, які лежать над діагоналлю $11 = 22 = 33 = \ldots$, є нульовими. А якщо (додатково) $s < t$, то і сама ця діагональ нульова.

Для того щоб завершити доведення теореми, потрібно переконатися у тому, що в кожному з випадків були використані всі наслідки з рівностей $[a; i, j; p, q]$ і $[b; i, j; p, q]$. Для цього достатньо (у кожному з випадків) перевірити, що вказана в умові теореми матриця X завжди задовольняє дві матричні рівності, які задають (згідно визначення) множину морфізмов. Перевіряється це безпосередньо множенням відповідних матриць.

Список використаної літератури

1. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. –1977. – **71**. – С. 24–41.
2. *Дрозд Ю. А.* Ручные и дикие матричные задачи // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 39–74.
3. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Представления и квадратичные формы. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1979. – С. 104–114.
4. *Higman D.G.* Indecomposable representations at characteristic p // Duke Math. J. – 1954. – **21**. – P. 377–381.
5. *Erdman K.* Blocks of tame representation type and related algebras // Lecture Notes in Math., **1428**, Springer, 1990.
6. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, вып. 5. – С. 38–61.
7. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів // Доповіді НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3–9.
8. *Ройтер А. В.* О представлениях циклической группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун–та. – 1960. – № 19. – С. 65–74.
9. *Troy A.* Integral representation of cyclic groups of order p: Ph. P thesis. – Univ. of Illinois, 1961.
10. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.
11. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.
12. *Jones A.* Groups with a finite number of indecomposable integral representations // Mich. Math. J. – 1963. – no. 10. – P. 257–261.
13. *Назарова Л. А.* Представления четвериады // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1967. – **31**, С. 1361–1379.
14. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Матем. сб, „Наукова думка“, Киев. – 1976. – С. 275–277.
15. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин–та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
16. *Gudivok P. M.* On representations of finite groups over some factorial rings // Cont. Math. – 1992 – **131**. – C. 173–181.
17. *Гудивок П. М., Желізняк М. П.* Про нерозкладні матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород.

ун-ту. Серия матем. і інформ. –2008. – Вип. 17. – С. 92–95.
18. *Gabriel P.* Unzerlegbure Darstellungen, I // Manus. Math. – 1972. – **6**, no. 1. – P. 71–103.
19. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.
20. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
21. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – no. 5. – P. 3–86.
22. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.
23. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – **8**, вып. 3. – С. 34–42.
24. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, № 5. – С. 963–991.
25. *Loupias M.* These presentee pour obtenir le grade de Docteur es scienses. - Universite Francois Rabelais de Tours. - 1975. - 168 p.
26. *Овсиенко С. А.* Представления колчанов с соотношениями // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 88–103.
27. *Шкабара А. С.* Коммутативные колчаны ручного типа // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1978. – 78.42. – 32 с.
28. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Представления частично упорядоченных множеств с инволюцией // Киев: Ин-т математики АН УССР. – Препр. – 1986. – 86.80. – 26 с.
29. *Назарова Л. А., Бондаренко В. М., Ройтер А. В.* Ручные частично упорядоченные множества с инволюцией // Труды матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова. – 1990. – **183**. –С. 149–159.
30. *Bondarenko V. M, Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth // Canad. Math. Soc. Conf. Proc. – 1991. – **11**. – P. 67–88.
31. *Bondarenko V. M.* On dispersing representations of quivers and their connection with representations of bundles of semichains // Algebra Discrete Math. – 2002. – **1**, no. 1. – P. 19–31.
32. *Bondarenko V. M., Futorny V., Klimchuk T., Sergeichuk V. V., Yusenko K.* Systems of subspaces of a unitary space // Linear Algebra Appl. – 2013. – **438**, no. 5. – P. 2561–2573.
33. *Drozd Yu., Golovashchuk N., Zembyk V.* Representations of nodal algebras of type E // Algebra Discrete Math. – 2017. – **23**, no. 1. – P. 16–34.
34. *Гельфанд И. М., Пономарьов В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
35. *Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М.* Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
36. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear Algebra Appl. – 2003. – **365**, no. 5. – P. 45–90.
37. *Bondarenko V. M., Gerasimova T. G„ Sergeichuk V. V.* Pairs of mutually annihilating operators // Linear Algebra Appl.– 2009. – **430**, no. 1. – P. 86–105.
38. *Сергейчук В. В.* О классификации метаабелевых p-групп // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977, 150–161.
39. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О дикости задачи описания некоторых классов групп // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серия матем. – 1998, № 3. – С. 69–77.
40. *Belitskii G., Bondarenko V. M., Lipyanski R., Plachotnik V. V., Sergeichuk V. V.* The problems of classifying pairs of forms and local algebras with zero cube radical are wild // Linear Algebra Appl. – 2005. – **402**, no. 6. – P. 135–142.
41. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. 191–234.
42. *Carlson J. F., Friedlander E. M.* Exact category of modules of constant Jordan type // Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, 267–290, Progr. Math.,

269, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

43. *Carlson J. F., Friedlander E. M., Suslin A.* Modules for $Z/p \times Z/p$ // Comment. Math. Helv. – 2011. – **86**, no. 3. – P. 609–657.
44. *Benson D., Pevtsova Ju.* A realization theorem for modules of constant Jordan type and vector bundles // Trans. Amer. Math. Soc. – 2012. – **364**, no. 12. – P. 6459–6478.
45. *Benson D. J.* A survey of modules of constant Jordan type and vector bundles on projective space // Advances in representation theory of algebras, 39–63, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2013.
46. *Benson, D. J.* Modules of constant Jordan type and a conjecture of Rickard // J. Algebra. – 2014. – **398**. – P. 343–349.
47. *Baland S., Chan K.* Modules of constant Jordan type, pullbacks of bundles and generic kernel filtrations // J. Algebra. – 2016. – **462**. – P. 253-284.
48. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2012. – **23**, №1. – С. 19–27.
49. *Bondarenko V. M.; Lytvynchuk I. V.* The representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Algebra Discrete Math. – 2012. – **14**, no. 1. – P. 29–36.

Одержано 02.08.2017

УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦГТ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТІ СЕРІЙ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper containse the estimotes of rate of convergence to the normal law in series scheme.

У роботі містяться оцінки щвидкості збіжності до нормального закону у схемі серій.

У роботі [3] одержано досить загальні оцінки швидкості збіжності в ЦГТ в термінах псевдомоментів, пізніше ці результати ввійшли у монографію [2]. Ці результати викликали новий інтерес до різних узагальнень. Зокрема, у роботі [3] результати із [3] узагальнюються на послідовність серій незалежних випадкових величин. Використовуючи ідеї з [1], у даній роботі ми продовжуємо такі дослідження.

Нехай задано послідовність серій випадкових величин $\xi_{n1}, ..., \xi_{nn}$. При n фіксованому випадкові величини ξ_{ni} незалежні і однаково розподілені, $M\xi_{ni} = 0$; $D\xi_{ni} = \frac{1}{n}$; $F_n(x)$ – функція розподілу ξ_{ni}; $f_n(t)$ – характеристична функція ξ_{ni}. Позначимо $S_n = \xi_{n1} + \cdots + \xi_{nn}$ (тоді $DS_n = 1$), $\Phi_n(x)$ – функція розподілу стандартного нормального закону.

Введемо псевдомоменти

$$\nu_{n0}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, |x|^r) \left| d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right|,$$

$$\kappa_{n0}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \max(1, r|x|^{r-1}) \left|\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right)\right| dx,$$

$$\kappa_n(r) = r\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{r-1} \left|F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right| dx,$$

де $r \in (2, 3]$.

Теорема. *Для всіх $n \leq 1$ справедливі нерівності*

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \tag{1}$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max\left\{\frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\kappa_{n0}^{\frac{n}{n+1}}(r)}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{2}$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max\left\{\frac{\kappa_{n}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\kappa_{n}^{\frac{n}{rn+1}}(r)}{\sqrt{n}}\right\}, \tag{3}$$

де $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ – деякі сталі.

Лема 1. *Нехай* $\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right|$. *Для будь-яких* $t \in R$ *мають місце наступні нерівності*:

$$\omega_n(t) \le \nu_{n0}(r) \min\left(1, \frac{|t|^r}{6^{r-2}}\right), \tag{4}$$

$$\omega_n(t) \le \kappa_n(r) \frac{2^{5-2r}|t|^r}{r}, \tag{5}$$

$$\omega_n(t) \le \kappa_{n0}(r) \min\left(|t|, \frac{2^{5-2r}|t|^r}{r}\right). \tag{6}$$

Доведення здійснюється аналогічно до [1], зокрема, при доведенні тверджень (5) і (6) використовується оцінка

$$|\omega_n(t)| = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - it - \frac{(itx)^2}{2}\right) d\left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) \right| =$$

$$= \left| -it \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right| = \left| -it \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - it) \left(F_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)\right) dx \right|. \tag{7}$$

Лема 2. *Нехай* $c \in (0; e^{-6})$. *Нехай для деяких* $\theta_n > 0$ *і* $s \in [0; r]$, *де* $2 < r \le 3$, *і для будь-якого* $t \in R$ *виконується умова*

$$\omega_n(t) = \left| f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \le \theta_n \min(|t|^s, |t|^r). \tag{8}$$

Якщо $\theta_n \le c$ *і* $|t| \le T_1 = \sqrt{-2\ln\theta_n}$, *то*

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \le e^{-c_1 t^2}, \tag{9}$$

де $c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c}(-2\ln c)^{\frac{r-2}{2}} > 0$.

А якщо $\theta_n \le c$ *і* $|t| > T_1$, *то*

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \le \theta_n \left(1 + |t|^s\right). \tag{10}$$

Якщо ж $\bar{\theta}_n > c$, *то при* $|t| \le T_2 = \left(\frac{c}{\theta_n}\right)^{\frac{1}{r-2}}$

$$\left| f_n(t\sqrt{n}) \right| \le e^{-c_2 t^2}, \tag{11}$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - c\sqrt{e} > 0$.

Доведення леми 2 міститься у [1].

Лема 3. *Нехай виконуються умови леми* 2. *Тоді для всіх* $n \ge 2$

$$\rho_n \le C \max\left\{\frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{\theta_n^p}{\sqrt{n}}\right\},$$

де C – деяка абсолютна стала, $p = \min\left\{1, \frac{n}{sn+1}\right\}$.

Доведення. Використаємо нерівність ([4], стор. 299):

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(t) - g(t)|\,\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi T}\left|\sup_x G'(x)\right|.$$

Покладемо в даній нерівності

$$F(x) = \Phi_n(x);\ G(x) = \Phi(x);\ f(t) = \varphi_n(t);\ g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Тоді

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|f_n^n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}.$$

Зробимо заміну $t = z\sqrt{n}$ в інтегралі правої частини цієї нерівності. Тоді

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left|f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{z^2}{2}n}\right|\frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T}. \tag{12}$$

Використавши рівність

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\cdot b^{k-1},$$

де у нашому випадку $a = f_n(t\sqrt{n})$, $b = e^{-\frac{t^2}{2}}$, одержимо:

$$\left|f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right| \le \left|f_n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right|\sum_{k=1}^{n}\left|f_n(t\sqrt{n})\right|^{n-k} e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \tag{13}$$

Із умов леми, нерівностей (10) і (11) леми 2 і (13) одержимо: якщо $|t| \le T_m$ ($m = 1$ при $\theta_n \le c$ і $m = 2$ при $\theta_n > c$), то

$$\left|f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n}\right| \le \theta_n|t|^r\sum_{k=1}^{n} e^{-c_m t^2(n-k)}e^{-\frac{t^2}{2}(k-1)} \le \theta_n|t|^r n e^{-c_m t^2(n-1)}. \tag{14}$$

Ми врахували, що $c_m \le \frac{1}{2}$.

Нехай $n \ge 2$, $\theta_n > c$. У (12) покладемо $T = T_2\sqrt{n}$.

Будемо вважати, що

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} \le \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{T_2\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}},\ \left(\frac{\theta_n}{c}\right)^{\frac{1}{r-2}}\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}},\ \frac{(\theta_n)^{\frac{3-r}{r-2}}c^{\frac{-1}{r-2}}}{n^{\frac{3-r}{2}}} > 1$$

і

$$\frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}c^{r-3} > 1. \tag{16}$$

Оскільки

$$\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le 1,$$

то із (16) одержимо

$$\rho_n \le 1 < \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} c^{r-3}$$

і нерівність (1) виконується.

Із (14) для інтеграла у (12) одержуємо ($m = 2$)

$$I = \int_0^{T_2} \left| f_n^n(z\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \le \int_0^{T_2} \theta_n |t|^r n e^{-c_m t^2 (n-1)} \frac{dt}{t} = \theta_n n \int_0^{T_2} t^{r-1} e^{-c_2 t^2 (n-1)} dt =$$

$$= \theta_n n \frac{1}{2\left(c_2(n-1)\right)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{c_2 T_2^2 (n-1)} z^{\frac{r}{2}-1} e^{-z} dz \le \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right). \qquad (17)$$

Тоді із (17), (15) і (12) для $n \ge 2$

$$\rho_n \le C_3 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}.$$

Якщо $\theta_1 > c$, то $\rho_1 \le 1 < \frac{\theta_1}{c}$. У випадку $\theta_n > c$ теорема доведена.

Нехай $\theta_n \le c$, $n \ge 2$. Покладемо у (17) $T = X\sqrt{n}$, де $X = c(\theta_n)^{-p}$, $p = \min\left\{1; \frac{1}{sn+1}\right\}$. Тоді

$$I = \int_0^{\frac{T}{\sqrt{n}}} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{T'} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} + \int_{T'}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2, \qquad (18)$$

де $T' = \min(T_1, X)$.

Будемо розглядати випадок $T' = T_1$, бо інакше $I_2 = 0$ і доведення випливає із оцінки інтеграла I_1.

$$I_1 \le \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} 2^{\frac{r-2}{2}} (c_2)^{-\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) = C_4 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \qquad (19)$$

$$I_2 = \int_{T_1}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) - e^{-\frac{t^2}{2}n} \right| \frac{dt}{t} \le \int_{T_1}^{X} \left| f_n^n(t\sqrt{n}) \right| \frac{dt}{t} + \int_{T_1}^{X} e^{-\frac{t^2}{2}n} \frac{dt}{t} = I_2' + I_2''. \qquad (20)$$

Із (10) (враховуємо, що $T_1 \ge \sqrt{12}$)

$$I_2' \le (\theta_n)^n \int_{T_1}^{X} (1 + |t|^s)^n \frac{dt}{t} \le (2\theta_n)^n \int_{T_1}^{X} t^{sn-1} dt.$$

У випадку $s \geq \frac{1}{3}$

$$I_2' \leq (2\theta_n)^n \frac{X^{sn}}{sn} \leq \frac{3}{n}(\theta_n)^{(1-sp)n}(2c_1)^n \leq C_5 \frac{(\theta_n)^p}{\sqrt{n}}. \tag{21}$$

Якщо $n \geq 2$ і $s < \frac{1}{3}$, то $p = 1$, крім того $n - 1 - sn - \frac{1}{3} > 0$. Тоді

$$I_2' \leq (2\theta_n)^n \int\limits_{T_1}^{X} t^{sn-1} dt = (2\theta_n)^n \int\limits_{T_1}^{X} t^{sn-\frac{2}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \leq \frac{(2\theta_n)^n}{\sqrt[3]{T_1\left(sn+\frac{1}{3}\right)}} X^{sn+\frac{1}{3}} \leq$$

$$\leq \theta_n \frac{2^n 3}{\sqrt[6]{12}} (\theta_n)^{n-1-sn-\frac{1}{3}} c^{sn+\frac{1}{3}} \leq \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}} \frac{3}{c\sqrt[6]{12}} n^{\frac{r-2}{2}} (2c)^n \leq C_6 \frac{\theta_n}{n^{\frac{r-2}{2}}}. \tag{22}$$

Залишилось оцінити I_2'':

$$I_2'' = \int\limits_{T_1\sqrt{n}}^{X\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{(T_1\sqrt{n})^2} e^{-\frac{(T_1\sqrt{n})^2}{2}} \leq \frac{(\theta_n)^n}{12n} \leq \frac{\theta_n}{\sqrt{n}} \frac{c}{12\sqrt{2}}. \tag{23}$$

Із (7), (18)—(23) випливає, що у випадку $\theta_n \leq c$, $n \geq 2$ лема доведена.
Нехай $n = 1$, $\theta_1 \leq c$, $s > 0$. Тоді із (7) і умов леми

$$\rho_1 \leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^X \left| f_1(z) - e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}X} \leq \frac{2}{\pi}\theta_1 \int\limits_0^X t^{s-1} dt + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi\sqrt{2\pi}c} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(\theta_1)^{1-sp} c^s}{s} + \frac{24(\theta_1)^p}{\pi\sqrt{2\pi}c} \leq C_7 \left(1 + \frac{1}{s}\right) (\theta_1)^{\frac{1}{s+1}}.$$

Лема доведена.

Доведення теореми. Використовуємо лему 1. Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_n(r)$, $s = r$. Тоді

$$\rho_n \leq C^{(3)} \max\left\{ \frac{\kappa_n(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_n(r))^{\frac{n}{rn+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \kappa_{n0}(r)$, $s = 1$. Тоді одержимо

$$\rho_n \leq C^{(2)} \max\left\{ \frac{\kappa_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}}; \frac{(\kappa_{n0}(r))^{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Покладемо у лемі 3 $\theta_n = \nu_{n0}(r)$, $s = 0$. Тоді для всіх $n \geq 2$

$$\rho_n \leq C^{(1)} \frac{\nu_{n0}(r)}{n^{\frac{r-2}{2}}} \text{ і } \rho_1 \leq \nu_{10}(r).$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Zolotarev V. M.* Exactness of an approximation in the central limit theorem // Proceedings of the Second Japan – USSR Symposium on Probability Theory. – Berlin: Springer-Verlag, 1973. – P. 531–543.
2. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
3. *Бояриццева Т. В., Далекорей М. В., Михасюк М. М., Поляк І. Й., Слюсарчук П. В.* Деякі узагальнення оцінок Золотарьова для послідовності серій // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2017. – Вип. № 1 (30). – С. 32–42.
4. *Бояриццева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різно розподілених величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 1999. – Вип. 4. – С. 12–16.
5. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд–во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 12.07.2017

УДК 512.643.8

Я. В. Варга (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПРО ОДНУ НЕЛІНІЙНУ ІНТЕГРАЛЬНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ

We give a new approach for the investigation of existence and construction of an approximate solutions of nonlinear non-autonomous systems of ordinary differential equations under nonlinear integral boundary conditions. The constructivity of a suggested technique is shown on the example of non-linear integral boundary value problem with two solutions.

Застосовано новий підхід для дослідження існування та побудови наближених розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам. Доцільність запропонованої техніки показано на прикладі нелінійної інтегральної крайової задачі з двома розв'язками.

Вступ. У науковій літературі вивчення розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь підпорядкованих різного вигляду інтегральним крайовим умовам звертають досить багато уваги [1], [2], [3], [13], [8].

У даній роботі досліджується нелінійна інтегральна крайова задача загального вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right), t \in [a,b]\,, \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b p(s, x(s), x'(s))ds = \int\limits_a^b p(s, x(s),\ f(s, x(s)))ds = d. \tag{2}$$

де $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ і $p : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задані неперервні функції у деякій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$, конкретний вигляд якої буде показано нижче в (8), а $d \in \mathbb{R}^n-$ заданий вектор. Зауважимо, що в (2) підінтегральна функція може нелінійно залежати як від невідомої функції $x(\cdot)$ так і від її похідної $x'(\cdot) = f(\cdot, x(\cdot))$.

Крім того, припускається локальна ліпшицевість в області D функції f і p для всіх $t \in [a,b]$ і $\{u, v\} \in D$ у наступному вигляді:

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le K_f\,|u - v|\,, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &|p(t, u(t),\ f(t, u(t))) - p(t, v(t),\ f(t, v(t)))| \le K_p\,|u - v| + K^{'}\,|f(t,u) - f(t,v)| \\ &\le K_p\,|u - v| + K^{'}K_f\,|u - v| = (K_p + K^{'}K_f)\,|u - v| = K\,|u - v|\,, \end{aligned} \tag{4}$$

де $K_f, K_p, K^{'}, K = K_p + K^{'}K_f$ невід'ємні матриці розмірності $n \times n$.

Для дослідження існування і наближеного розв'язку задачі (1)-(2) застосуємо техніку, запропоновану в [5], [11–14], [6], [9].

На основі цього підходу замість інтегральних крайових умов (2) вводяться в розгляд параметризовані „модельні умови“ простого вигляду

$$x(a) = z,\ x(b) = \eta, \tag{5}$$

де $z := col(z_1, ..., z_n)$, $\eta := col(\eta_1, ..., \eta_n)$ є невідомими параметрами і спочатку замість інтегральної крайової задачі (1)-(2) досліджуються розв'язки наступної системи параметризованих двоточкових крайових задач „модельного типу“

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t)\right), t \in [a, b]\,, \quad x(a) = z, \quad x(b) = \eta. \tag{6}$$

1. Дослідження модельної задачі. Вихідними є дві обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b. Будується множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)\, z + \theta\eta \tag{7}$$

і для невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ визначимо покомпонентний векторний $\rho-$окіл множини $D_{a,b}$ наступним чином

$$D = B\left(D_{a,b}, \rho\right) = \bigcup_{y \in D_{a,b}} B\left(y, \rho\right), \tag{8}$$

де під векторним $\rho-$околом точки $y \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину

$$B\left(y, \rho\right) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - y| \leq \rho\}$$

і надалі нерівності між векторами, а також операції max і min розуміємо покомпонентно. Звернемо увагу на те, що множина $D_{a,b}$ утворена усіма прямими, що з'єднують точки множини D_a і точки множини D_b.

На основі множини D, функції f і правої частини системи диференціальних рівнянь (1) побудуємо вектор

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[a,b]\times D} f(t,x)\right]. \tag{9}$$

Умова 1. Існує невід'ємний вектор $\rho \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\rho \geq \delta_{[a,b],D}(f).$$

Умова 2. Існують невід'ємні матриці $K_f, K_p, K', K = K_p + K'K_f$ для яких локально в області D для функцій f і p виконуються умови Ліпшиця (3), (4).

Умова 3. Найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3\,(b-a)}{10} K_f \tag{10}$$

менше за одиницю

$$r(Q) < 1. \tag{11}$$

Для вивчення розв'язків модельної параметризованої задачі (6) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій

$$x_0\left(t, z, \eta\right) := z + \frac{t-a}{b-a}\left[\eta - z\right] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a}\right]\, z + \frac{t-a}{b-a}\eta, \tag{12}$$

$$x_m\left(t, z, \eta\right) := z + \int_a^t f\left(s, x_{m-1}\left(s, z, \eta\right)\right) ds - \tag{13}$$

$$-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f\left(s,x_{m-1}\left(s,z,\eta\right)\right)ds+\frac{t-a}{b-a}\left[\eta-z\right],t\in\left[a,b\right],\ m=1,2,...,$$

де $z\in D_a$, $\eta\in D_b$ є параметрами. Зауважимо, що всі функції $x_m\left(t,z,\eta\right)$ задовольняють „модельні крайові умови" (5) для будь-яких значень параметрів $z,\eta\ \in\mathbb{R}^n$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (13) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються* ***Умова 1-Умова 3****.*

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z,\eta)\in D\times D_b$:

1.Всі функції послідовності (13) є неперервно диференційовні на відрізку $t\in[a,b]$, *мають значення в область* D *і задовольняють умовам (5).*

2. Послідовність функцій (13) рівномірно збігається відносно $t\in[a,b]$ *при* $m\to\infty$ *до граничної функції*

$$x_\infty(t,z,\eta)=\lim_{m\to\infty}x_m(t,z,\eta).$$

3. Гранична функція задовольняє „модельні умови"

$$x_\infty(a,z,\eta)=z,\ x_\infty(b,z,\eta)=\eta.$$

4. Функція $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ *є единим неперервно диферкнційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t)=z+\int\limits_a^t f(s,x(s))ds-\frac{t-a}{b-a}\int\limits_a^b f(s,x(s))ds+\frac{t-a}{b-a}\left[\eta-z\right],\ t\in\left[a,b\right],$$

в області D.

Іншими словами, $x_\infty\left(t,z,\eta\right)$ *задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:*

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\ +\frac{1}{b-a}\Delta(z,\eta),\ x\left(a\right)=z,\ t\in\left[a,b\right],$$

де $\Delta(z,\eta):D_a\times D_b\to\mathbb{R}^n$ *це відображення, яке визначене формулою:*

$$\Delta(z,\eta)=\eta-z-\int\limits_a^b f(s,x_\infty(s,z,\eta))ds.$$

5.Справедлива оцінка

$$\left|x_\infty(\cdot,z,\eta)-x_m(\cdot,z,\eta)\right|\leqslant\frac{10}{9}\alpha_1(t,a,b-a)Q^m\left(1_n-Q\right)^{-1}\delta_{[a,b],D}(f),\tag{14}$$

для всіх $t\in[a,b]$ *і* $m\geq0$, *де* $\delta_{[a,b],D}(f)$ *задається формулою (9),*

$$\alpha_1(t,a,b-a)=2\left(t-a\right)\left(1-\frac{t-a}{b-a}\right),$$

причому

$$\alpha_1(t,a,b-a)\leq\frac{b-a}{2},$$

а матриця Q *має вигляд (10).*

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремі 1 [4]. А саме, на основі Лем, що доведені у [10], встановлюється, що при умовах теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ і всіх $t \in [a, b]$ послідовність функцій (13) належить області D і є послідовністю Коші, тобто рівномірно збіжною, у Банаховому просторі неперервних вектор-функцій $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ з стандартною рівномірною нормою.

2. Зв'язок граничної функції $x_\infty(\cdot, z, \eta)$ з розв'язком вихідної інтегральної крайової задачі.

Теорема 2. *В умовах Теореми 1 гранична функція*

$$x_\infty(t, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*)$$

послідовності (13) є неперервно диференцыйовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)-(2) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє систему $2n$ алгебраїчних чи трансцендентних, так званих „визначальних рівнянь“:

$$\begin{aligned} \Delta(z,\eta) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s,z,\eta))ds = 0, \\ \Lambda(z,\eta) &= \int_a^b p(s, x_\infty(s,z,\eta),\ f(s, x_\infty(s,z,\eta)))ds - d = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремах 2,3 [4].

Наступне твердження показує, що система „визначальних рівнянь“ (15) виявляє всі можливі розв'язки інтегральної крайової задачі (1)-(2), які належать області D і значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать відповідно множинам D_a і D_b.

Теорема 3. *Нехай виконуються усі умови Теореми 1.*

1. Якщо, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (15), тоді інтегральна крайова задача (1)-(2) має неперервно диференційовний розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що

$$x^0(a) = z^0,\ x^0(b) = \eta^0.$$

Крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (13)

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^0, \eta^0),\ t \in [a, b].$$

2. І навпаки, якщо інтегральна крайова задача (1)-(2) має розв'язок $x^0(\cdot) \in D$, то система „визначальних рівнянь“ (15) задовольняється при

$$z = x^0(a),\ \eta = x^0(b).$$

Зауважимо, що розв'язність системи „визначальних рівнянь“ (15) може бути встановлена на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“

$$\Delta_m(z,\eta) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds,$$

$$\Lambda_m(z,\eta)=\int\limits_a^b p(s,x_m(s,z,\eta),\ f(s,x_m(s,z,\eta)))ds-d=0, \tag{16}$$

яка може бути побудована явно.

На основі нерівностей (3), (4) і (14), врахувавши що

$$\int\limits_a^b \alpha_1(t,a,b-a)dt=\frac{(b-a)^2}{3},$$

прямим обчисленням можна довести справедливість наступного твердження.

Лема 1. *Припустимо, що мають місце умови Теореми 1 і крім того виконуються умови Ліпшиця (3), (4).*

Тоді для точної і наближеної визначальних функцій (15) і (16) мають місце наступні оцінки для будь-яких пар векторів $(z,\eta)\ \in D_a\times D_b$ *і* $m\geq 1:$

$$|\Delta(z,\eta)-\Delta_m(z,\eta)|\leq\frac{10(b-a)^2}{27}K_f\ Q^m\left(1_n-Q\right)^{-1}\delta_{[a,b],D}(f),$$
$$|\Lambda(z,\eta)-\Lambda_m(z,\eta)|\leq\frac{10(b-a)^2}{27}K\ Q^m\left(1_n-Q\right)^{-1}\delta_{[a,b],D}(f). \tag{17}$$

Наступна теорема дає конструктивні достатні умови розв'язності інтегральної крайової задачі (1)-(2) на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“(16).

Нам потрібно наступне означення для одного спеціального співвідношення між двома вектор-функціями.

Означення 1. *([7] , Означення 3) Нехай* $H\subset\mathbb{R}^p$ *є деяка непорожня множина. Для будь-якої пари вектор-функцій*

$$f_j(x)=col(f_{j,1}(x),...,f_{j,k}(x)):H\to\mathbb{R}^p,\ j=1,2$$

будемо писати, що має місце співвідношення

$$f_1\rhd_H f_2 \tag{18}$$

тоді і тільки тоді, коли існує функція $k:H\to\{1,2,...,p\}$ *, така що*

$$f_{1,k(x)}>f_{2,k(x)},$$

для всіх $x\in H$.

Зауважимо, що (18) означає, що в кожній точці $x\in H$ принаймні одна із компонент вектора $f_1(x)$, а саме $k(x)-$ва компонента, більша ніж відповідна компонента вектора $f_2(x)$. Бачимо, що цей номер компоненти залежить від точки x.

Теорема 4. *Припустимо, що виконуються умови Леми 1. Крім того можна вказати таке* $m\geq 1$ *і множину* $\Omega\subset\mathbb{R}^{2n}$ *вигляду*

$$\Omega:=D_1\times D_2,$$

де $D_1 \subset D_a$, $D_2 \subset D_b$ є певні обмежені відкриті множини, такі що відображення

$$H_m(z,\eta) = \begin{pmatrix} \eta - z - \int\limits_a^b f(s, x_m(s,z,\eta))ds \\ \int\limits_a^b p(s, x_m(s,z,\eta),\ f(s, x_m(s,z,\eta)))ds - d \end{pmatrix} \tag{19}$$

задовольняє співвідношення

$$|H_m(z,\eta)| \rhd_{\partial\Omega} \begin{bmatrix} \frac{10(b-a)^2}{27} K_f\ Q^m \left(1_n - Q\right)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \\ \frac{10(b-a)^2}{27} K\ Q^m \left(1_n - Q\right)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f) \end{bmatrix}$$

на границі $\partial\Omega$ області Ω.

Якщо крім того, топологічний степінь Брауера відображення H_m відносно множини Ω (і відносно 0) не дорівнює нулю

$$\deg(H_m, \Omega, 0) \neq 0,$$

тоді існує пара $(z^*, \eta^*) \in D_1 \times D_2$ така, що функція

$$x^*(\cdot) = x_\infty(\cdot, z^*, \eta^*) = \lim_{m\to\infty} x_m(t, z^*, \eta^*)$$

на відрізку $[a,b]$ є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)-(2).

Доведення. Доведення можна провести по аналогії як у Теоремі 4 [12].

Приклад 1. *Застосуємо чисельно-аналітичний підхід, що описаний вище на відрізку $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ до системи диференціальних рівнянь*

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2^2(t) - \frac{t}{5}x_1(t) + \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{25} := f_1(t, x_1, x_2),$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{t^2}{10}x_2(t) + \frac{t}{8}x_1(t) - \frac{21}{800}t^3 + \frac{1}{16}t + \frac{1}{5} := f_2(t, x_1, x_2), \tag{20}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} s^2 x^2(s) ds = \frac{1}{4000} = d_1$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x_1'(s) ds = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f_1(s, x_1(s), x_2(s)) ds = d_2 = \frac{1}{80} \tag{21}$$

Можна перевірити, що одним з розвязків крайової задачі (20)-(21) є пара функцій

$$x_1^*(t) = \frac{t^2}{20} - \frac{1}{2},\ x_2^*(t) = \frac{t}{5}. \tag{22}$$

Введемо наступні параметри:

$$z := x(0) = col(x_1(0), x_2(0)) = col(z_1, z_2),$$
$$\eta := x\left(\frac{1}{2}\right) = col\left(x_1\left(\frac{1}{2}\right), x_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = col\left(\eta_1, \eta_2\right).$$

Виберемо області D_a і D_b:

$$D_a = D_b = \left\{(x_1, x_2) : -0.6 \leq x_1 \leq 0.1,\ -1 \leq x_2 \leq 0\right\}.$$

У цьому випадку, множина $D_{a,b}$ має вигляд

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

Виберемо вектор

$$\rho := col\left(0.2;\ 0.2\right),$$

тоді область D буде наступною:

$$D = \left\{(x_1, x_2) : -0.8 \leq x_1 \leq 0.3,\ -1.2 \leq x_2 \leq 0.2\right\}.$$

Прямі обчислення показують, що умови Ліпшиця (3), (4) для правої частини (20) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix}$$

і маємо $$Q = \tfrac{3}{20}\begin{bmatrix} 1/10 & 2/5 \\ 1/16 & 1/40 \end{bmatrix},\ r(Q) = 0.03375 < 1,$$

$$\delta_{[a,b],D}(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\times D} f(t,x)\right] = \begin{bmatrix} 0.535 \\ 0.036875 \end{bmatrix},$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \geq \frac{b-a}{2}\delta_{[a,b],D}(f) = \begin{bmatrix} 0.19375 \\ 0.01359375 \end{bmatrix}.$$

Так, перевірили, що всі умови Теореми 1 виконуються і тому послідовність функцій (13) для цього прикладу є збіжною.

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (16), при $m = 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 1.

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$) наступна:

$$\max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \leq 9.7\cdot 10^{-9}, \qquad \max_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \leq 3\cdot 10^{-10}.$$

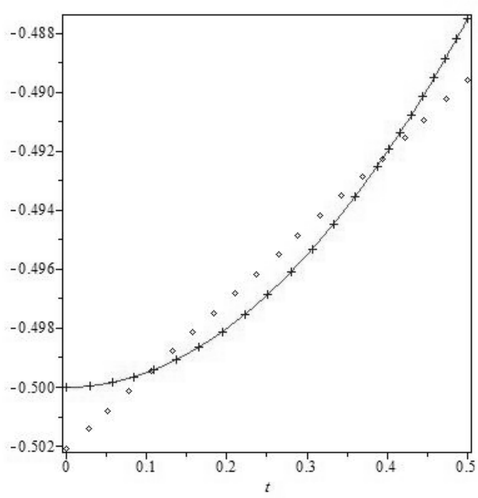
Згідно Теореми 3 число розв'язків алгебраїчної визначальної системи (16), співпадає з числом розв'язків даної інтегральної крайової задачі.

Розрахунки показують, що система наближених визначальних алгебраїчних рівнянь (16), при $m = 0, 1, 2, 3$, окрім розв'язків представлених в Табл. 1., має ще інші розв'язки, які наведено в Табл. 2.

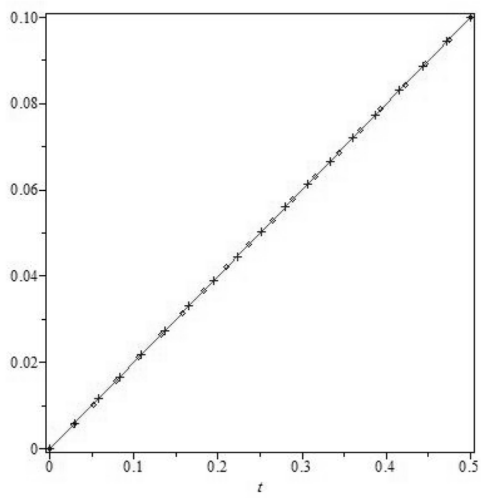
	m=0	m=1	m=2	m=3
z_1	-0.5020833332	-0.5000068237	-0.4999999633	-0.5000000089
z_2	$-1.444245992 \cdot 10^{-12}$	$4.95780167 \cdot 10^{-7}$	$-1.14252226 \cdot 10^{-8}$	$-1.919575672 \cdot 10^{-10}$
η_1	-0.4895833332	-0.4875068237	-0.4874999633	-0.4875000089
η_2	0.1	0.10000044	0.09999998849	0.09999999963

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів для першого (22) розв'язку



а) перша компонента



б) друга компонента

Рис. 1. Перший розв'язок (22) (лінія) та його нульове ($\diamond$) і третє наближення ($\times$).

Підставивши третє наближення $\widetilde{x}_3(t) = col(\widetilde{x}_{31}(t), \widetilde{x}_{32}(t))$ до другого розв'язку в систему диференціальних рівнянь (20) отримаємо наступну нев'язку:

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left| \widetilde{x}'_{31}(t) - \widetilde{x}^2_{32}(t) + \tfrac{t}{5}\widetilde{x}_{31}(t) - \tfrac{t^3}{100} + \tfrac{t^2}{25} \right| \approx 1.5 \cdot 10^{-9},$$

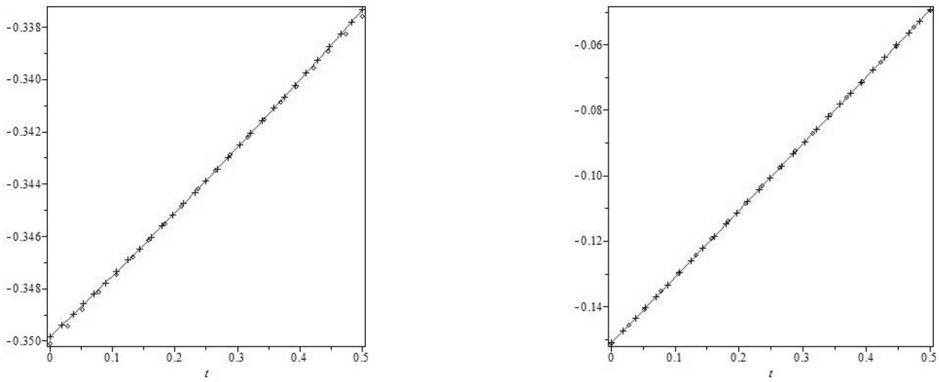
$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} \left| \widetilde{x}'_{32}(t) - \tfrac{t^2}{10}\widetilde{x}_{32}(t) - \tfrac{t}{8}\widetilde{x}_{31}(t) + \tfrac{21}{800}t^3 - \tfrac{1}{16}t - \tfrac{1}{5} \right| \approx 5 \cdot 10^{-10}.$$

На Рис.2 показано графіки нульового, першого та третього наближення до другого розв'язку інтегральної КЗ.

	m=0	m=1	m=2	m=3
$\widetilde{z}_1$	-0.3500955256	-0.3498246512	-0.349827723	-0.3498277249
$\widetilde{z}_2$	-0.1512243065	-0.1510006429	-0.1510009307	-0.1510009229
$\widetilde{\eta}_1$	-0.3375955256	-0.3373246512	-0.337327723	-0.3373277249
$\widetilde{\eta}_2$	-0.0494741289	-0.0492490804	-0.4924938195e-1	-0.04924937409

Таблиця 2.

Наближені значення параметрів для другого розв'язку ІКЗ



а) перша компонента б) друга компонента

Рис. 2. Нульове ($\diamond$) , перше ($\times$) та третє (лінія) наближення другого розв'язку.

Список використаної літератури

1. *Benchohra M., Nieto J.J. and Qahab A.* Second- order boundary value proble with integral boundary conditions, *Boundary Value Problems* 2011, 2011:260309, doi:10.1155/2011/260309, 9 pages
2. *Mao Jinxiu, Zhao Zengqin and Xu Naiwei*, On existence and uniqueness of positive solutions for integral boundary value problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 2010, No.16, 1-8
3. Rontó M. and Marynets. K., On numerical-analytic method for nonlinear boundary value problem with integral conditions, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* No. 99 (2012, p.1-23), http.//www.math. u-szeged.hu/ejqtde/
4. *Rontó M., Varha Y. and Marynets K.,* Further results on the investigation of solutions of integral boundary value problems, *Tatra Mountains Mathematical Publications,* ***63*** *(2015),* 247-267, DOI:10.1515/tmmp-2015-0035
5. *Ronto A., Ronto M. and Varha J.,* A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems, *Applied Mathematics and Computation,* (2015), **250,** 689-700
6. *Ronto A. and Ronto M.*, Periodic successive approximations and interval halving, *Miskolc Mathematical Notes,* **13,** No.2 (2012), 459-482
7. *Ronto A. and Ronto M.,* On a Cauchy-Nicoletti type three-point boundary value problem for linear differential equations with argument deviation, *Miskolc Mathematical Notes,* **10,** No.2 (2009), 173-205
8. *Варга Я.В.* Дослідження розв'язків деяких нелінійних функціональних та інтегральних крайових задач на основі параметризації: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння"/Я.В. Варга – Ужгород, 2017.–22 с.
9. *Ronto A., Ronto M. and Shchobak N,* Constructive analysis of periodic solutions with interval halving, *Boundary Value Problems* 2013 2013:57, doi:10.1186/1687-2770-2013-57, 34 pages
10. *M. Rontó and J. Mészáros,* "Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations," Ukrainian Math. J., vol. 48, no. 1, pp. 101–107, 1996. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1007/BF02390987
11. *Ronto A., Ronto M. and Shchobak N,* Notes on interval halving procedure for periodic and two-point problems, *Boundary Value Problems* 2014 2014:164, doi:10.1186/s13661-014-0164-9, 20 pages
12. *Rontó M. and Varha Y.,* Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems, *Miskolc Mathematical Notes,* **15,** No.2 (2014), 725-742
13. *Rontó M. and Varha Y.,* Successive approximations and interval halving for integral boundary value problems, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 16 , No.2 (2015), 1129-1152
14. *Ronto A., Ronto M. and Varha, J.,* On non-linear boundary value problems and parametrisation at multiple nodes, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.,* 2016, No. 80, 1–18; doi: 10.14232/ejqtde.2016.1.80 http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

Одержано 04.07.2017

УДК 512.53

Ю. В. Жучок (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ, Україна)

МОНОЇДИ ЕНДОМОРФІЗМІВ НАПІВРЕШІТОК НАПІВГРУП

We prove that the endomorphism monoid of a semilattice of semigroups, which are semilattice indecomposable, is isomorphically embedded into the wreath product of a transformation semigroup with a small category.

Доведено, що моноїд ендоморфізмів напіврешітки напівгруп, нерозкладних у напіврешітку, ізоморфно занурюється у вінцевий добуток напівгрупи перетворень з малою категорією.

Похідні структури алгебраїчних систем є одним з інструментів дослідження будови й класифікації самих систем. В багатьох випадках похідна структура містить суттєву інформацію про загальні властивості даної алгебраїчної системи. До найбільш поширених похідних структур належать решітки підалгебр, решітки конгруенцій, групи автоморфізмів, моноїди ендоморфізмів та ін. Особлива увага при вивченні моноїдів ендоморфізмів приділяється таким проблемам як опис абстрактних характеристик, дослідження алгебраїчних та комбінаторних властивостей, визначеність алгебраїчних систем їх ендоморфізмами, побудова точних зображень тощо (див., напр., [1–5]).

Останнім часом у теорії напівгруп для опису зображень моноїдів ендоморфізмів досить активно використовується конструкція вінцевого добутку та деякі її модифікації. Так, В. Флейшер [6] ввів конструкцію вінцевого добутку моноїда з малою категорією й використав її для опису точного зображення моноїда ендоморфізмів довільної дії [7]. У. Кнауер і М. Ніпорте [8] довели, що моноїд сильних ендоморфізмів неорієнтованого скінченного графу без кратних ребер є ізоморфним вінцевому добутку групи автоморфізмів канонічного сильного фактор-графа з деякою категорією. В [9] було доведено, що напівгрупа ендоморфізмів вільного добутку напівгруп заданого класу ізоморфна вінцевому добутку напівгрупи перетворень з малою категорією. Подібні результати для неорієнтованих незв'язних гіперграфів без кратних ребер і деяких відповідностей на напівгрупі ендоморфізмів відношення еквівалентності були отримані в [10] та [11] відповідно. В [12] було показано, що група автоморфізмів ортогональної суми напівгруп є ізоморфною прямому добутку вінцевих добутків груп. Для груп автоморфізмів довільної напівгрупи схожу характеристику наведено в [13]. Природньою в цьому напрямку є задача опису зображень моноїда ендоморфізмів довільної напівгрупи.

В цій роботі, використовуючи, що будь-яка напівгрупа є напіврешіткою нерозкладних у напіврешітку напівгруп, побудовано ізоморфне занурення моноїда ендоморфізмів напівгрупи у вінцевий добуток моноїда з малою категорією (теорема 1). Отриманий результат було анонсовано в [14]. Крім того, описується зображення моноїда ендоморфізмів напіврешітки напівгруп, які не розкладаються у напіврешітку, унарними відношеннями (теорема 2).

1. Попередні відомості. Нехай I — напіврешітка, тобто комутативна напівгрупа ідемпотентів. Напівгрупа S називається *напіврешіткою I напівгруп $S_i, i \in I$*, якщо виконуються наступні умови:

1) $S = \bigcup_{i\in I} S_i$;
2) $S_i \cap S_j = \emptyset$ для всіх відмінних $i, j \in I$;
3) $S_iS_j \subseteq S_{ij}$ для будь-яких $i, j \in I$.

Якщо S — напіврешітка I напівгруп $S_i, i \in I$, то сімейство $D = \{S_i | i \in I\}$ називають *декомпозицією* напівгрупи S у напіврешітку напівгруп, а напівгрупи $S_i, i \in I,$ — *компонентами* в D.

Напівгрупа S називається *нерозкладною у напіврешітку*, якщо $D = \{S\}$ є єдиною її декомпозицією у напіврешітку напівгруп.

Добре відомо (див., напр., [15]), що будь-яка напівгрупа має найбільшу декомпозицію у напіврешітку своїх піднапівгруп, при цьому компоненти такої декомпозиції є нерозкладними у напіврешітку. Враховуючи цей результат, будемо позначати довільну напівгрупу S також через $\bigcup_{i\in I} S_i$, вважаючи, що $\{S_i | i \in I\}$ — це найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп.

Нехай S — довільна напівгрупа. Множину всіх гомоморфізмів напівгрупи S в напівгрупу T будемо позначати через $Hom(S; T)$.

Моноїд усіх ендоморфізмів напівгрупи S позначається через $End(S)$.

Для довільного відображення $\varphi : A \to B$ і непорожньої підмножини $Y \subseteq A$ через $\varphi|_Y$ позначається обмеження φ на Y.

Лема 1. *Нехай $D = \{S_i \mid i \in I\}$ — найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп, $\varphi \in End(S)$. Тоді для кожного $i \in I$ знайдеться $j \in I$, таке що $\varphi|_{S_i} \in Hom(S_i; S_j)$.*

Доведення. Припустимо, що існує $i \in I$, таке що $S_i\varphi \nsubseteq S_j$ для всіх $j \in I$, та покладемо $\Lambda_i = \{\alpha \in I | S_i\varphi \cap S_\alpha \neq \emptyset\}$. Зрозуміло, що $S_i\varphi$ є напіврешіткою Λ_i напівгруп $S^*_\alpha = S_i\varphi \cap S_\alpha, \alpha \in \Lambda_i$, при цьому $|\Lambda_i| \geq 2$. Але тоді, як неважко помітити, S_i є напіврешіткою Λ_i напівгруп $(S^*_\alpha)\varphi^{-1}, \alpha \in \Lambda_i$, що суперечить умові нерозкладності компонент з D у напіврешітку напівгруп. Отже, $\varphi|_{S_i} \in Hom(S_i; S_j)$ для деякого $j \in I$.

Лему доведено.

Відмітимо, що обернене твердження до цієї леми в загальному випадку невірне (див. приклади п. 2).

Далі визначимо вінцевий добуток моноїда з малою категорією. Для малої категорії $\mathscr{K}$ з множиною об'єктів $X = Ob\mathscr{K}$ покладемо

$$M = \bigcup_{a,b\in X} Mor_{\mathscr{K}}(a; b)$$

та позначимо через $Map(X; M)$ множину всіх відображень X в M.

Нехай T — моноїд з одиницею 1, який діє зліва на X, і

$$V = \{(t; f) | t \in T, f \in Map(X; M), xf \in Mor_{\mathscr{K}}(x; tx) \text{ для } x \in X\}.$$

Визначимо бінарну операцію на V за правилом:

$$(r; f)(p; g) = (rp; f_pg),$$

де $x(f_pg) = (px)f\,xg$ для всіх $x \in X$ і $(px)f\,xg$ — це композиція морфізмів в категорії $\mathscr{K}$.

Множина V з такою операцією є моноїдом з одиницею $(1;e)$, де $e \in Map(X;M)$ — таке відображення, що $xe \in Mor(x;x)$ є тотожнім морфізмом id_x для кожного об'єкту x в $\mathscr{K}$.

Моноїд V називається *вінцевим добутком* моноїда T з малою категорією $\mathscr{K}$ і позначається через $T\, wr\, \mathscr{K}$ (див., напр., [7]).

Відмітимо, що композиція відображень всюди в цій роботі визначається справа наліво.

2. Моноїди ендоморфізмів напіврешіток напівгруп. Нехай S — довільна напівгрупа, $D = \{S_i \mid i \in I\}$ — найбільша декомпозиція напівгрупи S у напіврешітку напівгруп.

Визначимо малу категорію $\mathscr{C}$, поклавши

$$Ob\mathscr{C} = D, \;\; Mor_{\mathscr{C}}(S_i;S_j) = Hom(S_i;S_j),$$

$$Mor\mathscr{C} = \bigcup_{i,j\in I} Mor_{\mathscr{C}}(S_i;S_j).$$

Моноїд всіх перетворень ζ множини I, таких що $Mor_{\mathscr{C}}(S_i;S_{i\zeta}) \neq \varnothing$ для всіх $i \in I$, позначимо через $T(I)$.

Неважко помітити, що напівгрупа $T(I)$ природньо діє зліва на об'єкти категорії $\mathscr{C}$ і ми отримуємо такий вінцевий добуток:

$$T(I)\, wr\, \mathscr{C} = \{(\varphi;f)|\varphi \in T(I)\,, f \in Map(Ob\mathscr{C};Mor\mathscr{C}), S_i f \in Mor_{\mathscr{C}}(S_i;\varphi S_i)\}.$$

Якщо $\varphi \in End(S)$, то через φ^* позначимо перетворення множини I, яке індукується ендоморфізмом φ, тобто

$$\varphi^* : I \to I : i \mapsto i\varphi^* = j, \;\; \textit{якщо} \;\; S_i\varphi \subseteq S_j.$$

Згідно Леми 1 (див. п. 1) перетворення φ^* є коректно визначеним.

Основним результатом є наступна теорема.

Теорема 1. *Моноїд ендоморфізмів $End(\bigcup_{i\in I} S_i)$ напіврешітки I напівгруп $S_i, i \in I$, ізоморфно занурюється у вінцевий добуток $T(I)\, wr\, \mathscr{C}$ моноїда перетворень $T(I)$ з малою категорією $\mathscr{C}$.*

Доведення. Визначимо відображення ξ моноїда $End(\bigcup_{i\in I} S_i)$ у вінцевий добуток $T(I)\, wr\, \mathscr{C}$ за правилом:

$$\xi : \varphi \mapsto (\varphi^*;f), \textit{де} \;\; f : S_i \mapsto \varphi|_{S_i} \;\; (i \in I).$$

Очевидно, ξ є ін'єктивним відображенням.

Для будь-яких $\varphi, \psi \in End(\bigcup_{i\in I} S_i)$ маємо

$$(\varphi\psi)\xi = ((\varphi\psi)^*;\mu), \textit{де} \;\; \mu : S_i \mapsto (\varphi\psi)|_{S_i},$$

$$\varphi\xi = (\varphi^*;f), f : S_i \mapsto \varphi|_{S_i} \;\; \textit{та} \;\; \psi\xi = (\psi^*;g), g : S_i \mapsto \psi|_{S_i},$$

$$\varphi\xi\,\psi\xi = (\varphi^*;f)(\psi^*;g) = (\varphi^*\psi^*;f_{\psi^*}g).$$

Ясно, що $(\varphi\psi)^* = \varphi^*\psi^*$. Більш того, для всіх $S_i \in Ob\mathscr{C}$

$$S_i\,\mu = (\varphi\psi)|_{S_i} = \varphi|_{S_i\psi} \circ \psi|_{S_i} = \varphi|_{S_{i\psi^*}} \circ \psi|_{S_i} =$$

$$= S_{i\psi^*} f \circ S_i g = (\psi^* S_i) f \circ S_i g = S_i(f_{\psi^*} g),$$

де $\circ$ — композиція часткових перетворень на $S = \bigcup_{i\in I} S_i$.

Таким чином, $f_{\psi^*} g = \mu$, і отже, ξ — мономорфізм.

Теорему доведено.

Далі побудуємо інше зображення моноїда ендоморфізмів напіврешітки нерозкладних у напіврешітку напівгруп.

Нехай $\mathscr{C}$ — мала категорія, визначена вище. Покладемо $Mor^0\mathscr{C} = Mor\mathscr{C} \cup \{0\}$, $0 \notin Mor\mathscr{C}$, та визначимо операцію на цій множині в такий спосіб:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi \circ \psi, & \varphi \neq 0 \neq \psi \ \ \textit{та} \ \ im(\psi) \subseteq dom(\varphi), \\ 0 & \textit{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $\varphi \circ \psi$ — композиція гомоморфізмів.

Зрозуміло, що $Mor^0\mathscr{C}$ є напівгрупою відносно щойно визначеної операції. Крім того, з точністю до ізоморфізму $Mor^0\mathscr{C}$ міститься в напівгрупі всіх бінарних відношень на S.

Нагадаємо, що множина всіх підмножин напівгрупи S з операцією множення $XY = \{xy \,|\, x \in X, y \in Y\}$ для всіх $X, Y \subseteq S$, є напівгрупою, яка називається *глобальною наднапівгрупою* напівгрупи S і позначається через $Gl(S)$.

Для всіх $i \in I$ покладемо

$$M_{i*} = \bigcup_{j\in I} Mor_{\mathscr{C}}(S_i; S_j) \ \text{ і } \ L_{Mor^0\mathscr{C}} = \{M_{i*} | i \in I\} \cup \{\{0\}\}.$$

Множину всіх трансверсалей, що відповідають розбиттю $L_{Mor^0\mathscr{C}}$ напівгрупи $Mor^0\mathscr{C}$, позначимо через $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$.

Безпосередня перевірка свідчить, що $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$ є піднапівгрупою глобальної наднапівгрупи $Gl(Mor^0\mathscr{C})$.

Наступна теорема описує зображення моноїда ендоморфізмів напівгрупи унарними відношеннями.

Теорема 2. *Моноїд ендоморфізмів $End(\bigcup_{i\in I} S_i)$ напіврешітки I напівгруп $S_i, i \in I$, ізоморфно занурюється у напівгрупу $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$.*

Доведення. Неважко пересвідчитись, що відображення ζ моноїда ендоморфізмів $End(\bigcup_{i\in I} S_i)$ у напівгрупу $Tr(L_{Mor^0\mathscr{C}})$, яке визначається за правилом:

$$f\zeta = \{f|_{S_i} : i \in I\} \cup \{0\} \ \ \textit{для всіх} \ \ f \in End(\bigcup_{i\in I} S_i),$$

є ін'єктивним гомоморфізмом.

Теорему доведено.

Наведемо далі приклади застосування Теореми 1.

Приклад 1. Нехай X — довільна множина з потужністю $|X| \geq 2$ та X^+ — вільна напівгрупа, породжена X. Розглянемо зображення напівгрупи ендоморфізмів $End(X^+)$.

Позначимо напіврешітку всіх непорожніх підмножин X відносно операції об'єднання множин через $U(X)$. Для всіх $A \in U(X)$ нехай

$$X_A = \{w \in X^+ | c(w) = A\},$$

де $c(w)$ — зміст слова w. Симетрична напівгрупа всіх перетворень множини X позначається через $\Im(X)$.

Відомо, що $\{X_A | A \in U(X)\}$ — найбільша декомпозиція вільної напівгрупи X^+ у напіврешітку $U(X)$ піднапівгруп $X_A, A \in U(X)$. Більш того, гомоморфізми напівгруп $X_A, A \in U(X)$, в $X_B, B \in U(X)$, визначаються відображеннями $f : A \to X^+$, такими що $\bigcup_{w \in Af} c(w) = B$. Це означає, що $T(U(X)) = \Im(U(X))$.

За Теоремою 1, $End(X^+)$ занурюється у вінцевий добуток $\Im(U(X))wr\mathscr{C}$ симетричної напівгрупи $\Im(U(X))$ з відповідною малою категорією $\mathscr{C}$. Відзначимо, що $End(U(X))$ є власною піднапівгрупою напівгрупи $T(U(X))$. Дійсно, для різних елементів $a, b \in X$ нехай $\psi : X_{\{a\}} \to X_{\{b\}}$ позначає ізоморфізм $X_{\{a\}}$ на $X_{\{b\}}$. Визначимо перетворення ξ напівгрупи X^+ за правилом:

$$w\xi = \begin{cases} w\psi, & w \in X_{\{a\}}, \\ w & \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $w \in X^+$. Тоді $\xi \notin End(X^+)$, оскільки

$$\xi(ab) = ab \neq b^2 = \xi(a)\xi(b).$$

Таким чином, перетворення напіврешітки $U(X)$, яке індукується відображенням ξ, не належить $End(U(X))$.

Приклад 2. Нехай $S(X)$ — симетрична група на скінченній множині X, де $|X| > 1$, та $I = \{0, 1\}$ — мультиплікативна напіврешітка. Тоді симетрична напівгрупа $\Im(X)$ є нетривіальною напіврешіткою I піднапівгруп $S_0 = \Im(X) \setminus S(X)$ і $S_1 = S(X)$.

Ясно, що

$$End(I) = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}.$$

Опис всіх гомоморфізмів S_i на S_j, де $i, j \in I$, можна знайти в [1]. В цьому випадку, $End(\Im(X))$ занурюється у вінцевий добуток $End(I)wr\mathscr{C}$, де $\mathscr{C}$ — підходяща мала категорія.

Отже, в теоремі 1 замість напівгрупи перетворень $T(I)$ можна використовувати й моноїд ендоморфізмів $End(I)$.

Відмітимо, що отримані у роботі результати можна розглянути і в більш загальному випадку, для моноїдів ендоморфізмів сполуки напівгруп, нерозкладних у сполуку.

Список використаної літератури

1. *Schein B. M., Teclezghi B.* Endomorphisms of finite full transformation semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – **126**. – P. 2579–2587.
2. *Mazorchuk V.* Endomorphisms of B_n, PB_n and C_n // Comm. Algebra. – 2002. – **30**. – P. 3489–3513.
3. *Araujo J., Konieczny J.* Automorphisms of endomorphism monoids of relatively free bands // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2007. – **50**. – P. 1–21.
4. *Fernandes V. H., Jesus M. M., Maltsev V., Mitchell J. D.* Endomorphisms of the semigroup of order-preserving mappings // Sem. Forum. – 2010. – **81**. – P. 277–285.
5. *Bondar E. A., Zhuchok Yu. V.* Semigroups of strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, no. 6. – P. 823–834.
6. *Флейшер В.* О сплетении моноидов с категориями // Тр. Акад. наук ЭССР. – 1986. – **35**. – С. 237–243.

7. *Fleischer V., Knauer U.* Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories. In.: LNM. – 1988. – **1320**, Berlin-Heidelberg-New York. – P. 84–96.
8. *Knauer U., Nieporte M.* Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. – 1989. – **52**. – P. 607–614.
9. *Zhuchok Yu. V.* Endomorphism semigroups of some free products // Jour. of Math. Scien. – 2012. – **187**, no. 2. – P. 146–152.
10. *Zhuchok Yu. V.* The monoid of endomorphisms of disconnected hypergraphs // Alg. and Discr. Math. – 2013. – **1**, no. 16. – P. 134–150.
11. *Zhuchok Yu. V., Toichkina E. A.* Correspondences of the semigroup of endomorphisms of an equivalence relation // Math. Notes. – 2015. – **97**, no. 2. – P. 201–212.
12. *Жучок А. В.* Групи автоморфізмів ортогональних сум напівгруп // Доп. НАН України. – 2011. – **6**. – С. 12–16.
13. *Жучок А. В.* Група автоморфізмів напівгрупи // Доп. НАН України. – 2012. – **1**. – С. 7–10.
14. *Zhuchok Yu. V.* The endomorphism monoid of an arbitrary semigroup // Inter. Conf. on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov: Conference materials, Kyiv. – 2012. – P. 183.
15. *Tamura T.* Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups // Sem. Forum. – 1972. – **4**. – P. 255–261.

Одержано 10.07.2017

УДК 512.53

Я. В. Заціха (Ін-т математики НАН України)

ОПИС ПІДНАПІВГРУП НАПІВГРУП МАЛОГО ПОРЯДКУ

The subsemigroups of the semigroups of order $n = 3$ are described.

Описано піднапівгрупи напівгруп порядку $n = 3$.

Групи малих порядків вивчені досить добре (див., напр., [1]). Напівгруп малих порядків набагато більше, ніж груп, і тому вивчені вони не в такій мірі, як групи. Зокрема, число напівгрупп порядків 5, 6, 7 дорівнює відповідно 1160, 15973, 836021. Зауважимо при цьому, що більшість задач про опис напівгруп фіксованого порядку отримано з використанням комп'ютерних програм. За традицією опис у таких випадках проводиться з точністю до ізоморфізму та дуальності. Напівгрупи, що розглядаються з такою точністю, називаються різними.

Напівгрупи порядку $n < 4$ вивчені досить детально. Випадки $n = 1, 2$ тривіальні (число різних напівгруп відповідно 1 і 4). Напівгрупи порядку $n = 3$ описав Т. Тамура, у вигляді таблиць Келі, ще в 1953 р. [2]. Вони вивчалися, зокрема, в [3–5]. У цій статті розглядається задача про опис всіх піднапівгруп напівгруп третього порядку.

Автор висловлює щиру подяку професору В. М. Бондаренку за корисні поради.

1. Попередні відомості. У цьому розділі ми у вигляді таблиць Келі випишемо повний список попарно різних напівгруп 3-го порядку в такому вигляді (і в такій же послідовності), як у [3]:

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$

	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 0\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$
$\langle 1\rangle$	$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$
$\langle 2\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 0\rangle$	$\langle 1\rangle$

2. Опис піднапівгруп. Наша мета — виписати для кожної із напівгруп третього порядку, що вказані в розділі 1, всі її піднапівгрупи, що породжуються одним чи двома елементами. При цьому напівгрупи нумеруються в такому порядку, як вони виписані в попередньому розділі.

$$1)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$3)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 4)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$5)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 6)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$7)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 8)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$9)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 10)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$11)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 12)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$13)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 14)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$15)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 16)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

$$17)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array} \qquad 18)\ \begin{array}{lcl} \{\langle 0\rangle\} & = & (\langle 0\rangle) \\ \{\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 1\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 0\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \\ \{\langle 1\rangle,\langle 2\rangle\} & = & (\langle 0\rangle,\langle 1\rangle,\langle 2\rangle) \end{array}$$

Список використаної літератури

1. *Холл М.* Теория групп. М.: Иност. лит., 1962. – 468 с.
2. *Tamura T.* Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3 // J. Gakugei Tokushima Univ. – 1953. – **3**, – P. 1–11.
3. *Бондаренко В. М., Заціха Я. В.* Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки). – 2013. – №14. – С. 62–67.
4. *Chotchaisthit S.* Simple proofs determining all nonisomorphic semigroups of order 3 // Appl. Math. Sci. (Ruse). – 2014. – **8**. – P. 1261–1269.
5. *Bondarenko V. M., Zaciha Ya. V.* On characteristic properties of semigroups // Algebra Discrete Math. – 2015 – **20**, no. 1. – P. 32–39.

Одержано 18.10.2017

УДК 519.21

М. М. Капустей, П. В. Слюсарчук (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ЗАСТОСУВАННЯ УСЕРЕДНЕНИХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ ДЛЯ ОЦІНКИ БЛИЗЬКОСТІ РОЗПОДІЛІВ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

The paper contains estimates of approximation of convergence of sums not identically distributed random variables in the term of middle pseudomoments.

Робота містить оцінки близькості розподілів сум різно розподілених випадкових величин в термінах усереднених псевдомоментів.

У даній роботі продовжуються дослідження, аналогічні [1] і [2], але використовуються усереднені псевдомоменти. У [3] міститься детальна інформація з використання різного вигляду псевдомоментів.

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ та $\eta_1, ..., \eta_n, ...$ — дві послідовності випадкових величин з функціями розподілу відповідно $F_k(x)$ і $G_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$ і $g_k(t)$. $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ — функції розподілу випадкових величин $\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k$, а $H_k(x) = F_k(x) - G_k(x)$, $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)|$.

Нехай виконуються умови:

існує число $\alpha \in (0; 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_i(t)| \le e^{-\lambda |t|^\alpha}; \tag{1}$$

$$\mu_{ik} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k dH_i(x) = 0 \ \ (i = 1, 2, ...; \ k = \overline{1, m}), \tag{2}$$

де $m = 1$ при $\alpha \le 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \le 2$.

Теорема. *Нехай $\omega_i(t) = |f_i(t) - g_i(t)|$, виконуються умови (1) та (2) і нехай θ_i – величини, для яких, при деякому $s \in [0; \alpha + 1]$ і $r \in (0; 2]$, для всіх дійсних t виконується нерівність*

$$\omega_i \left(t \lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \le \theta_i \min(|t|^s, r|t|^{\alpha+1}), \ \ i = 1, 2, ... \tag{3}$$

Покладемо $\bar{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i$. Тоді існують сталі $C^{(1)}$ і $C^{(2)}$, що залежать тільки від α, s, r, такі, що при $n \ge 2$

$$\rho_n \le C^{(1)} n^{-\frac{1}{\alpha}} \max\{\bar{\theta}_n; \bar{\theta}_n^p\},$$

а при $n = 1$ і $s > 0$

$$\rho_1 \le C^{(2)} \left(1 + \frac{1}{s} \right) \max\{\theta_1; \theta_1^p\},$$

де $p = \min\left(1; \frac{n}{sn+1}\right)$.

Доведення. Використаємо нерівність ([4], стор. 299)

$$|F(x)-G(x)|\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T|f(t)-g(t)|\frac{dt}{t}+\frac{24}{\pi T}\sup_x|G'(x)|. \tag{4}$$

Оскільки

$$\rho_n=\sup_x\left|\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)-Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,$$

то в (4) покладемо

$$F(x)=\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),\ G(x)=Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right),\ f(t)=\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right),\ g(t)=\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Із (1) випливає, що

$$|G'(x)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)dt\right|\leq\frac{1}{\pi n^{\frac{1}{\alpha}}}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right).$$

Тоді із (4) отримаємо

$$\rho_n\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_0^T\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right). \tag{5}$$

Нехай $c\in(0;\min\{1;r^{-\alpha}\})$ деяка стала, вибір якої визначимо пізніше. Позначимо $X=c^{\frac{5}{\alpha}}(\bar\theta_n)^{-p}$, $X_1=\min\{c^{\frac{1}{\alpha}};X\}$, де $p=\min\{1;\frac{n}{sn+1}\}$, якщо $\bar\theta_n<1$ і $p=1$, якщо $\bar\theta_n\geq 1$. Такі зміни у визначенні p не вплинуть на твердження теореми. Відзначимо, що $\bar\theta_n\leq c^{\frac{4}{\alpha p}}$ у випадку $X_1=c^{\frac{1}{\alpha}}$ і $\bar\theta_n\geq c^{\frac{4}{\alpha p}}$ у випадку $X_1=X$. У (5) покладемо $T=X$. Тоді

$$\rho_n\leq\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{X_1}\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{X_1}^{X}\left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t}+\frac{24}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)=$$

$$=I_1+I_2+\frac{24}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right). \tag{6}$$

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|=\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)-g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)+g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\leq$$

$$\leq e^{-|t|^\alpha}+\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)=\psi_k(t)\leq\exp\left\{e^{-|t|^\alpha}-1+\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right\}.$$

Оскільки для будь-якого $t \in R$ $e^{-|t|^\alpha} - 1 \le \frac{e^{-c}-1}{c} \min\{c; |t|^\alpha\}$, то

$$\left| f_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \right| \le \psi_k(t) \le \exp\left\{ \frac{e^{-c}-1}{c} \min\{c; |t|^\alpha\} + \omega_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \right\}. \tag{7}$$

Нехай $X_1 = c^{\frac{1}{\alpha}}$. Тоді $\bar{\theta}_n \le c^{\frac{4}{\alpha p}}$. При $|t| \le c^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \le \sum_{k=1}^{n} \theta_k r |t|^{\alpha+1} \le \bar{\theta}_n n r |t|^\alpha c^{\frac{1}{\alpha}} \le n r |t|^\alpha c^{\frac{4}{\alpha p}+\frac{1}{\alpha}} \le nc \min\{c; |t|^\alpha\},$$

а у випадку $c^{\frac{1}{\alpha}} \le |t| \le X$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \le \sum_{k=1}^{n} \theta_k |t|^s \le \bar{\theta}_n n X^s =$$

$$= c^{\frac{5s}{\alpha}} (\bar{\theta}_n)^{1-sp} n \le c^{\frac{5s}{\alpha}} (\bar{\theta}_n)^p n \le c^{\frac{5s}{\alpha}+\frac{4}{\alpha}} n \le nc \min\{c; |t|^\alpha\}.$$

Нехай $X_1 = X$. Тоді $\bar{\theta}_n \ge c^{\frac{4}{\alpha p}}$ і при $|t| \le X$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \le \sum_{k=1}^{n} \theta_k r |t|^{\alpha+1} \le \bar{\theta}_n n r |t|^\alpha X \le n r |t|^\alpha (\bar{\theta}_n)^{1-p} c^{\frac{5}{\alpha}} \le nc \min\{c; |t|^\alpha\}.$$

Отже, при $|t| \le X$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \le nc \min\{c; |t|^\alpha\}. \tag{8}$$

Крім того,

$$\exp\left\{ -\frac{e^{-c}-1}{c} \min\{c; |t|^\alpha\} \right\} \le e^{\frac{1}{2}c}. \tag{9}$$

Для будь-яких комплексних чисел $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$ справедливі нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \left(\prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \prod_{k=i+1}^{n} |a_k| \tag{10}$$

$$\left| \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i \right| \le \sum_{i=2}^{n} |a_i - b_i| \left(\prod_{k=1}^{i-1} |b_k| \right) \prod_{k=i+1}^{n} |a_k| +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n} \left(\prod_{k=1}^{i-1} |a_k - b_k| \right) |b_i| \prod_{k=i+1}^{n} |a_k| + \prod_{k=1}^{i-1} |a_k - b_k|, \tag{11}$$

що одержуються із рівностей

$$\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \left(\prod_{k=1}^{i-1} b_k \right) \prod_{k=i+1}^{n} a_k =$$

$$= \sum_{i=2}^{n}(a_i - b_i)\left(\prod_{k=1}^{i-1} b_k\right)\prod_{k=i+1}^{n} a_k + \sum_{i=2}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i-1}(a_k - b_k)\right) b_i \prod_{k=i+1}^{n} a_k + \prod_{k=i+1}^{n}(a_k - b_k).$$

Нехай $n \geq 2$. Для оцінки I_1 із нерівності (10) і умов теореми одержуємо

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\omega_t\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\prod_{k=1}^{i-1}\left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\prod_{k=i+1}^{n}\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \leq$$

$$\leq r|t|^{\alpha+1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i e^{-|t|^{\alpha}(i-1)}\prod_{k=i+1}^{n}\psi_k(t) \leq r|t|^{\alpha+1}\sum_{i=1}^{n}\theta_i\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\psi_k(t). \tag{12}$$

При $|t| \leq X_1$, $n \geq 2$ із нерівностей (7), (8) і (9)

$$\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\psi_k(t) \leq \prod_{k=1,k\neq i}^{n}\exp\left\{\frac{e^{-c}-1}{c}\min\{c;|t|^{\alpha}\} + \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right\} \leq e^{\frac{1}{2}c}e^{-c_1 n|t|^{\alpha}}, \tag{13}$$

де $c_1 = \frac{1-e^{-c}}{c} - c$, а стала c вибирається так, щоб $c_1 > 0$.

Із (12) і (13) при $|t| \leq X_1$ і $n \geq 2$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \leq \bar{\theta}_n n r|t|^{\alpha+1}e^{\frac{1}{2}c}e^{-c_1 n|t|^{\alpha}}. \tag{14}$$

Тоді із (14) при $n > 1$

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{X_1}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \leq \frac{2}{\pi}\bar{\theta}_n n r e^{\frac{1}{2}c}\int_0^{X_1} t^{\alpha}e^{-c_1 n t^{\alpha}}dt \leq$$

$$\leq \frac{\bar{\theta}_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{2}{\pi}re^{\frac{1}{2}c}\frac{1}{\alpha}(c_1)^{-1-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-z}z^{\frac{1}{\alpha}}dz \leq C_3\frac{\bar{\theta}_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{15}$$

де через C_k будемо позначати сталі, що залежать тільки від c, α, r.

Будемо вважати, що $X_1 = c^{\frac{1}{\alpha}}$, бо у випадку $X_1 = X$ інтеграл $I_2 = 0$ і при $n \geq 2$ теорема випливає із (6) і (15).

Із нерівностей (11), (7) і умов теореми при $n \geq 2$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \leq \sum_{i=2}^{n}\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\prod_{k=1}^{i-1}\left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\prod_{k=i+1}^{n}\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}\left|g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\prod_{k=1}^{i-1}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\prod_{k=i+1}^{n}\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| + \prod_{k=1}^{i-1}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \leq$$

$$\leq |t|^{s}e^{-|t|^{\alpha}}\sum_{i=2}^{n}\theta_i\prod_{k=2,k\neq i}^{n}\psi_k(t) + |t|^{s}\theta_1 e^{-|t|^{\alpha}}\sum_{i=2}^{n}\prod_{k=2,k\neq i}^{n}\psi_k(t) + |t|^{sn}\prod_{k=1}^{n}\theta_k. \tag{16}$$

Нехай $c^{\frac{1}{\alpha}} \le |t| \le X$, $n \ge 2$. У цьому випадку із (7), (8) і (9)

$$\prod_{k=2,k\ne i}^{n} \psi_k(t) \le \prod_{k=2,k\ne i}^{n} \exp\left\{ \frac{e^{-c}-1}{c} \min\{c;|t|^\alpha\} + \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right\} \le e^c e^{-cc_1 n}. \quad (17)$$

Тоді для $n \ge 2$ і $c^{\frac{1}{\alpha}} \le |t| \le X$ із (16) і (17) і нерівності $\prod\limits_{k=1}^{n} \theta_k \le (\bar\theta_n)^n$

$$\left| \prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \le |t|^s e^{-|t|^\alpha} e^c e^{-cc_1 n} n^2 \bar\theta_n + |t|^{sn} (\bar\theta_n)^n. \quad (18)$$

Із (18) одержимо

$$I_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1}^{X} \left| \prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \bar\theta_n n^2 e^c e^{-cc_1 n} \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1}^{X} t^{s-1} e^{-t^\alpha} dt + (\bar\theta_n)^n \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1}^{X} t^{sn-1} dt = I_2' + I_2''. \quad (19)$$

$$I_2' = \bar\theta_n n^2 e^c e^{-cc_1 n} \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1}^{X} t^{s-1} e^{-t^\alpha} dt \le C_4 \frac{\bar\theta_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (20)$$

У випадку $s \ge \frac{1}{3}$

$$I_2'' = (\bar\theta_n)^n \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1}^{X} t^{sn-1} dt \le \frac{2}{\pi} (\bar\theta_n)^n \frac{X^{sn}}{sn} \le$$

$$\le \frac{6}{n\pi} (\bar\theta_n)^{n(1-sp)} \left(c^{\frac{5}{\alpha}}\right)^{sn} \le \frac{6}{n\pi} (\bar\theta_n)^p \left(c^{\frac{5}{3\alpha}}\right)^{n} \le C_5 \frac{\bar\theta_p}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (21)$$

При $s \le \frac{1}{3}$ і $n \ge 2$, $\frac{n}{sn+1} \ge 1$, тому $p = 1$. Тоді

$$I_2'' \le (\bar\theta_n)^n \frac{2}{\pi} (X_1)^{-\frac{1}{3}} \int\limits_{X_1}^{X} t^{sn-\frac{2}{3}} dt \le (\bar\theta_n)^n \frac{2}{\pi} c^{-\frac{1}{3\alpha}} \frac{X^{sn+\frac{1}{3}}}{sn+\frac{1}{3}} \le$$

$$\le \frac{6}{\pi} c^{-\frac{1}{3\alpha}} (\bar\theta_n)^{n(1-s)-\frac{1}{3}} \left(c^{\frac{5}{\alpha}}\right)^{sn+\frac{1}{3}} \le \bar\theta_n \frac{6}{\pi} c^{-\frac{1}{3\alpha}-1} c^n \le C_6 \frac{\bar\theta_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (22)$$

Із (6), (15), (19)—(22) одержуємо справедливість теореми для $n \ge 2$.

Нехай $n = 1$. $\bar\theta_n \ge c^{\frac{4}{\alpha p}}$ у випадку $X_1 = X$. Тоді $\rho_1 \le 1 \le c^{-\frac{4}{\alpha p}} \theta_1$. Якщо $X_1 = c^{\frac{1}{\alpha}}$, то $\bar\theta_n \le c^{\frac{4}{\alpha p}}$. Тоді із умови (3) теореми і (5), де $T = X = c^{\frac{5}{\alpha}} (\theta_1)^{-p}$, при $s > 0$

$$\rho_1 \le \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{X} \left| f_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \right| \frac{dt}{t} + c^{-\frac{5}{\alpha}} (\theta_1)^p \frac{24}{\pi^2} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right) \le \theta_1 \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{X} t^{s-1} dt +$$

$$+c^{-\frac{5}{\alpha}}(\theta_1)^p\frac{24}{\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)=\theta_1\frac{2}{\pi s}X^s+c^{-\frac{5}{\alpha}}(\theta_1)^p\frac{24}{\pi^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\le C_7\left(1+\frac{1}{s}\right)(\theta_1)^p.$$

Теорема доведена.

Позначимо

$$\kappa_i=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^\alpha\left|H_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,\ \kappa_{i0}=\int_{-\infty}^{\infty}\max(1,|x|^\alpha)\left|H_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx,$$

$$\nu_{i0}=\int_{-\infty}^{\infty}\max(1,|x|^{\alpha+1})\left|dH_i\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|,\ \bar\kappa=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i,\ \bar\kappa_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_{i0},\ \bar\nu_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\nu_{i0}.$$

Лема. *Нехай* $\mu_{ik}=0$; $k=\overline{1,m}$; $i=1,2,...$; $\omega_i(t)=|f_i(t)-g_i(t)|$. *Тоді*

$$\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\le\nu_{i0}\min\left(1,\frac{2^{1-\delta}}{m!(m+1)^\delta}|t|^{\alpha+1}\right);$$

$$\omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\le\kappa_{i0}\min\left(|t|,\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\right);\ \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\le\kappa_i\frac{|t|^{\alpha+1}2^{1-\delta}}{m^\delta},$$

де $\delta=\alpha+1-m$.

Наслідок. *Існують сталі* $C^{(3)}$, $C^{(4)}$, $C^{(5)}$, *що для всіх* $n\ge1$ *справедливі нерівності*

$$\rho_n\le C^{(3)}n^{-\frac{1}{\alpha}}\bar\nu_0,$$

$$\rho_n\le C^{(4)}n^{-\frac{1}{\alpha}}\max\left(\bar\kappa_0;\ (\bar\kappa_0)^{\frac{n}{n+1}}\right),$$

$$\rho_n\le C^{(5)}n^{-\frac{1}{\alpha}}\max\left(\bar\kappa;\ (\bar\kappa)^{\frac{n}{(\alpha+1)n+1}}\right),$$

Список використаної літератури

1. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. – Ужгород, 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
2. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В.* Про одну форму псевдомоментів і їх застосування для оцінки близькості функцій розподілу двох сум випадкових величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2013. – Вип. 24, № 2. – С. 69–76.
3. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд–во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 15.09.2017

УДК 512.84

О. А. Кирилюк (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

МІНІМАЛЬНІ НЕЗВІДНІ РОЗВ'ЯЗНІ ПІДГРУПИ ГРУПИ $GL(2, R_p)$

All minimal irreducible solvable subgroups of the group $GL(2, R_p)$ (R_p is the ring of integers of the finite ixtension F_p of the fileld rational p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ for $p > 2$) are described up to conjugation.

Описуються з точністю до спряженості всі мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ (R_p – кільце цілих величин скінченного розширення F_p поля раціональних p-адичних чисел $\mathbb{Q}_p$ для $p > 2$).

В $[1, 2]$ класифіковані мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ при $p = 2$.

Основні позначення статей $[1, 2]$ будуть використані і в даній роботі.

I. Нехай $p > 2$ – просте число і ε – первісний корінь степеня p з одиниці.

Якщо $\varepsilon \notin R_p$, то має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $p > 2$ – просте число і $\varepsilon \notin R_p$. Тоді:*

1. *Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $i \in P_2 (i^2 = -1)$ або $\sqcap' \neq \oslash$, з точністю до спряженості вичерпуються групами*

$$H_{2^{n+1}} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \ H_{2,r} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & \beta_0 \\ 1 & \beta_1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де $P_2 = \langle \xi \rangle$, $|P_2| = 2^n (n \geq 2)$, $r \in \sqcap'$, а β_0, β_1 – коефіцієнти незвідного над F_p дільника $f(x) = x^2 - \beta_1 x - \beta_0$ полінома $x^r - 1$.

2. *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$, які існують тоді і тільки тоді, коли $i \in P_2$ або $\sqcap \neq \oslash$, з точністю до спряженості вичерпуються групами:*

1) $W_1^{(q)} = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2$ *і* $q \in \sqcap$;

2) $W_1^{(q)}, W_2^{(q)} = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$; $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$;

$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^2$ *і* $q \in \sqcap$;

3) V_1, V_2, *якщо* $|P_2| = 2^2$ *і* $\sqcap = \oslash$;

4) $V_1, V_2, V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} \xi_k & 0 \\ 0 & -\xi_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $\sqcap \neq \oslash$;

5) $V_1, V_2, V_k, W_l^q = \left\langle \begin{pmatrix} \Theta_q & 0 \\ 0 & \Theta_q^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi_l \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, *якщо* $|P_2| = 2^n (n \geq 3); q \in \sqcap$;

де Θ_q – елемент порядка q у кільці R_p, q пробігає множину $\sqcap$, ξ_k, ξ_l – елементи порядків 2 і 2 відповідно у кільці R_p ($1 \le l \le n$; $3 \le k \le n$), причому

$$V_1 \cong D_4,\, V_2 \cong K_4,\, V_k \cong H_k = \left\langle a, b | a^{2^k} = b^2 = 1,\, b^{-1}ab = a^{1+2^{k-1}} \right\rangle (k = 3, ..., n),$$

$$W_l^{(q)} \cong G_{l,q} = \left\langle a, b | a^q = b^{2^q} = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle (l = 1, ..., n). \quad (1)$$

Доведення. 1. Нехай G – абелева мінімальна незвідна підгрупа групи $GL(2, R_p)$. Тоді з [3] випливає, що $G \cong H_{2^{n+1}}$ або $G \cong H_{2,r}$. Якщо $r \neq 3$, то G є p'-групою і спряжена в $GL(2, F_p)$ з групою $H_{2^{n+1}}$ або з групою $H_{2,r}$, звідки G спряжена з $H_{2^{n+1}}$ або з групою $H_{2,r}$ і в групі $GL(2, R_p)$ (див. [1]). Якщо $r = p = 3$, то, як легко бачити, $H_{2,3}$ – єдина з точністю до спряженості незвідна підгрупа порядка 3 групи $GL(2, R_3)$.

2. Нехай $|P_2| = 2^n$, тоді, в силу [3], неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються 2-групами Міллера–Морено $H_{2^r,2^k} \cong H_k$ ($k = 3, ..., n$), D_4, K_4 і біпримарними групами Міллера–Морено $G_{l,q,\tau}$ порядка $2^l \cdot q^m$ ($q \in \sqcap$), де m – показник, якому належить q за модулем 2. Оскільки $q \neq 2$, то $m = 1$ і $|G_{l,q,\tau}| = |G_{,q}| = 2^l \cdot q$ ($l = 1, ..., n$). Якщо позначити $G_{l,q,\tau} = \langle a, b \rangle$, то одержимо $b^{-1}ab = a^r$. Оскільки b^2 лежить в центрі групи $G_{l,q,\tau}$, то $r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q)$, тобто $(r-1)(r+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$. З неабелевості групи $G_{l,q,\tau}$ випливає, що $r = -1$ і $G_{l,q,\tau} \cong G_{l,q}$. Далі, так як $p \nmid |G_{l,q}|$, то групи (1) є p'-групами. Тоді з тих же міркувань, що і в п. 1), випливає доведення п. 2). Теорему доведено.

II. Нехай тепер $p > 2$ і $\varepsilon \in R_p$. Як випливає з описання мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, F_p)$ (див. [3]), з точністю до ізоморфізму мінімальні і незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ в цьому випадку вичерпуються групами D_4 і K_4 при $|P_2| = 2$ і групами D_4, K_4, $G_{l,q}$ і

$$N_l = \left\langle a, b | a^p = b^{2^l} = 1,\, b^{-1}ab = a^{-1} \right\rangle (l = 1, ..., n) \quad (2)$$

при $|P_2| = 2^n$ ($n \ge 3$, $3 \le k \le n$).

Опишемо точні незвідні R_p-зображення степеня 2 групи N_l. Очевидно, точні незвідні R_p-зображення степеня 2 групи N_l мають вигляд

$$a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & * \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A,\;\; b \to B \;(B \in GL(2, R_p)).$$

Як відомо [4], всі точні R_p-зображення групи $H = \langle a | a^p = 1 \rangle$ виду $a \to A$ з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями

$$\Gamma_0 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},\; \Gamma_s : a \to \begin{pmatrix} \xi & t^{d-s} \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix} \;(s = 1, ..., d),$$

де $\varepsilon^{-1} - \varepsilon = \pi = \Theta t^d$ ($\Theta \in R_p^*$, t – простий елемент кільця R_p).

Легко бачити, що зображення Γ_0 продовжується до точного R_p-зображення Δ_0 групи N_l виду

$$\Delta_0 : a \to \Gamma_0(a),\; b \to \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

де γ – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p, причому зображення $\Delta_0(\gamma)$ і $\Delta_0(\delta)$ R_p-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\gamma = \delta$.

Нехай тепер R_p-зображення групи N_l має вигляд

$$\Delta_s : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = B_s.$$

Із співвідношення $A_s B_s = B_s A_s^{-1}$ випливає система рівностей

$$\begin{cases} \varepsilon\alpha + \gamma t^{d-s} & = & \alpha\varepsilon^{-1}, \\ \delta & = & -\alpha. \end{cases}$$

Позначивши $\pi = \varepsilon^{-1} - \varepsilon$, одержимо $\gamma = \frac{\alpha\pi}{t^{d-s}}$. Оскільки $s > 0$, то $\gamma \equiv 0(\bmod t)$. Отже, $\alpha \in R_p^*$, звідки, враховуючи умову $B^{2^l} = E$, одержимо $\left(\alpha^2 + \frac{\alpha\beta\pi}{t^{d-s}}\right)^{2^{l-1}} = 1$, звідки $\alpha^2 + \alpha\beta t^{d-s} = \xi$ і далі $\beta = \frac{(\xi-\alpha^2)t^{d-s}}{\alpha\pi}$ (ξ – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p). Очевидно $\beta \in R_p$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha^2 \equiv \xi(\bmod t^s)$ $(s = 1, ..., d)$. Таким чином, зображення Δ_s при $\alpha = \alpha_s$ має вигляд

$$\Delta_s(\alpha_s, \xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha_s & \frac{(\xi-\alpha_s)^2 t^{d-s}}{\alpha_s\pi} \\ \frac{\alpha_s\pi}{t^{d-s}} & -\alpha \end{pmatrix} = B_s. \tag{3}$$

Нехай $\Delta_s(\overline{\alpha}_s, \xi')$ – деяке інше точне R_p-зображення виду (3) групи N_l. Має місце наступна лема.

Лема 1. *Зображення $\Delta_s(\alpha_s, \xi)$ і $\Delta_s(\overline{\alpha}_s, \xi')$ групи N_l будуть R_p-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$ і $\alpha_s \equiv \overline{\alpha}_s(\bmod t^s)$ $(s = 1, .., d)$.*

Доведення. Нехай $C^{-1}\Delta_s(\overline{\alpha}, \xi')(g)C = \Delta_s(\alpha_s, \xi)(g)$, $(g \in N_l)$, де $C \in GL(2, R_p)$. Із співвідношення $A_s C = C A_s$ одержимо $C = \begin{pmatrix} c_1 & \frac{(c_4-c_1)t^{d-s}}{\pi} \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}$ $(c_1, c_4 \in R_p^*)$. Тоді

$$\begin{cases} \alpha_s c_1 = \alpha_s c_4, \\ \frac{(c_4\xi - \alpha_s^2 c_1)t^{d-s}}{\alpha_s\pi} = \frac{(c_1\xi' - \overline{\alpha}_s c_4)t^{d-s}}{\overline{\alpha}_s\pi}, \end{cases} \tag{4}$$

звідки $c_4 = \alpha_s\overline{\alpha}_s c_1$. Легко перевірити, що підстановка цього значення c_4 у другу рівність (4) дає $\alpha_s(\xi - \xi') = 0$. Оскільки $\alpha_s \in R_p^*$, то $\xi = \xi'$, а так як $c_4 \equiv c_1(\bmod t^s)$, то $c_4 - c_1 = (\alpha_s\overline{\alpha}_s^{-1} - 1) = \overline{\alpha}_s^{-1}c_1(\alpha_s - \overline{\alpha}_s) \equiv 0(\bmod t^s)$, звідки $\alpha \equiv \overline{\alpha}_s(\bmod t^s)$. Необхідність доведена. Достатність одержиться, якщо провести міркування у зворотному порядку.

Лема 2. *Нехай $p > 2$ і $\varepsilon \in R_p$. Незвідні точні R_p-зображення степеня 2 груп N_l з точністю до еквівалентності вичерпуються зображеннями*

$$\Delta_0(\xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^k & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-k} \end{pmatrix} = A,\ b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B,$$

$$\Delta_s(\xi) : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^k & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-k} \end{pmatrix} = A_s,\ b \to \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha\pi t^{d-s} & -\alpha \end{pmatrix} = B_s,$$

де ξ пробігає первісні корені степеня 2^{l-1} з 1 в полі F_p, $\alpha^2 = \xi$; $\varepsilon^{-k} - \varepsilon^k = \Theta t^d$ $(\Theta \in R_p^*;\ s = 1, ..., d;\ k = 1, ..., \frac{p-1}{2};\ l = 1, ..., n)$.

Доведення. Нехай у (3)

$$\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_{s-1} t^{s-1}, \tag{5}$$

де λ_i $(i = 0, 1, ..., s-1)$ – представники лівих суміжних класів кільця R_p за ідеалом tR_p. Очевидно, якщо $\overline{\alpha}_s = \alpha_s + \lambda t^s$ $(\lambda \in R_p/tR_p)$, то $\alpha_s = \overline{\alpha}(\bmod t^s)$. Тому, в силу леми 1, в (4) достатньо розглядати елементи α_s виду (5). Покажемо, що $\alpha_s^2 = \xi$. Доведення будемо проводити індукцією по s. Якщо $s = 1$, то $\alpha_1 = \lambda_0$ і $\lambda_0^2 = \xi$, тобто $\alpha_1^2 = \xi$.

Нехай тепер $\alpha_s^2 = \xi$ для всіх $s < s'$ і покажемо, що $\alpha_{s'}^2 = \xi$, де $s' = s+1$. Маємо $\alpha_{s'} = \alpha_{s+1} = \alpha_s + \lambda_s t^s$ $(\lambda_s \in R_p/tR_p)$. Оскільки $\xi - \alpha_{s'}^2 = 0(\bmod t^{s+1})$, то $\xi - \alpha_{s'}^2 = \xi - (\alpha_s + \lambda_s t^s)^2 \equiv \xi - \alpha_s^2 - 2\lambda_s t^s \equiv -2\lambda_s \alpha_s t^s(\bmod t^{s+1})$. Так як $2, \alpha_s \in R_p^*$, то конгруенція $-2\lambda_s\alpha_s t^s \equiv 0(\bmod t^{s+1})$ має місце лише при $\lambda_s = 0$. Звідси $\alpha_{s+1}^2 = \xi$. Очевидно, Δ_0 і $\Delta_s(\xi)$ нееквівалентні над R_p для всіх $s = 1, ..., d$. Нехай

$$\Gamma_0 : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^r & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix} = A', \;\; b \to \begin{pmatrix} 0 & \xi' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

– деяке точне R_p-зображення степеня 2 групи N_l. Легко бачити, що $\Delta_0(s)$ і Γ_0 R_p-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$ і $k = \pm r$. Нехай тепер

$$\Delta_s'(\xi') : a \to \begin{pmatrix} \varepsilon^r & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix} = A_s', \;\; b \to \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta\pi' t^{s-d} & -\beta \end{pmatrix} = B_s'$$

(ξ' – первісний корінь степеня 2^{l-1} з 1, $\pi' = \varepsilon^{-r} - \varepsilon^r$, $\beta^2 = \xi$) – точне R_p-зображення групи N_l виду (3). Неважко довести, що $\Delta_s'(\xi')$ R_p-еквівалентне $\Delta_s(\xi)$ тоді і тільки тоді, коли $\xi = \xi'$ і $r = \pm k$. Лему доведено.

Зберігаючи попередні позначення, введемо дві серії груп

$$\left.\begin{aligned} U_l &= \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ U_l^s &= \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha\pi t^{s-d} & -\alpha \end{pmatrix} \right\rangle, \; (s = 1, ...d), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

де ξ – елемент порядку 2^{l-1} у R_p^*, $1 \le l \le n$, α – фіксований розв'язок рівняння $x^2 = \xi$ у кільці R_p, $\varepsilon^{-1} - \varepsilon = \pi = \Theta t^d (\Theta \in R_p^*)$ і $|P_2| = 2^n$. Очевидно, $U_l \cong U_l^{(s)} \cong N_l$.

Теорема 2. *Нехай $p > 2$ і $\varepsilon \in R_p$. Тоді:*

1. *Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами $H_{2^{n+1}}$, $H_{2,r}$, де $|P_2| = 2^n$ $(n > 1)$, а r пробігає множину $\sqcap'$.*

2. *Неабелеві мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ з точністю до спряженості вичерпуються групами.*

1) $U_1, U_1^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

2) $W_1^{(q)}, U_1, U_1^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2$ *і* $q \in \sqcap$ $(q \neq p)$;

3) $V_1, V_2, U_1, U_1^{(s)}, U_2, U_2^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^2$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

4) $W_1^{(q)}, W_2^{(q)}, V_1, V_2, U_1, U_1^{(s)}, U_2, U_2^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^2, q \in \sqcap\ (q \neq p)$;

5) $V_1, V_2, V_k, U_l, U_l^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $\sqcap = \{p\}$;

6) $V_1, V_2, W_l^{(s)}, U_l, U_l^{(s)}$ *при* $|P_2| = 2^n (n \geq 3)$ *і* $q \in \sqcap\ (q \neq p)$.

Доведення. Пункт 1 теореми доводиться аналогічно п. 1 теореми 1. Доведемо пункт 2. В силу теореми 1 і [4] достатньо розглянути підгрупи групи $GL(2, R_p)$ ізоморфні групі N_l $(l = 1, ..., n)$. Користуючись лемою 2, введемо групи

$$T_l^{(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon^r & t^{d-s} \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta\pi' t^{s-d} & -\beta \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A'_s, B'_s \rangle,$$

де β – деякий розв'язок рівняння $x^2 = \xi$ в кільці R_p, $1 \leq r \leq p$. Легко бачити, що коли $C = \mathrm{diag}[\gamma, 1]$, де

$$\gamma = \begin{cases} \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{r-1}, & \text{якщо } 2 \mid r, \\ 1 + \pi_2 + \cdots + \pi_{r-1}, & \text{якщо } 2 \nmid r, \end{cases}$$

а $\pi_j = \varepsilon^{-j} + \varepsilon^j$ $(j = 1, ..., r-1)$, то $C^{-1} A_s^r C = A'_s$. Звідси, в силу леми 1, в $T_l^{(s)}$ можна покласти $r = 1$. З другого боку, знайдеться таке непарне натуральне число k, що $\beta = \alpha^k$. Оскільки $B_s^k = B'_s$, то при $r = 1$ $U_l^{(s)}$ $(s = 1, ..., d)$. Легко бачити також, що при $s \neq s'$ групи $U_l^{(s)}$ та $U_l^{(s')}$ не спряжені в групі $GL(2, R_p)$. Розглянемо тепер групи

$$T_0^{(s)} = \left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon^r & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-r} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \xi' \\ t & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle A'_0, B'_0 \rangle, \quad (s = 1, ...d),$$

де ξ' – елемент порядку 2^{l-1} в кільці R_p. Аналогічно попередньому можна вважати, що $\xi' = \xi^j$ для деякого натурального j. Тоді $A_0^r = A'_0$ і, якщо $j = 1$, то $T_0^{(s)} = U_0^{(s)}$. Звідси, за лемою 1 достатньо вважати, що в групі $T_0^{(s)}$ $A'_0 = A_0$. Легко бачити, що коли $C = \mathrm{diag}\left[1, \xi^{\frac{j-1}{2}}\right]$, то з рівності

$$B_0^j = \begin{pmatrix} 0 & \xi^{\frac{j+1}{2}} \\ \xi^{\frac{j-1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

одержимо $C^{-1} B_0^j C = B'_0 : C^{-1} A_0 C = A_0$, тобто $C^{-1} U_0 C = T_0^{(s)}$. Теорему доведено.

З теорем 1, 2 і [1, 2] випливає описання з точністю до спряженості всіх мінімальних незвідних розв'язних підгруп групи $GL(2, R_p)$ для довільного простого p.

Список використаної літератури

1. *Кирилюк О. А., Кирилюк А. О.* Абелеві мінімальні незвідні підгрупи групи $GL(2, R_p)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2000. – Вип. № 2. – С. 77–87.
2. *Кирилюк О. А.* Мінімальні незвідні розв'язні підгрупи групи $GL(2, R_2)$ // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, 2016. – Вип. № 1(28). – С. 72–79.
3. *Юферев В. П.* Классификация минимальных неприводимых линейных групп простой степени // Изв. АН БССР. Серия физ.-матем.наук. – М.: Наука, 1963. – № 5. – С. 96–97.
4. *Гудивок П. М.* Представление конечных групп над числовыми кольцами // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1967. – Т 31, № 4. – С. 799–834.

Одержано 4.09.2017

УДК 512.554.35

І. С. Клименко, С. В. Лисенко, А. П. Петравчук (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АЛГЕБРИ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ З АБЕЛЕВИМИ ІДЕАЛАМИ МАКСИМАЛЬНОГО РАНГУ

Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic zero, $\mathbb{A}$ an integral domain over $\mathbb{K}$ and $R = Frac(A)$, the fraction field of the algebra $\mathbb{A}$. The Lie algebra $Der_{\mathbb{K}}A$ of all $\mathbb{K}$-derivations of A can be isomorphically embedded in the Lie algebra $W(A) := RDer_{\mathbb{K}}A \subseteq Der_{\mathbb{K}}R.$ The rank of a subalgebra $L \subseteq W(A)$ is defined as the dimension of the vector space $\dim_R RL$. We study subalgebras $L \subseteq W(A)$ of rank n over R containing an abelian ideal of rank n over R. It is proved that if L contains an element D such that the linear operator ad$D$ acts nonsingularly on the vector space FI, then the Lie algebra FL is isomorphic to a subalgebra of the general affine Lie algebra $ga_n(F)$, where F is the field of constants of the Lie algebra L. In case of subalgebras of rank 2 over R the above mentioned restriction on ad$D$ can be omitted.

Нехай $\mathbb{K}$ – поле характеристики нуль, $\mathbb{A}$ – область цілісності над $\mathbb{K}$ і $R = Frac(A)$ – поле часток для $\mathbb{A}$. Алгебра Лі $Der_{\mathbb{K}}A$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань A ізоморфно вкладається в алгебру Лі $W(A) := RDer_{\mathbb{K}}A \subseteq Der_{\mathbb{K}}R$. Ранг довільної підалгебри $L \subseteq W(A)$ визначається як розмірність векторного простору $\dim_R RL$. В роботі вивчаються підалгебри $L \subseteq W(A)$ рангу n над R, які містять абелевий ідеал рангу n. Доведено, що якщо L містить елемент D такий, що лінійний оператор ad$D$ діє невироджено на векторному просторі FI, то алгебра Лі FL ізоморфна підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$, де F – поле констант для алгебри Лі L. У випадку підалгебр рангу 2 над полем R обмеження на ad$D$ може бути відкинуте.

Нехай $\mathbb{K}$ — довільне поле характеристики нуль і A — область цілісності над $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$-диференціюванням алгебри A називається таке $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D : A \to A$, для якого виконується правило Лейбніца $D(ab) = D(a)b + aD(b), \forall a, b \in A$. Кожне $\mathbb{K}$-диференціювання алгебри A однозначно продовжується до $\mathbb{K}$-диференціювання поля часток $R = Frac(A)$. Всі $\mathbb{K}$-диференціювання поля R утворюють алгебру Лі $Der_{\mathbb{K}}R$ відносно операції комутування $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$. Оскільки для кожного елемента $r \in R$ і $D \in Der_{\mathbb{K}}R$ визначено диференціювання $r \cdot D$ поля R, то $Der_{\mathbb{K}}R$ є векторним простором над полем R (але не алгеброю Лі над полем R в загальному випадку). В алгебрі Лі $Der_{\mathbb{K}}R$ визначена підалгебра $RDer_{\mathbb{K}}A$, яку ми для зручності будемо позначати через $W(A)$.

Для довільної підалгебри $L \subseteq W(A)$ (тут алгебра Лі L розглядається над полем $\mathbb{K}$) визначений ранг $rk_R L = \dim_R RL$. В роботі [3] вивчалися нільпотентні і розв'язні підалгебри із алгебри Лі $W(A)$ скінченного рангу над полем R. Будова підалгебр алгебри Лі $W(A)$ представляє великий інтерес у зв'язку з тим, що у випадку, коли $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — кільце многочленів від n змінних і $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — поле раціональних функцій, то підалгебра $L \subseteq W(A)$ може розглядатися як алгебра Лі векторних полів з з раціональними коефіцієнтами. Такі алгебри Лі з поліноміальними, раціональними коефіцієнтами, чи коефіцієнтами із кільця формальних степеневих рядів вивчалися багатьма авторами (див., наприклад, [1–3]).

В даній роботі вивчаються підалгебри рангу n із $W(A)$, які містять абелевий ідеал I рангу n над R (тобто максимального можливого рангу). При умові, що в L є елемент D такий що приєднане диференціювання ad$D$ є невиродженим лінійним оператором на FI (F — поле констант алгебри Лі L) доведено, що алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі із повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$ (Теорема 1). У випадку, коли алгебра Лі L має ранг 2 над полем R від обмеження на приєднане диференціювання можна відмовитися, як показує теорема 2 роботи.

Позначення в роботі стандартні. Основне поле $\mathbb{K}$ довільне характеристики нуль. Основні властивості диференціювань комутативних кілець можна знайти в [4]. Якщо L — підалгебра алгебри Лі $W(A)$, то підполе $F = F(L) \subset R$, яке складається з усіх елементів із R, які лежать в перетині $\cap Ker D, D \in L$ називається полем констант для алгебри Лі L. Якщо $\mathbb{K}$ — поле, то алгебра Лі L, яка складається із усіх $\mathbb{K}$-диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ вигляду

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_{(n)}},$$

де $f_i \in F[x_1, \ldots, x_n], \deg f_i \leq 1$ ізоморфна повній афінній алгебрі Лі $ga_n(\mathbb{K})$. Дійсно, алгебра Лі L містить абелевий ідеал $V = \mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n} \rangle$ розмірності n над $\mathbb{K}$, такий, що $L/V \simeq gl_n(\mathbb{K})$, де $gl_n(\mathbb{K})$ — повна матрична алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$. Тому $L \simeq ga_n(\mathbb{K}) = gl_n(\mathbb{K}) \leftthreetimes V$ — напівпрямий добуток двох алгебр Лі.

Допоміжні результати про алгебри Лі диференціювань областей цілісності. Для зручності в наступних лемах зібрані деякі допоміжні факти, необхідні для доведення основних теорем роботи.

Лема 1 (див, наприклад, [3]). *Нехай $D_1, D_2 \in W(A)$ і a, b — елементи поля R. Тоді виконується рівність*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Зокрема, якщо D_1, D_2 комутують, то

$$[aD_1, bD_2] = aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Лема 2 ([3]). *Нехай L — підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ і F — поле констант для алгебри L. Тоді FL — алгебра Лі над полем F і якщо L абелева, нільпотентна або розв'язна, то такою ж буде і алгебра Лі FL.*

Лема 3. *Нехай L — абелева підалгебра рангу n над R із алгебри Лі $W(A)$ і F — поле констант для L. Тоді FL — абелева алгебра Лі над полем F розмірності n над F.*

Доведення. Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — який-небудь базис FL над полем R і

$$D = r_1 D_1 + \ldots + r_n D_n, \quad r_i \in R$$

— який-небудь елемент з алгебри FL. Тоді із рівності

$$[D_i, D] = D_i(r_1)D_1 + \ldots + D_i(r_n)D_n = 0, \text{ де } i = 1, \ldots, n,$$

випливає, що $D_i(r_j) = 0 \quad i, j = 1, \ldots, n$. Останнє означає, що $r_1, \ldots, r_n \in F$ і тому FL — абелева алгебра Лі розмірності n над полем F.

Лема 4. *Нехай $D_1, \dots, D_n$ — лінійно незалежні над R елементи алгебри Лі $W(A)$ і $F = \bigcap_{i=1}^{n} Ker D_i$. Якщо існують елементи $a_1, \dots, a_n \in R$ такі, що*

$$D_i(a_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n,$$

то для довільного елемента $b \in R$, який задовольняє умови $D_i(b) \in F, i = 1, \dots, n$, виконується рівність $b = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n + \lambda_{n+1}$ для деяких $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in F$.

Доведення. Позначимо $\lambda_i = D_i(b), i = 1, \dots, n$. Тоді, як неважко переконатися, $D_i(b - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = 0, i = 1, \dots, n$. Тому $b - \sum_{i=n}^{n} \lambda_i a_i \in F$. Позначимо цю різницю для зручності через λ_{n+1}. Але тоді елемент b записується у вигляді $b = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i + \lambda_{n+1}$, де елементи $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ належать полю F.

Зауваження 1. *Якщо L — підалгебра із алгебри Лі $W(A)$ рангу n над полем R і I — абелевий ідеал алгебри L з $\mathrm{rk}_R I = n$, то, як неважко переконатися, FI — максимальний абелевий ідеал алгебри FL, де F — поле констант для алгебри Лі L.*

Зауваження 2. *Нехай $r_1, \dots, r_n$ — лінійно незалежні над полем F елементи поля R. Якщо $D_1, \dots, D_n$ — такі елементи алгебри Лі $W(A)$, для яких виконуються рівності*

$$D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, 1, \dots, n,$$

то елементи $D_1, \dots, D_n$, як неважко переконатися, лінійно незалежні над полем F.

Основна теорема.

Лема 5. *Нехай L — підалгебра рангу n над R із $W(A)$, яка містить абелевий ідеал I рангу n над R і F — поле констант для L. Якщо L містить елемент D, такий, що лінійний оператор adD діє невироджено на векторному просторі FI над полем F, то існують елементи $D_1, \dots, D_n \in I$, $r_1, \dots, r_n \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ і кожен елемент S із L може бути записаний у вигляді*

$$S = f_1(r_1, \dots, r_n)D_1 + \ldots + f_n(r_1, \dots, r_n)D_n$$

для деяких лінійних многочленів $f_i \in F[x_1, \dots, x_n]$.

Доведення. Нехай $T_1, \dots, T_n$ — який-небудь базис ідеалу I над полем R. Тоді за лемою 3 $\dim_F FI = n$ і $T_1, \dots, T_n$ — базис векторного простору FI над полем F. Запишемо елемент D із умови теореми у вигляді

$$D = r_1 T_1 + \ldots + r_n T_n, \ r_i \in R, \ i = 1, \dots, n.$$

Оскільки $[T_i, D] = T_i(r_1)T_1 + \ldots + T_i(r_n)T_n \in I$, то, очевидно,

$$T_i(r_j) \in F \ , i, j = 1, \dots, n.$$

За умовою теореми лінійний оператор $\mathrm{ad}D$ на векторному просторі FI діє невироджено і тому елементи $[T_1, D], \dots, [T_n, D]$ утворюють базис простору FI над полем F. Останнє означає, що матриця

$$B = \begin{pmatrix} T_1(r_1) & \cdots & T_1(r_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_n(r_1) & \cdots & T_n(r_n) \end{pmatrix}$$

невироджена. Але тоді рядок

$$(1, 0, \dots, 0) \in F^n$$

є деякою лінійною комбінацією рядків матриці B

$$(1, 0, \dots, 0) = \gamma_{11}(T_1(r_1), \dots, T_1(r_n)) + \dots + \gamma_{1n}(T_n(r_1), \dots, T_n(r_n))$$

для деяких $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1n} \in F$. Позначимо

$$D_1 = \gamma_{11}T_1 + \dots + \gamma_{1n}T_n \in FI.$$

Тоді, за побудовою, маємо

$$[D_1, D] = 1 \cdot T_1 + 0 \cdot T_2 + \dots + 0 \cdot T_n$$

і, з урахуванням лінійної незалежності елементів $T_1, \dots, T_n$ над полем F, отримаємо

$$D_1(r_1) = 1, D_1(r_2) = 0, \dots, D_1(r_n) = 0.$$

Аналогічно можна знайти елемент $D_2 \in FI$ такий, що

$$D_2(r_1) = 0, D_2(r_2) = 1, \dots, D_n(r_n) = 0.$$

Повторюючи ці міркування ми знайдемо елементи $D_1, \dots, D_n$ векторного простору FI такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, n$. За Зауваженням 2 елементи $D_1, \dots, D_n$ лінійно незалежні над полем F і тому утворюють базис векторного простору FI над полем F. Візьмемо тепер довільний елемент $S = s_1D_1 + \dots + s_nD_n$ із підалгебри FL, $s_i \in R$. Тоді

$$[D_i, S] = D_i(s_1)D_1 + \dots + D_i(s_n)D_n \in FI$$

і тому $D_i(s_j) \in F$, $i, j = 1, \dots, n$. За лемою 4 виконуються рівності

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} r_j + \beta_{i,n+1}$$

для деяких елементів $\beta_{i,j} \in F$. Останнє означає, що s_i лінійно виражається через елементи $r_1, \dots, r_n$ з коефіцієнтами з поля F, тобто $s_i = f_i(r_1, \dots, r_n)$, де f_i — лінійний многочлен з $F[x_1, \dots, x_n]$.

Теорема 1. *Нехай L — підалгебра із алгебри Лі $W(A))$ рангу n над полем R, яка містить абелевий ідеал I рангу n над R і F — поле констант для алгебри Лі L. Якщо L містить елемент D такий, що $\mathrm{ad}D$ — невироджений лінійний оператор у векторному просторі FI над полем $\mathbb{F}$, то алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$. Зокрема, алгебра Лі FL скінченновимірна над полем $\mathbb{F}$.*

Доведення. За лемою 5 існують елементи $D_1, \ldots, D_n \in FI$, $r_1, \ldots, r_n \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$ і кожен елемент S із FL може бути записаний у вигляді

$$S = f_1(r_1, \ldots, r_n)D_1 + \ldots + f_n(r_1, \ldots, r_n)D_n$$

для деяких лінійних многочленів $f_i \in F[x_1, \ldots, x_n]$. Розглянемо в FL векторний підпростір V над полем F з базисом $D_1, \ldots, D_n$ (це підмножина елементів

$$D = f_1(r_1, \ldots, r_n)D_1 + \cdots + f_n(r_1, \ldots, r_n)D_n$$

із FL, в якій всі многочлени $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ є сталими многочленами). Легко бачити, що V — абелевий ідеал алгебри Лі L розмірності n над полем F. Векторний підпростір W із алгебри Лі FL, який складається із елементів D, у яких коефіцієнти $f_i(r_1, \ldots, r_n)$ є однорідними лінійними многочленами від $r_1, \ldots, r_n$ утворює підалгебру W із L і, як неважко переконатися, $FL = W + V$ — пряма сума векторних підпросторів. Зауважимо також, що підалгебра W ізоморфна деякій підалгебрі повної лінійної алгебри Лі $gl_n(F)$. Дійсно, співставимо елементу

$$D = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}r_j)D_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} a_{nj}r_j)D_n, \quad a_{ij} \in F$$

матрицю $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ і елементу

$$D_1 = (\sum_{j=1}^{n} b_{1j}r_j)D_1 + \ldots + (\sum_{j=1}^{n} b_{nj}r_j)D_nF$$

матрицю $B = (b_{ij}), b_{ij} \in F$. Тоді безпосередньо перевіряється, що комутатору $[D, D_1]$ диференціювань відповідає матриця $[A, B] = AB - BA$, яка є комутатором матриць A і B в алгебрі Лі $gl_n(F)$. Таким чином підалгебра W із FL ізоморфна деякій підалгебрі алгебри Лі $gl_n(F)$. Неважко також переконатися, що алгебра Лі FL, яка є напівпрямою сумою підалгебри W і абелевого ідеалу V ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_n(F)$.

Підалгебри рангу 2 в алгебрі Лі W(A). Наступне твердження дає іншу достатню умову (порівняно з теоремою 1) ізоморфізму підалгебр рангу 2 із $W(A)$, які мають абелеві ідеали рангу 2 над R, і деяких підалгебр повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$,

Лема 6. *Нехай L — підалгебра рангу 2 над R із $W(A)$, яка містить абелевий ідеал рангу 2 над R і F — поле констант для алгебри L. Якщо центр алгебри L нульовий, то існують елементи $D_1, D_2 \in FI$ і $r_1, r_2 \in R$ такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.*

Доведення. За лемою 3, маємо $\dim_F FI = 2$. Виберемо який-небудь базис $\{D_1, D_2\}$ ідеалу FI. Візьмемо довільний елемент $D \in FL \setminus FI$. Тоді

$$D = r_1D_1 + r_2D_2 \text{ для деяких } r_1, r_2 \in R,$$

при цьому хоча б один із коефіцієнтів r_1, r_2 не лежить в полі F. Оскільки

$$[D_i, D] = D_i(r_1)D_1 + D_i(r_2)D_2 \in FI,$$

то $D_i(r_j) \in F$, $i, j = 1, 2$. Якщо матриця

$$B = \begin{pmatrix} D_1(r_1) & D_2(r_1) \\ D_1(r_2) & D_2(r_2) \end{pmatrix}$$

невироджена, то лінійний оператор ad$D$ діє невироджено на FI і тому за теоремою 1 елементи $r_1, r_2 \in R$ можна вибрати такими, щоб виконувалися рівності $D_i(a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Нехай тепер матриця B вироджена. Оскільки $D \in FL \setminus FI$, то хоча б один із рядків матриці B ненульовий, нехай це буде перший рядок. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_1(r_1) = 1, D_2(r_1) = \gamma$ для деякого $\gamma \in F$. Оскільки другий рядок матриці B пропорційний першому рядку, то $r_2 = \alpha r_1 + \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in F$. Тоді, очевидно, $D = r_1 D_1 + (\alpha r_1 + \beta) D_2$.

Випадок 1. $\gamma = 0$. Тоді

$$D_1(r_1) = 1, \quad D_2(r_1) = 0,$$

і тому, як неважко переконатися, виконується рівність $[D, D_2] = 0$. Оскільки $D_2 \notin Z(L)$, то в L існує елемент $S = s_1 D_1 + s_2 D_2$, $s_i \in R$ такий, що

$$[D_2, S] = D_2(s_1) D_1 + D_2(s_2) D_2 \neq 0.$$

Останнє означає, що хоча б один із коефіцієнтів $D_2(s_1)$, $D_2(s_2)$ ненульовий. Нехай, наприклад, $D_2(s_1) \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $D_2(s_1) = 1$. Тоді для елемента $\overline{s}_1 = s_1 - D_1(s_1) r_1$ маємо

$$D_2(\overline{s}_1) = 1 \ , \ D_1(\overline{s}_1) = D_1(s_1) - D_1(s_1) = 0$$

Позначивши $r_2 = \overline{s}_1$ отримаємо рівності $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$.

Випадок 2. $\gamma \neq 0$. Покладемо

$$D_1' = D_1, \quad D_2' = D_1 - \gamma^{-1} D_2.$$

Тоді отримаємо $D_1'(r_1) = 1$, $D_2'(r_1) = 0$. Оскільки $D_2' \notin Z(L)$, то існує елемент $T = t_1 D_1 + t_2 D_2$ такий, що $[D_2', T] \neq 0$ (зокрема, хоча б один з коефіцієнтів t_1, t_2 не належить полю F). Повторюючи міркування з випадку 1, неважко переконатися, що існують елементи $r_1, r_2 \in R$ такі, що $D_i'(r_j) = \delta_{ij}$.

Зауваження 3. *Нехай L — підалгебра рангу n над полем R із алгебри Лі $W(A)$ і I — її абелевий ідеал рангу n над R. Тоді центр алгебри Лі FL лежить в ідеалі FI алгебри FL. Дійсно, нехай $D \in Z(FL)$ і $D_1, \ldots, D_n$ — який-небудь базис ідеалу I над полем R. Тоді*

$$D = r_1 D_1 + \cdots, + r_n D_n, \quad \text{для деяких} \ \ r_1, \ldots, r_n \in R$$

і

$$[D_i, D] = D_i(r_1) D_1 + \cdots + D_i(r_n) D_n = 0.$$

Звідси випливає, що виконуються рівності $D_i(r_j) = 0, i, j = 1, \ldots, n$. Але тоді, очевидно, $r_i \in F, i = 1, \ldots, n$ і тому $D \in Z(F(I))$.

Теорема 2. *Нехай L — підалгебра рангу 2 над R із алгебри Лі $W(A)$, яка містить абелевий ідеал I рангу 2 над R і F — поле констант для алгебри Лі L. Тоді алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.*

Доведення. Очевидно, алгебру Лі L можна вважати неабелевою. Якщо $Z(FL) = 0$, то за лемою 6 в ідеалі FI існує базис D_1, D_2, а в полі R існують елементи r_1, r_2 такі, що $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$. Звідси, повторюючи міркування із доведення теореми 1, легко вивести, що кожен елемент із L має вигляд

$$S = f_1(r_1, r_2)D_1 + f_2(r_1, r_2)D_2$$

для деяких лінійних многочленів $f_1, f_2 \in F[t_1, t_2]$. Останнє означає, що алгебра Лі FL ізоморфна деякій підалгебрі повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.

Нехай тепер $Z(FL) \neq 0$. Тоді, як неважко переконатися, враховуючи Зауваження 3, що $Z(FI) \neq 0$. Виберемо базис D_1, D_2 векторного простору FI над полем F так, щоб $D_2 \in Z(FI)$. Виберемо довільний елемент $D \in FL \setminus FI$. Тоді враховуючи Зауваження 3 маємо

$$D \notin Z(FL), \quad D = r_1D_1 + r_2D_2$$

для деяких $r_1, r_2 \in R$. Із співвідношення

$$[D_1, D] = D_1(r_1)D_1 + D_1(r_2)D_2 \neq 0$$

випливає, що хоча б один із елементів $D_1(r_1), D_1(r_2)$ ненульовий. Нехай, наприклад, $D_1(r_1) \neq 0$. Не втрачаючи загальності можемо вважати, що $D_1(r_1) = 1$. Крім того, $D_2(r_1) = 0$, бо $D_2 \in Z(FL)$. Якщо $D_1(r_2) = \gamma \neq 0$, то з умови $\gamma \in F$ легко випливає, що $r_2 = \gamma r_1 + \delta$ для деякого $\delta \in F$. Тоді для елемента D маємо запис $D = r_1D_1 + (\gamma r_1 + \delta)D_2$. Використовуючи доведені вище співвідношення можна показати, що довільний елемент $D \in FL \setminus FI$, має вигляд $D = f_1(r_1)D_1 + f_2(r_1)D_2$, де f_1, f_2 — деякі лінійні многочлени із $F[t]$. Але тоді підалгебра L, очевидно, ізоморфна деякій підалгебрі (розмірності ≤ 4) із повної афінної алгебри Лі $ga_2(F)$.

Список використаної літератури

1. *Bavula V.V.* Lie algebras of triangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2013. – **77**, Issue 6. – P.3–44.
2. *A. González-López A., N. Kamran N., Olver P.J.* Lie algebras of differential operators in two complex variables // Amer. J. Math. – 1992. – **114**. – P.1163–1185.
3. *Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A.P.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations // Journal of Algebra. – 2014. – **401**. – P.245–257.
4. *Nowicki A.* Polynomial Derivations and their Rings of Constants. – Torun: Uniwersytet Mikolaja Kopernika, 1994. – 170 p.

Одержано 07.08.2017

УДК 519.21

Ю. В. Козаченко (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса)**,**
М. Ю. Петранова (Донецький нац. ун-т ім. Василя Стуса)

ДІЙСНІ СТАЦІОНАРНІ ГАУСОВІ ПРОЦЕСИ ЗІ СТІЙКИМИ КОРЕЛЯЦІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ[2]

The paper deals with real stationary processes with a stable correlation function, with the distribution of some functionalities from these processes and some of their properties.

В роботі розглянуті дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості.

Вступ. Дана робота продовжує дослідження роботи [1], де вивчались комплексні гауссові процеси зі стійкою кореляційною функцією. В цій роботі вивчаються дійсні стаціонарні процеси зі стійкою корреляційною функцією, зокрема розподіли деяких функціоналів від цих процесів та деякі їх властивості. Для інших процесів подібні задачі розглядались в роботах та книгах [2–6]

Моделі деяких гауссових стаціонарних процесів зі стійкими кореляційними функціями будувались в роботах [1, 7, 8].

Робота складається з чотирьох розділів. У першому розділі знаходяться оцінки розподілу супремуму гауссовських стаціонарних процесів зі стійкою коваріаційною функцією. В другому розділі вивчається поведінка цих процесів на нескінченності. В третьому розділі знаходяться оцінки розподілу норм цих процесів у просторі $L_p(T)$. В четвертому розділі досліджуються деякі аналітичні властивості цих процесів.

1. Розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями.

Теорема 1. *Нехай* $T = [a, b]$, $X = \{X(t), t \in [a, b], -\infty < a < b < \infty\}$ *центрований сепарабельний гауссів процес та* $M = \sup_{t\in T} \left(E|X(t)|^2\right)^{1/2}$. *Припустимо, що існує неперервна строго зростаюча функція* $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ *така що* $\sigma(h) > 0$, $h > 0$, $\sigma(0) = 0$ *та*

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \left(E|X(t) - X(s)|^2\right)^{1/2} < \sigma(h).$$

Крім того існує невід'ємна неспадна функція $r(u), u \geq 1$ *така що функція* $r(e^y), y \geq 0$ *— опукла та виконуетьса умова: для деякого* $v > 0$ *(а тому і для будь-якого* $0 < v < \infty$*)*

$$I_r(v) = \int_0^v r\Big(\frac{b-a}{2\cdot\sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big) du < \infty,$$

[2]Робота була виконана в рамках проекту Норвезько-українського співробітництва у галузі математичної освіти

де $\sigma^{(-1)}(u)$ — *обернена до* $\sigma(u)$ *функція. Тоді для будь-яких* $\theta \in (0,1)$ *та* $\lambda > 0$ *справджується нерівність:*

$$E \exp\left\{\lambda \sup_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\} \le 2D(\lambda,\theta), \tag{1}$$

де $D(\lambda,\theta) = \exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$, $r^{(-1)}(v)$ — *обернена до* $r(v)$ *функція.*

Доведення. Ця теорема випливає з теореми 3.4.4 книги [9], див. також роботу [10] та доведення в роботі [11].

Наслідок 1. *За умов теореми 1 при будь-якому* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2M^2}\right\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{2}$$

Доведення. З нерівності Чебишева та нерівності (1) випливає, що при $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \frac{E\left\{\lambda \sup_{t\in[a,b]} |X(t)|\right\}}{\exp\{\lambda\varepsilon\}} \le$$
$$\exp\left\{\frac{\lambda^2 M^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right). \tag{3}$$

Нерівність (2) випливає з нерівності (3), якщо покласти $\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{M^2}$ (точка, в якій права частина в нерівності (3) набуває мінімуму за λ).

Означення 1. *Дійсний стаціонарний гауссів процес* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$, $0 < \alpha \le 2$, *такий що* $EX_\alpha(t) = 0$, $\rho_\alpha(h) := EX_\alpha(t+h)X_\alpha(t) = B^2 exp\{-d|h|^\alpha\}$, $d > 0$ *називається дійсним гауссовим стаціонарним процесом зі стійкою кореляційною функцією.*

Теорема 2. *Нехай* X_α — *дійсний сепарабельний гауссовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді для будь-яких* $-\infty < a < b < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\beta < \min\left(1, \frac{\alpha}{2}\right)$, $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність:*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]} |X(t)| > \varepsilon\right\} \le \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2}\right\} \cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)^{1/\beta}} + 1\right).$$

Доведення. Теорема випливає з наслідку 1. Оцінимо за умов теореми таку величину $r^{(-1)}\left(\frac{I_r(\theta M)}{\theta M}\right)$. В нашому випадку

$$E|X_\alpha(t+h) - X_\alpha(t)|^2 = 2\big(\rho_\alpha(0) - \rho_\alpha(h)\big) = 2B^2\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big).$$

Тобто $\sigma(h) = \sqrt{2}B\big(1 - exp\{-d|h|^\alpha\}\big)^{1/2}$. Зауважимо, що $\sigma(h) < \sqrt{2}B$. Отже, $\sigma^{(-1)}(h)$ визначена при $0 \le h < \sqrt{2}B$. Оскільки $\sigma(h) \le \sqrt{2}B\big(dh^\alpha\big)^{1/2} = \hat{\sigma}(h)$ тоді при $0 < s < B\sqrt{2}$

$$\sigma^{(-1)}(s) \ge \hat{\sigma}^{(-1)}(s) = \left(\frac{s}{B\sqrt{2d}}\right)^{2/\alpha}.$$

Отже,

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} r\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)ds.$$

Покладемо $r(u)=u^\beta-1$ при $u\geq 1$, де $0<\beta<\min(\alpha/2,1)$. Тоді

$$I_r(v) \leq \int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \left(\Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}+1\Big)^\beta-1\right)ds \leq$$

$$\int_0^{\min(v,B\sqrt{2})} \Big(\frac{(b-a)}{s^{2/\alpha}}\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta ds =$$

$$\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta \cdot \Big(\min(v,B\sqrt{2})\Big)^{\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}.$$

Тому

$$I_r(\theta B) \leq \Big((b-a)\big(B\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}\Big)^\beta \frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}\big(\theta B\big)^{1-\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Оскільки $r^{(-1)}(u)=(u+1)^{1/\beta}$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq \Big((b-a)^\beta\Big(B\sqrt{2d}\Big)^{2\beta/\alpha}\frac{1}{\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)}(\theta B)^{-\frac{2\beta}{\alpha}}+1\Big)^{1/\beta}. \tag{4}$$

Оскільки при $z\geq 1$ справджується нерівність $(b+a)^z \geq 2^{z-1}\big(a^z+b^z\big)$, тоді

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_r(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right). \tag{5}$$

Тепер твердження теореми випливає з нерівностей (2) та (3).

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\} \leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot e\cdot 2^{1/\beta-1}\left(\frac{(b-a)\big(\sqrt{2d}\big)^{2/\alpha}}{\Big(1-\big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\Big(1-\frac{2\beta}{\alpha}\Big)^{-1/\beta}+1\right).$$

Доведення. Нерівність (5) випливає з нерівності (4), якщо покласти $\big(1-\theta\big)^2=\Big(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\Big)$ при $\varepsilon>\sqrt{2}B$, тобто при $\theta=1-\Big(1-\frac{2\beta^2}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 2, тоді при $\varepsilon>\sqrt{2}B$ справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in[a,b]}|X_\alpha(t)|>\varepsilon\right\} \leq exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2}\right\}\cdot$$

$$e\cdot 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b-a)\cdot d^{1/\alpha}\cdot 2^{5/\alpha}\cdot\varepsilon^{4/\alpha}}{B^{4/\alpha}}+1\Big). \tag{6}$$

Доведення. При $0 \le x \le 1$ справджується нерівність $1-(1-x)^{1/2} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)^{1/2}} \ge \frac{x}{2}$. Отже, $\left(1-\left(1-\frac{2B^2}{\varepsilon^2}\right)^{1/2}\right)^{2/\alpha} \ge \left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{4/\alpha}$. Тепер нерівність (6) випливає з нерівності (5), якщо покласти $\beta = \frac{\alpha}{4}$.

2. Поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності.

Теорема 3. *Нехай $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in \mathbf{R}\}$ — дійсний гаусовий стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією* (див. означення 1), *$C = \{C(t), t \ge 0\}$ — монотонно зростаюча функція, така що $C(t) \ge 1, t \ge 0$ та $C(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; $b_0, b_1, b_2, ..., b_k$, така послідовність, що $b_0 = 0, b_k < b_{k+1}$, та $b_k \to \infty$ при $k \to \infty$, $r_0, r_1, r_2, ..., r_k$ така послідовність, що $r_k > 1$ та $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} = 1$, $C_k = C(b_k), k = 0, 1, 2...$ і виконуються умови*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma < \infty,$$

де γ — деяке число, що $0 < \gamma < 1$. Тоді при будь-якому $0 < \theta < 1$ та $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{t\ge 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \le 2^{\frac{4}{\alpha}-1} \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot$$
$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^\gamma} \cdot (\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}} \cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^\gamma\right\}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\lambda > 0$, $S(\lambda) := E\exp\left\{\lambda \sup_{t\ge 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\}$ тоді з нерівності Гельдера отримаємо, що

$$S(\lambda) \le E\exp\left\{\lambda \sup_{t\in[b_k, b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\right\} \le \prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\lambda r_k \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}\Big)\right\}\right)^{1/r_k} \le$$
$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\}\right)^{1/r_k}.$$

З нерівності (1) випливає, що

$$E\exp\left\{\frac{\lambda r_k}{C_k} \sup_{t\in[b_k,b_{k+1}]} |X_\alpha(t)|\right\} \le 2D(\lambda,\theta) \le$$

$$\exp\left\{\Big(\frac{\lambda r_k}{C_k}\Big)^2 \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big),$$

де

$$I_{r_k}(v) = \int_0^v r\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)}{2\sigma^{(-1)}(v)} + 1\Big)dv,$$

θ — будь-яке число, таке що $0 < \theta < 1$, $r(u), u \geq 1$ — монотонно зростаюча функція, така що при $u > 0$ функція $r(e^u)$ — опукла. Зауважимо, що $\frac{\alpha}{2} \leq 1$. Покладемо $r(u) = u^{\frac{\alpha}{4}-1}$ при $u \geq 1$. Тоді з нерівності (5) випливає, що

$$r^{(-1)}\Big(\frac{I_{r_k}(\theta B)}{\theta B}\Big) \leq 2^{4/\alpha-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big).$$

З нерівності (1) отримаємо, що

$$S(\lambda) \leq$$

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left\{\Big(\frac{\lambda \cdot r_k}{C_k}\Big)^2 \cdot \frac{B^2}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\Big(\frac{(b_{k+1}-b_k)\sqrt{2d}^{\frac{2}{\alpha}}}{\theta^{2/\alpha}} \cdot 2^{4/\alpha}+1\Big)\right)^{1/r_k} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big((b_{k+1}-b_k) \cdot \frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha} \cdot 2^{4/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}+1\Big)\Big)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(2^{4/\alpha-1}\Big)\right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}\ln\Big(1+\frac{\sqrt{2d}^{2/\alpha}}{\theta^{2/\alpha}}(b_{k+1}-b_k) \cdot 2^{4/\alpha}\Big)\right\}. \quad (8)$$

Оскільки при $0 < \gamma < 1$, $x > 0$ справджується нерівність $\ln(1+x) \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x)^\gamma \leq \frac{1}{\gamma}\ln(1+x^\gamma) \leq \frac{x^\gamma}{\gamma}$ тоді з нерівності (8) випливає, що

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{4/\alpha}}{r_k\gamma}\left(\frac{(\sqrt{2d})^{2/\alpha}(b_{k+1}-b_k)}{\theta^{2/\alpha}}\right)^\gamma\right\}.$$

Отже,

$$S(\lambda) \leq 2^{4/\alpha-1} \cdot \exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2}{2(1-\theta)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\},$$

де

$$w(\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k\gamma}\Big((b_{k+1}-b_k)(\sqrt{2d})^{\alpha/2} \cdot 2^{4/\alpha}\Big)^\gamma.$$

Тоді з нерівності Чебишева випливає, що при $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$

$$P\left\{\sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$2^{4/\alpha-1}\exp\left\{\frac{\lambda^2 B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}}{2(1-\theta)^2}\right\} \cdot \exp\{-\lambda\varepsilon\} \cdot \exp\left\{\frac{w(\gamma)}{\theta^{\gamma/2}}\right\}. \quad (9)$$

Якщо в нерівність (9) підставити

$$\lambda = \frac{\varepsilon(1-\theta)^2}{B^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}},$$

тоді отримаємо твердження теореми.

Наслідок 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq$$

$$\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1} \cdot e \cdot \exp\left\{\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{6\gamma/\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}}{\left(1-(1-2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2})^{1/2}\right)^{\gamma/2}}\right\}. \quad (10)$$

Доведення. Нерівність (10) випливає з нерівності (7), якщо покласти $\Big(1-\theta\Big)^2 = \Big(1 - \frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)$, тобто $\theta = 1 - \Big(1 - \frac{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}\Big)^{1/2}$.

Наслідок 5. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді при* $\varepsilon > \sqrt{2}B\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k}{C_k^2}\Big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\geq 0} \frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\} \cdot 2^{4/\alpha-1}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^{\gamma}\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}. \quad (11)$$

Доведення. Нерівність (11) випливає з нерівність (10), оскільки, як і в наслідку 3

$$\Big((1 - \frac{2B^2}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2})\Big) \geq \frac{B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}{\varepsilon^2}.$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді з ймовірностю одиниця для всіх* $t > 0$ *виконується умова*

$$|X_\alpha(t)| < \xi_\alpha \cdot C(t),$$

де ξ_α *— така випадкова величина, що при будь-якому* $0 < \theta < 1$

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^{\gamma}}\cdot(\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}\right\},$$

або при $\varepsilon \geq \sqrt{2}B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\xi_\alpha > \varepsilon\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}\cdot 2^{4/\alpha-1}.$$

$$\exp\left\{-\frac{d^{\gamma/2}\cdot 2^{3\gamma/\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\big(b_{k+1}-b_k\big)^{\gamma}\varepsilon^{2/\alpha}}{\Big(B\big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}\big)^{1/2}\Big)^{2/\alpha}}\right\}.$$

Доведення. Теорема випливає з теореми 3 та нерівностей (7) і (3), оскільки при всіх $t>0$ з імовірністю одиниця

$$\frac{X_\alpha(t)}{C(t)} \leq \sup_{t\geq 0}\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)} < \infty.$$

Приклад 1. *Якщо в умовах теореми 3 покласти* $b_k = e^k$, $k = 1,2,\dots$ *та* $\frac{1}{r_k} = e^{-k}\cdot\frac{e}{(e-1)}$, *тоді умови теореми виконуються, якщо збігається ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{c(e^k)^2}$, *а цей ряд збігається, якщо* $C(t) = t^{1/2+\beta}$, $\beta>0$, *або* $C(t) = t^{1/2}(\ln t)^{1/2+\delta}$ *при* $\delta > 0$.

При цих b_k *та* e^k *збігається ряд при будь-яких* $\gamma < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\frac{e}{(e-1)}(e^{k+1}-e^k)^{\gamma} = (e-1)^{\gamma-1}\cdot e\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k}\cdot e^{\gamma k} < \infty.$$

3. Розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією

Теорема 5. *Нехай* $\{\mathbb{T},\Lambda,\mu\}$ *— вимірний простір,* $X = \{X(t), t\in\mathbb{T}\}$ *вимірний гауссовий випадковий процес. Нехай існує інтеграл Лебега* $\int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$, $p\geq 1$. *Тоді з ймовірністю одиниця існує* $\int_{\mathbb{T}}E|X(t)|^p d\mu(t)$, *та для всіх* ε, *таких що* $\varepsilon > C\cdot p^{p/2}$, *де* $c = \int_{\mathbb{T}}\big(E|X(t)|^2\big)^{p/2}d\mu(t)$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_{\mathbb{T}}|X(t)|^p d\mu(t)\Big)^{1/p} > \varepsilon\right\} \leq 2^{\frac{4}{\alpha}-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2(1-\theta)^2}{2B^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{C_k^2}}\right\}.$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\theta^{\gamma/2}\cdot\gamma^{\gamma}}\cdot(\sqrt{2d})^{\frac{2\gamma}{\alpha}}\cdot 2^{\frac{4\gamma}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}(b_{k+1}-b_k)^{\gamma}\right\}.$$

Доведення. *Ця теорема є простим наслідком теореми 2.1 роботи [12].*

Теорема 6. *Нехай* $X_\alpha(t)$, $t\in[a,b]$ *— вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією. Тоді для* $\varepsilon > \hat{c}^{1/p}\sqrt{p}$, *де* $\hat{c} = B^p(b-a)$ *справджується нерівність*

$$P\left\{\Big(\int_a^b|X_\alpha(t)|^p\Big)^{1/p}dt > \varepsilon\right\} \leq 2\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\hat{c}^{2/p}}\right\}.$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої теореми. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ це інтервал $[a, b]$ з борелевською σ-алгеброю та мірою Лебега $E|X(t)|^2 = B^2$.

Теорема 7. *Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in \mathbf{R}$ — вимірний дійсний гауссовий процес зі стійкою коваріаційною функцією, $C(t) > 1$ деяка функція, така що $\int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt < \infty$. Тоді для $\varepsilon > \hat{c}^{1/p} \cdot \sqrt{p}$, де $\hat{c} = B^p \int_0^\infty \frac{1}{C(t)} dt$ справджується нерівність*

$$P\left\{\left(\int_0^\infty |X_\alpha|(t)^p\right)^{1/p} > \varepsilon\right\}.$$

Доведення. Ця теорема також випливає з теореми 5. Тут простір $\{\mathbb{T}, \Lambda, \mu\}$ — це $[0, \infty)$ з борелевською σ-алгеброю, процес $X(t)$ це $\frac{|X_\alpha(t)|}{C(t)}$:

$$\int_0^\infty \left(E|X(t)|^2\right)^{p/2} dt = B \int_0^\infty \frac{1}{\left(C(t)\right)^p} dt.$$

Прикладом $C(t)$ може бути функція така, що при $t > 1$ $C(t) = t^{1/p+\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$

4. Аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими корелляційними функціями.

Наступна теорема — це простий наслідок теореми 2.2.9 з книги [[2], с. 79].

Теорема 8. *Нехай $X = \{X(t), t \in [a, b]\}$ — сепарабельний гауссів процес, такий що існує монотонно зростаюча неперевна функція $\sigma(h), h \geq 0$, така що $\sigma(0) = 0$, для якої справджується*

$$\sup_{|t-s| \leq h} \left(E\big(X(t) - X(s)\big)^2\right)^{1/2} \leq \sigma(h)$$

та збігається інтеграл

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \ln\big(\frac{b-a}{2\sigma^{-(1)}(u)}\big)^{1/2} du \leq \infty.$$

Тоді $X(t)$, $t \in [a, b]$ є вибірково неперервний з імовірністю одиниця та для довільних $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $x > B(p, \varepsilon)$, де

$$B(p, \varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln\Big(\frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\Big)\right)^{1/2} du$$

справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s| \leq \varepsilon} |X(t) - X(s)| > x\right\} \leq 2exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x - B(p, \varepsilon)}{A(p, \varepsilon)}\Big)^2\right\},$$

де $A(p, \varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)(3-p)}{(1-p)^2}$.

З теореми 8 випливає така теорема

Теорема 9. *Нехай* $X_\alpha = \{X_\alpha(t), t \in [a,b]\}$ *сепарабельний центрований гаусcовий процес зі стійкою кореляційною функцією. Тоді при всіх* $0 < \alpha < 2$ $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ *вибірково неперввний з імовірністю одиниця та для довільних* $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$, $0 < \beta < \min(1,\alpha)$, $x > \hat{B}(p,\varepsilon)$, *де*

$$\hat{B}(p,\varepsilon) = \frac{4(3-p)}{3p(1-p)^2} \cdot \frac{1}{2^{(1+\beta)/2}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha} \cdot B^{\beta/\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\beta/\alpha)}\Big(\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\beta/\alpha}$$

справджується нерівність

$$P\left\{\sup_{|t-s|\le\varepsilon} |X(t)-X(s)| > x\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big(\frac{x-\hat{B}(p,\varepsilon)}{A(p,\varepsilon)}\Big)^2\right\}, \qquad (12)$$

де $A(p,\varepsilon) = \frac{(3-p)\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}}{(1-p)^2}$.

Доведення. В нашому випадку можна покласти $\sigma(h) = \sqrt{2}dB|h|^{\alpha/2}$, тоді $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{u}{\sqrt{2}dB}^{2/\alpha}$ та

$$\int_0^{\sigma(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\Big(\frac{(b-a)\Big(\sqrt{2}dB\Big)^{2/\alpha}}{2u^{2/\alpha}}+1\Big)\right)^{1/2} du \le$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\beta^{1/2}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha}B^{\beta/\alpha}\frac{1}{2^{\beta/\alpha}}\int_0^{\sigma(\varepsilon)}\frac{1}{u^{\beta/\alpha}}du =$$

$$\frac{1}{2^{(1+\beta/2)}}(b-a)^{\beta/2}(\sqrt{2}d)^{\beta/\alpha}B^{\beta/\alpha}\frac{1}{\big(1-\frac{\beta}{\alpha}\big)}\Big(\sqrt{2}dB\varepsilon^{\alpha/2}\Big)^{1-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Зауваження 1. *Щоб знайти більш точну оцінку, треба знайти мінімум по* β *правої частини в нерівності* (12).

Означення 2. *Випадковий процес* $X(t)$, $t \in [a,b]$ *називають диференційованим в середньоквадратичному, коли існує границя (в середньоквадратичному)*

$$l.i.m._{h\to 0}\frac{X(t+h)-X(t)}{h} = X'(t).$$

Якщо існує $X'(t)$ *— тоді її називають середньоквадратичною похідною процесу* $X(t)$.

Теорема 10 (див. [13], с. 300)**.** *Для того, щоб у процесу* $X(t)$, $EX(t) = 0$ *існувала середньоквадратична похідна* $X'(t)$ *необхідно та достатньо, щоб існувала границя*

$$\lim_{t'\to t, t''\to t}\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'')-B(t',t)-B(t'',t)+B(t,t)\Big),$$

де $B(t,s) = EX(t)X(s)$. *При цьому, якщо існує похідна* $\frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\partial s}$, *тоді* $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t\partial s}$.

З цієї теореми випливає наступна теорема.

Теорема 11. *Нехай $X_\alpha(t)$, $t \in [a,b]$ стаціонарний процес зі стійкою кореляційною функцією (не обов'язково гауссовою). Тоді при $0 < \alpha < 2$ середньоквадратичні похідні не існують, а при $\alpha = 2$ похідна існує та*

$$EX_2'(t)X_2'(s) = B^2 exp\left\{-d(t-s)\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot (t-s)^2 + 2d\Big),$$

тобто $X_2'(t)$ стаціонарний процес з кореляційною функцією

$$EX_2'(t+\tau)X_2'(t) = B^2 exp\left\{-d|\tau|^2\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big). \qquad (13)$$

Доведення. В нашому випадку

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B(t',t'') - B(t',t) - B(t'',t) + B(t,t)\Big) =$$

$$\frac{1}{(t'-t)(t''-t)}\Big(B^2 exp\left\{-d|t'-t''|^\alpha\right\} - B^2 exp\left\{-d|t'-t|^\alpha\right\} -$$

$$B^2 exp\left\{-d|t''-t|^\alpha\right\} + B^2\Big).$$

Легко побачити, що границя цього виразу існує тоді і лише тоді, коли $\alpha = 2$. Крім того, очевидно, що

$$EX_2'(t)X_2'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s} = B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\} \cdot \Big(4d^2 \cdot \tau^2 + 2d\Big).$$

Зауваження 2. *Коли $X_\alpha(t)$ — гауссів процес, то $X_\alpha'(t)$ також гауссів процес.*

Тепер покажемо, що середньоквадратична похідна від $X_\alpha(t)$ є звичайною неперервною похідною з імовірністю одиниця, якщо $X_\alpha(t)$ — гауссів та сепарабельний процес.

Теорема 12 (див. [14]). *Нехай $X(t)$, $t \in [a,b]$ неперервний з імовірністю одиниця випадковий процес з $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = B(t,s)$ та нехай існує неперервна з імовірністю одиниця середньоквадратична похідна процесу $X(t)$, така що $EX'(t)X'(s) = \frac{\partial^2 B(t,s)}{\partial t \partial s}$, тоді з імовірністю одиниця $X'(t)$ є звичайною похідною процесу $X(t)$.*

Наслідок 6. *У процесу $X_2(t)$ існує вибіркова неперервна похідна $X_2'(t)$ з кореляційною функцією (13) та $X_2'(t)$ — гауссів процес.*

Доведення. Щоб довести твердження наслідку досить довести, що процес $X_2'(t)$ вибірково неперервний з імовірністю одиниця. Легко побачити, що

$$E\Big(X_2'(t) - X_2'(s)\Big)^2 = 4B^2 d - 4B^2 exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big)(2d\tau^2 + d) =$$

$$4B^2 d\Big(1 - 2d\tau^2 \cdot exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) + \Big(1 - exp\left\{-d|\tau|^\alpha\right\}\Big) \geq$$

$$4B^2 d\Big(2d^2\tau^4 + d\tau^2\Big) = 4B^2 d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big) \cdot \tau^2 \geq Z\tau^2.$$

де $Z = 4B^2d\Big(2d^2\tau^2 + d\Big)$ та така константа, що $|\tau| < s$. Тобто $\sigma(\tau) = \sqrt{Z}\tau$, далі доведення теореми аналогічне доведенню теореми 9.

Висновки. У роботі знайдено розподіл супремуму дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкими коваріаційними функціями. Описана поведінка дійсного гауссового стаціонарного процесу зі стійкими коваріаційними функціями $X_\alpha(t)$ при прямуванні t до нескінченності. Також, знайдено розподіл норми в просторі $L_p(T)$ дійсного гауссового випадкового процесу зі стійкою коваріайційною функцією та описано аналітичні властивості гауссових випадкових процесів зі стійкими корелляційними функціями.

Список використаної літератури

1. *Kozachenko Y. V.,Petranova M. Y.* Proper complex random processes //Stat. Optim. and Inf. Comput. – 2017. – Vol. 5, No. 2. – P. 137–146.
2. *Kozachenko Yu. V., Vasilic O. I.* On the distribution of suprema of $Sub_\varphi(\Omega)$ random processes // Theory Stoch. Processes – 1998. – Vol. 4(20), No. 1-2. – P. 147–160.
3. *Kozachenko Yu. V.* Random processes in Orlicz spaces I // Theory Probab. and Math. Stat. – 1985. – Vol. 30. – P. 103–117.
4. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* On local properties of sample functions of some stochastic processes and fields // Teor. Veroyatn. Mat. Stat. – 1974. – Vol. 10. – p. 39–47.
5. *Kozachenko Yu., Pogoriliak O., Rozora I. and Tegza A.* Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability. – London: ISTE Press Ltd and Elsevier Ltd, 2016. – 346 p.
6. *Козаченко Ю.В., Кучінка К.Й., Сливка–Тилищак Г.І.* Випадкові процеси в задачах математичної фізики. – Ужгород: ТОВ "РІК–У", 2017. – 256 с.
7. *Petranova M.* Simulation of Gaussian Stationary Quasi Ornstein–Uhlenbeck Process with Given Reliability and Accuracy in Spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$ // Journal of Applied Mathematics and Statistics – 2016. – Vol. 3(1). – P.44–58.
8. *Kozachenko Yu., Petranova M.* Simulation of Gaussian stationary Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in space C([0, T]) // Monte Carlo Methods Appl. – 2017. – Vol. 23, No. 4. – p. 277–286.
9. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. – 257 p.
10. *Kozachenko Yu. V., Olenko A.* Aliasing-Truncation errors in sampling approximations on Sub-Gaussian signals // IEEE Transactions on Information Theory – 2016. – Vol. 62, No. 10. – p. 5831–5838.
11. *Dozzi M., Kozachenko Y., Mishura Y. and Ralchenko K.* Asymptotic growth of trajectories of multifractional Brownian motion with statistical applications to drift parameter estimation // Statistical Inference for Stochastic processes. – 2016. – DOI: 10.1007/s11203-016-9147-z. – P. 1–32.
12. *Kozachenko Y., Kamenschikova O.* On an expansion of random processes in the space $L_p(T)$ // Theory Probab. And Math. Statist. – 2009. – Vol. 79. – P. 83–88.
13. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1988. – 440 с.
14. *Gladkaya O. N.* On condition of differentiability in direction of sample function of random fields // Theory Probab. and Math Statistics. – 1978. – Vol. 17. – P. 33–41.

Одержано 10.09.2017

УДК 517.925

К. С. Корепанова (Одеський нац. ун-т імені І. І. Мечникова)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

In the paper the question of existence and asymptotic behaviour of $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–solutions, $k \in \{3,\dots,n\}$ and $\lambda_0 \in \{1,\pm\infty\}$, of a binomial non-autonomous n-th order ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities was investigated. The asymptotic formulas of their derivatives of order up to $n-1$ were obtained too.

У роботі вивчено питання про існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків при $k \in \{3,\dots,n\}$ і $\lambda_0 \in \{1,\pm\infty\}$ у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійностями. Отримані також асимптотичні формули для їх похідних до порядку $n-1$ включно.

1. Вступ. Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1}$$

в якому $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0;+\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0,n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0,\pm\infty\}$[3].

Важливим окремим випадком рівняння (1) є узагальнене рівняння типу Емдена-Фаулера

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_j} \mathrm{sign}\, y, \tag{2}$$

де $n \geq 2$, $\alpha \in \{-1,1\}$, $\sigma_j \in \mathbb{R}$ $(j = \overline{0,n-1})$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, яке має безліч застосувань на практиці: у ядерній фізиці, газовій динаміці, механіці рідини та інших галузях природознавства.

У роботі [1] В. М. Євтухов з множини розв'язків рівняння (2) виділив достатньо широкий клас, так званих, $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків ($\lambda_0 \in \mathbb{R}$). Досліджуючи апріорні асимптотичні властивості $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків, у роботі [2] було встановлено, що їх множина розпадається на $n+2$ неперетинних підмножин в залежності від значень λ_0. При виконанні нерівності $\sigma_0 + \ldots + \sigma_{n-1} \neq 1$ були отримані необхідні та достатні умови існування у диференціального рівняння (2) кожного з $n+2$ можливих типів $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків та встановлені асимптотичні при $t \uparrow \omega$ зображення для таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

У зв'язку зі стрімким розвитком теорії правильно та повільно змінних функцій та регулярним їх використанням у багатьох наукових дослідженнях не згасав інтерес до їх застосування в асимптотичній теорії диференціальних рівнянь.

[3]При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що всі числа з околу ΔY_j одного знаку.

У роботі [3] клас $\mathcal{P}_\omega(\lambda_0)$–розв'язків був уперше конкретизований для рівнянь n–го порядку з правильно змінною нелінійністю. Пізніше в роботах В. М. Євтухова та О. М. Клопота [4–6], О. М. Клопота [7, 8] були розглянуті рівняння виду

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}),$$

де $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1, 1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ — неперервні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_{kj} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ $(k = \overline{1,m}, j = \overline{0, n-1})$ — неперервні та правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції порядку σ_j, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$. Для цих рівнянь був введений клас $\mathcal{P}_\omega(Y_0, \ldots, Y_{n-1}, \lambda_0)$–розв'язків, для яких, зважаючи на їх означення, виконуються такі умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \ (j = \overline{0, n-1}), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0,$$

були встановлені необхідні та достатні умови їх існування.

2. Постановка задачі та допоміжні результати. У цій роботі розглядається диференціальне рівняння (1) при $\omega = +\infty$ та $n \geq 3$, тобто диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{3}$$

в якому $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ — неперервна функція, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ — неперервна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j — деякий односторонній окіл точки Y_j, $Y_j \in \{0, \pm\infty\}$.

Окрім зазначених вище розв'язків, для яких $\lim\limits_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t)$ $(k = \overline{1, n})$ дорівнює або 0, або $\pm\infty$, у рівняння (3) можуть бути також розв'язки, для кожного з яких існує $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що

$$y^{(n-k)}(t) = c + o(1) \quad (c \neq 0) \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{4}$$

Для рівнянь загального виду були отримані деякі результати про існування розв'язків з такими зображеннями в наслідках 8.2, 8.6, 8.12 (див. [9], гл. II, §8, с. 207, 214, 223) та наслідках 9.3, 9.7 (див. [9], гл. II, §9, с. 230, 233), для диференціальних рівнянь типу Емдена-Фаулера — в теоремі 16.9 (див. [9], гл. IV, §16, с. 321). Але ці результати забезпечують досить жорстке обмеження на $(n-k+1)$–у та наступні похідні розв'язку.

У цій роботі досліджується питання про отримання нових результатів з менш жорсткими обмеженнями. При $k = 1, 2$ або у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i = \overline{n-k+1, n-2})$ при $y^{(i)} \to Y_i$ дорівнюють додатнім сталим, в роботах [10] та [11] для рівняння (3) були отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків виду (4) та описана їх асимптотична поведінка без додаткових обмежень на ці розв'язки. У всіх інших випадках з розв'язків виду (4) був виділений (див. [12]) досить широкий підклас, так званих, $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) таким чином.

Означення 1. *Розв'язок y диференціального рівняння* (3) *будемо при* $k \in \{3, \dots, n\}$ *називати* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язком, де* $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$*, якщо він визначений на проміжку* $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$ *та задовольняє такі умови*

$$\lim_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t) = c \ \ (c \neq 0), \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t) y^{(n)}(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

За своїми асимптотичними властивостями множина всіх $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків рівняння (3) розпадається на $k+1$ ($k \in \{3, \dots, n\}$) неперетинних підмножин (див. [2]), які відповідають таким значенням параметру λ_0:

$$\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{k-3}{k-2}, 1\right\}, \quad \lambda_0 = \pm\infty, \quad \lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_0 = \tfrac{n-j-1}{n-j}, \quad j \in \{n-k+2, \dots, n-1\}.$$

Випадок $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{k-3}{k-2}, 1\right\}$ вивчений у роботі [12]. Метою цієї роботи є дослідження питання про умови існування та асимптотичну поведінку $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків ($k \in \{3, \dots, n\}$) рівняння (3) в особливому випадку, коли $\lambda_0 \in \{1, \pm\infty\}$, а також про кількість таких розв'язків.

Згідно з роботою [2] досліджувані розв'язки рівняння (3) мають такі апріорні асимптотичні властивості.

Лема 1. *Нехай* $k \in \{3, \dots, n\}$ *та* $y : [t_{0k}, +\infty[\to \mathbb{R}$ *– довільний* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$*–розв'язок рівняння* (3)*. Тоді:*
1) *якщо* $\lambda_0 = \pm\infty$*, то мають місце асимптотичні при* $t \to +\infty$ *співвідношення*

$$y^{(l-1)}(t) \sim \tfrac{t^{n-l}}{(n-l)!} y^{(n-1)}(t) \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}), \quad y^{(n)}(t) = o\left(\tfrac{y^{(n-1)}(t)}{t}\right); \tag{6}$$

2) *якщо* $\lambda_0 = 1$*, то при* $t \to +\infty$

$$\tfrac{y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)} \sim \tfrac{y^{(n-k+3)}(t)}{y^{(n-k+2)}(t)} \sim \dots \sim \tfrac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \ \textit{та} \ \lim_{t \to +\infty} \tfrac{t y^{(n-k+2)}(t)}{y^{(n-k+1)}(t)} = +\infty. \tag{7}$$

З вигляду рівняння (3) зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак у деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ ($l = \overline{1, k-1}$) є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ та з огляду на (4) можуть прямувати лише до нуля при $t \to +\infty$. Тому

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при} \ \ j = \overline{n-k+2, n}. \tag{8}$$

Тут і далі будемо вважати, що числа μ_j ($j = \overline{0, n-1}$), які визначені таким чином:

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = +\infty, \\ & \text{або } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо } Y_j = -\infty, \\ & \text{або } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \ - \text{ лівий окіл } 0, \end{cases}$$

такі, що

$$\mu_j \mu_{j+1} > 0 \text{ при } j = \overline{0, n-k-1}, \ \ \mu_j \mu_{j+1} < 0 \text{ при } j = \overline{n-k+1, n-2}, \tag{9}$$

$$\alpha\mu_{n-1} < 0. \tag{10}$$

Ці умови на μ_j $(j = \overline{0, n-1})$ та α є необхідними для існування у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\lambda_0)$–розв'язків, оскільки для кожного з них в деякому околі $+\infty$

$$\operatorname{sign} y^{(j)}(t) = \mu_j \ \ (j = \overline{0, n-1}), \ \ \operatorname{sign} y^{(n)}(t) = \alpha.$$

Крім того, очевидно, що враховуючи перше зі співвідношень (5) для таких розв'язків мають місце такі асимптотичні зображення

$$y^{(l-1)}(t) = \frac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}\,[1 + o(1)] \quad (l = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty, \tag{11}$$

$c \in \Delta Y_{n-k}$ і тоді

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \ \mu_{n-k} < 0 \end{cases} \quad \text{при } \ j = \overline{1, n-k}. \tag{12}$$

У рівнянні (3) кожна з правильно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ порядку σ_j може бути представлена (див. [13], гл.I, §1, с.10) у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \quad (j = \overline{0, n-1}), \tag{13}$$

де $L_j : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ — повільно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \quad \text{для будь-якого} \quad \lambda > 0 \quad (j = \overline{0, n-1}). \tag{14}$$

У якості прикладів повільно змінних при $y \to Y_0$ функцій можна навести такі:

$$|\ln|y||^{\gamma_1}, \quad \ln^{\gamma_2}|\ln|y||, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$
$$\exp(|\ln|y||^{\gamma_3}), \quad 0 < \gamma_3 < 1, \quad \exp\left(\frac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right),$$

функції, що мають відмінну від нуля границю при $y \to Y_0$.

Будемо також говорити, що повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, якщо

$$L\left(\mu e^{[1+o(1)]\ln|y|}\right) = L(y)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0),$$

де $\mu = \operatorname{sign} y$.

Умову S_0 напевне задовольняють функції L, які мають скінченну границю при $y \to Y_0$, а також функції виду

$$L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}, \quad L(y) = |\ln|y||^{\gamma_1}|\ln|\ln|y|||^{\gamma_2},$$

де $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, та багато інших.

Зауваження 1. *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, то для будь-якої повільно змінної при $y \to Y_0$ функції $l : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$*

$$L(yl(y)) = L(y)[1 + o(1)] \ \ \textit{при} \ \ y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta Y_0).$$

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з теореми 1.1 про рівномірну збіжність та теореми 1.2 про представлення повільно змінних функцій (див. [13], гл.I, §1, с.10).

Зауваження 2 (див. [3]). *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, а функція $y : [t_{0k}, +\infty[\longrightarrow \Delta Y_0$ — неперервно диференційовна і така, що*

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\,[r + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де r — відмінна від нуля дійсна стала, ξ — неперервно диференційовна в деякому околі $+\infty$ дійсна функція, для якої $\xi'(t) \neq 0$, тоді

$$L(y(t)) = L\left(\mu|\xi(t)|^r\right)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

де $\mu = \operatorname{sign} y(t)$ в деякому околі $+\infty$.

Зауваження 3 (див. [5]). *Якщо повільно змінна при $y \to Y_0$ функція $L : \Delta Y_0 \to]0, +\infty[$ задовольняє умову S_0, а функція $r : \Delta Y_0 \times K \to \mathbb{R}$, де K — компакт в $\mathbb{R}^n$, така, що*

$$\lim_{\substack{y\to\Delta Y_0\\ y\in\Delta Y_0}} r(z, v) = 0 \quad \textit{рівномірно по } v \in K,$$

тоді

$$\lim_{\substack{y\to\Delta Y_0\\ y\in\Delta Y_0}} \frac{L(ve^{[1+r(z,v)]\ln|z|})}{L(z)} = 1 \quad \textit{рівномірно по } v \in K, \ \textit{де } v = \operatorname{sign} z.$$

3. Основні результати. Розглянемо випадок $\lambda_0 = \pm\infty$. Для рівняння (3) справедливе таке твердження.

Теорема 1. *При $k \in \{3, \dots, n\}$ рівняння (3) не має $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$–розв'язків.*

Доведення. Дійсно, якщо $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ — довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(\pm\infty)$–розв'язок рівняння (3), то з останнього співвідношення (6) безпосередньо випливає, що

$$y^{(n-1)}(t) \sim t^{o(1)} \quad \text{при } t \to +\infty,$$

а це разом з іншими співвідношеннями (6) суперечить умові (8). Отже, справедливим є твердження теореми.

Далі для вивчення випадку $\lambda_0 = 1$ окрім фактів, зазначених у параграфі 2, про правильно та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ $(j = \overline{0, n-1})$ функції, будуть використовуватися при $k \in \{3, \dots, n\}$ такі допоміжні позначення:

$$\gamma_k = 1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \sigma_j, \quad \nu_k = \sum_{j=n-k+1}^{n-2} \sigma_j(n-j-1), \quad M_k(c) = \prod_{j=1}^{n-k} \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}},$$

$$I_k(t) = \varphi_{n-k}(c)M_k(c) \int_{A_{0k}}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau, \quad I_{1k}(t) = \int_{A_{1k}}^{t} I_k(\tau)d\tau,$$

де A_{0k} (A_{1k}) вибирається рівним числу $a_{0k} \geq a$ ($a_{1k} \geq a_{0k}$) (справа від якого підінтегральна функція неперервна), якщо при цьому значенні границі інтегрування відповідний інтеграл прямує до $+\infty$ при $t \to +\infty$, та рівним $+\infty$, якщо при такому значенні границі інтегрування він прямує до нуля при $t \to +\infty$.

Перш за все встановимо для рівняння (3) справедливість наступних двох теорем.

Теорема 2. *Нехай $k \in \{3, \ldots, n\}$ та $\gamma_k \neq 0$. Для існування у рівняння* (3) *$\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків необхідно, щоб $c \in \Delta Y_{n-k}$, разом з* (8) – (10) *та* (12) *виконувались умови*

$$\frac{I_k'(t)}{I_k(t)} \sim \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} = 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-1}), \tag{15}$$

та були справедливі при $t \in]a, +\infty[$ нерівності

$$\gamma_k I_k(t) < 0, \quad I_{1k}(t) > 0, \quad (-1)^{n-j-1} \mu_j \mu_{n-1} > 0 \; (j = \overline{n-k+1, n-3}). \tag{16}$$

Більш того, для кожного такого розв'язку, окрім (4) *та* (11), *мають місце при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення*

$$y^{(j)}(t) = \left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-2}), \tag{17}$$

$$\frac{\left| y^{(n-1)}(t) \right|^{\gamma_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_j \left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)} = \alpha \mu_{n-1} \gamma_k I_k(t) \left| \frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right|^{\nu_k} [1 + o(1)]^4. \tag{18}$$

Теорема 3. *Нехай $k \in \{3, \ldots, n\}$, $\gamma_k \neq 0$ та повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції L_j ($j = \overline{n-k+1, n-1}$) задовольняють умову S_0. Тоді, у разі наявності у рівняння* (3) *$\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків, виконується умова*

$$\int\limits_{a_{2k}}^{+\infty} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)} \right)^{k-2} \left| \gamma_k I_k(\tau) \left| \frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)} \right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j \left(\mu_j \left| I_k(\tau) \right|^{\frac{1}{\gamma_k}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau < +\infty, \tag{19}$$

де $a_{2k} \geq a_{1k}$ таке, що $\mu_{j-1} |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}} \in \Delta Y_{j-1}$ ($j = \overline{n-k+2, n}$) при $t \geq a_{2k}$, та для кожного з таких розв'язків мають місце окрім (11) *асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення*

$$y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1} \gamma_k^{k-2} W_k(t) \; [1 + o(1)], \tag{20}$$

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1} \gamma_k^{n-l} \left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-l-k+2} W_k'(t)[1 + o(1)] \;\; (l = \overline{n-k+2, n}), \tag{21}$$

де

$$W_k(t) = \int\limits_{+\infty}^{t} \left(\frac{I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)} \right)^{k-2} \left| \gamma_k I_k(\tau) \left| \frac{\gamma_k I_{1k}(\tau)}{I_k(\tau)} \right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j \left(\mu_j \left| I_k(\tau) \right|^{\frac{1}{\gamma_k}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_k}} d\tau.$$

[4] Тут і далі будемо вважати, що $\prod\limits_{m}^{l} = 1$, якщо $m > l$.

Доведення теорем 2–3. Нехай $y : [t_{0k}, +\infty[\to \Delta Y_0$ – довільний $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3). Тоді, як було встановлено перед формулюваннями теорем, $c \in \Delta Y_{n-k}$, виконуються (8) – (10), (12) та мають місце асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення (4) та (11). З (11) також випливає, що

$$\frac{y^{(j+1)}(t)}{y^{(j)}(t)} = \frac{n-j-k}{t}\,[1+o(1)] \quad (j = \overline{0, n-k-1}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Враховуючи представлення (13) правильно змінних при $t \to +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ при $j = \overline{0, n-k-1}$ та справедливість виконання співвідношень (14) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, маємо

$$\varphi_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) = \left|\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} t^{(n-j-k+1)\sigma_{j-1}} L_{j-1}\left(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\tfrac{c}{(n-j-k+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \varphi_{j-1}(\mu_{j-1}t^{n-j-k+1})[1+o(1)] \quad (j = \overline{1, n-k}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (3), при $t \to +\infty$ отримаємо

$$\tfrac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))\ldots\varphi_{n-k+1}(y^{(n-k+1)}(t))} =$$
$$= \alpha M_k(c) p(t) \varphi_0\left(\mu_0 t^{n-k}\right) \varphi_1\left(\mu_1 t^{n-k-1}\right) \ldots \varphi_{n-k}(c)\,[1+o(1)].$$

Перепишемо його у вигляді

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}(t))} = \alpha I_k'(t)\,[1+o(1)]. \tag{22}$$

Згідно з (13) та теоремою 1.2 про представлення ([13], гл.I, §1, с.10) існують неперервно диференційовні правильно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції $\varphi_{0j} : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ порядків σ_j $(j = \overline{0, n-1})$ такі, що

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{\varphi_j(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = 1, \qquad \lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{y^{(j)}\varphi_{0j}'(y^{(j)})}{\varphi_{0j}(y^{(j)})} = \sigma_j. \tag{23}$$

Зважаючи на (23) та перше зі співвідношень (7), маємо

$$\left(\frac{y^{(s-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)' =$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\left[1 - \sum_{j=n-k+1}^{n-1}\left(\frac{y^{(s-1)}(t)y^{(j+1)}(t)}{y^{(s)}(t)y^{(j)}(t)}\;\frac{y^{(j)}(t)\varphi_{0j}'(y^{(j)}(t))}{\varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}\right)\right] = \tag{24}$$
$$= \frac{y^{(s)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))}[\gamma_k + o(1)] \quad \text{при } t \to +\infty \quad (s = \overline{n-k+2, n}).$$

Звідси при $s = n$ випливає, що (22) може бути переписане у вигляді

$$\left(\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} \right)' = \alpha\gamma_k I_k'(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \to +\infty.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_{0k} до t та враховуючи правило вибору границі інтегрування A_{0k} у функції $I_k(t)$, отримаємо

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k I_k(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{25}$$

Аналогічно з (25) з використанням (24) при $s = n - 1$ отримаємо

$$\frac{y^{(n-2)}(t)}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} \varphi_{0j}(y^{(j)}(t))} = \alpha\gamma_k^2 I_{1k}(t)[1 + o(1)] \text{ при } t \to +\infty. \tag{26}$$

З (22), (25) та (26) з урахуванням першої з умов (23) маємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \sim \frac{I_k'(t)}{\gamma_k I_k(t)}, \; \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \sim \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \text{ при } t \to +\infty \tag{27}$$

та, зважаючи на (9), отримуємо справедливість перших двох нерівностей з (16). Також з (27) з огляду на лему 1 випливає, що справедливі умови (15), з урахуванням тотожностей

$$y^{(j)}(t) = \frac{y^{j}(t)}{y^{(j+1)}(t)} \cdots \frac{y^{(n-2)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} y^{(n-1)}(t) \quad (j = \overline{n-k+1, n-2})$$

мають місце асимптотичні зображення (17) та, в результаті, виконується остання з нерівностей (16).

Використовуючи наведені вище тотожності, зображення (17) та властивості, що випливають з теореми 1.2 ([13], гл.I, §1, с.10) для повільно змінних при $y^{(j)} \to Y_j$ функцій $L_{0j}(y^{(j)}) = \frac{\varphi_{0j}(y^{(j)})}{|y^{(j)}|^{\sigma_j}}$ $(j = \overline{n-k+1, n-1})$, знаходимо

$$\varphi_{0j}(y^{(j)}(t)) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_{0j}(y^{(j)}(t)) \sim \left| \left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right|^{\sigma_j} \times$$
$$\times L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t)[1 + o(1)] \right) \sim$$
$$\sim \left| \frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right|^{(n-j-1)\sigma_j} |y^{(n-1)}(t)|^{\sigma_j} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)$$
$$(j = \overline{n-k+1, n-1}) \text{ при } t \to +\infty.$$

З огляду на ці співвідношення з (25) отримуємо при $t \to +\infty$ зображення

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{\gamma_k} \left| \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)} \right|^{\nu_k}}{\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1} L_{0j}\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)} \right)^{n-j-1} y^{(n-1)}(t) \right)} = \alpha\mu_{n-1}\gamma_k I_k(t)[1 + o(1)],$$

з якого випливає справедливість (18). Таким чином, доведені твердження теореми 2.

Припустимо тепер додатково, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ задовольняють умову S_0. Тоді зважаючи на перше співвідношення (15) та (25) при $t \to +\infty$ маємо

$$\frac{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)'}{\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right)} = (n-j-1)\left[\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)} - \frac{I'_k(t)}{I_k(t)}\right] + \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} =$$
$$= (n-j-1)\frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}[1-h(t)] + \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}[1+o(1)] = \frac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right] = \frac{I'_k(t)}{I_k(t)}\left[\frac{1}{\gamma_k} + o(1)\right],$$

де $h(t) = \frac{I_{1k}(t)I'_k(t)}{I^2(t)}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 1$. Отже, згідно із зауваженням 2 справедливі такі асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$L_j\left(\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-1} y^{(n-1)}\right) = L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)[1+o(1)] \quad (j = \overline{n-k+1, n-1}).$$

З огляду на отримані співвідношення з (18) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \mu_{n-1}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)].$$

Зважаючи на це перепишемо (17) у вигляді

$$y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\left(\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} \times \tag{28}$$
$$\times[1+o(1)] \quad (l = \overline{n-k+2, n-1}) \text{ при } t \to +\infty,$$

тобто мають місце асимптотичні співвідношення (21).

Проінтегрувавши (28) при $l = n-k+2$ на $[t_{*k}, t]$, де $t_{*k} = \max\{a_{2k}, t_{0k}\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t) = y^{(n-k)}(t_{*k}) +$$
$$+\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\int\limits_{t_{*k}}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)]d\tau.$$

Враховуючи першу з умов (5),

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{k-2}\left|\gamma_k I_k(t)\left|\frac{\gamma_k I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right|^{\nu_k} \prod_{j=n-k+1}^{n-1} L_j\left(\mu_j |I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}}\right)\right|^{\frac{1}{\gamma_k}} [1+o(1)]d\tau = \mathrm{const}$$

і тоді за ознакою порівняння вірно (19). Використовуючи твердження 6 з монографії [14] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, для $(n-k)$–ї похідної розв'язку одержимо зображення (20).

Таким чином, асимптотичні при $t \to +\infty$ співвідношення (4), (17), (18) прийняли явний вигляд (20), (21). Теореми 2 та 3 повністю доведені.

У наступній теоремі наведемо достатні умови наявності у рівняння (3) $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язків із зазначеними в теоремі 3 асимптотичними зображеннями.

Теорема 4. *Нехай* $k \in \{3, \dots, n\}$, $\gamma_k \neq 0$, $c \in \Delta Y_{n-k}$, *виконуються умови* (8) – (10), (12), (15), (16), (19) *та повільно змінні при* $y^{(j)} \to Y_j$ *функції* L_j $(j = \overline{n-k+1, n-1})$ *задовольняють умову* S_0. *Нехай, крім того, виконується нерівність* $\sigma_{n-1} \neq 1$ *та алгебраїчне відносно* ρ *рівняння*

$$\sum_{l=2}^{k-1} \sigma_{n-l}(\rho+1)^{k-l-1} - (1-\sigma_{n-1}+\rho)(\rho+1)^{k-2} = 0 \tag{29}$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді у рівняння (3) *існує* $(n-k+m)$*–параметричне сімейство* $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$*–розв'язків з асимптотичними при* $t \to +\infty$ *зображеннями* (11), (20), (21), *де* m *— число коренів (з урахуванням кратних) алгебраїчного рівняння* (29) *з додатніми дійсними частинами.*

Зауваження 4. *Неважко перевірити, що алгебраїчне відносно* ρ *рівняння* (29) *напевне не має коренів з нульовою дійсною частиною, якщо виконується нерівність*

$$\sum_{l=2}^{k-1} |\sigma_{n-l}| < |1-\sigma_{n-1}|.$$

Доведення теореми 4. Покажемо, що для даного c з умови теореми у рівняння (3) існує принаймні один $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок, заданий на деякому проміжку $[t_{0k}, +\infty[\subset [a, +\infty[$, який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21), а також з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Застосовуючи до рівняння (3) перетворення

$$\begin{aligned}
&y^{(l-1)}(t) = \tfrac{ct^{n-l-k+1}}{(n-l-k+1)!}[1+v_l(t)] \quad (l=\overline{1,n-k}),\\
&y^{(n-k)}(t) = c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)[1+v_{n-k+1}(t)],\\
&y^{(l-1)}(t) = \mu_{n-1}\gamma_k^{n-l}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-l-k+2} W'(t)[1+v_l(t)] \quad (l=\overline{n-k+2,n}),
\end{aligned} \tag{30}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\left\{\begin{aligned}
&v_l' = \tfrac{n-l-k+1}{t}\,[-v_l + v_{l+1}] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\
&v_{n-k}' = \tfrac{1}{t}\left[\tfrac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c} W(t)\,[1+v_{n-k+1}] - v_{n-k}\right],\\
&v_{n-k+1}' = \tfrac{W'(t)}{W(t)}\,[-v_{n-k+1} + v_{n-k+2}],\\
&v_l' = \tfrac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\,[1+v_{l+1} - \gamma(n-l-k+2)(1-h(t))[1+v_l]] - \tfrac{W''(t)}{W'(t)}\,[1+v_l]\\
&(l=\overline{n-k+2,n-1}),\\
&v_n' = \tfrac{I_k(t)}{I_{1k}(t)}\left[\left((-2+k)(1-h(t)) - \tfrac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}\right)[1+v_n] + \right.\\
&\left. + \frac{\alpha p(t)\varphi_0\left(\frac{ct^{n-k}}{(n-k)!}[1+v_1]\right)\ldots\varphi_{n-1}\left(\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{2-k} W'(t)[1+v_n]\right)}{\mu_{n-1}\left(\frac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{1-k} W'(t)}\right].
\end{aligned}\right. \tag{31}$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n = [t_{0k}, +\infty[\times \mathbb{R}^n_{\frac12}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac12} = \{(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_j| \le \frac12,\ j=\overline{1,n}\}$ та $t_{0k} \ge a_{2k}$ вибране з урахуванням (19) таким чином, щоб при $t > t_{0k}$ та $(v_1,\dots,v_n) \in \mathbb{R}^n_{\frac12}$ виконувалися умови:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{ct^{n-j-k+1}}{(n-j-k+1)!}\,[1+v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j=\overline{1,n-k}),\\
&c + \mu_{n-1}\gamma_k^{k-2} W(t)\,[1+v_{n-k+1}(t)] \in \Delta Y_{n-k},\\
&\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-j-k+2} W'(t)\,[1+v_j(t)] \in \Delta Y_{j-1} \quad (j=\overline{n-k+2,n}).
\end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j \in \{0,\dots,n-1\} \setminus \{n-k\})$ можуть бути представлені у вигляді (13) та співвідношення (14) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1,d_2] \subset]0,+\infty[$, а також зважаючи на неперевність функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$, (19) і те, що повільно змінні при $t \to +\infty$ функції L_j $(j = \overline{n-k+1,n-1})$ задовольняють умову S_0, маємо

$$\begin{aligned}
&\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\left[1+v_{j+1}\right]\right) = \varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) = \\
&= \left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\varphi_j(\mu_j t^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) \quad (j=\overline{0,n-k-1}),\\
&\varphi_j\left(\mu_{n-1}\gamma_k^{n-j-1}\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\left[1+v_{j+1}\right]\right) = \\
&= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j\left(\mu_j\left(\tfrac{I_{1k}(t)}{I_k(t)}\right)^{n-k-j+1} W'(t)\right)(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1})) = \\
&= |\gamma_k|^{(n-j-1)\sigma_j}\varphi_j(\mu_j|I_k(t)|^{\frac{1}{\gamma_k}})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),\\
&\varphi_{n-k}\left(c+\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}\,W(t)\left[1+v_{n-k+1}(t)\right]\right) = \varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),
\end{aligned}$$

де функції $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ прямують до нуля при $t \to +\infty$ рівномірно по $v_{j+1} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

З огляду на вигляд $W(t)$, (7), (19) та (27)

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I_k(t)t}{I_{1k}(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} = \frac{1}{\gamma_k}.$$

Тоді, з використанням зазначених вище зображень, система рівнянь (31) може бути переписана у вигляді

$$\begin{cases}
v_l' = \frac{1}{t}\left[-(n-l-k+1)v_l + (n-l-k+1)v_{l+1}\right] \quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\
v_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-v_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c}W(t)\,(1+v_{n-k+1})\right],\\
v_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[-v_{n-k+1}+v_{n-k+2}\right],\\
v_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[-v_l + v_{l+1} + V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n)\right] \quad (l=\overline{n-k+2,n-1}),\\
v_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n-1}\sigma_{j-1}v_j + (\sigma_{n-1}-1)v_n + \sum\limits_{i=1}^{2}V_{n,i}(t,v_1,\dots,v_n)\right],
\end{cases} \tag{32}$$

де

$$\begin{aligned}
&V_{l,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(1 - \tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)} - \gamma_k(n-l-k+2)(1-h(t))\right)(1+v_l)\\
&(l=\overline{n-k+2,n-1}),\\
&V_{n,1}(t,v_1,\dots,v_n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(1+R_j(t,v_{j+1}))-1\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}} + \\
&+\left(\gamma_k(-2+k)(1-h(t)) - \tfrac{\gamma_k W''(t)I_{1k}(t)}{W'(t)I_k(t)}+1\right)\left[1+v_n\right],\\
&V_{n,2}(t,v_1,\dots,v_n) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}} - \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n-k+1}}^{n}v_j\sigma_{j-1} - 1.
\end{aligned}$$

При цьому зауважимо, що

$$\lim_{t\to+\infty}V_{j,1}(t,v_1,\dots,v_n) = 0\ (j=\overline{n-k+2,n})$$

рівномірно по $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$,

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0}\tfrac{V_{n,2}(t,v_1,\ldots,v_n)}{|v_1|+\ldots+|v_n|}=0$$

рівномірно по $t\in[t_{0k},+\infty[$.

Розглянемо граничну матрицю P коефіцієнтів при $v_{n-k+2},\dots,v_n$, що стоять у квадратних дужках останніх $k-1$ рівнянь системи (32). Згідно з умовою теореми характеристичне рівняння даної матриці, яке набуває вигляду (29), не має коренів з нульовою дійсною частиною. Тоді (див. [15]) існує невироджена обмежена разом з оберненою на $[t_{0k},+\infty[$ дійсна матриця $S(t)=\{s_{ij}(t)\}_{i,j=n-k+2}^n$ така, що система (32) за допомогою перетворення

$$v(t)=T(t)z(t), \tag{33}$$

де

$$T(t)=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & S(t)\end{pmatrix},$$

I — одинична матриця розмірності $n-k+1\ \times\ n-k+1$, зводиться до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} z_l'=\frac{n-l-k+1}{t}[-z_l+z_{l+1}]\quad (l=\overline{1,n-k-1}),\\ z_{n-k}'=\frac{1}{t}\left[-z_{n-k}+\frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{c}W(t)\ (1+z_{n-k+1})\right],\\ z_{n-k+1}'=\frac{W'(t)}{W(t)}[-z_{n-k+1}+\sum\limits_{j=n-k+2}^{n}s_{n-k+2\,j}(t)z_j],\\ z_l'=\frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k}u_{lj}z_j+p_{ll}z_l+p_{ll+1}z_{l+1}+\sum\limits_{i=1}^{2}Z_{l,i}(t,z_1,\dots,z_n)\right]\\ (l=\overline{n-k+2,n-1}),\\ z_n'=\frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k}u_{nj}(t)z_j+p_{nn}z_n+\sum\limits_{i=1}^{2}Z_{n,i}(t,z_1,\dots,z_n)\right], \end{cases} \tag{34}$$

в якій $u_{lj}(t)$ $(l=\overline{n-k+2,n},\ j=\overline{1,n-k+1})$ — обмежені функції на $[t_{0k},+\infty[$, $p_{ll}\neq 0$ $(l=\overline{n-k+2,n})$ — дійсні частини власних значень (з урахування кратних) матриці P, $p_{ll+1}\in\{0,1\}$ $(l=\overline{n-k+2,n-1})$, $Z_{l,i}(t,z_1,\dots,z_n)$ $(i=1,2)$ такі, що

$$\lim_{t\to+\infty}Z_{l,1}(t,z_1,\dots,z_n)=0\quad (l=\overline{n-k+2,n})$$

рівномірно по $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n_l=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n:|z_j|\le\eta,\ j=\overline{1,n}\}$, η — деяке достатньо мале число, яке залежить від матриці $S(t)$,

$$\lim_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to 0}\tfrac{\partial Z_{l,2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_m}=0\quad (m=\overline{1,n},\ l=\overline{n-k+2,n})$$

рівномірно по $t\in[t_{0k},+\infty[$.

Поклавши тепер в системі (34)

$$z_j=\delta x_j\quad (j=\overline{1,n-k}),\quad z_j=x_j\quad (j=\overline{n-k+1,n}), \tag{35}$$

де $\delta > 0$ — деяка додатня стала, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x_l' = \frac{n-l-k+1}{t}\left[-x_l + x_{l+1}\right] \quad (l = \overline{1, n-k-1}), \\ x_{n-k}' = \frac{1}{t}\left[-x_{n-k} + \frac{\mu_{n-1}\gamma_k^{k-2}}{\delta c} W(t)\,(1 + x_{n-k+1})\right], \\ x_{n-k+1}' = \frac{W'(t)}{W(t)}\left[-x_{n-k+1} + \sum\limits_{j=n-k+2}^{n} s_{n-k+2\,j}(t) x_j\right], \\ x_l' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{lj}(t) x_j + p_{ll} x_l + p_{ll+1} x_{l+1} + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{l,i}(t, x_1, \dots, x_n)\right] \\ (l = \overline{n-k+2, n-1}), \\ x_n' = \frac{I_k(t)}{\gamma_k I_{1k}(t)}\left[\delta \sum\limits_{j=1}^{n-k} u_{nj}(t) x_j + p_{nn} x_n + \sum\limits_{i=1}^{2} X_{n,i}(t, x_1, \dots, x_n)\right], \end{cases} \tag{36}$$

в якій $X_{l,i}(t, x_1, \dots, x_n) = Z_{l,i}(t, \frac{1}{\delta} z_1, \dots, \frac{1}{\delta} z_{n-k}, z_{n-k+1}, \dots, z_n)$ $(i = 1, 2,\ l = \overline{n-k+2, n})$ та мають ті ж властивості, що й $Z_{l,i}(t, z_1, \dots, z_n)$.

Оскільки $u_{lj}(t)$ $(l = \overline{n-k+2, n},\ j = \overline{1, n-k+1})$ та $s_{n-k+2\,j}(t)$ $(j = \overline{n-k+2, n})$ обмежені на $[t_{0k}, +\infty[$, $W(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то число δ можна вибрати таким чином, щоб для системи (36) були виконані всі умови теореми 2.1 з роботи [16]. Тоді, зважаючи на цю теорему, в неї існує принаймні один розв'язок $(x_j)_{j=1}^n : [t_{1k}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$ $(t_{1k} \in [t_{0k}, +\infty[)$, що прямує до нуля при $t \to +\infty$. Кожному такому розв'язку з оглядом на перетворення (30), (33), (35) відповідає $\mathcal{P}^k_{+\infty}(1)$–розв'язок рівняння (3), який допускає при $t \to +\infty$ асимптотичні зображення (11), (20) та (21).

Більш того, згідно з зазначеною теоремою, якщо серед коренів алгебраїчного рівняння (29) є m коренів (з урахуванням кратних) з додатніми дійсними частинами, то, так як $\frac{W'(t)}{W(t)} < 0$ в деякому околі $+\infty$, існує $(n-k+m)$–параметричне сімейство розв'язків зі знайденими зображеннями. Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка. // Докл. АН России. – 1992. – **324**, №2. – С. 258–260.
2. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. // Дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 – Киев, 1998. – 295 с.
3. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотическое представление решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения – 2011. – **47**, №5. – С. 628–650.
4. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, №3. – С. 354–380.
5. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, №5. – С. 584–600.
6. *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Behavior of Solutions of Ordinary Differential Equations of n-th Order with Regularly Varying Nonlinearities. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2014. – V.61. – P. 37–61.
7. *Клопот А. М.* Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n–го порядка. // Нелинейные колебания. – 2012. – **15**, №4. – С. 447–465.

8. *Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2013. – **18**, №3(19). – С. 16–34.
9. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
10. *Евтухов В. М., Корепанова Е. С.* Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, №9. – С. 1198–1216.
11. *Корепанова К. С.* Умови існування розв'язків степеневого виду у диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями. // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, №3–4. – С. 75–79.
12. *Evtukhov V. M., Korepanova K. S.* Asymptotic Behaviour of Solutions of One Class of n-th Order Differential Equations. // Mem. Differential Equations Math. Phys. – 2017. – V.71. – P. 111–124.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
14. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
15. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, №4. – С. 1–12.
16. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52–80.

Одержано 18.09.2017

УДК 517.9, 519.6

І. І. Король, І. Ю. Король (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ПОБУДОВА ЛІНІЙНИХ БАГАТОКРОКОВИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ МЕТОДОМ НЕВИЗНАЧЕНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

The present paper proposes a scheme for constructing a wide range of linear multi-step methods for solving the Cauchy problem for ordinary differential equations using the method of undetermined coefficients. The implementation of the predictor-corrector method with arbitrary accuracy is shown.

У роботі запропоновано спосіб побудови широкого спектру лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь з використанням методу невизначених коефіцієнтів. Показано реалізацію схеми предиктор-коректор з довільною наперед заданою точністю.

Для побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь нами запропоновано єдиний підхід, суть якого полягає в наступному. Розглядається задача Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Як відомо, лінійні багатокрокові методи для розв'язанні задачі (1) будують на основі формули

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{i=s}^{q} b_i f(t_{n-i}, y_{n-i}), \tag{2}$$

де a_j, $j = \overline{0,p}$, b_i, $i = \overline{s,q}$ – невідомі коефіцієнти. Якщо $s = 0$, то метод (1) називається явним, а якщо $s = -1$ і $b_{-1} \neq 0$ – неявним.

В літературі [1–3], для знаходження коефіцієнтів a_j і b_i задачу (1) замінюють еквівалентним інтегральним співвідношенням

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt,$$

після чого підінтегральну функцію замінюють інтерполяційним поліномом Лагранжа або Ньютона. Далі, на підставі певних міркувань одержуються відомі в літературі багатоточкові методи.

Ми пропонуємо побудувати таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з якої кожен з відомих на сьогодні лінійних багатоточкових методів (як явного, так і неявного типу) можна одержати як частковий випадок.

Ідея запропонованого підходу полягає в наступному: якщо задача Коші (1) має точний розв'язок у вигляді полінома степені k:

$$y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k,$$

де α_i, $i=\overline{0,k}$ – константи, то цей розв'язок можна знайти точно за формулою

$$y_{n+1}=\sum_{j=j_1}^{j_2}a_jy_{n-j}+hb_{-1}y'_{n+1}+h\sum_{i=0}^{q}b_iy'_{n-i}, \tag{3}$$

де a_j і b_i $(0\le j_1\le j\le j_2,\ -1\le i\le q)$ – невідомі коефіцієнти, а $y'_k=f(t_k,y_k)$ – значення похідної шуканої функції.

Невідомі коефіцієнти a_j, b_i, $j=\overline{j_1,j_2}$, $i=\overline{1,q}$ будемо шукати з умови, що формула (3) є точною для всіх поліноміальних розв'язків, степінь яких не перевищує k. За такі поліноми візьмемо поліноми вигляду:

$$y(t)=\frac{1}{h^0}(t_{n+1}-t)^0=1,\text{якщо } m=0;\quad y(t)=\frac{1}{h^m}(t_{n+1}-t)^m,\text{якщо } m=1,2,\ldots,k; \tag{4}$$

$$y'(t)=0,\ \text{якщо } m=0;\qquad y'(t)=-\frac{m}{h^m}(t_{n+1}-t)^{m-1},\quad \text{якщо } m=1,2,\ldots,k. \tag{5}$$

Для побудови шуканої системи формулу (3) перепишемо у вигляді

$$\sum_{j=j_1}^{j_2}a_jy_{n-j}+hby'_{n+1}+h\sum_{i=0}^{q}b_iy'_{n-i}=y_{n+1}, \tag{6}$$

звідки з (4), (5) при $m=0,1,2,\ldots,k$ одержуються рядки $(k+1)\times(k+1)$-вимірної матриці системи.

Відмітимо, що формула (6) має чотири складові: перша – сума, коефіцієнтам a_j, якої у побудованій системі лінійних алгебраїчних рівнянь будуть відповідати перші j_2+1-j_1 стовпців матриці A (один стовпець якщо $j_1=j_2$, $0\le j_1\le j_2$); друга складова – доданок з коефіцієнтом b, якому буде відповідати наступний стовпець матриці. Третьою складовою є сума, якій відповідають наступні q стовпців матриці B. Четвертою складовою є права частина, якій у системі рівнянь буде відповідати вектор d. Виходячи з цього, систему (6) запишемо у матрично-векторному вигляді

$$Cx=d, \tag{7}$$

де матриця C формується приєднанням до матриці A справа стовпця b і матриці B . Кількість стовпців у матрицях A, B і наявність або відсутність стовпця b залежать від числового методу та його порядку точності. Так, для явних методів стовпець b відсутній, а якщо $q=0$, то відсутня матриця B. При цьому C є квадратною $(k+1)$-вимірною матрицею, де k – порядок точності методу, який обчислюється за формулою

$$k=\begin{cases} j_2-j_1+q, & if\quad s=0,\\ j_2-j_1+q+1, & if\quad s=1.\end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи поліноми (4) побудуємо складові системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6) таким чином: стовпець, який відповідає коефіцієнту a_j – це значення поліномів $y_m(t)$ у вузлі t_{n-j}:

$$\begin{aligned} y_0(t_{n-j}) &= \tfrac{1}{h^0}(t_{n+1}-(t_n-jh))^0 = 1, \quad \text{якщо } m=0; \\ y_m(t_{n-j}) &= \tfrac{1}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-jh))^m = (j+1)^m, \quad \text{якщо } m=\overline{1,k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Аналогічно обчислюється матриця B: елементи стовпця, який відповідає коефіцієнту b_i рівні значенням похідних $y'_m(t)$ поліномів (5) у вузлі t_{n-i}:

$$\begin{aligned} &y'_0(t_{n-i}) = 0, \quad \text{якщо } m=0; \\ &y'_m(t_{n-i}) = -\tfrac{m}{h^m}(t_{n+1}-(t_n-ih))^{m-1} = -\tfrac{m}{h}(i+1)^{m-1}, \text{ якщо } m=\overline{1,k}. \end{aligned}$$

```
Am(j1,j2,k) := | for i ∈ 0..k
               |   for j ∈ j1..j2
               |     A[i,j-j1] ← (j+1)^i
               | A

Bv(k) := | for i ∈ 0..k
         |   | b[i] ← -1 if i = 1
         |   | b[i] ← 0 otherwise
         | b

Bm(m,k) := | for i ∈ 0..k-1
           |   for j ∈ 1..m
           |     | B[i+1,j-1] ← 0 if i = 0
           |     | B[i+1,j-1] ← -(i+1)·j^i
           | B

Dv(k) := | for i ∈ 0..k
         |   | d[0] ← 1 if i = 0
         |   | d[i] ← 0 otherwise
         | d
```

Рис. 1. Тексти програм $Am(j1,j2,k)$, $Bv(k)$, $Bm(m,k)$, $Dv(k)$

Елементи вектора b визначаються значеннями похідної y'_{n+1}, а коефіцієнти вектора d – значеннями функції y_{n+1} і обчислюються за формулами:

$$y'_{n+1} = y'_m(t_{n+1}) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } m=1, \\ 0, & \text{якщо } m\neq 1; \end{cases} \qquad y_{n+1} = y_m(t_{n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m=0, \\ 0, & \text{якщо } m\neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Обчислення матриць A і B, стовпців b і d здійснюється за допомогою програм $Am(j_1,j_2,k)$, $Bm(m,k)$, $Bv(k)$ і $Dv(k)$, реалізованих в пакеті Mathcad, які наведено на рис. 1. На їх основі складена програма $JNBM(j1,j2,s,q)$ (рис. 2), яка дає можливість одержати число k – порядок точності методу, матриці A і B, стовпці b і d, компонує матрицю C та знаходить x – розв'язок системи (7). Коефіцієнти вектора x є шуканими коефіцієнтами формул різних лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів.

Нижче наведено приклади того, як відомі лінійні багатокрокові методи явного та неявного типів розв'язання задачі Коші одержуються за допомогою розробленого нами методу.

```
JNBM(j1,j2,s,q) := | k ← j2 − j1 + q  if s = 0
                   | k ← j2 − j1 + q + s  if s = 1
                   | k ← j2 − j1 + 1  if s = 2
                   | k ← j2 − j1  if s = 3
                   | A ← Am(j1,j2,k)
                   | b ← Bv(k)
                   | B ← Bm(q,k)
                   | C ← augment (A,B)  if s = 0
                   | C ← augment (A,b,B)  if s = 1
                   | C ← augment (A,b)  if s = 2
                   | C ← A  otherwise
                   | d ← Dv(k)
                   | x ← C^(−1)·d
                   | (k A b B C d x)
```

Рис. 2. Текст програми $JNBM(j1, J2, s, q)$

1. Явний метод Адамса-Башфорта 5-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}0 \quad s{=}0 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1, j2, s, q) \quad k{=}5.$$

При цьому відповідні матриці та вектори мають такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}.$$

Як і в кожному явному методі, матриця C складається тільки з матриць A і B, і не містить стовпця b:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & -3 & -12 & -27 & -48 & -75 \\ 1 & -4 & -32 & -108 & -256 & -500 \\ 1 & -5 & -80 & -405 & -1280 & -3125 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Розв'язком системи (7), де C, d мають вигляд (11) є

$$x^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1901}{720} & -\frac{1387}{360} & \frac{109}{30} & -\frac{637}{360} & \frac{251}{720} \end{pmatrix}.$$

Елементи цього вектора є коефіцієнтами явного методу Адамса-Башфорта:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1901}{720}f_n - \frac{1387}{360}f_{n-1} + \frac{109}{30}f_{n-2} - \frac{637}{360}f_{n-3} + \frac{251}{720}f_{n-4}\right).$$

2. Неявний метод Адамса-Мултона 6-го порядку одержується за допомогою звертання:

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}0 \quad s{=}1 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}6.$$

При таких значеннях вхідних параметрів з програми $JNBM(j1, j2, s, q)$ отримуємо такі матриці та коефіцієнти:

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\-1&-1&-1&-1&-1\\-2&-4&-6&-8&-10\\-3&-12&-27&-48&-75\\-4&-32&-108&-256&-500\\-5&-80&-405&-1280&-3125\\-6&-192&-1458&-6144&-18750\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&0&-2&-4&-6&-8&-10\\1&0&-3&-12&-27&-48&-75\\1&0&-4&-32&-108&-256&-500\\1&0&-5&-80&-405&-1280&-3125\\1&0&-6&-192&-1458&-6144&-18750\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$x^T=\begin{pmatrix}1 & \frac{95}{288} & \frac{1427}{1440} & -\frac{133}{240} & \frac{241}{720} & -\frac{173}{1440} & \frac{3}{160}\end{pmatrix},$$

$$y_{n+1}{=}y_n{+}h\left(\frac{95}{288}f_{n+1}{+}\frac{1427}{1440}f_n{-}\frac{133}{240}f_{n-1}{+}\frac{241}{720}f_{n-2}{-}\frac{173}{1440}f_{n-3}{+}\frac{3}{160}f_{n-4}\right).$$

Аналогічно за допомогою вибору параметрів $j1$, $j2$, s і q у програмі $JNBM(j1, j2, s, q)$ можна отримати формули інших відомих лінійних багатокрокових методів як явного, так і неявного типів будь-якого порядку точності.

3. Явний метод Мілна 5-го порядку точності:

$$j1{:=}5 \quad j2{:=}5 \quad s{=}0 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}5,$$
$$x^T=(1\ \tfrac{33}{10}\ \ -\tfrac{21}{5}\ \tfrac{39}{5}\ \ -\tfrac{21}{5}\ \tfrac{33}{10}),$$
$$y_{n+1}=y_n+h\left(\tfrac{33}{10}f_n-\tfrac{21}{5}f_{n-1}+\tfrac{39}{5}f_{n-2}-\tfrac{21}{5}f_{n-3}+\tfrac{33}{10}f_{n-4}\right).$$

4. Неявний метод Мілна 6-го порядку точності:

$$j1{:=}4 \quad j2{:=}4 \quad s{=}1 \quad q{:=}5 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}6,$$
$$x^T=(1\ \tfrac{95}{288}\ \tfrac{125}{96}\ \tfrac{125}{144}\ \tfrac{125}{144}\ \tfrac{125}{96}\ \tfrac{95}{288}),$$
$$y_{n+1}=y_n+h\left(\tfrac{95}{288}f_{n+1}+\tfrac{125}{96}f_n+\tfrac{125}{144}f_{n-1}+\tfrac{125}{144}f_{n-2}+\tfrac{125}{96}f_{n-3}+\tfrac{95}{288}f_{n-4}\right).$$

За допомогою запропонованого в даній роботі підходу можна отримати інші формули лінійних багатокрокових методів.

5. Новий явний багатокроковий метод

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!2 \quad s\!=\!0 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!2,$
$x^T\!=\!(3\ \ -3\ 1), \quad y_{n+1} = 3y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!3 \quad s\!=\!0 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!3,$
$x^T\!=\!(4\ \ -6\ \ 4\ \ -1),$
$y_{n+1} = 4y_n - 6y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!4 \quad s\!=\!0 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!4,$
$x^T\!=\!(5\ \ -10\ 10\ \ -5\ 1),$
$y_{n+1} = 5y_n - 10y_{n-1} + 10y_{n-2} - 5y_{n-3} + y_{n-4}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!5 \quad s\!=\!0 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!5,$
$x^T\!=\!(6\ \ -15\ 20\ \ -15\ 6\ \ -1),$
$y_{n+1} = 6y_n - 15y_{n-1} + 20y_{n-2} - 15y_{n-3} + 6y_{n-4} - y_{n-5}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!6 \quad s\!=\!0 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!6,$
$x^T\!=\!(7\ \ -21\ 35\ \ -35\ 21\ \ -7\ 1,)$
$y_{n+1} = 7y_n - 21y_{n-1} + 35y_{n-2} - 35y_{n-3} + 21y_{n-4} - 7y_{n-5} + y_{n-6}.$

6. Новий неявний багатокроковий метод

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!1 \quad s\!=\!1 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!2,$
$x^T\!=\!(\frac{4}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}).$
$y_{n+1} = \frac{4}{3}y_n - \frac{1}{3}y_{n-1} + h\cdot\frac{2}{3}f_{n+1}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!2 \quad s\!=\!1 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!3,$
$x^T\!=\!(\frac{18}{11}\ \ -\frac{9}{11}\ \frac{2}{11}\ \frac{6}{11}),$
$y_{n+1} = \frac{18}{11}y_n - \frac{9}{11}y_{n-1} + \frac{2}{11}y_{n-2} + h\frac{6}{11}f_{n+1}.$

$j1\!:=\!0 \quad j2\!:=\!3 \quad s\!=\!1 \quad q\!:=\!0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x)\!:=\!JNBM(j1,j2,s,q) \quad k\!=\!4,$
$x^T\!=\!(\frac{48}{25}\ \ -\frac{36}{25}\ \frac{16}{25}\ \ -\frac{3}{25}\ \frac{12}{25}),$
$y_{n+1} = \frac{48}{25}y_n - \frac{36}{25}y_{n-1} + \frac{16}{25}y_{n-2} - \frac{3}{25}y_{n-3} + h\frac{12}{25}f_{n+1}.$

$j1{:=}0 \quad j2{:=}4 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}5,$
$x^T{=}(\frac{300}{137}\ \ {-\frac{300}{137}}\ \ \frac{200}{137}\ \ {-\frac{75}{137}}\ \ \frac{12}{137}\ \ \frac{60}{137}),$
$y_{n+1} = \frac{300}{137}y_n - \frac{300}{137}y_{n-1} + \frac{200}{137}y_{n-2} - \frac{75}{137}y_{n-3} + \frac{12}{137}y_{n-4} + h\frac{60}{137}f_{n+1}.$

$j1{:=}0 \quad j2{:=}5 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ x){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}6,$
$x^T{=}(\frac{120}{49}\ \ {-\frac{150}{49}}\ \ \frac{400}{49}\ \ {-\frac{75}{49}}\ \ \frac{24}{49}\ \ {-\frac{10}{147}}\ \ \frac{20}{49}),$
$y_{n+1} = \frac{120}{49}y_n - \frac{150}{49}y_{n-1} + \frac{400}{49}y_{n-2} - \frac{75}{49}y_{n-3} + \frac{24}{49}y_{n-4} - \frac{10}{147}y_{n-5} + h\frac{29}{49}f_{n+1}.$

```
R_K_4(t0,y0,h,f,m) := | y_0 ← y0
                      | for k ∈ 0..m
                      |   | t_k ← t0 + k · h
                      |   | (K1 ← h · f(t_k,y_k)  K2 ← h · f(t_k + h/2, y_k + K1/2))
                      |   | (K3 ← h · f(t_k + h/2, y_k + K2/2)  K4 ← h · f(t_k + h, y_k + K3))
                      |   | y_{k+1} ← y_k + 1/6 · (K1 + 2K2 + 2K3 + K4)
                      | (t  y)
```

Рис. 3. Текст програми $R\_K\_4(t0, y0, h, f, m)$

Приклад. На основі отриманих формул методів 5 і 6 побудуємо метод прогнозу і корекції (предиктор-коректор). Для ілюстрації розглянемо задачу Коші

$$y' = -y + sin(ty), \quad y(0) = 1,5. \tag{12}$$

На рис. 3 наведено програму $R\_K\_4(t0, y0, h, f, m)$ реалізації методу Рунге-Кутти для одержання значень розв'язку в m початкових точках (m – порядок точності).

У результаті її роботи отримаємо точки розбиття – вектор t і значення розв'язку yp в цих точках:

$$t^\top = (0\ 0.01\ 0.02\ 0.03\ 0.04\ 0.05\ 0.06) \quad yp^\top = \left(\frac{3}{2}\ \frac{150}{101}\ \frac{25}{17}\ \frac{150}{103}\ \frac{75}{52}\ \frac{3603}{2522}\ \frac{242}{171}\right).$$

Після цього звертанням

$$j1{:=}0 \quad j2{:=}m \quad s{=}0 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ xj){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}5$$
$$j1{:=}0 \quad j2{:=}m{-}1 \quad s{=}1 \quad q{:=}0 \quad (k\ A\ b\ B\ C\ d\ xn){:=}JNBM(j1,j2,s,q) \quad k{=}5,$$

за допомогою програми $R\_K\_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$ з рис. 4 отримуємо розв'язок задачі Коші (12). Графік розв'язку наведено на рис. 5.

```
P_K_KI(h,n,f,t,yp) := | y ← yp
                      | for k ∈ m..n − 1
                      |   | t[k+1] ← t[k] + h
                      |   |        m
                      |   | p ←    Σ   (xj[i] · y[k−i])
                      |   |      i = 0
                      |   | for s ∈ 1..10
                      |   |   |            m−1
                      |   |   | y[k+1] ←   Σ   (xn[i] · y[k−i]) + h · xn[m] · f(t[k+1], p)
                      |   |   |          i = 0
                      |   |   | yp ← y[k+1]
                      | (t  y)
```

Рис. 4. Текст програми $R\_K\_KI(h, n, f, t, yp, xj, xn)$

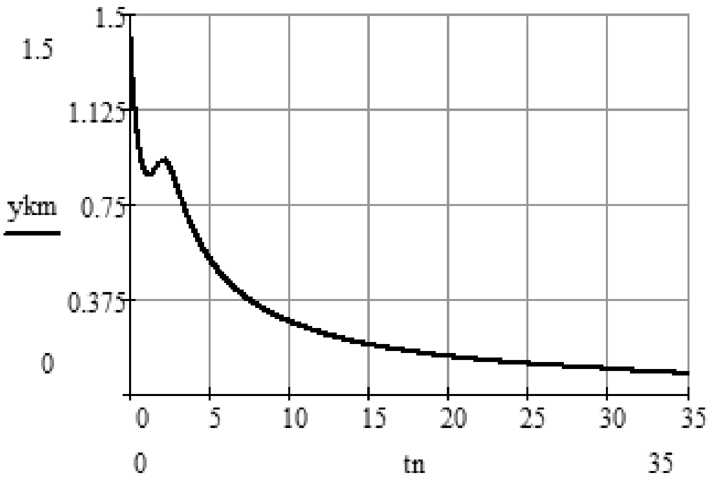


Рис. 5. Графік розв'язку

Список використаної літератури

1. *Фельдман Д.В., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд - во МГУ, 1990. – 336 с.
3. *Хайрер Э., Нёрстрем С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных диффе-ренциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 512 с.
4. *Король І.Ю., Король І.І.* Узагальнюючий підхід до побудови багатокрокових методів розв'язання задачі Коші// Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла 2012. – Вип.23, № 1. – С. 61 – 68.
5. *Король І.Ю., Король І.І.* Про єдиний підхід до побудови лінійних багатокрокових методів розв'язання задачі Коші// Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Математика і інформатика. - Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла 2012. – Вип.23, № 2. – С. 86 – 94.

Одержано 25.10.2017

УДК 510

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)

ДОСКОНАЛІ ДИЗ'ЮНКТИВНІ НОРМАЛЬНІ ФОРМИ В ОДНОМУ КЛАСІ АЛГЕБР

The methods of constructing normal forms in the class of algebras are considered. Formulas of algebra describe Boolean images.

У роботі досліджуються методи побудови нормальних форм в класі алгебр, формули яких описують булеві зображення.

1. Вступ. У роботі [1] введено у розгляд універсальні алгебри P, які задані над квадратними бінарними матрицями порядку n і сигнатурою, що складається з двох бінарних операцій min, max і множини унарних операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, ($\mathbb{Z}_k = 0, 1, \dots, k-1$), які задають поворот елементів матриці, кратний 90° відносно осей або центра симетрії. Для операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, введено поняття повних та замкнених власних підсистем, описано повні та замкнені системи тотожностей алгебри P, на їх основі побудовані канонічні форми. Відомо, що досконалі нормальні форми є зручним способом представлення формул алгебри логіки і мають широке практичне застосування [2]. У даній роботі для формул, які описують булеві зображення, введено поняття досконалої диз'юнктивної нормальної форми алгебри P і запропоновано метод її побудови.

2. Замкнені класи формул алгебри P. З визначення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що на матриці 4×4 пікселі утворюють три замкнені класи $\eta_1 = \{1, 4, 13, 16\}$, $\eta_2 = \{2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15\}$, $\eta_3 = \{6, 7, 10, 11\}$ відносно цих операцій [1].

Задавши для кожного класу відповідно зображення

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}, \quad A_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}, \quad A_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \end{array}.$$

за допомогою операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, піксель із значенням 1 (чорний) може бути переміщений в довільну клітину, що належить відповідному замкненому класу. Наприклад, перемістимо чорні пікселі зображень A_1, A_2, A_3 на всі можливі місця квадрата (табл. 1).

Таблиця 1

A_1	A_2	$A_2^{T_6}$	$A_1^{T_2}$
$A_2^{T_1}$	A_3	$A_3^{T_2}$	$A_2^{T_2}$
$A_2^{T_3}$	$A_3^{T_3}$	$A_3^{T_4}$	$A_2^{T_4}$
$A_1^{T_5}$	$A_2^{T_5}$	$A_2^{T_7}$	$A_1^{T_4}$

З таблиці 1 випливає, що будь-яке зображення A на рецепторному полі 4×4 реалізується формулою алгебри P без використання операцій кон'юнкції

$$A = A_1^{T_{i_1}} \vee A_1^{T_{i_2}} \vee \ldots \vee A_1^{T_{i_k}} \vee A_2^{T_{j_1}} \vee \ldots \vee A_2^{T_{j_l}} \vee A_3^{T_{t_1}} \vee \ldots \vee A_3^{T_{t_q}}, \qquad (1)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A, наведене на рис. 1, може бути представлене формулою $A = A_1^{T_5} \vee A_2^{T_0} \vee A_2^{T_4} \vee A_2^{T_5} \vee A_3^{T_0} \vee A_3^{T_2}$.

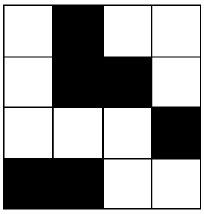
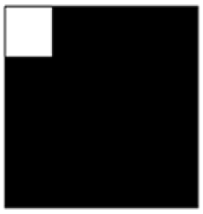
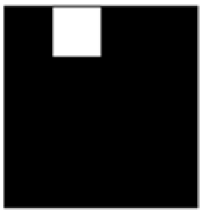
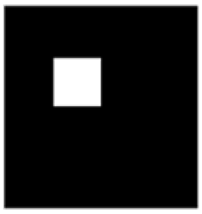
$A =$ 

Рис. 1

Аналогічно, використовуючи зображення

$B_1 =$ , $B_2 =$ , $B_3 =$ .

довільне зображення A може бути представлене формулою:

$$A = B_1^{T_{i_1}} \wedge B_1^{T_{i_2}} \wedge \ldots \wedge B_1^{T_{i_k}} \wedge B_2^{T_{j_1}} \wedge \ldots \wedge B_2^{T_{j_l}} \wedge B_3^{T_{t_1}} \wedge \ldots \wedge B_3^{T_{t_q}}, \qquad (2)$$

де $i_k,\ t_q,\ j_l \in \mathbb{Z}_7$.

Наприклад, зображення A (рис. 1) визначається формулою

$A = B_1^{T_0} \wedge B_1^{T_2} \wedge B_1^{T_4} \wedge B_2^{T_6} \wedge B_2^{T_2} \wedge B_2^{T_7} \wedge B_2^{T_3} \wedge B_2^{T_1} \wedge B_3^{T_4} \wedge B_3^{T_3}$.

Для квадрата 5×5 (рис. 3) його клітини відносно операцій повороту T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, утворюють шість замкнених класів: $\eta_1 = \{1,\ 5,\ 21,\ 25\}$, $\eta_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16,\ 20, 22,\ 24\}$, $\eta_3 = \{3,\ 11,\ 15,\ 23\}$, $\eta_4 = \{7,\ 9,\ 17,\ 19\}$, $\eta_5 = \{8,\ 12,\ 14,\ 18\}$, $\eta_6 = \{13\}$.

Довільне зображення на полі 5×5 може бути представлене формулою типу (1) або (2), використавши шість зображень, $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_6$ або $B_1,\ B_2, \ldots,\ B_6$, вибраних аналогічно до наведених вище $A_1,\ A_2,\ A_3$ або $B_1,\ B_2,\ B_3$.

Розташування пікселів замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, для полів різної розмірності показано на рис. 3. Кількість замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, наведено у таблиці 2.

Таблиця 2

1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	6×6	7×7	8×8
1	1	$1+2$	$1+2$	$1+2+3$	$1+2+3$	$1+2+3+4$	$1+2+3+4$

Розглянемо два квадрати розмірністю $2n \times 2n$ і $2n+2 \times 2n+2$. Другий квадрат можна отримати з першого, додавши по контуру по одному рядку і стовпчику з відповідною кількістю клітин (рис. 2).

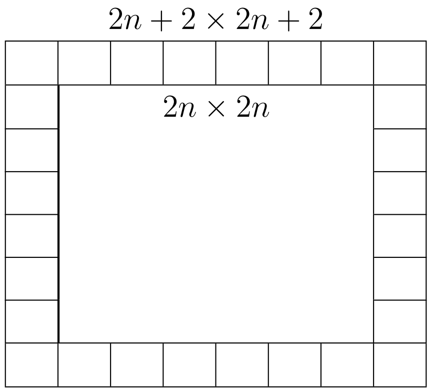


Рис. 2

Із таблиці 2 випливає, що на полі $2n \times 2n$, $n \in \mathbb{N}$, кількість замкнених класів не зміниться в порівнянні з полем $2n-1 \times 2n-1$, а на полі $2n+1 \times 2n+1$ з'являться $n+1$ нових класів на доданих рядках і стовпчиках у порівняні з полем $2n \times 2n$. Звідси випливає теорема.

Теорема 1. *На полях $2n \times 2n$ і $2n-1 \times 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, існує $\frac{n^2+n}{2}$ замкнених класів відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$.*

3. Досконалі канонічні форми формул P−алгебри.

Означення 1. *Диз'юнктивна нормальна форма формули $\varphi = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ P− алгебри називається досконалою, якщо вона лексикографічно впорядкована відносно індексів змінних x_i, $i = 1, \ldots, k$, та індексів поворотів T_j, $j = 1, \ldots, l$, в елементарних перетинах p_i для всіх $i = 1, 2, \ldots n$.*

Розглянемо алгебру $U_4 = \langle A_4, \Omega \rangle$, де $A_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right\}$ – множина бінарних матриць (бінарних зображень).

Для елементів a_{12}; a_{13}; a_{24}; a_{34}; a_{43}; a_{42}; a_{31}; a_{21} другого замкненого класу, відносно операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, справедливі рівності: .

$$a_{12}^{T_0} = a_{12};\ a_{13}^{T_6} = a_{12}; a_{24}^{T_3} = a_{12};\ a_{34}^{T_4} = a_{12};$$

$$a_{43}^{T_7} = a_{12};\ a_{42}^{T_5} = a_{12}; a_{31}^{T_2} = a_{12};\ a_{21}^{T_1} = a_{12}. \qquad (3)$$

З цих рівностей випливає, що:

1) для довільної операції T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, у другому класі існує елемент a_{ij} такий, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$;

2) для довільного елемента a_{ij} з другого класу існує операція T_k, $k \in \mathbb{Z}_8$, така, що $a_{ij}^{T_k} = a_{12}$.

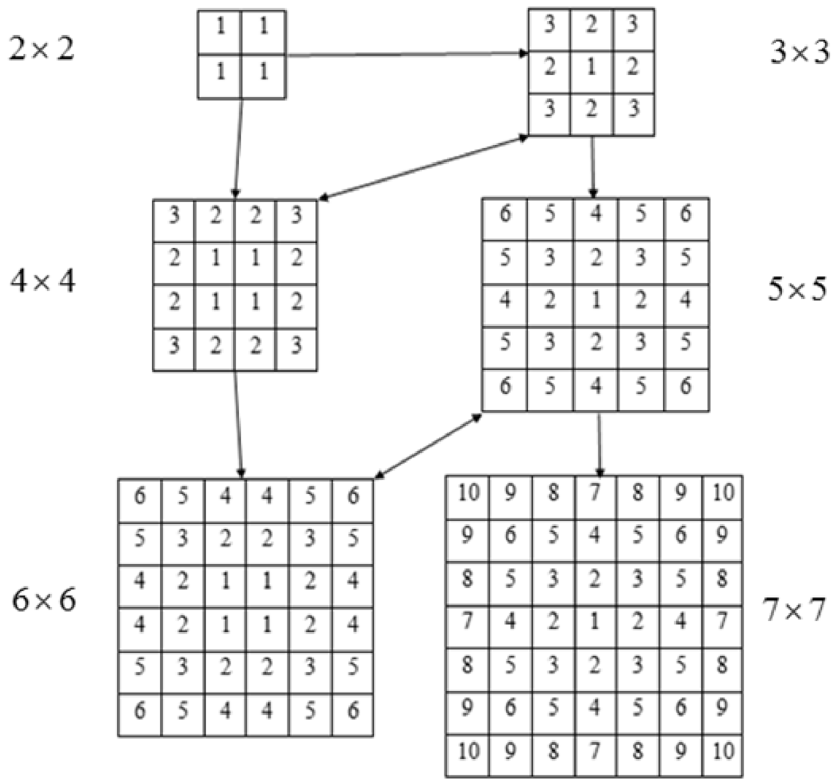


Рис. 3

Рівності (3) зручно задати у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3

	T_0	T_6	
T_1			T_3
T_2			T_4
	T_5	T_7	

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$, $t \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_8$ побудуємо зображення

$$A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases} a_{12} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_0} \in r(x_t), & a_{12} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{13} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_6} \in r(x_t), & a_{13} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{24} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_3} \in r(x_t), & a_{24} = 0\,, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{34} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_4} \in r(x_t), & a_{34} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{43} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_7} \in r(x_t), & a_{43} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{42} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_5} \in r(x_t), & a_{42} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{31} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_2} \in r(x_t), & a_{31} = 0, \text{ в іншому випадку,} \\ a_{21} = 1, \text{ якщо, } x_t^{T_1} \in r(x_t), & a_{21} = 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

а всі інші елементи матриці $A_t^*(a_{ij})$ дорівнюють нулеві.
З проведених міркувань випливає, що:

1) в матриці $r_t\left(A_t^*\right)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці;

2) у всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, елемент a_{12} дорівнює нулеві.

Якщо елементарна кон'юнкція p_d має в своєму складі змінні $x_{d_1}, x_{d_2}, \ldots, x_{d_l}$, $d_1, d_2, \ldots, d_l \in \mathbb{N}$, то її можна представити у вигляді

$$p_d = r\left(x_{d_1}\right) r\left(x_{d_2}\right) \ldots r\left(x_{d_l}\right). \tag{4}$$

Для кожного перетину $r\left(x_{d_t}\right)$ будується аналогічно до $A_t^*\left(a_{ij}\right)$ зображення $A_{d_t}^*\left(a_{ij}\right)$. Легко переконатись, що в зображенні $p_d\left(A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$ елемент a_{12} дорівнює одиниці, а у всіх інших елементарних кон'юнкціях цей елемент дорівнює нулеві.

Проведені міркування справедливі для довільної алгебри $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$ [1], оскільки кожна з них має в своєму складі елементи другого замкненого класу, якщо $k = 2n$, $n = 2, 3, \ldots$. В алгебрах $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, при $k = 2n+1$ роль елементів другого класу відіграють елементи п'ятого класу.

Нехай $\varphi_1 = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$, $\varphi_2 = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_t$ диз'юнктивні нормальні форми формул φ_1 і φ_2 алгебр $U_k = \langle A_k, \Omega\rangle \in P$, $k \geq 4$.

Теорема 2. *$\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, якщо $\forall p_d \in \varphi_1$, $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що $p_d \doteq q_j$ (p_d лексикографічно співпадає з q_j).*

Доведення. Нехай p_d має вигляд (4). Будуємо зображення $p_d\left(A_{d_1}^*, \ldots, A_{d_t}^*\right)$, в якому $a_{12} = 1$. Всім іншим змінним, які не входять в p_d, присвоїмо нульове значення. Якщо $\varphi_1 = \varphi_2$ тотожність, то $\exists q_j \in \varphi_2$ таке, що на заданому наборі зображень $A_{d_1}^*, A_{d_2}^*, \ldots, A_{d_t}^*$, приймає такі самі значення, що й φ_1 в тому числі в точці $a_{12} = 1$. А це можливо тільки тоді коли q_j підформула p_d ($q_j \subset p_d$).

Проводячи аналогічні міркування для формули φ_2 і будуючи відповідний набір зображення для q_j, на якому $a_{12} = 1$, отримуємо, що тотожність $\varphi_1 = \varphi_2$ буде мати місце, якщо $\forall q_j$ $\exists p_s$ таке, що $p_s \subset q_j$. Тоді з включень $q_j \subset p_d$ і $p_s \subset q_j$ випливає, що $p_s \subset p_d$, а це неможливо, оскільки в побудованих диз'юнктивних нормальних формах ні одна елементарна кон'юнкція не є підформулою іншої елементарної кон'юнкції. Теорему доведено.

4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма алгебри $U_3 = \langle A_3, \Omega\rangle$. З означення операцій T_i, $i \in \mathbb{Z}_8$, випливає, що в алгебрі U_3 є три замкнені класи елементів: $\{a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}\}$, $\{a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{21}\}$, $\{a_{22}\}$. Для елементів першого і

T_1

1	4	7
2	5	8
3	6	9

T_2

7	4	1
8	5	2
9	6	3

T_3

3	6	9
2	5	8
1	4	7

T_4

9	6	3
8	5	2
7	4	1

T_0

1	2	3
4	5	6
7	8	9

T_5

7	8	9
4	5	6
1	2	3

T_6

3	2	1
6	5	4
9	8	7

T_7

3	2	1
6	5	4
9	8	7

Рис. 4

другого класу справедливі співвідношення:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}^{T_1} = a_{11};\ \ a_{13}^{T_6} = a_{11};\ \ a_{33}^{T_4} = a_{11};\ \ a_{31}^{T_5} = a_{11};\\
a_{12}^{T_0} = a_{12};\ \ a_{23}^{T_3} = a_{12};\ \ a_{32}^{T_7} = a_{12};\ \ a_{21}^{T_2} = a_{12}.
\end{array} \tag{5}
$$

Співвідношення (5) зручно представити у вигляді таблиці 4.

Таблиця 4

T_1	T_0	T_6
T_2		T_3
T_5	T_7	T_4

Користуючись цією таблицею для довільного перетину $r(x_t) = x_t^{T_{k_1}} x_t^{T_{k_2}} \dots x_t^{T_{k_s}}$ побудуємо зображення

$$
A_t^*(a_{ij}) = \begin{cases}
a_{11} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_1} \in r_t,\ a_{11} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_1} \notin r_t,\\
a_{12} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_0} \in r_t;\ a_{12} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_0} \notin r_t,\\
a_{13} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_6} \in r_t;\ a_{13} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_6} \notin r_t,\\
a_{21} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_2} \in r_t;\ a_{21} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_2} \notin r_t,\\
a_{23} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_3} \in r_t;\ a_{23} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_3} \notin r_t,\\
a_{31} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_5} \in r_t;\ a_{31} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_5} \notin r_t,\\
a_{32} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_7} \in r_t;\ a_{32} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_2} \notin r_t,\\
a_{33} = 1,\ \text{якщо}\ x_t^{T_3} \in r_t;\ a_{33} = 0,\ \text{якщо}\ x_t^{T_4} \notin r_t,\\
a_{22} = 0.
\end{cases}
$$

У зображенні $r_t\left(A_t^*(a_{ij})\right)$:

1) елементи a_{11} та a_{12} дорівнюють одиниці;

2) на всіх інших перетинах, які не є власною частиною $r(x_t)$, хоча б один із елементів a_{11}, a_{12} дорівнює нулеві.

Далі проводячи міркування, аналогічні доведенню попередньої теореми отримуємо, що результати цієї теореми поширюються і для алгебри U_3.

У даній роботі показано: 1. ДНФ формул алгебр класу Р для $n > 2$ співпадають з побудованими в роботі [1] ДНФ. 2. Всі алгебри U_n, $n > 2$ є екваціонально еквівалентними, тобто множини всіх тотожностей в цих алгебрах співпадають.

Список використаної літератури

1. *Мич І. А., Ніколенко В. В.* Повні системи тотожностей в одному класі алгебр // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – Ужгород, – 2017. – Вип. 1 (30). – С. 79–86.
2. *Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К.* Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002. – 579 с.

Одержано 04.07.2017

УДК 519.713.2+519.171

V. M. Skochko (Taras Shevchenko National University of Kyiv)

TRANSITION GRAPHS OF ITERATIONS OF INITIAL (2, 2)-AUTOMATA

The iterations of an automaton A naturally produces a sequence of finite graphs $G_A(n)$ which describe the transitions in $A^{(n)} = A \circ A \circ \ldots \circ A$ (n times). We consider combinatorial properties of the graphs $G_A(n)$ for initial invertible automata with two states over the binary alphabet. We compute the chromatic number and girth of the graphs $G_A(n)$ and show that all of them are imbalance graphic.

Ітерації автомата A природньо породжують послідовність скінченних графів $G_A(n)$, що описують переходи в автоматах $A^{(n)} = A \circ A \circ \ldots \circ A$ (n разів). Ми розглядаємо комбінаторні властивості графів $G_A(n)$ для ініціальних оборотних автоматів з двома станами над бінарним алфавітом. У статті пораховано хроматичне число і обхват для графів $G_A(n)$ і доведено, що всі вони є імбалансно графічними.

1. Introduction. Let a be a Mealy automaton with the same input-output alphabet. Then we can consider the sequence of its iterations $(a^n)_{n\geq 1}$, where the n-th iteration a^n is the minimization of $a \circ \ldots \circ a$ (n times composition of a with itself). The study of iterations of invertible automata is at the heart of famous examples of Burnside automaton groups and groups of intermediate growth (see [6, 9]).

Important information about a^n is contained in its transition graph whose vertices are the states of a^n and arrows correspond to transitions. We will be interested in the graph $G_a(n)$, which is a simple graph obtained from the transition graph of a^n by ignoring loops, directions, and multiple edges. The graphs $G_a(n)$ for non-initial automata were intensively studied for the last twenty years as Schreier graphs of automaton groups (see [2–4] and the references therein). In particular, the study of spectrum of graphs $G_a(n)$ for certain automaton lead to the solution of the Atiyah problem about the range of L^2-Betti numbers of closed manifolds (see [5]).

In this paper we study the graphs $G_a(n)$ for initial invertible automata with two states over the binary alphabet or just $(2, 2)$-automata for short. This class contains 18 minimal automata, eleven of which have finite order and the corresponding sequence $(G_a(n))_{n\geq 1}$ consists of at most two graphs. The sequence $(G_a(n))_{n\geq 1}$ contains infinitely many graphs for the seven $(2, 2)$-automata of infinite order, which are the adding machine, two states of the cyclic automaton (they generate C_∞), and two states of the lamplighter automaton and its inverse (they generate the lamplighter group $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$). The growth function for every $(2, 2)$-automaton a, which computes the number of vertices of $G_a(n)$, i.e., the number of states of a^n, was calculated in [10]. We compute the chromatic number $\chi(G)$ and girth $g(G)$ of these graphs.

Theorem 1. *The chromatic number and girth of the graphs $G_a(n)$ for a $(2, 2)$-automaton a are the following:*

- *if a is trivial or acts as permutation of every letter, then $G_a(n)$ is acyclic and $\chi(G_a(n)) = 1$ for all $n \geq 1$;*
- *if a has order two and do not act as permutation of every letter, then $G_a(n)$ is acyclic and $\chi(G_a(n)) = 1 + (n \bmod 2)$ for all $n \geq 1$;*

- *if a is the adding machine or a state of the cyclic automaton, then $G_a(n)$ is acyclic and $\chi(G_a(n)) = 2$ for $n = 2^k$, $k \geq 0$ and $g(G_a(n)) = \chi(G_a(n)) = 3$ otherwise;*
- *if a is a state of the lamplighter automaton or its inverse, then $G_a(1)$ is acyclic with $\chi(G_a(1)) = 2$ and $g(G_a(n)) = \chi(G_a(n)) = 3$ for $n \geq 2$.*

Also we consider graph imbalances introduced in [1] as a measure of graph irregularity. A graph is imbalance graphic if its imbalance multiset coincides with a degree multiset for some other graph. This property was studied in [8]. We prove

Theorem 2. *Let a be a $(2,2)$-automaton. Then the graph $G_a(n)$ is imbalance graphic for every $n \in \mathbb{N}$.*

Acknowledgment. The author would like to thank his advisor Ievgen Bondarenko for his help in problem formulation and corrections of this paper.

2. Preliminaries. In this section we recall necessary information on chromatic number, girth and imbalances of graphs (see [7] for more information and references). Throughout the paper we consider only finite simple undirected graphs without loops.

Let G be a graph. The *chromatic number* $\chi(G)$ is the smallest number of colors that can be used to color the vertices of G in such a way that no two adjacent vertices share the same color. We will use the following well-known theorem that gives us an upper bound for the graph chromatic number based on the maximal vertex degree.

Theorem 3 (Brooks, 1941)**.** *Let G be a connected graph with the maximal vertex degree d. Then $\chi(G)$ is at most $d+1$. Moreover, $\chi(G) = d+1$ if and only if G is a complete graph or an odd cycle.*

The *girth* $g(G)$ of a graph G is the length of the smallest cycle in G or infinity if there are no cycles. If the girth is high, then locally around every vertex the graph looks like a tree, and one could expect that its chromatic number is small. However, this is not the case; in 1959 Erdös has proved using probabilistic arguments that for any positive integers χ and γ there exist graphs with chromatic number χ and girth γ. Since then, many explicit constructions of such graphs were proposed.

Edge imbalances of graphs were introduced in [1] as a tool to investigate graph irregularity. Let G be a graph with the vertex set $V(G)$ and the edge set $E(G)$. The degree of a vertex $v \in V(G)$ will be denoted by $d(v)$.

Definition 1. *Let $e \in E(G)$ be an edge which is incident to the vertices u and v. The imbalance of the edge e is defined as $imb(e) = |d(u) - d(v)|$.*

For a graph G we consider the following two multisets: $M(G)$ is the multiset of all edge imbalances and $D(G)$ is the multiset of vertex degrees.

Definition 2. *A multiset M is graphic if there exists some graph Γ such that $D(\Gamma) = M$. A graph G is called imbalance graphic if its imbalance multiset is graphic.*

Every path and every regular graph are imbalance graphic. Examples of graphs that are not imbalance graphic were constructed in [8].

We need the following lemma for further proofs.

Lemma 1. *Let G be a graph such that its imbalance multiset $M(G)$ contains only values* 0, 1 *and* 2 *with the following property. If there are exactly* 1 *or* 2 *imbalances with value* 2 *then there exists an imbalance with value* 1 *in $M(G)$. Then $M(G)$ is graphic.*

Proof. Let us construct the graph Γ such that $D(\Gamma) = M(G)$. Note that every 0 imbalance can be always realized by some isolated vertex. In addition, we know that the sum of all imbalances for any graph is even. This means that in the given situation we have an even number of values 1 in $M(G)$.

If we have at least three values 2 in $M(G)$ then we can realize them by a cycle. Otherwise, we can construct the path of length 1, 2 or 3 depending on how many values 2 there are in $M(G)$. This is possible as the multiset $M(G)$ contains at least two values 1. All other values 1 can be realized by paths of length 1. Therefore, $M(G)$ is graphic.

3. Automata and their transition graphs. In this section we recall necessary information on automata-transducers (see [6] for more details).

We consider *automata* given by triples $A = (X, S, \lambda)$, where X is a finite set (input-output alphabet), S is a finite set of states, and $\lambda : S \times X \to X \times S$ is an output-transition map. An *initial automaton* is an automaton $A = (X, S, \lambda)$ with a fixed initial state $a \in S$. We will denote initial automaton by its initial state a.

Let X^* be the set of all words over X. Then every initial automaton a defines a transformation of X^* as follows. The image of an input word $x_1x_2 \ldots x_n$ is defined recursively by the rule:

$$a(x_1x_2 \ldots x_n) = y_1b(x_2 \ldots x_n), \text{ if } \lambda(a, x_1) = (y_1, b).$$

An automaton a is called *invertible* if the corresponding transformation of X^* is invertible.

Two initial automata over X are called *equivalent* if they define the same transformation of X^*. An initial automaton is called *minimal* if it has the minimal number of states among the equivalent automata. Every automaton can be minimized using the classical Hopcroft's algorithm (1971). Note that every automaton transformation can be defined by a unique minimal automaton. Since we are going to work only with minimal automata, we can identify initial automata and the corresponding transformations of X^*.

Definition 3. *The n-th iteration a^n of an initial automaton a is the minimal automaton which defines the n-th iteration of the transformation defined by a.*

In other words, we define a composition of automata via the composition of corresponding transformations. Note that this agrees with the standard composition of automata, where the output of the first automaton is connected to the input of the second automaton.

Definition 4. *An initial automaton a has finite order if there exists a positive integer n such that a^n defines the trivial transformation of X^*.*

In order to simplify presentation of automata and calculation of automaton composition, people consider wreath recursion notation for automata.

Definition 5. *A state s_2 of an automaton is a projection of a state s_1 if there exists a letter $x \in X$ such that $\lambda(s_1, x) = (y, s_2)$ for some letter $y \in X$.*

Every state s of an automaton over $X = \{1, 2, \ldots, d\}$ can be written using its projections in the *wreath recursion* notation $s = (s_1, s_2, \ldots, s_d)\pi_s$, where $\pi_s : X \to X$ is a map on the alphabet defined by a and $\lambda(s, i) = (\pi_s(i), s_i)$. Note that every automaton can be uniquely given by the system of wreath recursion for all of its states.

Definition 6. *Let a be a minimal initial automaton. For every $n \in \mathbb{N}$ we define the graph $G_a(n)$ with the vertex set $V(G_a(n)) = States(a^n)$, where two vertices s_1 and s_2 are adjacent if one of them is a projection of another.*

In other words, the graph $G_a(n)$ is a simple graph obtained from the transition graph of a^n by ignoring loops, directions, and multiple edges.

Definition 7. *An initial finite automaton a is called imbalance graphic if for every $n \in \mathbb{N}$ the graph $G_a(n)$ is imbalance graphic.*

Let us note that not all automata are imbalance graphic. For example, the following wreath recursion defines an automaton with six states over the binary alphabet $X = \{1, 2\}$ that is not imbalance graphic:

$$\begin{aligned} a &= (a, b)\sigma, & b &= (c, d)\sigma, \\ c &= (d, e), & d &= (e, e)\sigma, \\ e &= (e, f)\sigma, & f &= (f, f), \end{aligned}$$

where σ is the transposition $(1, 2)$. Indeed, the graph $G_a(1)$ has two imbalances of value 2 and all other imbalances are equal to 0. Such a multiset is not graphic.

4. The graphs $G_a(n)$ for initial $(2, 2)$-automata. Up to symmetry and letters interchanging, there are ten minimal non-initial invertible automata with two states $S = \{a, b\}$ over the alphabet $X = \{1, 2\}$:

1) $b = (b, b)$, $a = (a, a)\sigma$;

2) $b = (b, b)$, $a = (b, b)\sigma$;

3) $b = (a, a)$, $a = (a, a)\sigma$;

4) $b = (a, a)$, $a = (b, b)\sigma$;

5) $b = (a, b)$, $a = (a, a)\sigma$;

6) $b = (a, b)$, $a = (b, b)\sigma$;

7) $b = (b, b)$, $a = (b, a)\sigma$ (the adding machine);

8) $b = (a, a)$, $a = (a, b)\sigma$ (the cyclic automaton);

9) $b = (a, b)$, $a = (b, a)\sigma$ (the lamplighter automaton);

10) $b = (a, b)$, $a = (a, b)\sigma$ (inverse to the lamplighter automaton),

where σ is the transposition $(1,2)$. By fixing an initial state, we get eleven initial $(2,2)$-automata of finite order and seven automata of infinite order.

For automata of finite order, the order is one or two. This means that it is enough to consider only the graphs $G_a(1)$ and $G_a(2)$. These graphs are acyclic and imbalance graphic. The chromatic number is $\chi(G_a(n)) = 1$ for two of these automata and $\chi(G_a(n)) = 1 + (n \mod 2)$ for the other and for all $n \geq 1$. We have checked Theorems 1 and 2 for automata of finite order.

Further we consider one by one the seven automata of infinite order.

Proposition 1. *Let a be the adding machine. Then the graph $G_a(n)$ is imbalance graphic for every $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. The structure of the graphs $G_a(n)$ is described in [10]. For $n = 2^k$ the graph $G_a(n)$ is a path of length $k+2$. Therefore, it is imbalance graphic.

Now we consider other values of n. Every state a^m, $2 < m < n$, has one or two projections. Since the automaton is minimal, each state except a^n is a projection of some state a^l. Each automaton can be a projection for at most two other states. As a result we get that the vertex which corresponds to the state a^m can have only degrees from the set $\{2,3,4\}$. Moreover, the vertex a^n has degree 1 if n is even and 2 otherwise. These facts together with a direct check of states a^0, a and a^2 give us the result that all imbalances of $G_a(n)$ can be equal only to 0, 1 or 2.

Moreover, every automaton a^n contains the trivial state a^0 which is connected only with state a. The imbalance of the corresponding edge is always equal to 2.

On the other hand, the automaton a^n contains a state a^k for an odd $k > 1$. We take the biggest such a value k. If $n = k$ then we get the imbalance 1 for the edge which contains the vertex a^n and its projection with odd power. If $n = 2^s k$ then it is easy to check that for $s > 1$ we will get the imbalance 1 on the edge between n and $2^{s-1}k$. If $s = 1$ then the vertex a^n has degree 1 and connected only with a^k which has degree 3. But a^k has two projections $a^{[\frac{k}{2}]}$ and $a^{[\frac{k}{2}]+1}$. One of these powers is even and the corresponding vertex has degree 2. So we get the imbalance 1 in the graph.

Thus the multiset $M(G)$ satisfies all the conditions of Lemma 1. The statement is proved.

Proposition 2. *Let a be the adding machine. Then $G_a(n)$ is acyclic for $n = 2^k$ and $g(G_a(n)) = 3$ for the other values of n. The chromatic number is*

$$\chi(G_a(n)) = \begin{cases} 2, & \text{if } n \text{ is a power of two;} \\ 3, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. For $n = 2^k$ the graph $G_a(n)$ is a path and $\chi(G_a(n)) = 2$. For the other values of n the graph $G_a(n)$ contains a cycle of length 3 (vertices a^3, a^2 and a^1); therefore, $g(G_a(n)) = 3$ and $\chi(G_a(n)) \leq 3$. We can color the graph $G_a(n)$ by three colors as follows. The state a^n is colored by the first color, its projections should be colored by the second one, while for the next projections we can use the first color again. This approach can be used until we get one of the vertex from the cycle. Therefore, $\chi(G_a(n)) = 3$.

Now we consider the case of the cyclic automaton. The structure of the graphs $G_a(n)$ for the cyclic automaton is described in [10]. Each state of a^n is a projection

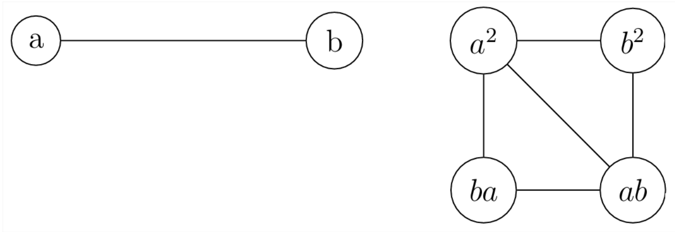


Figure 1. The graphs $G_a(1)$ and $G_a(2)$ for the state a of the lamplighter automaton.

of at most two other states and has only one or two projections. Therefore, the degree of each state (except for maybe a^n) in the graph $G_a(n)$ is 2, 3 or 4. Also we can prove in the same way as for the adding machine that if there exists imbalance with value 2 then there exists an edge with imbalance 1. Therefore, $G_a(n)$ satisfies all the conditions of Lemma 1 and it is imbalance graphic. The chromatic number and girth is calculated in the same way as for the adding machine. For the state b we get the same results, because $G_b(n) = G_{a^2}(n) = G_a(2n)$.

It is left to consider the lamplighter automaton $b = (a, b)$, $a = (b, a)\sigma$ and its inverse $d = (c, d)$, $c = (c, d)\sigma$. Since the transformations defined by c and d are inverse to the transformations defined by a and b respectively, the graphs $G_c(n)$ and $G_a(n)$ are isomorphic, and the graphs $G_b(n)$ and $G_d(n)$ are isomorphic.

Proposition 3. *Let a be a state of the lamplighter automaton. Then the graph $G_a(n)$ is imbalance graphic for every $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. It was proved in [10] that for every n the automata a^n and b^n contain exactly 2^n states. Moreover, each state is a word of length n over the alphabet $\{a, b\}$. This means that the graphs $G_a(n)$ and $G_b(n)$ are the same for every $n \in \mathbb{N}$.

First of all we can directly check the cases $n = 1$ and $n = 2$ (see Figure 1). In this case $M(G_a(1)) = \{0\}$ and $M(G_a(2)) = \{0, 1, 1, 1, 1\}$. Both of these multisets are graphic.

Now we consider the case when $n > 2$. Each state of the automaton a^n has two different projections, because one of them is a word over $\{a, b\}$ with the first letter a while the other one has the first letter b. However, for some states one of the projections can coincide with the state.

Let us show that each state s of the automaton a^n can be a projection only for one or two other states. Let the first letter of s as a word over $\{a, b\}$ is a then it can be only the first projection of a state which starts with b or the second projection of the state which starts with a. Then we take the second letter of s. It is easy to see that for each case we will get only one possible second letter for state to contain s as a projection. After repeating of this procedure we get that each state can be projection only for two states. While in some cases s can be a projection of itself as it was described above. The other possible situation is when the two different states s_1 and s_2 are the projection each to other. Let us prove that the last two properties can not hold simultaneously. It is easy to show that the only state that can be a projection of itself are b^n and $b^{n-1}a$. This follows from the fact that the word that corresponds to such a state can not contain subwords of type ab and aa. On the other hand the state a^n is a projection of b^n but not vice versa. Also the state $b^{n-1}a$

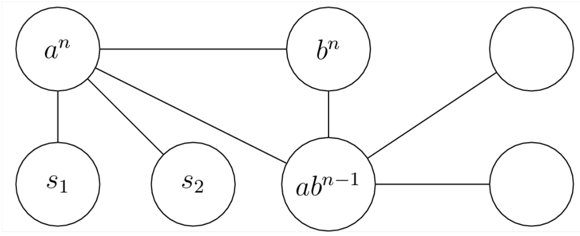


Figure 2. The neighborhood of the vertex b^n in the graph $G(a^n)$.

contains the state $a^{n-1}b$ as a projection but not vice versa.

As a result we have that each vertex in $G_a(n)$, $n > 2$ has degree 2, 3 or 4. Therefore, the imbalance multiset $M(G_a(n))$ can contain only values 0, 1 and 2.

Let us consider the state b^n and corresponding vertex. It is connected with the states a^n and ab^{n-1}. Then the corresponding vertex of the graph $G(a^n)$ has degree 2. Moreover, each of these states is not a projection of itself and a^n has two different projections $(ab)^{[\frac{n}{2}]}a^r$ and $(ba)^{[\frac{n}{2}]}b^r$, where r is the remainder modulo 2. But ab^{n-1} has a^n and b^n as projections. Then it is a projection for some other two different states and the corresponding vertex in the graph $G_a(n)$ has degree 4. This pattern gives us two edges with imbalance 2 (see Figure 2).

As was mentioned above the state $b^{n-1}a$ also is a projection of itself. Thus, the corresponding vertex has the degree 2. Now we can use the following approach. Since $G_a(n)$ is connected and the vertices corresponding to $b^{n-1}a$ and b^n are not adjacent, there is a path of the length not less than two between them. Moreover, such a path contains either the vertex a^n or the vertex ab^{n-1}. Both of these vertices have degree 4. Then on the path between such a vertex and a vertex for $b^{n-1}a$ there is at least one edge with imbalance 2 or 1.

Hence the multiset $M(G_a(n))$ satisfies all the conditions of Lemma 1. The statement is proved, what completes the proof of Theorem 2.

Proposition 4. *Let a be a state of the lamplighter automaton. Then $G_a(1)$ is acyclic with $\chi(G_a(1)) = 2$ and $g(G_a(n)) = \chi(G_a(n)) = 3$ for $n \geq 2$.*

Proof. By directly check we have that $G_a(1)$ is acyclic with $\chi(G_a(1)) = 2$, while $\chi(G_a(2)) = 3$. It was shown in the previous proof that every graph $G_a(n)$ for $n > 2$ contains a triangle and therefore $g(G_a(n)) = 3$. In particular, $\chi(G_a(n)) \geq 3$. On the other hand, the maximal vertex degree is 4 and the graphs are neither complete nor the odd cycle. Hence, $\chi(G_a(n)) \leq 4$ by the Brook's theorem.

Let us prove that $\chi(G_a(n)) = 3$. Let a state ω be a word of length $n \geq 2$ over $\{a, b\}$ and it has two projections ω_1 and ω_2 with the same length and these projections are not coincide with ω (this is true for all states except for b^n and ab^{n-1}). Let us assume by induction that the graph $G_a(n)$ can be colored in three colors. Now we consider the graph $G_a(n+1)$. Note, that we can match a vertex ω of $G_a(n)$ with two vertices $a\omega$ and $b\omega$ of $G_a(n+1)$. Moreover, both of these states have the same projections $a\omega_1$ and $b\omega_2$. If we will color $a\omega$ and $b\omega$ in the same color as ω is colored in the graph $G_a(n)$ for every word ω, then the number of colors will not be changed. But we get two edges with the same colored vertices when $b\omega$ is a projection of $a\omega$. These cases appear when $\omega = \omega_2 \in \{b^n, b^{n-1}a\}$. The first edge connects b^{n+1} and ab^n, while the second connects b^na and $ab^{n-1}a$. Note that the vertices b^{n+1} and $b^n a$ have degree 2 in $G_a(n+1)$, and they always can be colored properly because we use three colors. Then we can left colors for ab^n and $ab^{n-1}a$ by using the colors of b^n and $b^{n-1}a$ respectively. Hence, the chromatic number is 3. The statement is proved. The proof of Theorem 1 is complete.

References

1. Albertson M. O. The irregularity of a graph // Ars Comb. 46. – 1997. – **46**. – P. 219-225.
2. Bartholdi, L., Grigorchuk, R. On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups // Proc. Steklov Inst. Math. – 2000. – **231**. – P. 1–41.
3. Bondarenko I. Growth of Schreier graphs of automaton groups // Math. Ann. – 2012. – **354.** – P. 765–785.
4. Bondarenko I., D'Angeli D., Nagnibeda T. Ends of Schreier graphs and cut-points of limit spaces of self-similar groups // Journal of Fractal Geometry – 2017. – Number 4. – P. 369-424.
5. Grigorchuk R.I., Linnell P., Schick T., Żuk A. On a question of Atiyah // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 2000. — **331**, N9. – P. 663–668.
6. Grigorchuk R., Nekrashevych V., Sushchanskii V. Automata, dynamical systems and groups // Tr. Mat. Inst. Steklova – 2000. – **231**. – P. 134–214.
7. Harary, F. Graph Theory — Boston: Addison-Wesley, 1969.
8. Kozerenko S., Skochko V. On graphs with graphic imbalance sequences // Algebra Discrete Math. – 2014. – **18**, 1. – P. 97–108.
9. Nekrashevych, V. Self-similar groups — Mathematical Surveys and Monographs, vol.117, American Mathematical Society, Providence, 2005.
10. Skochko V. The growth function of initial invertible 2-state automata over a binary alphabet // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics – 2017. – **2**. – P. 9–14.

Одержано 15.08.2017

УДК 512.53

О. О. Тоічкіна (Луганський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Старобільськ)

ЕНДОТИПИ ДЕЯКИХ ЧАСТКОВИХ ВІДНОШЕНЬ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

We classify certain partial equivalence relations according to their type of an endomorphism.

В роботі класифікуються часткові відношення еквівалентності певного виду за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Напівгрупи ендоморфізмів реляційних систем вивчалися багатьма авторами. Основна увага при їх вивченні приділялася дослідженню визначеності реляційних систем їх напівгрупами ендоморфізмів [1–3], опису їх абстрактних властивостей і зображень [4–6], вивченню алгебраїчних і комбінаторних властивостей моноїдів ендоморфізмів [7,8]. Основним поняттям, яке тут вивчається, є поняття ендотипу реляційної системи. Поняття ендотипу, як числової характеристики, що зв'язує множини шести типів ендоморфізмів симетричного бінарного відношення, було введене в [9], а надалі в [10] і для відношень довільної арності. Використовуючи це поняття, можна класифікувати відношення за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. Так, в [11] знайдено ендотипи узагальнених полігонів, в [12] — ендотипи доповнень скінченного шляху, а в [13] — ендотипи графів N-призм. У [14] класифіковано всі відношення еквівалентності за їх ендотипами відносно ендоморфізмів. У [15] обчислені всі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності відносно його ендотопізмів. Тут ми визначаємо всі ендотипи часткових відношень еквівалентності певного виду, що доповнює основний результат з [14].

Робота побудована таким чином. У пункті 1 даються визначення шести типів ендоморфізмів і приклади ендоморфізмів кожного типу. У пункті 2 наведено необхідні та достатні умови існування відповідних ендоморфізмів часткового відношення еквівалентності. У пункті 3 обчислюються всі можливі значення ендотипу заданих часткових еквівалентностей.

1. Типи ендоморфізмів. Нехай X — довільна непорожня множина, $\Im(X)$ — симетрична напівгрупа на множині X і $\rho \subseteq X \times X$.

Перетворення $f \in \Im(X)$ називається *ендоморфізмом* відношення $\rho \subseteq X \times X$, якщо з $(x, y) \in \rho$ випливає, що $(xf, yf) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх ендоморфізмів бінарного відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює напівгрупу, яка позначається через $End\,(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *напівсильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існують такі $x' \in xff^{-1}$, $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$. Множина всіх напівсильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $HEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *локально сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що для кожного $x' \in xff^{-1}$ знайдеться такий $y' \in yff^{-1}$, що $(x', y') \in \rho$, і аналогічно для кожного прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх локально сильних ендоморфізмів відношення ρ позначається як $LEnd(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *квазісильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що існує такий $x' \in xff^{-1}$, який знаходиться у відношенні ρ з кожним прообразом з yff^{-1}, і аналогічно для деякого прообразу $y' \in yff^{-1}$. Множина всіх квазісильних ендоморфізмів бінарного відношення ρ позначається через $QEnd(X, \rho)$.

Зазначимо, що множини $HEnd(X, \rho)$, $LEnd(X, \rho)$ і $QEnd(X, \rho)$ у загальному випадку не є напівгрупами [9].

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *сильним*, якщо з $(xf, yf) \in \rho$ випливає, що $(x, y) \in \rho$ при будь-яких $x, y \in X$. Множина всіх сильних ендоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції перетворень утворює моноїд, який позначається як $SEnd\,(X, \rho)$. Неважко переконатися, що $SEnd(X, \rho)$ є піднапівгрупою $End(X, \rho)$.

Ендоморфізм f відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *автоморфізмом*, якщо f є бієкцією і f^{-1} — ендоморфізм бінарного відношення ρ. Множина всіх автоморфізмів відношення ρ відносно операції композиції підстановок утворює групу, яка позначається через $Aut\,(X, \rho)$. Зрозуміло, що $Aut(X, \rho)$ є підгрупою $End(X, \rho)$.

Як відомо [9], для довільного бінарного відношення ρ на множині X має місце ланцюг включень:

$$End(X, \rho) \supseteq HEnd(X, \rho) \supseteq LEnd(X, \rho) \supseteq QEnd(X, \rho) \supseteq$$

$$\supseteq SEnd(X, \rho) \supseteq Aut(X, \rho).$$

Розглянемо приклади ендоморфізмів кожного типу для відношення $\rho = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b), (c, d), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$, визначеного на множині $X = \{a, b, c, d, e, f\}$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & c & b & c & c \end{pmatrix} \in End(X, \rho) \backslash HEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ c & c & b & b & e & e \end{pmatrix} \in HEnd(X, \rho) \backslash LEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & b & b & d & d \end{pmatrix} \in LEnd(X, \rho) \backslash QEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in QEnd(X, \rho) \backslash SEnd(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & e & e \end{pmatrix} \in SEnd(X, \rho) \backslash Aut(X, \rho),$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ a & b & c & d & f & e \end{pmatrix} \in Aut(X, \rho).$$

2. Ендоморфізми часткових еквівалентностей. Нехай $Eq(X)$ — множина всіх еквівалентностей на X і $\alpha \in Eq(X)$. Через X/α позначається фактормножина множини X по еквівалентності α, а через $\overline{x}$ — клас еквівалентності, який містить $x \in X$.

Лема 1 ([16]). *Перетворення $f \in \Im(X)$ є ендоморфізмом відношення $\alpha \in Eq(X)$ тоді і тільки тоді, коли для кожного класу еквівалентності $A \in X/\alpha$ існує клас $B \in X/\alpha$, такий що $Af \subseteq B$.*

Лема 2 ([17]). *(i) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є напівсильним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $B \in X/\alpha$, такого що $B \cap im(f) \neq \varnothing$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $A \in X/\alpha$, такий що $a, b \in Af$.*

(ii) Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $A, B, C \in X/\alpha$ з того, що $Af \subseteq C, Bf \subseteq C$, випливає $Af = Bf$.

(iii) Для будь-якого відношення $\alpha \in Eq(X)$ маємо $QEnd(X, \alpha) = SEnd(X, \alpha)$.

Лема 3. *Ендоморфізм $f \in End(X, \alpha)$ відношення $\alpha \in Eq(X)$ є сильним тоді і тільки тоді, коли $\tau^* : X/\alpha \to X/\alpha : \overline{a} \mapsto \overline{af}$ є ін'єктивним перетворенням.*

Доведення. Випливає з леми 3.1 в [5].

Бінарне відношення ρ на множині X називається *частковою еквівалентністю* (див., наприклад, [18]) на X, якщо воно симетричне і транзитивне.

Нехай A — непорожня власна підмножина множини X, α_A — еквівалентність на A. Відношення $\alpha_A \subset X \times X$ очевидно є частковим відношенням еквівалентності на множині X. Множину всіх таких часткових еквівалентностей $\alpha_A, A \subset X$, будемо позначати $Eq_A(X)$.

Якщо $f : X \to X$ — деяке перетворення і $A \subseteq X$, то через $f|_A$ позначатимемо обмеження перетворення f на підмножину A.

Лема 4. *(i) Перетворення $f \in \Im(X)$ є ендоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in End(A, \alpha_A)$.*

(ii) Підстановка f множини X є автоморфізмом часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ тоді і тільки тоді, коли $f|_A \in Aut(A, \alpha_A)$.

(iii) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є напівсильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли для будь-якого класу $B \in A/\alpha_A$ такого, що $B \cap im(f) \neq \varnothing$, і будь-яких $a, b \in B \cap im(f)$ існує $Y \in A/\alpha_A$ такий, що $a, b \in Yf$.

(iv) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є локально сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \backslash A)f \subseteq X \backslash A \ \text{і} \ f|_A \in LEnd(A, \alpha_A).$$

(v) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є сильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли

$$(X \backslash A)f \subseteq X \backslash A \ \text{і} \ f \in SEnd(A, \alpha_A).$$

(vi) Ендоморфізм f часткового відношення еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$ є квазісильним ендоморфізмом тоді і тільки тоді, коли f — сильний ендоморфізм.

Доведення. Твердження (iii) доводиться аналогічно тому, як лема 2 з [17], а решта тверджень (i), (ii), (iv)–(vi) — подібно лемам 1–3 цього пункту.

Відмітимо, що з пунктів (v), (vi) леми 4 випливає, що $QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $\alpha_A \in Eq_A(X)$.

3. Ендотипи часткових відношень еквівалентності. Нехай X — довільна непорожня множина, ρ — бінарне відношення на множині X. Ланцюгу включень

$$End(X,\rho) \supseteq HEnd(X,\rho) \supseteq LEnd(X,\rho) \supseteq QEnd(X,\rho) \supseteq$$

$$\supseteq SEnd(X,\rho) \supseteq Aut(X,\rho)$$

відповідає послідовність $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$, де $s_i \in \{0,1\}, i \in \{1,..,5\}$. При цьому $s_i = 0$, якщо на i-тій позиції в наведеній вище послідовності включень множини збігаються, $s_i = 1$ в противному випадку. Наприклад, $s_3 = 0$ означає $LEnd(X,\rho) = QEnd(X,\rho)$, а $s_5 = 1$ вказує на $SEnd(X,\rho) \neq Aut(X,\rho)$. Значення суми $\Sigma_{i=1}^{5} s_i 2^{i-1}$ називається *ендотипом* бінарного відношення ρ відносно його ендоморфізмів і позначається через $Endotype(X,\rho)$.

Відношення $\rho \subseteq X \times X$ називається *тотожним*, якщо $\rho = i_X = \{(x,x)|x \in X\}$ і *універсальним*, якщо $\rho = \omega_X = X \times X$.

Теорема 1. *Нехай $A \neq \varnothing$ і $A \subset X$. Для будь-якої часткової еквівалентності $\alpha_A \in Eq_A(X)$:*

$$Endotype(X,\alpha_A) = \begin{cases} 2, & \textit{якщо } |A| = 1, |X| = 2; \\ 7, & \textit{якщо } 2 \leq |A| < \infty,\ |X \backslash A| = 1,\ \alpha_A = i_A; \\ 18, & \textit{якщо } |A| = 1,\ 2 < |X|; \\ 19, & \textit{якщо } 2 \leq |A|, \alpha_A = \omega_A; \\ 23, & \textit{якщо } 2 \leq |A| < \infty, i_A \neq \alpha_A \neq \omega_A \textit{ або} \\ & \qquad 2 \leq |A| < \infty, 1 < |X \backslash A|, \alpha_A = i_A \textit{ або} \\ & \qquad |A| = \infty, \alpha_A \neq \omega_A. \end{cases}$$

Доведення. 1) Нехай $|X| = 2$, $A \subset X$ — підмножина, що містить один елемент. Тоді $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому, як випливає з леми 4, $End(X,\alpha_A) = HEnd(X,\alpha_A)$ і потужність цих множин дорівнює 2, а $LEnd(X,\alpha_A) = Aut(X,\alpha_A)$ з потужністю 1, отже, $Endotype(X,\alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 2$.

2) Нехай $A \subset X$ — скінченна множина, що містить не менше двох елементів, $|X \backslash A| = 1$ і α_A — тотожне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in End(X,\alpha_A)$, проте $f \notin HEnd(X,\alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Аналогічно можна показати, що $HEnd(X,\alpha_A) \neq$ $\neq LEnd(X,\alpha_A) \neq QEnd(X,\alpha_A)$. Дійсно, визначивши $f : X \to X$, як

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A \backslash \{b\}, \\ b, & \text{якщо } x \in \{b\} \cup X \backslash A \end{cases}$$

для різних $a, b \in A$, приходимо до $f \in HEnd(X, \alpha_A) \setminus LEnd(X, \alpha_A)$. Перетворення

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

дає нам приклад такого $f \in LEnd(X, \alpha_A) \setminus QEnd(X, \alpha_A)$. Оскільки $|X \setminus A| = 1$, $\alpha_A = i_A$ і A – скінченна множина, згідно з лемою 3, п. (ii) і п. (v) леми 4, $f \in Aut(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in SEnd(X, \alpha_A)$, тому $Aut(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = Aut(X, \alpha_A).$$

Отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 7$.

3) Нехай $A = \{a\}$, X — множина, що містить більше двох елементів. Як і в п. 1), $Eq_A(X)$ вичерпується еквівалентністю $\alpha_A = i_A = \omega_A$, при цьому для ендоморфізму f будь-якого типу очевидно, що $af = a$. Згідно з п. (iii) леми 4, $f \in HEnd(X, \alpha_A)$ для будь-якого $f \in End(X, \alpha_A)$, тому $HEnd(X, \alpha_A) = End(X, \alpha_A)$. Умови пунктів (iv)–(vi) леми 4 в даному випадку визначають один і той самий ендоморфізм, не обов'язково бієктивний, тому $LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ і $SEnd(X, \alpha) \neq Aut(X, \alpha)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) = HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A),$$

отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 18$.

4) Нехай A — множина, що містить не менше двох елементів і α_A — універсальне відношення. Візьмемо різні $a, b \in A$ і визначимо перетворення $f : X \to X$ за правилом:

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Згідно з лемою 1 і п. (i) леми 4, $f \in End(X, \alpha_A)$, але $f \notin HEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, матимемо $f \in HEnd(X, \alpha_A) \setminus LEnd(X, \alpha_A)$. Оскільки $|A/\alpha_A| = 1$, умови пунктів (iv)–(vi) визначають один і той самий не обов'язково бієктивний ендоморфізм, тому $LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$ і $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Таким чином,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A),$$

отже, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 19$.

5) а) Нехай A — скінченна множина, що містить не менше двох елементів, і $\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$. Тоді $|A| \geq 3, |A/\alpha_A| \geq 2$ і в A/α_A існує принаймні один клас, потужність якого не менше 2. Позначимо його через $\overline{x}$. Візьмемо різні $a, b \in \overline{x}$ і визначимо перетворення $f : X \to X$, поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ b, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що $f \in End(X, \alpha_A)$, але $f \notin HEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (iii) леми 4. Якщо $Xf = \{a\}$, будемо мати приклад $f \in HEnd(X, \alpha_A) \setminus LEnd(X, \alpha_A)$.

Визначимо тепер перетворення f множини X, поклавши

$$xf = \begin{cases} a, & \text{якщо } x \in A, \\ x, & \text{якщо } x \notin A \end{cases}$$

для всіх $x \in X$. Згідно з пунктами (iv) і (v) леми 4, $f \in LEnd(X, \alpha_A)$, проте $f \notin SEnd(X, \alpha_A)$, що випливає з п. (v) леми 4. Звідси $SEnd(X, \alpha_A) \neq LEnd(X, \alpha_A)$. Нерівність $Aut(X, \alpha_A) \neq SEnd(X, \alpha_A)$ є очевидною. Отже,

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) =$$

$$= SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A)$$

і $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.
b) Нехай A — скінченна непорожня множина з $|A| \geq 2$, $|X \backslash A| > 1$ і $\alpha_A = i_A$. Ланцюг включень

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) = SEnd(X, \alpha_A)$$

доводиться аналогічно тому, як в п. 2) цього доведення. Оскільки множина $X \backslash A$ містить не менше 2 елементів, виберемо в ній довільний елемент a і визначимо перетворення f множини X таким чином:

$$xf = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in A, \\ a, & \text{якщо } x \notin A. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $f \in SEnd(X, \alpha_A) \backslash Aut(X, \alpha_A)$ і, як результат, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.
c) Нехай A — нескінченна множина і $\alpha_A \neq \omega_A$. Розглянемо випадок, коли $\alpha_A = i_A$. Оскільки множина A нескінченна, на відміну від пункту 2), $SEnd(X, \alpha_A) \neq Aut(X, \alpha_A)$. Приклад ендоморфізму $f \in SEnd(X, \alpha_A) \backslash Aut(X, \alpha_A)$ отримуємо при виборі на обмеженні $f|_A$ ін'єкції, яка не є сюр'єкцією. В цьому випадку

$$End(X, \alpha_A) \supset HEnd(X, \alpha_A) \supset LEnd(X, \alpha_A) \supset QEnd(X, \alpha_A) =$$

$$= SEnd(X, \alpha_A) \supset Aut(X, \alpha_A).$$

Таким чином, $Endotype(X, \alpha_A) = \sum_{i=1}^{5} s_i \cdot 2^{i-1} = 23$.

Якщо ж $\alpha_A \neq i_A, \alpha_A \neq \omega_A$, то, міркуючи аналогічно тому, як в п. 5), a), приходимо до $Endotype(X, \alpha_A) = 23$. Теорема доведена.

Таким чином, всі можливі значення ендотипу довільного відношення еквівалентності, знайдені в [14], і отриманий тут результат дають повну класифікацію всіх часткових відношень еквівалентності виду $\alpha_A, A \subseteq X$, за їх ендотипами відносно ендоморфізмів.

Список використаної літератури

1. *Глускин Л. М.* Полугруппа изотонных преобразований // Успехи мат. наук. – 1961.– № 5. – С. 157–162.
2. *Шнеперман Л. Б.* Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. – 1962.– **238**. – С. 21–37.

3. *Айзенштат А. Я.* Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. – 1962.– **3**, № 2. – С. 161–169.
4. *Бондарь Е. А., Жучок Ю. В.* Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов // Фундамент. и прикл. матем. – 2013. – **18**, № 1. – С. 21–34.
5. *Бондарь Е. А., Жучок Ю. В.* Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 6. – С. 743–754.
6. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сборник – 1964.– **65**, № 107 (2). – С. 161–169.
7. *Mashevitzky G., Schein B. M.* Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Proceedings of the American Mathematical Society. – 2003. – **131**, № 6. – P. 1655–1660.
8. *Laradji A., Umar A.* Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // Journal of Algebra. – 2004. – **278**, № 1. – P. 342–359.
9. *Böttcher M., Knauer U.* Endomorphism spectra of graphs // Discr. Math. – 1992. – **109**. – P. 45–57.
10. *Решетников А. В.* Об определениях гомоморфизма гиперграфов // Дискретная математика и ее приложения: Материалы X Междунар. сем. – Москва: МГУ. – 2010. – С. 325–327.
11. *Hou H., Fan X., Luo Y.* Endomorphism types of generalized polygon // Southeast Asian Bulletin of Mathematics. – 2009. – **33**, № 3. – P. 433–441.
12. *Hou H., Fan X., Luo Y.* The endomorphism monoid of $\overline{P_n}$ // European J. Combinatorics. – 2008. – **29**, № 5. – P. 1173–1185.
13. *Wang W., Hou H.* The endomorphism monoid of N-prism // Intern. Math. Forum. – 2011. – **50**. – P. 2461-2471.
14. *Zhuchok Y. V.* Endotypes of equivalence relations // Quasigroups and Related Systems. – 2014. – **22**. – P. 295–300.
15. *Жучок Ю. В., Toичкина Е. А.* Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности // Матем. сб. – 2014. – **205**, № 5. – С. 37–54.
16. *Жучок Ю. В.* Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007.– **3**. – С. 22—26.
17. *Бондарь Е. А.* О регулярности некоторых подполугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности // Прикладная дискретная математика. – 2014. – № 3(25). – С. 5–11.
18. *Дудек В. А.* Алгебры Менгера многоместных функций / В. А. Дудек, В. С. Трохименко. – Ch.: S. n., 2006. – 237 p.

Одержано 10.08.2017

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

1) Стаття повинна містити короткий вступ, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
2) Рукопис повинен бути надрукований за допомогою комп'ютера на аркушах формату А4 (з одного боку). Об'єм статті не повинен перевищувати 15 сторінок.
3) Рукопис подається у двох екземплярах, а також електронною копією у вигляді LaTeX-файлу (див. пункт 4). Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською. Перша сторінка оформляється таким чином:
УДК №
Ініціали, прізвище автора, офіційна назва установи, де працює автор
Назва роботи
Текст анотації англійською мовою.
Текст анотації українською мовою.
Текст статті.
4) Вимоги до набору:
а) програма набору — LaTeX2ε;
б) стильовий файл набору — Uzhgorod-Mathematical-Paper-2017.cls (його можна одержати електронною поштою; звертатись у редколегію журналу за адресою `f-mat@uzhnu.edu.ua`)
в) обов'язковий аргумент команд \label{...} і \cite{...} повинен містити прізвище першого автора статті латиницею (наприклад \label{IvanenkoEqaution1}).
5) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
6) Використана література подається загальним списком (у порядку посилань на джерела в тексті статті). Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. *Холл М.* Теория групп. – М.: Из-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
2. *Іванчук І. І.* Назва // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №2. – С. 274–278.
3. *Петравчук П. П., Іванчук І. І.* Назва // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2016. – Вип. №2 (31). – С. 94–109.
4. *Можаев В. М.* Название. – М., 1981. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ, №8884.
5. *Карпенко С. М.* Назва // Чисельні методи і застосування: Тез. допов. конф. (Київ, 27 серп.–2 вер. 1997 р.). – Київ, 1997. – С. 21–22.

7) Рукопис слід старанно вичитати.
8) Рукописи, оформлені без дотримання зазначених правил, розглядатися редакцією не будуть.

Збірник наукових праць

НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Випуск №2 (31)

2017

Адреса редакційної колегії: 88020, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат математичного факультету УжНУ: редакція збірника наукових праць
«Науковий вісник Ужгородського університету»,
серія «математика і інформатика».
Тел. +380 (312) 642725
E-mail: f-mat@uzhnu.edu.ua