УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).21-27

О. В. Вишенська[1], М. О. Бєлова[2], Л. В. Шевчук[3]

[1] Національний транспортний університет,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
oksana.vyshenska@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3360-8552

[2] Державний торговельно-економічний університет,
доцент кафедри цифрової економіки та системного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
marisha67@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0546-8094

[3] Національний транспортний університет,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат технічних наук
ludmilashevchuk25@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5748-9527

ПРО ІНВАРІАНТНУ МНОЖИНУ ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Чимало еволюційних процесів у різних областях науки (фізика, біологія, економіка тощо) за час свого розвитку зазнають потужної короткочасної дії певних сил. Ця «короткочасність» часом настільки швидкоплинна, що можна вважати її миттєвою. При цьому розвиток процесу між моментами збурень відбувається плавно, а його розвиток під час збурення не має суттєвого значення. Важливим є лише його підсумковий ефект. Математичною моделлю таких еволюційних процесів може слугувати система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

У пропонованій статті розглянуто питання існування і асимптотичної стійкості інтегральної множини лінійного розширення системи диференціальних рівнянь, що зазнають короткочасних збурень у певні моменти часу.

Ключові слова: диференціальні рівняння, імпульсне збурення, асимптотична стійкість, інваріантна множина.

1. Вступ. Динамічні системи з розривними траєкторіями — один із напрямів теорії диференціальних рівнянь, що має застосування у дослідженнях коливальних процесів, які зазнають короткочасних імпульсних збурень. Така система визначається в [1]. Запит на вивчення систем таких рівнянь пов'язаний із розвитком новітньої техніки. Імпульсні обчислювальні системи, системи автоматичного регулювання застосовують у різних за фізичним змістом та функціональним призначенням технічних задачах.

Досліджується система диференціальних рівнянь, що зазнає імпульсного збурення у фіксовані моменти часу [6–8]; застосовані розроблені в [1–5, 9–10] методи відшукання наближеного розв'язку та встановлення умов його асимптотичної стійкості. Отримані результати можуть бути застосовані при розв'язуванні задач фізики і техніки, які потребують дослідження коливальних систем.

Метою роботи є з'ясування умов асимптотичної стійкості інтегральної множини розглянутого в [8] лінійного розширення системи диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

2. Основний результат. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\,(t;\varphi)\,,$$
$$\frac{dx}{dt} = A\,(t;\varphi)\cdot x + f\,(t;\varphi)\,,\quad t\neq\tau_i; \tag{1}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)\cdot x + J_i(\varphi).$$

Тут матричні функції $(t;\varphi)$, $B_i(\varphi)$ неперервні за аргументами t і φ, 2π — періодичні за φ_α, $\alpha = \overline{1,m}$ рівномірно обмежені для $t\in R$ та $i\in Z$; функції $a\,(t;\varphi)$, $f\,(t;\varphi)$ та $J_i(\varphi)$ неперервні для $t\in R$, $\varphi\in T^m(\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m))$.

Згідно доведеної в [6] теореми, якщо функція $a\,(t;\varphi)$ задовольняє умові

$$\|a\,(t;\varphi_1) - a\,(t;\varphi_2)\| \leq l\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|\,, \tag{2}$$

часові моменти τ_i імпульсного збурення такі, що

$$\lim_{T\to\infty}\frac{i\,(t;t+T)}{T} = p, \tag{3}$$

($i\,(t;t+T)$ — кількість точок τ_i на проміжку $[t;t+T]$), і існує функція Гріна $G^t_\tau\,(t_0;\varphi)$ задачі про обмежені на усій осі розв'язки, для якої виконується умова

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\|G^t_\tau\,(t_0;\varphi)\right\|\,d\tau + \sum_{-\infty<\tau_i<+\infty}\left\|G^t_{\tau_i}\,(t_0;\varphi)\right\| \leq K < \infty, \tag{4}$$

для усіх $t\in R$, $\varphi\in T^m$, то система (1) має інтегральну множину

$$T = \left\{(t;\varphi;x) : x = u\,(t;\varphi)\,,\ t\in R,\ \varphi\in T^m\right\}, \tag{5}$$

де

$$u\,(t;\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^t_\tau\,(t;\varphi)\cdot f\,(\tau;\varphi_\tau\,(t;\varphi))\,d\tau + \sum_{-\infty<\tau_i<+\infty} G^t_{\tau_i}\,(t;\varphi)\cdot J_i\,(\varphi_{\tau_i}\,(t;\varphi))\,. \tag{6}$$

($\varphi_\tau\,(t_0;\varphi)$ — загальний розв'язок першого з рівнянь (1)).

Припустимо тепер, що матрицант $\Omega^t_\tau\,(t_0;\varphi)$ лінійної системи рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\frac{dx}{dt} = A\,(t;\varphi_\tau\,(t_0;\varphi))\cdot x,\quad t\neq\tau_i; \tag{7}$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i\,(\varphi_{\tau_i}\,(t_0;\varphi))\cdot x,$$

допускає оцінку

$$\left\|\Omega^t_\tau\,(t_0;\varphi)\right\| \leq K\cdot e^{-\gamma(t-\tau)}, \tag{8}$$

коли $t\geq\tau$ для усіх $t_0\in R$, $\varphi\in T^m$ та при певних додатних K і γ, що не залежать від t_0 і φ.

Тоді, згідно [6], якщо покласти $C(\varphi) = E$, то функція

$$G_\tau^t(t_0;\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t_0;\varphi), & t \ge \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \tag{9}$$

є функцією Гріна системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t;\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t;\varphi)\cdot x, \quad t \ne \tau_i; \tag{10}$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)\cdot x.$$

І інтегральну множину T системи (1) можна подати так:

$$x = u(t;\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_\tau^t(t;\varphi)\cdot f(\tau;\varphi_\tau(t;\varphi))\,d\tau + \sum_{\tau_i<t} \Omega_{\tau_i}^t(t;\varphi)\cdot J_i(\varphi_{\tau_i}(t;\varphi)). \tag{11}$$

Ця множина асимптотично стійка.

Справді. Нехай $x = x(t;t_0;\varphi;x_0) = \Omega_{\tau_0}^t(t_0;\varphi)\cdot x_0$ — загальний розв'язок (7). Оскільки маємо умову (8), то

$$\|x(t;t_0;\varphi;x_0)\| \le K\cdot e^{-\gamma(t-t_0)}\cdot\|x_0\|, \quad t \ge t_0. \tag{12}$$

Тобто $\|x = x(t;t_0;\varphi;x_0)\| \to 0$, коли $t \to \infty$.

Проте, завдяки лінійності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t;\varphi_t(t_0;\varphi))\cdot x + f(t;\varphi_t(t_0;\varphi)), \quad t \ne \tau_i;$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(t_0;\varphi))\cdot x + J_i(\varphi_{\tau_i}(t_0;\varphi)),$$

різниця довільного її розв'язку $x = x(t;t_0;\varphi;x_0)$ і її розв'язку $x = u(t;\varphi(t_0;\varphi))$, що лежить на інтегральній множині T, є розв'язком системи (7). Тобто для цієї різниці справедлива оцінка (12), яка забезпечує експоненційну стійкість множини T.

Таким чином, має місце

Теорема 1. *Нехай система рівнянь* (1) *задовольняє умовам теореми із [6] і, окрім того, матрицант системи* (7) *допускає оцінку* (8)*. Тоді система рівнянь* (1) *має асимптотично стійку інтегральну множину* $T = \{(t;\varphi;x) : x = u(t;\varphi),\ t \in R,\ \varphi \in T^m\}$*. Функція* $u(t;\varphi)$ *визначається згідно виразу* (11) *і допускає оцінку*

$$\sup_{t\in R}\ \max_{\varphi\in T^m}\|u(t;\varphi)\| \le K_0\Big[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in T^m}\|f(t;\varphi)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in T^m}\|J_i(\varphi)\|\Big], \tag{13}$$

в якій $K_0 = \frac{K}{\gamma} + K\cdot\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$.

Слід також зазначити, що за умови існування границі (3) величина $\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена. Справді, із умови (3) випливає існування таких чисел $l_0>0$ і натурального q, що будь-який відрізок часової осі завдовжки l_0 містить щонайбільше q членів послідовності $\{\tau_i\}$. Тому

$$\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \le \frac{q}{1-e^{-\gamma l_0}},$$

тобто, в оцінці (13) за K_0 можна узяти число

$$K_0 = K\cdot\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{q}{1-e^{-\gamma l_0}}\right).$$

Зокрема, якщо моменти імпульсного збурення τ_i такі, що $\tau_{i+1}-\tau_i\ge Q>0$ для усіх $i\in Z$, то за l_0 може слугувати Q, а за q — одиниця. Тоді константою K_0 може бути число

$$K_0 = K\cdot\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{1-e^{-\gamma Q}}\right).$$

З'ясуємо, які умови забезпечать матрицанту $\Omega_\tau^t(t_0;\varphi)$ оцінку (8). Ці умови можемо отримати із твердження, яке є аналогом нерівності Важевського для диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням (теорема 9.1 із [1]).

Теорема 2. *Для довільного розв'язку $x(t;x_0)$, $x(\tau;x_0)=x_0$ лінійної системи з імпульсним збуренням (7) за $t\ge\tau$ виконується нерівність:*

$$\prod_{\tau<\tau_i<t}\lambda_i\cdot e^{\int_\tau^t \lambda(\sigma)d\sigma}\cdot\|x_0\| \le \|x(t;x_0)\| \le \prod_{\tau<\tau_i<t}\Lambda_i\cdot e^{\int_\tau^t \Lambda(\sigma)d\sigma}\cdot\|x_0\|, \tag{14}$$

де $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — відповідно найменше та найбільше власні числа матриці

$$\hat{A}(t;\varphi_t(t_0;\varphi)) = \frac{1}{2}\left(A(t;\varphi_t(t_0;\varphi)) + A^T(t;\varphi_t(t_0;\varphi))\right),$$

A^T — транспонована до $A(t)$ матриця, λ_i^2, Λ_i^2 — відповідно найменше та найбільше із власних чисел матриці

$$\left(E+B_i^T(\varphi_{\tau_i}(t_0;\varphi))\right)\cdot\left(E+B_i(\varphi_{\tau_i}(t_0;\varphi))\right),\quad i=1,2,\ldots$$

Із цієї теореми можемо отримати таке твердження:

Теорема 3. *Нехай найбільше із власних чисел матриці*

$$\hat{A}(t;\varphi) = \frac{1}{2}\left(A(t;\varphi)+A^T(t;\varphi)\right),$$

задовольняє нерівність

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in T^m}\Lambda(t;\varphi)\le\alpha,$$

а найбільше із власних чисел матриці $\left(E+B_i^T(\varphi)\right)\cdot(E+B_i(\varphi))$ нерівність

$$\sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in T^m}\Lambda_i^2(\varphi)\le\beta^2.$$

Якщо

$$\alpha+p\cdot\ln\beta<0, \tag{15}$$

то матрицант системи рівнянь (7) допускає оцінку (8).

Справді, за виконання нерівності (15) будь-який розв'язок рівнянь (7) згідно попередньої теореми допускає оцінку

$$\|x\,(t;x_0)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\|\,, \quad t \geq t_0,$$

де за γ можемо узяти довільне додатне число, що задовольняє нерівність

$$0 < \gamma < |\alpha + p \cdot \ln \beta|\,.$$

Отже, й матрицант $\Omega_\tau^t\,(t_0;\tau)$ рівнянь (7) можна оцінити таким же чином, тобто нерівністю (8).

Аналогічно можемо переконатися, що має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай матриці* $(t;\varphi)$ *і* ${}_V\,(\varphi)$ *такі, що*

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in T^m} \max_{\|x\|=1} \langle A(t;\varphi)x;x\rangle \leq \alpha,$$

$$\sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in T^m} \max_{\|x\|=1} \left\langle \left(E + B_i^T(\varphi)\right)x;\left(E + B_i(\varphi)\right)x\right\rangle \leq \beta^2,$$

а число p *визначаєтьса згідно* (3)*. Якщо* $\alpha + p \cdot \ln\beta < 0$*, то матрицант системи рівнянь* (7) *допускає оцінку* (8)*.*

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Отримані результати можуть зацікавити спеціалістів з прикладної математики, інженерів, що працюють в області обчислювальної техніки, автоматичного регулювання, спеціалістів з диференціальних рівнянь, а також і викладачів вищих навчальних закладів, адже елементи теорії диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями нині входять до програми спеціальних курсів для студентів, які спеціалізуються з диференціальних рівнянь, теоретичної та прикладної механіки.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

О. В. Вишенська: концептуалізація, формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт. М. О. Бєлова: формальний аналіз, візуалізація, написання — рецензування та редагування. Л. В. Шевчук: курація даних, формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1987). *Differential Equations with Impulsive Perturbation.* Kyiv: Vyshcha Shkola [in Ukrainian].
2. Samoilenko, A. M., & Stanzhytskyi, O. M.(2009). *Qualitative and Asymptotic Analysis of Differential Equations with Random Perturbations.* Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
3. Parasiuk, I. O., & Perestyuk, M. O. (2013). *Local Analysis of Nonlinear Differential Equations.* Kamianets-Podilskyi: Aksioma [in Ukrainian].
4. Perestyuk, M. O., & Korol, Yu. Yu. (2016). Existence of an Invariant Torus of a Degenerate Linear System with Impulsive Action. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 28(1), 90–97. `https://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvuumat_2016_1_12` [in Ukrainian].
5. Perestyuk, M. O., & Feketa, P. V. (2011). On Invariant Tori of Extensions of Dynamical Systems. *International Scientific Conference "Differential Equations and Their Applications": Abstracts.* Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv [in Ukrainian].
6. Vyshenska, O. V. (2022). On the Existence of an Invariant Torus for a Class of Discontinuous Dynamical Systems. *VNTU. Series "Technical Sciences"Scientific Journal,* 1(51), 48–54. `https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-1-51-048-054` [i n Ukrainian].
7. Bilobrytska, O. I., Vyshenska, O. V., & Meish, Yu. A. (2022). On the Invariant Set of One Dynamical System. *Modern Technologies,* 1(13), 29–36 [in Ukrainian].
8. Bilobrytska, O. I., Vyshenska, O. V., & Meish, Yu. A. (2022). Linear Extensions of Differential Equations with Impulsive Perturbation. *VNTU. Series "Technical Sciences". Scientific Journal,* 2(52), 33–39. `https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-3-53-075-081` [in Ukrainian].
9. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., & Samoilenko, A. M. (2011). Differential Equations with Impulse Effects: *Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. De Gruyter.*
10. Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive Differential Equations.* World Scientific. Singapore. New Jersey. London. Hong Kong.

Vyshenska O. V., Belova M. A., Shevchuk L. V. On the invariant set of a linear extension of differential equations with discontinuous trajectories.

Many evolutionary processes in various fields of science (physics, biology, economics, etc.) experience powerful, short-term influences from certain forces during their development. This 'short-term' nature is sometimes so fleeting that it can be considered instantaneous. In this case, the process develops smoothly between the moments of perturbation, and its evolution during the perturbation is not of significant importance. Only the final effect is crucial. A mathematical model for such evolutionary processes can be a system of differential equations with impulse perturbation.

The proposed article considers the existence and asymptotic stability of the integral set of a linear extension of a system of differential equations that undergo short-term perturbations at specific moments in time.

Keywords: differential equations, impulsive perturbation, asymptotic stability, invariant set.

Отримано: 08.09.2025 Прийнято: 25.11.2025 Опубліковано: 29.01.2026