УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).47-51

Я. І. Єлейко[1], А. Ю. Дребот[2]

[1] ЛНУ імені Івана Франка,
Професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2200-8447

[2] ЛНУ імені Івана Франка,
Аспірант кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь
Andrii.Drebot.AMTS@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-2764-3334

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ЕРГОДИЧНИХ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Дана стаття зосереджена на дослідженні лінійної залежності ергодичних ланцюгів Маркова. Розглядається часовий ряд, який може бути розглянутий як ланцюг Маркова. Досліджується методологія зображення цього ланцюга як суміш, лінійну комбінацію, довільних ергодичних Марковських ланцюгів. Також, розглянуто приклад знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації на реальних даних.

Ключові слова: ланцюги маркова, ергодична теорема, суміш ланцюгів маркова, граничний розподіл.

1. Вступ. Марковські ланцюги це інструмент для опису, аналізу та передбачення часових рядів. Дуже часто дані генеруються складними процесами, які бувають прихованими. Тому класичних методів статистичного аналізу може бути не достатньо для опису таких складних часових рядів.

Це стосується не тільки часових рядів, але і інших типів даних. У машинному навчанні вже існують підходи, що базуються на сумішах та ансамблях алгоритмів.

Використання сумішей моделей для аналізу числових рядів не є новою ідеєю і вже є різноманітні напрацювання у цьому напрямку. Також, вже існують дослідження сумішей прихованих Марковських моделей. Ці дослідження фокусуються на різноманітних аспектах суміші Марковських процесів. Деякі напрацювання сфокусовані на застосуванні варіаційних Байєсівських методів для розплітання суміші [1], [2]. Інші, досліджують асимптотичну поведінку сумішей [3]. Також, існують практичні застосування ідеї сумішей Марковських процесів [4], [5].

На відміну від існуючих досліджень, дане стаття використовує підхід до дослідження сумішей Марковських процесів, який базується на застосуванні Ергодичної теореми.

2. Основний результат. Отже, розглянемо Марковський стохастичний процес Y. Реалізації станів цього процесу є відомими. Також, припустимо, що стохастичний процес є ергодичним. Ми можемо зобразити процес як $S_1, \ldots, S_T$, де S_t, $t = 1, \ldots, T$, $T \to \infty$ це реалізація стану в момент часу t.

У даній статті зроблено припущення, що процес Y можна зобразити як суміш деяких незалежних Марковських ергодичних процесів $Y_1, \ldots, Y_K$. Для кожного процесу Y_k є доступними стохастичні матриці переходу P_K. Процес Y_k

не обов'язково повністю точно описує послідовність $S_1, \ldots, S_T$ — ймовірності переходу у стохастичній матриці P_K можуть бути довільними. Маючи ці умови, можна сформулювати теорему яка описує метод зображення Марковського ланцюга як лінійну комбінацію скінченної множини довільних незалежних Марковських ланцюгів.

Теорема 1. *Розглянемо множину деяких Марковських ергодичних процесів $Y_1, \ldots, Y_K$. Також, розглянемо Марковський ергодичний процес Y з кількістю станів N, реалізація станів якого є відомими. Тоді, можна зобразити процес Y як лінійну комбінацію незалежних процесів $Y_1, \ldots, Y_K$:*

$$\sum_{k=1}^{K} w_k Y_k = Y,$$

де $\sum_{k=1}^{K} w_k = 1$. Коефіцієнти лінійної комбінації w_k є розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot W = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix},$$

де Π це матриця розмірністю $N \times K$. Стовпець k матриці Π є граничним розподілом процесу Y_k; W — вектор невідомих коефіцієнтів розмірністю $K \times 1$; $\hat{\Pi}$ — вектор розмірності $N \times 1$, що є граничним розподілом процесу Y.

Доведення. Використаємо ергодичну теорему для Марковських ланцюгів. Згідно з результатами описаними у [6] та [7], отримаємо даний результат:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} P^h(i, r) \xrightarrow{\text{м.н.}} \pi_r, \quad \forall i, r,$$

де P — стохастична матриця марковського процесу, π — граничний розподіл. Для оцінювання елементів матриці P скористаємося методом максимальної правдоподібності. Тобто, розв'язавши задачу оптимізації:

$$l(p) = \log(L(p)) = \log(\Pr\{S_1, \ldots, S_T\}) = \log \Pr\{S_1 = s_1\} + \sum_{i,j} n_{ij} \log(p_{ij}),$$

$$l(p) \underset{p_{ij}}{\longrightarrow} \max,$$

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Тобто, застосувавши результат ергодичної теореми для кожного з K процесів, та для процесу Y після знаходження матриці переходу методом максимальної правдоподібності. Це і дасть нам систему лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot W = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теорему доведено.

Виходячи з формулювання теореми, необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь з обмеженнями на змінні (коефіцієнти W повинні бути між 0 і 1). Також, загалом, $N+1 \neq K$ і розв'язок може бути наближеним.

Розглянемо випадок коли $K = 3$. Коефіцієнти w_k, $k = 1, 2, 3$ будуть знайдені за допомогою задачі оптимізації:

$$\min \frac{1}{2} \cdot \left\| \Pi \cdot W - \hat{\Pi} \right\|^2, \quad 0 \leq w_k \leq 1; \; k = 1, 2, 3.$$

Це можна зробити за допомогою модифікованого методу внутрішньої точки, що представлено у [8].

Застосуємо методологію до реальних даних. Для прикладу ми можемо використати дані з ресурсу Kaggle [9]. Ці дані містять інформацію про ціни акцій на початок і кінець дня для різноманітних компаній. Приклад даних можна побачити у таблиці 1.

Таблиця 1

Дата	Ціна акції на момент відкриття торгів	Ціна акції на момент закриття торгів
2004-04-07	20.0499	20.05
2004-04-08	20.5	20.43
2004-04-12	20.45	19.52
2004-04-13	19.51	19.52

Як приклад застосування теореми буде розглянуто історію акцій кількох компаній: Apple, Netflix та General Motors. Спочатку дані буде підготовлено для їх моделювання як часових рядів. Потім, результати теореми буде застосовано до даних.

Перед тим як застосувати даний метод потрібно підготувати дані. Частота оригінальних даних – один день і це впливає на довжину часових рядів, беручи до уваги, що дані містять інформацію за багато років. Тому, дані було підготовлено наступним чином:

1) Взято початкову і кінцеву ціну кожного тижня.
2) Взято відсоток зміни ціни у співвідношенні до початкової ціни: (кінцева ціна – початкова ціна) / початкова ціна.
3) Якщо зміна в межах $\pm 1\%$ — це стан стагнації і позначено як стан 0; якщо зміна більше 1% то це зростання і позначено як стан 1; якщо зміна менше -1% то це спад і позначено як стан 2.

Відповідно, ми можемо змоделювати часові ряди як ланцюг Маркова з 3 станами.

Як приклад $P_k, k = 1, 2, 3$, розглянемо:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.45 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

Граничні розподіли для кожної з цих стохастичних матриць:

$$\pi_1 = (0.33, 0.39, 0.28); \quad \pi_2 = (0.14, 0.42, 0.44); \quad \pi_3 = (0.53, 0.21, 0.26).$$

Якщо застосувати метод до даних акцій Apple буде отримано граничний розподіл: $\hat{\pi} = (0.17, 0.44, 0.39)$ та коефіцієнти $w_1 = 0.12$, $w_2 = 0.82$, $w_3 = 0.05$. Для акцій Netflix: $\hat{\pi} = (0.12, 0.47, 0.41)$ та оптимальні коефіцієнти $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.91$, $w_3 = 0.05$. І для акцій General Motors: $\hat{\pi} = (0.24, 0.38, 0.38)$; $w_1 = 0.21$, $w_2 = 0.65$, $w_3 = 0.14$.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У підсумку, у цьому дослідженні було запропоновано методологію представлення ланцюга Маркова як лінійну комбінацію довільних ергодичних ланцюгів. Ці результати мають практичне застосування, а також можуть допомогти в майбутніх дослідженнях подібності ланцюгів Маркова.

В подальшому дослідженні можна послабити умови ергодичності ланцюгів Маркова і дослідити лінійну залежність.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Оригінальні дані, представлені в дослідженні, відкрито доступні для академічних досліджень у репозиторії Kaggle за адресою:
`https://doi.org/10.34740/kaggle/dsv/1054465` під ліцензією CC0 (Creative Commons Zero)

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Я. І. Єлейко: концептуалізація, постановка задачі, перевірка результатів, А. Ю. Дребот: формальний аналіз, методологія, написання, курація даних.

Список використаної літератури

1. Miles, C. E., & Webber, R. J. (2024). *Dynamical mixture modeling with fast, automatic determination of Markov.*
2. Bao, J., Zhu, M., Li, Y., & Wang, S. (2024). *Representation and de-interleaving of mixtures of hidden Markov processes.*
3. Fitzpatrick, M., & Stewart, M. I. (2021). Asymptotics for Markov chain mixture detection. *Econometrics & Statistics,* 22, 56–66.
4. Du Roy de Chaumaray, M., Marbac, M., & Navarro, F. (2020). Mixture of hidden Markov models for accelerometer data. *The Annals of Applied Statistics,* 14(4), 1834–1855.
5. Vidotto, D., Vermunt, J. K., & Van Deun, K. (2020). Multiple imputation of longitudinal categorical data through Bayesian mixture latent Markov models. *Journal of Applied Statistics,* 47(10), 1720–1738.
6. Norris, J. R. (1998). *Markov Chains.* Cambridge University Press, pp. 52–57.
7. Walters, P. (2000). *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer, pp. 53–62.
8. Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J., & Zhu, C. (1995). A subspace, interior, and conjugate gradient method for large-scale bound-constrained minimization problems. *Mathematical Programming,* 73(1), 247–269. https://doi.org/10.1137/S1064827595289108
9. Onyshchak, O. (2020). Stock market dataset, version 2. https://doi.org/10.34740/kaggle/dsv/1054465

Yeleyko Ya. I., Drebot A. Y. Finding the coefficients of a linear combination of ergodic Markov chains.

This article focuses on the study of linear dependence of ergodic Markov chains. A time series, which can be represented as a Markov chain, is considered. The methodology of representing this chain as a mixture, a linear combination, of arbitrary ergodic Markov chains is investigated. An example of finding the coefficients of a linear combination based on real data is also presented.

Keywords: Markov chains, ergodic theorem, mixture of Markov chains, limiting distribution.

Отримано: 10.10.2025 Прийнято: 15.11.2025 Опубліковано: 29.01.2026