УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).96-102

О. А. Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцентка кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oksana.yarova@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6284-1193

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ СУМІШІ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ВІДНОВЛЕННЯ

Дана стаття присвячена дослідженню розв'язків багатовимірних рівнянь відновлення. Розглядаються суміші рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу. Рівняння відновлення представлені в матричній формі. Метою статті є асимптотична поведінка розв'язку. Основний результат полягає в доведенні теореми про граничне представлення процесу відновлення в нелінійній апроксимації.

Ключові слова: рівняння відновлення, функція відновлення, суміш, процес з незалежними приростами, слабка збіжність.

1. Вступ. Багатовимірні рівняння відновлення посідають важливе місце в сучасній теорії стохастичних процесів, оскільки вони описують широкий спектр систем із випадковими моментами оновлення. Такі моделі природно виникають у задачах теорії черг, надійності, випадкової еволюції та різних форм стохастичної динаміки. Питання граничної поведінки багатовимірних процесів відновлення досліджувалися у низці робіт, зокрема у працях, присвячених матричним рівнянням відновлення та їх асимптотичним властивостям [1, 3].

Особливий інтерес становлять моделі з нелінійним нормуванням часу, яке дозволяє описати процеси з нерівномірною швидкістю еволюції та суттєво розширює спектр можливих асимптотичних режимів.

Важливим напрямом є також аналіз сумішей або комбінацій рівнянь відновлення, що природно описуються матричною формою. Такі моделі виникають у вивченні стохастичних систем у злитому фазовому просторі [4] та при дослідженні випадкових матричних еволюцій [3].

Граничні теореми та асимптотичні властивості подібних моделей розглядаються також у сучасних роботах з теорії відновлення та споріднених процесів [7].

У цьому контексті актуальною є проблема встановлення асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу та отримання граничних представлень відповідних процесів.

Метою статті є дослідження граничної поведінки розв'язку суміші багатовимірних рівнянь відновлення в нелінійному нормуванні.

2. Основний результат. Розглянемо два матричні рівняння відновлення [1]:

$$X_1^{\varepsilon}(t) = A_1^{\varepsilon}(t) + F_1^{\varepsilon} * X_1^{\varepsilon}(t),$$

та

$$X_2^{\varepsilon}(t) = A_2^{\varepsilon}(t) + F_2^{\varepsilon} * X_2^{\varepsilon}(t),$$

де $X_i^\varepsilon(t)$ — сім'ї шуканих матричнозначних функцій, $A_i^\varepsilon(t)$ — сім'ї заданих невід'ємних матричнозначних функцій, $F_i^\varepsilon(dt)$ — сім'ї матричнозначних скінченних невід'ємних мір на $[0;\infty)$, $i=1,2$.

$F_i^\varepsilon(dt)$ задовільняють наступні умови:

1. Елементи матриць залежні від малого параметра та є скінченними невід'ємними мірами;
2. Сім'ї мір $F_i^\varepsilon(dt)$ є асимптотично відокремленими від нуля і ріномірно інтегровними на $[0;\infty)$;
3. Матриці $F_i^\varepsilon(dt)$ — нерозкладні по кожному ε, а матриці повних мас мір $F_i^\varepsilon \equiv F_i^\varepsilon[0;\infty)$ — субстохастичні;
4. Матричнозначні міри $F_i^\varepsilon(dt)$ слабо збігається до матричнозначної міри $F(dt)$;
5. Гранична матриця повних мас мір $F \equiv F[0;\infty)$ є стохастичною і розкладною блочно-діагонального вигляду.

Функції $F_1^\varepsilon(dt)$ та $F_2^\varepsilon(dt)$ можуть бути представлені наступним чином

$$F_1^\varepsilon = F_1 + g_1(\varepsilon)B_1 + g_2(\varepsilon)B_1^2 + ... + g_n(\varepsilon)B_1^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

$$F_2^\varepsilon = F_2 + g_1(\varepsilon)B_2 + g_2(\varepsilon)B_2^2 + ... + g_n(\varepsilon)B_2^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де B_1, B_2, ..., B_n — матриці, $g_1(\varepsilon)\to 0, ..., g_n(\varepsilon)\to 0$, при $\varepsilon\to 0$.

Введемо означення рівномірної безпосередньої інтегровності за Ріманом для сім'ї функцій.

Означення 1. *Сім'я функцій $A^\varepsilon(t)$ називається рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0;\infty)$, якщо виконуються наступні умови*

1. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sup\limits_{k\le t\le k+1} |A^\varepsilon(t)|$ збігається рівномірно відносно ε;

2. $\sup\limits_{\varepsilon}(h\cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty}[\sup\limits_{kh\le t\le (k+1)h} |A^\varepsilon(t)| - \inf\limits_{kh\le t\le (k+1)h} |A^\varepsilon(t)|]) \underset{h\to 0}{\to} 0.$

Нехай $X_1^\varepsilon(t)$ та $X_2^\varepsilon(t)$ — сім'ї марковських процесів з неперервним часом та скінченною кількістю станів $1,2,...,n$, при $\varepsilon\to 0$.

При чому,

$$X_1^\varepsilon(t)\to X(t),$$

та

$$X_2^\varepsilon(t)\to X(t).$$

Нехай $\xi_i^\varepsilon(t)$ — процес з незалежними приростами, $t\ge 0$, $\xi_i^\varepsilon(t) > 0$, $i = 1,2,...,n$.

Розглянемо наступний процес

$$\zeta^\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi_{i(1)}^\varepsilon(t), \quad \text{при} \quad t<\tau, \quad X^\varepsilon(0)=i; \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t-\tau), \quad \text{при} \quad \tau\le t<\tau_1, \quad X^\varepsilon(\tau)=j; \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t-\tau) + \xi_{s(3)}^\varepsilon(t-\tau_1), \quad \text{при} \quad \tau_1\le t<\tau_2, \quad X^\varepsilon(\tau_1)=s. \\ .... \end{cases}$$

Для даного процесу багатовимірне рівняння відновлення має наступний вигляд

$$E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(t)}) = E_i(e^{-\lambda\xi_i^\varepsilon(t)}) \cdot P\{\tau < t | X^\varepsilon(0) = i\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}))p_{ij}(du) \cdot E_j(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(t-u)}).$$

Та виконуються наступні умови

1. $0 \le E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})p_{ij}^\varepsilon(du) < \infty$;
2. $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})p_{ij}^\varepsilon(du)$ — нерозкладна матриця;
3. Має місце слабка збіжність $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})p_{ij}^\varepsilon(du) \to E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})p_{ij}(du)$;
4. $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})p_{ij}(du)$ — блочно розкладна матриця.

Позначимо

$$H_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = E_i\left(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) \cdot p_{ij}^\varepsilon(dt).$$

Теорема 1. *Нехай сім'я функцій $[A_{ij}^\varepsilon(t), i, j \in E]$ — рівномірно безпосередньо інтегрована за Ріманом на $[0; \infty)$ та існує границя*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty A_{ij}^\varepsilon(t)dt \equiv D_{ij}.$$

Якщо кожна з матриць $F^\varepsilon(dt)$ вздовж діагоналі матриці $F(dt)$ негратчаста, то існують ненульова матриця C розміру $r \times r$ та нормуючий множник $g(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$ такі, що при $i \in E_s$, $j \in E_k$,

$$p_1 \cdot X_{ij(1)}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{q_{sk}(t)}{\pi_K}[\overrightarrow{1}^{(s)} \otimes \overrightarrow{p}^{(k)} D^k]_{ij},$$

де

$$q_{sk}(t) = [e^{tC}]_{sk}, \pi_k = \sum_{i,j\in F_k} p_i^{(k)} \cdot \int_0^\infty tF_{ij}(dt),$$
$$D^k = [D_{ij}, i \in E_k, j \in E], p_1 + p_2 = 1.$$

Доведення. Розв'язок рівняння відновлення задається згорткою матриці відновлення

$$X_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \sum_{m=1}^{d} H_{im}^\varepsilon \cdot A_{mj}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Розглянемо праву частину виразу

$$X_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \sum_{m=1}^{d} \int_0^T H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z) + \sum_{m=1}^{d} \int_T^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z).$$

Оцінимо кожен з доданків.

$$\sup_\varepsilon \int_0^T H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z) \le \sup_\varepsilon \sum_{n\ge[T]} \int_n^{n+1} H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) A_{mj}^\varepsilon(z) \le$$

$$\leq [A+B]\cdot \sum_{n\geq[T]} \sup_{\varepsilon} \sup_{n\leq t\leq n+1} A^{\varepsilon}_{mj}(t) \underset{T\to\infty}{\to} 0.$$

Нехай

$$A^{\varepsilon}(t)\in[A^{\varepsilon-}(t);A^{\varepsilon+}(t)],$$

де

$$A^{\varepsilon-}(t)=\inf_{nh\leq y\leq(n+1)h} A^{\varepsilon}(y),$$

$$A^{\varepsilon+}(t)=\sup_{nh\leq y\leq(n+1)h} A^{\varepsilon}(y),$$

при $nh\leq t\leq(n+1)h$ для деякого фіксованого додатного значення h.

Тоді

$$\sum_{1\leq n\leq[T/h]} \int\limits_{(n-1)h}^{nh} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-dz\right) A^{\varepsilon-}_{mj}(kh) \leq \int\limits_{0}^{t} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-dz\right) A^{\varepsilon}_{mj}(z) \leq$$

$$\leq \sum_{1\leq n\leq[T/h]} \int\limits_{(n-1)h}^{nh} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-dz\right) A^{\varepsilon+}_{mj}(kh).$$

Оцінимо правий вираз нерівності

$$\sum_{1\leq n\leq[T/h]} \int\limits_{(n-1)h}^{nh} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-dz\right) A^{\varepsilon+}_{mj}(kh) =$$

$$= \sum_{1\leq n\leq[T/h]} \left[H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-(n-1)h\right) - H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-nh\right)\right] A^{\varepsilon+}_{mj}((n-1)h) =$$

$$= \sum_{1\leq n\leq[T/h]} \left[H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-(n-1)h\right) - H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-nh\right) - hK_{im}(t)\right] A^{\varepsilon+}_{mj}((n-1)h) +$$

$$+ \sum_{1\leq n\leq[T/h]} hK_{im}(t) A^{\varepsilon+}_{mj}((n-1)h),$$

де

$$K_{im}(t)=q_{sk}(t)\frac{p^{(k)}_m}{\sum\limits_{l,n\in E_k} p^{(k)}_l a_{\ln}}.$$

Таким чином

$$H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-(n-1)h\right) - H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-nh\right) - hK_{im}(t) \xrightarrow[g(\varepsilon)\to 0]{} 0.$$

Окрім цього,

$$\sum_{1\leq n\leq[T/h]} hK_{im}(t) A^{\varepsilon+}_{mj}((n-1)h) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} hK_{im}(t) A^{\varepsilon+}_{mj}(kh).$$

Аналогічно оцінюємо лівий вираз нерівності

$$\sum_{1\le n\le [T/h]} hK_{im}(t)A^{\varepsilon-}_{mj}((n-1)h) \xrightarrow[T\to\infty]{} \sum_{k=0}^{\infty} hK_{im}(t)A^{\varepsilon-}_{mj}(kh).$$

Тоді

$$0 \le \sum_{k=0}^{\infty} hA^{\varepsilon+}_{mj}(kh) - \int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}_{mj}(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\left(hA^{\varepsilon+}_{mj}(kh) - \int\limits_{kh}^{(k+1)h} A^{\varepsilon}_{mj}(t)dt \right) \le$$

$$\le h\sum_{k=0}^{\infty}\left(A^{\varepsilon+}_{mj}(kh) - A^{\varepsilon-}_{mj}(kh)\right) < h.$$

Аналогічним чином

$$0 \le \int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}_{mj}(t)dt - \sum_{k=0}^{\infty} hA^{\varepsilon-}_{mj}(kh) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int\limits_{kh}^{(k+1)h} A^{\varepsilon}_{mj}(t)dt - hA^{\varepsilon-}_{mj}(kh) \right) \le$$

$$\le h\sum_{k=0}^{\infty}\left(A^{\varepsilon+}_{mj}(kh) - A^{\varepsilon-}_{mj}(kh)\right) < h.$$

Тоді

$$K_{im}(t)\left(\int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}_{mj}(z)dz - h\right) \le \int\limits_0^{T} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A^{\varepsilon}_{mj}(z)dz \le$$

$$\le K_{im}(t)\left(\int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}_{mj}(z)dz + h\right).$$

В результаті отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} H^{\varepsilon}_{im}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A^{\varepsilon}_{mj}(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} K_{im}(t)\cdot D_{mj},$$

де $D_{mj} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}_{mj}(z)dz$.

Таким чином

$$X^{\varepsilon}_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} q_{sk}(t)\cdot \sum_{m\in E_k} \frac{p^{(k)}_m}{p^{(k)}_i a_{ij}} D_{mj} = \frac{q_{sk}(t)}{\pi_k}[\overrightarrow{1}^{(s)} \otimes \overrightarrow{p}^{(k)} D^k]_{ij}.$$

Оскільки

$$X^{\varepsilon}_{ij(1)}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to X^{\varepsilon}_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right),$$

та
$$X_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to X_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right),$$
то
$$p_1 \cdot X_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \to X_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

В результаті
$$p_1 \cdot X_{ij(1)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} q_{sk}(t) \cdot \sum_{m\in E_k} \frac{p_m^{(k)}}{p_i^{(k)} a_{ij}} D_{mj} =$$
$$= \frac{q_{sk}(t)}{\pi_k}[\overrightarrow{1}^{(s)} \otimes \overrightarrow{p}^{(k)} D^k]_{ij}.$$

Теорему доведено.

В результаті отримано асимптотику розв'язку суміші матричних рівнянь відновлення з нелінійним множником нормування часу.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті досліджено асимптотичну поведінку розв'язків багатовимірних матричних рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу та розглянуто суміші рівнянь відновлення, що описують динаміку складних стохастичних систем. Отримано граничне представлення процесу відновлення в умовах нелінійної часової апроксимації, що узагальнює відомі результати для класичних рівнянь відновлення та розширює можливості їх застосування у багатовимірних моделях.

Запропонований підхід дає змогу аналізувати широкий спектр стохастичних систем, у яких поведінка компонент або їх комбінацій описується матричними рівняннями з нелінійним масштабуванням часу.

Отримані результати є важливим кроком до глибшого розуміння структури багатовимірних процесів відновлення та їх довгострокових режимів.

Перспективи подальших досліджень можуть охоплювати кілька напрямів. По-перше, цікавим є розширення отриманих результатів на випадок випадкових нормувальних множників та стохастично залежних компонент суміші. По-друге, доцільно розглянути рівняння відновлення з більш загальними нелінійними перетвореннями часу, зокрема з випадковими або імпульсними нелінійностями. По-третє, важливим є застосування отриманих граничних представлень до конкретних моделей випадкової еволюції, злитого фазового простору та стохастичних систем марковського й напівмарковського типу. Окремий інтерес становить також дослідження швидкості збіжності та уточнених асимптотичних формул.

Таким чином, результати роботи відкривають можливість подальшого розвитку асимптотичних методів у теорії відновлення та створюють основу для аналізу ширшого класу багатовимірних стохастичних систем із нелінійною часовою структурою.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи вони не використовувались технології штучного інтелекту.

Список використаної літератури

1. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2022). Limit theorem for multidimensional renewal equation. *Cybernetics and System Analysis,* 58(1), 144–147. https://doi.org/10.1007/s10559-022-00443-4
2. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2021). The renewal equation in nonlinear approximation. *Matematychni Studii,* 56(1), 103–106. https://doi.org/10.30970/ms.56.1.103-106
3. Yeleyko, Ya. I., & Nishchenko, I. I. (1993). A limit theorem for a matrix-valued evolution. *Visnyk of Lviv University, Series Mechanics and Mathematics,* 53, 102–107.
4. Koroliuk, V. S., & Limnios, N. (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space.* Singapore: World Scientific Publishing Company.
5. Feller, W. (1961). A simple proof for renewal theorems. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* (14), 285–293.
6. Nishchenko, I. I. (2001). On the asymptotic representation of the normalizing factor for a random matrix-valued evolution. *Theory of Probability and Mathematical Statistics,* 64, 129–135.
7. Iksanov, A. (2016). *Renewal Theory for Perturbed Random Walks and Similar Processes.* Birkhäuser.

Yarova O. A. Asymptotics of the solution of a mixture of multidimensional renewal equations.

This article is devoted to the study of solutions to multidimensional renewal equations. Mixtures of renewal equations with nonlinear time scaling are considered. The renewal equations are presented in matrix form. The aim of the article is to investigate the asymptotic behavior of the solution. The main result consists in proving a theorem on the limiting representation of the renewal process under nonlinear approximation.

Keywords: renewal equation, renewal function, mixture, process with independent increments, weak convergence.

Отримано: 12.11.2025 Прийнято: 30.11.2025 Опубліковано: 29.01.2026