УДК 519.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).52-63

В. В. Маринець[1], О. Ю. Питьовка[2], О. І. Когутич[3]

[1] ДВНЗ Ужгородський національний університет,
професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2455-2833

[2] Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
O.Pitovka@mail.msu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-0127-5032

[3] доктор філософії
oksana.kohutych@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3094-2467

МОДИФІКАЦІЯ ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, що описує розподіл вологи в пористих середовищах. Отримано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та одержано апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку розглядуваної крайової задачі.

Ключові слова: модифікація двостороннього методу, функції порівняння, єдиність розв'язку, диференціальні рівняння в частинних похідних, наближений розв'язок.

1. Вступ. Математичні моделі, що описують такі складні фізичні процеси, як перенесення вологи в грунтах, фільтрацію рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачу тепла в гетерогенному середовищі та інші, можна описати за допомогою скалярного рівняння вигляду [1, 2]

$$\begin{gathered} m(t,x)D^{(1.2)}u(t,x)+\alpha(t,x)D^{(1.1)}u(t,x)+d(t,x)D^{(0.1)}u(t,x)+ \\ +\eta(t,x)D^{(0.2)}u(t,x)+a(t,x)D^{(1.0)}u(t,x)+b(t,x)u(t,x)=g(t,x), \end{gathered} \tag{1}$$

де коефіцієнти диференціального рівняння в частинних похідних (ДРЧП) є неперервними функціями у заданій області $D \in \mathbb{R}^2$. Крайові задачі у випадку рівняння (1) при різних вихідних даних розглядались у багатьох працях, зокрема в [2]— [4].

У монографії [5] досліджується крайова задача у випадку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered} D^{(2.1)}U(x,y)=F(x,y,U(x,y),D^{(1.0)}U(x,y),D^{(0.1)}U(x,y), \\ D^{(1.1)}U(x,y),D^{(2.0)}U(x,y)):=F[U(x,y)], \end{gathered} \tag{2}$$

із крайовими умовами

$$U(x,0) = T(x), \quad x \in [0,a],$$

$$D^{(1.0)}U(a,y) = \Psi(y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{x_0}^{a} U(\xi,y)d\xi = \Omega(y), \quad y \in [0,b], \tag{3}$$

$$0 \le x_0 \le x < a,$$

де

$$D^kU : D_0 \to D_k \subset \mathbb{R}^n, \quad F : B \to \mathbb{R}^n, \quad B = D_0 \times \prod_{k_1,k_2} D_{(k_1,k_2)} \subset \mathbb{R}^{5n+2},$$

$$D^kU(x,y) := (D^kU_i(x,y)), \quad T(x) := (\tau_i(x)), \quad \Psi(y) := (\psi_i(y)),$$

$$\Omega(y) := (\omega_i(y)), F[U(x,y)] := (F_i[U(x,y)]), \quad i = 1,n\text{— вектор-функції.}$$

Для $T(x) \in C^2[0,a]$, $\Psi(y) = C^1[a,b]$, $\Omega(y) \in C[0,b]$, виконуються умови узгодженості

$$T'(a) = \Psi(0), \tag{4}$$

а $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$.

Розв'язок крайової задачі (2)–(4) належить простору вектор-функцій $C_1^{(2.1)}(\overline{D}_0) := C^{(2.1)}(D_0) \cap C^{(1.1)}(\overline{D}_0)$ (регулярний розв'язок).

У праці [6] розглядається крайова задача з нелокальною крайовою умовою у випадку систем квазілінійних рівнянь в частинних похідних третього порядку, для якої будується та досліджується одна модифікація двостороннього методу прискореної збіжності наближеного її розв'язання. Такий підхід дозволяє значно покращити достатні умови існування та єдиності розв'язку задач, що досліджувалися раніше.

2. Основний результат. У даній праці продовжуються дослідження приведені в [5, 7] для нового класу крайових задач і будуються модифікації двостороннього методу, які забезпечують значно кращі результати, у порівнянні з раніше відомими.

Розглянемо крайову задачу: у просторі функцій $C^*(\overline{D}) := C^{(1.2)}(\overline{D}) \cap C^{(1.1)}(\overline{D}^*)$ $\cap C(\overline{D}),\ D = \{(t,x)\,|t \in (0,b),\ x \in (0,a)\},\ \overline{D}^* = \{(t,x)\,|t \in (0,b),\ x \in (0,a]\}$ знайти розв'язок крайової задачі

$$L_3u(t,x) = f(t,x,u(t,x),D^{(1.0)}u(t,x),D^{(0.1)}u(t,x)) := f[u(t,x)], \tag{5}$$

де L_3 — диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом

$$l_3[u(t,x)] := D^{(1.2)}u(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.2)}u(t,x) + a_2(t,x)D^{(1.1)}u(t,x),$$

та крайовими умовами

$$D^{(1.1)}u(t,a) + m_1(t)D^{(0.1)}u(t,a) = \varphi_1(t),\ t \in [0,b], \tag{6}$$

$$m_2(t)u(t,0) + m_3(t)D^{(0.1)}u(t,a) = \varphi_2(t), \tag{7}$$

$$u(0,x) = T(x),\ x \in [0,a], \tag{8}$$

де $D^{(k)}u(t,x) : D \to D_k \subset \mathbb{R}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_r = 0,1$, $r = 1,2$; $k_1 + k_2 < 2$, $f : B \to \mathbb{R}$, $B = D \times \prod\limits_{k_1,k_2} D_{(k_1,k_2)} \in \mathbb{R}^5$. Задані функції $m_1(t), m_2(t) \neq 0$, $m_3(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in C[0;b]$, $T(x) \in C^1([0;a])$, $a_1(t,x) \in C^{(0.1)}(D)$, $a_2(t,x) \in C(D)$, причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi_2(0) - m_3(0)T'(a) = m_2(0)T(0). \tag{9}$$

Неважко показати, що крайова задача (5)—(9) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(t,x) = \Phi(t,x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^t \int\limits_\xi^a F[u(\eta,\theta)]K(t,\xi,\eta,\theta)d\theta d\eta d\xi, \tag{10}$$

де

$$F[u(t,x)] := f[u(t,x)] + \left[D^{(0.1)}a_1(t,x) - a_1(t,x)a_2(t,x)\right] D^{(0.1)}u(t,x),$$

$$K(t,x;\eta,\xi) := \exp\left(\int\limits_\xi^x a_2(\eta,\tau)d\tau + \int\limits_\eta^t a_1(\tau,x)d\tau\right),$$

$$\Phi(t,x) := \frac{1}{m_2(t)}[\varphi_2(t) - m_3(t)\varphi_3(t)] + \int\limits_0^x T'(\xi)\exp\left(\int\limits_0^t a_1(\eta,\xi)d\eta\right)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^t \omega(\eta,\xi)\exp\left(\int\limits_\eta^t a_1(\tau,\xi)d\tau\right)d\eta d\xi,$$

$$\omega(t,x) := [\varphi_1(t) - (m_1(t) + a_1(t,a)\varphi_3(t))]\exp\left(\int\limits_a^x a_2(t,\xi)d\xi\right),$$

$$\varphi_3(t) := T'(a)\exp\left(\int\limits_t^0 m_1(\eta)d\eta\right) + \int\limits_0^t \varphi_1(\eta)\exp\left(\int\limits_t^\eta m_1(\tau)d\tau\right)d\eta,$$

а функція $f[u(t,x)] \in C(\overline{B})$.

Означення 1. *Будемо говорити, що $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$, якщо функція $F[u(t,x)]$ задовольняє наступним умовам [8, 9]:*

1) $F[u(t,x)] \in C(\overline{B})$,

2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $Пр_{tOx}\overline{B}_1 = \overline{D}$ існує така функція

$$H(t,x,u(t,x),D^{(1.0)}u(t,x),D^{(0.1)}u(t,x);v(t,x),D^{(1.0)}v(t,x),D^{(0.1)}v(t,x)) := H[u(x,y);v(x,y)],$$

що

(a) $H[u(t,x);u(t,x)] \equiv F[u(t,x)]$,

(б) для довільної з простору $C^{(k_1,k_2)}(\overline{D})$ пари функцій $u(t,x)$, $v(t,x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умові $D^{(k_1,k_2)}[u(t,x) - v(t,x)] \geq (\leq) 0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1 (k_2 = 0)$, $k_1 + k_2 < 2$, $(t,x) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[u(t,x); v(t,x)] - H[v(t,x); u(t,x)] \geq 0, \tag{11}$$

3) функція $H[u(t,x); v(t,x)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умові Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C^*(\overline{D})$ функцій $u_r(t,x)$, $v_r(t,x)$, $r = 1, 2$, виконується умова

$$|H[u_1(t,x); u_2(t,x)] - H[v_1(t,x); v_2(t,x)]| \leq$$
$$\frac{1}{6} L \sum_{r=1}^{2} \left(|w_r(t,x)| + \left| D^{(1.0)} w_r(t,x) \right| + \left| D^{(0.1)} w_r(t,x) \right| \right),$$

де $w_r(t,x) := u_r(t,x) - v_r(t,x)$, $r = 1, 2$, $\frac{1}{6} L$ — стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[u(t,x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з третього, то $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$ [5]. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_p(t,x)$, $V_p(t,x) \in C^k(\overline{D})$ належать області $\overline{B}_1$ і $p \in \mathbb{N}_0$.

Введемо позначення:

$$W_p(t,x) = Z_p(t,x) - V_p(t,x), \; (t,x) \in \overline{D}_0,$$

$$f^p(t,x) = H[Z_p(t,x); V_p(t,x)], \; f_p(t,x) = H[V_p(t,x); Z_p(t,x)],$$
$$D^k \overline{Z}_p(t,x) := D^k Z_p(t,x) - q_p^k(t,x) D^k W_p(t,x),$$

$$D^k \overline{V}_p(t,x) := D^k V_p(t,x) + c_p^k(t,x) D^k W_p(t,x),$$

$$k = (k_1, k_2), \; k_r = 0, 1; \; r = 1, 2, \; k_1 + k_2 < 2, \; p \in \mathbb{N}_0,$$
$$\overline{f}^p(t,x) := H[\overline{Z}_p(t,x); \overline{V}_p(t,x)], \; \overline{f}_p(t,x) = H[\overline{V}_p(t,x); \overline{Z}_p(t,x)],$$

$$\omega_p(t,x) := \int_0^x f_p(t,\xi) K(t,x;t,\xi) d\xi, \; \omega^p(t,x) := \int_0^x f^p(t,\xi) K(t,x;t,\xi) d\xi,$$

$$\begin{gathered} \alpha_p(t,x) := D^{(1.1)} Z_p(t,x) + a_1(t,x) D^{(0.1)} Z_p(t,x) - \omega^p(t,x), \\ \beta_p(t,x) := D^{(1.1)} V_p(t,x) + a_1(t,x) D^{(0.1)} V_p(t,x) - \omega_p(t,x), \; (t,x) \in \overline{D}_0, \end{gathered} \tag{12}$$

$q_p^k(t,x)$, $c_p^k(t,x)$ є довільними із простору $C(\overline{D})$ функціями, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} 0 \leq q_p^k(t,x) \leq 0,5, \; 0 \leq c_p^k(t,x) \leq 0,5, \\ p \in \mathbb{N}_0, \; (t,x) \in \overline{D}_0, \; k_r = 0, 1; \; k_1 + k_2 < 2. \end{gathered} \tag{13}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t,x)\}$, $\{V_p(t,x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t,x) = T \overline{f}^p(\eta,\zeta), \; V_{p+1}(t,x) = T \overline{f}_p(\eta,\zeta), \; (t,x) \in \overline{D}_0, \tag{14}$$

де функції нульового наближення $Z_0(t,x)$, $V_0(t,x) \in C^{(1.1)}(\overline{D})$, які належать області $\overline{B}_1$, вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\alpha_0(t,x) \geq 0,\ \beta_0(t,x) \leq 0,\ D^{(k_1,k_2)}W_0(t,x) \geq (\leq)0,$$
$$(t,x) \in \overline{D}_0,\ k_1 = 0,1;\ k_2 = 1(k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2. \tag{15}$$

Означення 2. *Функції $Z_0(t,x)$, $V_0(t,x) \in C^{(1.1)}(\overline{D})$, які належать області $\overline{B}_1$ і задовольняють крайовим умовам (6)—(8) та нерівностям (15), називаються функціями порівняння задачі (5)—(9).*

Із (14) маємо

$$D^{(1.1)}Z_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}^p(t,x),$$

$$D^{(1.1)}V_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}_p(t,x).$$

Таким чином із (12) та (14) одержимо

$$\begin{gathered}\alpha_{p+1}(t,x) = D^{(1.1)}Z_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t,x) - \omega^{p+1}(t,x) = \\ \overline{\omega}^p(t,x) - \omega^{p+1}(t,x), \\ \beta_{p+1}(t,x) = D^{(1.1)}V_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t,x) - \omega_{p+1}(t,x) = \\ \overline{\omega}_p(t,x) - \omega_{p+1}(t,x),\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\alpha_p(t,x) = D^{(1.1)}\left[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)\right] + \\ a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)\right] + \overline{\omega}^p(t,x) - \omega^p(t,x), \\ \beta_p(t,x) = D^{(1.1)}\left[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)\right] + \\ a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)\right] + \overline{\omega}_p(t,x) - \omega_p(t,x),\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{cases} W_{p+1}(t,x) = T\left(\overline{f}^p(\eta,\zeta) - \overline{f}_p(\eta,\zeta)\right), \\ D^{(1.1)}W_{p+1}(t,x) + a_1(t,x)D^{(0.1)}W_{p+1}(t,x) = \overline{\omega}^p(t,x) - \overline{\omega}_p(t,x). \end{cases} \tag{18}$$

Відмітимо, що в силу (13)

$$D^{(k_1,k_2)}V_0(t,x) \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}\overline{V}_0(t,x) \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}\overline{Z}_0(t,x) \leq (\geq)D^{(k_1,k_2)}Z_0(t,x),$$

$$k_1 = 0,1;\ k_2 = 1(k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2,\ (t,x) \in \overline{D},$$

тобто, якщо $D^kZ_0(t,x)$, $D^kV_0(t,x) \in \overline{B}_1$, то $D^k\overline{Z}_0(t,x)$ та $D^k\overline{V}_0(t,x)$ також належить області $\overline{B}_1$. Із (17) одержимо

$$\begin{gathered}
D^{(0.1)}[Z_p(t,x)-Z_{p+1}(t,x)]= \\
\int\limits_0^t[\alpha_p(\eta,x)+\omega^p(\eta,x)-\overline{\omega}^p(\eta,x)]\exp\left(\int\limits_t^\eta[a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta:=\overline{\alpha}_p(t,x), \\
D^{(0.1)}[V_p(t,x)-V_{p+1}(t,x)]= \\
\int\limits_0^t[\beta_p(\eta,x)+\omega_p(\eta,x)-\overline{\omega}_p(\eta,x)]\exp\left(\int\limits_t^\eta[a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta:=\overline{\beta}_p(t,x),
\end{gathered}\tag{19}$$

звідки при $p=0$, враховуючи (15), (13) та (11) одержимо

$$D^{(0.1)}[Z_0(t,x)-Z_1(t,x)]\geq 0,\ D^{(0.1)}[V_0(t,x)-V_1(t,x)]\leq 0.$$

Інтегруючи останні нерівності по x від x до a та враховуючи крайові умови (6)—(8), маємо

$$Z_0(t,x)-Z_1(t,x)\leq 0,\ V_0(t,x)-V_1(t,x)\geq 0.$$

Але тоді із (17) випливає, що

$$\begin{gathered}
D^{(1.1)}\left[Z_0(t,x)-Z_1(t,x)\right]= \\
\alpha_0(t,x)-a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[Z_0(t,x)-Z_1(t,x)\right]+\omega^0(t,x)-\overline{\omega}^0(t,x)\geq 0, \\
D^{(1.1)}\left[V_0(t,x)-V_1(t,x)\right]= \\
\beta_0(t,x)-a_1(t,x)D^{(0.1)}\left[V_0(t,x)-V_1(t,x)\right]+\omega_0(t,x)-\overline{\omega}_0(t,x)\leq 0,
\end{gathered}$$

а отже

$$D^{(1.0)}\left[Z_0(t,x)-Z_1(t,x)\right]\leq 0,\ D^{(1.0)}\left[V_0(t,x)-V_1(t,x)\right]\geq 0.$$

Із (18) враховуючи, що $\overline{f}^0(t,x)-\overline{f}_0(t,x)\geq 0$ при $p=0$ маємо

$$D^{(k_1,k_2))}W_1(t,x)\geq(\leq)0,\ k_1=0,1;\ k_2=1(k_2=0),\ k_1+k_2<2,\ (t,x)\in\overline{D}.$$

Таким чином мають місце нерівності

$$D^{(k_1,k_2)}V_0(t,x)\leq(\geq)D^{(k_1,k_2)}V_1(t,x)\leq(\geq)D^{(k_1,k_2)}Z_1(t,x)\leq(\geq)D^{(k_1,k_2)}Z_0(t,x),$$

а отже $D^kZ_1(t,x)$, $D^kV_1(t,x)\in\overline{B}_1$. Але тоді із (16) при $p=0$ маємо

$$\alpha_1(t,x)=\overline{\omega}^0(t,x)-\omega^1(t,x)=\int\limits_0^x(\overline{f}^0(t,\xi)-f^1(t,\xi))K(t,x;t,\xi)d\xi,$$

$$\beta_1(t,x)=\int\limits_0^x(\overline{f}_0(t,\xi)-f_1(t,\xi))K(t,x;t,\xi)d\xi.$$

Вибираючи довільні з простору $C(\overline{D})$ функції $q_0^k(t,x)$ та $c_0^k(t,x)$, які задовольняють умовам (13) таким чином, щоб виконувались нерівності

$$D^k\left[Z_0(t,x)-Z_1(t,x)\right]-q_0^k(t,x)D^kW_0(t,x)\geq(\leq)0,$$

$$D^k\left[V_0(t,x)-V_1(t,x)\right]+c_0^k(t,x)D^kW_0(t,x)\leq(\geq)0, k_2=1(k_2=0),\ (t,x)\in\overline{D},$$

із попередніх рівностей маємо $\alpha_1(t,x)\geq 0$, $\beta_1(t,x)\leq 0$, тобто побудовані функції $Z_1(t,x)$, $V_1(t,x)$ є також функціями порівняння крайової задачі (5)—(9).

Беручи функції $Z_1(t,x)$ та $V_1(t,x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції, переконуємось, що якщо на кожному кроці ітерації (14) неперервні функції $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)$, які задовольняють умовам (13), вибирати таким чином, щоб в області $\overline{B}_1$ виконувались нерівності

$$D^k\left[Z_p(t,x)-Z_{p+1}(t,x)\right]-q_p^k(t,x)D^kW_p(t,x)\geq(\leq)0,$$

$$D^k\left[V_p(t,x)-V_{p+1}(t,x)\right]+c_p^k(t,x)D^kW_p(t,x)\leq(\geq)0, \tag{20}$$

$$(t,x)\in\overline{D},\ k_1=0,1,\ k_2=1(k_2=0),$$

то для довільних $p\in\mathbb{N}$ матимемо

$$\begin{gathered}D^kV_p(t,x)\leq(\geq)D^kV_{p+1}(t,x)\leq(\geq)D^kZ_{p+1}(t,x)\leq(\geq)D^kZ_p(t,x)\\ (t,x)\in\overline{D},\ k_2=1(k_2=0),\ p\in\mathbb{N}_0.\end{gathered} \tag{21}$$

Покажемо, що множина функцій $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)$, які задовольняють умовам (13), (20), не порожня. Дійсно, позначимо:

$$\alpha_{p,1}(t,x):=\alpha_p(t,x)+\omega^p(t,x)-\overline{\omega}^p(t,x),$$

$$\alpha_{p,2}(t,x)=\int\limits_0^t\alpha_{p,1}(\eta,x)\exp\left(\int\limits_t^\eta a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta,$$

$$\beta_{p,1}(t,x):=\beta_p(t,x)+\omega_p(t,x)-\overline{\omega}_p(t,x),$$

$$\beta_{p,2}(t,x)=\int\limits_0^t\beta_{p,1}(\eta,x)\exp\left(\int\limits_t^\eta a_1(\tau,x)d\tau\right)d\eta,$$

$$\rho_{p,1}(t,x):=\alpha_{p,2}(t,x)+D^{(0.1)}W_p(t,x),$$

$$\rho_{p,2}(t,x):=-\beta_{p,1}(t,x)+D^{(1.1)}W_p(t,x).$$

Лема 1. *Нехай $a_1(t,x)\in C^{(0.1)}(D)$, $a_2(t,x)\in C(D)$, функція $F[u(t,x)]\in C_2^*(\overline{B})$, а крайова задача (5)—(9) має функції порівняння, то множина функцій $q_p^k(t,x)$, $c_p^k(t,x)$, які задовольняють умовам (13), (20), не порожня.*

Доведення. Дійсно, якщо вибрати

$$q_p^{(0.1)}(t,x)=\frac{\alpha_{p,2}(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)},\ q_p(t,x)=\frac{\int\limits_x^a\alpha_{p,2}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a\rho_{p,1}(t,\xi)d\xi},\ q_p^{(1.0)}(t,x)=\frac{\int\limits_x^a\alpha_{p,1}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a\rho_{p,2}(t,\xi)d\xi},$$

$$c_p^{(0.1)}(t,x) = -\frac{\beta_{p,2}(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)},\ c_p(t,x) = -\frac{\int\limits_x^a \beta_{p,2}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,1}(t,\xi)d\xi},\ c_p^{(1.0)}(t,x) = -\frac{\int\limits_x^a \beta_{p,1}(t,\xi)d\xi}{\int\limits_x^a \rho_{p,2}(t,\xi)d\xi},$$

$$(t,x) \in \overline{D},\ p \in \mathbb{N}_0,$$

то функції $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x)$, $k=(k_1,k_2)$, $k_1,k_2=0,1$, $k_1+k_2<2$, задовольняють умови (13), а

$$D^{(0.1)}[Z_p(t,x) - Z_{p+1}(t,x)] - q_p^{(0.1)}D^{(0.1)}W_p(t,x) = \alpha_{p,2}(t,x)\left[1 - \frac{D^{(0.1)}W_p(t,x)}{\rho_{p,1}(t,x)}\right] \geq 0,$$

$$[V_p(t,x) - V_{p+1}(t,x)] + c_p^{(0.1)}W_p(t,x) = -\int\limits_x^a \beta_{p,2}(t,\xi)d\xi \left[1 + \frac{W_p(t,x)}{\int\limits_x^a \rho_{p,1}(t,\xi)d\xi}\right] \geq 0.$$

Аналогічно можна переконатися у виконанні усіх нерівностей в (20).

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функція $F[u(t,x)] \in C_2^*(\overline{B})$, $a_1(t,x) \in C^{(0.1)}(D)$, $a_2(t,x) \in C(D)$ і крайова задача (5)—(9) має функції порівняння.*

Тоді для функцій $Z_p(t,x)$, $V_p(t,x)$, побудованих згідно закону (14), (15), де $q_p^k(t,x)$ та $c_p^k(t,x) \in C(\overline{D})$ задовольняють в області $\overline{B}_1$ умови (13), (20), справедливі нерівності (21) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(t,x) \in \overline{D}$, $k_1,k_2 = 0,1$, $k_1+k_2<2$.

Покажемо, що послідовності функцій $\{D^k Z_p(t,x)\}$, $\{D^k V_p(t,x)\}$, побудованих згідно закону (14), (15), (21), при існуванні функцій порівняння задачі (5)—(9), збігаються рівномірно при $(t,x) \in \overline{D}$ до єдиного розв'язку інтегро–диференціального рівняння (10). Враховуючи нерівності (21), для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} D^k W_p(t,x) = 0$ для $\forall (t,x) \in \overline{D}$, $k=(k_1,k_2)$, $k_1,k_2=0,1$, $k_1+k_2<2$.

Позначимо:

$$d := \max_{k_1,k_2} \sup_{\overline{D}} \left|D^{(k_1,k_2)}W_0(t,x)\right|,\ q := \max_{k_1,k_2} \sup_{\overline{D}} (1 - q_p^k(t,x) - c_p^k(t,x)),$$

$$c := \sup_{\overline{D}} |a_1(t,x)|,\ K := \sup_{\overline{D}\times\overline{D}} K(t,x;\eta,\zeta)$$

$$\gamma := \max\{1,\ a+b,\ a(a+b),\ (a+b)(1+ab)\}.$$

Тоді із (18) методом математичної індукції неважко переконатись у справедливості оцінок

$$\left|D^{(k_1,k_2)}W_p(t,x)\right| \leq \frac{[qKL\gamma(a+t-x)]^p}{p!}d,\ k_i=0,1,\ i=1,2,\ k_1+k_2<2, \qquad (22)$$

$$\text{для всіх} (t,x) \in \overline{D},\ p \in \mathbb{N}.$$

Беручи до уваги оцінки (22) маємо, що $\lim\limits_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}W_p(t,x) = 0$, тобто

$$\lim_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}Z_p(t,x) = \lim_{p\to\infty} D^{(k_1,k_2)}V_p(t,x) := U_{k_1,k_2}(t,x).$$

Для того, щоб показати, що $U_{k_1,k_2}(t,x) = D^{(k_1,k_2)}U(t,x)$, де $U(t,x)$ є регулярним розв'язком інтегро–диференціального рівняння (10) достатньо в (14) перейти до границі, коли $p \to \infty$ і результат продиференціювати по t k_1 раз, а по x — k_2 рази, $k_1 + k_2 < 2$. Знайдена гранична функція і буде розв'язком крайової задачі (5)—(9).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теореми 1.*
Тоді:

1) *інтегро–диференціальне рівняння (10) у класі функцій $C^*(\overline{D})$ має розв'язок і він единий при $(t,x) \in \overline{D}$,*
2) *послідовності функцій $\left\{Z_p^k(t,x)\right\}$, $\left\{V_p^k(t,x)\right\}$, побудовані згідно закону (14), (15), (21) збігаються рівномірно при $(t,x) \in \overline{D}$ до единого розв'язку рівняння (10),*
3) *мають місце оцінки (22),*
4) *для довільних $p \in \mathbb{N}_0$, $k_1, k_2 = 0,1$, $k_1 + k_2 < 2$ та $(t,x) \in \overline{D}$ справедливі нерівності*

$$D^k V_p(t,x) \le (\ge) D^k V_{p+1}(t,x) \le (\ge) D^k U(t,x) \le$$

$$(\ge) D^k Z_{p+1}(t,x) \le (\ge) D^k Z_p(t,x) \tag{23}$$

$$(t,x) \in \overline{D},\ k_1 = 0,1,\ k_2 = 1 (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2.$$

5) *збіжність ітераційного методу (14), (15), (21) не повільніша збіжності методу, коли $q_p^k(t,x) \equiv 0$ та $c_p^k(t,x) \equiv 0$ для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, тобто методу*

$$Z_{p+1}^*(t,x) = Tf^p(\eta,\zeta),\ V_{p+1}^*(t,x) = Tf_p(\eta,\zeta) \tag{24}$$

Доведення. Єдиність розв'язку рівняння (10) доводиться методом від супротивного [5]. Твердження пунктів 2) та 3) даної Теореми 2 доведені вище.

Доведемо справедливість нерівностей (23).

Припустимо, що для деякого номера $p \in \mathbb{N}$ у деякій точці $(t_0, x_0) \in \overline{D}$ виконується нерівність $D^k Z_p(t_0,x_0) < (>) D^k U(t_0,x_0)$. Тоді для всякого $n \in \mathbb{N}$ у силу нерівностей (21)

$$D^k Z_{p+n}(t_0,x_0) \ge (\le) D^k Z_p(t_0,x_0) < (>) D^k U(t_0,x_0),$$

$$k_1 = 0,1,\ k_2 = 1 (k_2 = 0),\ k_1 + k_2 < 2,$$

а отже послідовність функцій $\left\{D^k Z_{p+n}(t_0,x_0)\right\}$ при $n \to \infty$ не збігається у точці (t_0,x_0) до $D^k U(t_0,x_0)$, що суперечить доведеному.

Аналогічно доводяться інші нерівності у (23).

Можна також показати, що збіжність методу (14), (15), (21) не повільніша збіжності ітераційного методу (24).

Нехай $Z_p(t,x)$ та $V_p(t,x)$ — функції порівняння задачі (5)—(9), побудовані згідно деякого двостороннього методу. Тоді із (14) та (24), враховуючи (11), маємо

$$Z_{p+1}^*(t,x) - Z_{p+1}(t,x) = Tf^p(\eta,\zeta) - T\overline{f}^p(\eta,\zeta) = T[f^p(\eta,\zeta) - \overline{f}^p(\eta,\zeta)] \le 0,$$

$$V_{p+1}^*(t,x) - V_{p+1}(t,x) = T[f_p(\eta,\zeta) - \overline{f}_p(\eta,\zeta)] \ge 0.$$

Тоді

$$Z^*_{p+1}(t,x) \le Z_{p+1}(t,x) \le V_{p+1}(t,x) \le V^*_{p+1}(t,x),$$

що і потрібно було показати.

Зауваження 1. *Оскільки за наближений розв'язок приймається половина суми верхньої та нижньої функцій, тобто $\tilde{U}p(t,x) := \frac{1}{2}[Z_p(t,x) + V_p(t,x)]$, то, беручи до уваги нерівності (23), одержуємо, що оцінка похибки наближеного розв'язку на p-ому кроці ітерації буде у два рази менша оцінки (22), тобто*

$$\left|U(t,x) - \tilde{U}_p(t,x)\right| \le \frac{[qKL\gamma(a+t-x)]^p}{2p!}.$$

Відмітимо, що одержана оцінка дає можливість знаходити похибку у будь-якій точці області D або підобласті області D, що є важливим при дослідженні реальних процесів практики.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній праці побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, що описує розподіл вологи у пористих середовищах. Отримано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та отримано апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку крайової задачі.

Подальший науковий пошук може бути спрямований на дослідження інших класів крайових задач за допомогою побудованої модифікації двостороннього методу. Перспективними є також розробки нових модифікацій даного методу.

Конфлікт інтересів

Маринець Василь Васильович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Скінчені підгрупи повних матричних груп над кільцями. Крайові задачі та конструктивні методи їх дослідження» (державний реєстраційний номер 0122U201044).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Маринець В. В.: концептуалізація, дослідження, методологія. Питьовка О. Ю.: кураторство даних, формальний аналіз, написання — рецензування та редагування. Когутич О. І.: формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Chudnovskij, A. F. (1976). Thermal physics of soils. *M.: Nauka* [in Russian].
2. Nahushev, A. M. (1979). Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture. *Differenc. uravneniya.,* 15(1), 96–105 [in Russian].
3. Shkhanukov, B. A. (1983).On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions. *Differenc. uravneniya.,* 18(2), 145–152 [in Russian].
4. Vodahova, V. A. (1982). A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer. *Differenc. uravneniya.,* 18(2), 280–288 [in Russian].
5. Marynets, V. V., Marynets, K. V., & Pytovka, O. Yu. (2019). Analytical methods of research of boundary value problems. *Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla".* Retrieved from `https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/27984` [in Ukrainian].
6. Marynets, V. V., Kohutych, O. I., & Pytovka, O. Yu. (2023). One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments. *Scientific bulletin of Uzhhorod university. Series of Mathem. and Inform.,* 43(2), 42–51. `https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).42-51`
7. Marynets, V. V. (1988). On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions. *Differenc. uravneniya.,* 24(8), 1393–1397 [in Russian].
8. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2021). Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. Retrieved from `https//www.mdpi.com/journal/mathematics/specialissues/Advanced_Methods_Computatioal_Mathematical_Physies`
9. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (September, 2022). On a ovel aproache for the investigaion and aproximation of solutions to the systems of higher nonlineare PDES. Monatchefte für Mathematik. `https://doi.org/10.1007/s00605-022-01771-5`

Marynets V. V., Pitovka O. Yu., Kohutych O. I. Modification of the two-sided method for investigating a mathematical model of moisture distribution in porous environments .

The one modification of the two-sided method is constructed for the investigation and approximate solution of a boundary value problem describing moisture distribution in porous environments. The sufficient conditions for the existence, uniqueness, regularity, and sign-preservation of the desired solution are obtained. Theorems about differential inequalities are proven, and the posterior estimation of error for the approximate solution of the boundary value problem is provided.

Keywords: modification of the two-sided method, comparison functions, uniqueness of the solution, partial differential equations, approximate solution.

Отримано: 04.11.2025 Прийнято: 26.11.2025 Опубліковано: 29.01.2026