УДК 517.5
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).64-74

Р. В. Хаць[1], В. П. Ярмошик[2]

[1] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
khats@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

[2] Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
аспірант кафедри математики та економіки
valentyn.yarmoshyk@dspu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-7851-0863

ДВОЧЛЕННА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ З ПОКРАЩЕНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ

Досліджено зв'язок між регулярністю зростання логарифмічної похідної цілої функції скінченного порядку та покращеним розподілом її нулів на додатному промені в термінах двочленної асимптотики. Зокрема, для цілої функції f порядку $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$, визначеної канонічним добутком Вейєрштрасса роду p, рівномірно за $\varphi \in (0;2\pi)$ встановлено асимптотичне співвідношення вигляду

$$\left|f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi}) - H(\varphi;\Delta;\rho)r^{\rho-1} - H_1(\varphi;\Delta_1;\rho_1)r^{\rho_1-1}\right|\sin(\varphi/2) = o(r^{\rho_2-1}),\quad r\to+\infty,$$

за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції її нулів

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}),\quad t\to+\infty,$$

де $\Delta \in (0;+\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p+1$, $H(\varphi;\Delta;\rho) \in L^1(0;2\pi)$ і $H_1(\varphi;\Delta_1;\rho_1) \in L^1(0;2\pi)$.

Ключові слова: канонічний добуток, логарифмічна похідна, двочленна асимптотика, ціла функція цілком регулярного зростання, покращений розподіл нулів.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n\le t} 1$ — лічильна функція [1: 10] послідовності $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, p — найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-p-1} < +\infty$,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\sum_{\nu=1}^{p}\frac{z^{\nu}}{\nu\lambda_n^{\nu}}\right),\quad f(0)=1, \tag{1}$$

— ціла функція порядку $\rho \in (0;+\infty)$, визначена [1: 25] канонічним добутком Вейєрштрасса роду p і $F(z) := f'(z)/f(z)$, $z \in \mathbb{C}\backslash[\lambda_1;+\infty)$, — логарифмічна похідна функції f.

Однією з важливих задач теорії цілих функцій є дослідження зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. В теоріях цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1, 2] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [3–14] подібний зв'язок встановлено в термінах одночленних асимптотичних співвідношень. Відповідні результати мають численні застосування в різних розділах математики та суміжних науках (див. [1, 2]).

Наприкінці 20 століття в теорії цілих функцій почав розвиватися напрямок вивчення поводження основних характеристик цих функцій в термінах точніших багаточленних асимптотик. Зокрема, в роботах [15–19] було досліджено асимптотичну поведінку цілих функцій цілком регулярного зростання скінченного порядку та асимптотичну поведінку лічильної функції їх нулів в термінах двочленних та багаточленних асимптотик. У статті [20] встановлено двочленну асимптотику цілих функцій скінченного порядку з покращеним розподілом нулів на додатному промені.

Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0;+\infty)$ цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1: 95]. А. Гольдберг, М. Коренков та М. Строчик [21–23] для таких функцій знайшли асимптотичні формули їх логарифмічних похідних зовні деяких виняткових множин. Зокрема, в роботах [21, 22] (див. також [2: 95]) встановлено, що якщо $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \to +\infty, \quad \Delta \in [0;+\infty), \tag{2}$$

то для цілої функції f нецілого порядку $\rho \in (0;+\infty)$, визначеної канонічним добутком (1) роду $p = [\rho]$ (тут $[\rho]$ — ціла частина числа $\rho > 0$), для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$ виконується

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho} e^{-\pi\rho i} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} + o(r^{\rho-1}), \quad r \to +\infty.$$

Крім цього, якщо умова (2) виконується з $\rho \in \mathbb{N}$, то для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$, справджується співвідношення [21, 22]

$$F(re^{i\varphi}) = \Omega(re^{i\varphi}) + o(r^{\rho-1}), \quad r \to +\infty,$$

де

$$\Omega(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} \sum\limits_{\lambda_n \le r} \lambda_n^{-\rho} + \Delta\rho i(\varphi - \pi) e^{i(\rho-1)\varphi} r^{\rho-1}, & p = \rho, \\ 0, \quad p = \rho - 1. \end{cases}$$

Аналогічні асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку з від'ємними нулями отримано в [24].

В роботах [3–14, 20] вивчались точніші асимптотики цілої функції (1) покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0;+\infty)$ та лічильної функції $n(t)$ її нулів. Зокрема [8, 9], якщо для деякого $\rho_1 \in (0;\rho)$ виконується умова $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$, $t \to +\infty$, $\Delta \in [0;+\infty)$, то для цілої функції (1) порядку $\rho \in (0;+\infty)$, при $r \to +\infty$ виконуються асимптотичні співвідношення

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho} e^{-\pi\rho i} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} + \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}, \quad \rho_1 \in ([\rho];\rho),$$

$$F(re^{i\varphi}) = \Omega(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad \rho_1 \in (\rho-1;\rho),$$

рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$, де функція $\Omega(re^{i\varphi})$ визначена вище.

Проте, згадані вище результати отримані для одночленних асимптотик логарифмічних похідних цілих функцій цілком регулярного зростання [21–24] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [8, 9]. З огляду на це, актуальною є задача про дослідження двочленної асимптотики логарифмічної похідної цілої функції покращеного регулярного зростання, що передбачає отримання тонших асимптотичних оцінок в порівнянні з цілими функціями цілком регулярного зростання.

Метою статті є дослідження зв'язку між регулярністю зростання логарифмічної похідної канонічного добутку Вейєрштрасса (1) скінченного порядку та покращеним розподілом його нулів на промені (див. умову (3)) у термінах двочленної асимптотики, що зумовлює необхідність розв'язання таких задач: отримання нових рівномірних (та зовні деякої малої виняткової множини) асимптотичних оцінок логарифмічної похідної канонічного добутку (1) в термінах двочленних співвідношень; встановлення нових двочленних асимптотичних рівностей для лічильних функцій послідовностей нулів; вивчення зв'язку між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифмічної похідної канонічного добутку (1) нецілого порядку та покращеним розподілом його нулів на промені в термінах двочленних асимптотик.

2. Основні результати. Основні результати даної статті містяться в наступних твердженнях.

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty)\backslash\mathbb{N}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p+1$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Тоді для канонічного добутку (1) при $r \to +\infty$ виконується

$$\left| F(re^{i\varphi}) - \frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho} e^{-i\pi\rho} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} - \frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} e^{(\rho_1-1)\varphi i} r^{\rho_1-1} \right| \sin\frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2-1}), \tag{4}$$

рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in (0; 2\pi)$. Оскільки ([21: 19; 22: 364])

$$F(z) = z^p \left\{ pz \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{p+1}(z-t)^2} - (p+1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^p(z-t)^2} \right\},$$

то

$$S := F(re^{i\varphi}) + r^p e^{ip\varphi} \left\{ -pre^{i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(re^{i\varphi}-t)^2} dt + (p+1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^p(re^{i\varphi}-t)^2} dt \right\} =$$

$$= z^p \left\{ pz \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(z-t)^2} dt - (p+1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^p(z-t)^2} dt \right\}. \tag{5}$$

Враховуючи (3), для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ і всіх $N > N(\varepsilon)$, подібно як в [1: 81–82; 2: 67–69; 22: 365], отримуємо

$$|S| \le pr^{p+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt + (p+1) r^p \int\limits_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt <$$

$$< pr^{p+1} \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt + (p+1) r^p \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt +$$

$$+\varepsilon pr^{p+1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2 - p - 1}}{\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt + \varepsilon (p+1) r^p \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2 - p}}{\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt :=$$

$$= J_1(r,\varphi) + J_2(r,\varphi) + J_3(r,\varphi) + J_4(r,\varphi). \tag{6}$$

Тоді ([1: 82; 2: 68; 21, 22])

$$J_1(r,\varphi) + J_2(r,\varphi) =$$

$$= pr^{p+1} \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt + (p+1) r^p \int\limits_0^{N} \frac{|n(t) - \Delta t^{\rho} - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p}\left|re^{i\varphi} - t\right|^2} dt =$$

$$= O(r^{p-1}) = o(r^{\rho_2 - 1}), \quad r \to +\infty, \tag{7}$$

рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$. Позаяк [25: 126, 331]

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\mu}}{x^2 + 2x\cos\varphi + 1} dx = \frac{\pi \sin(\mu\varphi)}{\sin\varphi \sin(\mu\pi)}, \quad 0 < |\varphi| < \pi, \quad \mu \in (-1; 1),$$

то, зробивши заміну $t = ur$, одержимо

$$J_3(r,\varphi) + J_4(r,\varphi) = \varepsilon pr^{\rho_2 - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2 - p - 1}}{\left|e^{i\varphi} - u\right|^2} du + \varepsilon (p+1) r^{\rho_2 - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2 - p}}{\left|e^{i\varphi} - u\right|^2} du =$$

$$= \varepsilon pr^{\rho_2 - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2 - p - 1}}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1} du + \varepsilon (p+1) r^{\rho_2 - 1} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2 - p}}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1} du <$$

$$< \varepsilon c(\rho_2) \frac{r^{\rho_2 - 1}}{\sin(\varphi/2)}, \quad \varphi \in (0; 2\pi), \tag{8}$$

де $c(\rho_2)$ — стала, яка залежить від ρ_2. Крім того, ([1: 82; 2: 95; 21: 20; 22: 364])

$$r^p e^{ip\varphi} \left\{ -pre^{i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(re^{i\varphi} - t)^2} dt + (p+1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p}(re^{i\varphi} - t)^2} dt \right\} =$$

$$= -p\Delta r^{\rho - 1} e^{i(p+1)\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho - p - 1}}{(e^{i\varphi} - u)^2} du + (p+1)\Delta r^{\rho - 1} e^{ip\varphi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\rho - p}}{(e^{i\varphi} - u)^2} du -$$

$$-p\Delta_1 r^{\rho_1-1}e^{i(p+1)\varphi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p-1}}{(e^{i\varphi}-u)^2}du+(p+1)\Delta_1 r^{\rho_1-1}e^{ip\varphi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{\rho_1-p}}{(e^{i\varphi}-u)^2}du=$$

$$=-\frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\pi\rho}e^{(\rho-1)\varphi i}r^{\rho-1}-\frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1}e^{-i\pi\rho_1}e^{(\rho_1-1)\varphi i}r^{\rho_1-1}. \tag{9}$$

Отже, з (5)–(9) випливає (4). Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для кожного $\gamma\in(0;\rho_1-\rho_2)$ маємо*

$$F(re^{i\varphi})=\frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\pi\rho}e^{(\rho-1)\varphi i}r^{\rho-1}+\frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1}e^{-i\pi\rho_1}e^{(\rho_1-1)\varphi i}r^{\rho_1-1}+o(r^{\rho_2-1+\gamma}),$$

$$E_\gamma\not\ni z=re^{i\varphi}\to\infty,$$

де $E_\gamma=\{z=re^{i\varphi}:|\varphi|<r^{-\gamma}\}$ *і* $\varphi\in(0;2\pi)$.

Наступний приклад вказує в деякій мірі на точність теореми 1.

Приклад 1. *Нехай $f(z)=\cos\sqrt{z}$. Функція f є цілою функцією порядку $\rho=1/2$ з нулями $\lambda_n=(\pi n+\pi/2)^2$, $n\in\mathbb{Z}$. Згідно з теоремою Адамара-Бореля [1: 26]*

$$\cos\sqrt{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{((2n-1)\pi/2)^2}\right).$$

Для заданого $t\ge\lambda_1$ знайдеться n, для якого $\lambda_n\le t<\lambda_{n+1}$. Тоді

$$n(t)=n=\sqrt{\lambda_n}/\pi-1/2\le\sqrt{t}/\pi-1/2,$$

і

$$n(t)=n+1-1=\sqrt{\lambda_{n+1}}/\pi-3/2>\sqrt{t}/\pi-3/2.$$

Тому $n(t)=\sqrt{t}/\pi+O(1)$, $t\to+\infty$. Отже, умова (3) виконується для будь-якого $\rho_2\in(0;1/2)$ з $\Delta=1/\pi$, $\rho=1/2$ і $\Delta_1=0$. Оскільки

$$F(z)=-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{2\sqrt{z}},\quad z=re^{i\varphi},\quad \varphi\in(0;2\pi),$$

$$\frac{|i-\operatorname{tg}\sqrt{z}|}{2\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{1+2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}}},$$

$$\left(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}-1\right)^2\le 1+2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}\le\left(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}+1\right)^2,$$

$$e^x>1+x,\quad x>0,$$

то

$$0<\frac{r^{\rho_2-1}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}+1}<\left|F(re^{i\varphi})+\frac{i}{2\sqrt{re^{i\varphi}}}\right|\le\frac{r^{-1/2}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}-1}<\frac{r^{\rho_2-1}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho - 1 < \rho_2 < \rho_1 < \rho$ *і послідовність додатних чисел* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *задовольняє умову* (3). *Тоді для канонічного добутку* (1) *рівномірно за* $\varphi \in (0; 2\pi)$ *виконується*

$$\left|F(re^{i\varphi}) - \Theta(re^{i\varphi})\right| \sin\frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2 - 1}), \quad r \to +\infty, \tag{10}$$

де

$$\Theta(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}\sum\limits_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho} + \Delta\rho i(\varphi-\pi)r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi} + \\ \qquad\qquad + \Delta_1\rho_1 i(\varphi-\pi)r^{\rho_1-1}e^{i(\rho_1-1)\varphi}, \quad p = \rho, \\ \Delta_1\rho_1 r^{\rho_1-1}\left(\frac{e^{i(\rho-1)\varphi}}{\rho_1-\rho} + i(\varphi-\pi)e^{i(\rho_1-1)\varphi}\right), \quad p = \rho - 1. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$ і $p = \rho$. Оскільки ([21: 21; 22: 370])

$$F(z) = z^{\rho-1}\sum_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho} - \frac{n(r)}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1} -$$

$$-z^{\rho-1}\int\limits_0^r n(t)\frac{\rho t - (\rho-1)z}{t^\rho(z-t)^2}dt - z^\rho\int\limits_r^{+\infty} n(t)\frac{(\rho+1)t - \rho z}{t^{\rho+1}(z-t)^2}dt,$$

то

$$\tilde{S} := F(re^{i\varphi}) - r^{\rho-1}e^{i(\rho-1)\varphi}\sum_{\lambda_n\le r}\lambda_n^{-\rho} + (\Delta r^{\rho-1} + \Delta_1 r^{\rho_1-1})e^{i\varphi(\rho-1)} +$$

$$+r^{\rho-1}e^{i\varphi(\rho-1)}\int\limits_0^r(\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1})\frac{\rho t - (\rho-1)re^{i\varphi}}{t^\rho(re^{i\varphi}-t)^2}dt +$$

$$+r^\rho e^{i\varphi\rho}\int\limits_r^{+\infty}(\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1})\frac{(\rho+1)t - \rho re^{i\varphi}}{t^{\rho+1}(re^{i\varphi}-t)^2}dt = -\frac{n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1} -$$

$$-z^{\rho-1}\int\limits_0^r(n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1})\frac{\rho t - (\rho-1)z}{t^\rho(z-t)^2}dt -$$

$$-z^\rho\int\limits_r^{+\infty}(n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1})\frac{(\rho+1)t - \rho z}{t^{\rho+1}(z-t)^2}dt. \tag{11}$$

Враховуючи (3), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\left|\tilde{S}\right| \le \frac{1}{r}\left|n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}\right| + r^{\rho-1}\int\limits_0^r\left|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}\right|\frac{\rho t + (\rho-1)r}{t^\rho\left|re^{i\varphi}-t\right|^2}dt +$$

$$+r^\rho\int\limits_r^{+\infty}\left|n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}\right|\frac{(\rho+1)t + \rho r}{t^{\rho+1}\left|re^{i\varphi}-t\right|^2}dt <$$

$$< \varepsilon r^{\rho_2-1} + \varepsilon r^{\rho_2-1} \int\limits_0^1 u^{\rho_2-\rho} \frac{\rho u + (\rho-1)}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1} du +$$

$$+\varepsilon r^{\rho_2-1} \int\limits_1^{+\infty} u^{\rho_2-\rho-1} \frac{(\rho+1)u + \rho}{u^2 - 2u\cos\varphi + 1} du \leq \frac{o(r^{\rho_2-1})}{\sin(\varphi/2)}, r \to +\infty. \tag{12}$$

Крім того, ([21: 21; 22: 371])

$$r^{\rho-1} e^{i\varphi(\rho-1)} \int\limits_0^r (\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{\rho t - (\rho-1) r e^{i\varphi}}{t^{\rho}(r e^{i\varphi} - t)^2} dt +$$

$$+r^{\rho} e^{i\varphi\rho} \int\limits_r^{+\infty} (\Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{(\rho+1)t - \rho r e^{i\varphi}}{t^{\rho+1}(r e^{i\varphi} - t)^2} dt + (\Delta r^{\rho-1} + \Delta_1 r^{\rho_1-1}) e^{i\varphi(\rho-1)} =$$

$$= -\Delta\rho i(\varphi-\pi) r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} - \Delta_1 \rho_1 i(\varphi-\pi) r^{\rho_1-1} e^{i(\rho_1-1)\varphi}. \tag{13}$$

Таким чином, з (11)–(13) отримуємо (10). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді ([21: 21; 22: 373])

$$F(z) = -z^{\rho-1} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} - \frac{n(r)}{r} \left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1} -$$

$$-z^{\rho-1} \int\limits_0^r n(t) \frac{\rho t - (\rho-1) z}{t^{\rho}(z-t)^2} dt - z^{\rho} \int\limits_r^{+\infty} n(t) \frac{(\rho+1)t - \rho z}{t^{\rho+1}(z-t)^2} dt.$$

Оскільки в даному випадку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho} < +\infty$, то (див. [5; 7–10; 20])

$$n(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \to +\infty.$$

Тому

$$-z^{\rho-1} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} = -z^{\rho-1} \int\limits_r^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{\rho}} = -z^{\rho-1} \left(t^{-\rho} n(t) \Big|_r^{+\infty} + \rho \int\limits_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt \right) =$$

$$= z^{\rho-1} \frac{n(r)}{r^{\rho}} - \rho z^{\rho-1} \int\limits_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt =$$

$$= z^{\rho-1} (\Delta_1 r^{\rho_1-\rho} + o(r^{\rho_2-\rho})) - \rho z^{\rho-1} \int\limits_r^{+\infty} (\Delta_1 t^{\rho_1-\rho-1} + o(t^{\rho_2-\rho-1})) dt =$$

$$= \frac{\Delta_1 \rho_1}{\rho_1 - \rho} r^{\rho_1-1} e^{i(\rho-1)\varphi} + \frac{o(r^{\rho_2-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \to +\infty.$$

Отже, як і вище виконується (10). Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. *Теореми 1–2 можна узагальнити на випадок цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів.*

Теорема 3. *Нехай* $\Delta \in (0;+\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0;+\infty)\backslash\mathbb{N}$, $\rho_1 \in (0;\rho)$, $\rho_2 \in (0;\rho_1)$ *і для канонічного добутку* (1) *існує така послідовність* (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, *що*

$$r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} = o(r_k^{\rho_2}), \quad r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1} = o(r_k^{\rho_2}), \quad k \to +\infty, \tag{14}$$

і

$$F(r_k e^{i\varphi}) = \frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho} e^{-i\pi\rho} e^{i(\rho-1)\varphi} r_k^{\rho-1} + \frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} e^{i(\rho_1-1)\varphi} r_k^{\rho_1-1} + o(r_k^{\rho_2-1}), \ \ k \to +\infty,$$

рівномірно за $\varphi \in [0;2\pi]$. *Тоді виконується* (3).

Доведення. Оскільки [26: 1011]

$$n(r) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi, \quad r = r_k \neq \lambda_n,$$

то при $k \to +\infty$

$$n(r_k) = \frac{r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(r_k e^{i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{r_k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho}e^{-i\pi\rho}e^{(\rho-1)\varphi i}r_k^{\rho-1} + \frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1}e^{-i\pi\rho_1}e^{(\rho_1-1)\varphi i}r_k^{\rho_1-1} + o(r_k^{\rho_2-1})\right)e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{\Delta\rho r_k^{\rho}}{2\sin\pi\rho}\int_0^{2\pi} e^{i\rho(\varphi-\pi)}d\varphi + \frac{\Delta_1\rho_1 r_k^{\rho_1}}{2\sin\pi\rho_1}\int_0^{2\pi} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)}d\varphi + o(r_k^{\rho_2}) =$$

$$= \frac{\Delta r_k^{\rho}}{\sin\pi\rho}\frac{e^{i\pi\rho} - e^{-i\pi\rho}}{2i} + \frac{\Delta_1 r_k^{\rho_1}}{\sin\pi\rho_1}\frac{e^{i\pi\rho_1} - e^{-i\pi\rho_1}}{2i} + o(r_k^{\rho_2}) = \Delta r_k^{\rho} + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}).$$

Для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \le r < r_{k+1}$. Оскільки $n(r)$ є неспадною функцією, то за умовою (14), при $r \to +\infty$ отримуємо

$$n(r) \le n(r_{k+1}) = \Delta r_{k+1}^{\rho} + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_2}) =$$

$$= \Delta\left(r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho}\right) + \Delta r_k^{\rho} + \Delta_1\left(r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1}\right) + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^{\rho_2} r_k^{\rho_2}\right) =$$

$$= \Delta r_k^{\rho} + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}) \le \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}).$$

З іншого боку, за умови (14), при $r \to +\infty$

$$n(r) \ge n(r_k) = \Delta r_k^{\rho} + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}) =$$

$$= \Delta\left(r_k^{\rho} - r_{k+1}^{\rho}\right) + \Delta r_{k+1}^{\rho} + \Delta_1\left(r_k^{\rho_1} - r_{k+1}^{\rho_1}\right) + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)^{\rho_2} r_{k+1}^{\rho_2}\right) \ge$$

$$\ge \Delta r_{k+1}^{\rho} + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_2}) \ge \Delta r^{\rho} + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}).$$

З обох останніх нерівностей випливає (3). Теорему 3 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті знайдено нові двочленні асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції скінченного порядку, визначеної канонічним добутком Вейєрштрасса, за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції її нулів на додатному промені (див. теореми 1 і 2). Крім того, вивчено зв'язок між покращеним регулярним зростанням на деякій послідовності кіл логарифмічної похідної канонічного добутку нецілого порядку та покращеним розподілом його нулів на промені в термінах двочленної асимптотики (теорема 3).

Отримані результати доповнюють результати робіт [3–24]. Вони можуть бути використані для вивчення асимптотичної поведінки похідних від логарифмічної похідної цілих функцій покращеного регулярного зростання, а також при дослідженні базисів і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач в просторах аналітичних функцій [1, 2].

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Р. В. Хаць: концептуалізація, курація даних, координація і контроль, написання — оригінальний проект, рецензування та редагування. В. П. Ярмошик: формальний аналіз, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект.

Список використаної літератури

1. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monogr.* (Vol. 150). Amer. Math. Soc.: Providence, R.I. https://doi.org/10.1090/mmono/150
2. Gol'dberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (2008). *Value Distributions of Meromorphic Functions. Transl. Math. Monogr.* (Vol. 236). Amer. Math. Soc.: Providence, R.I. https://doi.org/10.1090/mmono/236
3. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud.,* 19(1), 97–105. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf
4. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud.,* 21(2), 140–150. https://doi.org/10.30970/ms.21.2.140-150 [in Ukrainian].
5. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud.,* 22(1), 105–110. https://doi.org/10.30970/ms.22.1.105-110 [in Ukrainian].
6. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.,* 24(1), 31–38. https://doi.org/10.30970/ms.24.1.31-38 [in Ukrainian].
7. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.,* 26(1), 17–24. https://doi.org/10.30970/ms.26.1.17-24
8. Khats', R. V. (2009). Asymptotics of the logarithmic derivative and logarithm of a canonical product of genus zero. *Actual problems of physics, mathematics and informatics,* (1), 54–56. Retrieved from http://ir.dspu.edu.ua/jspui/handle/123456789/6607 [in Ukrainian].
9. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of logarithmic derivatives of entire functions with improved distribution of zeros. *Actual problems of physics, mathematics and informatics,* (2), 41–43. Retrieved from http://ir.dspu.edu.ua/jspui/handle/123456789/6628 [in Ukrainian].
10. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud.,* 33(2), 215–219. https://doi.org/10.30970/ms.33.2.215-219 [in Ukrainian].
11. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ.,* 5(1), 129–133. https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133
12. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J.,* 7(1), 114–120. https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114
13. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ.,* 12(1), 46–54. https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54
14. Khats', R. V. (2022). Asymptotic behavior of a special canonical product. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 40(1), 82–93. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93 [in Ukrainian].
15. Logvinenko, V. N. (1972). On entire functions with zeros on the half-line. I. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 16, 154–158. Retrieved from https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2155 [in Russian].
16. Logvinenko, V. N. (1973). On entire functions with zeros on the half-line. II. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 17, 84–99. Retrieved from https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2179 [in Russian].
17. Agranovich, P. Z., & Logvinenko V. N. (2000). Exceptional sets for entire functions. *Mat. Stud.,* 13(2), 149–156. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf
18. Agranovich, P. Z. (2005). Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Mat. Stud.,* 23(2), 169–178. https://doi.org/10.30970/ms.23.2.169-178
19. Borova, O. I., & Zabolots'kyi, M. V. (2003). Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.,* 55(6), 873–884. https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f

20. Khats', R. V., & Yarmoshyk, V. P. (2025). A two-term asymptotics of entire functions with improved distribution of zeros on a ray. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 46(1), 119–132. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).119-132
21. Gol'dberg, A. A., & Korenkov, N. E. (1978). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth. *Ukr. Math. J.,* 30(1), 17–22. https://doi.org/10.1007/BF01130625
22. Gol'dberg, A. A., & Korenkov, N. E. (1980). Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth. *Sib. Math. J.,* 21(3), 363–375. https://doi.org/10.1007/BF00968180
23. Gol'dberg, A. A., & Strochik, N. N. (1985). Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and their logarithmic derivatives. *Sib. Math. J.,* 6(6), 802–809. https://doi.org/10.1007/BF00969100
24. Zabolotskii, N. V. (1999). Asymptotics of the logarithmic derivative of an entire function of zero order. *Ukr Math. J.,* 51(1), 34–43. https://doi.org/10.1007/BF02591912
25. Volkovyskii, L. I., Lunts, G. L., & Aramanovich, I. G. (1965). *A Collection of Problems on Complex Analysis.* Dover Publications, Inc.: New York.
26. Kalynets', R. Z., & Kondratyuk, A. A. (1998). On the regularity of the growth of the modulus and argument of an entire function in the metric of $L^p[0;2\pi]$. *Ukr. Math.,* 50(7), 1009–1018. https://doi.org/10.1007/BF02528830

Khats' R. V., Yarmoshyk V. P. The two-term asymptotics of the logarithmic derivative of a canonical product with improved distribution of zeros.

We investigate the connection between the regularity of the growth of the logarithmic derivative of an entire function of finite order and the improved distribution of its zeros on a positive ray in terms of the two-term asymptotics. In particular, for an entire function f of order $\rho \in (0;+\infty)\setminus\mathbb{N}$ defined by the Weierstrass canonical product of genus p, the asymptotic relation of the form

$$\left|f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi}) - H(\varphi;\Delta;\rho)r^{\rho-1} - H_1(\varphi;\Delta_1;\rho_1)r^{\rho_1-1}\right|\sin(\varphi/2) = o(r^{\rho_2-1}), \quad r \to +\infty,$$

holds uniformly in $\varphi \in (0;2\pi)$ under the improved two-term asymptotics of a counting function of its zeros

$$n(t) = \Delta t^{\rho} + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}),$$

as $t \to +\infty$, where $\Delta \in (0;+\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p+1$, $H(\varphi;\Delta;\rho) \in L^1(0;2\pi)$ and $H_1(\varphi;\Delta_1;\rho_1) \in L^1(0;2\pi)$.

Keywords: canonical product, logarithmic derivative, two-term asymptotics, entire function of completely regular growth, improved distribution of zeros.

Отримано: 03.11.2025 Прийнято: 25.11.2025 Опубліковано: 29.01.2026