УДК 519.86
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).232-242

Г. Г. Цегелик[1], П. С. Сеньо[2], М. І. Глебена[3], М. Г. Цегелик[4]

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4934-3181

[2] Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук
PetroSny@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9320-7638

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1100-515X

[4] ПП «Бінар» м. Львів, Україна,
директор
M.Tsehelyk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9413-0769

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ОСНОВІ ЙОГО СТРУКТУРНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

У роботі розглянуто актуальну проблему розв'язування задач дискретної оптимізації, зокрема задач булевого лінійного програмування. Запропоновано графоаналітичний підхід до знаходження оптимального плану, що базується на структурній інтерпретації простору розв'язків через побудову впорядкованого двійкового дерева. Описано методику формування рівнів дерева, де кожна гілка відповідає вибору значення змінної (0 або 1), а вершини впорядковані згідно з обраною стратегією індексації. Розроблено комплексний алгоритм, який складається з двох етапів: швидкого знаходження початкового допустимого розв'язку (рекорду) та ітераційного пошуку глобального оптимуму. Особливістю методу є використання правил відсікання безперспективних гілок та виявлення «прямих» (безальтернативних) шляхів, що дозволяє суттєво зменшити обчислювальну складність порівняно з повним перебором. Ефективність запропонованого підходу проілюстровано на прикладах.

Ключові слова: математична модель, булеве програмування, двійкове дерево рішень, структурна інтерпретація, наближений та оптимальний розв'язки задачі.

1. Вступ. Булеве програмування є важливим класом задач з дискретного програмування, до якого належать численні задачі дослідження операцій [3, 5, 8, 11], такі задачі як: розміщення виробництва, про призначення [2], фінансування інвестиційних проєктів, фінансування видів діяльності підприємства та інші [6, 7, 10]. Для розв'язування задачі можна використовувати як класичні методи, такі як метод гілок та меж [4], так і спеціалізовані, наприклад, адитивний алгоритм Балаша, який дає можливість будувати двійкове дерево рішень з ефективним відсіканням нерентабельних варіантів [1]. У роботі розглянуто структурну інтерпретацію задачі булевого програмування через побудову двійкового дерева рішень [9]. На основі запропонованої моделі розроблено алгоритм для визначення початкового допустимого розв'язку та пошуку глобального оптимуму.

2. Основний результат. Булеве програмування є потужним математичним інструментом, що дозволяє формалізувати та розв'язувати задачі вибору з дискретними рішеннями. Розглянемо математичну модель задачі булевого програмування:

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \to \max,$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{j,i} x_i \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

де, m — кількість операцій (або видів робіт); n — кількість різних ресурсів, що використовуються для виконання операцій; $a_{j,i}$ — кількість одиниць j-го ресурсу, необхідних для виконання i-тої операції; p_i — прибуток від виконання i-тої операції; b_j — запас j-го ресурсу;

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо виконується } i - \text{та операція;} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти цільової функції та обмежень є додатними, що характерно для багатьох реальних задач.

Розв'язування задачі будемо інтерпретувати у вигляді двійкового дерева рішень, яке має m рівнів. Кожній вершині дерева будемо ставити у відповідність значення 0 або 1.

Побудова дерева розв'язків відбувається поетапно від кореня до кінцевих вершин. При цьому змінним присвоюються значення у зворотному порядку їх нумерації: вершина першого рівня V_1 відповідає вибору змінної x_m, другого рівня – x_{m-1}, і так далі до змінної x_1, на останньому рівні. Перевірка виконання умов задачі здійснюється на кожному кроці для відповідного часткового набору змінних.

Кожному шляху від кореня дерева до кінцевих вершин ставиться у відповідність вектор змінних $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Вершини дерева V_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ на кожному рівні відповідають прийняттю рішення щодо значення змінної x_{m-k+1}.

Якщо на кроці k обмеження задачі дозволяють вибір як 0, так і 1, то від вершини розгалужуються дві гілки: ліва (відповідає $x_{k+1} = 1$) та права (відповідає $x_{k+1} = 0$). Якщо ж через обмеження задачі змінна може набувати лише одного значення, формується єдина гілка, що веде до відповідної вершини наступного рівня.

Приклад 1. *Нехай задача має вигляд:*

$$L = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 15x_4 + 25x_5 + 14x_6 \to \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 \le 12; \end{cases}$$

$$x_i \in \{0,\ 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Тоді частина дерева з п'ятьма шляхами, що йдуть від кореня дерева до кінцевих вершин, має вигляд рис. 1.

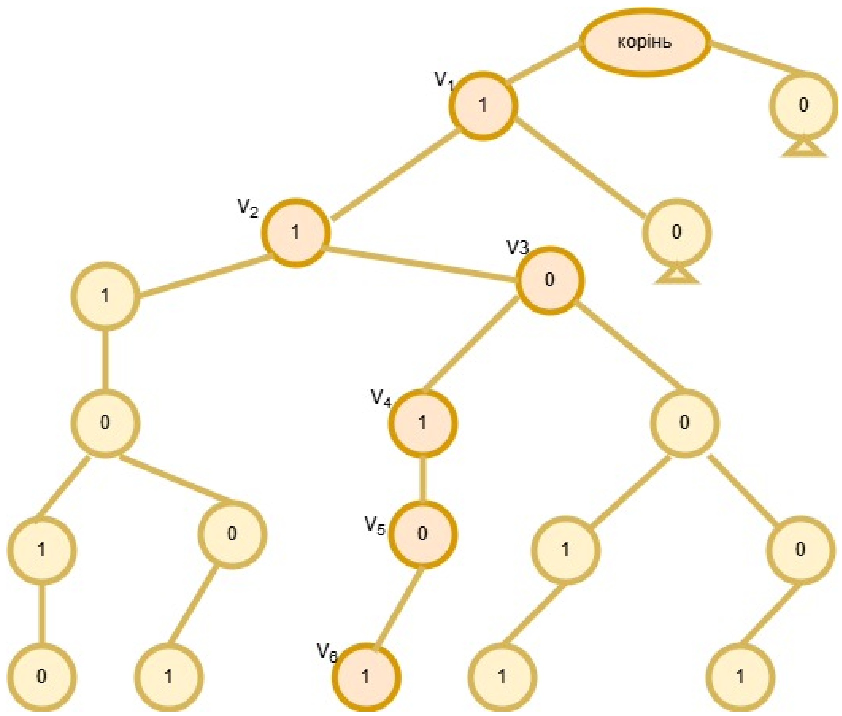

Рис. 1. Інтерпретація задачі у вигляді двійкового дерева.

Вершинам $V_1, V_2, \dots, V_6$ дерева, що лежать на шляху, який йде від кореня дерева до вершини V_6, відповідає частковий розв'язок $X = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L = 61$.

Вершинам дерева, які лежать на крайньому лівому шляху відповідає частковий розв'язок $X = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$, для якого $L = 74$. Такий частковий розв'язок береться за початковий при відшуканні оптимального розв'язку.

Розглянемо алгоритм відшукання початкового розв'язку задачі, який відповідає послідовності вершин, що лежать на крайньому лівому шляху.

Алгоритм відшукання початкового розв'язку задачі

Перший крок: покладаємо $x_m = 1$, $S_{j,m} = a_{j,m}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Другий крок: визначаємо

$$x_{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ S_{j,m} + a_{j,m-1} \le b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку}, \end{cases}$$

і покладаємо $S_{j,m-1} = \begin{cases} S_{j,m} + a_{j,m-1}, & \text{якщо } x_{m-1} = 1; \\ S_{j,m}, & \text{якщо } x_{m-1} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

Третій крок: визначаємо

$$x_{m-2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S_{j,m-1} + a_{j,m-2} \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

і покладаємо $S_{j,m-2} = \begin{cases} S_{j,m-1} + a_{j,m-2}, & \text{якщо } x_{m-2} = 1; \\ S_{j,m-1}, & \text{якщо } x_{m-2} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$.

І так далі ...

Нехай, на k-му кроці ($k = 4, 5, \ldots, m-1$) знайдено

$$x_{m-(k-1)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,m-(k-2)} + a_{j,m-(k-1)} \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases},$$

і визначено $S_{j,m-(k-1)} = \begin{cases} S_{j,m-(k-2)} + a_{j,m-(k-1)}, & \text{якщо } x_{m-(k-1)} = 1, \\ S_{j,m-(k-2)}, & \text{якщо } x_{m-(k-1)} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$.

Тоді при $k = m$ одержуємо

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad S_{j,2} + a_{j,1} \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Проілюструємо даний алгоритм на прикладі 1.

Перший крок:

Покладаємо $x_6 = 1$; $S_{1,6} = 5$, $S_{2,6} = 3$.

Визначаємо

$$S_{1,5} = S_{1,6} + a_{1,5} = 5 + 6 = 11,$$

$$S_{2,5} = S_{2,6} + a_{2,5} = 3 + 5 = 8.$$

Другий крок:

Визначаємо

$$x_5 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,5} \le 20, \quad S_{2,5} \le 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_5 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,4} = S_{1,5} + a_{1,4} = 14,$$

$$S_{2,4} = S_{2,5} + a_{2,4} = 10.$$

Третій крок:

Визначаємо

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,\ 4} \le 20, \quad S_{2,\ 4} \le 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_4 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,3} = S_{1,4} + a_{1,3} = 18,$$

$$S_{2,3} = S_{2,4} + a_{2,3} = 13.$$

Четвертий крок:

Визначаємо

$$x_3 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,3} \le 20, \quad S_{2,3} \le 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_3 = 0$.

Покладаємо

$$S_{1,2} = S_{1,4} + a_{1,2} = 19,$$

$$S_{2,2} = S_{2,4} + a_{2,2} = 12;$$

П'ятий крок:

Визначаємо

$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,2} \le 20, \quad S_{2,2} \le 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_2 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,1} = S_{1,2} + a_{1,1} = 21,$$

$$S_{2,1} = S_{2,2} + a_{2,1} = 13;$$

Шостий крок:

Визначаємо

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,1} \le 20, \quad S_{2,1} \le 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_1 = 0$.

Отже, частковим розв'язком є: $X = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$, для якого $L = 74$.

Використовуючи алгоритм відшукання початкового розв'язку, розглянемо алгоритм пошуку оптимального розв'язку. При розгляді алгоритму вважатимемо, що двійкове дерево рішень є побудованим.

Алгоритм пошуку оптимального розв'язку. Розглядаємо крайній лівий шлях від кореня дерева до кінцевої вершини. Визначаємо відповідний йому розв'язок X_1 та обчислюємо значення цільової функції L_1. Вершини дерева, які лежать на даному шляху, від яких відходить гілка вправо в порядку спадання номерів рівнів, позначимо через $V_1, V_2, \ldots, V_k$. Нехай $r_1, r_2, \ldots, r_k$ номери рівнів, на яких знаходяться відповідно дані вершини. Використовуючи алгоритм знаходження початкового часткового розв'язку, одержуємо такі значення S_{j,r_s} $(s = 1, 2, \ldots, k)$, які відповідають вершинам V_s: вершині V_k відповідає значення $S_{j,r_k} = S_{j,m} = a_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, n$; вершині V_i $(i = k-1, k-2, \ldots, 1)$ відповідає $S_{j,r_i} = S_{j,r_{i+1}} + a_{j,r_i}$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Розглядаємо в порядку слідування всі шляхи, що йдуть від вершин $V_1, V_2, \ldots,$ V_k до відповідних кінцевих вершин і на кожному з них фіксуємо вершини, від яких відходить гілка вправо. Першою вершиною таких гілок є вершина зі значенням 0. Якщо вершина від якої відходить гілка вправо знаходиться на r-му рівні, якій відповідає $S_{j,r}$, то це значення буде відповідати і першій вершині правої гілки.

Першу вершину правої гілки, що відходить із вершини V_1 позначимо через V'_{r_1+1}, якій відповідає значення S_{j,r_1}. З даної вершини відходить низка шляхів до відповідних кінцевих вершин. В порядку слідування шляхів знаходимо компоненти часткових розв'язків, які відповідають послідовності їх вершин.

Перехід від довільної вершини V_i, де

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i} = S_{j,i+1} + a_{j,i} \le b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{якщо } S_{j,i} = S_{j,i+1}, \end{cases}$$

до вершини V_{i+1} вздовж лівої, правої чи прямої гілки відбувається за схемою: покладаємо $S_{j,i+1} = \begin{cases} S_{j,i} + a_{j,i+1}, & \text{якщо } x_i = 1; \\ S_{j,i}, & \text{якщо } x_i = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$ і визначаємо $x_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i} + a_{j,i+1} \le b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$

Зауважимо, якщо вершина V_i знаходиться на l-му рівні, то останні l-компоненти часткових розв'язків, які відповідають послідовності вершин, що лежать на шляхах, які проходять через вершину V_i, є однаковими.

Позначимо через $X_2, X_3, \ldots, X_{s_1}$ в порядку слідування часткові розв'язки, які відповідають послідовності вершин, що лежать на відповідних шляхах які проходять через вершину V'_{r_1+1}, а через $L_2, L_3, \ldots, L_{s_1}$ значення цільової функції для них.

Нехай першою вершиною правої гілки, що відходить від вершини V_2 є вершина V'_{r_2+1}, якій відповідає значення S_{j,r_2}. З цієї вершини, значення якої 0, відходить певна кількість шляхів до відповідних кінцевих вершин. Знаходимо часткові розв'язки, що відповідають цим кінцевим шляхам, і значення цільової функції для них. Позначимо через $X_{s_1+1}, X_{s_1+2}, \ldots, X_{s_2}$ — часткові розв'язки, а $L_{s_1+1}, L_{s_1+2}, \ldots, L_{s_2}$ — значення цільової функції для них. І так далі ...

Процес продовжується до вершини V_k включно. Надалі, за необхідності, здійснюється перехід до розгляду гілок правого піддерева.

Таким чином, одержано послідовність часткових розв'язків $X_1, X_2, \ldots, X_{s_k}$ і значення цільової функції для них $L_1, L_2, \ldots, L_{s_k}$. Якщо $\max\limits_{1 \le i \le s_k} L_i = L_s$, то розв'язком задачі є X_s.

Проілюструємо алгоритм на прикладі 2.

Приклад 2. *Нехай задача має вигляд*

$$L = 30x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 20x_5 + 30x_6 \to \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 5x_6 \le 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 3x_6 \le 17; \end{cases}$$

$$x_i \in \{0,\ 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Двійкове дерево рішень для цієї задачі є таким рис. 2

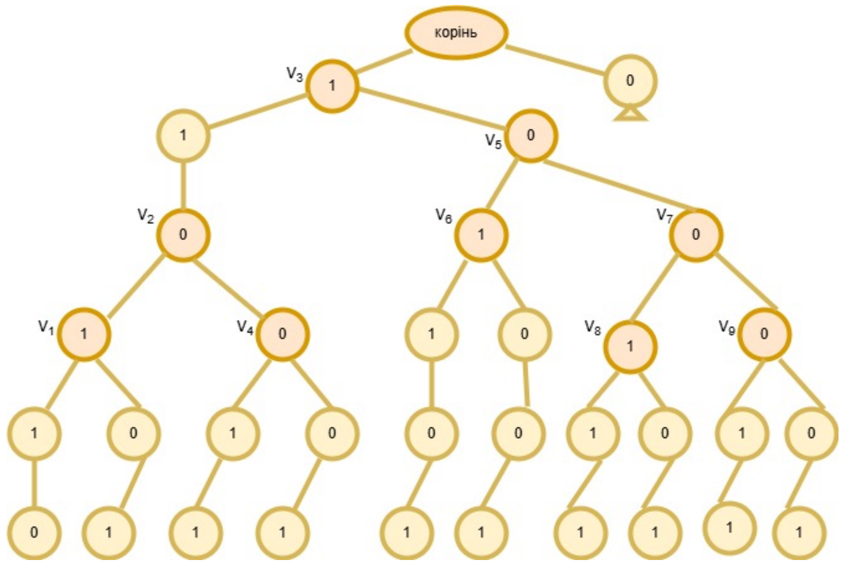

Рис. 2. Двійкове дерево рішень.

Розглянемо ліве піддерево та позначимо через $V_1, V_2, \ldots, V_9$, вершини дерева, від яких відходить гілка вправо.

Послідовність вершин, які знаходяться на крайньому лівому шляху, що йде від кореня дерева до кінцевої вершини, відповідає частковий розв'язок $X_1 = (0, 1, 1, 0, 1, 1)$, для якого значення цільової функції $L_1 = 95$.

Розглянемо праву гілку, що відходять від вершини V_1, яка знаходиться на четвертому рівні. Тоді значення компонент часткового розв'язку є такими: $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$. Вершині V_1 відповідає значення $S_{j,3} = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$, то дане значення відповідає і першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_2 = 0$). Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$ і $S_{j,1} = \begin{cases} 12 \\ 16 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Другим частковим розв'язком є: $X_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L_2 = 100$.

Розглянемо гілку, що відходять вправо від вершини V_2, яка знаходиться на третьому рівні, тому $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$. Від вершини V_2 до кінцевих вершин відходить два шляхи. Розглянемо перший шлях (ліву гілку).

Вершині V_2 відповідає значення $S_{j,4} = S_{j,5} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$, тому дане значення відповідає і першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_3 = 0$). Тому $S_{j,3} = S_{j,4} = S_{j,5} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$; звідси $S_{j,2} = \begin{cases} 13 \\ 13 \end{cases}$; $x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 15 \\ 17 \end{cases}$; $x_1 = 1$. Третім частковим розв'язком є $X_3 = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$, для якого $L_3 = 105$.

На другому шляху цієї гілки є вершина V_4 значення якої 0 ($x_3 = 0$). Оскільки дана вершина знаходиться на четвертому рівні, то $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1$. Вершині V_4 відповідає значення $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$. Дане значення буде відповідати і першій вершині правої гілки, що виходить із вершини V_4.

Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$, $x_2 = 0$; $S_{j,1} = \begin{cases} 11 \\ 14 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Четвертим частковим розв'язком є $X_4 = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$, для якого $L_4 = 80$.

Розглянемо праву гілку, яка виходить із вершини V_3, значення якої 1 ($x_6 =$ $= 1$), якій відповідає значення $S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Дане значення буде відповідати першій вершині правої гілки, яка виходить із вершини V_3 значення якої 0 $(x_5 = 0)$, тобто $S_{j,5} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Якщо розглядати лівий шлях, що відходить від цієї вершини, то одержуємо $S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$, $x_4 = 1$; $S_{j,3} = \begin{cases} 14 \\ 11 \end{cases}$, $x_3 = 1$. Оскільки $S_{j,2} = \begin{cases} 18 > 16 \\ 14 \end{cases}$, то $x_2 = 0$. Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 14 \\ 11 \end{cases}$, $x_2 = 0$; і $S_{j,1} = \begin{cases} 16 \\ 15 \end{cases}$, $x_1 = 1$. П'ятим частковим розв'язком є $X_5 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$, для якого $L_5 = 110$.

Розглянемо праву гілку, яка виходить із вершини V_6. Оскільки дана вершина знаходиться на третьому рівні, то $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Вершині V_6 відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$, то воно відповідає і першій вершині правої гілки, значення якої 0 $(x_3 = 0)$. Отже, $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$. Оскільки $S_{j,2} = \begin{cases} 17 > 16 \\ 12 \end{cases}$, то $x_2 = 0$ і $S_{j,2} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$. Тоді $S_{j,1} = \begin{cases} 15 \\ 13 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Шостим частковим розв'язком є $X_6 =$ $= (1, 0, 0, 1, 0, 1)$, для якого $L_6 = 90$.

Розглядаємо гілку, яка відходить вправо від вершини V_5, даній вершині відповідає значення $S_{j,5} = S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$.

Оскільки вершина V_5 знаходиться на другому рівні, то $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Першою вершиною правої гілки є вершина V_7, значення якої 0 $(x_4 = 0)$. Даній вершині відповідає значення $S_{j,4} = S_{j,5} = S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. При розгляді лівого шляху, що відходить від вершини V_7, одержуємо $S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$, $x_3 = 1$; $S_{j,2} = \begin{cases} 10 \\ 8 \end{cases}$, $x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 12 \\ 12 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Сьомим частковим розв'язком є $X_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$, для якого $L_7 = 105$.

Розглянемо правий шлях, який відходить від вершини V_8, якій відповідає значення $S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$. Оскільки вершина V_8 знаходиться на четвертому рівні, то $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Від вершини V_8 відходить гілка вправо, перша вершина якої має значення 0 $(x_2 = 0)$, якій відповідає значення $S_{j,2} =$

$= S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$. Тоді $S_{j,1} = \begin{cases} 8 \\ 9 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Восьмим частковим розв'язком є $X_8 =$ $= (1, 0, 1, 0, 0, 1)$, для якого $L_8 = 85$.

Від вершини V_7, якій відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, відходить гілка вправо. Це значення буде відповідати і першій вершині правої гілки, тобто вершині V_9, яка має значення 0 ($x_3 = 0$). Вершина V_9 знаходиться на четвертому рівні, тому $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 1$.

Розглядаємо лівий шлях, що виходить із вершини V_9. Оскільки $S_{j,3} = S_{j,4} =$ $= \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, то $S_{j,2} = \begin{cases} 9 \\ 6 \end{cases}$, $x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 11 \\ 10 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Дев'ятим частковим розв'язком є $X_9 = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$, для якого $L_9 = 85$.

Розглядаємо праву гілку, що виходить із вершини V_9, якій відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Це значення також відповідає першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_2 = 0$), та яка виходить із вершини V_9. Оскільки $S_{j,3} = S_{j,4} =$ $= \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, то $S_{j,2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, $S_{j,1} = \begin{cases} 7 \\ 7 \end{cases}$, $x_1 = 1$.

Десятим частковим розв'язком є $X_{10} = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$, для якого $L_{10} = 60$.

Оскільки $\max\limits_{1 \le i \le 10} L_i = L_5$, то $X_{\text{оп}} = X_5 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$, для якого $L_{\text{оп}} = 110$.

Можна показати, що значення цільової функції для часткових розв'язків правого піддерева менше за 110, тому воно не розглядається.

Зауваження 1. *Гілку з вершини V_9, та праві відгалуження від вершин V_8, V_6, V_4 можна не розглядати через ідентичність їх параметрів. Зокрема, характеристики лівої гілки вершини V_9 дублюють відповідні значення для вершини V_8.*

3. Висновок. У статті розглянуто та обґрунтовано новий комбінаторний підхід до розв'язування задач оптимізації з булевими змінними. Ключовим елементом запропонованої методики є побудова двійкового дерева рішень, структура якого дозволяє ефективно організувати процес галуження та перевірки обмежень. Розроблено алгоритми для відшукання початкового розв'язку та його послідовної оптимізації. Наведені чисельні приклади підтверджують, що запропонований підхід забезпечує знаходження оптимального розв'язку за скінченну кількість кроків, мінімізуючи обчислювальну складність завдяки своєчасному відсіканню недопустимих варіантів.

Конфлікт інтересів

Глебена Мирослава Іванівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Г. Г. Цегелик: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, П. С. Сеньо: формальний аналіз, методологія, написання – оригінальний проект. М. І. Глебена: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання – рецензування та редагування. М. Г. Цегелик: формальний аналіз, написання – рецензування та редагування.

Авторські права ©

(2026). Цегелик Г. Г., Сеньо П. С., Глебена М. І., Цегелик М. Г. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Balas, E. (1965). An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research,* 13(4), 517–546.
2. Burkard, R. E., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2009). *Assignment problems.* SIAM.
3. Hnatenko, I. M., Liashenko, V. I., & Manhasarian, A. V. (2013). *Boolean programming: theory and practice.* KNEU.
4. Hooker, J. N. (2000). *Logic-based methods for optimization: combining optimization and constraint satisfaction.* Wiley.
5. Katrenko, A. V. (2004). *Operations research.* Mahnoliia Plius.
6. Katrenko, A. V., & Pasternak, O. V. (2014). System aspects of investment in information technology. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika",* 805, 402–411.
7. Katrenko, A. V., & Pasternak, O. V. (2017). Mathematical models of investment in information technology. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Seriia: Informatsiini systemy ta merezhi.*
8. Lavrov, Ye. A., Perkhun, L. P., & Shendryk, V. V. (2017). *Mathematical methods of operations research.* Sumskyi derzhavnyi universytet.
9. Tsehelyk, H. H., & Tsehelyk, M. H. (2025, December 15–17). A new approach to solving

Boolean programming problems. In *Proceedings of the XII International Scientific and Practical Conference "Global trends in science and education",* 517–523. Kyiv, Ukraine.
10. Tsehelyk, H. H., Tsehelyk, M. H., Dobuliak, L. P., & Piadko, O. Ya. (2025, September 11–13). Mathematical model of the problem of optimal financing of investment projects and an approximate method of its solution. In *Proceedings of the I International Scientific and Practical Conference "Science, technology and global challenges",* 251–258. Tokyo, Japan.
11. Zaichenko, Yu. P. (2005). *Operations research.* Vydavnychyi tsentr "Akademiia".

Tsehelyk H. H., Senio P. S., Hlebena M. I., Tsehelyk, M. H. An approach to solving boolean programming problems based on structural interpretation.

The paper addresses the relevant problem of solving discrete optimization tasks, specifically Boolean linear programming problems. A graph-analytical approach to finding an optimal plan is proposed, based on the structural interpretation of the solution space through the construction of an ordered binary decision tree. The paper describes the methodology for forming tree levels, where each branch corresponds to selecting a variable value (0 or 1), and vertices are ordered according to a chosen indexing strategy. A comprehensive algorithm is developed, consisting of two stages: rapidly finding an initial feasible solution (record) and iteratively searching for the global optimum. A distinctive feature of the method is the use of pruning rules for non-promising branches and the identification of "direct" (alternative-free) paths, which significantly reduces computational complexity compared to exhaustive search. The effectiveness of the proposed approach is illustrated with examples.

Keywords: mathematical model, Boolean programming, binary decision tree, structural interpretation, approximate and optimal solutions to the problem.

Отримано: 15.11.2025 Прийнято: 04.12.2025 Опубліковано: 29.01.2026