УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).13-20

В. М. Бондаренко[1], О. В. Зубарук[2]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук, професор
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

ОПИС АЛГЕБР АУСЛЕНДЕРА НЕКОМУТАТИВНИХ ІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

У сучасній теорії зображень, на відміну від класичної лінійної алгебри, важливу роль (чи навіть вирішальну, як в деяких західних алгебраїчних школах) відіграють відповідні категорії зображень. Однією з форм опису таких категорій над полем є обчислення їхніх алгебр Ауслендера як алгебр ендоморфізмів прямої суми представників класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такий опис особливо ефективний у випадках скінченного зображувального типу. Раніше (в сумісних статтях та статтях другого автора) описано алгебри Ауслендера для комутативних напівгруп третього порядку. Ця робота розпочинає аналогічні дослідження для некомутативних напівгруп.

Ключові слова: ідемпотентна напівгрупа, матричне зображення, скінченний зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Стаття присвячена категоріям матричних зображень напівгруп третього порядку. Такі напівгрупи описано в термінах таблиць Келі ще в 50-х роках минулого століття: вперше в 1953 році Т. Тамурою [1], а в 1955 році за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайтом [2]. Зауважимо, що напівгрупи другого порядку не вимагають окремого розгляду, оскільки вони вкладаються в напівгрупи третього порядку шляхом зовнішнього приєднання одиничного чи нульового елемента. Проте мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку було вказано лише біля 10 років тому першим автором разом з одним із його учнів [3, 4]. Це дало їм можливість (див. [5]) дослідити зображення цих напівгруп над довільним полем методами Київської школи з теорії матричних задач. А саме, вперше було доведено, що всі напівгрупи третього порядку є ручними, а, окрім однієї комутативної та двох взаємно дуальних некомутативних напівгруп, — навіть скінченного зображувального типу. В останньому випадку ними також вказано канонічні форми матричних зображень (а значить і нерозкладні матричні зображення як переставно нерозкладні компоненти канонічних форм).

Підкреслимо, що в сучасній теорії зображень, на відміну від класичної лінійної алгебри, важливу роль (чи навіть вирішальну, як в деяких західних алгебраїчних школах) відіграють відповідні категорії зображень. Повністю описати таку категорію – значить вказати в явному вигляді представники всіх класів еквівалентності та описати множини морфізмів для двох довільних представників. Однією з форм опису категорій зображень є обчислення їхніх алгебр Аусленлера як алгебр ендоморфізмів прямої суми представників усіх класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такий опис особливо ефективний у випадках скінченного зображувального типу.

Раніше (в сумісних статтях та статтях другого автора) описано алгебри Аусленлера для комутативних напівгруп третього порядку. Ця робота розпочинає аналогічні дослідження для некомутативних напівгруп.

2. Постановка завдання. Тематика статті пов'язана з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач для дослідження матричних зображень скінченних напівгруп малих порядків (щоб після аналізу отриманих результатів використати їх у більш загальних випадках). Мова в першу чергу йде не про опис матричних зображень (такі результати отримані раніше), а про опис категорій зображень. Більш конкретно: у випадках, коли напівгрупа має скінченний зображувальний тип (тобто скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), задача полягає в обчисленні її алгебри Аусленлера в матричному вигляді (як одного із способів опису категорії зображень) та задання її у вигляді таблиці множення для деяких фіксованих базисних елементів. У цій статті така задача ставиться для некомутативних ідемпотентних напівгруп третього порядку.

3. Огляд літератури. У статті [5] вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, тобто зі скінченним числом класів еквівалентності нерозкладних зображень. Це стало можливим у зв'язку з тим, що раніше [3, 4] цими ж авторами для таких напівгруп були вказані мінімальні системи твірних і відповідні системи визначальних співвідношень.

Ми виключаємо з розгляду напівгрупи, які є найпростішими і з точки зору теорії напівгруп, і з точки зору теорії зображень. Це напівгрупи, які є або циклічними, або майже циклічними (тобто згідно з нашим означенням можуть бути отримані з циклічних зовнішнім приєднанням одиничного чи нульового елемента; або обох). Оскільки згідно з означенням матричного зображення напівгрупи її одиничному та нульовому елементам (якщо вони є) відповідають одинична та нульова матриці, зображення таких напівгруп задається однією матрицею. Цей випадок добре відомий з класичної лінійної алгебри.

Якщо не розглядати циклічні та майже циклічні напівгрупи, то згідно з результатами роботи [5] комутативні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються з точністю до ізоморфізму, наступними напівгрупами:

$(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

$(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$ $bc = c$, $cb = c$.

Тут у круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, в кутових — мінімальна система твірних, а потім виписано визначальні співвідношення. Через 0 та e позначається відповідно нульовий та одиничний елементи. Тривіальні визначальні співвідношення для них не виписуються і надалі з формальних міркувань не називаються визначальними.

Матричні алгебри Ауслендера над довільним полем для таких напівгруп (разом з деякими їхніми наднапівгрупами) описані в працях [6–10].

Ця стаття присвячена опису алгебр Ауслендера некомутативних ідемпотентних напівгруп (тобто таких, всі елементи яких – ідемпотенти).

4. Формулювання основних результатів.

4.1. Основні означення. З формальних міркувань всі напівгрупи вважаються скінченними. *Матричним зображенням напівгрупи S розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K* називається довільний гомоморфізм $T : x \to T(x)$ із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K. Якщо напівгрупа задана твірними та визначальними співвідношеннями, то матричне зображення однозначно задається набором матриць, що відповідають твірним, та відповідними співвідношеннями між цими матрицями. Природно вважати, що у випадку, коли напівгрупа S має одиничний (відповідно нульовий) елемент, одиничному (відповідно нульовому) елементу відповідає одинична (відповідно нульова) матриця (див. [11]).

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для всіх $x \in S$.

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$T \oplus T'(x) := T(x) \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array}\right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють категорію $Rep_K(S)$, об'єктами якої є всі зображення, а множина морфізмів $Hom(T, T')$ з об'єкту T розмірності n в об'єкт T' розмірності m складається із всіх матриць Y розміру $n \times m$ таких, що $T(x)Y = YT'(x)$ для довільного $x \in S$. Зрозуміло, що коли в напівгрупі зафіксована система твірних, то рівності $T(x)Y = YT'(x)$ достатньо розглядати лише для елементів цієї системи (до того ж відмінних від 0 та e, якщо такі є).

Нехай S — напівгрупа скінченного зображувального типу, тобто має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень. Зафіксуємо представники $T_1, \dots, T_s$ в цих класах. *Алгеброю Ауслендера $Aus_K(S)$ напівгрупи S над полем K* називається алгебра

$$End(T_1 \oplus \cdots \oplus T_s) := Hom(T_1 \oplus \cdots \oplus T_s, T_1 \oplus \cdots \oplus T_s)$$

ендоморфізмів прямої суми представників $T_1, \dots, T_s$. Вона не залежить від вибору представників та їх нумерації в тому сенсі, що відповідні алгебри Ауслендера будуть ізоморфними (і навіть спряженими в повній матричній алгебрі $M_n(K)$, де n — сума розмірностей матричних зображень $T_1, \dots, T_s$). З подібних причин на практиці часто зручно замість прямих сум зображень брати перестановно еквівалентні їм зображення. З природних міркувань ці два поняття ототожнюються (бо коли матричним зображенням зіставити лінійні оператори в скінченновимірних векторних просторах, то при заданні операторів у деякому базисі порядок розташування базисних елементів не має ніякого значення).

Щоб підкреслити, що розглядаються саме матричні зображення напівгруп, алгебру Ауслендера, будемо також називати матричною алгеброю Ауслендера.

4.2. Основні теореми. Згідно з результатами роботи [5] некомутативні ідемпотентні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються з точністю до ізоморфізму, наступними напівгрупами:

$S_1 : (bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $cb = c$;

$S_1^{op} : (bc, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = c$;

$S_2 : (0, b, c) = \langle 0, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$;

$S_3 : (e, b, c) = \langle e, b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = b$, $cb = c$.

Тут S_1^{op} позначає напівгрупу, дуальну до напівгрупи S_1 (тобто таку, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку).

Наступні теореми описують алгебри Ауслендера всіх цих напівгруп.

Теорема 1. *Алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$ ізоморфна алгебрі з K-базисом λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_6$ і наступною таблицею множення:*

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
λ_1	λ_1	0	0	0	λ_5	0
λ_2	λ_2	0	0	0	0	0
λ_3	0	λ_2	λ_3	0	0	0
λ_4	0	0	0	λ_4	0	0
λ_5	0	0	0	0	0	λ_5
λ_6	0	0	0	0	0	λ_6

.

Теорема 2. *Алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ ізоморфна алгебрі, дуальній до алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$.*

Теорема 3. *Алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_2)$ і $\mathcal{A}_K(S_3)$ ізоморфна алгебрі з K-базисом $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_5$ і наступною таблицею множення:*

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
γ_1	γ_1	0	0	γ_4	0
γ_2	γ_2	0	0	0	0
γ_3	0	γ_2	γ_3	0	0
γ_4	0	0	0	0	γ_4
γ_5	0	0	0	0	γ_5

.

Окрім того, при доведенні цих теорем будуть обчислені матричні алгебри Ауслендера всіх вказаних напівгруп.

5. Доведення теорем 1 і 2. Обчислимо спочатку матричну алгебру Ауслендера напівгрупи S_1.

Розглянемо матричне зображення напівгрупи S_1, яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2 [5]):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення переставно подібне прямій сумі зображень

1) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$

2) $B_2 = (1),\ C_2 = (1);$

3) $B_3 = (1),\ C_3 = (0);$

4) $B_4 = (0),\ C_4 = (0),$

кожне з яких є, очевидно, нерозкладним.

Оскільки довільне зображення, що має канонічний вигляд, не містить інших прямих нерозкладних доданків, окрім 1)–4) (бо при наявності одиничної клітини E порядку $s > 1$ воно еквівалентне прямій сумі s канонічних зображень меншої розмірності), то зображеннями 1)–4) вичерпуються всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення напівгрупи S_1. Отже, матрична алгебра Ауслендера задається рівностями $B_0X = XB_0$, $C_0X = XC_0$ як рівняннями відносно матриці $X = (x_{ij})$, $1 \le i, j \le 5$.

Оскільки для $a \neq b$ і одиничних матриць E, E' рівність

$$\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE' \end{pmatrix}$$

еквівалентна рівностям $(a-b)Y_{12} = 0$, $(b-a)Y_{21} = 0$, а значить $Y_{12} = 0$, $Y_{21} = 0$, то як частинний випадок, із рівності $B_0X = XB_0$ маємо, що $x_{ij} = 0$ для $i = 1, 2, 3, j = 4, 5$ і для $i = 4, 5, j = 1, 2, 3$.

Розглянемо тепер рівність $C_0X = XC_0$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_3 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_3 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{11} = x_{44}$, $x_{12} = 0$, $x_{54} = 0$.

Отже, доведене наступне твердження.

Теорема 4. *Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$ над полем K складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K.

Позначимо через e_{ij}, де $1 \le i, j \le 5$, матрицю, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на всіх інших місцях – нульовий. Із теореми 4 випливає, що матриці $e_{11}+e_{44}$, e_{21}, e_{22}, e_{33}, e_{45}, e_{55} утворюють базис алгебри $\mathcal{A}(S_1)$. Враховуючи, що $e_{ij}e_{sk} = e_{ik}$, якщо $j = s$, і $e_{ij}e_{sk} = 0$, якщо $j \ne s$, маємо наступну таблицю множення:

	$e_{11}+e_{44}$	e_{21}	e_{22}	e_{33}	e_{45}	e_{55}
$e_{11}+e_{44}$	$e_{11}+e_{44}$	0	0	0	e_{45}	0
e_{21}	e_{21}	0	0	0	0	0
e_{22}	0	e_{21}	e_{22}	0	0	0
e_{33}	0	0	0	e_{33}	0	0
e_{45}	0	0	0	0	0	e_{45}
e_{55}	0	0	0	0	0	e_{55}

Ввівши позначення $\lambda_1 = e_{11}+e_{44}$, $\lambda_2 = e_{21}$, $\lambda_3 = e_{22}$, $\lambda_4 = e_{33}$, $\lambda_5 = e_{45}$, $\lambda_6 = e_{55}$, отримаємо таблицю, вказану в умові теореми 1.

Оскільки матриці $T'(x)$, транспоновані до матриць $T(x)$ зображення T, задають зображення дуальної напівгрупи (бо $[T(x)T(y)]' = T'(y)T'(x)$), то матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ задається матрицею, транспонованою до матриці, вказаній в теоренмі 4. І, отже, теорема 2 випливає із теореми 1.

6. Доведення теореми 3. Напівгрупи S_2 і S_3 є фактор-напівгрупами напівгрупи S_1: вони мають додаткове визначальне співвідношення $bc = b$. Тоді їхніми нерозкладними матричними зображеннями будуть зображення B_1, B_2 і B_4, а зображення B_3 вже не буде (див. доведення теореми 1). Зображенню B_3 в матрицях B_0 і C_0 (як прямій сумі в переставно еквівалентному варіанті всіх нерозкладних зображень B_i) відповідають треті рядки і треті стовпці. Отже, матриці B_0' і C_0', які отримуються із матриць B_0 і C_0 викреслюванням третіх рядків і стовпців, будуть задавати зображення переставно еквівалентне прямій сумі всіх (з точністю до еквівалентності) нерозкладних зображень напівгруп S_2 і S_3. Тоді їхні алгебри Ауслендера задаються рівностями $B_0'Y = YB_0'$ і $C_0'Y = YC_0'$. Легко бачити, що матриця Y задовольняє ці рівності тоді і лише тоді, коли вона має вигляд матриці X, вказаній в теоремі 4 з викресленими третім рядком і третім стовпцем. Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 5. *Матричні алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_2)$ і $\mathcal{A}_K(S_3)$ над полем K складаються з усіх матриць вигляду*

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{11} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & y_{44} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Із приведених вище міркувань випливає таке твердження.

Теорема 6. *Алгебри Ауслендера $\mathcal{A}(S_2)$ і $\mathcal{A}(S_3)$ ізоморфні фактор-алгебрі алгебри Ауслендера $\mathcal{A}(S_1)$ за двостороннім ідеалом I, породженим базисним елементом λ_4.*

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення над полем некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Для таких напівгруп описано алгебри Ауслендера над довільним полем в абстрактному та матричному виглядах.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Конфлікт інтересів

Бондаренко Віталій Михайлович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Бондаренко В. М.: постановка задачі та методологія,
Зубарук О. В.: доведення теорем та редагування.

Список використаної літератури

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.,* 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2013). On the defining relations for the minimal

systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov. Series of Physics and Mathematics,* 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.,* 20(1), 32–39.
5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 32(1), 36–49. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).36-49 [in Ukrainian].
6. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin of Taras Shevchenko University of Kyiv. Series of Physics and Mathematics,* 3, 110–114 [in Ukrainian].
7. Zubaruk, O. V. (2020) On the Auslander algebra of one commutative semigroup of finite representation type. *Applied problems of mechanics and mathematics,* 18, 43–47. https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.43-47 [in Ukrainian].
8. Zubaruk, O. V. (2021) On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 38(1), 48–54. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).48-54 [in Ukrainian].
9. Bondarenko, V, M., & Zubaruk, O. V. (2022). On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 41(2), 23–28. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).23-28 [in Ukrainian].
10. Bondarenko, V, M., & Zubaruk, O. V. (2023). On the Auslander algebra over a field of characteristic two of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 42(1), 12–17. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).12-17
11. Bondarenko, V, M., & Zubaruk, O. V. (2024). Σ-functions of the categories of matrix representations of nilpotent semigroups. *J. Math. Sci. (N.Y),* 282(5), 601–615. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07205-x

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. Describing the Auslander algebras of noncommutative idempotent semigroups of third order.

In modern representation theory, unlike classical linear algebra, an important role (or even a decisive one, as in some Western algebraic schools) is played by the corresponding representation categories. One form of describing such categories over a field is to calculate their Auslander algebras as algebras of endomorphisms of the direct sum of representatives of the equivalence classes of indecomposable representations. Such a description is especially effective in cases of a finite representation type. Earlier (in related articles and articles by the second author) Auslander algebras for commutative semigroups of the third order have been described. This work begins analogous studies for noncommutative semigroups.

Keywords: idempotent semigroup, matrix representation, representation type, canonical form, Auslander algebra.

Отримано: 07.12.2025 Прийнято: 22.12.2025 Опубліковано: 29.01.2026