УДК 539.3
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).38-46

А. Ю. Глухов[1], С. Ю. Бабич[2], Ю. Ю. Млавець[3]

[1] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-0579-9046

[2] Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2642-9115

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СТИСЛИВОГО НАПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка та метод розв'язку просторової усталеної задачі про збудження двошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з сталою швидкістю. Розглянута тривимірна модель шаруватого середовища «пластина і попередньо напружений напівпростір». Рівняння руху пластини записуються з врахуванням зсуву та інерції обертання. Контакт між пластиною і напівпростором є нежорсткий. Фундаментальний розв'язок задачі отримано з допомогою метода інтегральних перетворень Фур'є.

Ключові слова: початкові напруження; навантаження, що рухається з сталою швидкістю; двошаровий півпростір; стисливий матеріал.

1. Вступ. Проблема взаємодії пластини з пружним півпростором у тривимірній постановці активно досліджується з початку XX століття. Фундаментальні результати у теорії хвиль у пружних тілах належать Дж. Ахенбаху [2], К. Граффу [6] та Дж. Мікловіцу [10], які заклали основу для опису поверхневих та об'ємних хвиль у півпросторі. Подальший розвиток контактних задач і застосування теорії пластин із врахуванням зсуву започатковано у роботах Е. Рейснера [12] та Р. Міндліна [11], а систематизований огляд таких моделей наведено у монографії Селвадурая [13].

Суттєвий прогрес у дослідженні тривимірної взаємодії пластини з півпростором досягнуто в роботах Каузела [8], Апсела і Луко [9], де були сформовані ефективні методи інтегральних перетворень Фур'є для багатошарових основ. За останні роки з'явилася низка робіт, присвячених впливу рухомих і високошвидкісних навантажень, умов контакту та початкових напружень у шаруватих середовищах [4, 5, 7, 14, 15 та інші]. Ці дослідження продемонстрували необхідність точних 3D-моделей для коректного опису хвильових процесів, зокрема в транс- та надзвукових режимах.

У даній роботі розглянута просторова усталена задача про збурення двошарового стисливого напівпростору з початковими напруженнями рухомим поверхневим навантаженням.

Дослідження були проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями [1]. У лінеаризованій теорії пружності для тіл з початковими напруженнями та деформаціями передбачається, що збуреному стану тіла передує деякий початковий стан з відмінними від нуля напруженнями та деформаціями. При цьому розглядаються лише малі додаткові напруження (збурення) порівняно з напруженнями у початковому стані. Така теорія на відміну від лінійної класичної теорії пружності найповніше відбиває властивості реальних деформованих тіл.

Припускаємо, що рух верхнього шару може бути описаний системою рівнянь з теорії пластин, що враховує вплив інерції обертання та поперечного зсуву.

Підстилаючий півпростір має початкові напруження і складається з стисливого матеріалу з довільним пружним потенціалом. До вільної межі шару прикладено навантаження, що рухається з сталою швидкістю. Аналогічна плоска задача для двошарового стисливого півпростору розглянута в роботі [3].

2. Постановка задачі. Розглянемо шар товщиною $2h$, що лежить на півпросторі. Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан півпростору є однорідним і визначається наступними компонентами вектора переміщень та тензора узагальнених напружень

$$u_j^0 = \delta_{ij} (\lambda_i + 1) x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

де λ_i — подовження ($\lambda_i = \mathrm{const}$) вздовж осей лагранжової системи координат x_i, що збігається у природному стані з декартовою системою координат.

Розглянемо початковий стан у вигляді

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_0^{\{s\}11} = S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \tag{2}$$

Поряд із лагранжовими координатами введемо декартові координати ξ_i початкового деформованого стану, пов'язані з координатами x_i співвідношеннями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

Координатна вісь ξ_3 спрямована перпендикулярно до поверхонь елементів двошарового півпростору углиб півпростору.

Шаруватий півпростір віднесено до декартової системи координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), що відповідає початковому деформованому стану. Координатна вісь ξ_3 спрямована перпендикулярно до поверхні шаруватого півпростору вглиб півпростору.

До вільної межі шару прикладено навантаження, що рухається з сталою швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3. Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений деформований стан. Якщо припустити, що навантаження рухається по прямій, що розташована під кутом ϕ до осі ξ_1, то координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями

$$y_1 = \xi_1 - \mathrm{v} \cos\phi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2 - \mathrm{v} \sin\phi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3. \tag{3}$$

Також припустимо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менше початкових напружень. Зазначене припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, спричиненого дією навантаження.

З урахуванням (1) і (2) в координатах рухомої системи координат (3) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану стисливого півпростору можна записати в загальному вигляді наступним чином:
рівняння руху

$$\left(\tilde{A}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\zeta_1^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\Psi=0;$$

$$\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\zeta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\zeta_3^2\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)-\right. \tag{4}$$
$$\left.-\left[\tilde{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)+\tilde{C}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{D}\frac{\partial^4}{\partial y_1^4}\right\}\chi^{\{s\}}=0;$$

переміщення

$$u_1=\frac{\partial\Psi}{\partial y_2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1\partial y_3};\quad u_2=-\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}-\frac{\partial^2\chi}{\partial y_2\partial y_3};$$
$$u_3=\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\chi; \tag{5}$$

напруження

$$\tilde{Q}_{ii}=\tilde{a}_{ii}^{(1)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1\partial y_2}+\left(\tilde{b}_{ii}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{b}_{ii}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{b}_{ii}^{(3)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_3};\quad i=\overline{1,3};$$
$$\tilde{Q}_{ij}=\left(\tilde{a}_{ij}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{a}_{ij}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Psi-\tilde{b}_{ij}^{(1)}\frac{\partial^3\chi}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3};\quad i,j=1,2; \tag{6}$$
$$\tilde{Q}_{ij}=\tilde{a}_{ij}^{(1)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_k\partial y_3}+\left(\tilde{b}_{ij}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{b}_{ij}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{b}_{ij}^{(3)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_i};$$
$$i,j,k=\overline{1,3};\quad k\neq j;\quad k\neq i;$$

де коефіцієнти $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$, ζ_j, $\tilde{\beta}_j$, $\tilde{a}_{ij}^{(m)}$, $\tilde{b}_{ij}^{(m)}$ у виразах (4)–(6) є функціями параметрів v, ϕ, що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища $\tilde{\omega}^{\{s\}}$. У разі стисливого матеріалу маємо

$$\xi_1^2=\tilde{\omega}_{3113}\tilde{\omega}_{1221}^{-1};\quad \xi_{2,3}^2=c\pm\left(c^2-\tilde{\omega}_{3113}\tilde{\omega}_{3333}\tilde{\omega}_{1331}^{-1}\tilde{\omega}_{1111}^{-1}\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$2c\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1331}=\tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3113}+\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{3333}-(\tilde{\omega}_{1133}+\tilde{\omega}_{1313})^2;$$
$$\widetilde{A}=\tilde{\rho}\tilde{\omega}_{1221}^{-1};\quad \widetilde{B}=\tilde{\rho}^{-1}\widetilde{D}^{-1}\left(\tilde{\omega}_{1111}+\tilde{\omega}_{1331}\right);$$
$$\widetilde{C}=\tilde{\rho}^{-1}\widetilde{D}^{-1}\left(\tilde{\omega}_{3333}+\tilde{\omega}_{3113}\right);\quad \widetilde{D}=\tilde{\rho}^2\tilde{\omega}_{1111}^{-1}\tilde{\omega}_{1331}^{-1};$$
$$\beta_1=\tilde{\rho}^{-1}\beta_3\tilde{\omega}_{1111};\quad \beta_2=\tilde{\rho}^{-1}\beta_3\tilde{\omega}_{3113};\quad \beta_3=\tilde{\rho}\left(\tilde{\omega}_{1133}+\tilde{\omega}_{1313}\right)^{-1};$$
$$a_{ii}^{(1)}=\tilde{\omega}_{ii11}-\tilde{\omega}_{ii22};\quad b_{ii}^{(k)}=\tilde{\rho}^{-1}b_{ii}^{(4)}\tilde{\omega}_{1111}-\tilde{\omega}_{iikk};\quad k=1,2;\quad b_{ii}^{(3)}=\tilde{\rho}^{-1}b_{ii}^{(4)}\tilde{\omega}_{3113};$$
$$b_{ii}^{(4)}=\tilde{\rho}\tilde{\omega}_{ii33}\left(\tilde{\omega}_{1133}+\tilde{\omega}_{1313}\right)^{-1};\quad i=1,2,3;$$
$$a_{ij}^{(1)}=-\tilde{\omega}_{ij21};\quad a_{ij}^{(2)}=\tilde{\omega}_{ij12};\quad b_{ij}^{(1)}=\tilde{\omega}_{ij12}+\tilde{\omega}_{ij21};\quad i,j=1,2;$$

$$a_{ij}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ij13}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij31} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313}\right)^{-1}; \quad i, j = 1, 3;$$

$$a_{ij}^{(1)} = -\tilde{\omega}_{ij23}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113} - \tilde{\omega}_{ij23};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij23} \left(\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313}\right)^{-1}; \quad i, j = 2, 3; \quad \tilde{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho;$$

де ρ — густина матеріалу півпростору у природному стані.

Припустимо, рух шару може бути описано системою рівнянь з теорії пластин, що враховує вплив інерції обертання і поперечного зсуву. Для пластини, що знаходиться під впливом поперечних і тангенціальних поверхневих сил, відповідні рівняння в системі координат (3) можуть бути записані так

$$\begin{aligned} &\frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_1 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right] + \tau_1 - \\ &\qquad - \kappa G_1 \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y_1} + \Psi_1 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} \mathrm{v}^2 \cos^2\varphi \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\ &\frac{2\mathrm{G}_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_2 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right] + \tau_2 - \\ &\qquad - \kappa \mathrm{G}_1 \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial y_2} + \Psi_2 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} \mathrm{v}^2 \cos^2\varphi \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \\ &\kappa \mathrm{G}_1 h (\nabla^2 \ \mathrm{w} + \Phi) + q = 2h\rho_1 \mathrm{v}^2 \cos^2\varphi \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2). \end{aligned} \tag{7}$$

Тут

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \quad \Phi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2};$$

ρ_1 — густина матеріалу пластини; G_1 — модуль зсуву; ν — коефіцієнт Пуасона; κ — коефіцієнт зсуву Тимошенко; Ψ_1, і Ψ_2 — повороти щодо осей y_1 і y_2; w — переміщення серединної поверхні пластини; τ_1, τ_2, q — дотичні та нормальні навантаження, що діють на поверхні розділу пластини та півпростору; P_3 — нормальне навантаження на вільній поверхні пластини.

Розглянемо нежорсткий контакт між пластиною і півпростором при $y_3 = -h$:

$$\tilde{Q}_{31} = 0; \quad \tilde{Q}_{32} = 0; \quad \tilde{Q}_{33} = q; \quad \tau_1 = 0; \quad \tau_2 = 0; \quad u_3 = \mathrm{w}. \tag{8}$$

При викладених вище умовах маємо тривимірну задачу, що полягає в спільному розв'язанні рівнянь руху (4) і (7) при граничних умовах (8) і умови згасання на нескінченності.

Скористаємося рівняннями (7) і (8) і співвідношеннями пружності (5) і (6) і виразимо функції q, τ_1, τ_2 і w через фукції Ψ, χ, Ψ_1 і Ψ_2

$$\begin{gathered}
\left(\tilde{a}_{31}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{a}_{31}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Psi-\tilde{b}_{31}^{(1)}\frac{\partial^3\chi}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}=0;\\
\left(\tilde{a}_{32}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{a}_{32}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\Psi-\tilde{b}_{32}^{(1)}\frac{\partial^3\chi}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}=0;\\
\theta_1\nabla^2\Psi_1+\theta_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}-\theta_3\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_1}-\theta_3\Psi_1=\theta_5\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y_1^2};\\
\theta_1\nabla^2\Psi_2+\theta_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}-\theta_3\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_2}-\theta_3\Psi_2=\theta_5\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial y_1^2};\\
\theta_4\nabla^2\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\chi+\theta_4\Phi+\tilde{a}_{33}^{(1)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_1\partial y_2}+\\
+\left(\tilde{b}_{33}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{b}_{33}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{b}_{33}^{(3)}\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial\chi}{\partial y_3}=\\
=\theta_6\left(\tilde{\beta}_1\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\tilde{\beta}_2\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\tilde{\beta}_3\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\frac{\partial^2\chi}{\partial y_1^2}+P_3\delta(y_1)\,\delta(y_2)\,.
\end{gathered}\tag{9}$$

Тут введено такі позначення

$$\theta_1=\frac{2}{3}G_1h^2;\quad \theta_2=\theta_1\frac{1+\nu}{1-\nu};\quad \theta_3=\kappa G_1;\quad \theta_4=\theta_3h;$$

$$\theta_5=\frac{2\rho_1h^2}{3}\mathrm{v}^2\cos^2\varphi;\ \ \theta_6=2h\rho_1\mathrm{v}^2\cos^2\varphi.$$

Таким чином, задача про рух двошарового стисливого півпростору при дії рухомого навантаження зводиться до знаходження функцій Ψ, χ, Ψ_1 і Ψ_2 з граничних умов (9).

3. Фундаментальний розв'язок задачі в області зображень Фур'є. Для вирішення задачі скористаємося подвійним перетворенням Фур'є за координатами y_1 та y_2. У просторі зображень Фур'є рівняння руху (4) можна подати у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_1^2\right)\Psi^F=0;\quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_2^2\right)\left(\frac{d^2}{dy_3^2}-\mu_3^2\right)\chi^F=0;\tag{10}$$

де

$$\mu_1^2=\zeta_1^{-2}\left(k_1^2\tilde{A}+k_2^2\right);\quad \mu_{2,3}^2=B_1\pm\sqrt{B_1^2-B_2};$$

$$2B_1=\zeta_2^{-2}\zeta_3^{-2}\left[\left(\zeta_2^2+\zeta_3^2\right)\left(k_1^2+k_2^2\right)-k_1^2\tilde{C}\right];$$

$$B_2=\zeta_2^{-2}\zeta_3^{-2}\left[\left(k_1^2+k_2^2\right)^2+k_1^2k_2^2\tilde{B}+k_1^4\left(\tilde{B}+\tilde{D}\right)\right];$$

k_1, k_2 — параметри подвійного перетворення Фур'є.

Перетворена система граничних умов (9) має вигляд

$$\begin{gathered}
-\left(k_1^2\tilde{a}_{31}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{31}^{(2)}\right)\Psi^F+k_1k_2\tilde{b}_{31}^{(1)}\frac{d\chi^F}{dy_3}=0;\\
-\left(k_1^2\tilde{a}_{32}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{32}^{(2)}\right)\Psi^F+k_1k_2\tilde{b}_{32}^{(1)}\frac{d\chi^F}{dy_3}=0;
\end{gathered}\tag{11}$$

$$ik_1\theta_3\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}\right)\chi^F-$$
$$-\left[k_1^2\left(\theta_1+\theta_2-\theta_5\right)+k_2^2\theta_1+\theta_3\right]\Psi_1^F-k_1k_2\theta_2\Psi_2^F=0;$$
$$ik_2\theta_3\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}\right)\chi^F-k_1k_2\theta_2\Psi_1^F-$$
$$-\left[k_1^2\left(\theta_1-\theta_5\right)+k_2^2\left(\theta_1+\theta_2\right)+\theta_3\right]\Psi_2^F=0;$$
$$-k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)}\Psi^F+\left\{\left(k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2\right)\left[k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4\right]-\left(k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)}+k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)}\right)\frac{d}{dy_3}-\right.$$
$$\left.-\left[k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4\right]\tilde{\beta}_3\frac{d^2}{dy_3^2}+\tilde{b}_{33}^{(3)}\frac{d^3}{dy_3^3}\right\}\chi^F+ik_1\theta_4\Psi_1^F+ik_2\theta_4\Psi_2^F=P_3^F.$$

Розв'язки перетворених рівнянь (10) з урахуванням згасання на нескінченності шукатимемо у вигляді

$$\Psi^F=C_1\mathrm{e}^{\gamma_1(y_3+h)};\quad \chi^F=C_2\mathrm{e}^{\gamma_2(y_3+h)}+\left[1-\delta_{\mu_2\mu_3}+\delta_{\mu_2\mu_3}\left(y_3+h\right)\right]C_3\mathrm{e}^{\gamma_3(y_3+h)}. \quad (12)$$

Тут

$$\delta_{\mu_2\mu_3}=\begin{cases}1, & \mu_2^2=\mu_3^2;\\ 0, & \mu_2^2\neq\mu_3^2;\end{cases}$$

$\gamma_j=\sigma_j\mu_j$; $\sigma_j\equiv\sigma=\left|\mu_j\right|/\mu_j$, якщо $\mu_j^2>0$, $\sigma_j=i$, якщо $\mu_j^2<0$ і $\gamma_j=\sigma\,\mathrm{Re}\mu_j-$ $-\left(-1\right)^j i\,\mathrm{Im}\mu_j$, якщо μ_j^2. приймає комплексні значення.

Введемо заміну

$$\widetilde{C}_j=C_j,\quad j=\overline{1,3};\quad \widetilde{C}_{j+3}=i\Psi_j^F,\quad j=1,2. \quad (13)$$

Підставляючи (12) і (13) у перетворену систему рівнянь (11), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $\widetilde{C}_j$, $j=\overline{1,5}$,

$$\begin{gathered}\zeta_{11}\widetilde{C}_1+\zeta_{21}\gamma_2\widetilde{C}_2+\zeta_{21}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\gamma_3\right]\widetilde{C}_3=0;\\ \zeta_{12}\widetilde{C}_1+\zeta_{22}\gamma_2\widetilde{C}_2+\zeta_{22}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\gamma_3\right]\widetilde{C}_3=0;\\ \zeta_{31}\zeta_{51}\widetilde{C}_2+\zeta_{51}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}\varsigma_3+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{32}\right]\widetilde{C}_3+\zeta_{61}\widetilde{C}_4+\varsigma_4\widetilde{C}_5=0;\\ \zeta_{31}\zeta_{52}\widetilde{C}_2+\zeta_{52}\left[\delta_{\mu_2\mu_3}\varsigma_3+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{32}\right]\widetilde{C}_3+\varsigma_4\widetilde{C}_4+\zeta_{62}\widetilde{C}_5=0;\\ \zeta_9\widetilde{C}_1+\zeta_{71}\widetilde{C}_2+\left\{-\delta_{\mu_2\mu_3}\zeta_{10}+\left(1-\delta_{\mu_2\mu_3}\right)\zeta_{72}\right\}\widetilde{C}_3+\zeta_{81}\widetilde{C}_4+\zeta_{82}\widetilde{C}_5=P_3^F;\end{gathered} \quad (14)$$

де

$$\varsigma_1=k_1^2\left(\theta_4-\theta_6\right)+k_2^2\theta_4;\quad \varsigma_2=k_1^2\left(\theta_1-\theta_5\right)+k_2^2\theta_1+\theta_3;\quad \varsigma_3=-2\gamma_3\tilde{\beta}_3;$$
$$\varsigma_4=k_1k_2\theta_2;\quad \varsigma_5=-k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)};\quad \varsigma_6=\zeta_{42}-2\gamma_3^2\tilde{b}_{33}^{(3)}-\varsigma_1\varsigma_3;$$
$$\zeta_{1j}=-\left(k_1^2\tilde{a}_{3j}^{(1)}+k_2^2\tilde{a}_{3j}^{(2)}\right);\quad \zeta_{2j}=k_1k_2\tilde{b}_{3j}^{(1)};\quad \zeta_{3j}=k_1^2\tilde{\beta}_1+k_2^2\tilde{\beta}_2-\gamma_{j+1}^2\tilde{\beta}_3;$$
$$\zeta_{4j}=k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)}+k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)}-\gamma_{j+1}^2\tilde{b}_{33}^{(3)};\quad \zeta_{5j}=k_j\theta_3;$$
$$\zeta_{6j}=\varsigma_2+k_j^2\theta_2;\quad \zeta_{7j}=\zeta_{3j}\varsigma_1-\zeta_{4j}\gamma_{1+j};\quad \zeta_{8j}=k_j\theta_4;\quad j=1,2.$$

Таким чином, розв'язання задачі про рух багатошарового пружного напівпростору з початковими напруженнями під впливом рухомого навантаження в області зображень Фур'є зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (14) щодо невідомих $\widetilde{C}_j$, $j = \overline{1,5}$.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка і метод розв'язання просторової динамічної задачі про збурення двошарового попередньо напруженого півпростору поверхневим навантаженням, що рухається з сталою швидкістю. У просторі зображень Фур'є у загальному вигляді отримано розв'язок задачі. Для отримання оригіналів трансформант відповідних компонентів напружено деформованого стану слід скористатися зворотним перетворенням Фур'є. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні напружено деформованого стану елементів шаруватих конструкцій.

Конфлікт інтересів

Бабич Степан Юрійович та Млавець Юрій Юрійович, члени редакційної колегії, є авторами цієї статті та не брали участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність данних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

А. Ю. Глухов: концептуалізація, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект. С. Ю. Бабич: валідація, формальний аналіз, методологія. Ю. Ю. Млавець: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses.* Kiev: "A.S.K" [in Russian].
2. Achenbach, J. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids.* Amsterdam: North-Holland.
3. Babich, S. Y., Glukhov, Y. P., & Guz, A. N. (2008). Dynamics of a prestressed compressible layered half-space under moving load. *International Applied Mechanics,* 44(3), 268–285. https://doi.org/10.1007/s10778-008-0045-y
4. Bao, T., & Liu, Z. L. (2021). Dynamic behaviour of thin surface layers bonded to a half-space under moving loads. *International Journal of Mechanical Sciences,* 190, 106023. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106023
5. Dutta, S. C., & Roy, R. (2015). High-speed moving loads on layered soils: analytical and numerical modelling. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering,* 75, 200–212. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.04.001
6. Graff, K. F. (1975). *Wave Motion in Elastic Solids.* New York: Dover Publications.
7. Hosseinzadeh, S., & Gatmiri, B. (2019). A 3D dynamic analysis of geomechanical layered systems under transient loads. *Computers and Geotechnics,* 108, 148–160. https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.12.022
8. Kausel, E. (1979). *Forced vibrations of circular foundations on layered media* (MIT Research Report R79-33). Massachusetts Institute of Technology. Retrieved from https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/56671
9. Luco, J. E., & Apsel, R. J. (1983). On the Green's functions for a layered half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America,* 73(4), 909–929. https://doi.org/10.1785/BSSA0730040909
10. Miklowitz, J. (1978). *The Theory of Elastic Waves and Waveguides.* Amsterdam: North-Holland.
11. Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics,* 18(1), 31–38. https://doi.org/10.1115/1.4010217
12. Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics,* 12(2), A69–A77. https://doi.org/10.1115/1.4009435
13. Selvadurai, A. P. S. (1979). *Elastic Analysis of Soil–Foundation Interaction.* Amsterdam: Elsevier.
14. Wang, J., & Zhang, C. (2012). Dynamic response of layered elastic half-space under moving loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering,* 35, 18–27. https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2011.11.006
15. Wu, B. (2017). Three-dimensional modelling of elastic layered media subjected to moving loads. *International Journal of Solids and Structures,* 120, 98–114. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.04.036

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu. Dinamic task for two-layered compressible half-space with initial stresses.

Within the bounds of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses a non-planar problem and the method for solution of the perturbation of moving with a constant speed of the surface load of two-layered pre-stressed half-space is considered. The three-dimensional model of the layered medium "a plate and pre-stressed half-space" is considered. Equations of plate motion are written down taking into consideration of shift and rotary inertia. Half-space material is assumed compressible, isotropic in the natural state. The homogeneous initial state is considered in a type of $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$. The border surfaces of elements of the layered medium are flat and parallel. The contact between a plate and a half-space is non-rigid. The surface load is point and moves rectilinearly. The fundamental solution of the problem is obtained using the Fourier integral method. The solution is presented in a general view for the equal and unequal roots of characteristic equation and different speeds of superficial loading movement. The form of elastic potential The shape of the elastic potential takes the general form and should be specified only under the numerical calculations. Obtained results can be used to investigate the mode of deformation of the elements of layered structures which are exposed to the moving loads.

Keywords: initial tensions; moving with permanent speed load; two-layered half-space; compressible material.

Отримано: 02.11.2025 Прийнято: 13.12.2025 Опубліковано: 29.01.2026