УДК 519.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).54-59

О. А. Лагода[1], В. В. Селіванов[2], А. В. Чайковський[3]

[1] Київський національний університет України,
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського",
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
lahoda.oksana@lll.kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4515-1753

[2] Київський національний університет України,
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського",
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
selivanov.v.v-om51f@edu.kpi.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-8414-5675

[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, професор
chaikovskiyav@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3357-8744

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язків абстрактного стохастичного рівняння в некритичному випадку встановлено зв'язок граничної поведінки сум елементів розв'язку рівняння з сумами елементів вхідної послідовності. Отримано низку граничних результатів для поведінки сум компонент розв'язку за умови відомої граничної поведінки компонент вхідної послідовності.

Ключові слова: стохастичне різницеве рівняння, випадковий процес, банахів простір, граничні теореми, посилений закон великих чисел, закон повторного логарифма.

1. Вступ. В роботі розглядається випадок стохастичного різницевого рівняння з двома операторними коефіцієнтами у випадку, коли виконуються умови існування та єдиності обмеженого розв'язку [1]. Мета роботи полягає в узагальненні результату Коваля [2] та отриманні посиленого закону великих чисел та закону повторного логарифма для характеристики граничної поведінки сум розв'язків відповідного стохастичного різницевого рівняння. Подібні питання досліджувалися при більш жорстких обмеженнях в [3], [4]. В статті [2] було розглянуто рівняння з одним, проте змінним операторним коефіцієнтом.

2. Основний результат. Нехай B – комплексний банахів простір, $\|\cdot\|$ – норма в B і $L(B)$ – простір всіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B, O – нульовий оператор, I – одиничний оператор в $L(B)$.

Розглянемо стохастичне різницеве рівняння

$$X_n = A_1 X_{n-1} + A_2 X_{n-2} + Y_n, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

з початковими умовами X_0 та X_{-1}, які є деякими випадковими величинами зі значеннями в B, та послідовністю $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$, елементи якої також є випадковими величинами зі значеннями в B.

Використаємо умови, за яких для довільної обмеженої за нормою послідовності $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ та довільних початкових умов $\{X_0, X_{-1}\} \subset B$ розв'язок $\{X_n : n \geq 1\} \subset B$ рівняння (1) буде обмеженим за нормою. Необхідною та достатньою умовою такої обмеженості розв'язку є умова [1]

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1, \quad \exists (z^2 I - A_1 z - A_2)^{-1} \in L(B). \tag{2}$$

Ця ж умова виявляється корисною і для оцінки розв'язків у недетермінованому випадку.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *послідовність* $\{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}_+$ *незростаюча і збігається до нуля;*
2) *послідовність* $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ *обмежена за нормою майже напевно;*
3) $\sup\limits_n c_n \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \right\| < \infty$ *майже напевно;*
4) *справджується умова* (2).

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^{n} X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i \right\| = 0$$

майже напевно.

Доведення. Введемо позначення:

$$Z_n = \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} Y_n \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

де матричний оператор визначений в B^2 з нормою

$$\|(X_1, X_2)\| = \sqrt{\|X_1\|^2 + \|X_2\|^2}.$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$Z_n = A Z_{n-1} + V_n, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

Доведемо, що спектр оператора A задовольняє умову

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}. \tag{4}$$

За означенням потрібно довести, що для $\lambda \in \mathbb{C}, \ \ |\lambda| \geq 1$ рівняння

$$(A - \lambda I)X = Y$$

для довільного $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in B^2$ має єдиний розв'язок $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in B^2$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} (A_1 - \lambda I)X_1 + A_2 X_2 = Y_1; \\ X_1 - \lambda X_2 = Y_2, \end{cases}$$

з урахуванням умови (2) отримаємо єдиний розв'язок

$$\begin{cases} X_1 = \lambda(A_2 + \lambda A_1 - \lambda^2 I)^{-1}(Y_1 + \lambda Y_2 - A_1 Y_2) + Y_2; \\ X_2 = (A_2 + \lambda A_1 - \lambda^2 I)^{-1}(Y_1 + \lambda Y_2 - A_1 Y_2) \end{cases}$$

і таким чином умова (4) доведена.

З умови (4) випливає, що спектральний радіус оператора A r менший за 1 і тому

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0 \quad \|A^n\| \leq (r+\varepsilon)^n.$$

Звідси отримаємо, що знайдеться таке $q, \quad 0 < q < 1$, що

$$\exists L > 0: \quad \forall n \geq 1 \quad \|A^n\| \leq Lq^n. \tag{5}$$

Скористаємося міркуваннями, які були використані при доведенні теореми 1 [2]. З рівняння (3) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k = AZ_0 + A\sum_{k=1}^{n-1} Z_k + \sum_{k=1}^{n} V_k = AZ_0 + A\sum_{k=1}^{n} Z_k - A(A^n Z_0 + A^{n-1}V_1 + A^{n-2}V_2 + \ldots +$$

$$+AV_{n-1} + V_n) + \sum_{k=1}^{n} V_k = AZ_0 + A\sum_{k=1}^{n} Z_k - A^{n+1}Z_0 - \sum_{i=1}^{n} A^{n+1-i}V_i + \sum_{k=1}^{n} V_k.$$

Позначимо

$$U_n = c_n \sum_{k=1}^{n} Z_k, \qquad W_n = c_n \sum_{k=1}^{n} V_k.$$

Тоді рівняння (3) набуде вигляду

$$U_n = (I - A)^{-1}W_n + R_n, \qquad n \geq 1, \tag{6}$$

де

$$R_n = (I - A)^{-1}\left(c_n(I - A^n)AZ_0 - c_n\sum_{i=1}^{n} c_i^{-1}A^{n+1-i}c_iV_i\right).$$

Доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n\| = 0 \qquad \text{м.н.} \tag{7}$$

З умови 2) теореми 1 випливає, що

$$\exists M > 0 : \|V_n\| < M \qquad \text{м.н.} \tag{8}$$

Тоді з (5) і (8) випливає, що норму R_n можна оцінити наступним чином:

$$\|R_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \left(2Lc_n\|Z_0\| + ML\sum_{i=1}^{n} q^{n-i+1}c_i\right), \qquad n \geq 1 \qquad \text{м.н.}$$

За теоремою Тьопліца

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} q^{n-i+1}c_i = 0,$$

і тим самим рівність (7) доведена.

Знайдемо $(I-A)^{-1}$, розв'язавши систему

$$(I-A)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Ввівши позначення $D=(I-A_1-A_2)^{-1}$, будемо мати

$$\begin{cases} X_1 = D(A_2Y_2+Y_1); \\ X_2 = DY_1+(DA_2+I)Y_2. \end{cases}$$

Тому

$$(I-A)^{-1}W_n = (I-A)^{-1}\begin{pmatrix} c_n\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dc_n\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \\ Dc_n\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$\left\| c_n\sum_{k=1}^{n} X_k - Dc_n\sum_{k=1}^{n} Y_k \right\| = \|(U_n)_1 - ((I-A)^{-1}W_n)_1\| \le$$

$$\le \|U_n-(I-A)^{-1}W_n\| = \|R_n\| \to 0, \quad n\to\infty \qquad \text{м.н.}$$

Теорема 2. *Нехай $\{Y_n : n\ge 1\}$ – нескінченна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з B, визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Нехай $\mathbb{E}Y_i=\mu$ для всіх $i\in\mathbb{N}$, та виконуються умови теореми 1.*

Тоді для $c_n=\frac{1}{n}$ та $\{X_n : n\ge 1\}\subset B$ – розв'язку стохастичного різницевого рівняння (1) справджується, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = (I-A_1-A_2)^{-1}\mu$$

майже напевно.

Доведення.

Згідно до посиленого закону великих чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad n\to\infty \qquad \text{м.н.}$$

Застосуємо теорему 1 у випадку, коли $c_n=\frac{1}{n},\ n\ge 1$.

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-(I-A_1-A_2)^{-1}\mu\right\| \le \left\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-(I-A_1-A_2)^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right\| +$$

$$+\left\|(I-A_1-A_2)^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i-\mu\right)\right\| \to 0, n\to\infty, \qquad \text{м.н.}$$

Теорема 3. *Нехай B – дійсний сепарабельний гільбертів простір. Якщо $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\quad \mathbb{E}\|Y_n\|^2 < \infty$; T – оператор коваріації та виконується умова* (2)*, то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right\|}{\sqrt{2n \ln\ln n}} = \sqrt{\|(I - A_1 - A_2)^{-1} T (I - A_1^* - A_2^*)^{-1}\|}$$

майже напевно.

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\mathbb{E}(I - A_1 - A_2)^{-1} Y_n = (I - A_1 - A_2)^{-1} \mathbb{E}Y_n = 0.$$

Застосуємо теорему 1 та закон повторного логарифма [5] для $c_n = \frac{1}{\sqrt{2n \ln\ln n}}$, $n \geq 3$. Будемо мати

$$\limsup_{n\to\infty} c_n \left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\| = \limsup_{n\to\infty} c_n \left\|(I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^{n} Y_i\right\| =$$

$$= \sqrt{\mathbb{E}\,\|(I - A_1 - A_2)^{-1} Y_1\|^2} = \sqrt{\mathbb{E}\,((I - A_1 - A_2)^{-1} Y_1, (I - A_1 - A_2)^{-1} Y_1)} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{cov}\,((I - A_1 - A_2)^{-1} Y_1, (I - A_1 - A_2)^{-1} Y_1)}.$$

Використовуючи властивість коваріації дії оператора на вектор [6], отримаємо

$$\sqrt{(I - A_1 - A_2)^{-1} \operatorname{cov}(Y_1, Y_1)\,((I - A_1 - A_2)^{-1})^*} =$$

$$= \sqrt{(I - A_1 - A_2)^{-1} T\,(I - A_1^* - A_2^*)^{-1}}.$$

3. Висновки. Для розв'язків абстрактного стохастичного різницевого рівняння в некритичному випадку встановлено зв'язок граничної поведінки сум елементів розв'язку рівняння з сумами елементів вхідної послідовності. Отримано низку граничних результатів для поведінки сум компонент розв'язку за умови відомої граничної поведінки для компонент вхідної послідовності.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Лагода О. А.: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування. Селіванов В. В.: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт. Чайковський А. В.: концептуалізація, супервізія, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Gorodnii, M. F., & Lagoda, O. A. (2000). On bounded solutions of some classes of two-parameter difference equations in a Banach space. *Ukr. Math. J.,* 52, 1834–1840. https://doi.org/10.1023/A:1010447624673
2. Koval, V., & Schwabe, R. (1998). Limit theorems for solutions of stochastic difference equations in Banach spaces with applications. *Random Oper. and Stoch. Equ.,* 6(2), 149–158. https://doi.org/10.1515/rose.1998.6.2.149
3. Bosq, D. (1993). Propriétés asymptotiques des processus autorégressifs Banachiques. Applications. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics,* 316(7), 607–610.
4. Chen, H. F., & Guo, L. (1988). Laws of iterated logarithm for state variables with applications. *Acta Math. Sin. New Ser.,* 4(4), 343–355. https://doi.org/10.1007/BF02560638
5. Ledoux, M., & Talagrand, M. (1988). Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. *Ann. Probab.,* 16(3), 1242–1264. https://doi.org/10.1214/aop/1176991688
6. Ledoux, M., & Talagrand, M. (1991). *Probability in Banach Spaces.* New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20212-4

Lahoda O. A., Selivanov V. V., Chaikovs'kyi A. V. Limit Theorems for Solutions of Abstract Stochastic Difference Equations .

For solutions of an abstract stochastic equation in the non-critical case, a connection has been established between the limiting behavior of the sums of the equation's solution elements and the sums of the input sequence elements. A series of limiting results has been obtained for the behavior of the sums of the solution components, provided that the limiting behavior of the input sequence components is known.

Keywords: stochastic difference equation, random process, Banach space, limit theorems, strong law of large numbers, law of the iterated logarithm.

Отримано: 30.03.2026 Прийнято: 15.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026