УДК 519.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).134-138

О. А. Ярова

Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцентка кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oksana.yarova@lnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6284-1193

СУМІШ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ РІВНЯНЬ РЕГРЕСІЇ

Дана стаття присвячена дослідженню суміші мультиплікативних регресійних рівнянь. Метою роботи є виведення граничного рівняння для суміші мультиплікативних рівнянь регресії під впливом зовнішнього середовища. Знайдено граничний вигляд суміші та розглянуто приклад використання.

Ключові слова: мультиплікативні рівняння відновлення, суміші, зовнішнє середовище, граничні ймовірності.

1. Вступ. Мультиплікативні регресійні моделі широко застосовуються для опису процесів, у яких взаємодія змінних має нелінійний характер. У випадку випадкового середовища такі моделі природно узагальнюються до сумішей, де перемикання між режимами визначається стохастичними механізмами. Це дозволяє краще описувати реальні системи, зокрема в економіці, біології та технічних застосуваннях.

В статті [5] досліджено суміш рівнянь множинної регресії. Дана робота присвячена дослідженню суміші мультиплікативних регресійних рівнянь.

2. Основний результат. Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \Im, P)$ та вибірку $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в цьому просторі, де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини. Нехай ці випадкові величини залежать від факторів $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$.

Будемо вважати, що кожен фактор може бути представлений у вигляді вибірки незалежних однаково розподілених випадкових величин. Ці фактори описують вплив зовнішнього середовища на вибірку. Але не всі фактори мають великий вплив на кожен елемент вибірки, тому необхідно просіяти вибірку, поділивши її на декілька частин, в залежності від впливу кожного з факторів.

Сформулюємо теорему про суміш мультиплікативних рівнянь регресії.

Теорема 1. *Нехай вибірка $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ залежить від факторів $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ і $Y_i = b_{i0} \cdot x_{i1}^{b_{i1}} \cdot x_{i2}^{b_{i2}} \cdot \ldots \cdot x_{is_i}^{b_{is_i}} + \varepsilon_i$, де $x_{ij} \in X$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, s_k$, $s_k \leq m$. Тоді вибірку Y можна подати у вигляді суміші множинних рівнянь регресій*

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \ldots + p_k Y_k + \varepsilon,$$

де $\frac{n_i}{n} \to p_i$, $i = 1, \ldots, k$, а $\varepsilon \sim N(0; 1)$.

Доведення. Поділимо вибірку $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ на частини $Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n_1})$, $Y_2 = (y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n_2})$, …, $Y_k = (y_{k1}, y_{k2}, \ldots, y_{kn_k})$, де

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Таким чином, отримано k вибірок і початкова вибірка може бути представлена у вигляді

$$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_k) .$$

Нехай вибірка Y_1 залежить від факторів $x_{11}, \ldots, x_{1s_1}$, Y_2 залежить від факторів $x_{21}, \ldots, x_{2s_2}$, а вибірка Y_k залежить від факторів $x_{k1}, \ldots, x_{ks_k}$, де $x_{ij} \in X$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, s_k$, $s_k \le m$. Будемо вважати, що кожен з факторів може мати вплив на декілька вибірок.

Нехай вибірки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ залежать від факторів $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$. Тоді можна побудувати мультиплікативні рівняння регресії для кожної вибірки. В результаті отримаємо k регресійних рівнянь

$$Y_1 = b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \ldots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + \varepsilon_1,$$

$$Y_2 = b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \ldots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} + \varepsilon_2$$

та останнє рівняння

$$Y_k = b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \ldots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon_k.$$

В цих рівняннях ε_i, $i = 1, \ldots, k$, — нормально розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $E(\varepsilon_i) = 0$ та дисперсією $Var(\varepsilon_i) = 1$.

Далі побудуємо суміш мультиплікативних рівнянь регресій

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \ldots + p_k Y_k + \varepsilon.$$

Але для цього, потрібно знайти ймовірності для кожного рівняння регресії. Нехай p_1 — ймовірність того, що випадкова величина з вибірки Y_1 залежить від факторів $x_{11}, \ldots, x_{1s_1}$. Тоді

$$\frac{n_1}{n} \to p_1.$$

Аналогічно,

$$\frac{n_i}{n} \to p_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

У результаті,

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_k}{n} = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1.$$

Таким чином, суміш рівнянь регресії можна подати в наступному вигляді

$$Y = \frac{n_1}{n} Y_1 + \frac{n_2}{n} Y_2 + \ldots + \frac{n_k}{n} Y_k + \varepsilon.$$

Підставимо рівняння кожної з регресій в рівняння суміші

$$Y = p_1 \left(b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \ldots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + \varepsilon_1 \right) + p_2 \left(b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \ldots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} + \varepsilon_2 \right) +$$
$$+ \ldots + p_k \left(b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \ldots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon_k \right) .$$

Позначимо

$$\varepsilon = p_1 \cdot \varepsilon_1 + p_2 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + p_k \cdot \varepsilon_k.$$

Тоді

$$Y = p_1 \cdot b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \ldots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + p_2 \cdot b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \ldots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} +$$
$$+ \ldots + p_k \cdot b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \ldots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon.$$

У результаті отримано твердження теореми.

Розглянемо приклад. Розглянемо еко-орієнтоване мікропідприємство, яке виготовляє продукцію з біорозкладних матеріалів, застосовує “зелені” технології та намагається скоротити вуглецевий слід. Його розвиток відбувається у кілька взаємопов'язаних фаз: запуск, розширення та зрілість. У кожній фазі змінюється структура факторів, які визначають прибуток, операційну ефективність та конкурентоспроможність.

Візьмемо 100 підприємств, серед яких 30 на фазі «запуску», 40 на фазі «розширення» та 30 на фазі «зрілості». Виділимо основні змінні, які впливають на прибуток підприємств, зокрема масштаб, маркетинг, якість, логістика, екосертифікація та технології.

«Запуск» — це початковий етап, під час якого підприємство формує базову виробничу лінію та створює перший ринок збуту. Підприємство працює на невеликих обсягах, а технології та процеси ще не оптимізовані.

У цій фазі прибуток переважно залежить від факторів, що визначають початкову впізнаваність та ринковий старт. Ключова характеристика фази запуску — маркетинг та якість сильніше впливають на попит, ніж масштаб.

В наступній фазі «розширення» підприємство вже має стабільний ринок. Виробничі процеси оптимізуються, а обсяги зростають. Важливість змінних змінюється. У цій фазі зростає роль масштабності та технологічності.

У фазі «зрілості» підприємство стабільне, має налагоджені канали збуту і значну частку ринку. Основна мета — підвищення ефективності, зниження витрат, інноваційність. На цьому етапі технології та екостандарти підсилюють прибутковість.

Для моделювання та прогнозування рівня прибутку, побудуємо мультиплікативні моделі регресії, виділивші основні змінні від яких залежить прибуток.

На етапі запуску рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_1 = A_1 X_2^{\alpha} X_3^{\beta},$$

де Y_1 — рівень прибутку, X_2 — маркетинг, X_3 — якість.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_1 = \ln A_1 + \alpha \ln X_2 + \beta \ln X_3.$$

Проведемо регресійний аналіз та знайдемо коефіцієнти моделі, використавши метод найменших квадратів. У результаті отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_1 = 0{,}698 + 0{,}395 \cdot \ln X_2 + 0{,}576 \cdot \ln X_3.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_1 = 2 X_2^{0{,}395} X_3^{0{,}576}.$$

Перейдемо до другої фази «розширення». На цьому етапі рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_2 = A_2 X_1^{\gamma} X_6^{\delta},$$

де Y_2 — рівень прибутку, X_1 — масштаб, X_6 — технології.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_2 = \ln A_2 + \gamma \ln X_1 + \delta \ln X_6.$$

Проведемо регресійний аналіз та знайдемо коефіцієнти моделі, використавши метод найменших квадратів. Таким чином отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_2 = -0{,}033 + 0{,}482 \cdot \ln X_1 + 0{,}173 \cdot \ln X_6.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_2 = 0{,}96 X_1^{0{,}428} X_6^{0{,}173}.$$

Перейдемо до третьої фази «зрілість». На цьому етапі рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_3 = A_3 X_4^{\varphi} X_5^{\psi},$$

де Y_3 — рівень прибутку, X_4 — логістика, X_5 — екосертифікація.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_3 = \ln A_3 + \varphi \ln X_4 + \psi \ln X_5.$$

Таким чином отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_3 = 1{,}835 - 0{,}054 \cdot \ln X_4 + 0{,}781 \cdot \ln X_5.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_3 = 6 X_4^{-0{,}054} X_5^{0{,}781}.$$

Наступним кроком обчислимо ймовірності

$$p_1 = \frac{30}{100} = 0.3; \quad p_2 = \frac{40}{100} = 0.4; \quad p_3 = \frac{30}{100} = 0.3.$$

Побудуємо суміш рівнянь регресій

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + p_3 Y_3 =$$
$$= 0{,}3 \cdot 2 X_2^{0{,}395} X_3^{0{,}576} + 0{,}4 \cdot 0{,}96 X_1^{0{,}482} X_6^{0{,}173} + 0{,}3 \cdot 6 X_4^{-0{,}054} X_5^{0{,}781} =$$
$$= 0{,}6 X_2^{0{,}395} X_3^{0{,}576} + 0{,}384 X_1^{0{,}482} X_6^{0{,}173} + 1{,}8 X_4^{-0{,}054} X_5^{0{,}781}.$$

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі досліджено суміш мультиплікативних регресійних рівнянь в умовах впливу зовнішнього випадкового середовища. Отримано граничне рівняння, яке описує асимптотичну поведінку суміші.

Показано, що врахування зовнішнього середовища суттєво впливає на структуру та властивості регресійної моделі, зокрема на її довгострокову поведінку. Отримані результати узагальнюють відомі підходи до аналізу регресійних моделей і можуть бути використані для дослідження складніших стохастичних систем із перемиканням режимів.

Розглянутий приклад ілюструє можливості практичного застосування побудованої моделі та підтверджує отримані теоретичні результати.

Перспективи подальших досліджень полягають у вивченні багатовимірних узагальнень, дослідженні швидкості збіжності до граничного режиму, а також у застосуванні отриманих результатів до прикладних задач у різних галузях.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Список використаної літератури

1. Koroliuk, V. S., & Limnios, N. (2005). *Stochastic systems in merging phase space.* Singapore: World Scientific Publishing Company. https://doi.org/10.1142/5979
2. Maiboroda, R., & Miroshnychenko, V. (2020). Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regressions. *Modern Stochastics: Theory and Applications,* 7(4), 435–448. https://doi.org/10.15559/20-VMSTA167
3. Yeleyko, T. Ya., & Yarova, O. A. (2025). The mixture of multiple regression equations: open problems. *Mathematical Studies,* 63(2), 221–224. https://doi.org/10.30970/ms.63.2.221-224
4. Mayboroda, R., & Sugakova, O. (2008). *Evaluation and classification based on observations from a mixture.* Kyiv: Kyiv University [in Ukrainian].
5. Yarova, O. A. (2025). Mixture of semi-Markov random evolutions in nonlinear approximation. *Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics,* 97, 114–119. https://doi.org/10.30970/vmm.2025.97.114-119 [in Ukrainian].

Yarova O. A. Mixture of multiplicative regression equations.

This paper is devoted to the study of a mixture of multiplicative regression equations. The aim of the work is to derive a limiting equation for a mixture of multiplicative regression equations under the influence of an external environment. The limiting form of the mixture is obtained, and an example of its application is considered.

Keywords: multiplicative renewal equations, mixtures, external environment, limiting probabilities.

Отримано: 05.04.2026 Прийнято: 20.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026