УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).117-125

І. Я. Усар[1], І. А. Макушенко[2], О. В. Лукович[3]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
молодший науковий співробітник кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
usar69@ukr.net, iryna.usar@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3639-5505

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
асистент кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
igormakushenko@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4313-4936

[3] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
провідний інженер кафедри прикладної статистики
lukolga@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-1207-3888

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ МІГРАЦІЇ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ

В даній статті вводиться клас двовимірних процесів міграції, за допомогою якого можна моделювати процес обслуговування для різних систем з повторними викликами. Спосіб надходження і обслуговування вимог обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Головна мета роботи — пошук замкнених формул для стаціонарних імовірностей через параметри моделі процесу обслуговування.

Ключові слова: процес міграції, ланцюги Маркова, стаціонарний розподіл, системи з повторними викликами, потік імовірностей.

1. Вступ. Важливим розділом теорії масового обслуговування являється теорія систем з повторними викликами. Ці системи детально розглянуті в роботах [1, 2]. Вони використовуються в проектуванні комп'ютерних мереж, при дослідженні стохастичних мереж обробки інформації та сучасних систем зв'язку, при описанні процесу посадки повітряних суден та ін. [1–4].

В системах з повторними викликами вимога, яка надійшла у систему і застала всі обслуговуючі прилади зайнятими, через деякий випадковий проміжок часу знову повторює спробу потрапити на обслуговування. Вважається, що вимога повторює спроби до тих пір, поки не надійде на обслуговування.

Системи з повторними викликами відрізняються стратегіями первинних та вторинних викликів та кількістю приладів. Багатовимірність моделей цих систем дозволяє проводити детальний аналіз їх інтегральних характеристик, розв'язувати оптимізаційні задачі [5, 6]. З ускладненням моделей з'являються нові математичні проблеми — це пошук методів розрахунку для характеристик системи в умовах стаціонарного режиму функціонування.

2. Основний результат. Основну модель, яка розглядається в роботі, визначимо як двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ в обмеженій множині станів $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \times \{0, 1, \dots, N\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$ для $Q(t)$ задамо системою співвідношень:

при $\alpha = (i, j)$ та $i \neq m$

$$q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \lambda_{i\,j}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j), \\ \mu_{i\,j}, & \text{якщо } \beta = (i-1, j), \\ \nu_{i\,j}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j-1), \end{cases}$$

при $\alpha = (m, j)$

$$q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \mu_{m\,j}, & \text{якщо } \beta = (m-1,\, j), \\ \lambda_{m\,j}, & \text{якщо } \beta = (m,\, j+1). \end{cases}$$

За домовленістю інтенсивності тих переходів, які виводять за обмежену область S дорівнюють нулю $\mu_{0j} = \nu_{i0} = \nu_{m\,j} = \lambda_{m\,N} = 0$.

Процеси міграції типу $Q\,(t)$ моделюють роботу марковських систем з обмеженим числом джерел повторних викликів. Так при $\lambda_{ij} = \lambda_{m\,j} = \lambda$, $\mu_{ij} = i\mu$, $\nu_{ij} = j\nu$ отримаємо класичну модель $M/M/m/N$ системи з повторними викликами [1], для якої m — число обслуговуючих приладів, N — максимально можливе число джерел повторних викликів. Відповідним вибором інтенсивностей ν_{ij} можна отримати систему з повторними викликами та лінійною інтенсивністю для повторних спроб зайняти вільний прилад [4].

Перейдемо до аналізу стаціонарного режиму процесу $Q\,(t)$, $t \geq 0$. Ми маємо на меті отримати для стаціонарних імовірностей π_{ij}, $(i, j) \in S$ подання, яке зручно використовувати як для їх обчислення, так і для вивчення їх аналітичних властивостей.

Для того, щоб сформулювати основний результат, для $j = 0, 1, \ldots, N-1$ введемо позначення: $A\,(j)$ — тридіагональна матриця вигляду

$$A\,(j) = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m-2}^{(-)} & a_{m-2}^{(0)} & a_{m-2}^{(+)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{m-1}^{(-)} & a_{m-1}^{(0)} \end{pmatrix};$$

$$a_i^{(0)} = \lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1;$$
$$a_i^{(+)} = -\lambda_{ij}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-2;$$
$$a_i^{(-)} = -\mu_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1;$$

$$B\,(j) = \begin{pmatrix} 0 & \nu_{0j+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1j+1} & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_{m-2j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}; \quad C\,(j) = \frac{\mu_{m\,j}}{\lambda_{m\,j}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{0j+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{1j+1} \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{m-2j+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{m-1j+1} \end{pmatrix}.$$

Через $A\,(N)$ будемо позначимо трикутну матрицю

$$A\,(N) = \begin{pmatrix} \mu_{1N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\left(\nu_{1N} + \lambda_{1N}\right) & \mu_{2N} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\nu_{1N} & -\left(\nu_{2N} + \lambda_{2N}\right) & \mu_{3N} & \ldots & 0 & 0 \\ & & & \ldots & & \\ -\nu_{1N} & -\nu_{2N} & -\nu_{3N} & \ldots & -\left(\nu_{m-2\,N} + \lambda_{m-2N}\right) & \mu_{m-1\,N} \end{pmatrix}.$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'(j) = (\pi_{0j}, \pi_{1j}, \ldots, \pi_{m-1j}), \quad Q(j) = \frac{\pi(j)}{\pi_{0N}},$$

$$\nu'(j) = (\nu_{0j}, \nu_{1j}, \ldots, \nu_{m-1j}), \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

$\bar{1}(m-1)$ – $(m-1)$ — вимірний вектор, що складається з одиниць, $e_i(m-1)$ – – $(m-1)$ — вимірний вектор, i-та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}$, e_i будемо позначати такі ж вектори розмірності m.

Теорема 1. *Якщо для $Q(t)$ існує стаціонарний режим і матриці $A(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ мають обернену, то стаціонарні імовірності π_{ij}, $(i,j) \in S$ можна подати у вигляді*

$$\pi'(N) = S_Q^{-1} Q'(N), \quad \pi_{m\,N} = S_Q^{-1} \frac{1}{\mu_{m\,N}} Q'(N) \left(\nu(N) + \lambda_{m-1\,N} e_m\right), \tag{1}$$

$$\pi'(j) = S_Q^{-1} Q'(N) T(N-1) \times \ldots \times T(j), \tag{2}$$

$$\pi_{m\,j} = S_Q^{-1} \frac{1}{\lambda_{m\,j}} Q'(N) T(N-1) \times \ldots \times T(j+1) \nu(j+1), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{3}$$

де

$$S_Q = Q'(N) \left\{ \bar{1} + \frac{1}{\mu_{m\,N}} \left(\nu(N) + \lambda_{m-1N} e_m\right) + \sum_{j=0}^{N-1} T(N-1) \times \ldots \times T(j+1) \times \right.$$

$$\left. \times \left[T(j)\bar{1} + \frac{1}{\lambda_{m\,j}} \nu(j+1) \right] \right\}, \tag{4}$$

$$Q(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ A^{-1}(N) \left(\nu_{0N} \bar{1}(m-1) + \lambda_{0N} e_1(m-1)\right) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$T(j) = [B(j) + C(j)] A^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Доведення. Для кожного $k = 0, 1, \ldots, m-1$ розіб'ємо S на дві підмножини $E_k = \{(0,N), (1,N), \ldots, (k,N)\}$ та $\bar{E}_k = S \backslash E_k$. В силу рівності потоків імовірності через замкнений контур у стаціонарному режимі [7: 49], будемо мати

$$\begin{gathered} \nu_{0N}\pi_{0N} + \nu_{1N}\pi_{1N} + \ldots + \nu_{k-1N}\pi_{k-1N} + (\nu_{kN} + \lambda_{kN}) \pi_{kN} = \mu_{k+1N}\pi_{k+1N}, \\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Для $Q_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{0N}}$, $(i,j) \in S$ перші $(m-1)$ рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{cases} \mu_{1N} Q_{1N} = \nu_{0N} + \lambda_{0N} \\ -(\nu_{1N} + \lambda_{1N}) Q_{1N} + \mu_{2N} Q_{2N} = \nu_{0N} \\ -\nu_{1N} Q_{1N} - (\nu_{2N} + \lambda_{2N}) Q_{2N} + \mu_{3N} Q_{3N} = \nu_{0N} \\ \ldots \\ -\nu_{1N} Q_{1N} - \ldots - (\nu_{m-2\,N} + \lambda_{m-2\,N}) Q_{m-2\,N} + \mu_{m-1\,N} Q_{m-1\,N} = \nu_{0N} \end{cases} . \tag{7}$$

Відносно $Q_{1N}, \ldots, Q_{m-1\,N}$ розв'язком (7) буде

$$\begin{pmatrix} Q_{1N} \\ \ldots \\ Q_{m-1\,N} \end{pmatrix} = A^{-1}(N)(\nu_{0N}\bar{1}(m-1) + \lambda_{0N}e_1(m-1)).$$

Таким чином (5) доведено.

З (6) при $k = m - 1$ знаходимо

$$Q_{m\,N} = \frac{1}{\mu_{m\,N}} Q'(N)(\nu(N) + \lambda_{m-1\,N}e_m). \tag{8}$$

Узагальнимо співвідношення (8) на випадок $j = N - 1, \ldots, 1, 0$. Розіб'ємо S на дві підмножини $S_j = \{(\alpha, \beta) \in S : \beta \leq j\}$ і $\bar{S}_j = S \backslash S_j$. Знову використовуючи рівність потоків імовірності через замкнений контур, маємо

$$\lambda_{m\,j}Q_{m\,j} = \nu_{0j+1}Q_{0j+1} + \ldots + \nu_{m-1j+1}Q_{m-1j+1}$$

або

$$Q_{m\,j} = \frac{1}{\lambda_{m\,j}} Q'\left(j+1\right)\nu\left(j+1\right), \quad j = N-1, \ldots, 0. \tag{9}$$

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i, j) з області $S^1 = \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Відповідні рівняння для Q_{ij}, $(i, j) \in S^1$ мають вигляд

$$(\lambda_{0j} + \nu_{0j})Q_{0j} = \mu_{1j}Q_{1j}, \quad i = 0, \tag{10}$$

$$\begin{gathered}(\lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij})Q_{ij} = \nu_{i-1j+1}Q_{i-1j+1} + \lambda_{i-1j}Q_{i-1j} + \mu_{i+1j}Q_{i+1j}, \\ i = 1, 2, \ldots, m-2.\end{gathered} \tag{11}$$

При $i = m - 1$ з урахуванням (9)

$$\begin{gathered}\left(\lambda_{m-1j} + \mu_{m-1j} + \nu_{m-1j}\right)Q_{m-1j} = \nu_{m-2j+1}Q_{m-2j+1} + \\ + \lambda_{m-2j}Q_{m-2j} + \frac{\mu_{m\,j}}{\lambda_{m\,j}} Q'\left(j+1\right)\nu\left(j+1\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Систему (10)–(12) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$Q'\left(j\right)A\left(j\right) = Q'\left(j+1\right)\left[B\left(j\right) + C\left(j\right)\right],$$

або

$$\begin{gathered}Q'\left(j\right) = Q'\left(j+1\right)\left[B\left(j\right) + C\left(j\right)\right]A^{-1}\left(j\right) = Q'\left(j+1\right)T\left(j\right), \\ j = N-1, \ldots, 1, 0,\end{gathered} \tag{13}$$

оскільки за умовою $A^{-1}(j)$ існує.

Розв'язком рекурентного співвідношення (13) буде послідовність векторів

$$Q'\left(j\right) = Q'\left(N\right)T\left(N-1\right) \times \ldots \times T\left(j\right), \quad j = N-1, \ldots, 1, 0. \tag{14}$$

Підставляючи праву частину (14) в (9), маємо

$$Q_{m\,j} = \frac{1}{\lambda_{m\,j}} Q'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j+1)\nu(j+1), \quad j = N-1, \ldots, 1, 0. \quad (15)$$

Тепер умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij}, $(i,j) \in S$ дозволяє знайти

$$\pi_{0N} = \Bigg\{ Q'(N)\bar{1} + \sum_{j=0}^{N-1} Q'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j)\bar{1} + \frac{1}{\mu_{m\,N}} Q'(N)(\nu(N)+$$

$$+\lambda_{m-1\,N} e_m) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_{m\,j}} Q'(N)T(N-1) \times \ldots \times T(j+1)\nu(j+1) \Bigg\}^{-1}. \quad (16)$$

Співвідношення (1)–(4) є безпосереднім наслідком (8), (14)–(16).

Теорему доведено.

Застосуємо отриманий результат до системи $M/M/m/N$ з повторними викликами. У даному випадку залежність локальних характеристик від точки $(i,j) \in S$ фазового простору має простий явний вигляд і можна провести більш детальний аналіз.

Для $M/M/m/N$ — системи з повторними викликами

$$B(j) = (j+1)\,\nu B, \quad C(j) = (j+1)\,\nu\rho^{-1} C,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ — завантаженням системи первинними викликами,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $A(j)$ можна подати у вигляді

$$A(j) = \Delta(j)[I - P(j)], \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

де $\Delta(j) = \|(\lambda + \alpha\mu + j\nu)\delta_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ — діагональна матриця, $P(j) = \|p_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$,

$$p_{\alpha\beta}(j) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda+\alpha\mu+j\nu}, & \beta = \alpha+1, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m-2, \\ \frac{\alpha\mu}{\lambda+\alpha\mu+j\nu}, & \beta = \alpha-1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках}, \end{cases}$$

підстохастична матриця ($p_{\alpha\beta}(j) \geq 0$ і для будь-якого $\alpha : \sum\limits_{\beta=0}^{m-1} p_{\alpha\beta}(j) \leq 1$).

Оскільки для

$$j = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad \sum_{\beta=0}^{m-1} p_{m-1\beta}(j) = \frac{(m-1)\mu}{\lambda + (m-1)\mu + j\nu} < 1,$$

і матриця $P(j)$ є нерозкладною, то її спектральний радіус строго менше 1. Звідси випливає, що матриця $A(j)$ має обернену матрицю

$$\mathrm{A}^{-1}(j) = [I - P(j)]^{-1}\Delta^{-1}(j) = [I + P(j) + P^2(j) + \ldots]\,\Delta^{-1}(j).$$

Таким чином, умови теореми 1 виконуються і ми маємо наступний результат.

Наслідок 1. *Стаціонарні імовірності $M/M/m/N$ — системи з повторними викликами можуть бути подані у вигляді* (1)–(4), *де матриця*

$$T(j) = (j+1)\nu\,[B + \rho^{-1}C][I - P(j)]^{-1}\,\Delta^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Очевидно, формули (1)–(4) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. У випадку одного обслуговуючого приладу ($m = 1$) векторно-матричне подання стаціонарних імовірностей значно спрощується.

Наслідок 2. *Стаціонарні імовірності для $M/M/1/N$ — системи з повторними викликами мають вигляд*

$$\pi(0,k) = S_Q^{-1}\prod_{j=0}^{k-1}\left(\rho\frac{j+\lambda/\nu}{j+1}\right), \tag{17}$$

$$\pi(1,k) = S_Q^{-1}\rho\left(1 + k\frac{\nu}{\lambda}\right)\prod_{j=0}^{k-1}\left(\rho\frac{j+\lambda/\nu}{j+1}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{18}$$

де

$$\mathrm{S_Q} = \sum_{m=0}^{N}\left[1 + \rho\left(1 + m\,\frac{\nu}{\mu}\right)\right]\prod_{j=0}^{m-1}\left(\rho\frac{j+\lambda/\nu}{j+1}\right).$$

Перейдемо тепер до розрахунків стаціонарного розподілу для конкретної системи. Для спрощення вважаємо, що інтенсивніcь обслуговування $\mu = 1$, що не обмежує загальності.

Як приклад, розглянемо систему $M/M/1/20$. Нехай $\nu = 0.1$, $\lambda = 1.1$.

Наведемо числові значення стаціонарного розподілу та їх графіки.

0.00734806,	0.0177823,	0.0264239,	0.0310369,	0.031622,	0.0292629,	0.0252561,
0.0206734,	0.0162316,	0.0123223,	0.00909825,	0.00656287,	0.00464089,	0.00322603,
0.00220929,	0.00149327,	0.000997633,	0.000659625,	0.000432092,	0.000280672,	0.00018093.

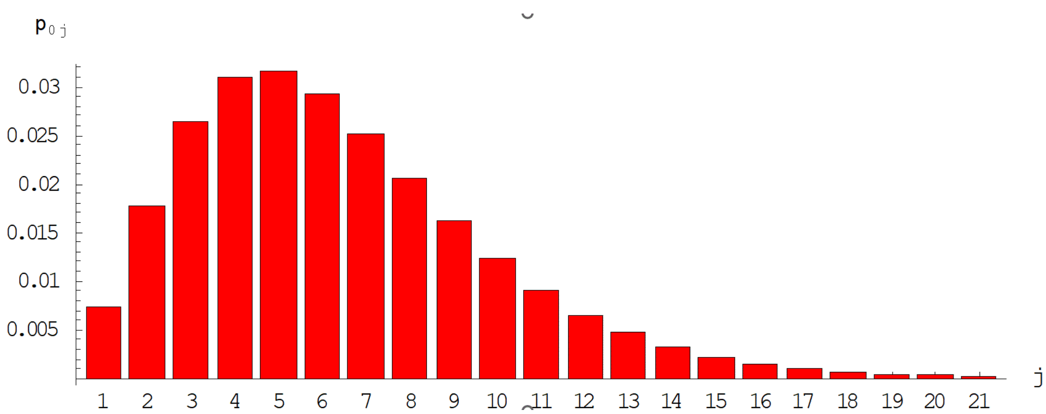

Рис. 1. Стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}(20)$.

0.00808286,	0.0213388,	0.034351,	0.0434516,	0.047433,	0.0468206,	0.0429354,
0.0372121,	0.0308401,	0.0246446,	0.0191063,	0.0144383,	0.010674,	0.00774247,
0.00552322,	0.00388249,	0.00269361,	0.00184695,	0.00125307,	0.000842016,	0.00056087.

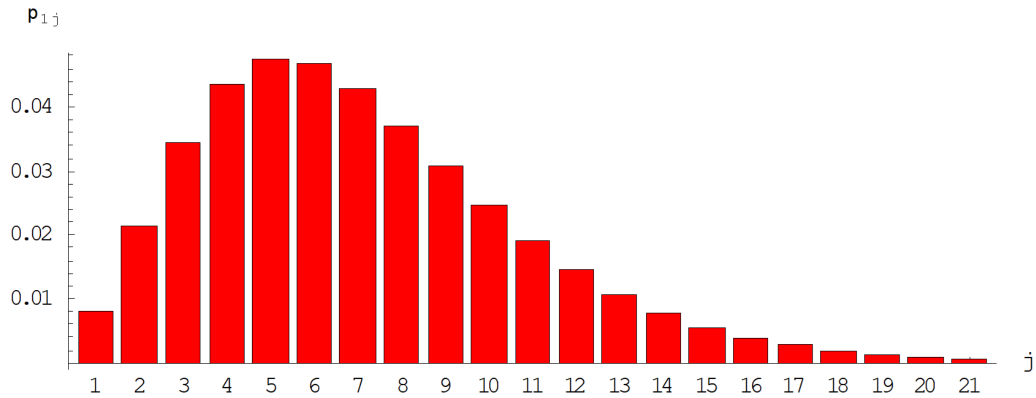

Рис. 2. Стаціонарні ймовірності $\pi_{1j}(20)$.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі для моделювання процесу обслуговування систем з повторними викликами вводиться клас двовимірних процесів міграції. Тип системи обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Для обчислення стаціонарних імовірностей отримані явні формули в векторно-матричному вигляді. Вони є зручними для їх обчислення та розв'язку оптимізаційних задач. На завершення зауважимо, що прості формули, подібні (17), (18) можуть бути отримані для інших типів міграцій, що визначаються вибором залежності локальних характеристик від фазової точки області S.

В подальшому дослідженні можна розглянути системи з необмеженим числом повторних викликів і з'ясувати умови існування стаціонарного розподілу.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження частково здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Розроблення методів моделювання, аналізу та оптимізації виробничих систем із використанням стохастичних моделей і систем керування запасами» (державний реєстраційний номер 0126U002699).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

І. Я. Усар: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. І. А. Макушенко: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проект. О. В. Лукович: курація даних, методологія, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Falin, G. I., & Templeton, J. G. C. (1997). *Retrial Queues.* Chapman and Hall: London. https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2977-8
2. Artalego, J. R., & Gomez-Corral A. (2008). *Retrial Queueing Systems.* Springer: Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9
3. Falin, G. I., & Gómez-Corral, A. (2000). On a bivariate Markov process arising in the theory of single-server retrial queues. *Statistica Neerlandica,* 54, 67–78. https://doi.org/10.1111/1467-9574.00126
4. Anisimov, V. V., & Artalego, J. R. (2001). Analysis of Markov Multiserver Retrial Queues with Negative Arrivals. *Queueing Systems,* 39, 157–182. https://doi.org/10.1023/a:1012796517394
5. Lebedev, E., & Usar, I. (2013). Retrial queuing systems with variable arrival rate. *Cybernetics and Systems Analysis,* 49(3), 457–464. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9529-9
6. Makushenko, I., Usar, I., Livinska, H., & Sharapov, M. (2023). Optimal threshold strategies for retrial systems with a queue. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 427, 115–136. https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115136
7. Walrand, J. (1988). *An Introduction to Queueing Networks.* Prentice Hall, Englewood Cliffs: NJ.

Usar I. Ya., Makushenko I. A., Lukovich O. V. On stationary distribution for migration processes of a special type.

An important branch of queueing theory is the theory of systems with retrial queuing. They are used in the design of computer networks, in the analysis of stochastic information processing networks and modern communication systems, as well as in modeling the process of aircraft landing, etc.

In retrial queueing systems, a request that arrives at the system and finds all servers busy does not join a finite-capacity queue, as in queueing systems with waiting, and does not leave the system permanently, as in loss systems. When all service devices are occupied, this request makes another attempt to access service. It is assumed that the request continues retrying until it is eventually admitted to service.

Retrial systems differ in the strategies of primary and secondary calls, as well as in the number of servers. The multidimensional nature of the models makes it possible to carry out a systematic analysis of stochastic networks and to investigate their integral performance characteristics. As the models become more complex, new mathematical problems arise, in particular, the development of methods for evaluating system performance measures under stationary operating conditions.

In this paper, a class of two-dimensional migration processes is introduced, which can be used to model the service process for various retrial systems. The arrival and service mechanisms of requests are determined by the controlling parameters of the migration. The main objective of the paper is to derive closed-form expressions for the stationary probabilities in terms of the parameters of the service process model.

Keywords: migration process, Markov chains, stationary distribution, retrial queues, probability flow.

Отримано: 29.03.2026 Прийнято: 14.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026