УДК 519.6
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).60-65

М. М. Ломага[1], О. В. Глебена[2], М. С. Герич[3], В. В. Чубирка[4]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8813-0464

[2] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи
oleksandr.hlebena1@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0006-2962-920X

[3] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9634-5254

[4] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
viktor.chubyrka@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7556-6118

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

У статті розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для неперервних функцій комплексної змінної, заданих на замкненій опуклій області. Запропоновано геометричний підхід до дослідження модуля комплексної функції шляхом переходу до тривимірного простору та побудови опуклої оболонки відповідної множини точок. Введено поняття діаграми Ньютона та мажоранти Ньютона для комплексної функції, досліджено їх властивості, а також визначено числові характеристики у вигляді нахилів і відхилень. Обґрунтовано можливість використання запропонованого апарату для побудови чисельних алгоритмів знаходження екстремальних значень функції. Окреслено перспективи практичного застосування у чисельному аналізі, оптимізації та комп'ютерному моделюванні.

Ключові слова: комплексна функція, діаграма Ньютона, мажоранта Ньютона, чисельний аналіз, опукла оболонка, оптимізація.

1. Вступ. У сучасному чисельному аналізі та прикладній математиці важливу роль відіграють методи дослідження функцій, заданих таблично або у вигляді дискретних значень. У таких випадках класичні аналітичні методи часто є непридатними або малоефективними, що зумовлює необхідність розробки альтернативних підходів до оцінювання поведінки функцій.

Відомий апарат мажорант і діаграм Ньютона [1] довів свою ефективність для функцій однієї дійсної змінної [2, 3]. У [4] отримано оцінки точності наближення функцій некласичною мажорантою Ньютона. Однак розширення цього підходу на випадок функцій комплексної змінної потребує врахування специфіки комплексної площини та особливостей модуля функції.

У даній роботі розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для неперервних функцій комплексної змінної. Запропонований підхід базується на геометричній інтерпретації значень функції та дозволяє отримати ефективні оцінки, що можуть бути використані при побудові чисельних алгоритмів.

2. Побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для однозначних неперервних функцій комплексної змінної. Розглянемо однозначну неперервну функцію комплексної змінної

$$f\left(u\right)=f\left(x+iy\right),\left(x,y\right)\in D,$$

де D замкнута опукла множина комплексної площини, а $|f\left(u\right)|\le M$, де M — деяка стала.

Нехай $(x_k,y_j)\in D$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$, тоді через $u_{kj}=x_k+iy_j$ позначимо точку комплексної площини C.

Через ξ_{kj} позначимо значення модуля комплексної функції $w=f\left(u\right)$ у точці $u_{kj}=x_k+iy_j$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$ із множини D, тобто

$$\xi_{kj}=\xi\left(x_k,y_j\right)=|f\left(u_{kj}\right)|=\sqrt{\left[\varphi\left(x_k,y_j\right)\right]^2+\left[\psi\left(x_k,y_j\right)\right]^2},$$

$$\left(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m\right).$$

Точка $(x_k,y_j,\xi_{kj})\in R^3$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$ є точкою на поверхні модуля комплексної функції $w=f\left(u\right)$.

Означення 1. *Точку $P_{kj}(x_k,y_j-\ln\xi_{kj})$ з координатами*

$$x=x_k,\quad y=y_j,\quad z=-\ln\xi_{kj}$$

у просторі xyz назвемо ***точкою зображення*** *значення комплексної функції $w=f\left(u\right)$ у точці $u_{kj}=x_k+iy_j$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$.*

Припустимо, що точки зображення P_{kj} значень комплексної функції $w==f\left(u\right)$ у точках $u_{kj}=x_k+iy_j$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$ побудовані. З кожної точки P_{kj} проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку — через $C\left(S\right)$. Для кожної точки $\left(x,y\right)\in D$, де $D=\left\{x_0\le x\le x_n,\ y_0\le y\le y_m\right\}$, визначимо точку $B\left(x,y,\kappa\left(x,y\right)\right)$, де $\kappa\left(x,y\right)==\inf\limits_{(x,y,z)\in C(S)} z$.

Множина точок $B\left(x,y,\kappa\left(x,y\right)\right)$, де $\left(x,y\right)\in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C\left(S\right)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою, і її рівняння має вигляд:

$$z=\kappa\left(x,y\right),\quad\left(x,y\right)\in D.$$

Означення 2. *Поверхня δ_f, визначена на D, називається* ***діаграмою Ньютона*** *комплексної функції $w=f\left(u\right)$ на D.*

Діаграма Ньютона δ_f функції $\xi\left(x,y\right)$ (комплексної функції $w=f\left(u\right)$) має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{kj} значення комплексної функції $w=f\left(u\right)$ в точці $u_{kj}=x_k+iy_j$, $(k=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$;
- кожна точка зображення P_{kj} знаходиться на δ_f або розміщена вище за неї;

– кожній точці $(x_k, y_j) \in D$ відповідає $B_{kj}(x_k, y_j, \kappa_{kj})$ — точка діаграми Ньютона δ_f, де $\kappa_{kj} = \kappa(x_k, y_j)$.

Позначимо $M_f(x,y) = \exp(-\kappa(x,y))$, $(x,y) \in D$.

Тоді для кожної точки $(x_k, y_j) \in D$, $(k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ виконується нерівність

$$|f(u_{kj})| = \xi(x_k, y_j) = \xi_{kj} \leq M_f(x_k, y_j).$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln \xi_{kj} \geq \kappa(x_k, y_j),$$

або

$$\xi_{kj} \leq \exp(-\kappa(x_k, y_j)) = M_f(x_k, y_j).$$

Означення 3. *Функція $z = M_f(x,y)$, визначена на D, називається **мажорантою Ньютона** комплексної функції $w = f(u)$ на D.*

При побудові діаграми Ньютона будемо припускати, що в усіх вузлах розглядуваної сітки значення модуля функції є додатними, тобто $\xi_{kj} = |f(u_{kj})| > 0$. Ця умова забезпечує коректність логарифмічного перетворення, яке використовується для переходу до просторового зображення значень функції. У такому випадку точки $P_{kj}(x_k, y_j - \ln \xi_{kj})$ є коректно визначеними, а побудована на їх основі нижня межа опуклої оболонки відповідної множини вертикальних півпрямих задає функцію $\kappa(x,y)$ через яку визначається мажоранта Ньютона $M_f(x,y) = \exp(-\kappa(x,y))$.

Таким чином, побудований апарат застосовується до модуля комплексної функції та забезпечує його геометрично інтерпретовану верхню оцінку.

Нехай $M_f(x_k, y_j) = T_{kj}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$.

Означення 4. *Величини*

$$R_{kj}(x) = \left(\frac{T_{k-1,j}}{T_{kj}}\right)^{\frac{1}{x_k - x_{k-1}}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m; \quad R_{0j} = 0),$$

і

$$R_{kj}(y) = \left(\frac{T_{k,j-1}}{T_{kj}}\right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}} \quad (j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n; \quad R_{k0} = 0),$$

*називаються (k,j)-ми **числовими нахилами мажоранти Ньютона** $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини*

$$D_{kj}(x) = \frac{R_{k+1,j}(x)}{R_{kj}(x)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m; \quad D_{0j} = D_{nj} = \infty),$$

і

$$D_{kj}(y) = \frac{R_{k,j+1}(y)}{R_{kj}(y)} \quad (j = 1, 2, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, \ldots, n; \quad D_{k0} = D_{km} = \infty),$$

*називаються (k,j)-ми **відхиленнями мажоранти Ньютона** $M_f(x,y)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy.*

Із опуклості вниз діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$R_{kj}\left(x\right)\leq R_{k+1,j}\left(x\right)\quad\left(k=0,1,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m\right),$$

$$R_{kj}\left(y\right)\leq R_{k,j+1}\left(y\right)\quad\left(j=0,1,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,n\right),$$

$$D_{kj}\left(x\right)\geq 1\quad\left(k=1,2,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m\right),$$

$$D_{kj}\left(y\right)\geq 1\quad\left(j=1,2,\ldots,m-1;\ k=0,1,\ldots,n\right).$$

Враховуючи, що неперервна функція комплексної змінної $f\left(u\right)=f\left(x+iy\right)$ досягає свого найбільшого й найменшого за модулем значення в замкненій області D, то для побудови алгоритмів знаходження цих значень можемо скористатись властивостями числових нахилів та відхилень мажоранти Ньютона комплексної функції $w=f\left(u\right)$ на D.

Запропонований апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона може бути ефективно використаний у задачах чисельного аналізу функцій комплексної змінної, зокрема при дослідженні їх модуля на дискретних множинах.

У межах чисельного аналізу даний підхід дозволяє здійснювати пошук екстремальних значень модуля функції, заданої таблично, без необхідності відновлення її аналітичного вигляду. Це є принципово важливим у випадках, коли функція отримана як результат експерименту або чисельного моделювання.

У задачах оптимізації використання мажоранти Ньютона дає змогу будувати верхні оцінки функції та, відповідно, звужувати область пошуку екстремумів. Такий підхід дозволяє зменшити обчислювальні витрати за рахунок відсікання підобластей, у яких досягнення екстремуму є неможливим.

У комп'ютерному моделюванні запропонований метод може застосовуватись для аналізу поведінки функцій, заданих на сітках, зокрема для дослідження їх глобальних характеристик та виявлення областей з найбільшими значеннями модуля.

3. Висновки. У роботі запропоновано узагальнення апарату мажорант і діаграм Ньютона на випадок функцій комплексної змінної. Основою підходу є геометрична інтерпретація значень функції через побудову опуклої оболонки у тривимірному просторі. Введено поняття діаграми Ньютона та мажоранти Ньютона для комплексної функції, досліджено їх основні властивості та встановлено зв'язок між геометричними характеристиками і поведінкою функції.

Отримані результати мають як теоретичне, так і прикладне значення. Вони можуть бути використані у чисельному аналізі для дослідження функцій, заданих на дискретних множинах, у задачах оптимізації для звуження області пошуку екстремумів, а також у комп'ютерному моделюванні для аналізу складних функціональних залежностей. Запропонований підхід також створює основу для побудови адаптивних чисельних алгоритмів, у яких геометричні характеристики мажоранти можуть використовуватися для локалізації екстремальних значень функції та звуження області їх пошуку, що розширює можливості практичного застосування розробленого апарату.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою конкретних чисельних алгоритмів на основі запропонованого апарату, дослідженням їх обчислювальної ефективності, а також узагальненням підходу на багатовимірні випадки та більш загальні класи функцій.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

М. М. Ломага: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. О. В. Глебена: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування. М. С. Герич: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. В. В. Чубирка: формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©

(2026). Ломага М. М., Глебена О. В., Герич М. С., Чубирка В. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Tsehelyk, H. H. (2013). *The apparatus of non-classical majorants and Newton diagrams of tabular functions and its use in numerical analysis.* Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
2. Hlebena, M. I. (2012). *Mathematical models and numerical methods of majorant type for the analysis of discrete optimization processes.* (Extended abstract of candidate's thesis). Ivano-Frankivsk [in Ukrainian].
3. Hlebena, M. I. (2014). Obchysliuvalna stiikist interpoliatsiinoho metodu mazhorantnoho typu rozviazuvannia zadachi Koshi dlia system zvychainykh dyferentsialnykh rivnian. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 26(2), 25–28 [in

Ukrainian].

4. Hlebena, M. I., Hrypynska, N. V., & Tsehelyk, H. H. (2012). Pro tochnist aproksymatsii funktsii dvokh diisnykh zminnykh neklasychnoiu mazhorantoiu Niutona. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics,* 18, 70–75.

Lomaha M. M., Hlebena O. V., Herych M. S., Chubyrka V. V. The apparatus of nonclassical majorants and Newton diagrams for functions of a complex variable.

This paper presents the construction of the framework of nonclassical majorants and Newton diagrams for continuous functions of a complex variable defined on a closed convex domain. A geometric approach to the analysis of the modulus of a complex function is proposed, based on embedding the problem into three-dimensional space and constructing the convex hull of a corresponding set of points. The concepts of the Newton diagram and the Newton majorant for a complex function are introduced, and their fundamental properties are investigated. Numerical characteristics, including slopes and deviations, are defined and analyzed. The applicability of the proposed framework to the development of numerical algorithms for determining extremal values of a function is demonstrated. Potential applications in numerical analysis, optimization, and computer modeling are also discussed.

Keywords: complex function, Newton diagram, Newton majorant, numerical analysis, convex hull, optimization.

Отримано: 31.03.2026 Прийнято: 18.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026