УДК 519.2
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).45-53

О. В. Капустян[1], А. О. Краснєєва[2], Т. Ю. Жук[3]

[1] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
kapustyan@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9373-6812

[2] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
krasnyeyeva@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8058-1823

[3] Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
zhuktetiana6@knu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8015-0038

СТІЙКІСТЬ ТИПУ ISS ДЛЯ ГЛОБАЛЬНОГО АТРАКТОРА ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ВІДНОСНО ЗБУРЕННЯ КРАЙОВИХ УМОВ

Досліджується якісна поведінка розв'язків нескінченновимірного еволюційного включення параболічного типу з ліпшицевою багатозначною правою частиною за наявності неавтономних збурень $d(t)$ на границі просторової області. У незбуреному випадку ($d \equiv 0$) така задача у фазовому просторі L^2 породжує багатозначну дисипативну напівгрупу, що має нетривіальну компактну рівномірно-притягуючу множину - глобальний атрактор. Досліджується стійкість такого атрактору щодо збурень $d(t)$ шляхом одержання робастної оцінки типу ISS, яка характеризує відхилення траєкторій збуреної системи від атрактора. Дані дослідження є продовженням результатів роботи [1], де була встановлена асимптотична оцінка типу AG. Зараз за рахунок умови Ліпшиця одержується більш точна оцінка типу ISS.

Ключові слова: стійкість, параболічні включення, глобальний атрорактор, збурення, крайові умови.

1. Вступ. Важливу роль при вивченні якісної поведінки траєкторій нескінченновимірних динамічних систем відіграє поняття глобального атрактору - компактної інваріантної рівномірно притягуючої підмножини фазового простору [2]. В системах, для яких природною є неєдиність розвязку початкової задачі, вивчають глобальний атрактор відповідної багатозначної напівгрупи (multi-valued semiflow) [3–7]. Зокрема, в роботах [4, 5] було доведено існування глобального атрактору у фазовому просторі L^2 для параболічного включення, а також досліджено його залежність від параметру. Вичерпну відповідь на питання про залежність глобально притягуючих множин динамічних систем від збурень можна одержати в рамках теорії стійкості від входу до стану ISS [8–11] Для глобальних атракторів відповідні результати були одержані в [12–14], що дозволило одержувати оцінки типу ISS

$$\|y(t, y_0, d)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty)$$

та AG

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\|y(t,y_0,d)\|_\Theta \le \gamma(\|d\|_\infty)$$

для широких класів еволюційних процесів з атрактором Θ, що описуються вектором стану $y(t,y_0,d)$ зі збуреннями правої частини $d(t)$. Стійкість атрактору відносно збурень в крайових умовах вивчалась в [1, 15]. Зокрема, для параболічного включення з напівнеперервною зверху правою частиною в [1] була одержана оцінка типу AG методами теорії рівномірних атракторів багатозначних неавтономних систем. В даній роботі для ліпшицевої правої частини ми одержуємо більш точну оцінку ISS, використовуючи метод функцій Ляпунова і результати роботи [14]

2. Постановка задачі. Розглянемо наступну початково-крайову задачу відносно невідомої функції $y = y(t,x)$, $(t,x) \in Q = (0,+\infty)\times(0,l)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \in f(y(t,x)) + h(t,x), \\ y|_{x=0} = d_1(t),\ \ y|_{x=l} = d_2(t), \\ y|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де y_0 належать фазовому простору $X = L^2(0,l)$, норму в якому будемо позначати $\|\cdot\|$, збурення $d := \{h, d_1, d_2\}$ належать простору $L^\infty(0,+\infty;X)\times L^\infty(0,+\infty)\times L^\infty(0,+\infty)$, многозначне відображення $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ є опуклозначним, компактнозначним і ліпшицевим, тобто

$$\exists L > 0,\ \forall u,v \in \mathbb{R}\ \ dist(f(u),f(v)) \le L\,|u-v|\,, \tag{2}$$

де

$$dist(A_1,A_2) = \sup_{\xi_1\in A_1}\inf_{\xi_2\in A_2} |\xi_1 - \xi_2|\,.$$

Відомо [4] , що за додаткової умови дисипативності

$$\forall s \in \mathbb{R}\ \forall \xi \in f(s)\ \ \xi\cdot s \le \lambda s^2 + C, \tag{3}$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{l^2})$, слабкі розв'язки (див. Означення 1) незбуреної задачі (1) ($d \equiv 0$) породжують багатозначну напівгрупу $V : \mathbb{R}_+ \times X \to 2^X$, для якої існує глобальний атрактор $\Theta \subset X$.

Метою даної роботи є доведення робастної оцінки

$$\forall t \ge 0\ \ \|y_d(t,y_0)\|_\Theta \le \beta(\|y_0\|_\Theta\,,t) + \gamma(\|d\|_\infty), \tag{4}$$

де y_d - розв'язок (1), $\|y\|_\Theta = dist(y,\Theta)$, $\|\cdot\|_\infty$ - норма в L^∞, $\beta \in KL$, $\gamma \in K$,

$$K = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \gamma(0) = 0,\ \gamma - \text{неперервна},\ \text{зростаюча}\},$$

$$KL = \{\beta : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ \text{неперервна},\ \beta(\cdot,t)\in K,\ \beta(s,\cdot)\ \text{спадна до } 0\}.$$

3. Основний результат. Розв'язність (1) на $Q_T = (0,T)\times(0,l)$ будемо розуміти в сенсі наступного означення

Означення 1. *Функція $y = y(t,x)$ є розв'язком (1) на $(0,T)$ якщо $y = v+\omega$, де $\omega = \omega(t,x)$ - розв'язок*

$$\begin{cases} \frac{\delta\omega(t,x)}{\delta t} - \frac{\delta^2\omega(t,x)}{\delta x^2} = 0, \\ \omega|_{x=0} = d_1(t), \omega|_{x=l} = d_2(t), \\ \omega|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$v = v(t,x)-$ *розв'язок*

$$\begin{cases} \frac{\delta v(t,x)}{\delta t} - \frac{\delta^2 v(t,x)}{\delta x^2} \in f(v(t,x) + \omega(t.x)) + h(t,x), \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \tag{6}$$

Відомо [16], що якщо d_1, d_2 обмежені, абсолютно неперервні, $d_1(0) = d_2(0) = 0$, і $\dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, то задача (5) має єдиний розв'язок, причому

$$\|\omega\|_\infty \leq max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\} \tag{7}$$

Оскільки ліпшицеве многозначне відображення є напівнеперервним зверху, то справедлива наступна

Лема 1. *[1] Для всіх $T > 0$, $y_0 \in X$, $h \in L^\infty(0,T;X)$, $\omega \in L^\infty(Q_T)$ задача (6) має розв'язок на $(0,T)$, і кожен розв'язок (6) задовольняє для всіх $0 \leq \tau < t \leq T$ оцінки*

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta(t-\tau))} + C_1(1 + \int_\tau^t \|h(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} ds), \tag{8}$$

$$\|v(t)\|^2 + \alpha \int_\tau^t \|v(s)\|^2_{H_0^1} ds \leq \|v(\tau)\|^2 + C_2 \int_\tau^t (1 + \|h(s)\|^2) ds, \tag{9}$$

де додані константи δ, C_1, α, C_2 залежать лише від $\|\omega\|_\infty$.

Лема 1 означає, що задача (6) є розв'язною на $[0,\infty)$.

Зауваження 1. *Розв'язок (6) ми розуміємо в слабкому сенсі, тобто $v \in L^2(0,T;H_0^1(0,l)), v|_{t=0} = y_0$, і існує функція $g \in L^2(Q_T)$ така, що $\forall \eta \in C_0^\infty(0,l)$, $\forall \theta \in C_0^\infty(0,T)$*

$$-\int_0^T (v(t),\eta)\theta_t dt + \int_0^T (v_x(t),\eta_x)\theta dt = \int_0^T (g(t) + h(t),\eta))\theta dt, \tag{10}$$

$$g(t,x) \in f(v(t,x) + \omega(t,x)) \text{ м. с. на } Q_T. \tag{11}$$

В силу (10) $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(0,l))$, отже функція $[0,T] \ni t \to v(t) \in X$ є абсолютно неперервною і умова $v|_{t=0} = y_0$ має сенс.

Покладемо для кожних $\omega \in L^\infty(Q)$, $h \in L^\infty(0,+\infty;X)$, $\tau \geq 0$, $y_\tau \in X$

$$V_{\{\omega,h\}}(t,\tau,y_\tau) = \{y(t) \mid y(\cdot) - \text{розв'язок (6) на } [\tau,+\infty) \tag{12}$$

$$\text{з початковим даним } y(\tau) = y_\tau \text{ та правою частиною } f(v+\omega) + h\}.$$

Тоді $V_{\{0,0\}}(t,0,y_0) = V(t,y_0)$ - це багатозначна напівгрупа, породжена незбуреною задачею (1) і виконуються умови:

$$V_{\{\omega,h\}}(\tau,\tau,y_\tau) = y_\tau, \forall \tau \geq 0, \forall y_\tau \in X$$

$$V_{\{\omega,h\}}(t,s,V_{\{\omega,h\}}(s,\tau,y_\tau)) = V_{\{\omega,h\}}(t,\tau,y_\tau), \forall t \geq s \geq \tau$$

$$V_{\{\omega,h\}}(t+p,\tau+p,y_\tau) = V_{\{\omega(\cdot+p),h(\cdot+p)\}}(t,\tau,y_\tau).$$

Таким чином $V_{\{\omega,h\}}$ є сім'єю багатозначних процесів. Крім того для $d = \{h, d_1, d_2\}$ формула

$$S_d(t,y_0) = V_{\{\omega,h\}}(t,0,y_0) + \omega(t), \tag{13}$$

де $\omega-$ розв'язок (5), охоплює всі розв'язки (1) в сенсі Означення 1.

Основним інструментом для винводу ISS оцінки (4) буде слугувати наступний результат.

Лема 2. *[14] Нехай є сім'я багатозначних напівпроцесів $\{V_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$, Σ - трансляційно -інваріантна, $0 \in \Sigma$, і нехай багатозначна напівгрупа V_0 має стійкий глобальний атрактор Θ.*

Нехай існує неперервна функція $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, така, що $\forall r > 0, \forall t \geq 0$

$$\left\|y_1^0\right\| \leq r, \left\|y_2^0\right\| \leq r \Rightarrow dist(V_0(t,0,y_1), V_0(t,0,y_2)) \leq e^{c(r)\cdot t} \left\|y_1 - y_2\right\|. \tag{14}$$

Також нехай існують $\alpha \in K$ і неперервна $\eta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall r > 0$, $\overline{\lim\limits_{t\to 0+}} \frac{\eta(r,t)}{t} < \infty$ і для $\forall t \in [0,1]$

$$\|\sigma\|_\infty \leq r, \|y\|_\infty \leq r \Rightarrow dist(V_\sigma(t,0,y), V_0(t,0,y)) \leq \eta(r,t)\cdot\alpha(\|\sigma\|_\infty) \tag{15}$$

Крім того, нехай $\forall r > 0$ множина

$$\bigcup_{t\geq 0} \bigcup_{\|\sigma\|_\infty \leq r} \bigcup_{\|y\|\leq r} V_\sigma(t,0,y) \tag{16}$$

є обмеженою.

Тоді $\{V_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ має локальну властивість ISS відносно Θ, тобто $\exists r > 0, \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K$ такі, що $\|y\|_\Theta \leq r$, $\|\sigma\|_\infty \leq r \Rightarrow \forall t \geq 0$

$$\|V_\sigma(t,0,y)\|_\Theta \leq \beta(\|y\|_\Theta, t) + \gamma(\|\sigma\|_\infty). \tag{17}$$

Основним результатом роботи є наступна теорема щодо якісної поведінки траєкторій в просторі $X = L^2(0,l)$

Теорема 1. *Нехай для задачі (1) багатозначне відображення f задовольняє умови (2) і (3), а збурення $d = \{h, d_1, d_2\}$ задовольняє: $h \in L^\infty((0,\infty), X)$, $d_1, d_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, d_1, d_2 - абсолютно неперервні, $d_1(0) = d_2(0) = 0$, $\dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Нехай Θ - глобальний атрактор незбуреної задачі (1). Тоді $\exists r > 0, \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K$ такі, що для розв'язку $y_d = y_d(t,y_0)$ задачі (1) в сенсі Означення 1 справедливо: $\|d\|_\infty \leq r$, $\|y_0\| \leq r \Rightarrow \forall t \geq 0$

$$\|y_d(t,y)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty). \tag{18}$$

Доведення. Нехай $d = \{h, d_1, d_2\}$ - збурення, $\sigma = \{\omega, h\}$, де ω - розв'язок (5) з крайовими умовами d_1, d_2. Якщо ми доведемо оцінку (17), то в силу (13) для $y_d(t, y_0) \in S_d(t, y_0)$

$$\|y_d(t,y_0)\|_\Theta = \inf_{\xi\in\Theta}\|y_d(t,y_0)-\xi\| \le dist(S_d(t,y_0),\Theta) =$$

$$= \sup_{z\in S_d(t,y_0)}\inf_{\xi\in\Theta}\|z-\xi\| = \sup_{z=\varphi+\omega(t),\varphi\in V_\sigma(t,0,y_0)}\inf_{\xi\in\Theta}\|z-\xi\| \le$$

$$\le \sup_{\varphi\in V_\sigma(t,0,y_0)}\inf_{\xi\in\Theta}\|\varphi-\xi\| + \|\omega(t)\| \le \|V_\sigma(t,0,y_0)\|_\Theta + \sqrt{l}\cdot\|\omega\|_\infty$$

Таким чином, якщо ми доведемо (17) з функіями $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, то (18) буде виконано з з функціми $\beta = \widetilde{\beta}$, $\gamma = \widetilde{\gamma}(s) + \sqrt{l}\cdot s$.

Превіримо виконання умов (14)- (16) з Леми 2. Для перевірки (14) розглянемо задачу (6) з $\omega \equiv 0, h \equiv 0$ і початковим даним $y_0^{(1)}$. Нехай v_1 - будь-який розв'язок цієї задачі (тобто $v_1(t) \in V_{\{0,0\}}(t, 0, y_0^{(1)})$, $t \ge 0$).

Тоді $v_1 = v_1(t,x)$ задовольняє (10), (11) з деякою функцією $g_1 \in L^2_{loc}(Q)$, $g_1(t,x) \in f(v_1(t,x))$.

Оскільки $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ опуклозначна компактнозначна і ліпшицева, то $\forall s \in \mathbb{R}$

$$f(s) = [\overline{f}(s), \underline{f}(s)],$$

де $\overline{f}, \underline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ліпшицеві функції з константою Ліпшиця L. Тоді $g_1(t,x) = \alpha(t,x)\underline{f}(v_1(t,x)) + (1-\alpha(t,x))\overline{f}(v_1(t,x))$, $\alpha(t,x) \in (0,1)$.

Покладемо $g(t,x,v) = \alpha(t,x)\underline{f}(v) + (1-\alpha(t,x))\overline{f}(v)$ і нехай $v_2 = v_2(t,x)$ - слабкий розв'язок початково-крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = g(t,x,v(t,x))), \\ v|_{x=0} = 0, \ v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0^{(2)}(x). \end{cases} \tag{19}$$

Оскільки $\alpha(t,x)$ - вимірна і обмежена, то $g(t,x,v)$ - функція типу Каратеодорі, отже існування розв'язку (19) випливає із [17]. Тоді v_2 задовольняє (10) (11) з $g_2(t,x) = g(t,x,v_2(t,x))$.

Отже $v_2(t) \in V_{\{0,0\}}(t,0,y_0^{(2)})$ і для різниці $v_1 - v_2$ маємо: для м. в. $t > 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 + \|v_1(t)-v_2(t))\|^2_{H_0^1} \le$$

$$\le \|g_1(t)-g_2(t)\|\cdot\|v_1(t)-v_2(t))\| \le [\int_0^l |\alpha(t,x)L(v_1(t,x)-v_2(t,x))+$$

$$+(1-\alpha(t,x))L(v_1(t)-v_2(t))|^2]^{\frac{1}{2}}dx\|v_1(t)-v_2(t)\| \le L\|v_1(t)-v_2(t)\|^2.$$

Звідси в силу абсолютної непервності $t \to v(t)$ в X і Леми Гронуола одержуємо, що $\forall t \ge 0$

$$\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 \le \|y_0^{(1)} - y_0^{(2)}\|^2 e^{2Lt}.$$

Звідси виводимо (14) з $c(r) = L$.

Перевіримо (15). Нехай для заданих $\omega \in L^\infty(Q)$, $h \in L^\infty(0,\infty;X)$ функція $v_1 = v_1(t,x)$ - будь-який розв'язок задачі (6) (тобто $v_1(t) \in V_{\{\omega,h\}}(t,0,y_0),\ t \geq 0$). Тоді $v_1(t,x)$ задовольняє (10), (11) з деякою функцією $g_1 \in L^2_{loc}(Q)$,

$$g_1(t,x) \in f(v_1(t,x) + \omega(t,x)) + h(t,x) \text{ для м.в. } (t,x) \in Q.$$

Отже, з деякою вимірною $\alpha(t,x) \in (0,1)$ виконується

$$g_1(t,x) = \alpha(t,x)\underline{f}(v_1(t,x)+\omega(t,x)) + (1-\alpha(t,x))\overline{f}(v(t,x)+\omega(t,x)) + h(t,x).$$

Покладемо $g(t,x,v) = \alpha(t,x)\underline{f}(v(t,x)) + (1-\alpha(t,x))\overline{f}(v(t,x))$ і нехай $v_2 = v_2(t,x)$ - розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = g(t,x,v(t,x))), \\ v|_{x=0} = 0,\ v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \tag{20}$$

Тоді v_2 задовольняє (10), (11) з $\omega \equiv 0, h \equiv 0, g_2(t,x) = g(t,x,v_2(t,x))$. Отже $v_2(t) \in V_{\{0,0\}}(t,0,y_0))$ і для різниці $v_1 - v_2$ маємо :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 + \|v_1(t)-v_2(t))\|^2_{H^1_0} \leq$$

$$\leq \int\limits_0^l (L(v_1(t,x)+\omega(t,x)-v_2(t,x)) + |h(t,x)|)|v_1(t,x)-v_2(t,x)|dx \leq$$

$$\leq L\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 + L\|\omega\|_\infty\sqrt{l}\|v_1(t)-v_2(t))\| + \|h(t)\|\|v_1(t)-v_2(t))\|.$$

Тоді для всіх $t \in [0,1]$

$$\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 \leq 2L\int\limits_0^t \|v_1(s)-v_2(s))\|^2 ds + 2t(L\|\omega\|_\infty\sqrt{e} + \|h\|_\infty)\max_{s\in[0,1]}\|v_1(t)-v_2(t))\|.$$

Тоді з нерівності Гронуола одержуємо: $\forall t \in [0,1]$

$$\|v_1(t)-v_2(t))\|^2 \leq 2t(L\|\omega\|_\infty\sqrt{l} + \|h\|_\infty)\max_{s\in[0,l]}\|v_1(s)-v_2(s))\|e^{2Lt}.$$

Отже $\forall t \in [0,1]$

$$\|v_1(t)-v_2(t))\| \leq 2(L\|\omega\|_\infty\sqrt{l} + \|h\|_\infty)te^{2Lt},$$

звідки одержуємо (15) з $\eta(r,t) = 2max\{L\sqrt{l},1\}te^{2lt}$, $\alpha(p) = p$. Оцінка (16) є прямим наслідком оцінки (8). Теорему доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі досліджено якісну поведінку розв'язків нескінченновимірного еволюційного включення параболічного типу з ліпшицевою багатозначною правою частиною за наявності неавтономних збурень $d(t)$ на границі просторової області.

У незбуреному випадку ($d \equiv 0$) така задача у фазовому просторі L^2 породжує багатозначну дисипативну напівгрупу, що має нетривіальну компактну рівномірно-притягуючу множину - глобальний атрактор. Розвиваючи результати роботи [1], в якій була встановлена асимптотична оцінка типу AG, в даній роботі за рахунок умови Ліпшиця на многозначну праву частину отримано більш точну робастну оцінку типу ISS, що характеризує відхилення траєкторій збуреної системи від атрактора незбуреної задачі. Запропонована методологія може бути в подальшому використана для оцінки відхилення траєкторій від атракторів для широких класів еволюційних задач, зокрема параболічних систем, які характеризуються наявністю неавтономних збурень на границі просторової області.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння з багатозначною та стохастичною динамікою".

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Капустян О. В.: концептуалізація, супервізія, Краснєєва А. О.: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт, Жук Т. Ю.: курація даних, аналіз джерел, редагування.

Список використаної літератури

1. Kapustyan, O. V., Krasnieieva, A. O., & Zhuk, T. Y. (2025). Stability of the parabolic inclusion attractor with respect to external and boundary perturbations. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 47(2), 52–64. `https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).52-64` [in Ukrainian].
2. Robinson, J. C. (2001). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors.* Cambridge University Press.
3. Ball, J. M. (1997). Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Science,* 7, 475–502. `https://doi.org/10.1007/s003329900037`
4. Melnik, V. S., & Valero, J. (1998). On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis,* 6, 83–111. `https://doi.org/10.1023/A:1008608431399`
5. Kapustyan, O. V., & Valero, J. (2000). Attractors of Differential Inclusions and Their Approximation. *Ukrainian Mathematical Journal,* 52, 1118–1123. `https://doi.org/10.1023/A:1005237902620` [in Ukrainian].
6. Valero, J. (2001). Attractors of Parabolic Equations Without Uniqueness. *Journal of Dynamics and Differential Equations,* 13, 711–744. `https://doi.org/10.1023/A:1016642525800`
7. Kapustyan, O. V., Kasyanov, P. O., & Valero, J. (2014). Structure and regularity of the global attractor of a reaction–diffusion equation with non-smooth nonlinear term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems,* 34(10), 4155–4182. `https://doi.org/10.1023/A:1016642525800`
8. Sontag, E. D., & Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems Control Letters,* 24(5), 351–359. `https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00050-6`
9. Dashkovskiy, S., & Mironchenko, A. (2013). Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Con. Sign. Syst.,* 25, 1–35. `https://doi.org/10.1007/s00498-012-0090-2`
10. Karafyllis, I., & Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs.* USA: Springer. `https://doi.org/10.1007/s003329900037`
11. Mironchenko, A., & Prieur, Ch. (2020). Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions. *SIAM Review,* 62, 529–614. `https://doi.org/10.1137/19M1291248`
12. Schmid, J., Kapustyan, O., & Dashkovskiy, S. (2022). Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields,* 12(3), 763–788. `https://doi.org/10.3934/mcrf.2021044`
13. Dashkovskiy, S., & Kapustyan, O. (2022). Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. *Evolution Equations and Control Theory,* 11(5), 1565–1577. `https://doi.org/10.3934/eect.2021054`
14. Kapustyan, O. V., Sobchuk, V. V., & Yusypiv, T. V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA),* 30(2), 1–13. `https://doi.org/10.15421/142208`
15. Kapustyan, O., & Krasnieiva, A. (2025). Stability of global attractor for the reaction-diffusion equation with respect to disturbances at the boundary of the domain. *Journal of Math. Sci.,* 25–33. `https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.02`
16. Evans, L. C. (1997). *Partial differential equations.* AMS.
17. Denkowski, Z., & Mortola, S. (1993). Asymptotic behaviour of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *JOTA,* 78(2), 365–391. `https://doi.org/10.1007/BF00939675`

Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y. Stability of ISS type for global attractor of parabolic inclusion with respect to boundary disturbances.

Abstract We study the qualitative behavior of solutions to an infinite-dimensional evolutionary inclusion of parabolic type with a Lipschitz multivalued right-hand side in the presence of non-autonomous disturbances $d(t)$ at the boundary of the spatial domain. In the unperturbed case ($d \equiv 0$), such a problem generates a multivalued dissipative semigroup in the phase space L^2, which possesses a nontrivial compact uniformly attracting set — the global attractor. The stability of this attractor with respect to disturbances $d(t)$ is investigated by deriving a robust ISS-type estimate characterizing the deviation of trajectories of the perturbed system from the attractor. The present study continues the results of work (1), where an asymptotic AG-type estimate was established. Here, by exploiting the Lipschitz condition, a more precise ISS-type estimate is obtained.

Keywords: stability, parabolic inclusions, global attractor, disturbances, boundary conditions.

Отримано: 29.03.2026 Прийнято: 15.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026