УДК 517.9
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).126-133

**О. О. Царевський**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
аспірант кафедри математичного аналізу
oles.tsarevskyi@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-6982-5625

# СЕКТОРІАЛЬНІ БЛОК-ДІАГОНАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ В ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯННЯХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

У роботі розглянуто операторне сімейство $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}, t \geq 0$, що виникає при дослідженні стійкої компоненти розв'язків абстрактної задачі Коші другого порядку $x''(t) = Ax(t)$ у банахових просторах. Припускається, що оператор $A$ є секторіальним блок-діагональним оператором на $\ell_p$-сумі скінченновимірних просторів. Для функції $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$ одержано оцінку похідних через формулу Фаа ді Бруно і поліноми Белла. Це дозволяє встановити поблочну та глобальну оцінку. Показано, що в нескінченновимірному випадку глобальна експоненціальна стійкість може порушуватись. Також виділено достатні умови, за яких має місце оцінка типу $\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\| \leq Me^{-\alpha t}$.

**Ключові слова:** секторіальний оператор, блок-діагональний оператор, експоненціальна стійкість, формула Фаа ді Бруно, поліноми Белла.

**1. Вступ.** Розглянемо абстрактну задачу Коші другого порядку

$$x''(t) = Ax(t), \qquad t \geq 0,$$

де $A$ — лінійний оператор у банаховому просторі $X$. При дослідженні спадної, тобто стійкої, компоненти розв'язку виникає операторне сімейство $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}, t \geq 0$. Секторіальні оператори та пов'язане з ними голоморфне функціональне числення залишаються важливою частиною сучасного функціонального аналізу, оскільки дають змогу будувати операторні функції, придатні для спектрального аналізу та еволюційних задач у банахових просторах [5]. Застосування секторіальних і близьких до них операторів продовжують активно вивчатися і в сучасних моделях для операторно-диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах [6, 7]. Окремий інтерес становлять також абстрактні задачі другого порядку, де питання коректної розв'язності та поведінки розв'язків розглядаються в різних функціонально-аналітичних постановках [8]. Класичні монографії [1–3] залишаються базовими для цього напряму, однак сучасні праці показують, що тематика секторіальних операторів та еволюційних рівнянь зберігає актуальність.

Саме секторіальність оператора $A$ є природним припущенням для нашої задачі. Вона забезпечує включення спектра в сектор, який не перетинає від'ємну дійсну піввісь, а тому функція $z \mapsto \sqrt{z}$ може бути задана аналітично на області, що містить $\sigma(A)$ [1, 2]. Для кожного спектрального параметра $\lambda_k$ корінь $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ надалі обирається так, щоб його дійсна частина була додатною, тобто $\Re\mu_k > 0$. Саме ця умова додатності відповідає стійкій компоненті розв'язку і приводить до спадання множника $e^{-t\mu_k}$.

У цій роботі розглядається блок-діагональний оператор на $\ell_p$-сумі скінченновимірних просторів. Такий спеціальний, але конструктивний клас операторів дає змогу отримати явні оцінки для норми $\left\|e^{-t\sqrt{A}}\right\|$, які безпосередньо відображають внесок спектральних параметрів і жорданової структури окремих блоків. На відміну від більш загальних абстрактних підходів, у блок-діагональному випадку можна простежити, як локальні оцінки на жорданових клітинах переходять у глобальні оцінки для всього оператора. Далі ми оцінюємо похідні функції $e^{-t\sqrt{z}}$ за допомогою формули Фаа ді Бруно і поліномів Белла [4], одержуємо поблочні та глобальні оцінки, будуємо нескінченновимірний контрприклад і формулюємо достатні умови глобальної стійкості.

**2. Постановка задачі.** Нехай

$$X = \Big(\bigoplus_{k\geq 1} X_k\Big)_{\ell_p}, \qquad 1 \leq p \leq \infty,$$

де $X_k \cong \mathbb{C}^{m_k}$ — скінченновимірні простори. Розглядатимемо оператор $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots)$ на просторі $X$. Припускаємо, що кожен блок $A_k$ подібний до жорданової матриці $A_k = V_k J_k V_k^{-1}$, де $J_k = \lambda_k I + N_k, N_k^{m_k} = 0$ при $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Далі всюди використовуємо головну гілку кореня, тобто $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}, \operatorname{Re}\mu_k > 0$, Для оператора подібності покладемо

$$\kappa_p(V_k) = \|V_k\|_p \left\|V_k^{-1}\right\|_p.$$

Для аналітичної в околі спектра функції $f$ маємо поблочне представлення

$$f(A) = \operatorname{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots), \qquad \|f(A)\|_{X\to X} = \sup_{k\geq 1} \|f(A_k)\|_{X_k\to X_k}. \tag{1}$$

Тому для $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$ задача зводиться до оцінок на окремих жорданових блоках. Далі ми будемо систематично використовувати тейлорівський розклад на блоці

$$f(J_k) = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} N_k^j. \tag{2}$$

**3. Структура похідних функції $e^{-t\sqrt{z}}$.** Покладемо

$$f(z) = e^{-t\sqrt{z}} = h(g(z)), \qquad h(u) = e^{-tu}, \qquad g(z) = \sqrt{z}.$$

У означенні $g$ використовується головна гілка кореня, така, для якої $\operatorname{Re}\sqrt{z} > 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Опишемо структуру похідних $f^{(j)}$.

**Лема 1.** *Для кожного $j \geq 1$ існують невід'ємні коефіцієнти $a_{j,s}$, $s = j, \dots, 2j-1$, такі, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mu = \sqrt{\lambda}$ і $t \geq 0$ виконується оцінка*

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t\operatorname{Re}\mu} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}\, t^{2j-s} |\mu|^{-s}. \tag{3}$$

*Тобто для кожного $j$ існує поліном $P_j(t, |\mu|^{-1})$ з невід'ємними коефіцієнтами та степенями $t$ від $1$ до $j$, для якого*

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t\operatorname{Re}\mu} P_j(t, |\mu|^{-1}). \tag{4}$$

***Доведення.*** За формулою Фаа ді Бруно [4, Ch. III] маємо

$$f^{(j)}(\lambda) = \sum_{m=1}^{j} h^{(m)}(g(\lambda))\, B_{j,m}\big(g'(\lambda), g''(\lambda), \dots, g^{(j-m+1)}(\lambda)\big), \tag{5}$$

де $B_{j,m}$ — часткові поліноми Белла [4]. Для функції $h$ маємо $h^{(m)}(u) = (-t)^m e^{-tu}$, а для $g(z) = \sqrt{z}$ при $r \geq 1$

$$g^{(r)}(\lambda) = \frac{(-1)^{r-1}(2r-3)!!}{2^r}\, \lambda^{\frac{1}{2}-r}.$$

Позначимо $\mu = \sqrt{\lambda}$. Тоді

$$|h^{(m)}(g(\lambda))| = t^m e^{-t\operatorname{Re}\mu}, \qquad |g^{(r)}(\lambda)| = \frac{(2r-3)!!}{2^r|\mu|^{2r-1}}.$$

Розпишеимо (5) у вигляді:

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t\operatorname{Re}\mu} \sum_{m=1}^{j} t^m \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{j-m+1}=m \\ k_1+2k_2+\dots+(j-m+1)k_{j-m+1}=j}} \prod_{r=1}^{j-m+1} \left(\frac{|g^{(r)}(\lambda)|}{r!}\right)^{k_r}. \tag{6}$$

Кожний доданок у (6) має вигляд

$$c_{j,m,(k_r)}\, t^m |\mu|^{-(2j-m)} e^{-t\operatorname{Re}\mu},$$

де $c_{j,m,(k_r)} \geq 0$ залежить лише від комбінаторних коефіцієнтів поліномів Белла та чисел $(2r-3)!!/(2^r r!)$. Якщо покласти $s = 2j - m$, то при $m = 1, \dots, j$ одержуємо $s = j, \dots, 2j-1$. Після групування всіх доданків з однаковими степенями $t$ та $|\mu|^{-1}$ дістаємо оцінку

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t\operatorname{Re}\mu} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}\, t^{2j-s} |\mu|^{-s},$$

де $a_{j,s} \geq 0$. Це і є формула (3). Позначивши праву частину через

$$e^{-t\operatorname{Re}\mu} P_j(t, |\mu|^{-1}),$$

одержуємо (4).

Для перших похідних одержуємо явні оцінки

$$\frac{|f(\lambda)|}{0!} = e^{-t\operatorname{Re}\mu}, \frac{|f'(\lambda)|}{1!} \qquad \leq \frac{t}{2|\mu|} e^{-t\operatorname{Re}\mu}, \frac{|f''(\lambda)|}{2!} \leq \left(\frac{t^2}{8|\mu|^2} + \frac{t}{8|\mu|^3}\right) e^{-t\operatorname{Re}\mu}$$

Отже, початок полінома $Q_{m_k-1}$ має вигляд

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = 1 + \frac{t}{2|\mu_k|} + \left(\frac{t^2}{8|\mu_k|^2} + \frac{t}{8|\mu_k|^3}\right) + \dots,$$

де ряд обривається на степені $j = m_k - 1$.

**4. Оцінка на жордановому блоці.** З тейлорівського розкладу (2) та леми 1 випливає наступний результат.

**Теорема 1.** *Нехай $J_k = \lambda_k I + N_k$, де $N_k^{m_k} = 0$. Тоді для кожного $t \geq 0$*

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq e^{-t\,\mathrm{Re}\,\mu_k} Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}),$$

*де*

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1})$$

*є поліномом з невід'ємними коефіцієнтами.*

***Доведення.*** З формули (2) маємо

$$e^{-t\sqrt{J_k}} = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} N_k^j.$$

Перейдемо до операторної норми в $X_k \cong \mathbb{C}^{m_k}$. За нерівністю трикутника

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{|f^{(j)}(\lambda_k)|}{j!} \left\| N_k^j \right\|_p.$$

Для стандартної жорданової нільпотентної клітини $N_k$ оператор $N_k^j$ є усіченим зсувом на $j$ позицій. У базисі, в якому $J_k$ має жорданову форму, матриця $N_k^j$ містить одиниці лише на $j$-тій наддіагоналі, а всі інші елементи дорівнюють нулю, тому $\left\| N_k^j \right\|_p \leq 1$ для всіх $j = 0, \ldots, m_k - 1$. Отже,

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{|f^{(j)}(\lambda_k)|}{j!}.$$

Для $j = 0$ маємо $|f(\lambda_k)| = e^{-t\,\mathrm{Re}\,\mu_k}$. Для $j \geq 1$ застосовуємо лему 1, тобто

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq e^{-t\,\mathrm{Re}\,\mu_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1}).$$

Залишається покласти

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1}).$$

Оскільки кожен поліном $P_j$ має невід'ємні коефіцієнти, те саме виконується і для $Q_{m_k-1}$.

**5. Глобальна оцінка в скінченновимірному випадку.** Поєднуючи (1), подібність $A_k = V_k J_k V_k^{-1}$ та теорему 1, отримуємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \to X} \leq \sup_{k \geq 1} \Big[ \kappa_p(V_k) e^{-t\,\mathrm{Re}\,\mu_k} Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) \Big]. \tag{7}$$

Якщо кількість блоків скінченна, то (7) одразу дає експоненціальну стійкість.

**Припущення 1.** *Нехай* $\alpha = \inf_{k\geq 1} \operatorname{Re}\mu_k > 0$. *Тоді для всіх* $t \geq 0$ *виконується оцінка*

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X\to X} \leq \sup_{k\geq 1} \left[ \kappa_p(V_k) \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{s\geq j} a_{j,s} \frac{\left(\frac{j}{\operatorname{Re}\mu_k}\right)^j e^{-j}}{|\mu_k|^s} \right] e^{-\alpha t}, \tag{8}$$

*де для* $j = 0$ *відповідний внесок розуміється як* 1.

***Доведення.*** Із (7) та (3) маємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X\to X} \leq \sup_{k\geq 1} \left[ \kappa_p(V_k) e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{s\geq j} a_{j,s} t^{2j-s} |\mu_k|^{-s} \right].$$

Оскільки $s \geq j$, то $2j - s \leq j$. Тому для кожного доданка

$$t^{2j-s} e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \leq t^j e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \leq \left(\frac{j}{\operatorname{Re}\mu_k}\right)^j e^{-j}.$$

За означенням $\alpha$ маємо $e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \leq e^{-\alpha t}$, підставимо у нерівність, отримаємо(8).

**Наслідок 1.** *Нехай оператор* $A$ *має скінченну кількість блоків. Тоді існують константи* $M > 0$ *та* $\alpha > 0$ *такі, що*

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_p \leq M e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{9}$$

***Доведення.*** Покладемо $\alpha = \min_k \operatorname{Re}\mu_k > 0$. Оскільки число блоків скінченне, а кожен поліном $Q_{m_k-1}$ має скінченну кількість членів, з елементарної оцінки

$$t^q e^{-\alpha t} \leq \left(\frac{q}{\alpha}\right)^q e^{-q}, \qquad q \geq 0,$$

випливає, що кожен множник $Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) e^{-t\operatorname{Re}\mu_k}$ зверху обмежується константою, помноженою на $e^{-\alpha t}$. Після взяття максимуму по скінченній кількості блоків дістаємо (9).

**6. Нескінченновимірний випадок і контрприклад.** У нескінченновимірному випадку оцінка (7) сама по собі ще не гарантує глобальної експоненціальної стійкості. На відміну від скінченновимірного випадку, для нескінченної прямої суми блоків принциповим стає рівномірний контроль величин, що входять до цієї оцінки; подібна залежність є типовою для операторно-диференціальних задач у банахових просторах [3,7]. Тому, якщо поліномні множники, розміри жорданових клітин або числа обумовленості зростають від блока до блока, супремум у правій частині (7) може бути нескінченним.

Побудуємо контрприклад, який показує, що локальні поблочні оцінки не забезпечують глобальної оцінки без додаткових рівномірних припущень. Нехай $N_n$ — нільпотентна жорданова клітина розміру $n$ в $\mathbb{C}^n$, а $k_n > 0$ — числова послідовність, що зростає. Покладемо $B_n = k_n N_n, B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ в просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Для кожного фіксованого $n$ оператор $B_n$ є нільпотентним, тому

$$e^{tB_n} = I + tB_n + \frac{t^2}{2!} B_n^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} B_n^{n-1}.$$

Якщо вибрати послідовність $k_n \to \infty$ і вектор $x = \bigoplus_{n\geq 1} x^{(n)} \in \ell_p$ так, щоб норми $\left\|x^{(n)}\right\|$ спадали недостатньо швидко порівняно зі зростанням $k_n$, то для нескінченно багатьох індексів $n$ внесок блока $e^{tB_n}x^{(n)}$ стає великим уже при малих $t > 0$. Унаслідок цього може трапитися, що $e^{tB}x \notin \ell_p$ поза деяким обмеженим інтервалом значень $t$. Отже, сама по собі керованість кожного окремого блока ще не дає єдиних глобальних констант $M$ та $\alpha$ для всього оператора.

**7. Умови експоненціальної стійкості в нескінченновимірному випадку.** Щоб усунути описані вище перешкоди, введемо природні рівномірні умови:

$$\inf_{k\geq 1} \operatorname{Re}\mu_k > 0, \inf_{k\geq 1} |\mu_k| > 0, \sup_{k\geq 1} m_k < \infty, \sup_{k\geq 1} \kappa_p(V_k) < \infty. \tag{10}$$

Крім того, припустимо, що для фіксованого $\alpha \in \left(0, \inf_{k\geq 1} \operatorname{Re}\mu_k\right)$ існує константа $C_Q > 0$ така, що для всіх $k \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{m_k-1} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)}\, C_{j,s}(\alpha)|\mu_k|^{-s} \leq C_Q, C_{j,s}(\alpha) = \left(\frac{2j-s}{\alpha}\right)^{2j-s} e^{-(2j-s)}.$$

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* (10) *та наведене вище припущення з константою* $C_Q$. *Тоді існують константи* $M > 0$ *та* $\alpha > 0$ *такі, що*

$$\left\|e^{-t\sqrt{A}}\right\|_{X\to X} \leq Me^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{11}$$

***Доведення.*** За теоремою 1 та формулою (7) для кожного $t \geq 0$ маємо

$$\left\|e^{-t\sqrt{A}}\right\|_{X\to X} \leq \sup_{k\geq 1}\left[\kappa_p(V_k)e^{-t\operatorname{Re}\mu_k}\left(1 + \sum_{j=1}^{m_k-1}\sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)} t^{2j-s}|\mu_k|^{-s}\right)\right].$$

Оскільки $\alpha < \inf_{k\geq 1} \operatorname{Re}\mu_k$, то для всіх $k$ і $t \geq 0$ маємо $e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \leq e^{-\alpha t}$. Тому

$$a_{j,s}^{(k)} t^{2j-s}|\mu_k|^{-s} e^{-t\operatorname{Re}\mu_k} \leq a_{j,s}^{(k)} C_{j,s}(\alpha)|\mu_k|^{-s}e^{-\alpha t}.$$

Підставляючи це в попередню оцінку, дістаємо

$$\left\|e^{-t\sqrt{A}}\right\|_{X\to X} \leq \sup_{k\geq 1}\left[\kappa_p(V_k)\left(1 + \sum_{j=1}^{m_k-1}\sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)} C_{j,s}(\alpha)|\mu_k|^{-s}\right)\right] e^{-\alpha t}.$$

За умовою (10) існує число $K > 0$ таке, що $\kappa_p(V_k) \leq K$ для всіх $k$. Отже,

$$\left\|e^{-t\sqrt{A}}\right\|_{X\to X} \leq K(1 + C_Q)e^{-\alpha t},$$

тобто (11) виконується з $M = K(1 + C_Q)$.

**8. Простори $X_\alpha$.** Навіть якщо глобальна рівномірна обмеженість не виконується, експоненціальну стійкість можна зберегти. Для фіксованого $\alpha > 0$ позначимо через $M_k(\alpha)$ найменшу константу в оцінці

$$\left\|e^{-t\sqrt{A_k}}\right\|_{X_k\to X_k} \leq M_k(\alpha)e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0.$$

Визначимо простір

$$X_\alpha = \left\{ x = \bigoplus_{k\geq 1} x^{(k)} \in X : \ \sum_{k\geq 1} M_k(\alpha)^p \left\| x^{(k)} \right\|^p < \infty \right\}$$

для $1 \leq p < \infty$, а в випадку $p = \infty$ — стандартним чином через супремум.

**Теорема 3.** *Для кожного $x \in X_\alpha$ виконується оцінка*

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} x \right\|_X \leq \|x\|_{X_\alpha} e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0. \tag{12}$$

***Доведення.*** Нехай $x = \bigoplus x^{(k)} \in X_\alpha$. Тоді для кожного блока за означенням числа $M_k(\alpha)$ маємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A_k}} x^{(k)} \right\| \leq M_k(\alpha) e^{-\alpha t} \left\| x^{(k)} \right\|, \qquad t \geq 0.$$

Якщо $1 \leq p < \infty$, то після піднесення до степеня $p$ та сумування за $k$ отримуємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} x \right\|_X^p = \sum_{k\geq 1} \left\| e^{-t\sqrt{A_k}} x^{(k)} \right\|^p \leq e^{-\alpha p t} \sum_{k\geq 1} M_k(\alpha)^p \left\| x^{(k)} \right\|^p = e^{-\alpha p t} \|x\|_{X_\alpha}^p .$$

Переходячи до кореня степеня $p$, дістаємо (12). У випадку $p = \infty$ маємо

$$\sup_{k\geq 1} \left\| e^{-t\sqrt{A_k}} x^{(k)} \right\| \leq e^{-\alpha t} \sup_{k\geq 1} M_k(\alpha) \left\| x^{(k)} \right\| = e^{-\alpha t} \|x\|_{X_\alpha} .$$

**9. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі одержано явні оцінки для операторного сімейства $e^{-t\sqrt{A}}$ у випадку секторіального блок-діагонального оператора. Побудовано лему про структуру похідних функції $e^{-t\sqrt{z}}$. На цій основі одержано глобальну оцінку в скінченновимірному випадку. У нескінченновимірному випадку показано, що без контролю по блоках глобальна експоненціальна стійкість може порушуватися. Сформульовано достатні умови, що гарантують оцінку типу (11), а також введено простори $X_\alpha$, на яких така оцінка зберігається за слабших припущень.

Подальший розвиток цієї теми може стосуватися уточнення умов на сім'ї блоків, дослідження ширших класів секторіальних операторів та поширення отриманих оцінок на інші моделі еволюційних рівнянь другого порядку в банахових просторах.

## Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження.

## Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

## Доступність даних

Усі дані доступні в основному тексті рукопису у вигляді формул, тверджень та доведень.

**Використання штучного інтелекту**

Автор підтверджує, що під час створення данної роботи не використовував технології штучного інтелекту.



### Список використаної літератури

1. Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer.
2. Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin: Springer.
3. Daleckii, Yu. L., & Krein, M. G. (1974). *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Providence, RI: American Mathematical Society.
4. Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Dordrecht: Reidel.
5. Batty, C., Gomilko, A., & Tomilov, Y. (2023). Functional calculi for sectorial operators and related function theory. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, *22*(3), 1383–1463. https://doi.org/10.1017/S1474748021000414
6. Fedorov, V. E., & Godova, A. D. (2024). Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving family of operators. *Journal of Mathematical Sciences*, *283*(2), 317–334.
7. Fedorov, V. E., & Nagumanova, A. V. (2024). Direct and inverse problems for evolution equations with regular integro-differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, *286*, 278–289. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07504-3
8. Aparicio, R., Keyantuo, V., & Lizama, C. (2025). Characterization of well-posedness for second-order abstract differential equations on continuous function spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *549*(2).

**Tsarevskyi O. O.** Sectorial block-diagonal operators in second order evolution problems.

The paper deals with the operator family $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}, t \geq 0$, arising in the study of the stable component of solutions to the abstract second-order Cauchy problem $x''(t) = Ax(t)$ in Banach spaces. It is assumed that $A$ is a sectorial block-diagonal operator acting on an $\ell_p$-sum of finite-dimensional spaces. For the function $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$, a structural estimate for its derivatives is obtained by means of the Faà di Bruno formula and Bell polynomials. This yields a blockwise and a global estimate for $e^{-t\sqrt{A}}$. It is shown that in the infinite-dimensional case local blockwise estimates alone do not imply global exponential stability. Sufficient conditions ensuring an estimate of the form $\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\| \leq Me^{-\alpha t}$ are formulated.

**Keywords:** sectorial operator, block-diagonal operator, exponential stability, Faà di Bruno formula, Bell polynomials.

Отримано: 02.04.2026 Прийнято: 17.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026