

УДК 519.63 : 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).14-23](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).14-23)**Я. Є. Борисюк**

Львівський національний університет ім. І. Франка,
асистент кафедри прикладної математики
yaryna.borysyuk@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0322-0637>

КОМПАРТМЕНТНА МОДЕЛЬ SVEAIRR ПОШИРЕННЯ COVID-19 З УРАХУВАННЯМ ВАКЦИНАЦІЇ ТА ГОСПІТАЛІЗАЦІЇ

У роботі побудовано та досліджено компартментну математичну модель поширення COVID-19 типу SVEAIRR з урахуванням вакцинації, безсимптомних носіїв та госпіталізації пацієнтів. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описує динаміку для семи груп населення. Доведено додатність та обмеженість розв'язків і визначено інваріантну область. За допомогою методу матриці наступного покоління знайдено базове репродукційне число та досліджено локальну стійкість безінфекційного стану. Встановлено достатню умову існування ендемічної рівноваги. Чисельні експерименти ілюструють характерну динаміку компартментів моделі та підтверджують її придатність для якісного аналізу поширення інфекції.

Ключові слова: математичне моделювання епідемій, COVID-19, компартментна модель, базове репродукційне число, ендемічна рівновага, стійкість рівноваги.

1. Вступ. Основи математичної епідеміології були закладені в класичних компартментних моделях типу SIR та їх узагальненнях, ключовим параметром таких моделей є базове репродукційне число R_0 [1]. У зв'язку з пандемією COVID-19 значну кількість досліджень присвячено побудові та аналізу модифікацій SEIR-подібних моделей, які враховують особливості передачі інфекції та протиепідемічні заходи [2–4]. Зокрема, у роботі [5] проаналізовано вплив соціального дистанціювання і карантину на динаміку епідемії. Суттєвий науковий інтерес становлять розширені компартментні моделі з урахуванням вакцинації, госпіталізації та інших механізмів контролю інфекції [6–9]. Наприклад, у роботі [8] запропоновано модель SVEAIRR, яка дозволяє досліджувати вплив вакцинації на динаміку інфекції, тоді як у [9] проаналізовано вплив кампанії вакцинації та можливе співіснування різних варіантів вірусу. Урахування госпіталізованих пацієнтів є важливим для опису тяжких форм захворювання та аналізу навантаження на систему охорони здоров'я [4, 8–10]. Сучасні моделі також включають безсимптомні випадки інфекції та карантинні заходи. Зокрема, у роботі [11] запропоновано модель SQEAIRR, що описує безсимптомних інфікованих та ізольовані групи осіб.

Метою роботи є побудова та математичний аналіз компартментної моделі поширення COVID-19 типу SVEAIRR з урахуванням вакцинації, безсимптомних носіїв та госпіталізації пацієнтів.

2. Компартментна модель поширення епідемії SVEAIRR. Компартментні моделі широко використовуються для дослідження динаміки епідемій [9, 12–13]. У цій роботі розглянуто та детально досліджено модель типу SVEAIRR, попередню версію якої нами було запропоновано у [14]. Порівняно з моделлю SVEAIRR [8], у запропонованому підході явно виділено компартмент

безсимптомно інфікованих осіб, що дає змогу аналізувати їхній окремих внесок у формування нових випадків зараження. На відміну від моделей типу SEQAIR або SQAIR [10, 11], акцент зроблено не на карантинних чи ізоляційних механізмах, а на поєднаному впливі вакцинації, безсимптомного перебігу хвороби та госпіталізації. Крім того, враховано нелінійну швидкість лікування госпіталізованих пацієнтів, що дозволяє якісно описати зниження ефективності лікування за зростання навантаження на лікарні.

Для побудови рівнянь математичної моделі загальну популяцію поділено на сім взаємовиключних компартментів (груп): $S(t)$ — сприйнятливі (неімунізовані) особи; $V(t)$ — вакциновані особи з частковим імунітетом, який вони можуть втратити з часом; $E(t)$ — інфіковані у латентному періоді, ще не є заразними; $A(t)$ — безсимптомно інфіковані, які поширюють вірус; $I(t)$ — симптоматично інфіковані, особи з видимими ознаками хвороби, вже є заразні; $H(t)$ — госпіталізовані, особи з важкими формами хвороби, що потребують лікування у стаціонарі; $R(t)$ — одужалі, особи, які видужали після хвороби. Загальна чисельність населення у момент часу t (час вимірюється у днях) визначається як

$$N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + A(t) + I(t) + H(t) + R(t).$$

Діаграма поширення епідемії зображена на рис. 1, а відповідна математична модель у виді системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь наведена нижче:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \Lambda - (\beta_1 I + \beta_2 A) S/N - (\omega + \mu) S + \kappa R + \theta V, \\ \dot{V} &= \omega S - (1 - \psi) (\beta_1 I + \beta_2 A) V/N - (\theta + \mu) V, \\ \dot{E} &= (\beta_1 I + \beta_2 A) S/N + (1 - \psi) (\beta_1 I + \beta_2 A) V/N - (\delta + \mu) E, \\ \dot{A} &= q\delta E - (\mu + \rho_2) A, \\ \dot{I} &= (1 - q)\delta E - (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) I, \\ \dot{H} &= \delta_1 I - \left(\frac{\sigma_0}{1 + bH} + d_H + \mu + \xi \right) H, \\ \dot{R} &= \rho_1 I + \rho_2 A + \frac{\sigma_0}{1 + bH} H - (\kappa + \mu) R \end{aligned} \tag{1}$$

з початковими умовами:

$$S(0) > 0, \quad V(0) \geq 0, \quad E(0) \geq 0, \quad A(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad H(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0. \tag{2}$$

Параметр Λ визначає швидкість надходження нових сприйнятливих осіб, а μ — природний рівень смертності. Сприйнятливі особи заражаються після контакту із зараженими людьми (симптоматичними та безсимптомними) із швидкостями β_1, β_2 відповідно. Швидкість вакцинації здорових осіб задається параметром ω , θ — швидкість втрати імунітету, отриманого від вакцини. У моделі враховано обмежену ефективність вакцини, оскільки вакцинація не забезпечує повного захисту від інфекції [7]. Таким чином, параметр ψ позначає рівень ефективності вакцини ($\psi = 1$ для ідеальної вакцини, $\psi < 1$ для недосконалої, $0 \leq \psi \leq 1$). Природна втрата імунітету серед одужалих осіб визначається параметром κ (швидкість втрати імунітету). Швидкість переходу з латентного

стану після близького контакту з безсимптомними або симптоматичними інфікованими позначається параметром δ . Частки осіб з $E(t)$, що переходять до компартменту безсимптомних $A(t)$ та симптоматично інфікованих $I(t)$, рівні q та $1 - q$ відповідно. Тобто, особи, які не мають симптомів, потрапляють до класу $A(t)$ зі швидкістю $q\delta$, тоді як особи з явними ознаками хвороби потрапляють до компартменту симптоматично інфікованих $I(t)$ зі швидкістю $(1 - q)\delta$. Швидкість одужання безсимптомно інфікованих пацієнтів та симптоматично інфікованих визначається параметрами ρ_2 та ρ_1 відповідно, а рівень смертності в класі $I(t)$ задається параметром d . Вважаємо, що в категорію $A(t)$ потрапляють лише ті, хто не мав жодних симптомів, не отримував жодних ускладнень під час хвороби та був виявлений лише під час тестування.

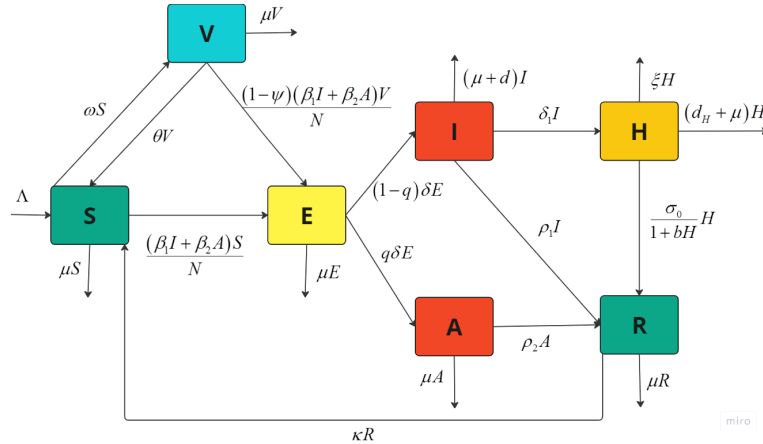


Рис. 1. Схема поширення захворювання для моделі SVEAIHR.

Особи з компартменту $I(t)$ переходять до госпіталізованого відділення $H(t)$ з швидкістю δ_1 , рівень смертності серед госпіталізованих позначається через d_H . Параметр ξ характеризує швидкість вибуття госпіталізованих пацієнтів із системи спостереження без фіксації повного одужання, зокрема внаслідок переведення на амбулаторне лікування або втрати подальшого спостереження. Подальший перебіг захворювання для таких осіб у межах моделі не деталізується. Щоб врахувати ефект затримки лікування, вибираємо швидкість лікування у виді $\sigma(H) = \sigma_0/(1 + bH)$, де σ_0 — базова швидкістьвиліковування, коли кількість госпіталізованих є малою ($H \rightarrow 0$), $b \geq 0$ — насичувальний параметр, що відображає, як швидко ефективність лікування зменшується із зростанням кількості пацієнтів [10]. Пацієнти, які одужують, додаються до класу $R(t)$.

Враховуючи біологічний зміст системи (1), надалі вважаємо, що всі параметри моделі $\Lambda, \beta_1, \beta_2, \omega, \mu, \kappa, \theta, \delta, b, d_H, \xi, \delta_1, \sigma_0, \rho_2, d, \rho_1$ є невід'ємними, причому $\mu > 0$. Крім того, ψ та q задовольняють обмеження

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 < q < 1. \quad (3)$$

3. Невід'ємність та обмеженість розв'язків.

Теорема 1. Усі розв'язки $\{S(t), V(t), E(t), A(t), I(t), H(t), R(t)\}$ системи рівнянь (1) з початковими умовами (2) є невід'ємними та обмеженими для всіх $t \geq 0$. Крім того, замкнута допустима область Ω , визначена як:

$$\Omega = \{(S, V, E, A, I, H, R) \in \mathbb{R}_+^7 : S + V + E + A + I + H + R \leq \Lambda/\mu\}$$

є додатно інваріантною для системи (1)–(2).

Доведення. Із першого рівняння системи (1) маємо:

$$\begin{aligned} dS(t)/dt &= \Lambda - (\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) S(t)/N(t) - (\omega + \mu) S(t) + \kappa R(t) + \theta V(t) \geq \\ &\geq -((\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) / N(t) + \omega + \mu) S(t). \end{aligned}$$

Позначимо $\chi(t) = (\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) / N(t) + \omega + \mu \geq 0$, тоді одержуємо диференціальну нерівність $dS(t)/dt \geq -\chi(t)S(t)$. Звідси, після інтегрування та з врахуванням початкових умов:

$$S(t) \geq S(0) \exp \left(- \int_0^t \chi(z) dz \right) > 0.$$

Отже, $S(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$. Провівши аналогічні дії для всіх інших змінних моделі ($V(t)$, $E(t)$, $A(t)$, $I(t)$, $H(t)$, $R(t)$) доводимо, що $V(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, $A(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $H(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$ для будь-якого $t \geq 0$. Таким чином усі розв'язки системи (1) з початковими умовами (2) є невід'ємними у будь-який момент часу $t \geq 0$.

Додавши всі рівняння системи (1), одержуємо

$$dN(t)/dt = \Lambda - \mu N(t) - dI(t) - (d_H + \xi)H(t) \leq \Lambda - \mu N(t),$$

оскільки $I(t) \geq 0$ та $H(t) \geq 0$. Звідси, після інтегрування $N(t) \leq \Lambda/\mu + (N(0) - \Lambda/\mu) e^{-\mu t}$, $t \geq 0$. Оскільки експоненційна функція $e^{-\mu t}$ прямує до 0 при $t \rightarrow \infty$, то $N(t)$ обмежена зверху. Крім того, якщо $N(0) \leq \Lambda/\mu$, то з отриманої оцінки випливає, що $N(t) \leq \Lambda/\mu$ для всіх $t \geq 0$. Теорему доведено.

Отже, модель (1)–(2) є біологічно і математично коректно визначеною у допустимій інваріантній множині Ω .

4. Базове репродукційне число. Поклавши в (1) $E(t) = I(t) = A(t) = 0$ одержуємо точку безінфекційної рівноваги $E_0 = (S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, H^0, R^0)$.

$$E_0 = (\Lambda(\theta + \mu) / (\mu(\theta + \mu + \omega)), \omega\Lambda / (\mu(\theta + \mu + \omega)), 0, 0, 0, 0, 0).$$

Оцінимо базове репродукційне число R_0 для системи (1) за допомогою методу матриці наступного покоління [1], який базується на формуванні двох матриць: F – відображає швидкість появи нових інфікованих осіб, V – описує швидкість виходу з інфекційного стану (через перехід між станами, одужання чи смерть). Зосередимося лише на змінних, які відповідають за динаміку інфекції (E , A , I). Прогресування від E до I та A не вважаються новими випадками зараження. Зауважимо, що госпіталізований компартмент H не включається до матриці нового покоління, оскільки індивіди з цього класу не беруть участі у процесі передачі інфекції і, відповідно, не генерують нових випадків зараження. Використовуючи підхід, описаний в [1], та ввівши позначення $a = S^0 / (S^0 + V^0) + (1 - \psi) V^0 / (S^0 + V^0)$, $N^0 = S^0 + V^0 = \Lambda/\mu$, одержимо:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 a & \beta_1 a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \delta + \mu & 0 & 0 \\ -q\delta & \mu + \rho_2 & 0 \\ -(1-q)\delta & 0 & \mu + d + \rho_1 + \delta_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Визначимо R_0 як спектральний радіус матриці FV^{-1} :

$$R_0 = \frac{\delta}{(\delta + \mu)} \frac{S^0 + (1 - \psi)V^0}{N^0} K = \frac{\delta}{(\delta + \mu)} \frac{\theta + \mu + (1 - \psi)\omega}{\theta + \mu + \omega} K, \quad (5)$$

де

$$K = (1 - q) \beta_1 / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) + q\beta_2 / (\mu + \rho_2) > 0. \quad (6)$$

Формула (4) допускає природну епідеміологічну інтерпретацію. Зокрема, множник $\delta/(\delta + \mu)$ описує імовірність досягнення інфекційної стадії, а множник $(1 - \psi)$ відображає вплив вакцинації. Внесок симптоматично та безсимптомно інфікованих описується відповідно першим і другим доданками у виразі для R_0 .

Зазначимо, що система (1) задовольняє стандартні умови А1–А5, сформульовані у [1], необхідні для коректного застосування методу матриці нового покоління та подальшого дослідження стійкості точки рівноваги E_0 .

5. Локальна стійкість безінфекційної рівноваги E_0 .

Теорема 2. *Безінфекційна рівновага E_0 системи (1) є асимптотично стійкою, якщо $R_0 < 1$, і нестійкою, якщо $R_0 > 1$.*

Доведення. З формул (3) матриця V є невід’єженою M -матрицею, а матриця F є невід’ємною, отже за Теоремою 2 зі статті [1] всі власні значення матриці $(F - V)$ мають від’ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли $\rho(FV^{-1}) < 1$. У цьому випадку всі власні значення якобіана $J(E_0)$ мають від’ємні дійсні частини, і точка E_0 є локально асимптотично стійкою. Якщо $\rho(FV^{-1}) > 1$, то якобіан має принаймні одне власне значення з додатною дійсною частиною, і точка нестійка. Теорему доведено.

6. Ендемічна рівновага. Ендемічною рівновагою системи (1) називається стаціонарний розв’язок із додатними значеннями E^* , A^* , I^* . З рівнянь моделі послідовно одержуємо, що змінні A^* , I^* , H^* та R^* можуть бути однозначно виражені через E^* . Отже, при $E^* > 0$ та за умов (3):

$$A^* = q\delta E^* / (\mu + \rho_2) = A^*(E^*) > 0,$$

$$I^* = (1 - q) \delta E^* / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) = I^*(E^*) > 0.$$

Враховуючи позначення K у (5), запишемо $\beta_1 I^* + \beta_2 A^* = \delta K E^* > 0$.

Для визначення R^* та H^* розглянемо окремо два варіанти поведінки системи: при $b = 0$ та $b > 0$. При $b = 0$:

$$H^* = \delta_1 I^*(E^*) / (\sigma_0 + d_H + \mu + \xi) = H^*(E^*) > 0,$$

$$R^* = (\rho_1 I^*(E^*) + \rho_2 A^*(E^*) + \sigma_0 H^*(E^*)) / (\kappa + \mu) = R^*(E^*) > 0.$$

Для знаходження H^* , якщо $b > 0$, одержуємо квадратне рівняння

$$b(d_H + \mu + \xi) H^{*2} + (\sigma_0 + (d_H + \mu + \xi) - bCE^*) H^* - CE^* = 0,$$

де $C = (\delta_1 (1 - q) \delta) / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) > 0$ за умов (3). Оскільки вільний член $-CE^* < 0$, тобто корені мають різні знаки, то існує рівно один біологічно допустимий додатний корінь $H^* = H^*(E^*) > 0$. Для $R^* = R^*(E^*)$:

$$R^* = \left(\rho_1 I^*(E^*) + \rho_2 A^*(E^*) + \frac{\sigma_0}{1 + bH^*(E^*)} H^*(E^*) \right) / (\kappa + \mu) = R^*(E^*) > 0.$$

Із стаціонарних рівнянь для вакцинованих та сприйнятливих осіб одержуємо відповідно вирази для V^* і S^* :

$$V^* = \frac{\omega S^*}{(\theta + \mu) + (1 - \psi)\delta K E^*/N^*}, \quad S^* = \frac{\Lambda + \kappa R^* + \theta V^*}{(\omega + \mu) + \delta K E^*/N^*}.$$

$$V^* = \frac{\omega(\Lambda + \kappa R^*(E^*))}{\mu(\theta + \omega + \mu) + \delta K E^*/N^* [(\theta + \mu) + (1 - \psi)(\omega + \mu)] + (1 - \psi)(\delta K E^*/N^*)^2} = V^*(E^*) > 0, \quad N^* = N^*(E^*).$$

Отже, усі компоненти ендемічної рівноваги однозначно визначаються через одну змінну E^* . Підстановка цих виразів у стаціонарне рівняння для E^* приводить до одного нелінійного алгебраїчного рівняння відносно E^* , додатні розв'язки якого визначають ендемічні рівноваги системи:

$$F(E^*) = 0, \quad \text{при } E^* > 0,$$

де $F(E^*) = \delta K/N^*(E^*) (S^*(E^*) + (1 - \psi)V^*(E^*)) - (\delta + \mu)$.

Теорема 3. Існування ендемічної рівноваги. *Якщо $R_0 > 1$, то система (1) при виконанні умови (3) має принаймні одну ендемічну рівновагу.*

Доведення. Кількість ендемічних рівноваг збігається з кількістю додатних коренів рівняння $F(E) = 0$, де

$$F(E) = \delta K/N^*(E) (S^*(E) + (1 - \psi)V^*(E)) - (\delta + \mu).$$

Оскільки всі компоненти рівноваги однозначно визначаються через E , то кожному додатному розв'язку рівняння $F(E) = 0$ відповідає рівно одна ендемічна рівновага. Функції $S^*(E)$ та $V^*(E)$ визначені для всіх $E > 0$ і є додатними за умов (3). Крім того, із явних формул для $A^*(E)$, $I^*(E)$, $R^*(E)$ та з рівняння для $H^*(E)$ випливає, що ці функції мають неперервне продовження в точці $E = 0$. Отже, $F(E)$ є неперервною на відрізку $[0, +\infty)$.

При $E = 0$ з формул для $A^*(E)$, $I^*(E)$, $H^*(E)$, $R^*(E)$ одержуємо $A^*(0) = I^*(0) = H^*(0) = R^*(0) = 0$. У цьому випадку з рівнянь стаціонарних станів для S та V випливає, що $S^*(0) = S^0$, $V^*(0) = V^0$, де безінфекційна рівновага $E_0 = (S^0, V^0, 0, 0, 0, 0)$. Крім того, $N^*(0) = N^0 = S^0 + V^0 = \Lambda/\mu$. Таким чином $F(0) = \delta K/N^0 (S^0 + (1 - \psi)V^0) - (\delta + \mu)$. З формули (4) для базового репродукційного числа R_0 одержуємо

$$F(0) = (\delta + \mu)(R_0 - 1).$$

Звідси випливає: якщо $R_0 < 1$, то $F(0) < 0$; якщо $R_0 = 1$, то $F(0) = 0$; якщо $R_0 > 1$, то $F(0) > 0$.

Проаналізуємо поведінку функції $F(E)$ при $E \rightarrow \infty$. Оскільки

$$N^*(E) = S^*(E) + V^*(E) + E + A^*(E) + I^*(E) + H^*(E) + R^*(E) \geq E,$$

то $N^*(E) \rightarrow \infty$, при $E \rightarrow \infty$. З формул для $S^*(E)$ та $V^*(E)$ випливає, що $\lim_{E \rightarrow +\infty} S^*(E) = 0$, $\lim_{E \rightarrow +\infty} V^*(E) = 0$, отже $\lim_{E \rightarrow +\infty} (S^*(E) + (1 - \psi)V^*(E)) = 0$. Тобто при великих значеннях E функція $F(E)$ є від'ємною: $\lim_{E \rightarrow +\infty} F(E) = -(\delta + \mu) < 0$.

При $R_0 > 1$ маємо $F(0) > 0$ та $\lim_{E \rightarrow +\infty} F(E) = -(\delta + \mu) < 0$. Оскільки функція $F(E)$ є неперервною, за теоремою Больцано-Коші існує принаймні один додатний розв'язок рівняння $F(E) = 0$. Таким чином система (1) має принаймні одну ендемічну рівновагу E^* при $R_0 > 1$. Теорему доведено.

7. Комп'ютерне моделювання. У розділі наведено результати чисельного розв'язання задачі Коші для моделі SVEAIHR при фіксованих параметрах і початкових умовах. Початкові умови для системи (1) та більшість значень параметрів моделі було взято з роботи [13], де вони використовувалися для опису епідемічної ситуації COVID-19 в Пакистані. Зауважимо, що параметри, пов'язані з госпіталізованим компартментом $H(t)$, були введені на основі припущень, оскільки відповідні величини не наведені у вихідному джерелі. Чисельні розрахунки проводилися на скінченному часовому інтервалі $t \in [0, T]$, де T відповідає тривалості досліджуваного періоду.

На рис. 2 зображено часову еволюцію змінних моделі. Чисельні результати демонструють типовий для епідемічних моделей перебіг: початкове зростання кількості інфікованих, досягнення пікового значення та подальше зменшення з переходом системи до квазістаціонарного режиму.

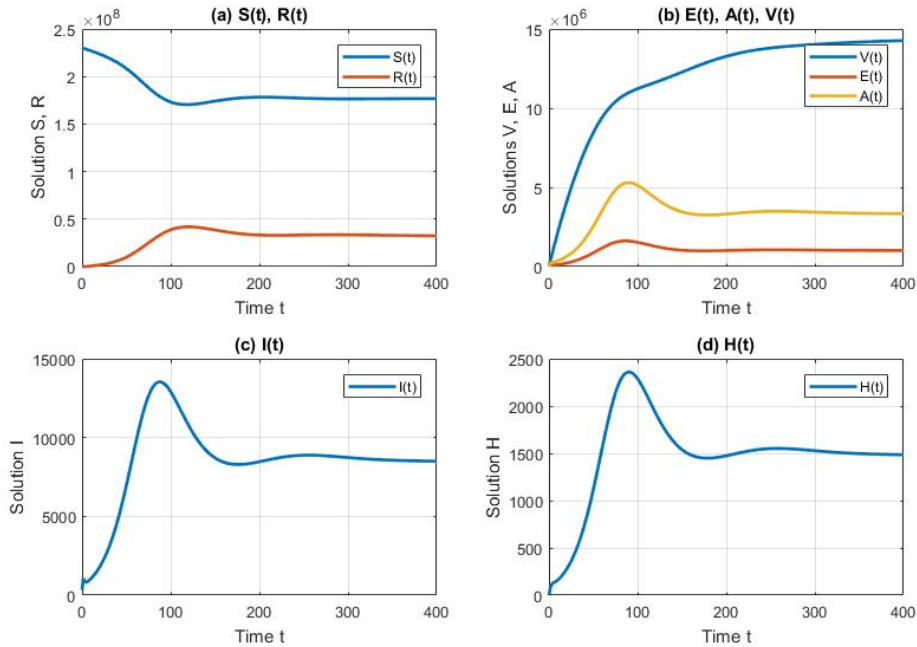


Рис. 2. Часова динаміка компартментів моделі SVEAIHR.

Значення початкових умов: $S(0) = 230255033$, $V(0) = 0$, $E(0) = 300000$, $A(0) = 2000$, $I(0) = 334$, $H(0) = 0$, $R(0) = 0$, $t \in [0, 400]$, $N(0) = 230557367$. Параметри (1): $\Lambda = \mu N(0)$, $\beta_1 = 0.8983$, $\beta_2 = 0.3827$, $\omega = 0.001$, $q = 0.9931$, $\psi = 0.6$, $\mu = 1/(67.7 \cdot 365)$, $\kappa = 0.03129$, $\theta = 0.01$, $\delta = 0.9982$, $\rho_2 = 0.3028$, $d = 0.6784$, $\rho_1 = 0.07926$, $\delta_1 = 0.07$, $\sigma_0 = 0.1$, $b = 0.1$, $d_H = 0.3$, $\xi = 0.1$.

Для аналізу чутливості розв'язків до зміни окремих параметрів було проведено параметричне моделювання. З огляду на обмежений обсяг статті, на рис. 3 наведено залежність динаміки компартментів $E(t)$, $I(t)$ лише від значень пара-

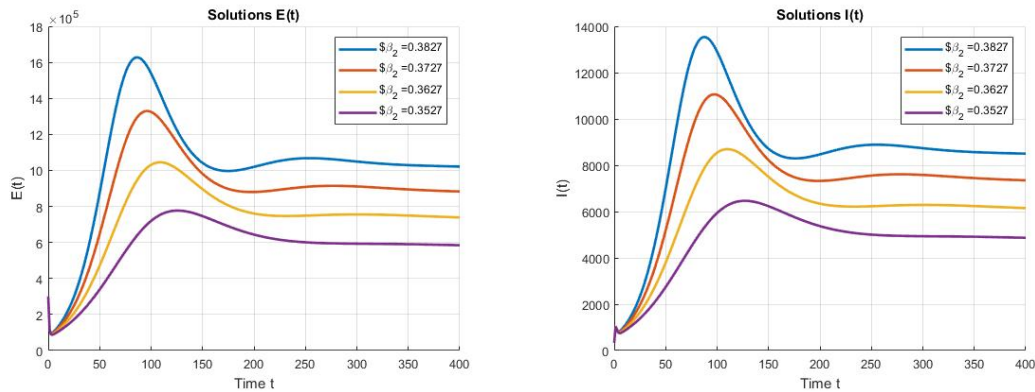


Рис. 3. Вплив параметра β_2 на динаміку компартментів $E(t)$, $I(t)$.

метра β_2 (інтенсивність передачі інфекції від безсимптомно інфікованих осіб). Зі зменшенням параметра β_2 спостерігається суттєве зниження пікових значень $E(t)$ та зміщення максимуму в часі. Аналогічна тенденція спостерігається і для компартментів $A(t)$ та $I(t)$, що підтверджує важливу роль безсимптомних носіїв у поширенні інфекції.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. Для компартментної моделі SVEAHR поширення COVID-19 доведено додатність та обмеженість розв'язків системи, що підтверджує біологічну коректність моделі в допустимій інваріантній області. За допомогою методу матриці наступного покоління отримано аналітичний вираз для базового репродукційного числа R_0 , який дає змогу оцінити вплив вакцинації, передачі інфекції від симптоматичних і безсимптомних осіб, а також переходів між інфекційними компартментами на динаміку епідемічного процесу.

Показано, що безінфекційна рівновага є локально асимптотично стійкою за умови $R_0 < 1$ і нестійкою при $R_0 > 1$, що узгоджується з класичною епідеміологічною інтерпретацією порогового параметра. Аналіз ендемічної рівноваги показав, що при $R_0 > 1$ система допускає ендемічний режим, який відповідає довготривалому збереженню інфекції в популяції.

Чисельні експерименти підтвердили узгодженість якісної поведінки моделі з типовими епідемічними сценаріями та продемонстрували вплив окремих параметрів на інтенсивність епідемічного процесу. Зокрема, зменшення інтенсивності передачі інфекції від безсимптомно інфікованих осіб приводить до зниження пікових значень латентно та симптоматично інфікованих, що підкреслює епідеміологічну значущість своєчасного виявлення безсимптомних носіїв і контролю їхніх контактів.

Подальша робота передбачає поглиблене дослідження ендемічних рівноваг моделі, зокрема аналіз їхньої стійкості та можливих біфуркаційних режимів. Наступним важливим етапом є оцінювання параметрів моделі на основі реальних статистичних даних для України. Окремим перспективним напрямом є формулювання та розв'язання задачі оптимального керування епідемічним процесом.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Борисюк Я. Є. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180, 29–48. Retrieved from <https://watmough.ext.unb.ca/papers/mgroup.pdf>
2. Aldila, D., Khoshnaw, S. H. A., Safitri, E., Anwar, Y. R., Bakry, A. R. Q., Samiadji, B. M., Anugerah, D. A., Alfarizi, G. H., Ayulani, I. D., & Salim, S. N. (2020). A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
3. Unlu, E., Leger, H., Motornyi, O., Rukubayhunga, A., Ishacian, T., & Chouiten, M. (2020). Epidemic analysis of COVID-19 outbreak and counter-measures in France. *medRxiv*. Retrieved from <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:218057187>
4. Saha, P., & Ghosh, U. (2021). Global dynamics and control strategies of an epidemic model having logistic growth, non-monotone incidence with the impact of limited hospital beds. *Nonlinear Dynamics*, 105, 971–996. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06607-9>
5. Ghosh, J. K., Biswas, S. K., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2022). Mathematical modelling of COVID-19: A case study of Italy. *Mathematics and Computers in Simulation*, 194, 1-18. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.11.008>
6. Cai, L., Li, Z., & Song, X. (2018). Global analysis of an epidemic model with vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 57, 605–628. <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1124-1>
7. Acuña-Zegarra, M. A., Díaz-Infante, S., Baca-Carrasco, D., & Olmos-Liceaga, D. (2021). COVID-19 optimal vaccination policies: A modeling study on efficacy, natural and vaccine-induced immunity responses. *Mathematical Biosciences*, 337, 108614. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2021.108614>
8. Paul, J. N., Mbalawata, I. S., Mirau, S. S., & Masandawa, L. (2023) Mathematical modeling of vaccination as a control measure of stress to fight COVID-19 infections. *Chaos, Solitons and*

- Fractals*, 166, 112920. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112920>
9. Parolini, N., Dedè, L., Ardenghi, G., & Quarteroni, A. (2022). Modelling the COVID-19 epidemic and the vaccination campaign in Italy by the SUIHTER model. *Infectious Disease Modelling*, 7, 45–63. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.03.002>
 10. Saha, P., Biswas, S. K., Biswas, M. H. A., & Ghosh, U. (2023). An SEQAIHR model to study COVID-19 transmission and optimal control strategies in Hong Kong, 2022. *Nonlinear Dynamics*, 111, 6873–6893. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08181-0>
 11. Wang, C., Jin, Y., Zhou, L., Hou, W., Liu, D., Wang, J., & Wang, X. (2024). SQEAIHR: An improved infectious disease dynamics model. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 31, 28. <https://doi.org/10.1007/s44198-024-00188-y>
 12. Hnytko, Y., Borysyuk, Y., & Shcherbatyy, M. (2025). Client-server toolkit for compartmental modeling and optimal control. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science*, 35, 48–64. <https://doi.org/10.30970/vam.2025.35.13622> [in Ukrainian].
 13. Sun, T.-C., DarAssi, M. H., Alfwzan, W. F., Khan, M. A., Alshahrani, A. S., Alqahtani, S. S., & Muhammad, T. (2023). Mathematical modeling of COVID-19 with vaccination using fractional derivative: A case study. *Fractal and Fractional*, 7(3), 234. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7030234>
 14. Borysyuk, Y. E., & Shcherbatyy, M. V. (September 30, 2025 – October 1, 2025). Optimal control for the mathematical model of COVID-19 spread SVEAIHR. In *XL International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2025)*. (p. 36). Bielsko-Biala: Poland. Retrieved from https://pdmu.knu.ua/PDMU_2025/PDMU-2025.pdf

Borysyuk Y. Ye. A Compartmental SVEAIHR Model of COVID-19 Transmission with Vaccination and Hospitalization.

In this paper, a compartmental mathematical model of COVID-19 transmission of the SVEAIHR type is formulated and analyzed, taking into account vaccination, asymptomatic carriers, and hospitalization of patients. A system of nonlinear differential equations describing the dynamics of seven population groups is derived. The positivity and boundedness of solutions are proven, and an invariant region for the solutions of the model is established. Using the next-generation matrix method, the basic reproduction number is obtained and the local stability of the disease-free equilibrium is investigated. A sufficient condition for the existence of an endemic equilibrium is established. Numerical simulations illustrate the characteristic temporal dynamics of the compartments and confirm the suitability of the model for qualitative analysis of infection spread.

Keywords: epidemic mathematical modeling, COVID-19, compartmental model, basic reproduction number, endemic equilibrium, equilibrium stability.

Отримано: 07.04.2026

Прийнято: 21.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026