

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).24-30](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).24-30)**Ю. П. Глухов<sup>1</sup>, С. Ю. Бабич<sup>2</sup>, Н. В. Юрченко<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
старший науковий співробітник,  
кандидат фізико-математичних наук  
[gluchov.uriy@gmail.com](mailto:gluchov.uriy@gmail.com)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

<sup>2</sup> Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,  
провідний науковий співробітник,  
доктор технічних наук, професор  
[babich\\_sy@ukr.net](mailto:babich_sy@ukr.net)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

<sup>3</sup> ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,  
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,  
кандидат фізико-математичних наук  
[natalia.yurchenko@uzhnu.edu.ua](mailto:natalia.yurchenko@uzhnu.edu.ua)  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2825-8180>

## ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ. ЗАГАЛЬНИЙ ПОЧАТКОВИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН. СТИСЛИВІ ТІЛА

Досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху стисливих елементів шаруватого півпростору. Розглянуто випадок загального початкового напруженого стану. Проведено оцінку коренів характеристичних рівнянь. Чисельні дослідження наведені для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу. Проілюстровано вплив початкових напружень і швидкості руху навантаження на дискримінант характеристичного рівняння.

**Ключові слова:** багатошаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, характеристичне рівняння.

**1. Вступ.** При дослідженні динамічної поведінки багатошарових пружних основ під дією рухомого навантаження широке застосування знаходять методи, що базуються на інтегральному перетворенні Фур'є за просторовими координатами. У рамках таких підходів розв'язок задачі зводиться до побудови зображень переміщень і напружень, які в трансформованій області виражаються через комбінації експоненціальних функцій. Ключовим етапом при цьому є визначення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають трансформованим системам звичайних диференціальних рівнянь для кожного шару. Саме від значень цих коренів залежить подальша побудова оригіналів розв'язку за допомогою оберненого перетворення Фур'є.

У цій праці розглянута просторова усталена задача про збурення двошарового стисливого півпростору з початковими напруженнями рухомим поверхневим навантаженням. Постановка просторової задачі для багатошарового стисливого півпростору розглянута у праці [1]. Дослідження були проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями [2–4].

**2. Аналітичні дослідження характеристичних рівнянь.** У випадку загального початкового напруженого стану

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} \neq S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}} \quad (1.1)$$

рух багатопарового об'єкта в загальному випадку описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними шостою порядку. У рухомій системі координат ці рівняння мають вигляд [1]

$$\left( \sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=3} \tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (1.2)$$

В просторі зображень ці рівняння представлені формулами

$$\left( B_1^{\{s\}} \frac{d^6}{dy_3^6} - B_2^{\{s\}} \frac{d^4}{dy_3^4} + B_3^{\{s\}} \frac{d^2}{dy_3^2} - B_4^{\{s\}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}, \quad (1.3)$$

$$B_1 = \tilde{A}_{0,0,3}^{\{s\}}; \quad B_2 = k_1^2 \tilde{A}_{1,0,2}^{\{s\}} + k_2^2 \tilde{A}_{0,1,2}^{\{s\}}; \quad B_3 = k_1^4 \tilde{A}_{2,0,1}^{\{s\}} + k_2^4 \tilde{A}_{0,2,1}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^2 \tilde{A}_{1,1,1}^{\{s\}}; \quad (1.4)$$

$$B_4 = k_1^6 \tilde{A}_{3,0,0}^{\{s\}} + k_2^6 \tilde{A}_{0,3,0}^{\{s\}} + k_1^4 k_2^2 \tilde{A}_{2,1,0}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^4 \tilde{A}_{1,2,0}^{\{s\}},$$

де  $k_1, k_2$  – параметри подвійного перетворення Фур'є; коефіцієнти  $\tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}}$  у виразах (1.2) і (1.4) є функціями параметрів, що характеризують навантаження і матеріал елементів шаруватого середовища.

Характеристичні рівняння мають вигляд

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (1.5)$$

У випадку стисливих тіл коефіцієнти рівняння (1.5) можна записати у вигляді

$$a_0^{\{s\}} = c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}; \quad a_1^{\{s\}} = -k_1^2 \left[ c_{33}^{\{s\}2} \left( c_{11}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\ \left. - c_{32}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi \left( c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} \right) \right] - k_2^2 \left[ c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + \right. \\ \left. + c_{33}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) - c_{31}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} \right]; \quad a_2^{\{s\}} = k_1^4 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left( c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ \left. + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi \left[ c_{11}^{\{s\}2} \left( c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left( c_{31}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_{13}^{\{s\}2} \left( c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} \right) - d_{13}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_2^4 \left\{ c_{22}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - \right. \\ \left. - c_{21}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - v^2 \sin^2 \phi \left[ c_{32}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} \left( c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{33}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - d_{23}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_1^2 k_2^2 \left[ c_{11}^{\{s\}2} \left( c_{22}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} \left( c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ \left. + c_{31}^{\{s\}2} \left( c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) - c_{11}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - c_{22}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - c_{33}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} + 2d_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} + \right. \\ \left. + v^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \left( c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) \right]; \quad a_3^{\{s\}} = -k_1^6 \left[ c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\ \left. - v^2 \cos^2 \phi \left( c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + v^4 \cos^4 \phi \left( c_{11}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2} \right) \right] - \\ - k_2^6 \left[ v^4 \sin^4 \phi \left( c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) - v^2 \sin^2 \phi \left( c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ \left. + c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right] - k_1^4 k_2^2 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left( c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{13}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - \right. \\ \left. - v^2 \cos^2 \phi \left[ c_{11}^{\{s\}2} \left( c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{13}^{\{s\}2} \left( c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - d_{12}^{\{s\}2} \right] \right\} - \\ - k_1^2 k_2^4 \left[ c_{22}^{\{s\}2} \left( c_{11}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - c_{23}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - v^6 \cos^2 \phi \sin^4 \phi \right], \quad (1.6)$$

де

$$\tilde{\rho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{ijji}^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} d_{ij}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{ijji}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{jiji}^{\{s\}}. \quad (1.7)$$

Значення функцій  $\eta^{\{s\}}$  визначають вигляд рівнянь руху елементів шаруватого півпростору і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Так як рівняння (1.5) є бікубічними алгебраїчними рівняннями, то їх розв'язок можна отримати класичним способом. Приведемо рівняння (1.5) заміною

$$\eta^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}2} - \frac{a_1^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}}} \quad (1.8)$$

до вигляду

$$\mu^{\{s\}6} + p^{\{s\}} \mu^{\{s\}2} + q^{\{s\}} = 0, \quad (1.9)$$

де

$$p^{\{s\}} = -\frac{a_1^{\{s\}2}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_2^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}; \quad q^{\{s\}} = \frac{2a_1^{\{s\}3}}{27a_0^{\{s\}3}} - \frac{a_1^{\{s\}} a_2^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_3^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}. \quad (1.10)$$

В випадку, якщо дискримінант  $\Delta^{\{s\}} = \frac{q^{\{s\}2}}{4} + \frac{p^{\{s\}3}}{27} = 0$ , рівняння (1.9) при  $p^{\{s\}} \neq 0$ ,  $q^{\{s\}} \neq 0$  мають один простий і один двократний корінь

$$\mu_1^{\{s\}2} = \frac{3q^{\{s\}}}{p^{\{s\}}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{3q^{\{s\}}}{2p^{\{s\}}}. \quad (1.11)$$

Якщо  $\Delta^{\{s\}} \neq 0$ , то рівняння (1.9) мають три різних кореня. Якщо  $\Delta^{\{s\}} > 0$ , то рівняння (1.9) мають один дійсний корінь і два комплексних

$$\mu_1^{\{s\}2} = u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}}{2} \pm i \frac{(u_0^{\{s\}} - v_0^{\{s\}})\sqrt{3}}{2}. \quad (1.12)$$

Тут

$$u_0^{\{s\}} = \sqrt[3]{-\frac{q^{\{s\}}}{2} + \sqrt{\Delta^{\{s\}}}}; \quad v_0^{\{s\}} = -\frac{p^{\{s\}}}{3u_0^{\{s\}}}. \quad (1.13)$$

При  $\Delta^{\{s\}} < 0$  всі три корені рівнянь (1.9) будуть дійсними і різними

$$\begin{aligned} \mu_1^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}}}{3}; & \mu_2^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 2\pi}{3}; \\ \mu_3^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тут

$$\left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| = \left| \sqrt{-\frac{p^{\{s\}}}{3}} \right|; \quad \cos \phi^{\{s\}} = -\frac{q^{\{s\}}}{2r^{\{s\}}}. \quad (1.15)$$

Таким чином, при  $\Delta^{\{s\}} = 0$  у випадку, коли  $p^{\{s\}} \neq 0$  і  $q^{\{s\}} \neq 0$  і мають різні знаки, рівняння (1.6) має два дійсних двократних кореня та два чисто уявних. Якщо  $p^{\{s\}} \neq 0$  і  $q^{\{s\}} \neq 0$  і мають однакові знаки, то рівняння (1.5) має два дійсних кореня і два двократних чисто уявних.

При  $\Delta^{\{s\}} > 0$ , якщо  $\mu_1^{\{s\}2} > 0$ , рівняння (1.5) має два дійсних корня і чотири комплексних, якщо  $\mu_1^{\{s\}2} < 0$  — шість комплексних. При  $\Delta^{\{s\}} < 0$  рівняння (1.5)

має шість різних коренів. Дійсні корені будуть відповідати додатнім значенням коренів рівняння (1.9).

**2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь.** Оскільки вирази (1.6) для коефіцієнтів рівнянь (1.5) — досить громіздкі вирази, аналітичне дослідження коренів характеристичного рівняння видається складним. Чисельні дослідження було проведено для стислового матеріалу з гармонійним потенціалом

$$\Phi^{\{s\}} = \frac{1}{2}\lambda^{\{s\}}s_1^{\{s\}2} + \mu^{\{s\}}s_2^{\{s\}}, \quad (2.1)$$

де  $\lambda^{\{s\}}$ ,  $\mu^{\{s\}}$  - константи Ляме. Величини  $s_1^{\{s\}}$  і  $s_2^{\{s\}}$  являють собою перший і другий інваріанти тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесені до головних осей

$$s_1^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1) + (\lambda_2^{\{s\}} - 1) + (\lambda_3^{\{s\}} - 1); \quad (2.2)$$

$$s_2^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_2^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_3^{\{s\}} - 1)^2. \quad (2.3)$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанта малих початкових деформацій вирази для визначення складових тензора  $\tilde{\omega}^{\{s\}}$  за умови (1.1) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_3^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3311}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3322}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; \\ \\ \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; & \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}}\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{2323}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}}\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}}[(2\mu^{\{s\}} + \lambda^{\{s\}})(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - 1) + \lambda^{\{s\}}(\lambda_3^{\{s\}} - 2)]}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}2}\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}2}}; & \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_1^{\{s\}} + (\lambda_3^{\{s\}} - 1)(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})] + \lambda^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \\ \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(\lambda_1^{\{s\}} - 1)] - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - \lambda_3^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(\lambda_2^{\{s\}} - 1)] - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)(\lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}} - \lambda_2^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})\lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}] + \lambda^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Врахуємо, що  $\lambda^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}}\nu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}}$ , де  $\nu$  — коефіцієнт Пуассона, і пронормуємо всі величини за величиною  $\mu^{\{s\}}/\rho^{\{s\}}$ . Чисельні розрахунки проводилися для  $\nu = 0, 3$ . Початкові подовження змінювалися в діапазоні від 0,8 до 1,2. Метою дослідження було оцінювання можливих значень коренів рівняння (1.5) та вплив початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння (1.5) і відповідно на вибір розв'язку досліджуваної задачі.

Поверхня, що відповідає функції  $\Delta^{\{s\}}$ , за фіксованих значень параметрів  $\lambda_i^{\{s\}}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $v$  і  $\phi$  має вигляд, показаний на рис. 1. Причому форма поверхні не змінюється в діапазоні  $0.8 \leq \lambda_i^{\{s\}} \leq 1.2$ ,  $0 \leq v^2 \leq c_{11}^{\{s\}2}$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Аналіз чисельних значень  $\Delta^{\{s\}}$  дає змогу стверджувати, що дискримінант рівняння (1.5) набуває в зазначеній області досліджуваних параметрів невід'ємних значень ( $\Delta^{\{s\}} \geq 0$ ).

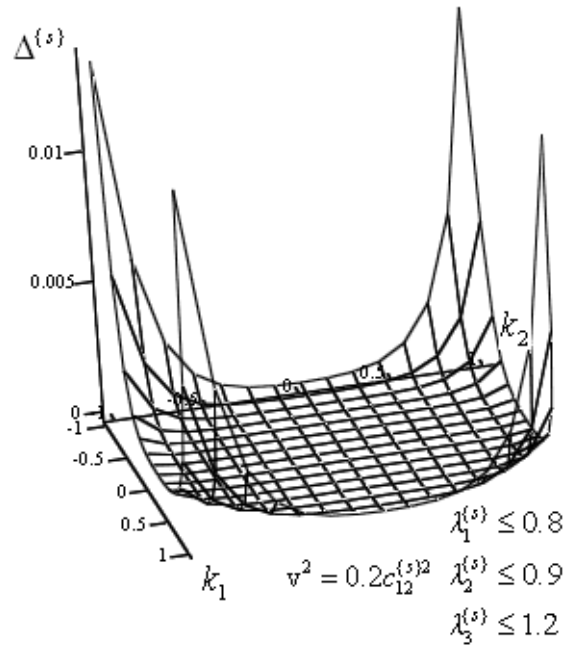


Рис. 1. Поверхня функції  $\Delta^{\{s\}}$ .

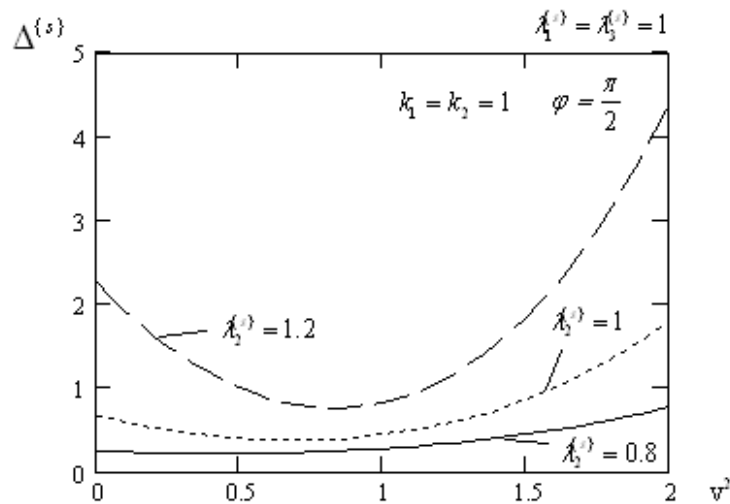


Рис. 2. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта  $\Delta^{\{s\}}$  ( $\phi = \pi/2$ ).

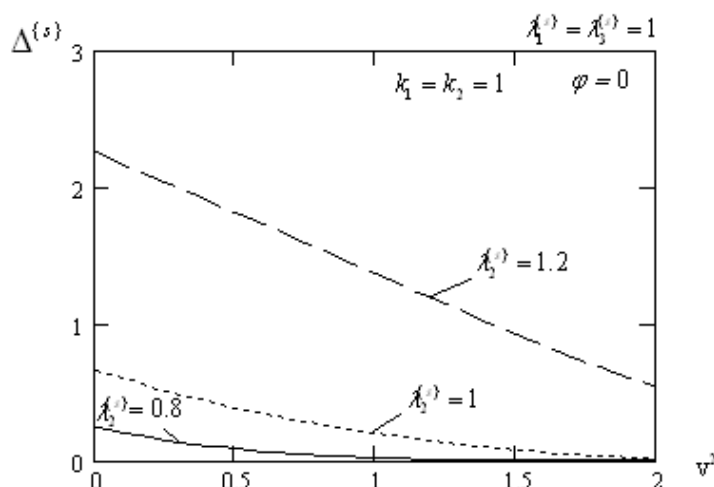


Рис. 3. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта  $\Delta^{(s)}$  ( $\phi = 0$ ).

На рис. 2 і 3 проілюстровано вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта рівняння (1.9). Як видно з рисунків, початкові напруження, швидкість руху навантаження та напрямок його руху суттєво впливають на значення функції  $\Delta^{(s)}$ .

Очевидно, що за певної швидкості навантаження вплив початкових напружень зменшується. Від напрямку руху навантаження залежить розташування області найменшого впливу початкових напружень.

**3. Висновки та перспективи подальших досліджень.** У цій статті дано оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Для стисливого матеріалу із пружним потенціалом гармонічного типу проведені чисельні розрахунки. Результати, отримані у цій роботі, можуть бути використані під час дослідження напружено деформованого стану елементів багатопарового попередньо напруженого півпростору за дії рухомого навантаження.

---

### Конфлікт інтересів

---

Бабич Степан Юрійович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

---

### Фінансування

---

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

---

### Доступність даних

---

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

---

## Використання штучного інтелекту

---

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

---

## Внесок авторів

---

Ю. П. Глухов: концептуалізація, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект. С. Ю. Бабич: валідація, формальний аналіз, методологія. Н. В. Юрченко: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування.

---

Авторські права ©



(2026). Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Юрченко Н. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

---

## Список використаної літератури

1. Glukhov, Yu. P. (2010). Dynamics of a layered pre-stressed half-space under a moving load. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (2), 53–58. Retrieved from <https://nasplib.isoftware.kiev.ua/handle/123456789/19593>
2. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. Kiev: “A.S.K”.
3. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses: in 2 parts. Ch. 1. General questions. Waves in infinite bodies and surface waves*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
4. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses: in 2 parts. Ch. 2. Waves in partially bounded bodies*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.

**Glukhov Yu. P., Babich S. Yu., Yurchenko N. V.** Investigation of characteristic equations for three-dimensional dynamic problems. General initial stressed state. Compressible bodies.

The influence of initial stresses and the velocity of a moving surface load on the values of the roots of the characteristic equations corresponding to the equations of motion of compressible elements of a layered half-space is investigated. The case of a general initial stressed state is considered. An evaluation of the roots of the characteristic equations is performed. Numerical studies are presented for a compressible material with a harmonic-type elastic potential. The influence of initial stresses and the load velocity on the discriminant of the characteristic equation is illustrated.

**Keywords:** multilayer half-space, initial (residual) stresses, moving load, characteristic equation.

Отримано: 05.04.2026

Прийнято: 20.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026