УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).40-44

О. В. Зубарук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

АЛГЕБРИ АУСЛЕНДЕРА НЕКОМУТАТИВНИХ НЕІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ НУЛЬОВОГО ЕЛЕМЕНТА

У сучасній теорії зображень важливу роль відіграють дослідження не лише самих зображень різних об'єктів над полями, а і їхніх категорій зображеь. Однією з форм опису таких категорій є обчислення алгебр ендоморфізмів прямої суми представників класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такі алгебри називаються алгебрами Ауслендера. Вказаний опис особливо ефективний у випадках об'єктів скінченного зображувального типу. Раніше автором (разом з В. М. Бондаренком в деяких випадках) описано алгебри Ауслендера для комутативних напівгруп та некомутативних ідемпотентних напівгруп третього порядку. Ця робота завершує аналогічні дослідження у некомутативному випадку.

Ключові слова: матричне зображення, неідемпотентна напівгрупа, скінченний зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Стаття присвячена матричним зображенням напівгруп третього порядку. Такі напівгрупи описані в термінах таблиць Келі ще в середині минулого століття Т. Тамурою (1953 р.) та, за допомогою комп'ютерної програми, Г. Е. Форсайтом (1955 р.). Проте мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку було вказано порівняно недавно (див. [1] разом з посиланнями). Це дало можливість вперше описати матричні зображення цих напівгруп над довільним полем [2]. З використанням цього результату в особистих статтях автора та сумісних статтях з В. М. Бондаренком описано алгебри Ауслендера (як одну з форм опису категорій зображень) для всіх комутативних та більшості некомутативних напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип. Ця робота завершує такі дослідження для некомутативних напівгруп.

2. Постановка завдання. Тематика цієї статті пов'язана з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач для дослідження матричних зображень скінченних напівгруп. Більш конкретно, мова йде про опис категорій зображень для напівгруп малого порядку скінченного зображувального типу. У цій статті така задача поставлена для некомутативних неідемпотентних напівгруп третього порядку без нульового елемента.

3. Огляд літератури. У статті [2] вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, тобто зі скінченним числом класів еквівалентності нерозкладних зображень. Це стало можливим у зв'язку з тим, що раніше цими ж авторами для таких напівгруп були вказані мінімальні системи твірних і відповідні системи визначальних співвідношень (див. [1] разом з посиланнями). Детальний огляд літератури щодо подальших результатів з цієї тематики наведено в статті [3], опублікованій в цьому році; у ньому, зокрема, вказані статті про опис матричних алгебр Аусленлера над довільним полем.

Ця стаття присвячена опису алгебр Ауслендера некомутативних неідемпотентних напівгруп третього порядку без нульового елемента.

4. Формулювання основних результатів.

4.1. Основні означення. Будемо використовувати добре відомі означення із [3, 4.1]. Нагадаємо основні із них. З формальних міркувань всі напівгрупи вважаються скінченними.

Матричним зображенням напівгрупи S розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K називається довільний гомоморфізм $T : x \to T(x)$ із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K. Природно вважати, що у випадку, коли напівгрупа S має одиничний (відповідно нульовий) елемент, одиничному (відповідно нульовому) елементу відповідає одинична (відповідно нульова) матриця.

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для всіх $x \in S$.

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$(T \oplus T')(x) := T(x) \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array}\right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють категорію $Rep_K(S)$, об'єктами якої є всі зображення, а множина морфізмів $Hom(T, T')$ з об'єкту T розмірності n в об'єкт T' розмірності m складається із всіх матриць Y розміру $n \times m$ таких, що $T(x)Y = YT'(x)$ для довільного $x \in S$.

Нехай S — напівгрупа скінченного зображувального типу. Зафіксуємо представники $T_1, \dots, T_s$ в класах еквівалентності нерозкладних зображень. *Алгеброю Ауслендера $Aus_K(S)$ напівгрупи S над полем K* називається алгебра

$$End(T_1 \oplus \dots \oplus T_s) := Hom(T_1 \oplus \dots \oplus T_s, T_1 \oplus \dots \oplus T_s)$$

ендоморфізмів прямої суми представників $T_1, \dots, T_s$.

Щоб підкреслити, що розглядаються саме матричні зображення напівгруп, алгебру Ауслендера будемо також називати матричною алгеброю Ауслендера.

4.2. Основні теореми. Згідно з результатами роботи [2] некомутативні неідемпотентні напівгрупи третього порядку без нульового елемента, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, напівгрупою під номером 14 з твірними b, c і співвідношеннями $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$, яку позначатимемо через S, та дуальною до неї напівгрупою S^{op} (тобто такою, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку).

Наступні теореми описують алгебри Ауслендера вказаних напівгруп над довільним полем K.

Теорема 1. *Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S)$ напівгрупи S над полем K складаєтьcя з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{21} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{11} & x_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} *— елементи поля* K.

Теорема 2. *Матрична алгебра Ауслендера* $\mathcal{A}_K(S^{op})$ *складається з усіх матриць, транспонованих до матриць із теореми 1.*

Легко бачити, що обидві алгебри Ауслендера мають розмірність 20. Якщо позначити через e_{ij}, де $1 \leq i, j \leq 9$, матрицю, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на всіх інших місцях – нульовий, то із теорем випливає, що (в обох випадках) за базисні елементи можна взяти наступні:

$\lambda_1 = e_{11} + e_{88}$, $\lambda_2 = e_{21} + e_{48}$, $\lambda_3 = e_{22} + e_{44} + e_{66}$, $\lambda_4 = e_{31}$, $\lambda_5 = e_{32}$, $\lambda_6 = e_{33}$, $\lambda_7 = e_{45} + e_{67}$, $\lambda_8 = e_{46}$, $\lambda_9 = e_{47}$, $\lambda_{10} = e_{49}$, $\lambda_{11} = e_{55} + e_{77}$, $\lambda_{12} = e_{56}$, $\lambda_{13} = e_{57}$, $\lambda_{14} = e_{59}$, $\lambda_{15} = e_{86}$, $\lambda_{16} = e_{87}$, $\lambda_{17} = e_{89}$, $\lambda_{18} = e_{96}$, $\lambda_{19} = e_{97}$, $\lambda_{20} = e_{99}$.

Враховуючи, що $e_{ij}e_{sk} = e_{ik}$, якщо $j = s$, і $e_{ij}e_{sk} = 0$, якщо $j \neq s$, легко виписати таблиці множення для обох алгебр Ауслендера.

5. Доведення теорем 1 і 2. Обчислимо спочатку матричну алгебру Ауслендера напівгрупи S.

Розглянемо матричне зображення напівгрупи S, яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2 [2]) і яке згідно з означенням канонічної форми переставно подібне прямій сумі представників всіх класів еквівалентності нерозкладних зображень:

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$C_{11} = B_{11}$, а решта блоків матриць B_{ij} і C_{ij} нульові.

За означенням (матрична) алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S)$ — це алгебра всіх матриць $X = (x_{ij}), 1 \leq i, j \leq 9$ таких, що $B_0X = XB_0$ і $C_0X = XC_0$. Матрицю X будемо розглядати як блокову матрицю $X = (X_{ij}), i, j = 1, 2, 3$, блоки X_{ij} якої мають такі ж розміри, як відповідні розміри матриць B_0 і C_0.

Розглянемо спочатку рівність $B_0X = XB_0$. Оскільки матриця B_0 є (з точністю до однакової перестановки рядків та стовпців) прямою сумою клітин

Жордана порядків 1 та 2, то легко обчислити або показати, скориставшись добре відомими результатами (див., напр., [4]), що $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{31} = 0$,

$$X_{22} = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}, \quad X_{23} = \begin{pmatrix} x_{48} & x_{49} \\ x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{86} & x_{87} \\ 0 & 0 & x_{96} & x_{97} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність$C_0X = XC_0$ еквівалентна рівностям $C_{21}X_{11} = X_{22}C_{21} + X_{23}C_{31}$ і $C_{31}X_{11} = X_{32}C_{21} + X_{33}C_{31}$ або, в розгорнутому вигляді,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{48} & x_{49} \\ x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{86} & x_{87} \\ 0 & 0 & x_{96} & x_{97} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{88} & x_{89} \\ x_{98} & x_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{48} & 0 & 0 \\ x_{58} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{88} & 0 & 0 \\ x_{98} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_{21} = x_{48}$, $x_{22} = x_{44}$, $x_{23} = x_{54} = x_{58} = 0$ та $x_{11} = x_{88}$, $x_{12} = x_{13} = x_{98} = 0$.

Теорема 1 доведена.

Оскільки матриці $T'(x)$, транспоновані до матриць $T(x)$ зображення T, задають зображення дуальної напівгрупи (бо $[T(x)T(y)]' = T'(y)T'(x)$), то матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ задається матрицею, транспонованою до матриці, вказаній у теоремі 1. І, отже, теорема 2 випливає із теореми 1.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення над полем некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Для таких напівгруп описано алгебри Ауслендера над довільним полем в абстрактному та матричному виглядах.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Список використаної літератури

1. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.,* 20(1), 32–39.
2. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 32(1), 36–49. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).36-49 [in Ukrainian].
3. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2026). Describing the Auslander algebras of non-commutative idempotent semigroups of third order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics,* 48(1), 13–20. https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).13-20. [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2024). Σ-functions of the categories of matrix representations of nilpotent semigroups. *J. Math. Sci. (N.Y.),* 282(5), 601–615. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07205-x.

Zubaruk O. V. The Auslander algebras of non-commutative non-idempotent semigroups of third order without zero element.

In modern representation theory an important role is played investigation not only of the representations of various algebraic objects over fields, but also of their categories of representations. One form of describing such categories is to calculate the algebras of endomorphisms of the direct sum of representatives of the equivalence classes of indecomposable representations. Such algebras are called the Auslander algebras. The indicated description is especially effective in cases of objects of the finite representation type. Earlier the author (together with V. M. Bondarenko in some cases) have described the Auslander algebras for commutative and non-commutative idempotent semigroups of the third order. This work finished analogous studies for non-commutative semigroups.

Keywords: matrix representation, non-idempotent semigroup, finite representation type, canonical form, Auslander algebra.

Отримано: 01.04.2026 Прийнято: 17.04.2026 Опубліковано: 30.04.2026