УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).82-90

Ю. Ю. Млавець[1], О. О. Плугатор[2], О. А. Тимошенко[3]

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1480-9017

[2] Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
магістр фізико-математичного факультету
pluhatorolesya2003@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7375-2742

[3] Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
Університет Осло (Норвегія),
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
otymoshenkokpi@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1885-7275

ДЕКОМПОЗИЦІЯ СТРАХОВОГО НАДЛИШКУ В СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ

У статті досліджується декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі страхування життя. Запропоновано підхід на основі ISU, який дає змогу подати надлишок як суму компонент, що відповідають окремим факторам ризику. У межах ризик-нейтрального підходу отримано аналітичні формули для внесків фінансового та біометричного ризиків і показано адитивність, узгодженість та економічну інтерпретацію побудованої декомпозиції. Підхід може бути використаний для аналізу динаміки страхового надлишку та оцінювання впливу окремих факторів ризику.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, страхування життя, страховий надлишок, декомпозиція ризику, ISU-декомпозиція, формула Іто.

1. Вступ. Прибутки та збитки страхового портфеля між звітними датами формуються під впливом різних факторів ризику. Їх аналіз (*P&L attribution*) полягає у декомпозиції фінансового результату для кількісного визначення внеску окремих джерел ризику та є важливим для управління ризиками і виконання регуляторних вимог.

Міжнародні стандарти IFRS 17 [9] та нормативи ЄС [10] передбачають детальний аналіз змін власних коштів страховика, що потребує математично обґрунтованих і стійких методів декомпозиції [4, 5].

У літературі запропоновано різні підходи, зокрема метод “один за раз” (*One-at-a-time*, OAT), варіаційну декомпозицію та методи послідовного оновлення [4], а також декомпозицію динамічних ризиків [1]. Проте жоден із них не забезпечує одночасно адитивність, нормалізацію, інваріантність і стабільність [3].

Важливими є методи послідовного оновлення (*Sequential Updating*, SU) та нескінченно малого послідовного оновлення (*Infinitesimal Sequential Updating*, ISU): SU забезпечує адитивність, але залежить від порядку [4], тоді як ISU, запропонований у [2], є інваріантним і узгодженим. Перехід до неперервного часу дозволяє враховувати повні траєкторії факторів [6], а ISU виникає як границя SU [2, 5]. У цій роботі дисконтований надлишок подано як суму адитивних компонент на основі формули Іто.

У страхуванні життя надлишок можна розглядати як стохастичний процес, що відображає відхилення фактичного досвіду від очікуваного [7]. Це створює основу для декомпозиції ризику з урахуванням фінансових і біометричних факторів.

Робота складається зі вступу, чотирьох основних розділів та висновків. У другому розділі вводиться модель надлишку, у третьому — SU та ISU-декомпозиція, у четвертому — модельні припущення, у п'ятому — аналітичні формули внесків ризиків; у висновках окреслено подальші дослідження.

2. Процес страхового надлишку. Нехай задано повний фільтрований імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, який задовольняє звичайні умови (правоконтинуальність та повнота). Усі процеси далі вважаються $\mathbb{F}$-адаптованими та càdlàg, якщо не зазначено інше.

Розглянемо проміжок $[0, T]$, де $T < \infty$. Позначимо через $C = \{C(t)\}_{t\in[0,T]}$ процес кумулятивного грошового потоку страховика, який є процесом скінченної варіації майже напевно, тобто $\mathcal{V}_0^T\big(C(\cdot,\omega)\big) < \infty$ для майже всіх $\omega \in \Omega$, де $\mathcal{V}_0^T\big(C(\cdot,\omega)\big)$ позначає повну варіацію функції на інтервалі $[0, T]$. Зокрема, інтеграли відносно C розуміються у сенсі Лебега–Стілтьєса.

Нехай $\kappa = \{\kappa(t)\}_{t\in[0,T]}$ — строго додатний $\mathbb{F}$-семімартингал, такий що $\kappa(0) = 1$ і $\frac{1}{\kappa}$ також є семімартингалом. Процес κ інтерпретується як фактор накопичення (numéraire). Для $s, t \in [0, T]$ визначимо випадковий фактор перерахунку $D(t, s) := \frac{\kappa(t)}{\kappa(s)}$. Він задає вартість у момент t одиниці грошового потоку, здійсненого у момент s, у вибраному numéraire κ. Зокрема, при $s \geq t$ величина $D(t, s)$ використовується для дисконтування майбутніх потоків до моменту t, а при $s \leq t$ – для накопичення минулих потоків до моменту t. За допомогою процесів C та κ визначимо базові об'єкти моделі, а саме процес активів, процес зобов'язань та процес страхового надлишку.

Активи. Процес активів визначається як

$$A(t) := -\int_0^t D(t, s)\, dC(s), \quad t \in [0, T].$$

Інтеграл є коректно визначеним як стохастичний інтеграл Лебега–Стілтьєса.

Зобов'язання. Припустимо, що грошові потоки є інтегровними, тобто

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \kappa(s)^{-1}\, |dC(s)|\right] < \infty.$$

Тоді процес (ризик-нейтральної) вартості зобов'язань визначається як

$$L(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T D(t, s)\, dC(s) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \tag{1}$$

де $\mathbb{Q}$ — еквівалентна мартингальна міра, за якої $\kappa^{-1}A$ є мартингалом.

Надлишок. Процес страхового надлишку визначається стандартно:

$$S(t) := A(t) - L(t), \quad t \in [0, T]. \tag{2}$$

Дисконтований надлишок. Визначимо дисконтований процес

$$\widetilde{S}(t) := \frac{S(t)}{\kappa(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Тоді за стандартними аргументами ризик-нейтрального оцінювання для $0 \leq \leq t \leq u \leq T$ маємо, що $\widetilde{S}$ є $\mathbb{Q}$-мартингалом. Тому існує $\mathcal{F}_t$-вимірний процес $V = \{V(t)\}_{t\in[0,T]}$ такий, що $S(t) = \kappa(t)\, V(t)$, $t \in [0, T]$, де $V(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\widetilde{S}(T) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]$. Оскільки V є мартингалом, подальшу декомпозицію виконуємо саме для цього процесу.

Надалі припускаємо, що вся випадковість моделі задається скінченним набором базових стохастичних факторів $Z = (Z^1, \dots, Z^m)$, які породжують фільтрацію $\mathbb{F}$, тобто $\mathcal{F}_t = \sigma(Z^1_s, \dots, Z^m_s : s \leq t) \vee \mathcal{N}$. Припускаючи, що $V(t)$ залежить лише від траєкторій Z на $[0, t]$, шукаємо процеси $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ такі, що

$$V(t) = V(0) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t), \qquad t \in [0, T], \tag{3}$$

де $\Delta_i(t)$ інтерпретується як внесок i-го фактора ризику. Відповідно,

$$S(t) = \kappa(t)V(0) + \kappa(t) \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(t), \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Саме представлення (4) є основою подальшої побудови SU- та ISU-декомпозицій.

3. Принцип декомпозиції SU та ISU. Нехай $Z = (Z^1, \dots, Z^m)$ є вектором стохастичних факторів ризику, а через $Z^{\langle t\rangle} := (Z^1_{\cdot\wedge t}, \dots, Z^m_{\cdot\wedge t})$ позначимо процес факторів, зупинений у момент часу t. Процес переоцінки задається співвідношенням $V(t) = \Psi\big(Z^{\langle t\rangle}\big)$, $t \geq 0$, де $\Psi : \mathcal{D}([0, T]; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ є вимірним функціоналом відносно σ-алгебри на просторі траєкторій.

Для виділення внесків окремих факторів введемо функцію

$$H(t_1, \dots, t_m) := \Psi\big(Z^1_{\cdot\wedge t_1}, \dots, Z^m_{\cdot\wedge t_m}\big), \quad t_1, \dots, t_m \geq 0,$$

яку будемо називати поверхнею переоцінки. Зокрема, $V(t) = H(t, \dots, t)$, $t \geq 0$. Інтерпретаційно, значення $H(t_1, \dots, t_m)$ відповідає ситуації, коли інформація про j-й фактор ризику доступна до моменту t_j, тоді як інші фактори фіксовані на відповідних рівнях.

Нехай $\tau = \{0 = r_0 < r_1 < \dots\}$ — розбиття інтервалу $[0, \infty)$. Для фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r^t_k := r_k \wedge t$.

Означення 1 (Декомпозиція послідовного оновлення, SU)**.** *Нехай задано порядок факторів $1, \dots, m$. Для розбиття τ та фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r^t_k = r_k \wedge t$. Для $i = 1, \dots, m$ визначимо*

$$\Delta^\tau_i(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \Big[H\big(r^t_{k+1}, \dots, r^t_{k+1}, r^t_{k+1}, r^t_k, \dots, r^t_k\big) - H\big(r^t_{k+1}, \dots, r^t_{k+1}, r^t_k, r^t_k, \dots, r^t_k\big)\Big],$$

де в обох значеннях функції H перші $i-1$ координат дорівнюють r^t_{k+1}, останні $m - i$ координат дорівнюють r^t_k, а i-та координата змінюється з r^t_k на r^t_{k+1}.

Сімейство процесів $\Delta^\tau_1, \dots, \Delta^\tau_m$ називається SU-декомпозицією процесу $V(t)$ для заданого порядку факторів.

На кожному кроці змінюється лише один фактор, тому $\Delta_i^\tau(t)$ інтерпретується як його внесок. Декомпозиція залежить від порядку факторів (загалом $m!$ варіантів), тобто не є інваріантною. Для усунення цього розглядається граничний перехід при подрібненні розбиття.

Означення 2 (Нескінченно мала декомпозиція послідовного оновлення, ISU)**.** *Нехай* $\{\tau^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— послідовність розбиттів інтервалу* $[0,\infty)$ *така, що* $|\tau^n| := \sup_k(r_{k+1}^n - r_k^n) \to 0$. *Якщо для кожного* $i = 1,\dots,m$ *та* $t \geq 0$ *існує границя* $\Delta_i(t) = \lim_{n\to\infty} \Delta_i^{\tau^n}(t)$, *де збіжність розуміється за ймовірністю, то процеси* $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ *називаються ISU-декомпозицією процесу* $V(t)$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\{\tau^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— послідовність розбиттів інтервалу* $[0,\infty)$, *для якої* $|\tau^n| \to 0$, *і нехай відповідна ISU-декомпозиція процесу* $V(t)$ *існує. Тоді для всіх* $t \geq 0$ *виконується* (3). *Крім того, якщо для деякого* $i \in \{1,\dots,m\}$ *процес* Z^i *є сталим на інтервалі* $(a,b] \subset [0,\infty)$, *то процес* Δ_i *також є сталим на цьому інтервалі.*

Доведення. *Адитивність.* Для кожного розбиття $\tau^n = \{0 = r_0^n < r_1^n < \dots\}$ та фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r_k^{n,t} = r_k^n \wedge t$. За означенням SU-декомпозиції маємо $\Delta_i^{\tau^n}(t) = \sum_{k=0}^\infty \Big[H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_{k+1}^{n,t},r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big) - H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_k^{n,t},r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big)\Big]$, де в першому значенні функції H перші i координат дорівнюють $r_{k+1}^{n,t}$, а останні $m-i$ координат дорівнюють $r_k^{n,t}$; у другому значенні перші $i-1$ координат дорівнюють $r_{k+1}^{n,t}$, а координати з i-ї до m-ї дорівнюють $r_k^{n,t}$.

Тоді для кожного k сума за всіма факторами є телескопічною:

$$\sum_{i=1}^m \Big[H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_{k+1}^{n,t},r_{k+1}^{n,t},r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big) - H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_{k+1}^{n,t},r_k^{n,t},r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big)\Big]$$
$$= H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_{k+1}^{n,t}\big) - H\big(r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big).$$

Отже,$\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = \sum_{k=0}^\infty \Big[H\big(r_{k+1}^{n,t},\dots,r_{k+1}^{n,t}\big) - H\big(r_k^{n,t},\dots,r_k^{n,t}\big)\Big]$. Оскільки $r_0^{n,t} = 0$, а для достатньо великих k маємо $r_k^{n,t} = t$, остання сума також є телескопічною. Тому $\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = H(t,\dots,t) - H(0,\dots,0)$. З означення поверхні переоцінки маємо $H(t,\dots,t) = V(t)$, $H(0,\dots,0) = V(0)$. Отже, для кожного n маємо $\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = V(t) - V(0)$. Оскільки кількість факторів m є скінченною, то

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^m \Delta_i(t).$$

Переходячи до границі одержуємо (3).

Нормалізація. Нехай для деякого $i \in \{1,\dots,m\}$ процес Z^i є сталим на інтервалі $(a,b] \subset [0,\infty)$. Покажемо, що тоді процес Δ_i також є сталим на цьому інтервалі. Візьмемо довільні $a < s < t \leq b$. Оскільки Z^i не змінюється на $(s,t]$, то оновлення i-го фактора на будь-якому підінтервалі, що лежить у $(s,t]$, не змінює значення поверхні переоцінки. Тому для кожного розбиття τ^n приріст відповідної SU-компоненти на $(s,t]$ дорівнює нулю. Переходячи до границі за ймовірністю при $n\to\infty$, маємо $\Delta_i(t) - \Delta_i(s) = 0$. Отже, $\Delta_i(t) = \Delta_i(s)$. Оскільки $s,t \in (a,b]$ були довільними, процес Δ_i є сталим на інтервалі $(a,b]$.

Таким чином, ISU-декомпозиція задає узгоджений розклад процесу переоцінки та дозволяє ідентифікувати внески окремих факторів ризику в динаміку страхового надлишку. Інваріантність щодо порядку оновлення потребує окремого аналізу і досліджується за додаткових припущень.

4. Модельні припущення для застосувань. Розглянемо портфель із $n \in \mathbb{N}$ незалежних страхових контрактів, що укладаються в момент часу 0 та діють до моменту $T > 0$. Нехай p_j — одноразова страхова премія для j-го договору. Стан j-го застрахованого описується процесом підрахунку $N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\eta_j \le t\}}$, $t \ge 0$, де η_j — випадковий момент смерті. Відповідний індикатор виживання має вигляд $I_j(t) = 1 - N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\eta_j > t\}}$.

Припускаємо, що для кожного j інтенсивність смертності $\lambda_j : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є детермінованою локально інтегровною функцією, і процес

$$M_j^{\mathbb{P}}(t) := N_j(t) - \int_0^t \lambda_j(s) I_j(s)\, ds$$

є $\mathbb{P}$-мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$. Тоді функція виживання має вигляд

$$\mathbb{P}(\eta_j > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_j(u)\, du\right),$$

а для $t \ge s$ виконується

$$\mathbb{P}(\eta_j > t \mid \eta_j > s) = \exp\left(-\int_s^t \lambda_j(u)\, du\right). \tag{5}$$

Лема 1. *Нехай $T > t$. Тоді*

$$\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = \exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\, du\right) I_j(t). \tag{6}$$

Доведення. Оскільки $I_j(T) = \mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}}$, маємо $I_j(T) = I_j(t)\mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}}$, бо на події $\{\eta_j \le t\}$ обидві частини дорівнюють нулю, а на події $\{\eta_j > t\}$ маємо $I_j(t) = 1$. Тому $\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = \mathbb{E}\big[I_j(t)\mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}} \mid \mathcal{F}_t\big]$. Оскільки $I_j(t)$ є $\mathcal{F}_t$-вимірним, дістаємо $\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = I_j(t)\, \mathbb{P}(\eta_j > T \mid \mathcal{F}_t)$. За (5) маємо

$$\mathbb{P}(\eta_j > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\eta_j > T \mid \eta_j > t) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\, du\right).$$

Отже, $\mathbb{E}\big[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t\big] = \exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)\, du\right) I_j(t)$, що і треба було довести.

Отримані вище результати дозволяють обчислювати умовні математичні сподівання виплат, що залежать від моменту смерті. Зокрема, для задач ризик-нейтрального оцінювання необхідно знаходити умовні сподівання дисконтованих виплат вигляду $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I_j(T)}{\kappa(T)} \mid \mathcal{F}_t\right]$. Тому далі специфікуємо фінансову модель, яка описує динаміку фактора накопичення в ризик-нейтральній мірі $\mathbb{Q}$.

Нехай у ризик-нейтральній мірі $\mathbb{Q}$ ціна активу підпорядковується моделі Блека–Шоулза, а саме описується геометричним броунівським рухом (детальніше, наприклад, див. [8])

$$dX(t) = rX(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW^{\mathbb{Q}}(t), \tag{7}$$

де r — безризикова ставка, $\sigma > 0$ — волатильність.

Відповідний фактор накопичення $\kappa(t) = X(t)$ має вигляд

$$\kappa(t) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t)\right), \quad \kappa(0) = 1. \tag{8}$$

Припускаємо, що процеси $\{W^{\mathbb{Q}}, N_1, \ldots, N_n\}$ є незалежними під мірою $\mathbb{Q}$.

Зауваження 1. *Процес $W^{\mathbb{Q}} = \{W^{\mathbb{Q}}(t),\, t \geq 0\}$ є вінерівським процесом відносно ризик-нейтральної міри $\mathbb{Q}$. Він пов'язаний із вінерівським процесом $W = \{W(t),\, t \geq 0\}$ у вихідній ймовірнісній мірі за теоремою Гірсанова (див. [8])*

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW(t) + \theta(t)\,dt,$$

де $\theta(t)$ — процес зміни міри. У випадку моделі Блека–Шоулза (див. [8]) маємо $\theta(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$, звідки $dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW(t) + \frac{\mu - r}{\sigma}\,dt$. Таким чином, під мірою $\mathbb{Q}$ динаміка ціни активу набуває вигляду (7).

Для кожного j визначимо компенсатор

$$C_j^{\mathbb{Q}}(t) = \int_0^t \lambda_j^{\mathbb{Q}}(s) I_j(s-)\,ds. \tag{9}$$

Лема 2. *Процес $M_j^{\mathbb{Q}}(t) := N_j(t) - C_j^{\mathbb{Q}}(t)$ є $\mathbb{Q}$-мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$.*

Доведення. За припущенням про інтенсивність $\lambda_j^{\mathbb{Q}}$ процес $C_j^{\mathbb{Q}}$ є компенсатором процесу N_j. Згідно із загальною теорією процесів підрахунку, різниця між процесом підрахунку та його компенсатором є мартингалом, тобто $M_j^{\mathbb{Q}}$ є $\mathbb{Q}$-мартингалом.

5. ISU-декомпозиція для ризик-нейтрального оцінювання. Розглянемо портфель договорів страхування на дожиття (pure endowment), що укладаються в момент часу $t = 0$ та діють до моменту T. Нехай b_j — виплата у разі дожиття j-го застрахованого до моменту T.

Стохастичний грошовий потік для такого контракту має вигляд

$$dC_j(t) = I_j(t)\, b_j\, \delta_T(dt),$$

де $I_j(t)$ — індикатор дожиття, а δ_T — міра Дірака в точці T.

Введемо випадкову величину дисконтованого фінансового результату портфеля $\Xi = \sum_j p_j - \sum_j \frac{b_j I_j(T)}{\kappa(T)}$. Нехай базис ризику має вигляд $Z = (Z^1, Z^2) = (\Phi, N)$, де Φ — фінансовий фактор, а $N = (N_j)$ — процеси смертності.

Процес переоцінки визначається як

$$V(t) = \Psi(Z^t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\Xi \mid \sigma(Z^t)\big]. \tag{10}$$

Введемо поверхню переоцінки

$$H(t_1, t_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big[\Xi \mid \sigma(\Phi^{t_1}, N^{t_2})\big]. \tag{11}$$

Наступна теорема описує аналітичні формули для внесків фінансового фактора та фактора смертності, що дозволяє чітко розділити вплив ринкових коливань та демографічних змін на страховий надлишок.

Теорема 2. *Нехай $Z = (\Phi, N)$ — базис ризику, де $N = (N_1, \dots, N_n)$. Нехай процес переоцінки V і поверхня переоцінки H визначаються формулами (10) та (11) відповідно. Нехай фактор накопичення κ має вигляд (8), а компенсатор процесу N_j задано в (9). Припустимо, що процеси $\{W^{\mathbb{Q}}, N_1, \dots, N_n\}$ є незалежними під мірою $\mathbb{Q}$.*

Тоді ISU-декомпозиція процесу V існує і має вигляд

$$D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} I_j(s)\, v_j(s)\, Y(s)\, \sigma\, dW_s^{\mathbb{Q}}, \tag{12}$$

$$D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_{(0,t\wedge T]} v_j(s)\, Y(s)\, d\big(N_j - C_j^{\mathbb{Q}}\big)(s), \tag{13}$$

майже напевно для всіх $t \in (0, T]$, де

$$v_j(s) = \exp\!\left(-\int_s^T \lambda_j^{\mathbb{Q}}(u)\, du\right), \qquad Y(s) = \frac{e^{-(T-s)(r-\sigma^2)}}{\kappa(s)}.$$

При цьому $V(t) = V(0) + D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) + D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t)$, $t \in (0,T]$. Отже, пара процесів $\big(D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot),\, D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;\cdot)\big)$ утворює ISU-декомпозицію процесу V.

Доведення. Розглянемо один контракт і покладемо $\Xi = p - b\,\frac{I(T)}{\kappa(T)}$. Для розбиття $\tau_n = \{t_k\}$ маємо

$$H(t_{k+1}, t_k) = p - b\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I(T)}{\kappa(T)}\middle|\sigma(\Phi^{t_{k+1}}, N^{t_k})\right].$$

За незалежністю Φ і N

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{I(T)}{\kappa(T)}\middle|\sigma(\Phi^{t_{k+1}}, N^{t_k})\right] = I(t_k) v(t_k)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\kappa(T)}\middle|\Phi^{t_{k+1}}\right],$$

звідки $H(t_{k+1}, t_k) = p - b\,Y(t_{k+1}) v(t_k) I(t_k)$.

Фінансова складова.

$$H(t_{k+1}, t_k) - H(t_k, t_k) = -b\, v(t_k) I(t_k) \big(Y(t_{k+1}) - Y(t_k)\big).$$

За формулою Іто $dY(s) = -\sigma Y(s)\, dW_s^{\mathbb{Q}}$, тому

$$D_1^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = b \int_{(0,t\wedge T]} I(s) v(s) Y(s) \sigma\, dW_s^{\mathbb{Q}}.$$

Смертнісна складова.

$$H(t_{k+1}, t_{k+1}) - H(t_{k+1}, t_k) = -b\, Y(t_{k+1}) \big(v(t_{k+1}) I(t_{k+1}) - v(t_k) I(t_k)\big).$$

Оскільки $d(vI)(s) = -v(s)\, d\widetilde{N}(s)$, то

$$D_2^{\mathrm{ISU}}(Z;t) = b \int_{(0,t\wedge T]} Y(s) v(s)\, d\widetilde{N}(s).$$

Переходячи до границі при $|\tau_n| \to 0$, отримуємо твердження для одного контракту. Лінійність дозволяє узагальнити результат на портфель.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розглянуто декомпозицію страхового надлишку в стохастичній моделі страхування життя з урахуванням фінансових і біометричних ризиків. На основі підходів SU та ISU побудовано адитивне й узгоджене представлення внесків окремих факторів ризику. Отримано явні формули для фінансової та біометричної складових у вигляді стохастичних інтегралів. Запропонований підхід може бути узагальнений на складніші страхові продукти, зокрема багатостанові моделі та моделі зі стохастичною смертністю.

Конфлікт інтересів

Млавець Юрій Юрійович та Тимошенко Олена Анатоліївна, члени редакційної колегії, є авторами цієї статті та не брали участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Млавець Ю. Ю.: методологія, супервізія, написання — рецензування та редагування. Плугатор О. О.: формальний аналіз, методологія, математичні викладки, теоретичний аналіз, написання — оригінальний проєкт. Тимошенко О. А.: концептуалізація, методологія, наукове керівництво, доведення основних результатів, написання — рецензування та редагування.

Список використаної літератури

1. Schilling, K., Bauer, D., Christiansen, M. C., & Kling, A. (2020). Decomposing Dynamic Risks into Risk Components. *Management Science,* 66(12), 5738–5756. https://doi.org/10.1287/mnsc.2019.3522
2. Jetses, J., & Christiansen, M. C. (2022). A General Surplus Decomposition Principle in Life Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2022(10), 901–925. https://doi.org/10.1080/03461238.2022.2049636
3. Christiansen, M. C. (2023). On the Decomposition of an Insurer's Profits and Losses. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2023(1), 51–70. https://doi.org/10.1080/03461238.2022.2079996
4. Biewen, M. (2014). A General Decomposition Formula with Interaction Effects. *Applied Economics Letters,* 21(9), 636–642. https://doi.org/10.1080/13504851.2013.879280
5. Junike, G., Stier, H., & Christiansen, M. C. (2022). Limiting Sequential Decompositions and Applications in Finance. *arXiv:2212.06733.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.06733
6. Junike, G., Stier, H., & Christiansen, M. C. (2025). Profit and Loss Decomposition in Continuous Time and Approximations. *Finance and Stochastics,* 29, 1075–1107. https://doi.org/10.1007/s00780-025-00571-7
7. Haçarız, O., Kleinow, T., & Macdonald, A. S. (2024). On Technical Bases and Surplus in Life Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2024(9), 881–909. https://doi.org/10.1080/03461238.2024.2363183
8. Øksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. 6th ed.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6
9. International Accounting Standards Board. (2017). *IFRS 17 Insurance Contracts.* Retrieved from https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts
10. European Union. (2015). *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the Taking-up and Pursuit of the Business of Insurance and Reinsurance (Solvency II).* Retrieved from https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex%3A32009L0138

Mlavets Yu. Yu., Pluhator O. O., Tymoshenko O. A. Decomposition of insurance surplus in a stochastic model.

The paper studies the decomposition of insurance surplus in a stochastic life insurance model. An ISU-based approach is proposed to represent the surplus as a sum of components associated with individual risk factors. Within a risk-neutral framework, analytical formulas for financial and biometric risk contributions are derived, and the additivity, consistency, and economic interpretation of the decomposition are established. The approach can be used to analyze surplus dynamics and to quantify the impact of individual risk factors.

Keywords: stochastic differential equations, life insurance, insurer's surplus, risk decomposition, ISU decomposition, Itô formula, financial risk.

Отримано: 05.03.2026 Прийнято: 25.03.2026 Опубліковано: 30.04.2026