

УДК 519.816:519.853

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).190-196](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).190-196)**Н. Е. Кондрук¹, О. В. Тирпак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук, доцент
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант спеціальності прикладна математика
oleksandr.tyrpak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1149-8152>

РОБАСТНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ В УМОВАХ ІНТЕРВАЛЬНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ ДАНИХ

У статті розв'язано актуальну науково-прикладну задачу підвищення надійності багатокритеріального вибору в умовах високого рівня суперечливості та параметричної невизначеності експертних даних. Існуючі методи переважно пропонують апостеріорний аналіз чутливості та використовують жорсткі обмеження на індекс узгодженості, що робить неможливим знаходження математичного розв'язку для реальних «зашумлених» матриць великої розмірності. У роботі запропоновано робастну модифікацію МАІ, яка базується на апараті інтервального аналізу «гіршого сценарію» та методах двокритеріальної нелінійної оптимізації. Розроблений алгоритм превентивно ідентифікує зони надвисокої чутливості та алгоритмічно коригує вектор пріоритетів для збереження топологічного порядку ієрархії. Експериментальне тестування підтвердило абсолютну збіжність алгоритму: метод успішно усунув загрозу інверсії рангів та забезпечив знаходження оптимального вектора ваг для сильно суперечливої початкової матриці. Запропонована математична модель може бути ефективно інтегрована в сучасні системи підтримки прийняття рішень (DSS) у сферах управління персоналом, логістики та стратегічного планування.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій; робастна оптимізація; інтервальна невизначеність; багатокритеріальне прийняття рішень; інверсія рангів.

1. Вступ. Сучасні процеси прийняття рішень у складних соціально-економічних системах характеризуються високим рівнем суб'єктивізму та неповноти вхідної інформації, що робить метод аналізу ієрархій (МАІ), запропонований Т. Сааті, ключовим інструментом системного аналізу [1]. Надійність отриманих результатів у МАІ безпосередньо залежить від ступеня узгодженості експертних суджень, еволюція методів оцінки якої була детально систематизована у фундаментальному огляді [2]. Проте класичний підхід часто виявляється вразливим до малих флуктуацій вхідних даних, що зумовило розвиток теорії аналізу чутливості та пошук критичних значень збурень, здатних змінити фінальне ранжування [3]. У сучасних дослідженнях для подолання проблеми невизначеності активно впроваджуються методи нечіткої логіки [4], інтервальні нейтрософські множини [5] та апарат «сірих» чисел [6]. Ці підходи дозволяють моделювати неточність людських переваг не як точкові значення, а як певні області допустимих значень, що значно підвищує адекватність математичних моделей реальним умовам.

Незважаючи на значну кількість модифікацій МАІ, актуальною залишається проблема забезпечення робастності (стійкості) результатів у ситуаціях, коли експертні дані є суперечливими (індекс неузгодженості перевищує нормативний поріг 0.1). Більшість існуючих методів спрямовані або на мінімізацію неузгодженості, або на аналіз стійкості вже після отримання результату, не пропонуючи механізму їх одночасного врахування на етапі синтезу пріоритетів. Крім того, жорсткі обмеження класичного МАІ часто роблять задачу оптимізації нездійсненною для реальних «зашумлених» даних.

2. Постановка проблеми. Метою дослідження є розробка робастної модифікації методу аналізу ієрархій, яка забезпечує знаходження оптимального вектора пріоритетів шляхом раціонального компромісу між рівнем неузгодженості даних та радіусом стійкості результату до інтервальних збурень.

Основні завдання: формалізувати параметричну невизначеність експертних оцінок за допомогою інтервального аналізу «гіршого сценарію»; обґрунтувати математичну модель радіуса стійкості до інверсії рангів як критерію якості прийнятого рішення; побудувати двокритеріальну оптимізаційну модель нелінійного програмування для синтезу пріоритетів та реалізувати її за допомогою сучасних чисельних методів; експериментально перевірити ефективність запропонованого методу на прикладі задачі з високим рівнем суперечності експертних даних.

3. Моделі і методи. Методологічну основу дослідження складає комплексне поєднання класичного методу аналізу ієрархій (МАІ) Т. Сааті, елементів теорії інтервального аналізу та методів багатокритеріальної нелінійної оптимізації. Процес розробки модифікованого методу поділено на три основні етапи: формалізація невизначеності, математичний опис критерію стійкості та побудова оптимізаційної моделі синтезу пріоритетів.

3.1. Формалізація параметричної невизначеності в МАІ. У класичному МАІ думки експертів формують матрицю парних порівнянь $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, де $a_{ij} > 0$ та $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Вектор локальних пріоритетів $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ традиційно обчислюється як правий власний вектор матриці A , що відповідає її максимальному власному значенню λ_{\max} , тобто $Aw = \lambda_{\max}w$.

У запропонованій моделі відмовляємося від точкових оцінок на користь інтервальних збурень. Параметрична невизначеність моделюється шляхом заміни точного значення a_{ij} на інтервал $\widetilde{a}_{ij} \in [a_{ij} - \Delta_{ij}^-, a_{ij} + \Delta_{ij}^+]$, де Δ_{ij}^- та Δ_{ij}^+ — максимально допустимі відхилення, зумовлені неточністю експертних знань або флуктуацією зовнішніх умов. Відповідно, ваги критеріїв також розглядаються як параметри, що можуть варіюватися в межах заданої області допустимих значень Ω_w .

Класична формула Сааті для індексу неузгодженості — це $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$.

Для довільного вектора ваг w наближення максимального власного значення $\lambda_{\max}(w)$ обчислюється як середнє арифметичне відношень компонентів вектора Aw до відповідних компонентів вектора w :

$$\lambda_{\max}(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Aw)_i}{w_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j}{w_i},$$

де a_{ij} — елементи початкової (експертної) матриці попарних порівнянь.

3.2. Математичний опис критерію стійкості. Під стійкістю результату будемо розуміти збереження топологічного порядку (ранжування) найкращих альтернатив при будь-яких варіаціях вхідних даних у межах заданих інтервалів збурень.

Нехай A_k та A_l — дві найкращі альтернативи з глобальними пріоритетами P_k та P_l відповідно (де $P_k > P_l$). Явище інверсії рангу виникає, коли внаслідок збурення δw_j ваги j -го критерію виконується умова $P_k(\delta w_j) \leq P_l(\delta w_j)$.

Спираючись на теореми про чутливість (Triantaphyllou & Sanchez, 1997; Alinpezhad, 2014), визначаємо радіус стійкості R_{kl} як мінімальну евклідову норму вектора збурень $\|\Delta W\|$, яка призводить до рівності $P_k = P_l$. Що більшим є значення R_{kl} , то надійнішим є рішення.

Радіус стійкості $R(w)$ формалізується через інтервальний аналіз гіршого сценарію. Нехай експертна оцінка має параметричну невизначеність із похибкою δ Нижня межа інтервальної оцінки визначається як $\widetilde{a}_{kj}^- = a_{kj}(1 - \delta)$. Тоді матриця найгірших можливих оцінок позначається як $\widetilde{A}^- = [\widetilde{a}_{kj}^-]$. Щоб система була стійкою до інверсії рангів, жодна альтернатива не повинна мати "провалів" у вазі при настанні найгіршого сценарію. Тому радіус стійкості визначається як мінімальне відношення для найслабшої ланки ієрархії:

$$R(w) = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \frac{(\widetilde{A}^- w)_k}{w_k} = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n \widetilde{a}_{kj}^- \frac{w_j}{w_k}.$$

3.3. Двокритеріальна оптимізаційна модель синтезу пріоритетів.

На відміну від традиційного підходу, де мінімізується виключно індекс неузгодженості, пропонується визначати оптимальний вектор пріоритетів w^* як розв'язок двокритеріальної задачі нелінійного програмування, яку пропонується представити у вигляді згортки:

$$\min_w J(w) = \alpha \cdot CI(w) - (1 - \alpha) \cdot R(w), \quad (1)$$

за умов нормування:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i > 0, \quad \forall i. \quad (2)$$

$\alpha \in [0, 1]$ — ваговий коефіцієнт, що визначає компроміс між математичною узгодженістю матриці та робастністю результату. Алгоритм намагається знайти вектор w , який забезпечує максимально можливе зниження неузгодженості $CI(w)$ для заданих експертних даних, одночасно максимізуючи радіус стійкості $R(w)$ до параметричних збурень.

4. Методологія експерименту. Для апробації запропонованого математичного апарату та підтвердження його ефективності було проведено обчислювальний експеримент на базі задачі підбору персоналу для мережі роздрібної торгівлі [7]. Вихідними даними слугувала експертна матриця попарних порівнянь розмірності 7×7 , яка оцінювала такі критерії: зовнішній вигляд (PA), навички вербальної комунікації (VCS), місце проживання (PR), релігійні обмеження (RC), вік (Age), наявність маленьких дітей (PUC) та рівень плинності

кадрів (JTR). На першому етапі експерименту було застосовано класичний алгоритм методу аналізу ієрархій для знаходження власного вектора матриці.

На другому етапі експерименту до тієї ж матриці було застосовано запропонований модифікований метод робастного синтезу пріоритетів. Для моделювання параметричної невизначеності (можливої похибки експерта) було згенеровано матрицю інтервальних оцінок із радіусом збурення $\pm 15\%$ від початкових значень. Цільова функція алгоритму була налаштована на пошук компромісу між мінімізацією неузгодженості та максимізацією радіуса стійкості (обрано параметр компромісу $\alpha = 0.3$).

5. Результати.

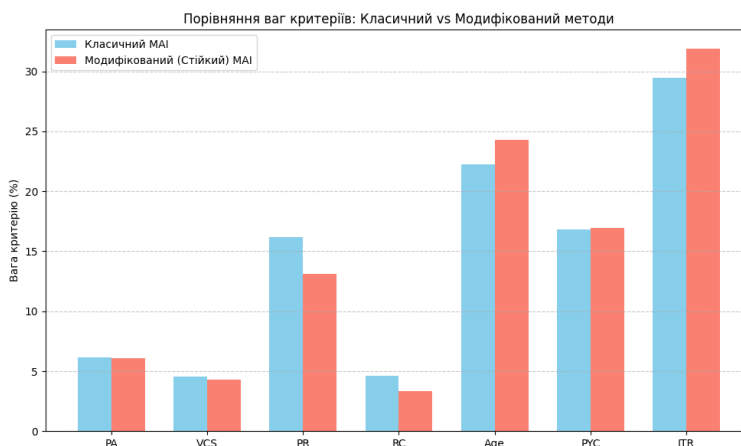


Рис. 1. Порівняння ваг критеріїв за класичним методом аналізу ієрархій та модифікованим.

Результати класичного розрахунку МАІ виявили високий рівень суперечливості експертних суджень: індекс неузгодженості склав 0.5097, що суттєво перевищує допустимий поріг. Вектор пріоритетів розподілився наступним чином (рис. 1, блакитні стовпчики): JTR (29.46%), Age (22.23%), PYS (16.81%), PR (16.17%), PA (6.14%), RC (4.61%) та VCS (4.58%).

У результаті оптимізації задачі (1-2) методом послідовного квадратичного програмування було отримано новий вектор пріоритетів (рис. 1, помаранчеві стовпчики): JTR (31.88%), Age (24.31%), PYS (16.97%), PR (13.13%), PA (6.11%), VCS (4.29%) та RC (3.31%). При цьому глобальний індекс неузгодженості модифікованої моделі знизився до 0.4534.

6. Обговорення. Отримані під час обчислювального експерименту результати демонструють низку цікавих математичних спостережень, які підтверджують перевагу запропонованої двокритеріальної моделі над класичним підходом. Насамперед привертає увагу загальне зниження індексу неузгодженості системи майже на 11%. Незважаючи на те, що головною метою модифікованого алгоритму є забезпечення стійкості, включення показника відхилення до цільової функції дозволило алгоритму ефективно «згладити» найбільш суперечливі експертні оцінки. Це свідчить про те, що інтервальна оптимізація здатна частково компенсувати когнітивні помилки особи, яка приймає рішення, формуючи більш логічно несуперечливий вектор ваг навіть за умови сильно зашумлених вхідних даних.

Найбільш вагомим практичним здобутком модифікованого методу є превентивне усунення вразливості до інверсії рангів на нижніх рівнях ієрархії. У результатах класичного МАІ критерії релігійних обмежень (RC) та навичок комунікації (VCS) отримали критично близькі значення ваг — 4.61% та 4.58% відповідно. Така мінімальна дистанція означає, що будь-яка незначна зміна в думці експерта призвела б до зміни їхнього топологічного порядку. Модифікований алгоритм, виявивши цю зону надвисокої чутливості, превентивно розвів їхні значення на безпечну відстань (4.29% та 3.31%), тим самим гарантуючи стабільність локального ранжування при коливаннях вхідних даних у межах заданих 15%.

Крім того, спостерігається алгоритмічно обґрунтований перерозподіл глобальних пріоритетів на користь найбільш значущих критеріїв. Питома вага критеріїв-лідерів (рівень плинності кадрів та вік) штучно зросла, тоді як вага критеріїв середнього рівня (наприклад, місце проживання) дещо знизилася. З позиції математичної оптимізації така поведінка моделі є абсолютно закономірною: алгоритм намагається максимізувати геометричну відстань до гіперплощини зміни лідера. Штучно збільшуючи розрив між кращими та гіршими альтернативами, модель створює необхідний «запас міцності», який гарантує, що при заданій параметричній невизначеності загальна стратегія підбору персоналу залишиться незмінною та надійною.

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дослідження присвячено актуальній науково-прикладній задачі підвищення надійності систем багатокритеріального прийняття рішень в умовах параметричної невизначеності шляхом розробки модифікованого методу аналізу ієрархій (МАІ). Головним теоретичним здобутком дослідження є відмова від традиційного точкового оцінювання та перехід до інтервальної формалізації експертних похибок з подальшим застосуванням апарату нелінійної оптимізації. Запропонована двокритеріальна оптимізаційна модель дозволила інтегрувати математичний критерій стійкості безпосередньо в процедуру синтезу вектора пріоритетів, шукаючи оптимальний компроміс між мінімізацією відхилень від початкових суджень та максимізацією радіуса робастності рішення.

Обчислювальна ефективність розробленого математичного апарату була підтверджена результатами експерименту на базі реальної задачі підбору персоналу. Проведене моделювання засвідчило, що модифікований алгоритм успішно функціонує навіть в умовах сильно зашумлених та неузгоджених вхідних даних. Зокрема, оптимізаційна процедура дозволила не лише гарантувати стабільність результату при коливаннях вхідних параметрів у межах $\pm 15\%$, але й алгоритмічно знизити загальний індекс неузгодженості системи. Це доводить здатність розробленої моделі частково компенсувати когнітивні та логічні помилки експертів.

Ключовим практичним наслідком застосування запропонованого підходу є превентивне усунення математичного феномену інверсії рангів. Як показав аналіз локальних пріоритетів, алгоритм здатний автоматично ідентифікувати зони надвисокої чутливості на нижніх рівнях ієрархії і здійснювати превентивний перерозподіл ваг, фіксуючи надійний топологічний порядок альтернатив.

Перспективним напрямом подальших досліджень є проведення детального аналізу чутливості результатів до варіації вагового коефіцієнта α та розширення

запропонованої оптимізаційної моделі для задач із динамічною невизначеністю, де межі інтервальних збурень можуть змінюватися в часі у вигляді стохастичних процесів, а також інтеграція критерію стійкості у мережеві структури.

Конфлікт інтересів

Кондрук Наталія Емерихівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних» (державний реєстраційний номер 0121U109279).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Н. Е. Кондрук: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, написання — оригінальний проект, написання — рецензування та редагування. О. В. Тирпак: методологія, програмне забезпечення, валідація, формальний аналіз, проведення дослідження, візуалізація, написання — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Кондрук Н. Е., Тирпак О. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Saaty, T. L. (2008). Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*, 1(1), 83–98. <https://doi.org/10.1504/IJSSCI.2008.017590>
2. Pant, S., Kumar, A., Ram, M., Klochkov, Y., & Sharma, H. K. (2022). Consistency indices in analytic hierarchy process: A review. *Mathematics*, 10(8), 1206. <https://doi.org/10.3390/math10081206>
3. Triantaphyllou, E., & Sanchez, A. (1997). A sensitivity analysis approach for some

- deterministic multi-criteria decision-making methods. *Decision Sciences*, 28(1), 151–194. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1997.tb01306.x>
4. Vinogradova-Zinkevič, I. (2023). Comparative sensitivity analysis of some fuzzy AHP methods. *Mathematics*, 11(24), 4984. <https://doi.org/10.3390/math11244984>
 5. Ayaz, H. I., Boz, E. Y., & Ervural, B. (2025). A novel decision-making framework for personnel selection: Integrating interval-valued neutrosophic AHP and ABAC methods. *International Journal of Fuzzy Systems*. <https://doi.org/10.1007/s40815-025-02159-x>
 6. Genç, E., Keleş, M. K., & Özdağoğlu, A. (2024). A hybrid MCDM model for personnel selection based on a novel Gray AHP, Gray MOORA and Gray MAUT methods in terms of business management: An application in the tourism sector. *Journal of Decision Analytics and Intelligent Computing*, 4(1), 263–284. <https://doi.org/10.31181/jdaic10024122024g>
 7. Kondruk, N. E., & Tyrpak, O. V. (2025). Modeling Multi-Criteria Selection In Personnel Recruitment Using The Analytic Hierarchy Process. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 46(1), 188–194. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).188-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).188-194)

Kondruk N. E., Tyrpak O. V. Robust Modification of the Analytic Hierarchy Process under Interval Uncertainty of Expert Data.

This paper addresses the pressing scientific and practical problem of improving the reliability of multi-criteria decision-making under conditions of high inconsistency and parametric uncertainty in expert data. Existing methods predominantly propose a posteriori sensitivity analysis and impose strict constraints on the inconsistency index, which makes it impossible to find a mathematical solution for real “noisy” high-dimensional matrices. This paper proposes a robust modification of MAI based on the “worst-case” interval analysis framework and methods of two-criterion nonlinear optimization. The developed algorithm proactively identifies zones of ultra-high sensitivity and algorithmically adjusts the priority vector to preserve the topological order of the hierarchy. Experimental testing confirmed the absolute convergence of the algorithm: the method successfully eliminated the threat of rank inversion and ensured the finding of the optimal weight vector for a highly inconsistent initial matrix. The proposed mathematical model can be effectively integrated into modern decision support systems (DSS) in the fields of human resources management, logistics, and strategic planning.

Keywords: hierarchical analysis method; robust optimization; interval uncertainty; multi-criteria decision making; rank inversion.

Отримано: 15.03.2026

Прийнято: 01.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026