



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 45 № 2

2024

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 45 № 2

Ужгород 2024

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2024. Т. 45, № 2. 296 с.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2)).

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., доктор техн. наук, професор (Україна).

Заст. головн. редактора — Сливка-Тилищак Г. І., доктор фіз.-мат. наук, доцент (Україна).

Відповідальний секретар — Андрашко Ю. В., канд. техн. наук, доц. (Україна).

Технічний секретар — Порохнавець І. М. (Україна).

Члени редакційної колегії: Бабич С. Ю. — д.т.н., проф. (Україна), Бовді В. А. — док. філ. з мат., проф. (ОАЕ), Бондаренко В. М. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Бортош М. Ю., к.ф.-м.н. (Україна), Гече Ф. Е. — д.т.н., проф. (Україна), Гуляницький Л. Ф. — д.т.н., с.н.с., член-кор. НАНУ (Україна), Зайченко Ю. П. — д.т.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Капустян О. А. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Кондрук Н. Е. — к.т.н., доц. (Україна), Король І. І. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Маринець В. В. — д.ф.-м.н., проф. (Україна), Маринець К. В. — к.ф.-м.н., доц. (Нідерланди), Млавець Ю. Ю. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Моклячук М. П. — д.ф.-м.н., проф., академік АН ВШ (Україна), Мулеса П. П. — к.т.н., доц. (Україна), Поліщук В. В. — д.т.н., доц. (Україна), Рейтій О. К. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Ронто А. М. — д.ф.-м.н., проф. (Чехія), Семенова Н. В. — д.ф.-м.н., с.н.с. (Україна), Синявська О. О. — к.ф.-м.н., доц. (Україна), Снитюк В. Є. — д.т.н., проф. (Україна), Тилищак О. А. — д.ф.-м.н., доц. (Україна), Шаркаді М. М. — к.ekon.н., доц. (Україна), Щобак Н. М. — к.ф.-м.н., проф. (Чехія).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №3 від 7 від 19 листопада 2024 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол №7 від 12 від 21 листопада 2024 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп'ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації Серія KB №7972 від 9.10.2003 року, видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України.

Засновник і видавець – ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,

Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2024

© Ужгородський національний університет,
2024

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 45 No 2

Uzhhorod 2024

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2024. Vol. 45, No 2. 296 p.
DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2)).

EDITORIAL

Chief Editor — M. Malyar, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine).

Deputy Chief Editor — G. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine).

Responsible Secretary — Yu. Andrashko, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine).

Technical Secretary — I. Porokhnavets (Ukraine).

Members: S. Babich, Dr. Sci. (Tech.). Prof. (Ukraine), V. Bovdi, Ph. D. (Math.), Prof. (UAE), V. Bondarenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), M. Bortosh, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), F. Geche, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), L. Huliannykyi, Dr. Sci. (Tech.), S.R.O., Academics (Ukraine), Yu. Zaichenko, Dr. Sci. (Tech.), Prof., Academics (Ukraine), O. Kapustyan, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), N. Kondruk, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), I. Korol, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Marynets, Dr. Sci. (Phys.-Math.). Prof. (Ukraine), K. Marynets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Netherlands), Yu. Mlavets, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Mokliachuk, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Academics (Ukraine), P. Mulesa, Ph. D. (Tech.), As. prof. (Ukraine), V. Polishchuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), O. Reity, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), A. Ronto, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic), N. Semenova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), S.R.O. (Ukraine), O. Syniavska, Ph. D. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), V. Snytyuk, Dr. Sci. (Tech.), Prof. (Ukraine), A. Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), As. prof. (Ukraine), M. Sharkadi, Ph. D. (Econom.), As. prof. (Ukraine), N. Shchobak, Ph. D. (Phys.-Math.), Prof. (Czech Republic).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 3 of November 7–19, 2024) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 7 of November 12–21, 2024)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2022 = 81.67.

Certificate of state registration number KV 7972 dated by September 9, 2003.

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. Антонюк С. В., Кириченко О. Л. Наближена побудова оптимального керування стохастичними динамічними системами Іто-Скорохода з малим параметром і Марковськими збуреннями	9
2. Бардан А. О. Усереднення в задачі диференціальної гри переслідування за наявності багаточастотних збурень	18
3. Бедратюк Л. П. Структура $\mathfrak{sl}_2$ -модулів на діаграмах Юнга	29
4. Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В. Про мінімальні мінімаксні системи твірних для додатних частково впорядкованих множин	46
5. Варга Я. В., Корпош А. В. Дослідження розв'язків інтегральної крайової задачі з параметром	56
6. Добуляк Л. П., Солтис С. П., Лисецька О. Ю. Криптографія еліптичних кривих	65
7. Жук Т. Ю. Усереднені задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на скінченних і нескінченних інтервалах . .	75
8. Капустян О. В., Станжисцький А. О., Станжисцький О. М. Слабкі розв'язки стохастично збурених параболічних рівнянь зі швидко зростаючими зовнішніми збуреннями	83
9. Млавець Ю. Ю., Панічек О. В., Тимошенко О. А. Математичне моделювання динаміки передачі туберкульозу з використанням диференціальних рівнянь збурених за допомогою вінерівських процесів	97
10. Раєвська І. Ю. Локальні майже-кільця з адитивною групою порядку 128 . .	110
11. Турчин Є. В., Федорченко Ю. С. Розподіл частих слів у коротких текстових повідомленнях	115

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., Лазар В. Ф. , Млавець Ю. Ю. Аналітичний розв'язок контактної задачі для попередньо напружених двох півпросторів та кільцевого штамп	126
2. Баран О. І., Андрашко Ю. В. Динамічні моделі оптимізації транспортних потоків	139
3. Вронський С. В., Андрашко Ю. В. Динамічний підхід до формування тестових завдань	153
4. Глухов А. Ю., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю., Рейтій О. К. Хвилі кручення в шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів	164
5. Гнатієнко Г. М., Гнатієнко О. Г. Метод визначення нечітких значень відносної важливості характеристик альтернатив з використанням способу нашарування	172
6. Іллічева Л. М., Авдеева Т. В., Томащук О. П. Оцінка кількості позовів, що формуються за схемами ланцюгової реакції та гіллястого процесу	188
7. Ічанська Н. В., Лисенко М. В., Пікалова В. В. Розвиток штучного інтелекту і його застосування в бібліотечній справі	195
8. Кондрук Н. Е., Гецько С. В. Прогнозування курсів валют засобами машинного навчання	205

9. Михайлов Н. О. Адаптивна модель планування проєктів та оцінки ризиків із використанням машинного навчання	216
10. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В., Козут Н. І. Про один підхід до розв'язання проблеми Дедекінда	223
11. Поліщук В. В., Поліщук І. В., Матей А. А., Феделеш Ю. Ю. Нечітка модель оцінки безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва з урахуванням ризикових факторів	230
12. Роботишин М. В., Маляр М. М. Застосування математичного моделювання у домейні FinOps	238
13. Сергеев О. С., Ус С. А. Дослідження двох підходів до розв'язання двоетапної задачі розміщення-активації	249
14. Товт Ю. О., Брила А. Ю. Дослідження змісту вагових коефіцієнтів комплекснозначних нейромереж у частотній області	259
15. Черевко І. М., Косович І. Т. Імітаційне моделювання SIR моделей методом клітинних автоматів	276
16. Шкіря С. В., Корник О. В. Аналіз методів автентифікації цифрових об'єктів	286

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. <i>Antoniuk S. V., Kyrychenko O. L.</i> Approximate structure of optimal control for Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems with small parameters and Markov disturbances.....	9
2. <i>Bardan A. O.</i> Averaging in the differential pursuit game problem in the presence of multifrequency disturbances.....	18
3. <i>Bedratiuk L. P.</i> The structure of $\mathfrak{sl}_2$ -modules on the Young diagrams.....	29
4. <i>Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.</i> On minimal minimax systems of generators for positive posets.....	46
5. <i>Varga I. V., Korposh A. V.</i> Investigation of solutions of integral boundary value problem with parameter.....	56
6. <i>Dobuliak L. P., Soltys S. P., Lysetska O. Y.</i> Elliptic Curve Cryptography.....	65
7. <i>Zhuk T. Yu.</i> Averaged optimal control problems of non-linear differential inclusions on the finite and infinite intervals.....	75
8. <i>Kapustyan O. V., Stanzhytskiy A. O., Stanzhytskiy O. M.</i> Weak solutions of stochastically perturbed parabolic equations with rapidly growing external perturbations.....	83
9. <i>Malavets Yu. Yu., Panichek O. V., Tymoshenko O. A.</i> Mathematical modelling of the dynamics of tuberculosis transmission based on differential equations perturbed by Wiener processes.....	97
10. <i>Raievska I. Yu.</i> Local nearrings with additive groups of order 128.....	110
11. <i>Turchyn I. V., Fedorchenko Yu. S.</i> Distribution of frequent words in short text messages.....	115

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. <i>Babich S. Yu., Yaretska N. O., [Lazar V. F.], Malavets Yu. Yu.</i> Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp....	126
2. <i>Baran O. I., Andrashko Yu. V.</i> Dynamic models of traffic flow optimization.....	139
3. <i>Vronskyi S. V., Andrashko Yu. V.</i> The dynamic approach to the formation of test tasks.....	153
4. <i>Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Malavets Yu. Yu., Reity O. K.</i> Torsion waves in layered composite incompressible materials with initial stresses at the slip of layers.....	164
5. <i>Hnatiienko H. M., Hnatiienko O. H.</i> Method of Determining Fuzzy Values of the Relative Importance Characteristics of Alternatives Using the Layering Method.....	172
6. <i>Illicheva L. M., Avdieieva T. V., Tomaschuk O. P.</i> Estimation of the number of lawsuits formed according to the scheme of chain reaction and branching process.....	188
7. <i>Ichanska N. V., Lysenko M. V., Pikalova V. V.</i> Development of Artificial Intelligence and its Application in Librarianship.....	195
8. <i>Kondruk N. E., Hetsko S. V.</i> Forecasting currency rates using machine learning models.....	205
9. <i>Mykhailov N. O.</i> Adaptive model for project planning and risk assessment using machine learning.....	216
10. <i>Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Kohut N. I.</i> On one approach to solving the Dedekind problem.....	223

11. <i>Polishchuk V., Polishchuk I., Matei A., Fedelesh Yu.</i> A fuzzy model of security assessment of international and cross-border cooperation processes considering risk factors	230
12. <i>Robotyshyn M. V., Malyar M. M.</i> The use of mathematic modelling in FinOps domain	238
13. <i>Serhieiev O. S., Us S. A.</i> Exploring Two Solution Methods for the Two-Stage Location-Activation Problem	249
14. <i>Tovt Yu. O., Bryla A. Yu.</i> Study of the content of weights of complex-valued neural networks in frequency domain	259
15. <i>Cherevko I. M., Kosovych I. T.</i> Simulation Modeling of SIR Models Using Cellular Automata	276
16. <i>Shkiria S. V., Kornyk O. V.</i> Analysis of digital object authentication methods ...	286

УДК 519.217; 519.718; 519.837

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).9-17](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).9-17)**С. В. Антонюк¹, О. Л. Кириченко²**

¹ Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
кандидат фізико-математичних наук
s.antonjuk@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5357-8987>

² Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
асистент кафедри математичних проблем управління і кібернетики,
доктор філософії
o.kyrychenko@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0282-9958>

НАБЛИЖЕНА ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СТОХАСТИЧНИМИ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ІТО-СКОРОХОДА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ І МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Одержана методика побудови синтезу оптимального керування для стохастичних динамічних систем зі всією передісторією з малим параметром з марковськими збуреннями. Доведено, що шукане керування можна знайти як оптимальне керування деякої допоміжної задачі оптимального керування відповідної стохастичної диференціально-функціональної системи. Побудовано алгоритм послідовного наближення ітерацій до оптимального керування.

Ключові слова: стохастичні динамічні системи Іто-Скоророхода, Марковські збурення, оптимальне керування.

1. Вступ. Розглянемо задачу оптимального керування $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$ з керовним випадковим процесом $x^u(t, \omega)$, узгодженим з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $J(u)$ — функціонал якості, $\mathbf{U}$ — множина допустимих керувань [1].

Означення 1. F_t — вимірні функції $u(t) \in \mathbb{R}$, для яких визначена траєкторія руху $x(t, \omega)$ і скінченний функціонал $J(u)$, називаються допустимими керуваннями.

Позначимо

$$v_J = \inf J(u), \quad u \in \mathbf{U}.$$

Задача оптимального керування якраз і полягає в знаходженні такого допустимого керування $u^0 \in \mathbf{U}$, для якого

$$J(u^0) = v_J. \quad (1)$$

При цьому, $u^0(t)$ називається оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$.

Якщо оптимальне керування не існує або існує, але одержати його складно, виникає питання про побудову оптимального керування із заданою точністю.

Нехай, наприклад, задача керування містить малий параметр $\varepsilon > 0$ і задано точність керування $\tau(\varepsilon) > 0$.

Означення 2. Допустиме керування $\tilde{u}^0$, що задовольняє

$$0 \leq J(\tilde{u}^0) - v_J \leq \tau(\varepsilon),$$

назвемо $\tau(\varepsilon)$ — оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$.

У монографії [1] розглянуто проблему синтезу оптимального керування стохастичними динамічними системами зі скінченною післядією і дифузійними збуреннями. В [2] розв'язується подібна задача для стохастичних динамічних систем Іто-Скорохода з пуассоновими збуреннями і нескінченною післядією. В даній роботі розв'язується проблема синтезу оптимального керування для стохастичних динамічних систем випадкової структури із зовнішніми збуреннями, пуассоновими перемиканнями і всією передісторією.

Нехай $\mathbb{R}^n$ — n -вимірний дійсний евклідовий простір і $1 \leq p < \infty$. X є простором історії, тобто простір $\mathbb{R}^n \times D_\rho^p$, де D_ρ^p — простір Скорохода локально обмежених неперервних справа, що мають лівосторонні границі, функцій $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds < \infty.$$

Норма в просторі X вводиться наступним чином

$$\|\varphi\|_X \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p} \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p \right)^{1/p},$$

$$\|\varphi\|_\rho^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Функція $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ називається *функцією зі згладжуючою властивістю*, якщо вона задовольняє таким умовам:

1. ρ — сумовна в $\mathbb{R}^+$;
2. для $\forall z \geq 0$ справедливі нерівності

$$\overline{K}(z) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathbb{R}^+} \frac{\rho(s+z)}{\rho(s)} \leq \overline{\overline{K}} < \infty;$$

$$\underline{K}(z) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{s \in \mathbb{R}^+} \frac{\rho(s)}{\rho(s+z)} < \infty;$$

3. ρ — обмежена в $\mathbb{R}^+$;
4. $\rho > 0$ — строго додатня на $s \in (0, \infty)$;
5. $s\rho(s) \rightarrow 0$ коли $s \rightarrow \infty$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ — ймовірнісний базис [1]; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ — марковський процес із значеннями в метричному просторі $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_n\}$ з перехідною ймовірністю $\mathbf{P}(s, y, A)$, $A \subset \mathcal{B}_Y$; $\{\eta_k, k \geq 0\}$ — ланцюг Маркова в метричному просторі $\mathbf{H}$ з перехідною ймовірністю на k -му кроці $\mathbf{P}_k(h, G)$; $\{w(t), t \geq 0\}$ — $\mathbb{R}^n$ -значний вінерів процес, узгоджений з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, а $\{\tilde{\nu}(d\theta, dt) \equiv \nu(d\theta, dt) - t\Pi(d\theta)\}$ незалежна від нього центрована

пуассонова міра на $(\Theta \times \mathbb{R}_+, \mathcal{Z} \times \mathcal{B}_+)$, для якої $\mathbf{E} \{ \tilde{\nu}^2(d\theta \times dt) \} = \Pi(d\theta)dt$, де Π — деяка σ -скінченна міра на $\mathcal{Z}$.

Розглянемо задачу керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури із зовнішніми збуреннями та усією передісторією

$$dx(t) = f_1(\gamma_1)a(t, x_t^u, \xi(t), u, \varepsilon)dt + f_2(\gamma_2)b(t, x_t^u, \xi(t), u, \varepsilon)dw(t) + f_3(\gamma_3) \int_{\Theta} c(t, x_t^u, \theta, \xi(t), u, \varepsilon) \tilde{\nu}(d\theta, dt), \quad \forall t \geq 0, \quad (2)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x \Big|_{t=t_k} = x(t_k) - x(t_k-) = g(t_k-, x^{t_k-}, \xi(t_k), \eta_k), \quad (3)$$

$$t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in \mathbb{N}\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty.$$

і початковими умовами

$$\xi(t_0) = y \in \mathbf{Y}, \quad x_{t_0} = \varphi, \quad \eta_{t_0} = h. \quad (4)$$

Тут γ_1, γ_2 — випадкові величини, з функціями розподілу $F_{\gamma_1}(\cdot), F_{\gamma_2}(\cdot)$ відповідно, незалежні від $\xi(t)$ і приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$ та центрованої пуассонової міри $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0\}$, $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ — деякі борелеві функції; векторнозначний функціонал $a : \mathbb{R} \times X \times Y \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, матричнозначний функціонал $b : \mathbb{R} \times X \times Y \times \mathbf{U} \rightarrow M_n^n(\mathbb{R}^n)$ та векторнозначний функціонал $c : \mathbb{R} \times X \times \Theta \times Y \times \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вимірні за сукупністю змінних і локально обмежені по t за другим аргументом, а процес $x_t = (x(t), x_t(s))$

$$x_t(s) = \begin{cases} x(t-s), & t_0 \leq s \leq t, \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases}$$

Крім того, $\varphi_{t_0} \in X$ з ймовірністю 1 і $\varphi(t)$ не залежить від приростів вінерового процесу $\{w(s) - w(t), s \geq t \geq t_0\}$ та центрованої пуассонової міри $\{\tilde{\nu}(s, A) - \tilde{\nu}(t_0, A), s \geq t_0\}$ при кожному t .

В [3] встановлені умови існування і єдиності сильного розв'язку $x(t)$ задачі (2)–(4).

Введемо в розгляд функціонал якості $J(u) = J(0, \varphi_0)$, де

$$J^u(t, \varphi) = E_{t, \varphi} \left\{ F(x_T^u, \varepsilon) + \int_t^T G(s, x_s^u, u(s, x_s^u), \varepsilon) ds \right\}, \quad (5)$$

$$F(\varphi, \varepsilon) \geq 0, \quad G(t, \varphi, \varepsilon) \geq 0.$$

Розглянемо допоміжну задачу керування для $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$ і позначимо її

$$\{y^u(t, \omega), I(u), \mathbf{U}\}. \quad (6)$$

Нехай керування $\tilde{u}^0(t)$ — оптимальне керування задачі $\{y^u(t, \omega), I(u), \mathbf{U}\}$, тобто

$$I(\tilde{u}^0) = \inf I(u) \equiv v_I.$$

Позначимо через

$$\rho(J, I) \equiv \sup |J(u) - I(u)|, \quad \forall u \in \mathbf{U}. \quad (7)$$

Лема 1. Для задачі керування (3)–(5) мають місце наступні нерівності

$$0 \leq \left| J(\tilde{u}^0) - v_I \right| \leq \rho(J, I). \quad (8)$$

Доведення. З (7) випливає

$$|J(u) - I(u)| \leq \rho(J, I).$$

Звідси одержимо

$$-\rho(J, I) \leq J(u) - I(u) \leq \rho(J, I),$$

що еквівалентно

$$J(u) \leq I(u) + \rho(J, I),$$

$$I(u) \leq J(u) + \rho(J, I).$$

За означенням v_I і v_J , маємо

$$v_J \leq v_I + \rho(J, I),$$

$$v_I \leq v_J + \rho(J, I),$$

тобто $|v_J - v_I| \leq \rho(J, I)$.

Отже, $0 \leq \left| J(\tilde{u}^0) - v_I \right| \leq \rho(J, I)$, що і доводить твердження.

Наслідок 1. Нехай задача керування $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$ містить малий параметр, а допоміжна задача керування $\{y^u(t, \omega), I(u), \mathbf{U}\}$ має оптимальне керування $\tilde{u}^0$, таке, що

$$\rho(J, I) \leq \tau(\varepsilon), \quad (9)$$

де $\tau(\varepsilon)$ — точність.

Тоді керування $\tilde{u}^0$ є $\tau(\varepsilon)$ -оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbf{U}\}$.

Доведення. З нерівностей (8) і (9) випливає, що

$$J(\tilde{u}^0) - v_I \leq 2\rho(J, I) \leq 2\tau(\varepsilon).$$

Наслідок дає алгоритм наближеного синтезу оптимального керування для динамічних систем (2)–(4), які містять малий параметр ε .

Зазвичай, в ролі допоміжної задачі керування обираємо лінійну задачу керування типу (2)–(5) з $\varepsilon = 0$. В результаті одержимо нульове наближення до оптимального керування.

Розглянемо алгоритм побудови послідовності допоміжних задач керування, що дозволить реалізувати наближений синтез з заданою точністю $\tau(\varepsilon)$.

2. Рівняння Беллмана. Наближена побудова оптимального керування. Оптимальне керування $\tilde{u}^0(t, \varphi)$ і вартість керування задачі (2)–(5) визначається з рівняння Беллмана [2]

$$\inf [L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u, \varepsilon)] = 0, \quad \forall u \in \mathbf{U}, \quad (10)$$

де Lv — слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках задачі Коші (2)–(4).

$$\begin{aligned} L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) v(t, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial t} v_\varphi(t, x) + (\nabla v(t, x), a(t, \varphi, y, u, \varepsilon)) + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\nabla^2 v_\varphi(t, x) b(t, \varphi, y, u, \varepsilon) b'(t, \varphi, y, u, \varepsilon) \right] + \\ &+ \int_{\Theta} \left[v_\varphi(t, x + a(t, \varphi, y, \theta, u, \varepsilon)) - v(t, x) - (\nabla v(t, x), c(t, \varphi, y, \theta, u, \varepsilon)) \right] \Pi(d\theta). \end{aligned}$$

Тут « $\cdot$ » — операція транспонування вектора або матриці;

$$\nabla v \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right)'; \quad \nabla^2 v \equiv \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad i, j = \overline{1, n};$$

$\text{Sp } A$ — слід матриці A ; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток.

Припустимо, що існує така множина $V_0 \subset \mathbf{V}$, що для довільного $v \in V_0$ існує керування $\tilde{u}^0 \in \mathbf{U}$, для якого досягається точна нижня межа в (10)

$$\begin{aligned} \inf [L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u, \varepsilon)] &= L(t, \varphi, y, \tilde{u}^0, \varepsilon) v(t, \varphi) + \\ &+ G(t, \varphi, y, \tilde{u}^0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u, \varepsilon) &= 0, \\ v(t, \varphi) &= F(\varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

співпадає з вартістю задачі керування (2)–(5), а оптимальне керування задається співвідношенням (11).

У (12) розкладемо в ряд по величині

$$v(t, \varphi) = v_0(t, \varphi) + \varepsilon v_1(t, \varphi) \dots \quad (13_1)$$

$$L(t, \varphi, y, \tilde{u}^0, \varepsilon) = L_0(t, \varphi, y) + \varepsilon L_1(t, \varphi, y) \dots \quad (13_2)$$

$$G(t, \varphi, y, \tilde{u}^0, \varepsilon) = G_0(t, \varphi, y) + \varepsilon G_1(t, \varphi, y) \dots \quad (13_3)$$

Підставимо (13₁)–(13₃) у (12), прирівняємо до нуля відповідні коефіцієнти при однакових степенях ε . Одержимо

$$\sum_{j=0}^i L_{i-j}(t, \varphi, y) v_j(t, \varphi) + G_i(t, \varphi, y) = 0; \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (14_1)$$

$$v_0(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon); \quad v_i(T, \varphi) = 0; \quad i = 1, 2, \dots \quad (14_2)$$

Оскільки керування u^0 залежить від усіх функціоналів v_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, то в рівностях (13₁)–(13₃) кожний з операторів $L_i(t, \varphi, y)$ і функціоналів $G_i(t, \varphi, y)$ також можуть залежати від v_i , $i = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 1. Нехай оператор $L_i(t, \varphi, y)$ і функціонал $G_i(t, \varphi, y)$ залежать лише від скінченної кількості функціоналів v_j з номерами $j \leq i$.

Тоді співвідношення (14₁)–(14₂) слід розглядати як систему рівнянь для послідовного знаходження функціоналів $v_0, v_1, \dots, v_k$.

Доведення. Якщо функціонал v_0 визначається з рівняння $L_0 v_0 + G_0 = 0$, то функціонал v_1 визначаємо з (14₁), при $i = 1$: $L_0 v_1 + L_1 v_0 + G_1 = 0$. Функціонал v_2 визначаємо з (14₁), при $i = 2$: $L_0 v_1 + L_1 v_0 + L_2 v_2 + G_2 = 0$; ... ; функціонал v_k визначаємо з (14₁), при $i = k$: $\sum_{j=0}^k L_{i-j} v_j + G_k = 0$, що і доводить твердження.

Введемо величину $\delta_k(t, \varphi)$, яка визначається за знайденими $v_0, v_1, \dots, v_k$:

$$\delta_k(t, \varphi, y) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i \left[\sum_{j=0}^i L_{i-j}(t, \varphi, y) v_j(t, \varphi) + G_i(t, \varphi, y) \right] -$$

$$- L(t, \varphi, y, u_k, \varepsilon) Q_k(t, \varphi) - G(t, \varphi, y, u_k, \varepsilon), \quad (15)$$

$$u_k \equiv u^0(t, \varphi, y, Q_k, \varepsilon);$$

$$Q_k \equiv v_0 + \varepsilon v_1 + \dots + \varepsilon^k v_k. \quad (16)$$

З (14₁), (14₂), (15), (16) випливає, що

$$L(t, \varphi, y, u_k, \varepsilon) Q_k(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u_k, \varepsilon) + \delta_k(t, \varphi, y) = 0, \quad (17)$$

$$Q_k(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon). \quad (18)$$

Порівнюючи (17), (18) з (12), одержимо, що u_k — оптимальне керування, а Q_k — функціонал Беллмана допоміжної задачі керування $\{x^u(t, \omega), I_k(u), \mathbf{U}\}$, де

$$I_k(u) \equiv J(u) + E_{0, \varphi_0} \int_0^T \delta_k(s, x_s^u, y) ds.$$

Теорема 2. Якщо $\delta_k(t, \varphi, y) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$, то керування u_k за формулою (17) буде k -им наближенням до оптимального керування $\{x^u(t), J(u), \mathbf{U}\}$, тоді

$$v(\varphi_0) = J(u_k) + o(\varepsilon^{k+1}).$$

Доведення випливає з наслідку 1.

Алгоритм послідовного наближення до оптимального керування задачі $\{x^u(t), J(u), \mathbf{U}\}$:

1. З рівнянь (14₁), (14₂) визначаємо функціонали $v_0, v_1, \dots, v_k$.
2. За формулами (16) визначаємо оптимальне керування u_k .

Зауважимо, що п. 1, п. 2 не вимагають існування оптимального керування, не вимагаємо існування відповідного функціонала Беллмана.

Теорема 3. Нехай функціонал

$$\gamma_k(t, \varphi, y, u, \varepsilon) = L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) Q_k(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u, \varepsilon),$$

рівномірно по $t \in [0, T]$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ і $\|\varphi\| \leq K$ задовольняє

$$|\gamma_k(t, \varphi, y, u_1, \varepsilon) - \gamma_k(t, \varphi, y, u_2, \varepsilon)| \leq K |u_1 - u_2|.$$

Тоді в якості k -го наближення до оптимального керування можна обрати довільне допустиме керування таке, що

$$u = u_k + o(\varepsilon^{k+1}).$$

Доведення. Нехай $u_{1k}(t, \varphi)$ — деяке допустиме керування для якого

$$u_{1k}(t, \varphi) - u_k(t, \varphi) = o(\varepsilon^{k+1}).$$

Тоді для довільного керування $u \in \mathbf{U}$ маємо

$$\begin{aligned} L(t, \varphi, y, u, \varepsilon) Q_k(t, \varphi) + G(t, \varphi, y, u, \varepsilon) + \delta_k(t, \varphi, y) + \\ + \gamma_k(t, \varphi, y, u_{1k}, \varepsilon) - \gamma_k(t, \varphi, y, u, \varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\overline{\delta}_k \equiv \delta_k(t, \varphi, y) + {}_k(t, \varphi, y, u_{1k}, \varepsilon) - {}_k(t, \varphi, y, u, \varepsilon) = 0,$$

$$Q_k(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon).$$

Отже, одержуємо керування u_{1k} в якості оптимального керування $\{x^u(t, \omega), I_k(u), \mathbf{U}\}$, з функціоналом якості у формі (18) із заміною δ_k на $\overline{\delta}_k$.

Якщо $\delta_k(t, \varphi, y) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$, то і $\overline{\delta}_k(t, \varphi, y) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$. Таким чином,

$$0 \leq J(u_{1k}) - v(\varphi_0) = o(\varepsilon^{k+1}).$$

3. Висновки. Досліджуючи реальні динамічні системи, наприклад, енергетичні системи, фінансові ринки, автоматизовані системи управління, доводиться досліджувати поведінку розв'язків систем нелінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з післядією при наявності постійно діючих випадкових збурень. У багатьох випадках неможливо обґрунтовано відмовитись від врахування післядії в математичній моделі, оскільки це призведе до погіршення точності прогнозування і планування. На жаль, математичні моделі, що враховують ефект післядії і постійно діючі випадкові збурення, дуже погано піддаються як якісному так і кількісному аналізу.

Керування стохастичними системами з післядією необхідне для ефективного функціонування складних динамічних систем в умовах невизначеності. А побудова оптимального керування дозволить досягти стабільності, надійності та економічної ефективності. Визначення достатніх умов існування оптимального керування і побудова оптимального керування залишаються актуальними. На жаль, для складних стохастичних динамічних систем оптимальне керування не існує або існує, але одержати його складно. Тому виникає питання про побудову оптимального керування із заданою точністю.

В даній роботі одержана методика побудови синтезу оптимального керування для стохастичних динамічних систем зі всією передісторією з малим параметром і марковськими збуреннями. А також, побудовано алгоритм послідовного наближення ітерацій до оптимального керування.

Список використаної літератури

1. Kolmanovskii V. B., Maizenberg T. L. Optimal control of stochastic hereditary systems. *Prikl. Mat. Mekh.* 1977. Vol. 41, No. 3. P. 31–38.

2. Антонюк С. В., Дорошенко І. В. Алгоритм побудови наближення до оптимального керування квазілінійними стохастичними динамічними системами Іто-Скорохода з малим параметром. *Науковий вісник Чернівецького ун-ту. Комп'ютерні системи та компоненти*. 2013. Вип. 3. С. 48–55.
3. Ясинський В. К., Антонюк С. В. Існування 1-го моменту розв'язку стохастичних динамічних систем Іто-Скорохода випадкової структури з зовнішніми збуреннями та нескінченною післядією. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2020. Вип. 1, № 36. С. 41–54. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).41-54](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).41-54)
4. Антонюк С. В. Достатні умови існування оптимального керування для стохастичних динамічних систем Іто-Скорохода з нескінченною післядією. *Науковий вісник Чернівецького університету. Комп'ютерні системи і компоненти*. 2013. Т. 4, № 1. С. 58–61.
5. Korolyuk V. S., Limnios N. Semi-Markov Random Walk in Poisson Approximation Scheme. *Communications on statistics — Theory and methods*. 2005. Vol. 33, No. 3. P. 507–516. DOI: <https://doi.org/10.1081/STA-120028681>
6. Шайхет Л. Е. Об ε -оптимальном управлении квазилинейными интегральными уравнениями. *Теория случайных процессов*. 1986. Вып. 14. С. 121–130.
7. Friedlin M. I. Markov Processes and Differential Equations: Asymptotic Problems. *Lectures in Mathematics*. ETH Zürich : Birkhäuser. Basel, 1998. 303 p.
8. Chang M.-H. Stochastic control of hereditary systems and applications. New York : Springer New York, 2008. 406 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75816-9>
9. Das A., Lukashiv T. O., Malyk I. V. Optimal Control Synthesis for Stochastic Dynamical Systems of Random Structure with the Markovian Switchings. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49, No. 4. P. 37–47. DOI: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i4.40>
10. Lukashiv T. O., Yasinskaya L. I., Yasinskiy V. K. Synthesis of the Optimal Control for Linear Stochastic Dynamical Systems with Finite Aftereffect and Poisson Disturbances. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2008. Volume 40, Issue 10. P. 22–37. DOI: <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v40.i10.20>
11. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer Berlin : Heidelberg, 1992. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
12. Yin Q.-B., Shu X.-B., Guo Yu., Wang Z.-Y. Optimal control of stochastic differential equations with random impulses and the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. *Optimal Control Applications and Methods*. 2024. No. 5. P. 2113–2135. DOI: <https://doi.org/10.1002/oca.3139>

Antoniuk S. V., Kyrychenko O. L. Approximate structure of optimal control for Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems with small parameters and Markov disturbances.

The technique of construction of synthesis of optimum control for stochastic systems of functional-differential equations with all prehistory with small parameter and Markov disturbances is obtained. It is demonstrated, that the required control can be found as optimum control of some auxiliary problem.

Keywords: Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems, Markov disturbances, optimal control.

References

1. Kolmanovskii, V. B., & Maizenberg, T. L. (1977). Optimal control of stochastic hereditary systems. *Prikl. Mat. Mekh.*, 41(3), 31–38.
2. Antoniuk, S. V., & Doroshenko, I. V. (2013). Algorithm for constructing an approximation to optimal control of quasilinear stochastic dynamical systems of Ito-Skorokhod with a small parameter. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Computer Systems and Components*, 3, 48–55 [in Ukrainian].
3. Yasynskyi, V. K., & Antoniuk, S. V. (2020). Existence of 1-th moment of solution of Ito-Skorokhod stochastic dynamic systems of random structure with external disturbances and all

- prehistory. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 1(36), 41–54. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1\(36\).41-54](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2020.1(36).41-54) [in Ukrainian].
4. Antoniuk, S. V. (2013). Sufficient conditions for the existence of optimal control for stochastic dynamical Ito-Skorokhod systems with infinite aftereffect. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Computer Systems and Components*, 4(1), 58–61 [in Ukrainian].
 5. Korolyuk, V. S., & Limnios, N. (2005). Semi-Markov Random Walk in Poisson Approximation Scheme. *Communications on statistics — Theory and methods*, 33(3), 507–516. <https://doi.org/10.1081/STA-120028681>
 6. Shaikhet, L. E. (1986). On ε -optimal control of quasilinear integral equations. *Theory of random processes*, 14, 121–130 [in Russian].
 7. Friedlin, M. I. (1998). *Markov Processes and Differential Equations: Asymptotic Problems. Lectures in Mathematics*. ETH Zürich: Birkhäuser, Basel.
 8. Chang, M.-H. (2008). *Stochastic control of hereditary systems and applications*. New York: Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75816-9>
 9. Das, A., Lukashiv, T. O., & Malyk, I. V. (2017). Optimal Control Synthesis for Stochastic Dynamical Systems of Random Structure with the Markovian Switchings. *Journal of Automation and Information Sciences*, 49(4), 37–47. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i4.40>
 10. Lukashiv, T. O., Yasinskaya, L. I., & Yasinskiy, V. K. (2008). Synthesis of the Optimal Control for Linear Stochastic Dynamical Systems with Finite Aftereffect and Poisson Disturbances. *Journal of Automation and Information Sciences*, 40(10), 22–37. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v40.i10.20>
 11. Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Berlin: Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
 12. Yi, Q.-B., Shu, X.-B., Guo, Yu., & Wang, Z.-Y. (2024). Optimal control of stochastic differential equations with random impulses and the Hamilton–Jacobi–Bellman equation. *Optimal Control Applications and Methods*, (5), 2113–2135. <https://doi.org/10.1002/oca.3139>

Одержано 20.10.2024

УДК 517.977.8, 517.929

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).18-28](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).18-28)**А. О. Бардан**

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
аспірант кафедри прикладної математики та інформаційних технологій
bardan.andrii@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-3250-2326>

УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ ЗА НАЯВНОСТІ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ

У роботі розглядається задача диференціальної гри переслідування, коли на рух переслідувача і втікача накладені зовнішні малі збурення. Застосовано та обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними для побудови спрощеної системи рівнянь. Досліджено вплив багаточастотних збурень на конфліктно-керований процес. Доведено існування та єдиність розв'язку початкової задачі і побудовано оцінку відхилення розв'язків точної усередненої системи з однаковими початковими умовами на довільному скінченному часовому відрізку $[0, L]$. Розглянуто випадки, коли матриця лінійної частини залежить як від часу, так і від амплітудних змінних. Наведено приклад диференціальної гри «Простий рух», який модифіковано через накладення збурень, та знайдено час завершення переслідування для точної задачі та у випадку зі збуренням. Проаналізовано вплив збурень на існування розв'язку та на час завершення переслідування диференціальної гри.

Ключові слова: диференціальна гра переслідування, багаточастотне збурення, метод усереднення, осциляційний інтеграл, резонанс.

1. Вступ. Одним з важливих та актуальних напрямків досліджень у прикладній математиці є теорія диференціальних ігор, започаткована американським вченим Р. Айзексом [1] у середині XX століття. Її початок та розвиток стимулював численні дослідження з керування процесами, які функціонують у умовах конфлікту та невизначеності.

Значного прогресу в розвитку теорії диференціальних ігор досягли українські вчені. Одними з перших були праці Б. М. Пшеничного [2], які присвячені методам розв'язування ігрових задач зближення-відхилення керованих об'єктів. У дослідженнях А. О. Чикрія, викладених у монографії [3] та багатьох інших його працях, розроблено та впроваджено метод розв'язуючих функцій для дослідження широких класів ігрових задач, а саме для стаціонарних і нестаціонарних конфліктно-керованих процесів, які описуються звичайними і диференціально-різницевиими рівняннями, стохастичними рівняннями та рівняннями з частинними похідними [4–6].

У диференціальних іграх кожен із гравців обирає керування, аналізуючи відому йому інформацію про суперників. Відповідно, дії одного з гравців можуть вплинути на можливі дії інших гравців. Проте у процесі переслідування, як на переслідувачів, так і на втікачів можуть накладатися збурення, які породжені метеорологічними факторами, спричинені внаслідок воєнних дій або іншими, незалежними від гравців чинниками. У багатьох таких задачах збурення є багаточастотними і в процесі еволюції може досягатися резонанс частот, умова якого

$$(k, \omega) := k_1 \omega_1 + \dots + k_m \omega_m = 0,$$

де ω_i — частоти, $k_i \in \mathbb{Z}$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_m| \neq 0$, $m \geq 2$.

У даній праці за допомогою методу усереднення [7] досліджується вплив багаточастотних збурень на конфліктно-керований процес.

2. Постановка задачі. Нехай керування переслідувача задано рівнянням

$$\dot{x} = A_1 x + \varphi_1(u), \quad (1)$$

де x — фазовий вектор, $x \in \mathbb{R}^{n_1} \in D_1$, який складається з геометричних координат, швидкостей і прискорень переслідувача, D_1 , — обмежена область, A_1 — квадратна матриця порядку n_1 , $\varphi_1(u)$ — функція керування, u — параметр керування переслідувача, $u \in U$, U — область керування.

Відповідно керування втікача задається рівнянням

$$\dot{y} = A_2 y + \varphi_2(v), \quad (2)$$

де y — фазовий вектор втікача, $y \in \mathbb{R}^{n_2} \in D_2$, D_2 — обмежена область, A_2 — квадратна матриця порядку n_2 , $\varphi_2(v)$ — функція керування втікача, v — параметр керування втікача відповідно, $v \in V$, V — область керування. Області U та V — непорожні компакти в $\mathbb{R}^{n_1}$ та $\mathbb{R}^{n_2}$ відповідно.

Запишемо рівняння (1), (2) у вигляді одного рівняння

$$\dot{z} = Az + \varphi(u, v), \quad (3)$$

де $z = \text{col}(x, y)$ — фазовий вектор, $A = (A_1, A_2)$ — блочна матриця порядку $n = n_1 + n_2$, $\varphi(u, v) = \text{col}(\varphi_1(u), \varphi_2(v))$ — блок керування.

Нехай задана термінальна множина [3]

$$M^* = M^0 + \varepsilon S, \quad (4)$$

де M^0 — лінійний підпростір в $\mathbb{R}^n$, S — сфера з ортогонального доповнення до M^0 в просторі $\mathbb{R}^n$, параметр $\varepsilon \geq 0$ визначає радіус цієї сфери.

Кожен з гравців обирає керування у вигляді деяких функцій та впливає на процес (3). Переслідувач намагається вивести траєкторію процесу (3) на термінальну множину (4). У свою чергу, мета втікача — уникнути зустрічі траєкторії процесу (3) з термінальною множиною (4), або якомога довше відтягнути момент зустрічі.

У лінійному стаціонарному випадку керування для переслідувача і втікача задається так:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Bx + u, \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \dot{y} &= Cy + v, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \end{aligned}$$

де B і C — квадратні матриці із сталими елементами порядку n_1 і n_2 відповідно.

Подібні системи закладені в основу більшості практичних методів переслідування, таких як погонна крива, паралельне переслідування, переслідування із випередженням [1].

Розглянемо задачу (3) у випадку, коли на рух переслідувача і втікача накладені зовнішні малі збурення. Тоді система рівнянь (3) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = A(t, a, \psi)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi), \quad (5)$$

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \psi), \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y(\tau, a, \psi), \quad (7)$$

де $a \in D$ — вектор амплітудних змінних, D — обмежена область в $\mathbb{R}^{n_k}$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ — вектор фазових змінних, $\tau = \mu t$ — повільний час, μ — малий параметр, $\mu \in (0, \mu_0]$, вектор-функції X, Y, Z — 2π -періодичні за компонентами вектора ψ .

Якщо $m = 1$, то система рівнянь (6), (7) називається одночастотною, для $m > 1$ — багаточастотною. У багаточастотному випадку дослідження і побудова розв'язку системи рівнянь (6), (7) значно ускладнюється внаслідок можливого резонансу частот. Ефективна оцінка похибки методу усереднення, порядок якої $O(\mu^\alpha)$, $0 < \alpha \leq m^{-1}$, для повільних і швидких змінних одержується, якщо $\omega = \omega(\tau)$. Якщо ж $\omega = \omega(\tau, a)$ то ефективна оцінка одержується тільки для амплітудних змінних. Дослідження на скінченному і нескінченному часових інтервалах, якщо задано початкові, багатоточкові або інтегральні умови, викладено в монографії А. М. Самойленка і Р. М. Петришина [7].

Збурення можуть впливати на матриці B і C , якими визначається рух переслідувача і втікача. Тому, в загальному випадку, ці матриці також можуть повільно змінюватись або залежати від амплітудних a і фазових φ змінних.

Для спрощення системи рівнянь (5), (6), (7) побудуємо усереднену за швидкими змінними ψ_v , $v = \overline{1, m}$ задачу, в якій керування залишається без змін. Одержимо значно простішу задачу вигляду

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A_0(t, \bar{a})\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}), \quad (8)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}), \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\mu} + Y_0(\tau, \bar{a}), \quad (10)$$

де $\bar{z}(0) = z_0$, $\bar{a}(0) = a_0$, $\bar{\psi}(0) = \psi_0$.

Вектор-функція A_0 набуває такого вигляду

$$A_0(t, \bar{a}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} A(t, a, \psi) d\psi_1 \dots d\psi_m, \quad \psi_k \in \mathbb{R}^m.$$

Аналогічний вигляд мають вектор-функції Z_0, X_0 та Y_0 .

Розв'язавши задачу Коші для рівняння (9), знаходимо розв'язок $\bar{a}(\tau) = \bar{a}(\tau; a_0)$, що суттєво спрощує рівняння (8). Зі знайденим розв'язком $\bar{a}(\tau) = \bar{a}(\tau; a_0)$, знаходження розв'язку $\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)$, для випадку повільно змінних частот $\omega = \omega(\tau)$, зводиться до задачі інтегрування

$$\bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu) = \psi_0 + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s)}{\mu} + Y_0(s, \bar{a}(s, a_0)) \right) ds.$$

Також значно спрощується рівняння (5), оскільки вектор-функція A_0 і Z_0 не залежить від вектора швидких змінних ψ .

Обґрунтуємо метод усереднення для системи рівнянь (5), (8) для випадку довільно змінних частот $\omega_\nu(\tau)$. Для цього доведемо існування і єдиність розв'язку початкової задачі і побудуємо оцінку розв'язків точної усередненої системи на довільному скінченному часовому відрізку $t \in [0, L]$, якщо початкові умови збігаються. Для цього застосуємо оцінку похибки методу усереднення для системи (6), (7) на асимптотично великому проміжку $[0, L\mu^{-1}]$, яка явно залежить від малого параметра μ [7].

Наведемо відповідну теорему, для цього скористаємось такими позначеннями: $W_p(\tau) - p \times t$ матриця, елементи якої мають вигляд $(\omega_\nu^{(j-1)}(\tau))_{j,\nu=1}^{p,m}$, $p \geq m$, де $\omega_\nu \in C[0, \tau]$, $l \geq p$. $W_p^T(\tau)$ — транспонована до матриці $W_p(\tau)$. Вектор-функція $c(t, a, \psi) := (X(\tau, a, \psi); Y(\tau, a, \psi))$. Якщо $p = m$, то $\det W_m(\tau)$ — визначник Вронського.

Теорема 1. [7] Нехай виконуються умови:

- 1) вектор-функції $c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_1}(D, \sigma_1)$, $\frac{\partial}{\partial \tau} c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_2}(D, \sigma_1)$, $\frac{\partial}{\partial x} c(t, a, \psi) \in C_\psi^{l_3}(D, \sigma_1)$, $\min\{l_1 - 1, l_2, l_3\} \geq m$, $\omega_\nu \in C^l[0, L]$, де $C_\psi^{l_i}(D, \sigma_1)$ — множина функцій, які при кожному фіксованому μ мають неперервні по τ, a, ψ і рівномірно обмежені сталою σ_1 на множині $(t, a, \psi) \in D \times \mathbb{R}^m \times [0, L] \times (0, \mu_0] \equiv D$, частинні похідні до порядку l включно;
- 2) $\det(W_p^T(\tau)W_p(\tau)) \neq 0$ при $\tau \in [0, L]$ і деякому мінімальному $m \leq p \leq l + 1$;
- 3) для всіх $\tau \in [0, L]$, $y \in D_1$ і $\mu \in (0, \mu_0]$ існує єдиний розв'язок рівняння (9) із початковою умовою $a(0, a_0) = a_0$ і крива $\bar{a} = \bar{a}(\tau, \bar{a}_0)$ лежить в області D разом із своїм ρ — околom.

Тоді можна вказати таку незалежну від μ сталу σ_2 , що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $\tau \in [0, L]$, $a_0 \in D_1$, $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ і $\mu \in (0, \mu_0)$ правильна оцінка

$$\|a(\tau, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{a}(\tau, a_0, \mu)\| + \|\psi(\tau, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{\psi}(\tau, a_0, \psi_0, \mu)\| \leq \sigma_2 \mu^{\frac{1}{p}}. \quad (11)$$

3. Випадок залежності матриці A від t . Розглянемо спочатку випадок, коли матриця A залежить від часу t , тоді рівняння (5) матиме вигляд

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi). \quad (12)$$

Відповідно усереднене за швидкими змінними рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A(t)\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}). \quad (13)$$

Теорема 2. Нехай:

- 1) виконуються умови теореми 1 для системи рівнянь (6), (7);
- 2) вектор-функції $Z(\tau, a, \psi)$ із рівняння (12) задовольняє умови 1-3 теореми 1;
- 3) існує єдиний розв'язок рівняння (13) із початковою умовою $\bar{z}(0, \mu) = z_0$ і крива $\bar{z}(t, \mu)$ — лежить в області $D_1 \times D_2$ разом із деяким ρ_2 — околom, $\rho_2 > 0$, для $(t, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_0]$.
- 4) функція φ — неперервна за сукупністю змінних на компактi $U \times V$;
- 5) матриця $A(t)$ — неперервна і $\int_0^L \|A(t)\| dt < \infty$.

Тоді можна вказати таку не залежну від μ , сталу c_3 , що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $t \in [0, L]$, $z_0 \in D_1$, де D_1 — це множина точок області G , які входять в цю область із ρ — околom, і $\mu \in (0, \mu_0]$, правильна оцінка

$$\|z(t, z_0, a_0, \psi_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_3 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Введемо наступне позначення $b_0 := (a_0, \psi_0)$. Із гладкості прaviх частин системи рівнянь (5), (6), (7) впливає існування єдиного розв'язку задачі Коші на деякому інтервалі $(0, t_1)$, $t_1 \leq L$. Тоді із рівнянь (12) і (13) для $t \in (0, t_1)$ одержимо

$$\begin{aligned} z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) &= \int_0^t (A(s)(z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu))) ds + \\ &+ \mu \int_0^t (Z(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu), \psi) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0))) ds = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Для доданку S_2 виконаємо такі перетворення

$$\begin{aligned} S_2 &= \mu \int_0^t (Z(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu), \psi) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0))) ds + \\ &+ \mu \int_0^t (Z_0(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) - Z_0(\mu s, \bar{a}(\mu s, a_0))) ds + \\ &+ \mu \sum_{k \neq 0} \int_0^t (Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi(\mu s, b_0, \mu)))) ds = S_3 + S_4. \end{aligned}$$

Тоді

$$z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) = S_1 + S_3 + S_4.$$

Побудуємо оцінки норми кожного із доданків S_v , $v = 1, 3, 4$. Для S_1 маємо

$$\|S_1\| \leq \int_0^t \|A(s)\| \cdot \|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| ds.$$

На підставі умови 1 із теореми 1 та оцінки (11) одержимо

$$\|S_3\| \leq \mu \int_0^t \|a(\mu s, b_0, \mu) - \bar{a}(\mu s, a_0)\| ds \leq \sigma_3 \sigma_2 \mu t \mu^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_2 \sigma_3 L \mu^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_4 \mu^{\frac{1}{p}},$$

де $\sigma_4 = \sigma_2 \sigma_3 L$.

Для оцінки норми S_4 застосуємо оцінку осциляційного інтеграла, одержану в [7]. А саме, якщо виконуються умови теореми 1 і $f \in C^1[0, L]$, то для досить малого $\mu_0 > 0$ і $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\tau \left(f(s) \exp \left(\frac{i}{\mu} \int_0^s (k, \omega(z)) dz \right) \right) ds \right\| &\leq \\ &\leq \sigma_5 \mu^{\frac{1}{p}} \left(\max_{s \in [0, L]} \|f(s)\| + \frac{1}{\|k\|} \max_{s \in [0, L]} \left\| \frac{df}{ds} \right\| \right). \end{aligned} \tag{14}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\mu \in (0, \mu_0]$, де $\sigma_5 > 0$ і не залежить від μ і k .

Скориставшись інтегральним зображенням рівняння (10), запишемо підінтегральну функцію із S_4 у вигляді

$$\begin{aligned} S_4 &= Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp \left(i \left(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu) + \int_0^s \left(\frac{\omega(z)}{\mu} + \psi(\mu s, b_0, \mu) \right) dz \right) \right) = \\ &= Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu))) \exp \left(i \int_0^s k, \psi(\mu s, b_0, \mu) dz \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{i}{\mu} \int_0^s k, \omega(z) dz \right). \end{aligned}$$

Для норми S_4 одержимо:

$$\|S_4\| \leq \sum_{k \neq 0} \left\| \int_0^\tau \left(f_k(s, \mu) \exp \left(\frac{i}{\mu} \int_0^s (k, \omega(z)) dz \right) \right) ds \right\|,$$

де

$$\begin{aligned} f_k(s, \mu) &= Z_k(\mu s, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi_0(\mu s, b_0, \mu))) \exp \left(i \int_0^s (k, \psi(\mu s, b_0, \mu)) dz \right) \equiv \\ &\equiv Z_k(s, a) \exp(i\xi). \end{aligned}$$

Для норми f_k маємо

$$\|f_k(s, \mu)\| \leq \|Z_k(s, a)\|.$$

Далі знаходимо

$$\frac{df_k}{ds} = \left(\frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial s} + \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial a} X(s, a, \psi) \right) \exp(i\xi) + i Z_k(s, a) (k, Y(s, a, \psi)) \exp(i\xi),$$

і відповідну оцінку

$$\left\| \frac{df_k}{ds} \right\| \leq \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial s} \right\| + \sigma_6 \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial a} \right\| + \sigma_6 \|k\| \cdot \|Z_k\|.$$

Нехай $c_1 = \sigma_5(1 + \sigma_6)$. Застосувавши оцінку (14) одержимо

$$\|S_4\| \leq c_1 \mu^{\frac{1}{p}} \sum_{k \neq 0} \left(\sup_{G_1} \|Z_k(s, a)\| + \frac{1}{\|k\|} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial s} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial a} \right\| \right) \right) \leq c_2 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

де $\mu \in (0, \mu_0]$, $s \in (0, t_1)$, $a \in D$,

$$c_2 = c_1 \sum_{k \neq 0} \left(\sup_{G_1} \|Z_k(s, a)\| + \frac{1}{\|k\|} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial s} \right\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial Z_k(s, a)}{\partial a} \right\| \right) \right).$$

Врахувавши оцінки норм S_v , $v = 1, 3, 4$ на підставі інтегральної нерівності Белмана [8], отримаємо

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq (c_2 + \sigma_4) \mu^{\frac{1}{p}} \exp \left(\int_0^L \|A(s)\| ds \right) \leq c_3 \mu^{\frac{1}{p}}, \quad (15)$$

де $c_3 = (c_2 + \sigma_4) \exp \left(\int_0^L \|A(s)\| ds \right)$.

Одержана оцінка виконується для всіх $s \in [0, t_1]$ і $\mu \in (0, \mu_1]$. Нехай

$$\mu_1 = \min \left(\frac{\rho}{2c_3} \right)^p,$$

тоді розв'язок системи (12) лежить в околі усередненої системи $\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)$ для всіх $t \in [0, L]$, $\mu \in (0, \mu^*]$ і для цих значень виконується оцінка (15).

4. Випадок залежності матриці A від t і a . Розглянемо ще один більш загальний випадок, коли збурення впливають на керування, але матриця A залежить не тільки від часу τ , а також від вектора амплітудних змінних a . Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dt} = A(t, a)z + \varphi(u, v) + \mu Z(\tau, a, \psi). \quad (16)$$

Відповідно усереднене за швидкими змінними рівняння

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = A(t, \bar{a})\bar{z} + \varphi(u, v) + \mu Z_0(\tau, \bar{a}). \quad (17)$$

Обґрунтування методу усереднення задається такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай:*

- 1) виконуються умови теореми 1 для системи рівнянь (6), (7);
- 2) вектор-функції $Z(\tau, a, \psi)$ із рівняння (16) задовольняє умови 1-3 теореми 1;
- 3) існує єдиний розв'язок рівняння (17) із початковою умовою $\bar{z}(0, \mu) = z_0$ і крива $\bar{z}(t, \mu)$ — лежить в області $D_1 \times D_2$ разом із деяким ρ_2 — околom, $\rho_2 > 0$, для $(t, \mu) \in [0, L] \times (0, \mu_0]$.
- 4) функція φ — неперервна за сукупністю змінних на компактi $U \times V$;
- 5) матрична функція $A(t, a) \in C(G)$, $G = [0, L] \times D$ і $A(t, a) \leq M(t)$, скалярна функція $M(\tau)$ неперервна при $\tau \in [0, L]$ і $M(\tau) \geq 0$.

Тоді можна вказати таку не залежну від μ , сталу c_9 , що при досить малому $\mu_0 > 0$ для кожних $t \in [0, L]$, $z_0 \in D_1$, $\mu \in (0, \mu_0]$, виконуватиметься оцінка

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_9 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

де D_1 — це множина точок області D , які входять в цю область із ρ — околom, $b_0 := (a_0, \psi_0)$ — стала, $c_9 > 0$ і не залежить від μ .

Доведення. Із гладкості правої частини рівняння (16) впливає існування єдиного розв'язку $z(t, z_0, b_0, \mu)$ початкової задачі на деякому інтервалі $t \in (0, t_1)$, для кожного $\mu \in (0, \mu_0]$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu) &= \int_0^t (A(s, a)z - A(s, \bar{a})\bar{z}) ds + \\ &+ \mu \int_0^t (Z_0(\mu, a(\mu s, b_0, \mu)) - Z_0(\mu, \bar{a}(\mu s, a_0))) ds + \\ &+ \mu \sum_{k \neq 0} \int_0^t (Z_k(\mu, a(\mu s, b_0, \mu)) \exp(i(k, \psi(\mu s, b_0, \mu)))) ds = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

Оцінки норм доданків S_2 та S_3 відомі із теореми 2:

$$\|S_2\| \leq \mu \int_0^\tau \|a(\mu s, b_0, \mu) - \bar{a}(\mu s, a_0)\| ds \leq \sigma_4 \mu^{\frac{1}{p}},$$

$$\|S_3\| \leq c_2 \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Для оцінки доданку S_1 виконаємо такі перетворення

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t (A(s, a)z - A(s, \bar{a})\bar{z}) ds = \int_0^t (A(s, a)z - A(s, a)\bar{z}) ds + \\ &+ \int_0^t (A(s, a)\bar{z} - A(s, \bar{a})\bar{z}) ds = \int_0^t (A(s, a)(z - \bar{z})) ds + \\ &+ \int_0^t ((A(s, a) - A(s, \bar{a}))\bar{z}) ds = S_4 + S_5. \end{aligned}$$

Побудуємо оцінку доданку S_4 . Згідно з умовою 3

$$\|S_4\| \leq \int_0^t \|A(s, a)\| \cdot \|z - \bar{z}\| ds \leq \int_0^t M(s) \|z - \bar{z}\| ds.$$

Оскільки функція φ — неперервна на компактi $U \times V$, то $\max_{U \times V} \|\varphi(u, v)\| \leq c_4$. Враховуючи обмеження норми вектор-функції z і $z_0 \leq c_5$ одержимо із (17)

$$\begin{aligned} \|\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| &\leq \|z_0\| + \int_0^t (\|A(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| \cdot \|\bar{z}(s, \mu)\|) ds + c_4 t + \\ &+ \mu \int_0^t \|\bar{z}(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| ds \leq c_5 + \int_0^t (M(s) \|\bar{z}(s, \mu)\|) ds + (c_4 + \sigma_7 \mu)t, \end{aligned}$$

де $\|Z(s, \bar{a}(\mu s, a_0))\| \leq \sigma_7$.

Застосувавши інтегральну нерівність [8], одержимо

$$\begin{aligned} \|\bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| &\leq (c_5 + (c_4 + \sigma_7 \mu)t + c_6) \exp \left(\int_0^t M(s) ds \right) \leq \\ &\leq (c_6 + (c_5 + \sigma_7 \mu_0)L + c_6) \exp \left(\int_0^t M(s) ds \right) = c_7. \end{aligned}$$

Тоді оцінка норми S_5 набуває вигляду

$$\|S_5\| \leq n \left(\sum_{v=1}^n \sup \left\| \frac{\partial A^{(v)}(s, a)}{\partial a} \right\| \right) c_7 t c_2 \mu^{\frac{1}{p}} \leq c_8 t \mu^{\frac{1}{p}},$$

де $c_8 = n c_7 t c_2 \left(\sum_{v=1}^n \sup \left\| \frac{\partial A^{(v)}(s, a)}{\partial a} \right\| \right)$, $A^{(v)}$ — стовпець матриці A .

Отже, із оцінок норм S_v , $v = \overline{1, 5}$ випливає

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq \int_0^t M(s) \|z(s, \mu) - \bar{z}(s, \mu)\| ds + c_2 \mu^{\frac{1}{p}} + \sigma_4 \mu^{\frac{1}{p}} + c_8 t \mu^{\frac{1}{p}}.$$

Застосувавши інтегральну нерівність [8], матимемо

$$\|z(t, z_0, a_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq (c_2 + \sigma_4 + c_8 t) \mu^{\frac{1}{p}} \exp \left(\int_0^t M(s) ds \right).$$

Нехай $\mu^* > 0$ таке, що при $\mu < \mu^* \leq \mu_0$ виконується нерівність

$$(c_2 + \sigma_4 + c_8 L) \mu^{\frac{1}{p}} \exp \left(\int_0^L M(s) ds \right) \leq \frac{\rho}{2}.$$

Тоді розв'язок $z(t, z_0, b_0, \mu)$ існує для $t \in [0, L]$ і $\mu \in (0, \mu^*]$ та виконується оцінка

$$\|z(t, z_0, b_0, \mu) - \bar{z}(t, z_0, a_0, \mu)\| \leq c_9 \mu^{\frac{1}{p}},$$

де c_9 — стала, $(c_2 + \sigma_4 + c_8 L) \mu^{\frac{1}{p}} \exp \left(\int_0^L M(s) ds \right)$.

5. Приклад. Розглянемо один з прикладів диференціальної гри, відомий як «Простий рух» [3]. У цьому випадку система диференціальних рівнянь набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad \|u\| \leq \rho, \\ \dot{y} &= v, \quad y \in \mathbb{R}^s, \quad \|v\| \leq \sigma. \end{aligned} \tag{18}$$

Термінальна множина замкнена і має наступний вигляд $M^* : \|x - y\| \leq \varepsilon$. Ціль переслідувача звести траєкторію процесу на цю термінальну множину. Ціль втікача уникнути зустрічі з термінальною множиною, або якомога довше відтягнути момент зустрічі.

Умова Л. С. Понтрягіна [3] виконується якщо $\rho \geq \sigma$. Тоді час переслідування можна визначити з рівняння

$$\|x_1^0 - y_1^0\| = \int_0^t (\rho - \sigma) d\tau + \varepsilon,$$

де x_1^0 і y_1^0 — початковий стан переслідувача та втікача відповідно.

Розв'язавши це рівняння, отримаємо час завершення переслідування для задачі (18)

$$t = \frac{\|x_1^0 - y_1^0\| - \varepsilon}{\rho - \sigma}. \tag{19}$$

З вигляду розв'язку (19) можна зробити очевидний висновок, що час переслідування досягається тоді та тільки тоді, коли $\rho - \sigma > 0$, тобто швидкість переслідувача ρ є більшою за швидкість втікача σ .

Розглянемо модифікацію диференціальної гри «Простий рух» із накладеними деякими збуреннями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \mu(\alpha + \cos \psi), \quad x \in \mathbb{R}^s, \\ \dot{y} &= v + \mu(\beta + \sin \psi), \quad y \in \mathbb{R}^s. \end{aligned} \tag{20}$$

Тоді усереднена за швидкими змінними система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \alpha\mu, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad \|u + \alpha\mu\| \leq \rho, \\ \dot{y} &= v + \beta\mu, \quad y \in \mathbb{R}^s, \quad \|v + \beta\mu\| \leq \sigma. \end{aligned} \tag{21}$$

термінальна множина залишається незмінною $M^* : \|x - y\| \leq \varepsilon$.

В цьому випадку час переслідування для системи (21) одержується з рівняння

$$\|x_1^0 - y_1^0\| = \int_0^t ((\rho + \alpha\mu) - (\sigma + \beta\mu)) d\tau + \varepsilon.$$

Проінтегрувавши, одержимо час завершення переслідування

$$\bar{t} = \frac{\|x_1^0 - y_1^0\| - \varepsilon}{\rho - \sigma + \mu(\alpha - \beta)}. \quad (22)$$

З розв'язку (22), випливає, що час переслідування за наявності збурення $\bar{t}$ існує лише у випадку, коли $\rho - \sigma + \mu(\alpha - \beta) > 0$.

Проаналізувавши розв'язки (19) і (22) можна зробити висновок, що в залежності від значень коефіцієнта збурення μ , та коефіцієнтів впливу на гравців α і β , час завершення переслідування $\bar{t}$ для задачі зі збуренням може набувати різних значень порівняно з часом t аналогічної задачі без збурень (18).

Розглянемо два випадки:

- 1) $\rho - \sigma > 0$, коефіцієнт збурення $\mu > 0$, а коефіцієнт впливу збурення на втікача більший за відповідний коефіцієнт для переслідувача $\alpha > \beta$. Тоді час переслідування зі збуренням буде меншим за час переслідування без збурення, $\bar{t} < t$.
- 2) $\rho - \sigma < 0$, тобто швидкість втікача більша швидкості переслідувача. У такому випадку розв'язку для задачі (18) не існує. Проте модифікація задачі зі збуреннями (21) дозволяє отримати результат (впіймати втікача). Зокрема, якщо $\alpha > \beta$, то втікач буде пійманим, якщо виконується така оцінка $\mu < (\sigma - \rho)/(\alpha - \beta)$.

6. Висновок. У статті розглянуто диференціальну гру переслідування за наявності впливу багаточастотних збурень на переслідувача і втікача. Величина збурення характеризується малим параметром $\mu > 0$. Методом усереднення побудовано спрощену задачу і одержано оцінку похибки, порядок якої $\sqrt[4]{\mu}$, $p \geq m$. Проаналізовано результати переслідування в залежності від величини збурень для диференціальної гри «Простий рух».

Список використаної літератури

1. Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory With Applications to Warfare, Control and Optimization. Dover Publications, 1999. 416 p.
2. Pshenychnyi B. M. ε -Strategies in Differential Games. *Topics in differential games*. 1973. P. 45–99.
3. Chikrii A. O. Conflict-controlled processes. Boston : Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
4. Chikrii A. O., Petryshyn R. I., Cherevko I. M., Bihun Ya. I. Method of Resolving Functions in the Theory of Conflict-Controlled Processes. *Advanced Control Techniques in Complex Engineering Systems*. 2019. Vol. 203. P. 3–33.
5. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Non-stationary Differential-Difference Games of Neutral Type. *Dynamic Games and Applications*. 2019. Vol. 9, No. 3. P. 771–779.
6. Liubarshchuk Ye. A., Bihun Ya. I., Cherevko I. M. Game Problems for Systems with Variable Delay. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, No. 4. P. 18–31.
7. Самойленко А. М., Петришин Р. І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ : Наукова думка, 2004. 474 с.
8. Pachpatte B. Inequalities for Differential and Integral Equations. New York : Academic Press, 1998. 611 p.

Bardan A. O. Averaging in the differential pursuit game problem in the presence of multifrequency disturbances.

The paper considers the problem of the differential game of pursuit, when small external disturbances are imposed on the movement of the pursuer and the escaper. The method of averaging by fast variables was applied and substantiated for creating a simplified system of equations. During the investigation the impact of multi-frequency disturbances on the conflict-driven process was analyzed. The existence and uniqueness of the solution to the initial problem was proved. Furthermore, an estimate of the deviation of the solutions of the exact averaged system with the same initial conditions on an arbitrary finite time interval $[0, L]$ was constructed. Both cases when the matrix of the linear part depends on the slow time and when it depends on the time as well as on the amplitude variables were considered. The differential game "Simple motion" was given as an example, in which it was modified through the imposition of perturbations. The pursuit completion time was found for the origin problem and in the perturbation case. As a result, the influence of perturbations on the existence of a solution and on the completion time of the pursuit in the differential game was analyzed.

Keywords: differential game of pursuit, multi-frequency disturbance, averaging method, oscillatory integral, resonance.

References

1. Isaacs, R. (1999). *Differential games: A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. Dover Publications.
2. Pshenychnyi, B. M. (1973). ε -strategies in differential Games. *Topics in differential games*, 45–99.
3. Chikrii, A. O. (2013). *Conflict-controlled processes*. Boston: Springer Science and Business Media.
4. Chikrii, A. O., Petryshyn, R. I., Cherevko, I. M., & Bihun, Ya. I. (2019). Method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Advanced control techniques in complex engineering systems*, 203, 3–33.
5. Liubarshchuk, Ye. A., Bihun, Ya. I., & Cherevko, I. M. (2019). Non-stationary differential-difference games of neutral type. *Dynamic Games and Applications*, 9(3), 771–779.
6. Liubarshchuk, Ye. A., Bihun, Ya. I., & Cherevko, I. M. (2016). Game problems for systems with variable delay. *Journal of Automation and Information Sciences*, 48(4), 18–31.
7. Samoilenko, A. M., & Petryshyn, R. I. (2004). *Matematychni aspekty teorii nelineynykh kolyvan* [Mathematical aspects of the theory of nonlinear oscillations]. Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
8. Pachpatte, B. (1998). *Inequalities for differential and integral equations*. New York: Academic Press.

Одержано 02.10.2024

УДК 519.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).29-45](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).29-45)**Л. П. Бедратюк**

Хмельницький національний університет,
 професор кафедри інженерії програмного забезпечення,
 доктор фізико-математичних наук, професор
LeonidBedratyuk@khmnu.edu.ua
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6076-5772>

СТРУКТУРА $\mathfrak{sl}_2$ -МОДУЛІВ НА ДІАГРАМАХ ЮНГА

В роботі встановлено явний вигляд трійки лінійних операторів $(\hat{D}_-, \hat{D}_0, \hat{D}_+)$, які визначають дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на векторному просторі $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ діаграм Юнга, що відповідають розбиттям λ довжини n :

$$\begin{aligned}\hat{D}_-(\lambda) &= -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)), \\ \hat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda, \\ \hat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda),\end{aligned}$$

де $\xi_-(\lambda)$ та $\nabla_{\pm}(\lambda)$ є сумами за всіма можливими діаграмами Юнга, отриманими додаванням або вилученням клітинки $\square$ з відповідної діаграми Юнга. Ідея доведення полягала у введенні на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ структури алгебри, ізоморфній алгебрі симетричних многочленів від n змінних; визначення дії $\mathfrak{sl}_2$ на многочленах Шура і в перенесенні цієї дії на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Ключові слова: алгебра Лі $\mathfrak{sl}_2$, зображення алгебри $\mathfrak{sl}_2$, симетричні многочлени, многочлени Шура, діаграми Юнга.

1. Вступ. Нехай $\mathcal{Y}$ — множина всіх фінітних неспадних наборів невід’ємних чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, де $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, а $\mathcal{Y}_n$ — її підмножина яка утворена такими наборами фіксованої довжини n . Такі набори λ називаються розбиттями і геометрично зображуються діаграмами Юнга, див. [1]–[3].

Розглянемо нескінченно вимірний векторний простір $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$, який складається з формальних скінченних сум елементів $\mathcal{Y}$ з раціональними коефіцієнтами. На $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$ можна ввести структуру нескінченно-вимірного зображення комплексної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ яке, у дещо спрощеному вигляді, визначається (див. [4]) такими операторами Керова:

$$\begin{aligned}U\lambda &= \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{Y}} c(\square)\mu, \\ L\lambda &= 2|\lambda|\delta_\lambda, \\ D\lambda &= \sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}} c(\square)\mu,\end{aligned}$$

тобто виконуються такі тотожності

$$[D, U] = L, \quad [L, U] = 2U, \quad [L, D] = -2D.$$

Сумування відбувається за всіма діаграмами Юнга, які отримуються з розбиття λ шляхом додавання, або, відповідно, вилучення клітинки $\square = (i, j)$. Тут

i і j є координатами клітинки, тобто номерами рядка і стовпчика в якому знаходиться $\square$, а $c(\square)$ позначає *контент* цієї клітинки: $c(\square) = j - i$. Більше про оператори Керова та їхнє застосування в [5]. Схожі оператори на диференціальних частково впорядкованих множинах розглядалися в [6].

Позначимо через $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ підпростір в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}$, породжений діаграмами Юнга в яких не більше n рядків. Неважко бачити, що оператор U збільшує кількість рядків діаграми, тому вищезгадані оператори U, L, D уже не визначають $\mathfrak{sl}_2$ -дію на $\mathcal{Y}_n$.

Метою даної роботи є знаходження трійки операторів, які визначають $\mathfrak{sl}_2$ -дію на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Головна ідея роботи полягає в тому, щоб із простору $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ перейти до ізоморфного йому простору симетричних многочленів від n змінних, з якими працювати технічно простіше.

Нехай Λ_n — алгебра симетричних многочленів від n змінних з раціональними коефіцієнтами. Алгебра Λ_n також є нескінченновимірним векторним простором, базисом якого є многочлени Шура s_λ індексовані розбиттями $\lambda \in \mathcal{Y}_n$. Структурні константи $c_{\lambda\mu}^\nu$ алгебри Λ_n називаються *коефіцієнтами Літвулда-Річардсона* і визначають розклад добутку двох многочленів Шура за цим базисом:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu,$$

тут ν пробігає всі розбиття числа $|\lambda| + |\mu|$, $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Якщо ми визначимо операцію множення на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ за таким правилом

$$\lambda \cdot \mu = \sum_{\nu} c_{\lambda,\nu}^\nu v, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathcal{Y}_n,$$

то $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ наділяється структурою комутативної асоціативної алгебри над $\mathbb{Q}$, яка буде ізоморфна алгебрі Λ_n . Образом розбиття λ при цьому ізоморфізмі буде многочлен Шура s_λ .

Головним результатом статті є наступне твердження

Теорема 1. *Трійка лінійних операторів $(\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, D_+)$ на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$, яка так діє на розбиття $\lambda \in \mathcal{Y}_n$*

$$\begin{aligned} \widehat{D}_-(\lambda) &= -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)), \\ \widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda, \\ \widehat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \xi_-(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} \mu, \\ \nabla_{\pm}(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda \pm \square \in \mathcal{Y}_n} c(\square) \mu, \end{aligned}$$

визначає дію алгебри Лі на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Ідея доведення полягає в тому, що спочатку розглядається $\mathfrak{sl}_2$ -дія на Λ_n наступними диференціальними операторами

$$\begin{aligned} D_+ &= x_1^2 \partial_1 + x_2^2 \partial_2 + \cdots + x_n^2 \partial_n, \\ D_0 &= 2(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + \cdots + x_n \partial_n), \\ D_- &= -(\partial_1 + \partial_2 + \cdots + \partial_n), \end{aligned}$$

де $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Далі встановлюється дія цих операторів на многочлени Шура, а саме

$$\begin{aligned} D_-(\mathbf{s}_\lambda) &= - \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} (n + c(\square)) \mathbf{s}_\mu, \\ D_0(\mathbf{s}_\lambda) &= 2|\lambda| \mathbf{s}_\lambda, \\ D_+(\mathbf{s}_\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square) \mathbf{s}_\mu. \end{aligned}$$

Використовуючи згаданий ізоморфізм, ця дія переноситься на алгебру $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$, що і дає нам твердження теореми. При цьому на діаграмах Юнга природно виникають редуковані аналоги вже відомих з [5], [6], [7] операторів ξ та Δ на $\mathcal{Y}$.

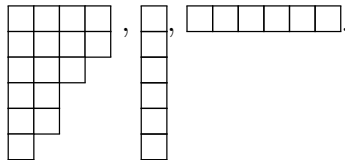
Зауважимо, що дія оператора D_- на многочлени Шура недавно розглядалася в [8], а в [9] дія D_- узагальнена на косі многочлени Шура.

В розділі 1 дано означення діаграм Юнга та операцій на них. В розділі 2 дано означення алгебри симетричних многочленів Λ_n та наведено стандартні базиси в ній. В розділі 3 розглянута дія алгебри Лі на Λ_n і встановлена дія на базисні елементи та породжуючі функції. В розділі 4 дія з Λ_n з переноситься на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та встановлені деякі властивості цієї дії. В розділі 5 представлено нові реалізації $\mathfrak{sl}_2$ -дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, які індукуються $\mathfrak{sl}_2$ -діями на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

2. Діаграми Юнга. Дамо означення необхідних понять.

Розбиттям λ числа $m \in \mathbb{N}$ довжини n називається послідовність невід'ємних чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ таких, що $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ і $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = m$. Множину всіх розбиттів довжини не більше n позначимо через $\mathcal{Y}_n$.

Діаграмою Юнга називається набір клітинок на площині, які розміщені в вирівняних за лівим краєм рядках, причому кількість клітинок в кожному рядку нестрого спадає. Всяке розбиття $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ геометрично зображується у вигляді діаграм Юнга, де λ_i кількість клітинок в i -му рядку. Наприклад, діаграми Юнга для розбиттів $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$, (1^6) і (6) мають такий вигляд



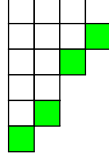
Кожна клітинка $\square$ має координати (i, j) на площині, число $c(\square) = j - i$ називається *контентом* клітинки. Для розбиття $(3, 2, 1)$ координати відповідних клітин та їх вміст показано на діаграмах

0	(1,2)	(1,3)
(2,1)	(2,2)	
(3,1)		

0	1	2
-1	0	
-2		

Внутрішнім кутом діаграми Юнга називається така клітина діаграми, після видалення якої, отриманий набір кліток, залишиться діаграмою Юнга. Якщо клітина є внутрішнім кутом, то нижче неї і праворуч від неї немає клітин діаграми.

Нижче зеленим кольором зображено внутрішні кути діаграми $(4, 4, 3, 2, 2, 1)$:



Зрозуміло, що остання клітинка в i -му рядку діаграми буде внутрішнім кутом, якщо $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. Зокрема клітинка $(1, \lambda_n)$ завжди буде внутрішнім кутом.

Розглянемо два оператори ξ_- і ∇_- на діаграмах Юнга, які "знімають" внутрішні кути:

$$\xi_-(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} \mu,$$

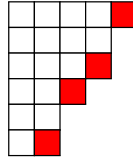
$$\nabla_-(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square)\mu,$$

наприклад

$$\xi_- \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array},$$

$$\nabla_- \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} \right) = 3 \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Зовнішнім кутом діаграми називається така клітинка, що при додаванні її до діаграми Юнга знову отримується діаграма Юнга. Нижче червоним кольором зображено внутрішні кути діаграми Юнга $(4, 4, 3, 2, 2, 1) \in \mathcal{Y}_6$:



Позначимо через $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ векторний простір, який утворений скінченними формальними сумами елементів з $\mathcal{Y}_n$ з раціональними коефіцієнтами:

$$\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n = \{ \alpha_1 \lambda^{(1)} + \alpha_2 \lambda^{(2)} + \dots + \alpha_k \lambda^{(k)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q}, \quad \lambda^{(i)} \in \mathcal{Y}_n \}.$$

Визначимо оператори ξ_+ і ∇_+ на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ які "додають" внутрішні кути до діаграми, не збільшуючи кількість рядків:

$$\xi_+(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} \mu,$$

$$\nabla_+(\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square)\mu.$$

Тепер розглянемо наступні два оператори

$$\begin{aligned}\widehat{D}_- &= -(n\xi_- + \nabla_-), \\ \widehat{D}_+ &= \widehat{\nabla}.\end{aligned}$$

Наша мета — довести що ці два оператори, разом з їхнім комутатором $[\widehat{D}_+, \widehat{D}_-]$, визначають дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathcal{QY}_n$.

3. Симетричні многочлени. Тепер розглянемо алгебру многочленів $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ від n змінних з раціональними коефіцієнтами. Симетрична група S_n діє на цій алгебрі перестановками змінних:

$$\omega \circ f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \dots, x_{\omega(n)}), \omega \in S_n.$$

Многочлени, які не змінюються при цій дії, називаються *симетричними многочленами* і, оскільки, добуток двох симетричних многочленів, знову є симетричним многочленом, то вони утворюють підалгебру $\Lambda_n = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]^{S_n}$, яке називається *алгеброю симетричних многочленів*. В Λ_n розглядають кілька традиційних базисів, встановлення та вивчення співвідношень між якими і є, в значній мірі, предметом теорії симетричних многочленів, див. [1], [2].

3.1. Базиси в Λ_n . Найпростішим прикладом симетричних многочленів є суми всіх можливих добутоків змінних фіксованої довжини

$$e_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad 0 \leq r \leq n, \quad e_0 = 1,$$

які називаються *елементарними симетричними многочленами*. Вони мають породжуючу функцію

$$E(t) = \sum_{r=0}^n e_r t^r = \prod_{i=1}^n (1 + x_i t),$$

і є базисом алгебри Λ_n . Твердження про алгебраїчну незалежність елементарних симетричних функцій називається *основною теоремою* про симетричні функції.

Повний симетричний многочлен h_r визначається як сума всіх різних моноmів степеня r :

$$h_r = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}, \quad 0 \leq r \leq n, \quad h_0 = e_0 = 1,$$

Наприклад для трьох змінних $h_1 = x_1 + x_2 + x_3$ і $h_2 = x_1^2 + x_2 x_1 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2$.

Породжуюча функція

$$H(t) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i t)}.$$

Степеневим симетричним многочленом p_r називається сума r -тих степенів змінних:

$$p_r = x_1^r + x_2^r + \cdots + x_n^r, \quad r \geq 1.$$

Породжуюча функція

$$P(t) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r t^r = \frac{H'(t)}{H(t)}.$$

Нарешті дамо означення многочленів Шура, яке є дещо складнішим технічно. Многочлени f , які при дії перестановки змінюються за правилом $\omega \circ f = (-1)^{|\omega|} f$, де $|\omega|$ — парність перестановки ω , називаються *кососиметричними многочленами*. Кососиметричні многочлени утворюють модуль над Λ_n оскільки добуток симетричного многочлена на кососиметричний буде знову кососиметричним многочленом.

Антисиметризатори мономів $\mathbf{x}^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_n^{\mu_n}$:

$$a_\mu = \sum_{\omega \in S_n} (-1)^{|\omega|} \omega(\mathbf{x}^\mu) = \sum_{\omega \in S_n} (-1)^{|\omega|} x_{\omega(1)}^{\mu_1} x_{\omega(2)}^{\mu_2} \cdots x_{\omega(n)}^{\mu_n},$$

утворюють базис модуля кососиметричних многочленів. Многочлен a_μ можна записати у вигляді визначника

$$a_\mu = \det(x_i^{\mu_j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_2^{\mu_1} & \cdots & x_n^{\mu_1} \\ x_1^{\mu_2} & x_2^{\mu_2} & \cdots & x_n^{\mu_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{\mu_n} & x_2^{\mu_n} & \cdots & x_n^{\mu_n} \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при $\delta = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ отримуємо визначник Вандермонда

$$a_\delta = \det(x_i^{n-j})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Якщо в наборі μ присутні дві однакових компоненти, то тоді многочлен a_μ рівний нулю. Тому для ненульових многочленів можна вважати що, $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_n \geq 0$. Отже, набір μ можна подати у вигляді суми $\mu = \lambda + \delta$, де набір λ вже буде розбиттям.

Симетричний *многочлен Шура* $\mathbf{s}_\lambda = \mathbf{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, який відповідає розбиттю $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, визначається як відношення двох кососиметричних многочленів

$$\mathbf{s}_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}.$$

Наведемо приклади многочленів Шура:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{(1,1,0)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \mathbf{s}_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \\ \mathbf{s}_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Якщо λ пробігає всі розбиття довжини не більше n , то відповідні многочлени Шура утворюють базис Λ_n як нескінченновимірному векторного $\mathbb{Q}$ -простору.

Многочлени Шура є узагальненням всіх інших відомих базисів Λ_n , наприклад у випадку розбиття довжини k $\lambda = (1^k)$ у якого кожна ненульова частина рівна 1, отримуються елементарні симетричні многочлени $\mathbf{s}_{((1^k))} = e_k$. Для розбиття $\lambda = (r) = (r, 0, 0, \dots, 0)$ можна показати, що $\mathbf{s}_{(r)} = h_r$.

3.2. Базиси в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Нехай $\varphi : \Lambda_n \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ ізоморфізм, для якого $\varphi(\mathbf{s}_\lambda) = \lambda$. Зрозуміло, що φ переводить базиси в Λ_n у базиси в $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Для елементарних симетричних многочленів і повних симетричних многочленів маємо

$$\varphi(h_k) = (k) = \underbrace{\square \square \dots \square}_{k \text{ клітин}},$$

і

$$\varphi(e_k) = (1^k) = \left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} k \text{ клітин.}$$

Випадок із симетричними степеневими сумами трохи складніший. Розглянемо такі лінійні комбінації діаграм Юнга

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \square, \\ \pi_2 &= \square \square - \square, \\ \pi_3 &= \square \square \square - \square \square + \square, \\ &\vdots \\ \pi_n &= \underbrace{\square \square \square \dots \square}_{n \text{ клітин}} - \square \square \square \dots \square + \square \square \square \dots \square + \dots + (-1)^{n-1} \underbrace{\square \square \square \dots \square}_{n \text{ клітин}}, \end{aligned}$$

де в елементі π_i всі діаграми містять по i клітин.

Виразимо степеневі суми через многочлени Шура

$$\begin{aligned} p_1 &= s_{(1)}, \\ p_2 &= s_{(2)} - s_{1,1}, \\ p_3 &= s_{(3)} - s_{2,1} + s_{1,1,1}, \\ p_4 &= s_{(4)} - s_{3,1} + s_{2,1,1} - s_{1,1,1,1}. \end{aligned}$$

З [1, Теорема 7.17.1] випливає, що степеневі симетричні многочлени так виражаються через многочлени Шура:

$$p_k = \mathbf{s}_{(k)} - \mathbf{s}_{k-1,1} + s_{k-2,1,1} - \mathbf{s}_{k-3,1,1,1} + \dots + (-1)^{k-1} \underbrace{\mathbf{s}_{1,1,\dots,1}}_k, \quad k \leq n.$$

Отже $\varphi(p_k) = \pi_k$.

4. $\mathfrak{sl}_2$ -дія Λ_n і на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Розглянемо стандартний базис комплексної матричної алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$:

$$\mathfrak{e}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{e}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

з такими комутаційними співвідношеннями

$$[h, \mathfrak{e}_+] = 2\mathfrak{e}_+, \quad [h, \mathfrak{e}_-] = -2\mathfrak{e}_-, \quad [\mathfrak{e}_+, \mathfrak{e}_-] = \mathfrak{h}.$$

Лінійним зображенням (ρ, V) алгебри $\mathfrak{sl}_2$ у векторному просторі V називається гомоморфізм $\rho : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End}(V)$ який зберігає комутатори. В термінології модулів, векторний простір V (можливо нескінченновимірний) називається $\mathfrak{sl}_2$ -модулем, а гомоморфізм ρ називається $\mathfrak{sl}_2$ -дією.

Безпосередня та пряма перевірка показує, що наступні диференціальні оператори (D_-, D_0, D_+) в $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$:

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{e}_+) &= D_+ = x_1^2 \partial_1 + x_2^2 \partial_2 + \dots + x_n^2 \partial_n, \\ \rho(\mathfrak{h}) &= D_0 = 2(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + \dots + x_n \partial_n), \\ \rho(\mathfrak{e}_-) &= D_- = -(\partial_1 + \partial_2 + \dots + \partial_n), \end{aligned}$$

де $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[D_+, D_-] = D_0, \quad [D_0, D_+] = 2D_+, \quad [D_0, D_-] = -2D_-.$$

Отже, вони визначають $\mathfrak{sl}_2$ -дію на алгебрі $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, яка розглядається як нескінченновимірний векторний простір з мономіальним базисом $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Частинні похідні $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n$ входять симетрично у вирази для операторів D_+, D_0, D_- , тому ці оператори є ендоморфізмами і алгебри Λ_n . Отже, звуження ρ на Λ_n також буде $\mathfrak{sl}_2$ -дією.

Можна показати, що *елемент Казимира*, тобто єдиний породжуючий елемент центру універсальної огортуючої алгебри для алгебри $\mathfrak{sl}_2$, цієї дії в координатах має такий вигляд:

$$D_0^2 + 2(D_- D_+ + D_+ D_-) = -4 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \partial_i \partial_j.$$

4.1. Дія на многочлени Шура. Оскільки многочлени Шура

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}},$$

утворюють базис в Λ_n (як нескінченновимірному векторному $\mathbb{Q}$ -просторі), то $\mathfrak{sl}_2$ -дія на многочлени Шура є лінійною комбінацією многочленів Шура.

В наступній теоремі дія операторів D_-, D_0, D_+ на многочлени Шура виражена в цьому базисі.

Теорема 2. *Справедливі наступні співвідношення:*

$$\begin{aligned} (i) \quad D_-(\mathbf{s}_\lambda) &= - \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} (n+c(\square)) \mathbf{s}_\mu, \\ (ii) \quad D_0(\mathbf{s}_\lambda) &= 2|\lambda| \mathbf{s}_\lambda, \\ (iii) \quad D_+(\mathbf{s}_\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square) \mathbf{s}_\mu. \end{aligned}$$

Доведення. (i) Оскільки оператор D_- є диференціюванням алгебри многочленів, то ми маємо

$$D_-(\mathbf{s}_\lambda) = D_- \left(\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \right) = \frac{D_-(a_{\lambda+\delta})a_\delta - a_{\lambda+\delta}D_-(a_\delta)}{a_\delta^2}.$$

За правилом диференціювання визначника знаходимо дію D_- на визначник Вандермонда:

$$\begin{aligned} D_-(a_\delta) &= \\ = & \begin{vmatrix} D_-(x_1^{n-1}) & D_-(x_2^{n-1}) & \dots & D_-(x_n^{n-1}) \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ D_-(x_1^{n-2}) & D_-(x_2^{n-2}) & \dots & D_-(x_n^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + \\ & + \dots + \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки $D_-(x_i^k) = -\partial_i(x_i^k) = -k x_i^{k-1}$, то в кожному з цих визначників, крім останнього, є два пропорційних рядки, а в останньому визначнику є нульовий рядок. Тому диференціювання D_- зануляє визначник Вандермонда і ми отримуємо простіший вираз для дії оператора D_- :

$$D_-(\mathbf{s}_\lambda) = \frac{D_- \left(\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix} \right)}{a_\delta}.$$

Діємо диференціюванням на визначник у чисельнику і отримуємо, враховуючи правило диференціювання визначників, таку суму

$$D_-(a_{\lambda+\delta}) = - \sum_{i=1}^n (n+\lambda_i-i) \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_i+n-i-1} & x_2^{\lambda_i+n-i-1} & \dots & x_n^{\lambda_i+n-i-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що кожен із визначників суми відмінний від нуля лише тоді коли у діаграмі Юнга, яка відповідає розбиттю λ , клітина (i, λ_i) буде внутрішньою клітиною. В протилежному випадку отримується визначник з двома пропорційними рядками. Зауважимо, що $\lambda_i - i$ є контентом $c(\square)$ цієї внутрішньої клітини. Тому, поділивши цю суму на визначник Вандермонда, отримаємо, що

$$D_-(\mathbf{s}_\lambda) = - \sum_{\mu=\lambda-\square \in \mathcal{Y}_n} (n + c(\square)) s_\mu.$$

(ii) Знайдемо тепер дію диференціювання D_+ на визначник Вандермонда. Оскільки $D_+(x_i^k) = kx_i^{k+1}$, то в кожному визначнику суми $D_+(a_\delta)$, крім того, який відповідає диференціюванню першого рядка, будуть пропорційні рядки. Тому в результаті залишиться лише один визначник:

$$D_+ \left(\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right) = (n-1) \begin{vmatrix} x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник є узагальненим визначником Вандермонда. Використавши формулу для його обчислення, див. [10, Лема 2.1], отримуємо

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) a_{\lambda+\delta} = \mathbf{s}_{(1)} a_\delta.$$

Діючи диференціюванням D_+ на многочлени Шура отримуємо

$$D_+(\mathbf{s}_\lambda) = D_+ \left(\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} \right) = \frac{D_+(a_{\lambda+\delta}) a_\delta - a_{\lambda+\delta} D_+(a_\delta)}{a_\delta^2} = \frac{D_+(a_{\lambda+\delta})}{a_\delta} - (n-1) \mathbf{s}_{(1)} \mathbf{s}_\lambda.$$

Вираз $D_+(a_{\lambda+\delta})$ є сумою визначників, які відмінні від нуля лише тоді коли клітина $(i, \lambda_i + 1)$ буде зовнішнім кутом діаграми Юнга λ . Маємо

$$\frac{D_+(\det(x_j^{\lambda_i+n-i}))}{a_\delta} = \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_i + n - i) \det(x_j^{\lambda_i+n-i})}{a_\delta} = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} (n-1 + c(\square)) s_\mu.$$

Згідно правила П'єрі знаходимо $\mathbf{s}_{(1)} \mathbf{s}_\lambda = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} s_\mu$.

Отже, в підсумку, отримуємо

$$D_+(\mathbf{s}_\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square) s_\mu.$$

(iii) Шукаємо дію диференціювання D_0 на визначник Вандермонда

$$\begin{aligned} D_0 \left(\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \right) &= 2((n-1)+(n-2)+\dots+1) \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= n(n-1) a_\delta. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} D_0(\mathbf{s}_\lambda) &= D_0\left(\frac{\det(x_j^{\lambda_i+n-i})}{a_\delta}\right) = \frac{D(\det(x_j^{\lambda_i+n-i}))a_\delta - \det(x_j^{\lambda_i+n-i})D_0(a_\delta)}{a_\delta^2} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n 2(\lambda_i + n - i) \det(x_j^{\lambda_i+n-i})a_\delta - \det(x_j^{\lambda_i+n-i})n(n-1)a_\delta}{a_\delta^2} = 2|\lambda|\mathbf{s}_\lambda. \end{aligned}$$

□

Тепер ми можемо довести Теорему 1.

Доведення. Розглянемо такі оператори на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_-(\lambda) &= - \sum_{\mu=\lambda-\square\in\mathcal{Y}_n} (n + c(\square))\mu, \\ \widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda, \\ \widehat{D}_+(\lambda) &= \sum_{\mu=\lambda+\square\in\mathcal{Y}_n} c(\square)\mu. \end{aligned}$$

які індуковані ізоморфізмом φ і відповідають операторам D_- , D_0 , D_+ з Теорему 2. Виразимо їх через оператори ξ_- , ∇_- , ∇_+ :

$$\begin{aligned} \widehat{D}_- &= -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)), \\ \widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda, \\ \widehat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda). \end{aligned}$$

Оскільки існує ізоморфізм алгебр $\mathcal{Y}_n$ та Λ_n , який переводить многочлен $\mathbf{s}_\lambda$ в розбиття λ , то ці оператори задають $\mathfrak{sl}_2$ -дію на $\mathcal{Y}_n$, що і вимагалось довести в Теоремі 1.

□

4.2. Дія на інші базиси в Λ_n і на породжуючі функції. Як безпосередній наслідок Теорему 2 отримаємо явний вигляд дії операторів D_- , D_0 , D_+ і операторів $\widehat{D}_-$, $\widehat{D}_0$, $\widehat{D}_+$ на різні базиси в Λ_n і $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Теорема 3. *Дія операторів*

1) *на елементарні симетричні многочлени e_i та на відповідні розбиття (1^i) :*

$$\begin{aligned} D_-(e_i) &= -(n - (i - 1))e_{i-1}, & \widehat{D}_-((1^i)) &= -(n - (i - 1))(1^{i-1}) \\ D_0(e_i) &= 2ie_i, & \widehat{D}_0((1^i)) &= 2i((1^i)), \\ D_+(e_i) &= e_1e_i - (i + 1)e_{i+1}, & \widehat{D}_+((1^i)) &= (1) \cdot (1^i) - (i + 1)(1^{i+1}) \\ D_+(e_n) &= e_1e_n, & \widehat{D}_+((1^n)) &= (1) \cdot (1^n). \end{aligned}$$

2) *На повні симетричні многочлени h_i та на відповідні розбиття (i) :*

$$\begin{aligned} D_-(h_i) &= -(n + i - 1)h_{i-1}, & \widehat{D}_-((n)) &= -(n + i - 1)(n), \\ D_0(h_i) &= 2ih_i, & \widehat{D}_0((i)) &= 2i(i) \\ D_+(h_i) &= (i + 1)h_{i+1} - h_1h_i, & \widehat{D}_+((i)) &= (i + 1)(i + 1) - (1) \cdot (i). \end{aligned}$$

3) На степеневі симетричні многочлени p_i та на відповідні розбиття π_i :

$$\begin{aligned} D_-(p_i) &= ip_{i-1}, D_-(p_1) = n, & \widehat{D}_-(\pi_i) &= i\pi_{i-1}, D_-(\pi_1) = n, \\ D_0(p_i) &= 2ip_i, & \widehat{D}_0(\pi_i) &= 2i\pi_i, \\ D_+(p_i) &= ip_{i+1}, & \widehat{D}_+(\pi_i) &= i\pi_{i+1}, \end{aligned}$$

для всіх $1 \leq i \leq n$.

Доведення. З Теорема 2, оскільки симетричні многочлени e_i та h_i є многочленами Шура, які відповідають розбиттям (1^i) і (i) , ми зразу отримаємо, що

$$\begin{aligned} D_-(e_i) &= -(n - (i - 1))e_{i-1} & D_-(h_i) &= -(n + i - 1)h_{i-1} \\ D_0(e_i) &= 2ie_i & D_0(h_i) &= 2ih_i, \\ D_+(e_i) &= e_1e_i - (i + 1)e_{i+1} & D_+(h_i) &= (i + 1)h_{i+1} - h_1h_i, \\ D_+(e_n) &= e_1e_n & D_+(h_n) &= (n + 1)h_{n+1} - h_1h_n. \end{aligned}$$

Результати дії операторів D_-, D_0 зрозумілі, пояснимо отримані вирази для D_+ . За Теоремою 2 маємо, що

$$D_+(\mathbf{s}_\lambda) = \sum_{\mu=\lambda+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square)\mathbf{s}_\mu.$$

Для $\lambda = (1^i)$, $i < n$ отримуємо,

$$D_+(\mathbf{s}_{(1^i)}) = D_+(e_i) = \sum_{\mu=(1^i)+\square \in \mathcal{Y}_n} c(\square)\mathbf{s}_\mu = \mathbf{s}_{2,1,\dots,1} - ie_{i+1}.$$

За правилом П'єрі, маємо

$$e_1e_i = \mathbf{s}_{2,1,\dots,1} + e_{i+1}.$$

Звідси

$$D_+(e_i) = e_1e_i - (i + 1)e_{i+1}.$$

Для випадку $i = n$ маємо $D_+(e_n) = e_1e_n$.

Для повних симетричних многочленів вираз для $D_+(h_i)$ отримується аналогічно. Для на степеневі симетричні многочлени многочлени p_i отримується зразу із означення цих многочленів.

Теорему доведено. □

Знайдемо дію операторів D_-, D_0, D_+ на породжуючі функції цих сімей симетричних многочленів. Має місце наступна теорема

Теорема 4. Нехай $E(t), H(t), P(t)$ – звичайні породжуючі функції для сімей елементарних, повних та степеневих симетричних многочленів, відповідно.

Тоді оператори D_- , D_0 , D_+ діють на них у такий спосіб:

- 1) $D_-(H(t)) = -t(nH(t) + tH'(t)),$
 $D_0(H(t)) = 2tH'(t),$
 $D_+(H(t)) = H'(t) - h_1H(t).$
- 2) $D_-(E(t)) = -t(nE(t) - tE'(t)),$
 $D_0(E(t)) = 2tE'(t),$
 $D_+(E(t)) = e_1E(t) - E'(t).$
- 3) $D_-(P(t)) = -n - t(2P(t) + tP'(t)),$
 $D_0(P(t)) = 2tP'(t),$
 $D_+(P(t)) = P'(t).$

Доведення. Для породжуючої функції повних симетричних многочленів $H(t)$ маємо

$$\begin{aligned} D_-(H(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} D_-(h_i)t^i = -\sum_{i=1}^{\infty} (n+i-1)h_{i-1}t^i = -\sum_{i=1}^{\infty} nh_{i-1}t^i - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} (i-1)h_{i-1}t^i = -nt \sum_{i=0}^{\infty} h_it^i - t^2 \sum_{i=2}^{\infty} (i-1)h_{i-1}t^{i-2} = -ntH(t) - t^2H'(t). \end{aligned}$$

Далі знаходимо

$$D_0(H(t)) = \sum_{i=1}^{\infty} D(h_i)t^i = \sum_{i=1}^{\infty} 2ih_it^i = 2t \sum_{i=1}^{\infty} ih_it^{i-1} = 2tH'(t),$$

і

$$\begin{aligned} D_+(H(t)) &= \sum_{i=0}^{\infty} D_+(h_i)t^i = \sum_{i=0}^{\infty} ((i+1)h_{i+1} - h_1h_i)t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)h_{i+1}t^i - \\ &- h_1 \sum_{i=0}^{\infty} h_it^i = H'(t) - h_1H(t). \end{aligned}$$

Для породжуючих функцій $E(t)$ і $P(t)$ дія на них операторів зображення знаходиться аналогічними міркуваннями. □

Питання про дію на породжуючу функцію для многочленів Шура залишається відкритим, оскільки аналітичний вираз для цієї функції невідомий, див. [11], [12].

5. Нові $\mathfrak{sl}_2$ -дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ і на Λ_n . Ми хочемо отримати нові реалізації $\mathfrak{sl}_2$ -дії в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, використовуючи знайдені $\mathfrak{sl}_2$ -дії в Λ_n . В загальному випадку, розширення диференціювання з підалгебри на алгебру, не завжди можливе. Проте, якщо кількість породжуючих в алгебрі така сама, як і в підалгебрі, то ми можемо продовжити довільне диференціювання на алгебру простим перепозначенням змінних, при деяких умовах.

В наступній теоремі визначаються три нові $\mathfrak{sl}_2$ -дії на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Теорема 5. Наступні відображення $\rho_i : \mathfrak{sl}_2 \mapsto \text{End}(\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n])$ є $\mathfrak{sl}_2$ -діями:

- 1) $\rho_1(\mathfrak{e}_-) = -(n\partial_1 + (n-1)x_1\partial_2 + \dots + 1 \cdot x_{n-1}\partial_n),$
 $\rho_1(\mathfrak{h}) = 2(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \dots + nx_n\partial_n),$
 $\rho_1(\mathfrak{e}_+) = (x_1^2 - 2x_2)\partial_1 + (x_1x_2 - 3x_3)\partial_2 + (x_1x_3 - 4x_4)\partial_3 + \dots + x_1x_n\partial_n.$
- 2) $\rho_2(\mathfrak{e}_-) = -(n\partial_1 + (n+1)x_1\partial_2 + \dots + (2n-1) \cdot x_{n-1}\partial_n),$
 $\rho_2(\mathfrak{h}) = 2(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \dots + nx_n\partial_n),$
 $\rho_2(\mathfrak{e}_+) = (2x_2 - x_1^2)\partial_1 + (3x_3 - x_1x_2)\partial_2 + \dots + ((n+1)H_n - x_1x_n)\partial_n.$
- 3) $\rho_3(\mathfrak{e}_-) = -(n\partial_1 + 2x_1\partial_2 + \dots + n \cdot x_{n-1}\partial_n),$
 $\rho_3(\mathfrak{h}) = 2(x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \dots + nx_n\partial_n),$
 $\rho_3(\mathfrak{e}_+) = x_2\partial_1 + 2x_3\partial_2 + \dots + nP_n\partial_n.$

де $H_n(h_1, h_2, \dots, h_n) = h_{n+1}$ і $P_n(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_{n+1}$.

Доведення. Перепишемо в координатах, відому з Теорема 3 дію на елементарні симетричні многочлени e_i :

$$\begin{aligned}\rho_1(\mathfrak{e}_-) &= -\left(n\frac{\partial}{\partial e_1} + (n-1)e_1\frac{\partial}{\partial e_2} + \dots + 1 \cdot e_{n-1}\frac{\partial}{\partial e_n}\right), \\ \rho_1(\mathfrak{h}) &= 2\left(e_1\frac{\partial}{\partial e_1} + 2e_2\frac{\partial}{\partial e_2} + \dots + ne_n\frac{\partial}{\partial e_n}\right), \\ \rho_1(\mathfrak{e}_+) &= (e_1^2 - 2e_2)\frac{\partial}{\partial e_1} + (e_1e_2 - 3e_3)\frac{\partial}{\partial e_2} + (e_1e_3 - 4e_4)\frac{\partial}{\partial e_3} + \dots + e_1e_n\frac{\partial}{\partial e_n},\end{aligned}$$

Виконавши формальну заміну змінних $e_i \mapsto x_i$, отримаємо твердження 1). Теорема.

Для повних симетричних многочленів ми маємо таку дію або в координатах

$$\begin{aligned}\rho_2(\mathfrak{e}_-) &= -\left(n\frac{\partial}{\partial h_1} + (n+1)h_1\frac{\partial}{\partial h_2} + \dots + (2n-1) \cdot h_{n-1}\frac{\partial}{\partial h_n}\right), \\ \rho_2(\mathfrak{h}) &= 2\left(h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + 2h_2\frac{\partial}{\partial h_2} + \dots + nh_n\frac{\partial}{\partial h_n}\right), \\ \rho_2(\mathfrak{e}_+) &= (2h_2 - h_1^2)\frac{\partial}{\partial h_1} + (3h_3 - h_1h_2)\frac{\partial}{\partial h_2} + \dots + ((n+1)h_{n+1} - h_1h_n)\frac{\partial}{\partial h_n}.\end{aligned}$$

Для того, щоб продовжити диференціювання $\rho_2(\mathfrak{e}_+)$ з Λ_n на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ потрібно виразити h_{n+1} як деякий многочлен H_n від $h_1, h_2, \dots, h_n$ і тоді виконати заміну $h_i \mapsto x_i$.

Аналогічно, для степеневих симетричних многочленів маємо

$$\begin{aligned}\rho_3(\mathfrak{e}_-) &= -\left(n\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_1\frac{\partial}{\partial p_2} + \dots + n \cdot p_{n-1}\frac{\partial}{\partial p_n}\right), \\ \rho_3(\mathfrak{h}) &= 2\left(p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_2\frac{\partial}{\partial p_2} + \dots + np_n\frac{\partial}{\partial p_n}\right), \\ \rho_3(\mathfrak{e}_+) &= p_2\frac{\partial}{\partial p_1} + 2p_3\frac{\partial}{\partial p_2} + \dots + np_{n+1}\frac{\partial}{\partial p_n}.\end{aligned}$$

Для того, щоб продовжити диференціювання $\rho_3(\mathfrak{e}_+)$ з Λ_n на $\mathbb{Q}[(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ потрібно виразити p_{n+1} як многочлен P_n від $p_1, p_2, \dots, p_n$ і тоді виконати заміну $p_i \mapsto x_i$.

Теорему доведено. □

Для невеликих n многочлени H_n і P_n мають вигляд:

$$\begin{aligned} H_2 &= -h_1^3 + 2h_1h_2 \\ H_3 &= h_1^4 - 3h_1^2h_2 + 2h_1h_3 + h_2^2, \\ H_4 &= -h_1^5 + 4h_1^3h_2 - 3h_1^2h_3 - 3h_1h_2^2 + 2h_1h_4 + 2h_2h_3, \\ H_5 &= h_1^6 - 5h_1^4h_2 + 4h_1^3h_3 + (6h_2^2 - 3h_4)h_1^2 + (2h_5 - 6h_2h_3)h_1 - \\ &\quad - h_2^3 + 2h_2h_4 + h_3^2, \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} P_2 &= -\frac{1}{2}p_1^3 + \frac{3}{2}p_2p_1, \\ P_3 &= \frac{1}{6}p_1^4 - p_2p_1^2 + \frac{4}{3}p_3p_1 + \frac{1}{2}p_2^2, \\ P_4 &= -\frac{1}{2}p_1^5 + \frac{5}{12}p_2p_1^3 - \frac{5}{6}p_3p_1^2 + \left(\frac{5}{4}p_4 - \frac{5}{8}p_2^2\right)p_1 + \frac{5}{6}p_3p_2, \\ P_5 &= \frac{1}{120}p_1^6 - \frac{1}{8}p_2p_1^4 + \frac{1}{3}p_3p_1^3 + \left(\frac{3}{8}p_2^2 - \frac{3}{4}p_4\right)p_1^2 + \left(\frac{6}{5}p_5 - p_3p_2\right)p_1 - \\ &\quad - \frac{1}{8}p_2^3 + \frac{1}{3}p_3^2 + \frac{3}{4}p_4p_2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що ρ_1, ρ_2, ρ_3 вже не будуть $\mathfrak{sl}_2$ -діями на Λ_n .

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі знайдено явний вигляд трійки операторів $\mathfrak{sl}_2$ -дії на векторному просторі діаграм Юнга $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та просторі симетричних многочленів. Показано, що, використовуючи ізоморфізм між $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ та алгеброю симетричних многочленів Λ_n , можна перенести дію алгебри Лі $\mathfrak{sl}_2$ з Λ_n на $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

В майбутньому планується застосувати запропонований підхід і використати інші відомі симетричні дії $\mathfrak{sl}_2$ на $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ з метою перенесення їх на простір діаграм Юнга $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$. Основна технічна проблема, яка тут виникатиме, це знаходження дії диференціальних операторів, які реалізують відповідне зображення $\mathfrak{sl}_2$, на многочлени Шура.

Основні результати роботи мають застосування в теорії зображень та комбінаториці, зокрема в дослідженні структурних властивостей алгебр симетричних функцій та операторів на диференціальних частково впорядкованих множинах.

Список використаної літератури

1. Stanley R. Enumerative Combinatorics. Volume 2. Cambridge : Cambridge University Press, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589>
2. Macdonald I. G. Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd Edition. Oxford University Press : New York, 1995. 486 p. DOI: <https://doi.org/10.1093/oso/9780198534891.001.0001>
3. Fulton W. Young Tableaux. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626241>

4. Okounkov A. $SL(2)$ and z -measures. Random matrix models and their applications. Bleher P. M. and Its A. R. (eds.). Mathematical Sciences Research Institute Publications 40. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2001. pp. 407–420. URL: <https://zbmath.org/0985.43007> (date of access: 13.04.2024).
5. Petrov L. $\mathfrak{sl}(2)$ operators and Markov processes on branching graphs. *Jour. Algebr. Comb.* 2013. Vol. 38, No. 3. P. 663–720. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10801-012-0420-y>
6. Stanley R. Differential posets. *Journal of the American Mathematical Society*. 1988. Vol. 1, No. 4. P. 919–961.
7. Nenashev G. Differential operators on Schur and Schubert polynomials. Mathematics — Combinatorics. e-Print. 2005. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.08329>
8. Weigandt A. Derivatives and Schubert Calculus. Talk at FPSAC conference 2023. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=fgzB7YjGOEc> (date of access: 13.04.2024).
9. Grinberg D., Kornichuk N., Molokanov K., Khomych S. The diagonal derivative of a skew Schur polynomial. Mathematics — Combinatorics. e-Print. 2024. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.14217>
10. Ernst T. Generalized Vandermonde determinants. *U. U. D. M. Report 2000:6*. 2000. URL: <https://solnaschack.org/ernst/sep1.pdf> (date of access: 14.04.2024).
11. Stanley R. The character generator of $SU(n)$. *Journal of Mathematical Physics*. 1980. Vol. 21, No. 9. P. 2321–2326. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.524687>
12. Бедратюк Л. П. Породжуюча функція для многочленів Шура. *Буковинський математичний журнал*. 2022. Т. 10, № 1. С. 41–50. DOI: <https://doi.org/10.31861/bmj2022.01.04>

Bedratyuk L. P. The structure of $\mathfrak{sl}_2$ -modules on the Young diagrams.

This paper establishes the explicit form of derivatives $(\widehat{D}_-, \widehat{D}_0, \widehat{D}_+)$ that define the action of the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$ on the vector space $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ of Young diagrams corresponding to partitions λ of length n :

$$\begin{aligned}\widehat{D}_-(\lambda) &= -(n\xi_-(\lambda) + \nabla_-(\lambda)), \\ \widehat{D}_0(\lambda) &= 2|\lambda|\lambda, \\ \widehat{D}_+(\lambda) &= \nabla_+(\lambda),\end{aligned}$$

where $\xi_{\pm}(\lambda)$ and $\nabla_{\pm}(\lambda)$ are sums over all possible Young diagrams obtained by adding or removing a cell $\square$ from the corresponding Young diagram. The proof involves introducing an algebra structure on $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$ isomorphic to the algebra of symmetric polynomials in n variables, defining the $\mathfrak{sl}_2$ action on Schur polynomials, and transferring this action to $\mathbb{Q}\mathcal{Y}_n$.

Keywords: Lie algebra $\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{sl}_2$ -representation, symmetric polynomials, Schur polynomials, Young diagrams

References

1. Stanley, R. (2001). *Enumerative Combinatorics. Volume 2*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511609589>
2. Macdonald, I. G. (1995). *Symmetric Functions and Hall Polynomials. 2nd Edition*. Oxford: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198534891.001.0001>
3. Fulton, W. (1997). *Young Tableaux*. Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626241>
4. Okounkov, A. (2001). $SL(2)$ and z -measures. Random matrix models and their applications. Bleher, P. M., & Its, A. R. (eds.). *Mathematical Sciences Research Institute Publications 40*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. Retrieved from <https://zbmath.org/0985.43007>
5. Petrov, L. (2013). $\mathfrak{sl}(2)$ operators and Markov processes on branching graphs. *J. Algebr. Comb.*, 38(3), 663–720. <https://doi.org/10.1007/s10801-012-0420-y>
6. Stanley, R. (1988). Differential posets. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(4), 919–961.
7. Nenashev, G. (2005). Differential operators on Schur and Schubert polynomials. Mathematics — Combinatorics. e-Print. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2005.08329>

8. Weigandt, A. (2023). Derivatives and Schubert Calculus. Talk at FPSAC conference 2023. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=fgzB7YjGOEc>
9. Grinberg, D., Korniichuk, N., Molokanov, K., & Khomych, S. (2024). The diagonal derivative of a skew Schur polynomial. *Mathematics — Combinatorics*. e-Print. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.14217>
10. Ernst, T. (2000). Generalized Vandermonde determinants. *U. U. D. M. Report 2000:6*. Retrieved from <https://solnaschack.org/ernst/sep1.pdf>
11. Stanley, R. (1980). The character generator of $SU(n)$. *Journal of Mathematical Physics*, 21(9), 2321–2326. <https://doi.org/10.1063/1.524687>
12. Bedratyuk, L. P. (2022). Generating function for Schur polynomials. *Bukovinian Mathematical Journal*, 10(1), 41–50. <https://doi.org/10.31861/bmj2022.01.04> [in Ukrainian].

Одержано 05.07.2024

UDC 512.56

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).46-55](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).46-55)**V. M. Bondarenko¹, M. V. Styopochkina²**

¹ Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
 Leading researcher of the department of algebra and topology,
 Doctor of physical and mathematical sciences
vitalij.bond@gmail.com
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Polissia National University,
 Associate professor of the department of higher and applied mathematics,
 Candidate of physical and mathematical sciences
stmar@ukr.net
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7270-9874>

ON MINIMAL MINIMAX SYSTEMS OF GENERATORS FOR POSITIVE POSETS

The representations of partially ordered sets (abbreviated: posets), introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter (in matrix form) in 1972, play an important role in the modern representation theory and its applications. Yu. A. Drozd proved in 1974 that a poset S has finite representation type over a field if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

is weakly positive (i.e., positive on the set of non-negative vectors), but this statement is not true, unlike the case of the quivers, when considering the positive quadratic forms. Hence the posets with positive Tits quadratic forms aroused great interest from various points of view as analogs of Dynkin diagrams. In 2005 the authors described up to isomorphism all posets with positive Tits quadratic form. The basic method for solving this problem is so-called minimax equivalence method proposed by the first author. Recently he introduced some concept (namely, minimax system of generations) with consideration of the corresponding examples, which can be considered as the emergence of a new theory, which study combinatorial properties of posets with respect to minimax equivalence.

In this paper we study from such new point of view the posets with positive Tits quadratic form (which are called positive posets).

Keywords: positive quadratic form, Tits quadratic form, positive poset, minimax equivalence and isomorphism, minimax system of generators.

1. Introduction. When studying the representations of quivers, P. Gabriel [1] introduced a quadratic form of a (finite) quiver Q . This form was called the *Tits quadratic form of the quiver Q* . P. Gabriel proved that the quiver Q is of finite representation type over a field k if and only if its Tits quadratic form is positive. This Gabriel's result laid the foundations of a new direction in the representation theory dealing with the investigation of the relationships between the properties of representations of various objects and the properties of quadratic forms associated with these objects.

In [2], Yu. A. Drozd showed that a (finite) poset S is of finite representation type if and only if its Tits quadratic form

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

is weakly positive, i.e. positive on the non-zero vectors with non-negative coordinates (representations of posets were introduced by L. A. Nazarova and A. V. Roiter in [3]). In contrast to the quivers, the posets with weakly positive and with positive Tits forms do not coincide. Since the connected quivers having positive Tits quadratic form coincide with the quivers whose underlying graphs are (simply faced) Dynkin diagrams [1], the posets with positive Tits form are analogs of the Dynkin diagrams. Therefore investigation related to posets with positive Tits form are important. In [4], [5] the authors classified the posets with positive Tits quadratic form and the minimal posets with non-positive Tits form.

In solving the specified problems, a method based on the notion of minimax equivalence of posets was used (see [6]). In [7] the first author introduced some concept (namely, minimax system of generations) with consideration of the corresponding examples, which can be considered as the emergence of a new theory, which study combinatorial properties of posets with respect to minimax equivalence.

In this paper we study from the new point of view the posets with positive Tits quadratic form. Such posets are called *positive*.

The first author is supported by a grant from the Simons Foundation (1030291, 1290607, V.M.B.).

2. Preliminaries.

2.1. Definitions on posets. Throughout the paper, all posets are finite of order $n > 0$ without an element 0. A poset T is called *dual* to a poset S and is denoted by S^{op} if $T = S$ as usual sets and $x < y$ in T if and only if $x > y$ in S . If S and S^{op} are isomorphic, the poset S is called *self-dual*. T and S are called *anti-isomorphic* if T and S^{op} are isomorphic.

By a subposet we always mean a full one, and singletons are identified with the elements themselves. Sometime (in definitions or statements) we admit empty posets which are or may be later subposets of some posets.

A poset S is called a *sum of subposets* $A_1, A_2, \dots, A_m$ and write $S = A_1 + A_2 + \dots + A_m$, if $S = \cup_{i \in S} A_i$ and $A_i \cap A_j = \emptyset$ for each i and $j \neq i$. If any two elements of different summands are incomparable, the sum is called *direct* and is denoted in this case also by $\coprod$ instead of $+$.

A sum $S = A + B$ with $A, B \neq \emptyset$ is said to be *left* (resp. *right*) if $a < b$ (resp. $b < a$) for some $a \in A, b \in B$ and there is no $a' \in A, b' \in B$ such that $a' > b'$ (resp. $b' > a'$). Both left and right sums are called *one-sided*. A sum $S = A + B$ is called *two-sided* if $a < b$ for some $a \in A, b \in B$ and $b' < a'$ for some $a' \in A, b' \in B$. Finally, a one-sided (left or right) or two-sided sum $S = A + B$ is called *minimax* if $x < y$ with x and y belonging to different summands implies that x is minimal and y maximal in S .

2.2. Positive posets. Let S be a poset. The *Tits quadratic form* of S is by definition the following quadratic form $q : \mathbb{Z}^{|S|+1} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$q = q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

(see [2]). Here $\mathbb{Z}$ denotes the set of integer numbers and $\mathbb{Z}^{|S|+1}$ consists of the integer vectors (z_i) with $i \in 0 \cup S$. The poset S is called *positive* if so is its Tits quadratic form.

The positive posets were first described in [4] (for posets of width two) and [5] (in general case). They can be of two types: serial and non-serial.

A positive poset S is called *serial* if for any $m \in \mathbb{N}$, there is a positive poset $S(m) \supset S$ such that $|S(m) \setminus S| = m$, and *non-serial* otherwise. There are 108 non-serial positive posets up to isomorphism and duality [5, Table 1] (see also below Section 5).

Now formulate two theorems on positive serial posets (see [4], [5] and also [7]).

A linear ordered set with $n \geq 0$ elements is called a *chain of length n* . A poset of the form $a_1 < \dots < a_p < \{b, c\} < d_1 < \dots < d_q$ ($p, q \geq 0$) with one pair of incomparable elements is called an *almost chain of length $n = p + q + 1$* .

Theorem 1. *A poset T is serial positive if and only if it is isomorphic to one of the following poset S :*

- (1) S is a direct sum of a chain of length $k \geq 0$ and a chain of length $s \geq 1$, where $k \leq s$;
- (2) S is a left minimax sum of two chains of lengths $k \geq 1$ and $s \geq 1$, where $k + s > 3$;
- (3) S is a direct sum of a chain of length $k \geq 0$ and an almost chain of length $s \geq 1$, where $k + s > 1$.

Moreover, all these posets are pairwise non-isomorphic.

Theorem 2. *Any positive poset of order $n < 5$ or $n > 7$ is serial.*

3. Main results.

3.1. Minimax equivalence of posets. This concept was introduced by the first author in [6] and studied in detail in [5].

For a poset S and its minimal (resp. maximal) element a , let us $T = S_a^\uparrow$ (resp. $T = S_a^\downarrow$) denotes the following poset: $T = S$ as usual sets, $T \setminus a = S \setminus a$ as posets, the element a is maximal (resp. minimal) in T , and a is comparable with x in T if and only if they are incomparable in S . Two posets S and T are called (min, max)-*equivalent* if there are posets $S_1, \dots, S_p$ ($p \geq 0$) such that, if we put $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then, for every $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$ or $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$. Obviously, any poset is (min, max)-equivalent to itself (if one put $p = 0$). Since some time we also use the term *minimax equivalence*.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of *minimax isomorphism*: posets S and S' are minimax isomorphic if there exists a poset T which is minimax equivalent to S and isomorphic to S' .

In the case when for every $i = 0, 1, \dots, p'$ one has $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$, T and S are called *min-equivalent*.

Proposition 1. *The following conditions are equivalent:*

- (1) T and S are (min, max)-equivalent;
- (2) T and S are min-equivalent.

In a similar way one can define the notion of max-equivalence.

3.2. Minimax systems of generators. The concept of such systems of generators was introduced by the first author in [7].

Let $\mathcal{K}$ be a class of finite posets closed under isomorphism and duality (or, equivalently, isomorphism and anti-isomorphism), and let $U = \{U_i\}$ be a set of posets $U_i \in \mathcal{K}$ with i running through a (finite or infinite) set I . The set U is called

a *minimax system of generators* of $\mathcal{K}$ if any $X \in \mathcal{K}$ is minimax isomorphic to a poset U_i for some $i \in I$. In the case when any proper subset of U is not a minimax system of generators, the system of generators U is called *minimal*. The system U is called *self-dual* if so are all U_i .

Example. From [5, Theorem 2] it follows that the minimal posets with non-positive Tits quadratic form (which are called *P-critical*) has a self-dual minimal minimax system from 5 generators, consisting of the Kleiner posets [8].

3.3. Formulations of the main theorems. Recall that the Hasse diagram of a poset S is a type of diagram that represents S in the plane. Namely, for a poset S one represents each element of S as a vertex and each pair of elements x, y of S , such that y covers x (i. e. $x < y$ and there is no z satisfying $x < z < y$), as an edge (a line segment or curve) that goes upward from x to y . We call a poset S *quasi-chained* if $H(S)$ is a chain.

Theorem 3. *The classes of serial and non-serial positive posets have minimax systems of quasi-chained generators. Moreover, one can assume that each generator is of width 2 or self-dual.*

Theorem 4. *The class of serial positive posets of even order has a self-dual minimax system of quasi-chained generators, but the class of those of odd order does not have.*

Theorem 5. *The class of non-serial positive posets does not have a self-dual minimax system of quasi-chained generators.*

Theorem 6. *The class of non-serial positive posets has a minimax system of quasi-chained generators of width 3, but the class of serial ones does not have.*

Under proving these theorems, in each case when (by the formulation of some theorem) the indicated system exists we even indicate such a minimal system.

4. Proofs of the theorems.

4.1. The case of serial posets. Let S be a serial poset (see Theorem 1). From the definition of $S_x^\uparrow$ we have the following statements:

(4.1.1) if S is of the form (1), $S := S_{1ks} = \{a = a_1 < \dots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \dots < b_s\}$, then (when $k \neq 0$) $S_a^\uparrow \cong S_{1,k-1,s+1}$ and $S_b^\uparrow \cong S_{1,k+1,s-1}$;

(4.1.2) if S is of the form (2), $S := S_{2ks} = \{a = a_1 < \dots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \dots < b_s\}$ with $a_1 < b_s$, then $S_a^\uparrow$ is isomorphic to the poset $\{a_2 < \dots < a_k\} \coprod \{b_1 < \dots < b_{s-1} < (b_s, a_1)\}$ of the form (3) (or to $S(3, k-1, s, s-1)$ in the notation of (4.1.3)) and (when $s > 1$) $S_b^\uparrow \cong S_{2,k+1,s-1}$;

(4.1.3) if S is of the form (3), $S := S_{3kst} = \{a = a_1 < \dots < a_k\} \coprod \{b = b_1 < \dots < b_t < (c, d) < b_{t+1} < \dots < b_{s-1}\}$, then (when $k \neq 0$) $S_a^\uparrow \cong S_{3,k-1,s+1,t}$, $S_b^\uparrow \cong S_{3,k+1,s-1,t-1}$ when $t \neq 0$ and $S_c^\uparrow \cong S_{2,s,k+1}$ when $t = 0$.

A simple analysis shows that these statements (with using the min-equivalence by Proposition 1) imply that

(4.1.4) the posets $S_{1,0,n}$ with n running through $\mathbb{N}$ and $S_{2,1,m}$ with m running through $\mathbb{N} \setminus 1$ form a minimal minimax system of quasi-chained generators of the class of serial positive posets;

(4.1.5) the posets $S_{1,0,2n}$ with n running through $\mathbb{N}$ and $S_{2,n,n}$ with n running through $\mathbb{N} \setminus 1$ form a minimal self-dual minimax system of quasi-chained generators of the class of serial positive posets of even order;

(4.1.6) for any fixed $n > 0$, the poset $S_{2,1,2n+1}$ is not minimax isomorphic to a self-dual quasi-chained posets.

(4.1.7) for any fixed $m > 0$, the poset $S_{1,0,m}$ is not minimax isomorphic to a poset of width 3.

Obviously, the first part of Theorem 3 (for serial posets) follows from (4.1.4), Theorem 4 follows from (4.1.5) and (4.1.6), the second part of Theorem 5 follows from (4.1.6), and the second part of Theorem 6 follows from (4.1.7).

4.2. The case of non-serial posets. Consider now the case of non-serial posets using the language of Hasse diagrams. Such posets were classified by the authors in [5]; see below the corresponding table in Section 5. We will refer to this table in following the following discussion, calling it Main table.

Proposition 2. *All posets of Main table are divided on 8 classes with respect to minimax isomorphism:*

- (I) 1, 2, 3, $\bar{4}$, 46, 47, $\bar{49}$;
- (II) 5, 48, $\bar{50}$;
- (III) 6, 7, 8, 9, 10, 11, $\bar{12}$, 13, 51, 52, 53, 54, 57, 60, $\bar{61}$;
- (IV) 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 55, 56, 58, 59, $\bar{62}$, $\bar{63}$, 64, $\bar{65}$, $\bar{66}$, 67;
- (V) 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, $\bar{28}$, 29, 30, 68, 69, 70, 71, 76, 77, 79, 87, $\bar{88}$, 89;
- (VI) 31, 32, 36, 37, 40, 41, 43, 72, 74, 80, 81, 82, 86, $\bar{90}$, $\bar{92}$, 94, 96, $\bar{98}$, 99, 103, 108;
- (VII) 33, 34, 35, 38, 39, 42, 44, 73, 75, 78, 83, 84, 91, 93, $\bar{95}$, 97, $\bar{100}$, $\bar{102}$, 104, 106, 107;
- (VIII) 45, 85, $\bar{101}$, 105.

The upper underlined posets (and only they) are quasi-chained.

This statement follows from the result of the paper in [5], but some explanations are required.

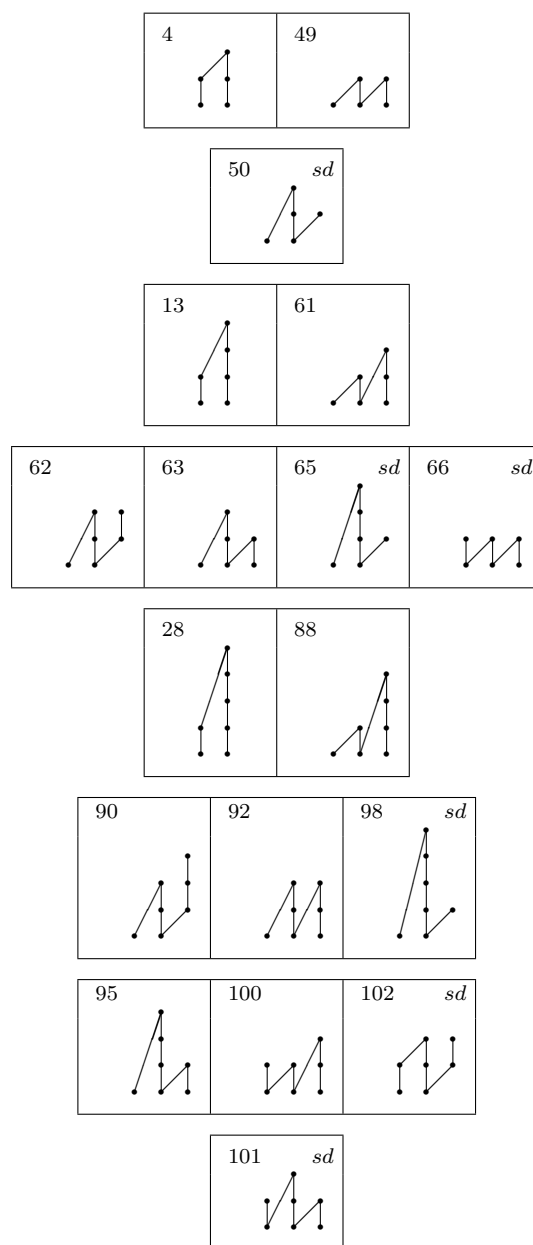
If one uses the terminology of Subsection 3.2, in [5] the authors show that the set of posets of width two $M = \{1, 5, 6, 14, 21, 31, 33, 45\}$ together with the set M^{op} (consisting of their duals) form a minimal minimax system of generators for all non-serial positive posets. Moreover, from the proofs in [5] it follows that each poset of Main table and its dual are minimax isomorphic to the same poset of M . In other words, each class minimax isomorphism is closed under duality. Therefore, the set M itself is a minimal minimax system of generators for the non-serial positive posets.

From all that has been said it follows that if one writes out all non-serial positive posets not only with accuracy up to isomorphism, but also with accuracy to duality (Main table is exactly this), then it is correct to consider classes of minimax isomorphism with accuracy to duality too.

But in the case when the classes are considered up to duality and we want to make sure that some property is not satisfied for posets of some class, then this property must be closed under duality. All property of non-serial positive posets that will be considered below will satisfy this requirement by silence.

It is easy to see that the sets $QC(I) \dots QC(VIII)$ of quasi-chained posets of

the classes (I) ... (VIII) consist of, respectively, the following ones (the symbol *sd* denotes self-dual posets):



From the description of the sets $QC(I), \dots, QC(VIII)$ the next statements follow:

(4.2.1) for $N = I, IV, VI$, the sets $QC(N)$ contain quasi-chained posets of width 2, and for the rest N contain self-dual quasi-chained posets;

(4.2.2) there is not such N that the set $QC(N)$ contains both a quasi-chained poset of width 2 and a self-dual quasi-chained poset;

(4.2.3) every set $QC(N)$ contains a quasi-chained poset of width 3.

Obviously, the second part of Theorem 3 (for non-serial posets) follows from (4.2.1), Theorem 5 follows from (4.2.2), and the first part of Theorem 6 follows from (4.2.3).

Thus, Theorems 3–6 are proved in both serial and non-serial cases.

The method we proposed allows to establish other properties of positive and not only positive posets.

5. Table of all non-serial positive posets up to isomorphism and duality from the paper [5]. For aesthetic reason, the posets 12 and 13 are arranged in the below table in opposite order.

1 	2=1' sd 	3 	4 	5 	6
7=6' 	8 	9=8' sd 	10 	11 	12
13 	14 	15=14' sd 	16 	17=16' 	18
19=18' 	20 sd 	21 	22=21' 	23=21'' sd 	24
25=24' sd 	26 	27 	28 	29 	30
31 	32=31' 	33 	34=33' 	35=33'' 	36
37=36' 	38 	39=38' 	40 	41=40' 	42
43 	44 	45 	46 sd 	47 	48 sd
49 	50 sd 	51 sd 	52 	53=52' sd 	54
55 	56 	57 	58 sd 	59 	60

61	62	63	64	65 <i>sd</i>	66 <i>sd</i>
67	68 <i>sd</i>	69	70=69'	71	72
73	74	75 <i>sd</i>	76	77=76' <i>sd</i>	78
79	80 <i>sd</i>	81	82=81' <i>sd</i>	83	84=83'
85 <i>sd</i>	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98 <i>sd</i>	99	100	101 <i>sd</i>	102 <i>sd</i>
103	104	105	106	107	108

Some remarks on the table.

In upper right corners the symbol *sd* means that the corresponding poset is self-dual.

If a poset i has width 2 and the table writes $i = j'$, this means that i can be obtained from j by replacing its only maximal point with its only new minimal point. Note that these two posets are (min, max)-isomorphic. The same applies to the case $i = j'' = (j')'$ (it is needed to compare the posets i and j'). If the poset i has width 3 and the table writes $i = j'$, this means that the above applies not to the posets i and j themselves, but to their connected components of width 2. Note that here i and j are (min, max)-isomorphic too. The same applies to the case $i = j''$.

Arbitrary posets S and T , which are obtained from each other using similar operations are called *0-isomorphic*. And if we remove from the table the posets with numbers $i = j'$ and $i = j''$, we obtain a description of non-serial positive posets up

to 0-isomorphism and duality.

6. Conclusions. Recently the first author introduced some concept with consideration of the corresponding examples, which can be considered as the emergence of a new theory on combinatorial properties of posets with respect to minimax equivalence. In this paper we study from such new point of view the posets with positive Tits quadratic form (which are called positive posets). The received results can be generalized to other classes of posets.

References

1. Gabriel, P. (1972). Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripts Math.*, 6, 71–103. <https://doi.org/10.1007/BF01298413>
2. Drozd, Yu. A. (1974). Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funkts. Anal. Prilozh.*, 8(3), 219–225. <https://doi.org/10.1007/BF01075695> [in Russian].
3. Nazarova, L. A., & Roiter, A. V. (1972). Representations of partially ordered sets. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 5–31. [in Russian].
4. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). On posets of width two with positive Tits form. *Algebra and Discr. Math.*, 12(2), 585–606.
5. Bondarenko, V. M., & Styopochkina, M. V. (2005). (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2(3), 18–58 [in Russian].
6. Bondarenko, V. M. (2005). On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kyiv. (series: Physics & Mathematics)*, (1), 24–25.
7. Bondarenko, V. M. (2024). Minimax equivalence method: initial ideas, first applications and new concepts. *Algebra and Discr. Math.*, 38(1), 1–22. <https://doi.org/10.12958/adm2332>
8. Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 28, 32–41. [in Russian].

Бондаренко В. М., Стьопочкіна М. В. Про мінімальні мінімаксні системи твірних для додатних частково впорядкованих множин.

Зображення частково впорядкованих множин (скорочено ч. в. множин), введених Л. А. Назаровою і А. В. Ройтером (у матричній формі) в 1972 р., відіграють важливу роль у сучасній теорії зображень та її застосуваннях. Ю. А. Дрозд у 1974 р. довів, що ч. в. множина S має скінченний зображувальний тип над полем тоді і лише тоді, коли її квадратична форма Тітса

$$q_S(z) =: z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i,$$

є слабо додатною (тобто додатною на множині невід’ємних векторів), але це твердження не є правильним, на відміну від випадку сагайдаків, коли розглядаються додатні форми. Тому ч. в. множини з додатною квадратичною формою Тітса викликали великий інтерес з різних точок зору як аналоги діаграм Динкіна. У 2005 р. автори описали з точністю до ізоморфізму всі множини з додатною квадратичною формою Тітса. Основним методом вирішення цієї проблеми є так званий метод мінімаксної еквівалентності, запропонований першим автором. Нещодавно він представив деяке поняття (а саме, мінімаксної системи твірних) з розглядом відповідних прикладів, які можна розглянути як появу нової теорії, яка досліджує комбінаторні властивості множин відносно мінімаксної еквівалентності.

У цій статті ми вивчаємо з такої нової точки зору ч. в. множини з додатною квадратичною формою Тітса (які називаються додатними).

Ключові слова: додатна квадратична форма, квадратична форма Тітса, додатна ч. в. множина, мінімаксна еквівалентність та ізоморфізм, мінімаксна система твірних.

Список використаної літератури

1. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripts Math.* 1972. Vol. 6. P. 71–103. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01298413>
2. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств. *Функц. анализ и его прил.* 1974. Т. 8, № 3. С. 219–225. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01075695>
3. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств. *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1972. Т. 28. С. 5–31.
4. Bondarenko V. M., Styopochkina M. V. On posets of width two with positive Tits form. *Algebra and Discr. Math.* 2005. Vol. 12, No. 2. P. 585–606.
5. Бондаренко В. М., Степочкина М. В. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса. *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* 2005. Т. 2, № 3. С. 18–58.
6. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Maths. Mechanics.* 2005. No. 1. P. 24–25.
7. Bondarenko V. M. Minimax equivalence method: initial ideas, first applications and new concepts. *Algebra and Discr. Math.* 2024. Vol. 38, No. 1. P. 1–22. DOI: <https://doi.org/10.12958/adm2332>
8. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа. *Зап. науч. сем. ЛОМИ.* 1972. Т. 28. С. 32–41.

Received 05.11.2024

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).56-64](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).56-64)**Я. В. Варга¹, А. В. Корпош²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доц. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
iana.varga@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7842-248X>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь
andrii.korposh@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7473-0183>

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРАЛЬНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

Проведено дослідження розв'язків нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним інтегральним крайовим умовам з параметром. В основі методу лежить перехід від заданих інтегральних крайових умов до параметризованих умов модельного типу, які мають простий вигляд початкових умов. Для модельної параметризованої задачі побудована конструктивна чисельно-аналітична схема, яка базується на параметризованих послідовних наближеннях із покращеними характеристиками збіжності. Встановлено зв'язок між розв'язками модельної та вихідної крайових задач.

Цю техніку та її переваги продемонстровано на прикладі інтегральної крайової задачі.

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, нелінійна інтегральна крайова задача, неперервно диференційовний розв'язок, параметризація, умова Ліпшиця, поділ сегменту інтеграції, збіжність послідовних наближень.

1. Вступ. У даній роботі досліджується нелінійна інтегральна крайова задача наступного вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \lambda), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$\int_a^b g(s, x(s), \lambda) ds = d, \quad (2)$$

$$x_1(a) = x_{1a}, \quad (3)$$

де $f : [a, b] \times D \times [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ і $g : [a, b] \times D \times [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задані неперервні функції у деякій обмеженій області $D \subset \mathbb{R}^n$, конкретний вигляд якої буде показано нижче в (9), $\lambda \in [a_1, b_1]$ — невідомий скалярний параметр, а $d \in \mathbb{R}^n$ — заданий вектор. Крім того, припускається локальна ліпшицевість в області D функції f і g для всіх $t \in [a, b]$ і $\{u, v\} \in D$ у наступному вигляді:

$$|f(t, u, \lambda) - f(t, v, \lambda)| \leq K_f |u - v|, \quad (4)$$

$$|g(t, u, \lambda) - g(t, v, \lambda)| \leq K_g |u - v|, \quad (5)$$

де K_f, K_p , невід'ємні матриці розмірності $n \times n$.

Для дослідження існування і наближеного розв'язку задачі (1)–(3) застосуємо техніку, запропоновану в [3–8].

На основі цього підходу замість інтегральних крайових умов (2) вводяться в розгляд параметризовані “модельні умови” простого вигляду

$$x(a) = z, \quad x(b) = \eta, \quad (6)$$

де

$$z = \begin{pmatrix} x_{1a} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix},$$

є невідомими параметрами і спочатку замість інтегральної крайової задачі (1)–(3) досліджуються розв'язки наступної системи параметризованих двоточкових крайових задач “модельного типу”

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), \lambda), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = z, \quad x(b) = \eta. \quad (7)$$

2. Дослідження модельної задачі. Вихідними є дві обмежені області $D_a, D_b \subset \mathbb{R}^n$ і цікавимося такими розв'язками, значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належить відповідно множинам D_a і D_b . Будується множина точок

$$D_{a,b} = (1 - \theta)z + \theta\eta, \quad (8)$$

і для невід'ємного вектора $\rho \in \mathbb{R}^n$ визначимо покомпонентний векторний ρ -окіл множини $D_{a,b}$ наступним чином

$$D = B(D_{a,b}, \rho) = \bigcup_{y \in D_{a,b}} B(y, \rho), \quad (9)$$

де під векторним ρ -околом точки $y \in \mathbb{R}^n$ розуміємо множину

$$B(y, \rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - y| \leq \rho\}.$$

На основі множини D , і правої частини системи диференціальних рівнянь (1) побудуємо вектор

$$\delta_{[a,b],D}(f) = \frac{1}{2} \left[\max_{(t,x,\lambda) \in [a,b] \times D \times [a_1,b_1]} f(t, x, \lambda) - \min_{(t,x,\lambda) \in [a,b] \times D \times [a_1,b_1]} f(t, x, \lambda) \right]. \quad (10)$$

Умова 1. Існує невід'ємний вектор $\rho \in \mathbb{R}^n$ такий, що

$$\rho \geq \delta_{[a,b],D}(f).$$

Умова 2. Існують невід'ємні матриці K_f, K_g для яких локально в області D для функцій f і g виконуються умови Ліпшиця (4), (5).

Умова 3. Найбільше власне значення матриці

$$Q = \frac{3(b-a)}{10} K_f, \quad (11)$$

менше за одиницю

$$r(Q) < 1. \quad (12)$$

Для вивчення розв'язків модельної параметризованої задачі (7) введемо в розгляд параметризовану послідовність функцій

$$x_0(t, z, \eta, \lambda) := z + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z] = \left[1 - \frac{t-a}{b-a} \right] z + \frac{t-a}{b-a} \eta, \quad (13)$$

$$x_m(t, z, \eta, \lambda) := z + \int_a^t f(s, x_{m-1}(s, z, \eta), \lambda) ds - \quad (14)$$

$$-\frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x_{m-1}(s, z, \eta), \lambda) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z], \quad t \in [a, b], \quad m = 1, 2, \dots,$$

де $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ є параметрами. Зауважимо, що всі функції $x_m(t, z, \eta, \lambda)$ задовольняють “модельні крайові умови” для будь-яких значень параметрів $z, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Наступне твердження встановлює рівномірну збіжність послідовності (14) до деякої параметризованої граничної функції.

Теорема 1. Припустимо, що виконуються **Умова 1–Умова 3**.

Тоді, для будь-яких фіксованих $(z, \eta) \in D_a \times D_b$:

1. Всі функції послідовності (14) є неперервно диференційовні на відріжку $t \in [a, b]$, мають значення в області D і задовольняють умовам (6).

2. Послідовність функцій (14) рівномірно збігається відносно $t \in [a, b]$ при $m \rightarrow \infty$ до граничної функції

$$x_\infty(t, z, \eta, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z, \eta, \lambda).$$

3. Гранична функція задовольняє „модельні умови“

$$x_\infty(a, z, \eta, \lambda) = z, \quad x_\infty(b, z, \eta, \lambda) = \eta.$$

4. Функція $x_\infty(t, z, \eta, \lambda)$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = z + \int_a^t f(s, x(s), \lambda) ds - \frac{t-a}{b-a} \int_a^b f(s, x(s), \lambda) ds + \frac{t-a}{b-a} [\eta - z], \quad t \in [a, b],$$

в області D .

Іншими словами, $x_\infty(t, z, \eta)$ задовольняє задачу Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda) + \frac{1}{b-a} \Delta(z, \eta, \lambda), \quad x(a) = z, \quad t \in [a, b],$$

де $\Delta(z, \eta, \lambda) : D_a \times D_b \rightarrow \mathbb{R}^n$ це відображення, яке визначене формулою:

$$\Delta(z, \eta, \lambda) = \eta - z - \int_a^b f(s, x_\infty(s, z, \eta), \lambda) ds.$$

5. Справедлива оцінка

$$|x_{\infty}(\cdot, z, \eta, \lambda) - x_m(\cdot, z, \eta, \lambda)| \leq \frac{10}{9} \alpha_1(t, a, b-a) Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \quad (15)$$

для всіх $t \in [a, b]$ і $m \geq 0$, де $\delta_{[a,b],D}(f)$ задається формулою (10),

$$\alpha_1(t, a, b-a) = 2(t-a) \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right),$$

причому

$$\alpha_1(t, a, b-a) \leq \frac{b-a}{2},$$

а матриця Q має вигляд (11).

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремі 1 [8]. А саме, на основі Лем, що доведені у [2], встановлюється, що при умовах теореми для фіксованих $z \in D_a$, $\eta \in D_b$ і всіх $t \in [a, b]$ послідовність функцій (14) належить області D і є послідовністю Коші, тобто рівномірно збіжною, у Банаховому просторі неперервних вектор-функцій $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ з стандартною рівномірною нормою.

Теорема 2. В умовах Теорема 1 гранична функція

$$x_{\infty}(t, z^*, \eta^*, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^*, \eta^*, \lambda),$$

послідовності (14) є неперервно диференційовним розв'язком інтегральної крайової задачі (1)–(3) тоді і тільки тоді, коли пара (z^*, η^*) задовольняє систему 2n алгебраїчних чи трансцендентних, так званих „визначальних рівнянь“:

$$\begin{aligned} \Delta(z, \eta, \lambda) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_{\infty}(s, z, \eta), \lambda) ds = 0, \\ \Lambda(z, \eta, \lambda) &= \int_a^b g(s, x_{\infty}(s, z, \eta), \lambda) ds - d = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Доведення. Доведення може бути проведено аналогічно, як у Теоремах 2, 3 [1].

Наступне твердження показує, що система „визначальних рівнянь“ (16) виявляє всі можливі розв'язки інтегральної крайової задачі (1)–(3), які належать області D і значення яких в точках $t = a$ і $t = b$ належать відповідно множинам D_a і D_b .

Теорема 3. Нехай виконуються усі умови Теорема 1.

1. Якщо, існують вектори $(z^0, \eta^0) \in D_a \times D_b$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (16), тоді інтегральна крайова задача (1)–(3) має неперервно диференційовний розв'язок $x^0(\cdot)$ такий, що

$$x^0(a) = z^0, \quad x^0(b) = \eta^0.$$

Крім того, цей розв'язок є граничною функцією послідовності (14)

$$x^0(t) = x_\infty(t, z^0, \eta^0, \lambda) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t, z^0, \eta^0, \lambda), \quad t \in [a, b].$$

2. І навпаки, якщо інтегральна крайова задача (1)–(3) має розв'язок $x^0(\cdot) \in D$, то система „визначальних рівнянь“ (16) задовольняється при

$$z = x^0(a), \quad \eta = x^0(b).$$

Зауважимо, що розв'язність системи „визначальних рівнянь“ (16) може бути встановлена на основі властивостей „наближеної системи визначальних рівнянь“

$$\begin{aligned} \Delta_m(z, \eta, \lambda) &= \eta - z - \int_a^b f(s, x_m(s, z, \eta), \lambda) ds, \\ \Lambda_m(z, \eta, \lambda) &= \int_a^b g(s, x_m(s, z, \eta), \lambda) ds - d = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

яка може бути побудована явно.

На основі нерівностей (4), (5) і (15), врахувавши що

$$\int_a^b \alpha_1(t, a, b-a) dt = \frac{(b-a)^2}{3},$$

прямим обчисленням можна довести справедливність наступного твердження.

Лема 1. Припустимо, що мають місце умови Теорему 1 і крім того виконуються умови Ліпшиця (4), (5).

Тоді для точної і наближеної визначальних функцій (16) і (17) мають місце наступні оцінки для будь-яких пар векторів $(z, \eta) \in D_a \times D_b$ і $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\Delta(z, \eta, \lambda) - \Delta_m(z, \eta, \lambda)| &\leq \frac{10(b-a)^2}{27} K_f Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f), \\ |\Lambda(z, \eta, \lambda) - \Lambda_m(z, \eta, \lambda)| &\leq \frac{10(b-a)^2}{27} K Q^m (I_n - Q)^{-1} \delta_{[a,b],D}(f). \end{aligned} \tag{18}$$

3. Модельний приклад. Застосуємо чисельно-аналітичний підхід, що описаний вище на відріжку $[0, 1]$ до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\frac{t}{8} x_2^3(t) - \frac{t}{5} x_1(t) + \frac{t^4}{216} + \frac{t^2}{50} - \frac{1}{10}, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\lambda^2}{2} x_1(t) x_2(t) - \frac{t^2}{1200} - \frac{t}{240} + \frac{1}{3}, \quad t \in [0, 1], \quad \lambda \in [-1, 0], \end{aligned} \tag{19}$$

з інтегральними крайовими умовами

$$\int_0^1 s \lambda^2 x_1(s) x_2(s) ds = \frac{7}{450}, \quad (20)$$

$$\int_0^1 \frac{s^2}{3} x_2^2(s) ds = \frac{1}{135},$$

$$x_1(0) = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Очевидно, що (19)–(21) є окремим випадком (1)–(3) при $a := 0$, $b := 1$,

$$f(t, x_1, x_2, \lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{t}{8} x_2^3(t) - \frac{t}{5} x_1(t) + \frac{t^4}{216} + \frac{t^2}{50} - \frac{1}{10} := f_1(t, x_1, x_2) \\ \frac{\lambda^2}{2} x_1(t) x_2(t) - \frac{t^2}{1200} - \frac{t}{240} + \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$g(t, x_1, x_2, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 t \lambda^2 x_1(t) x_2(t) dt \\ \int_0^1 \frac{t^2}{3} x_2^2(t) dt \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{450} \\ \frac{1}{135} \end{pmatrix}.$$

Розв'язком крайової задачі (19)–(21) є пара функцій

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{t^2}{10} + \frac{1}{2}, \\ x_2^*(t) &= \frac{t}{3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введемо наступні параметри:

$$\begin{aligned} z &:= x(a) = x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ z_2 \end{pmatrix}, \\ \eta &:= x(b) = x(1) = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Виберемо області D_a і D_b :

$$D_a = D_b = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 0.8\}.$$

У цьому випадку, множина $D_{a,b}$ має вигляд

$$D_{a,b} = D_a = D_b.$$

Виберемо вектор

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix},$$

тоді область D буде наступною:

$$D = \{(x_1, x_2) : -0.2 \leq x_1 \leq 1.2, -0.2 \leq x_2 \leq 1\}.$$

Прямі обчислення показують, що умова Ліпшиця (4) для правої частини (19) в області D виконується з матрицею

$$K = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{25} \end{pmatrix},$$

і маємо

$$Q = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}, \quad r(Q) = 0.107321 < 1,$$

$$\begin{aligned} \delta_{[a,b],D}(f) &= \frac{1}{2} \left(\max_{(t,x,\lambda) \in [a,b] \times D \times [a_1,b_1]} f(t, x, \lambda) - \min_{(t,x,\lambda) \in [a,b] \times D \times [a_1,b_1]} f(t, x, \lambda) \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0.25436 \\ 0.0865 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix} \geq \frac{1}{2} \delta_{[a,b],D}(f) = \begin{pmatrix} 0.12718 \\ 0.04325 \end{pmatrix}.$$

Всі умови Теорема 1 виконуються і тому послідовність функцій (14) для цього прикладу є збіжною.

Чисельні розрахунки показують, що розв'язком наближеної системи визначальних рівнянь вигляду (17), при $m = 0, 1, 2, 3$ є числові значення, що представлені в Табл. 1.

Таблиця 1.

Наближені значення параметрів

m	λ	z_2	η_1	η_2
0	-0.4944144168	0.000006978058785	0.596969697	0.3333350778
1	-0.5000781257	$9.577910704 \times 10^{-7}$	0.5999999995	0.3333344676
2	-0.5000035117	$1.533681735 \times 10^{-7}$	0.6000020187	0.3333331722
3	-0.4999999154	$2.623376717 \times 10^{-9}$	0.5999999939	0.3333333358

Похибка першої апроксимації ($m = 1$) наступна:

$$\max_{t \in [0,1]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \approx 3 \cdot 10^{-4},$$

$$\max_{t \in [0,1]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \approx 1.4 \cdot 10^{-5}.$$

Похибка третьої апроксимації ($m = 3$) наступна:

$$\max_{t \in [0,1]} |x_1^*(t) - x_{31}(t)| \approx 3 \cdot 10^{-7},$$

$$\max_{t \in [0,1]} |x_2^*(t) - x_{32}(t)| \approx 1.5 \cdot 10^{-8}.$$

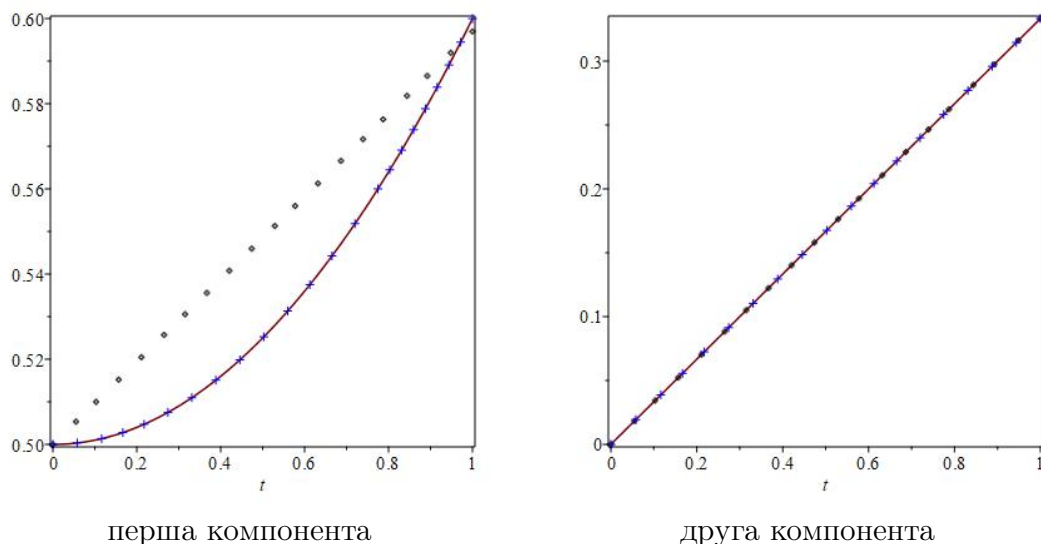


Рис. 1. Точний розв'язок (22) (—) та його нульове ($\diamond$) і третє наближення ($\times$).

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. Обґрунтовано ефективний підхід дослідження існування та наближеної побудови розв'язків нелінійних крайових задач з параметром. Для модельної параметризованої задачі побудована оригінальна конструктивна чисельно-аналітична схема, яка основана на послідовних наближеннях із покращеними характеристиками рівномірної збіжності. Теоретичні викладки продемонстровано на прикладі задачі з нелінійними інтегральними крайовими умовами.

В подальшому можна буде провести дослідження систем диференціальних рівнянь, права частина яких задовольняє умови Каратеодорі.

Список використаної літератури

1. Ronto A., Ronto M., Varha Y. A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 250. P. 689–700. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.021>
2. Rontó M., and Mészáros J. Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations. *Ukrainian Math. J.* 1996. Vol. 48, No. 1. P. 101–107. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02390987>
3. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*. 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1233–1241.
4. Ronto M., Varha Y. Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*. 2014. Vol. 15, No. 2. P. 725–742.
5. Варга Я. В. Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*. 2015. Вип. 26, № 1. С. 23–24.
6. Varga I. On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*. 2018. Vol. 19, No. 2. P. 1221–1229.
7. Ronto A., Ronto M., Varga I. Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions. *Miskolc Mathematical Notes*. 2017. Vol. 18, No. 2. P. 1001–1014.
8. Варга Я. В., Рєго В. Л., Семчишин Г. Я., Дослідження розв'язків інтегральних крайових задач, *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 33–50. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).33-50](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).33-50)

Varga I. V., Korposh A. V. Investigation of solutions of integral boundary value problem with parameter.

The solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations subject to nonlinear integral boundary conditions with a parameter has been considered. At the heart of the method lies transition from given integral boundary conditions to parameterized conditions of model type, which have a simple appearance of the initial conditions. For a model parameterized problem, a constructive numerically-analytical scheme is constructed, which is built on parameterized approximations with improved convergence characteristics. The connection between the solutions of the model and transitional boundary value problems is established.

This technique and its advantages are illustrated by example of one integral boundary value problem.

Keywords: ordinary differential equations, nonlinear integral boundary value problems, continuously differentiated solution, parameterization, Lipschitz conditions, division of integration segment, convergence of successive approximations.

References

1. Ronto, A., Ronto, M., & Varha, Y. (2015). A new approach to non-local boundary value problems for ordinary differential systems. *Applied Mathematics and Computation*, 250, 689–700.
2. Ronto, M., & Mészáros, J. (1996). Some remarks on the convergence of the numerical-analytical method of successive approximations. *Ukrainian Math. J.*, 48(1), 101–107. <https://doi.org/10.1007/BF02390987>
3. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Math. Notes*, 19(2), 1233–1241.
4. Ronto, M., & Varha, Y. (2014). Constructive existence analysis of solutions of non-linear integral boundary value problems. *Miskolc Math. Notes*, 15(2), 725–742.
5. Varga, I. V. (2015). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics*, 26(1), 23–34 [in Ukrainian].
6. Varga, I. (2018). On investigation of some non-linear integral boundary value problem. *Miskolc Mathematical Notes*, 19(2), 1221–1229.
7. Ronto, A., Ronto, M., & Varga, I. (2017). Partially solved differential systems with two-point non-linear boundary conditions. *Miskolc Mathematical Notes*, 18(2), 1001–1014.
8. Varga, I. V., Reho, V. L. & Semchyshyn, H. Y. (2022). Investigation of integral boundary value problems. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Ser. of Mathematics and Informatics*, 40(1), 33–50. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).33-50](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).33-50) [in Ukrainian].

Одержано 21.10.2024

УДК 512.72

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).65-74](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).65-74)**Л. П. Добуляк¹, С. П. Солтис², О. Ю. Лисецька³**

¹ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
кандидат економічних наук, доцент

lesia.dobuliak@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8665-8783>

² Львівський національний університет ім. Івана Франка,
магістр кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів

serhii.soltys@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-6729-2938>

³ Львівський національний університет ім. Івана Франка,
доцент кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор філософії з математики

oleksandra.lysetska@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-0730-7222>

КРИПТОГРАФІЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ

У статті детально досліджуються математичні аспекти еліптичних кривих, зокрема операції додавання та подвоєння точок, які є основними операціями для побудови криптографічних алгоритмів. Зосереджено увагу на властивостях еліптичних кривих над скінченними полями, що робить їх придатними для реалізації стійких криптографічних методів, таких як ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm). Розглянуто математичні основи цих операцій, їх алгоритмічні реалізації та важливість для обчислювальної стійкості. Окрім математичних основ, у статті розглянуто програмну реалізацію операцій додавання та подвоєння точок, що є важливими для ефективності та безпеки криптографічних алгоритмів. Описано алгоритми реалізації мовою програмування Python.

Ключові слова: еліптичні криві, криптографія, ECC, ECDSA, Python.

1. Вступ. Еліптичні криві та алгоритм цифрового підпису на основі еліптичних кривих (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm, ECDSA) є ключовими компонентами сучасної криптографії. Вони використовуються для забезпечення безпеки даних у широкому спектрі застосувань, зокрема в блокчейн-технологіях, криптовалютах (наприклад, Bitcoin та Ethereum) та різних системах захисту інформації. Використання еліптичних кривих для криптографічних завдань забезпечує високу стійкість до зламів за допомогою сучасних обчислювальних технологій, водночас маючи порівняно низькі вимоги до ресурсів для обробки та зберігання даних.

Особливістю еліптичних кривих є їх здатність надавати криптографічну стійкість, яка може бути досягнута з меншою кількістю бітів порівняно з класичними методами, такими як RSA. У випадку застосування алгоритмів на еліптичних кривих вважається, що не існує субекспоненціальних алгоритмів щодо розв'язку задачі "дискретного логарифмування в групах їх точок". Це дозволяє створювати більш ефективні системи захисту з меншими обчислювальними витратами. Завдяки цьому алгоритми, засновані на еліптичних кривих, активно впроваджуються в таких технологіях, як інтернет речей (IoT), мобільні комунікації, банківські транзакції та блокчейн-платформи.

Ця стаття зосереджується на теоретичних основах еліптичних кривих та практичному застосуванні ECDSA для захисту даних.

2. Основний результат.

Постановка завдання. Метою даної статті є дослідження математичних основ еліптичних кривих і їхнього використання в алгоритмах цифрового підпису, таких як ECDSA. Основними завданнями дослідження є:

- 1) Опис математичних властивостей еліптичних кривих і їх застосування в криптографії.
- 2) Аналіз алгоритму ECDSA і його важливості для криптографічних завдань.
- 3) Огляд існуючих підходів і літературних джерел щодо використання еліптичних кривих в різних криптографічних системах.
- 4) Проведення експериментів і аналіз отриманих результатів щодо додавання точок на еліптичній кривій.

Огляд літератури. У 1970 році британський математик та інженер Джеймс Елліс запропонував ідею, засновану на простій концепції. Що, якщо шифрування і дешифрування — зворотні операції на основі двох різних ключів? У традиційній, тобто симетричній криптографії, повідомлення повинно бути надіслано разом з ключем, щоб інша сторона розшифрувала повідомлення. Елліс припустив, що одержувач повідомлення не може бути пасивною стороною, і їм потрібно було мати «замок» і «ключ» для себе. Замок можна було відправити кому завгодно в світі, але ключ повинен залишатися приватним. Криптографія з відкритим ключем була винайдена в 1970-х роках і є математичною основою для комп'ютерної та інформаційної безпеки. З моменту винаходу криптографії з відкритим ключем, було відкрито декілька математичних функцій, таких як піднесення до степеня простого числа і множення еліптичних кривих. Ці математичні функції практично необоротні, це означає, що результат їх виконання легко отримати в одному напрямку і неможливо в зворотному. На підставі цих математичних функцій, криптографія дозволяє створення цифрових шифрів і невідомих цифрових підписів. У біткоїнах використовується множення еліптичних кривих.

Еліптичні криві як основа для криптографії почали активно досліджуватися з кінця XX століття, зокрема завдяки працям таких математиків, як Ніл Кобліц (Neal Koblitz) і Віктор Міллер (Victor Miller), які у 1985 році запропонували використання еліптичних кривих для криптографічних цілей [1, 2]. Їхня робота стимулювала розробку численних досліджень щодо використання еліптичних кривих в криптографічних протоколах.

У [1, 2] описано основні математичні принципи еліптичних кривих, включаючи операції додавання точок та скалярного множення, що використовуються в криптографії. Ці математичні операції лежать в основі алгоритму ECDSA, який забезпечує високий рівень захисту завдяки своїй складності.

У сучасній криптографії важливим є також огляд ефективності ECDSA у порівнянні з іншими криптографічними алгоритмами, такими як RSA або DSA. Згідно з дослідженнями [3], ECDSA пропонує більш високу стійкість при меншій довжині ключа, що робить його особливо привабливим для систем з обмеженими ресурсами, таких як мобільні пристрої або платформи інтернету речей.

Робота [4] аналізує безпеку та стійкість до атак, особливо до таких загроз, як атаки на відкриті ключі та підбор ключів. Автори також зазначають, що алгоритм ECDSA залишається одним із найбільш стійких серед відомих криптографічних методів.

Основні матеріали. Еліптичні криві (Elliptic curves) є важливим об'єктом в алгебрі та математиці, а також в криптографії.

Означення 1. *Еліптична крива над полем K — це множина точок проективної площини над K , що задовольняють рівнянню*

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad (1)$$

разом з точкою на нескінченності та не містить особливих точок, де a_i — дійсні константи, які визначають конкретну криву (див. [5]).

Одна з ключових властивостей еліптичних кривих полягає в тому, що вони утворюють абелеву групу з операцією додавання точок. Додавання точок на еліптичних кривих визначається геометрично і має свої особливості. Воно дозволяє обчислювати суму точок і знаходити добуток точки на ціле число. Еліптичні криві також мають нейтральний елемент, який називається «безкінечністю» і позначається символом O .

У криптографії еліптичні криві знаходять широке застосування, зокрема в алгоритмах цифрового підпису. ECC (Elliptic Curve Cryptography) заснована на складності обчислення дискретного логарифма на еліптичних кривих, що робить її ефективною та безпечною для використання в криптографічних протоколах, таких як шифрування, цифровий підпис та обмін ключами.

Основною перевагою криптосистем на еліптичних кривих у порівнянні із звичайними асиметричними алгоритмами є те, що вони забезпечують еквівалентний захист за меншої довжини ключа (див. табл. 1).

Таблиця 1.

Ступінь захисту RSA та ECC

Ступінь захисту (на кожен біт ключа)	Мінімальна довжина ключа (в бітах)	
	RSA/DSA/DH	ECC
80	1024	160
112	2048	224
128	3072	256
192	7680	384
256	15360	512

Розглянемо рівняння еліптичної кривої у спрощеному вигляді (рівняння Вейєрштрасса):

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (2)$$

Залежно від значень параметрів a і b еліптичні криві можуть приймати на площині різні форми. Так як $y = \pm\sqrt{x^3 + ax + b}$, то графік кривої симетричний відносно Ox .

Дискримінант рівняння обчислюється так:

$$D = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Розглянемо такі можливі випадки:

- $D < 0$ — три різних дійсних корені (Рис. 4, графік 1);
- $D = 0$ — три дійсних корені, два з яких однакові (Рис. 4, графік 2 — сингулярна крива, такі криві виключають з розгляду);
- $D > 0$ — один дійсний корінь та два комплексних (Рис. 4, графік 3, [6]).

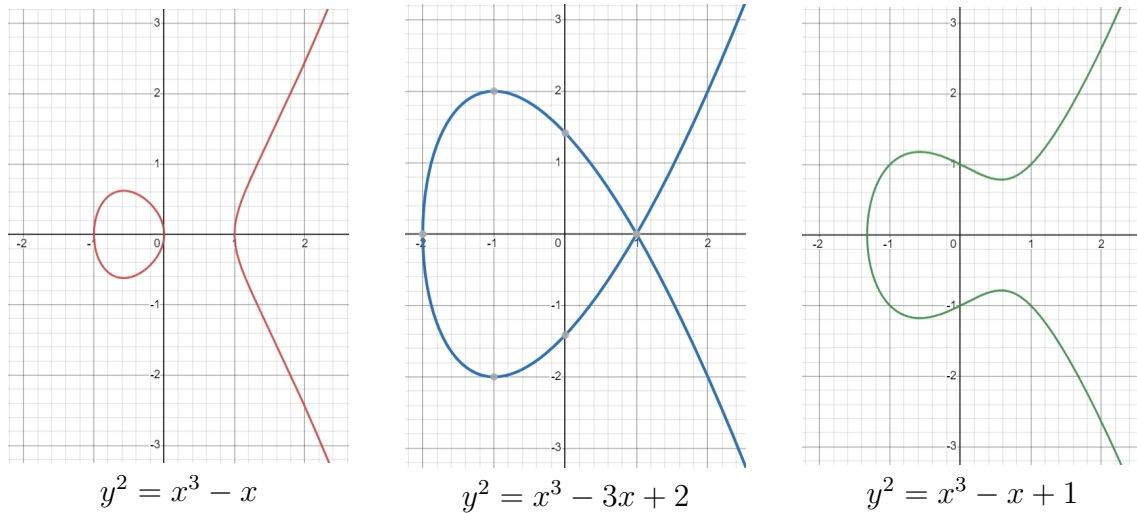


Рис. 1. Графіки еліптичних кривих у залежності від значення D .

У реальних криптосистемах використовуються еліптичні криві над скінченним полем P , що описуються рівнянням:

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}, \quad (3)$$

де (x, y) — точки еліптичної кривої, a, b — параметри кривої, p — просте число ($p \neq 2, p \neq 3$). При цьому параметри кривої a та b мають задовольняти умову:

$$4a^3 + 27b^2 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Позначимо через $E_p(a, b)$ множину точок еліптичної кривої. Зауважимо, що множину точок еліптичної кривої $E_p(a, b)$ також включається нескінченно віддалена точка O . Точка належить еліптичній кривій, якщо пара чисел (x, y) задовільняє рівняння (3).

Означення 2. Кількість точок кривої називається порядком кривої ($[6]$).

Додавання двох точок кривої.

Означення 3. Оберненою точкою до точки $P(x, y) \in E_p(a, b)$ називають точку еліптичної кривої, що симетрична до $P(x, y)$ відносно осі Ox та позначають $-P(x, -y)$. Варто зауважити, що $-P$ має належати $E_p(a, b)$.

Нехай $P, Q \in E_p(a, b)$, тоді щоб отримати нову точку R , яка є сумою точок P і Q , застосовуються такі кроки:

- 1) Якщо P і Q є різними точками, проведемо пряму, яка проходить через ці точки. Ця пряма перетне криву у третій точці R . Проведемо через точку R вертикальну пряму до перетину з кривою у точці $-R = P + Q$. Отже, сумою двох точок P та Q буде точка, обернена до третьої точки перетину еліптичної кривої і прямої, що проходить через задані точки.

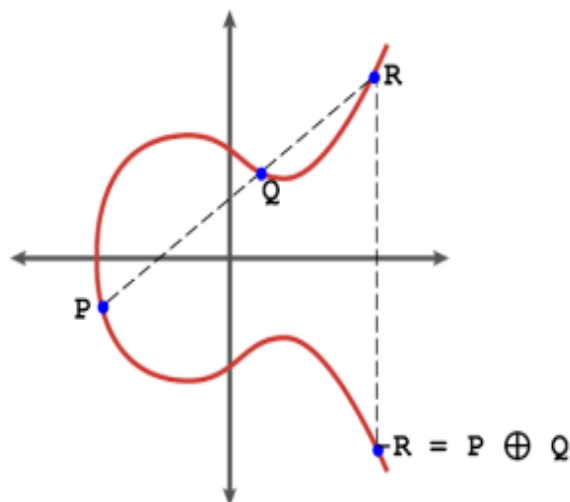


Рис. 2. Додавання точок.

- 2) У випадку $P = Q$, проведемо пряму, яка дотикається до кривої в точці P . Точка R — це точка перетину цієї дотичної з кривою. При $P = Q$ січна перетворюється на дотичну, тому точка $2P$ є оберненою до точки R .

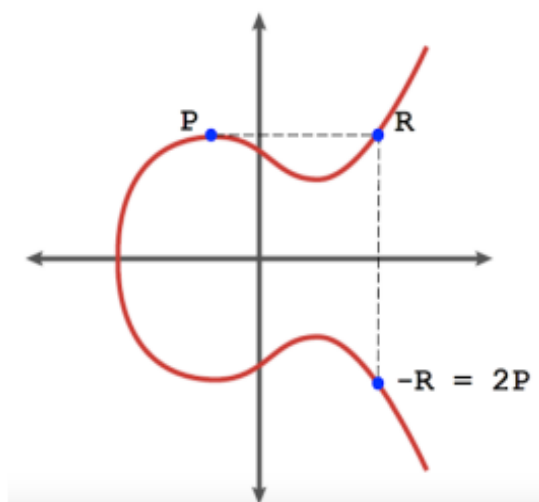


Рис. 3. Подвоєння точки.

Координати $-R(x_3, y_3)$ визначаються за формулами (див. рис. 7), де λ — кутовий коефіцієнт січної, що проведена через точки $P(x_1, y_1)$ та $Q(x_2, y_2)$.

Додавання точок (якщо $P \neq Q$)	Подвоєння точки (якщо $P = Q$)
$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \pmod{p};$	$x_3 = \lambda^2 - 2x_1 \pmod{p};$
$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p};$	$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p};$
$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \pmod{p}.$	$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \pmod{p}.$

Рис. 4. Формули обчислення координат точки.

3) Якщо P і Q мають координати, що не належать кривій, або $P = O$ (нескінченність), тоді R вважається рівним Q (або P , якщо $Q = O$, відповідно).

Отримана точка R є результатом операції додавання точок P і Q на еліптичній кривій. Важливо враховувати, що координати точок можуть бути елементами поля (раціональні числа або скінченні поля) і операція додавання узгоджується із операціями на полі.

Операція додавання точок на еліптичних кривих комутативна (тобто $P + Q = Q + P$) та асоціативна (тобто $(P + Q) + R = P + (Q + R)$).

Приклад 1. Множина точок $E_5(2, 1)$ еліптичної кривої

$$y^2 \equiv x^3 + 2x + 1 \pmod{5},$$

складається з 6 точок. Порядок кривої — 7.

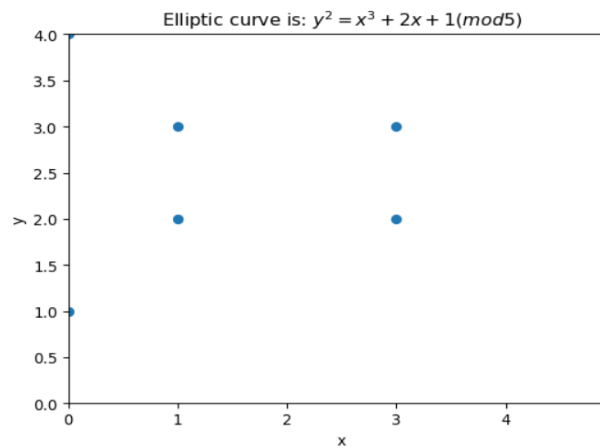


Рис. 5. Множина точок $E_5(2, 1)$.

Як можна побачити, на рисунку 8 зображено усі точки, що задовольняють умови кривої, це точки $(0, 1)$, $(0, 4)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$. Перевірити цей факт можна простим підставленням:

$$1^2 \equiv 0^3 + 2 \cdot 0 + 1;$$

$$3^2 \equiv 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 9 \equiv 27 + 6 + 1 \pmod{5} \Rightarrow 4 \equiv 4.$$

Розглянемо приклад з додаванням детальніше. Спочатку проведемо аналітичний пошук розв'язків, взявши невеликі значення, а далі обрахуємо це програмно і перевіримо чи відповіді співпадають.

Аналітичне розв'язання. Розглянемо таке рівняння еліптичної кривої:

$$y^2 \equiv x^3 + x + 1 \pmod{23}, \quad (4)$$

і перевіримо чи точки $P(3, 10)$ та $Q(9, 7)$ належать кривій і, якщо належать, знайдемо їхню суму.

Підставимо значення у рівняння еліптичної кривої і переконаємося, що точки належать кривій 4.

$$10^2 \equiv 3^3 + 3 + 1 \pmod{23} \Leftrightarrow 100 \pmod{23} \equiv 31 \pmod{23} \Leftrightarrow 8 \equiv 8 \pmod{23};$$

$$7^2 \equiv 9^3 + 9 + 1 \pmod{23} \Leftrightarrow 49 \pmod{23} \equiv 739 \pmod{23} \Leftrightarrow 3 \equiv 3 \pmod{23}.$$

Перевіряючи правильність виконання операції, здійснимо додавання і знайдемо кутовий коефіцієнт січної.

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \pmod{p} = \frac{7 - 10}{9 - 3} \pmod{23} = -3/6 \pmod{23} = \\ &= -1/2 \pmod{23} = 22/2 \pmod{23} = 11.\end{aligned}$$

Далі знайдемо точки x та y :

$$\begin{aligned}x_3 &= \lambda^2 - x_1 - x_2 \pmod{p} = 121 - 3 - 9 \pmod{23} = 109 \pmod{23} = 17; \\ y_3 &= \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \pmod{p} = 11(3 - 17) - 10 \pmod{23} = -164 \pmod{23} = 20.\end{aligned}$$

Отже $P + Q = (3, 10) + (9, 7) = (17, 20)$.

Програмне розв'язання. Далі розглянемо програмне розв'язання, покажемо вивід (логіка програми описана нижче).

$$\begin{aligned}p1 + p2 &= (17, 20) \\ p1 == p2 &: False \\ p1! = p2 &: True\end{aligned}$$

У результаті можемо побачити як це виглядатиме на рисунку 9.

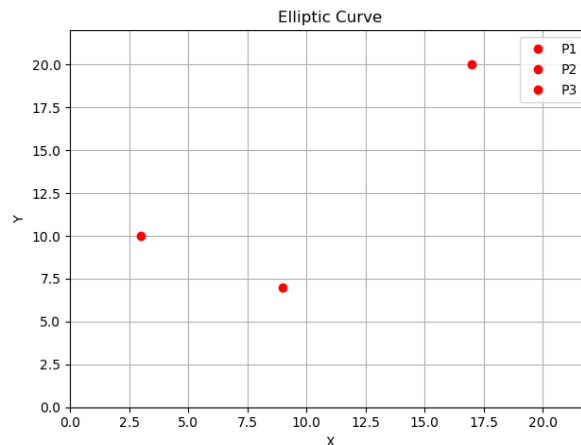


Рис. 6. Розв'язки отримані внаслідок програмної реалізації.

Код працює за такою логікою:

- 1) Клас `EllipticCurvePoint` визначає точку на еліптичній кривій. Конструктор `__init__` ініціалізує координати точки (x і y), параметри еліптичної кривої (a і b), які виступають коефіцієнтом біля x та вільним членом та поле простого числа (p).
- 2) Метод `__eq__` перевіряє, чи дві точки належать одній еліптичній кривій, порівнюючи координати x, y, a, b і p точок.
- 3) Метод `__ne__` перевіряє чи точки не належать кривій, використовуючи метод `__eq__`.

- 4) Метод `__add__` виконує додавання двох точок на еліптичній кривій. Він перевіряє, чи точки належать одній еліптичній кривій, обчислює кутовий коефіцієнт прямої або дотичної, залежно від того, чи точки рівні або різні, і обчислює координати третьої точки додавання.
- 5) Метод `__str__` повертає рядок, що представляє точку у форматі (x, y) .
- 6) Задається поле простого числа p (у випадку даного прикладу використовується значення 23).
- 7) Створюються дві точки $P1$ і $P2$ з відповідними координатами і параметрами еліптичної кривої.
- 8) Виконується операція додавання двох точок: $P3 = P1 + P2$.
- 9) Малюємо графік з точками $P1, P2, P3$.

Файл з відповідним кодом програми завантажено на GitHub (див. [7]).

Алгоритм ECDSA. ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm) — це криптографічно безпечна схема цифрового підпису, заснована на криптографії еліптичних кривих (ECC). ECDSA спирається на математику циклічних груп еліптичних кривих над скінченними полями та на складність задачі ECDLP (задача дискретного логарифмування еліптичних кривих). Алгоритм підпису/перевірки ECDSA ґрунтується на точковому множенні еліптичних кривих. Ключі і підписи ECDSA коротші, ніж в RSA для того ж рівня безпеки [8]. Крім того, завдяки високій швидкості генерації підписів, цей алгоритм активно застосовується в сучасних протоколах безпеки, таких як TLS та SSH, що забезпечує захищену передачу даних в Інтернеті.

ECDSA використовує криптографічні еліптичні криві над скінченними полями в класичній формі Вейерштрасса (див. рівняння 2).

У Python є спеціальна бібліотека, випущена за ліцензією MIT [9]. За допомогою цієї бібліотеки можна швидко створювати пари ключів (ключ підпису та ключ перевірки), підписувати повідомлення та перевіряти підписи. Також можна не лише створити, а й порівняти скільки часу потрібно кожній кривій для генерації пар ключів (`keygen`), підписання даних (`sign`), перевірки цих підписів (`verify`), отримання спільного секрету (`ecdh`) і перевірки підписів без попереднього обчислення ключа (`no PC verify`). Ось декілька популярних кривих: NIST, SECP, BRAINPOOLP. Він включає 256-бітну криву — `secp256k1`, яку використовує біткойн.

ECDSA стандартизований на міжнародному рівні організаціями, такими як NIST та SECG, що робить його сумісним із багатьма сучасними криптографічними системами. Він також використовується для забезпечення електронних підписів, що підтверджують автентичність документів, а також для автентифікації користувачів у веб-додатках. Завдяки цій універсальності, ECDSA став важливим елементом цифрової безпеки, забезпечуючи як цілісність даних, так і їх конфіденційність.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Еліптичні криві є важливим інструментом сучасної криптографії, забезпечуючи високу стійкість до атак при оптимальних обчислювальних витратах. Алгоритм ECDSA, заснований на цих кривих, продемонстрував свою ефективність у багатьох галузях, зокрема у блокчейн-технологіях і системах захисту даних. Еліптичні криві дозволяють зменшити розмір ключів і підвищити швидкість обчислень без втрати рівня безпеки, що робить їх перспективними для подальшого розвитку

криптографії.

Еліптичні криві демонструють високу стійкість до класичних методів криптоаналізу, але існує необхідність подальшого дослідження стійкості цих алгоритмів в умовах появи квантових обчислювальних систем, які можуть загрожувати традиційним методам шифрування. (Зокрема, можливі атаки на основі квантового обчислення можуть значно скоротити час, необхідний для розв'язання задачі дискретного логарифмування на еліптичних кривих). Однак на сьогоднішній день ECDSA залишається одним із найбільш безпечних і ефективних криптографічних алгоритмів.

Важливо також відзначити гнучкість використання еліптичних кривих у різних протоколах безпеки. Окрім цифрових підписів, еліптичні криві застосовуються в шифруванні та генерації спільних ключів, що дозволяє будувати комплексні системи захисту з різномірним шифруванням.

Отже, на основі проведених досліджень і експериментів можна зробити висновки, що еліптичні криві та алгоритм ECDSA є важливими складовими сучасної криптографії, забезпечуючи високий рівень безпеки, ефективність та стійкість до більшості відомих атак. Це робить їх незамінними в сучасних інформаційних системах і криптографічних рішеннях. Проте для подальшого вдосконалення технологій захисту необхідно враховувати перспективи розвитку квантових обчислювальних систем і продовжувати дослідження в галузі стійкості криптографії на основі еліптичних кривих до нових загроз.

Список використаної літератури

1. Kobitz N. Elliptic curve cryptosystems. *Mathematics of Computation*. 1987. Vol. 48, No. 177. P. 203–209. DOI: <https://doi.org/10.2307/2007884>
2. Miller V. S. Use of Elliptic Curves in Cryptography. *Advances in Cryptology — CRYPTO '85 Proceedings*. Springer. Berlin : Heidelberg, 1985. P. 417–426. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-39799-X_31
3. Johnson D. B., Menezes A. J., Vanstone S. A. The elliptic curve digital signature algorithm (ECDSA). *International Journal of Information Security*. 2001. Vol. 1. P. 36–63. DOI: <https://doi.org/10.1007/s102070100002>
4. Brown D. R. L., Gallant R. P. The Static Diffie-Hellman Problem. *Cryptology ePrint Archive. Paper 2004/306*. 2004. URL: <https://ia.cr/2004/306> (date of access: 21.07.2024).
5. Silverman J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Berlin: Springer. 1986. P. 41–73. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1920-8>
6. Криптографічні перетворення в групах точок еліптичних кривих. Метод. розроб. URL: <https://learn.ztu.edu.ua/mod/resource/view.php?id=212444> (дата звернення: 12.08.2024).
7. GitHub : Elliptic curve and Finite Field. Python Source Code. URL: <https://github.com/Sirko30/EllipticCurve/blob/main/ellipticcurves.py> (date of access: 27.09.2024).
8. ECDSA : Elliptic Curve Signatures. *Practical Cryptography for Developers*. URL: <https://cryptobook.nakov.com/digital-signatures/ecdsa-sign-verify-messages> (date of access: 11.08.2024).
9. GitHub : Pure-python ECDSA signature/verification and ECDH key agreement. URL: <https://github.com/tlsfuzzer/python-ecdsa> (date of access: 01.09.2024).

Dobuliak L. P., Soltys S. P., Lysetska O. Y. Elliptic Curve Cryptography.

The article investigates in detail the mathematical aspects of elliptic curves, in particular the operations of adding and doubling points, which are the main operations for constructing cryptographic algorithms. Attention is focused on the properties of elliptic curves over finite fields, which makes them suitable for implementing strong cryptographic methods such as ECDSA (Elliptic Curve Digital Signature Algorithm). The mathematical

foundations of these operations, their algorithmic implementations, and their importance for computational security are discussed. In addition to the mathematical foundations, the article discusses the software implementation of point addition and doubling operations, which are important for the efficiency and security of cryptographic algorithms. The algorithms of implementation in the Python programming language are described.

Keywords: elliptic curve, cryptography, ECC, ECDSA, Python.

References

1. Koblitz, N. (1987). Elliptic curve cryptosystems. *Mathematics of Computation*, 48(177), 203–209. <https://doi.org/10.2307/2007884>
2. Miller, V. S. (1985). *Use of Elliptic Curves in Cryptography*. Advances in Cryptology — CRYPTO '85 Proceedings. Springer, Berlin: Heidelberg, 417–426. https://doi.org/10.1007/3-540-39799-X_31
3. Johnson, D. B., Menezes, A. J., & Vanstone, S. A. (2001). The elliptic curve digital signature algorithm (ECDSA). *International Journal of Information Security*, 1, 36–63. <https://doi.org/10.1007/s102070100002>
4. Brown, D. R. L., & Gallant, R. P. (2004). The Static Diffie-Hellman Problem. *Cryptology ePrint Archive. Paper 2004/306*. Retrieved from <https://ia.cr/2004/306>
5. Silverman, J. H. (1986). *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Berlin: Springer, 41–73. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1920-8>
6. Cryptographic transformations in groups of points of elliptic curves. Method. Dev. Retrieved from <https://learn.ztu.edu.ua/mod/resource/view.php?id=212444> [in Ukrainian].
7. GitHub : Elliptic curve and Finite Field. Python Source Code. Retrieved from <https://github.com/Sirko30/EllipticCurve/blob/main/ellipticcurves.py>
8. ECDSA : Elliptic Curve Signatures. Practical Cryptography for Developers. Retrieved from <https://cryptobook.nakov.com/digital-signatures/ecdsa-sign-verify-messages>
9. GitHub : Pure-python ECDSA signature/verification and ECDH key agreement. Retrieved from <https://github.com/tlsfuzzer/python-ecdsa>

Одержано 14.10.2024

UDC 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).75-82](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).75-82)**T. Yu. Zhuk**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine,
 assistant of the department of integral and differential equations,
 PhD student

zhuktetiana6@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8015-0038>

AVERAGED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS ON THE FINITE AND INFINITE INTERVALS

In this paper, we use the averaging method to find an approximate solution for the optimal control of nonlinear differential inclusions with rapidly oscillating coefficients.

This work highlights the interplay between averaging methods and asymptotic analysis, suggesting that a hybrid approach can provide reliable strategies for solving complex optimal control problems. Addressing both finite interval and unbounded domains, the studies together contribute to a more complete framework for understanding and applying control methodology in nonlinear settings. We use the averaging method to find an approximate solution to these optimal control problems. Future research can benefit from integrating insights from both methodologies to further improve control strategies, potentially leading to improved results in various fields of engineering and applied mathematics. The Carathéodory-type differential switching optimal control problems are considered.

Keywords: non-linear differential inclusion, optimal control, averaging method, approximate solution.

1. Introduction. In recent years, the study of optimal control problems involving differential inclusions has gained significant attention due to its wide range of applications in engineering, economics, and the natural sciences. This article address the complexities of controlling systems described by differential inclusions, albeit from different perspectives and methodologies.

The first part of research explores the application of the averaging method to non-linear differential inclusions within a finite interval, providing insights into simplifying complex control systems for practical implementation. The second one delves into the asymptotic behavior of optimal control problems on the semiaxes, particularly focusing on Carathéodory differential inclusions with fast oscillating coefficients, thereby offering a deeper understanding of the impact of rapid oscillations on system dynamics. Together, these works contribute to advancing the theoretical framework and application strategies for optimal control in systems governed by differential inclusions.

2. Statement of the problem. Let us consider two optimal control problems. The first one

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in X(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), u(t)), t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, u(\cdot) \in U, \\ J[x, u] = \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (1)$$

Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter, $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ is an unknown phase variable, $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ is an unknown control function, $X : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ is a multi-valued function, $U \subset L^2(0, T)$ is a fixed set.

Assume that uniformly with respect to x for every $u \in \mathbb{R}^m$

$$\text{dist}_H \left(\frac{1}{s} \int_0^s X(\tau, x, u) d\tau, Y(x, u) \right) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (2)$$

where limits for multi-valued function are considered in the sense of [1, 2], dist_H is the Hausdorff metric, $Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, and the integral of multi-valued function is considered in the sense of Aumann [3]. We consider the following problem with averaged right hand side:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Y(y(t), u(t)), \\ y(0) = x_0, u(\cdot) \in U, \\ J[x, u] = \int_0^T L(t, y(t), u(t)) dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3)$$

Under the natural assumptions on X, L, Φ, U we will show that the problems (1) and (3) have solutions $\{\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon\}$ and $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ respectively,

$$\bar{J}_{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{J}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

where $\bar{J}_{\varepsilon_n} := J[\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{u}_{\varepsilon_n}]$, $\bar{J} := [\bar{y}, \bar{u}]$, and up to a subsequence

$$\bar{u}_{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{u} \text{ in } L^2(0, T),$$

$$\bar{x}_{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{y} \text{ in } \mathbb{C}([0, T]).$$

In what follows we consider the problem of finding an approximate solution of (1) by transition to averaged coefficients. We note that the transition to the averaging parameters can essentially simplify the problem.

We consider the second following optimal control problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t)\right) + g(x(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u \in \mathcal{U} = \{u \in L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in U \text{ a.e. on } (0, \infty)\} \quad (5)$$

is such that

$$J(x, u) = \int_0^\infty (e^{-\gamma t} \varphi(x(t)) + |u(t)|^2) dt \rightarrow \inf, \quad (6)$$

where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and f, g, φ satisfy the following:

- 1) $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}$;
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ the map $f(\cdot, x)$ possesses a measurable selector;
- 3) $\forall t \geq 0$ the map $f(t, \cdot)$ is upper semicontinuous;
- 4) $\exists M \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^d \forall t \geq 0 : \|f(t, x)\|_+ \leq M$;
- 5) $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ is continuous and bounded, that is $\exists N \geq 0$ with $\|g(x)\| \leq N, \quad x \in \mathbb{R}^d$;

- 6) $U \subset \mathbb{R}^m$ is closed, convex and $0 \in U$;
 7) $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous and there are constants $c > 0$ and $p \geq 1$ with

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \varphi(x) \geq -c, \quad |\varphi(x)| \leq c(1 + \|x\|^p).$$

For a given control function $u \in \mathcal{U}$ we understand solution of (1) as an absolutely continuous function x which satisfies (1) almost everywhere (a.e.) on $[0, +\infty)$. In this case we say that $\{x, u\}$ is an admissible pair for (1)-(3). An admissible pair $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ is called an optimal pair (or solution) for (1)-(3) if for every admissible pair $\{x, u\}$ we have

$$J(x^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq J(x, u).$$

The existence of an optimal solution $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ is established in the next section. Let us denote

$$J^\varepsilon := \inf J(x, u) = J(x^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

Using approach of [5] we define the average function $\bar{f}$ basing on the notion of the Kuratowski upper limit [6]

$$\bar{f}(x) = \cap_{\delta > 0} \bar{F}^\delta(x),$$

where $\bar{F}^\delta$ is the convex hull of the map

$$\Phi^\delta(x) = \limsup_{\theta \nearrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} I(\theta T, T, x, \delta),$$

$$I(\theta T, T, x, \delta) = \left\{ \int_{\theta T}^T v(t) dt \mid v(\cdot) \in L^1_{loc}(0, \infty; \mathbb{R}^d), \quad v(t) \in f(t, y), \quad y \in \overline{O_\delta(x)} \right\}.$$

It is proved in [5] that if there exists $\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt$ in the sense of the Hausdorff distance $dist_H$, and if $f(t, \cdot)$ is Lipschitz, then $\bar{f} = \bar{F}$.

Also we consider the optimal control problem

$$\dot{x} \in \bar{f}(x) + g(x)u(t), \quad x(0) = x_0, \tag{7}$$

$$u \in \mathcal{U}, \tag{8}$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf \tag{9}$$

Our aim is to prove that for $\varepsilon \rightarrow 0$ it follows that

$$J^\varepsilon \rightarrow \bar{J} \text{ and } \{x^\varepsilon, u^\varepsilon\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{u}\} \text{ in some sense,}$$

where $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is a solution of (7)–(9), $\bar{J} = J(\bar{x}, \bar{u})$.

3. Main results. Let $Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m\}$ and assume the following assumptions hold.

- (A1) the mapping $t, x, u \mapsto X(t, x, u)$ is continuous in Hausdorff metric;
 (A2) the multi-valued function $X(t, x, u)$ satisfies the next growth property: there exists $M > 0$ such that

$$\|X(t, x, u)\|_+ \leq M(1 + \|x\|) \quad \forall (t, x, u) \in Q,$$

where $\|X(t, x, u)\|_+ = \sup_{\xi \in X(t, x, u)} \|\xi\|$, $\|\xi\|$ is the Euclidian norm of $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(A3) the multi-valued function $X(t, x, u)$ satisfies the next Lipschitz condition: there exists $\lambda > 0$ such that

$$\text{dist}_H(X(t, x_1, u_1), X(t, x_2, u_2)) \leq \lambda(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|);$$

(A4) the function $(x, u) \mapsto L(t, x, u)$ is continuous, moreover the function $t \mapsto L(t, x, u)$ is measurable $\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ and

$$|L(t, x, u)| \leq c(t)(1 + \|u\|),$$

where $c \in L^2(0, T)$ is a given function;

(A5) the function $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous;

(A6) the set $U \subset L^2(0, T)$ is compact.

Theorem 1. *Under the Assumptions A1-A6 the problem (1) (resp. the problem (3)) has the solution $\{\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon\}$ (resp. $\{\bar{y}, \bar{u}\}$).*

Proof. Fix $\varepsilon > 0$ and suppress it in what follows. Under the conditions on L and Φ the cost functional in (1) reaches its finite extremum. Now deduce a priori estimate for $x(t)$. Since x is an absolutely continuous function then $t \mapsto \|x(t)\|$ is an absolutely continuous too and

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| \text{ a.e.}$$

Then

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| \leq \|X(t, x, u)\|_+ \leq M(1 + \|x\|),$$

and

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t M(1 + \|x\|)ds = \|x(0)\| + MT + \int_0^t M\|x\|ds.$$

Taking into account Gronwall's inequality we have

$$\|x(t)\| \leq (\|x(0)\| + MT) e^{\int_0^t Mds} = (\|x(0)\| + MT) e^{Mt} \leq (\|x(0)\| + MT) e^{MT}. \quad (10)$$

Let $\{x_n, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ be a minimizing sequence for the problem (1), that is:

$$\{x_n, u_n\} \in \{(x, u) : u \in U, x \text{ is the solution to the Cauchy problem (1)} \\ \text{for all admissible } u\},$$

and $J(x_n, u_n) \leq \bar{J} + \frac{1}{n}$. Due to (10) we have the uniform boundedness of the sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ on every finite interval $[0, T]$, i.e. $\exists L > 0$:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t)\| \leq L, t \in [0, T].$$

Moreover,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\dot{x}_n(t)\| \leq L, t \in [0, T], \quad (11)$$

and

$$\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} M(1+L)ds = M(1+L)(t_2 - t_1),$$

so the sequence $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ is precompact in $\mathbb{C}([0, T])$. Due to the Arzel's theorem $x_n \rightarrow \bar{x}$ in $C([0, T])$ up to a subsequence.

From [2] and (11) we deduce that $\bar{x}$ is absolutely continuous and $\dot{x}_n \rightarrow \dot{\bar{x}}$ *-weakly as $n \rightarrow \infty$ in $L^\infty(0, T)$. Since $\forall \varepsilon > 0$ for a.e. t there exists n_0 such that $\forall n \geq n_0$

$$\lambda(\|x_n(t) - \bar{x}(t)\| + \|u_n(t) - \bar{u}(t)\|) < \varepsilon,$$

then by the Assumption A3 we have

$$\dot{x}_n(t) \in X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_n(t), u_n(t)\right) \subset O_\varepsilon\left(X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_n(t), u_n(t)\right)\right).$$

Taking into account the convergence theorem [4, p.60] for a.e. t we have

$$\dot{\bar{x}}(t) \in X\left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\right).$$

By the Assumption A6 we obtain the convergence $u_n \rightarrow \bar{u}, n \rightarrow \infty$ in $L^2[0, T]$ up to a subsequence.

Now we will show that $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is the solution of (1). Since $u_n(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ and $x_n(t) \rightarrow \bar{x}(t), n \rightarrow \infty$ a.e. by the Assumption A4 we obtain that

$$L(t, x_n(t), u_n(t)) \rightarrow L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ a.e., } n \rightarrow \infty,$$

and $\{L(t, x_n, u_n)\}$ is bounded in $L^2(0, T)$. Therefore by the Lions' Lemma we have that $L(t, x_n, u_n) \rightarrow L(t, \bar{x}, \bar{u})$ weakly in $L^2(0, T)$ for $n \rightarrow \infty$.

Hence,

$$\int_0^T L(t, x_n(t), u_n(t))dt \rightarrow \int_0^T L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))dt, \quad n \rightarrow \infty,$$

With the convergence $\Phi(x_n(T)) \rightarrow \Phi(\bar{x}(T))$ we have $\lim_{n \rightarrow \infty} J[x_n, u_n] = J[\bar{x}, \bar{u}] = \bar{J}$ and therefore $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is the solution of (1).

For the second optimal control problem we have a similar result.

Lemma 1. *Under the conditions 1)–7) the optimal control problem 1–3 has a solution $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.*

Lemma 2. *Let $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}$ satisfy 1)–4). Then there exists a sequence of locally Lipschitz maps $f^k : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}$ satisfying 1)–4) for $k \in \mathbb{N}$ with*

$$f(t, x) \subset \cdots \subset f^{k+1}(t, x) \subset f^k(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{N} \quad (12)$$

and for each $k \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}^d$ there exist $l_k > 0$ and $\delta_k > 0$ such that

$$\text{dist}_H(f^k(t, x'), f^k(t, x'')) \leq l_k \|x' - x''\|, \quad x', x'' \in O_{\delta_k}(x), t \geq 0, \quad (13)$$

moreover, for any $\varepsilon > 0, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d$ there is $K = K(\varepsilon, t, x)$ with

$$f^k(t, x) \subset \overline{\text{co}}f(t, O_\varepsilon(x)), \quad k \geq K. \quad (14)$$

Moreover for a fixed $\varepsilon > 0$, if x_n is the solution to (4) corresponding to the control u_n , $n \in \mathbb{N}$ and $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2} < \infty$ then up to a subsequence the following convergence holds

$$u_n \rightarrow u \text{ weakly in } L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m), \quad (15)$$

$$x_n \rightarrow x \text{ in } C([0, T]; \mathbb{R}^d), \quad T > 0, \quad (16)$$

where x is a solution of (4) with control u . Additionally, if $u_n \in \mathcal{U}$ for $n \in \mathbb{N}$ then $u \in \mathcal{U}$.

Lemma 3. *Let $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ and x_n be a solution of (4) with control u_n . Let $\{x_n, u_n\} \rightarrow \{x, u\}$ as $n \rightarrow \infty$ in the sense of (15),(16). Then x is a solution of (7) with control u .*

Now we are in a position to prove our main result.

Theorem 2. *Assume that conditions 1)–7) are satisfied. Assume that for any $u \in \mathcal{U}$ the problem (7) has a unique solution. Let $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ be an optimal pair in (4)–(6), $J^\varepsilon = J(x^\varepsilon, u^\varepsilon)$. Then*

$$J^\varepsilon \rightarrow \bar{J} \quad \text{for } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (17)$$

and for $\varepsilon_n \rightarrow 0$ it holds that

$$x^{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{x} \quad \text{in } C([0, T]; \mathbb{R}^d), \quad T > 0 \quad (18)$$

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{u} \quad \text{weakly in } L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m), \quad (19)$$

where $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is an optimal pair in (7)–(9), $\bar{J} = J(\bar{x}, \bar{u})$.

Proof.

Let for $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\{x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\}$ be an optimal pair for (4)–(6). From the optimality of u_n^ε it follows that

$$J(x^{\varepsilon_n}, u_n^\varepsilon) \leq J(x_n, 0),$$

where x_n is a solution of (4) with $\varepsilon = \varepsilon_n$, $u = 0$. Then

$$-\frac{c}{\gamma} + \|u_n^\varepsilon\|^2 \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} c(1 + (\|x_0\| + (M+N)t)^p) dt \leq C_1, \quad (20)$$

where C_1 does not depend on n . Additionally, we have

$$\|x_n^\varepsilon(t) - x_n^\varepsilon(s)\| \leq M|t - s| + N|t - s|^{\frac{1}{2}} \|u_n^\varepsilon\|. \quad (21)$$

Estimations (20),(21) and the Arzela-Ascoli theorem imply that on some subsequence $\{x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$ converges to some $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ in the sense of (18),(19). Hence, from Lemma 3 we deduce that $\bar{x}$ is a solution of (7) with control $u \in \mathcal{U}$. Let us prove that $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is an optimal pair.

For every $u \in \mathcal{U}$ and the corresponding solution x_n to (4) we have

$$J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(x_n, u). \quad (22)$$

Arguing as in the proof of Lemma 1, we get from (22) after passing to the limit:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u). \quad (23)$$

Due to (21) with u_n^ε replaced with u we have that $x_n \rightarrow x$ in the sense of (18). By Lemma 3 it follows that x is a unique solution of (7) with control u . So, from (23) follows

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u) = J(x, u).$$

This inequality means that $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ is an optimal pair.

Applying previous arguments with $u = \bar{u}$ we get

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n, \bar{u}) = J(\bar{x}, \bar{u}).$$

This means, that there exists $\lim_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} = J(\bar{x}, \bar{u})$. Because of arbitrariness of $\varepsilon_n \rightarrow 0$, we get (17). Theorem is proved.

4. Concusions. We significantly advance our understanding of optimal control problems characterized by non-linear dynamics and varying conditions. The first study introduces the averaging method as a viable technique to address finite interval problems, elucidating how it simplifies the control process by reducing the complexity of the differential inclusions involved. This approach not only facilitates the identification of optimal solutions but also broadens the applicability of control strategies to a wider range of practical scenarios.

Conversely, the second article delves into the asymptotic behavior of control problems defined on semiaxes, where the challenges posed by fast oscillating coefficients are meticulously examined. The authors demonstrate that under specific conditions, asymptotic techniques can effectively yield optimal control solutions, thereby enhancing our ability to manage systems with rapidly changing dynamics.

Together, these works highlight the interplay between averaging methods and asymptotic analysis, suggesting that a hybrid approach may yield robust strategies for solving complex optimal control problems. By addressing both finite intervals and unbounded domains, the studies collectively contribute to a more comprehensive framework for understanding and applying control methodologies in non-linear settings. Future research could benefit from integrating insights from both methodologies to further refine control strategies, potentially leading to improved outcomes in various engineering and applied mathematics fields.

This research was supported by NRFU project No. 2023.03/0074 "Infinite-dimensional evolutionary equations with multivalued and stochastic dynamics"

References

1. Blagodatskih, V. I., & Phillipov, A. F. (1985). Differential inclusions and optimal control. *Topology, Ord. Diff. Eq., Dyn.Sys.*, 169, 194–252.
2. Aubin, J.-P., & Cellina, A. (1984). *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory*. Springer: Berlin, Heidelberg.
3. Aumann, R. J. (1965). Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 12(5), 1–12.
4. Aubin, J.-P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley: New York.
5. Gama, R., Guerman, A., & Smirnov, G. On the asymptotic stability of discontinuous systems analysed via the averaging method. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 74(4), 1513–1522. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.10.024>.
6. Aubin, J.-P., & Frankowska, H. (2009). *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser Boston, MA. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0>

Жук Т. Ю. Усереднені задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на скінченних і нескінченних інтервалах.

У даній статті ми використовуємо метод усереднення, щоб знайти наближений розв'язок для оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями з швидкоосцилюючими коефіцієнтами.

Дана робота висвітлює взаємодію між методами усереднення та асимптотичним аналізом, припускаючи, що гібридний підхід може дати надійні стратегії для вирішення складних проблем оптимального керування. Звертаючись як до скінченних інтервалів, так і до необмежених областей, дослідження разом роблять внесок у більш повну структуру для розуміння та застосування методології контролю в нелінійних умовах. Ми використовуємо метод усереднення, щоб знайти наближене рішення для цих задач оптимального керування. Майбутні дослідження можуть отримати вигоду від інтеграції розуміння з обох методологій для подальшого вдосконалення стратегій контролю, що потенційно призведе до покращення результатів у різних галузях інженерії та прикладної математики. Розглядаються задачі оптимального керування диференціальним включенням типу Каратеодорі.

Ключові слова: нелінійне диференціальне включення, оптимальне керування, метод усереднення, наближений розв'язок.

Список використаної літератури

1. Blagodatskih V. I., Phillipov A. F. Differential inclusions and optimal control. *Topology, Ord. Diff. Eq., Dyn.Sys.* 1985. Vol. 169. P. 194–252.
2. Aubin J.-P., Cellina A. *Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory.* Springer: Berlin. Heidelberg, 1984. 355 p.
3. Aumann R. J. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* 1965. Vol. 12, No. 5. P. 1–12.
4. Aubin J.-P., Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis.* Wiley: New York, 1984.
5. Gama R., Guerman A., Smirnov G. On the asymptotic stability of discontinuous systems analysed via the averaging method. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 2011. Vol. 74, No. 4. P. 1513–1522. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.10.024>
6. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis.* Birkhäuser Boston. MA, 2009. 461 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0>

Recived 15.09.2024

О. В. Капустян¹, А. О. Станжицький², О. М. Станжицький³

¹ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
kapustyan@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9373-6812>

² Інститут математики НАН України,
молодший науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань,
доктор філософії
stanzhytskiy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7587-1608>

³ Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
завідувач кафедри загальної математики,
доктор фізико-математичних наук, професор
stanzhytskiy@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1456-729X>

СЛАБКІ РОЗВ'ЯЗКИ СТОХАСТИЧНО ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ШВИДКО ЗРОСТАЮЧИМИ ЗОВНІШНІМИ ЗБУРЕННЯМИ

В даній роботі вивчаються стохастичні еволюційні рівняння у нескінченновимірних просторах. Ці рівняння є математичними моделями реальних процесів природознавства із розподіленими параметрами і таких, що у процесі своєї еволюції зазнають впливу випадкових факторів. Дані фактори можна розглядати як сумарний результат великої кількості незалежних у сукупності випадкових величин. Тоді, у силу центральної граничної теореми, отримаємо, що випадкові збурення описуються нескінченновимірним процесом білого шуму, що приводить до стохастичних рівнянь Ітовського типу. Характерним прикладом таких рівнянь є стохастичні параболічні рівняння із нелінійним зносом. Головним диференціальним оператором тут є, як правило, оператор другого порядку еліптичного типу. Відомі раніше результати стосувались існування та єдиності слабких розв'язків таких рівнянь за умови степеневого росту нелінійностей та деяких умов монотонності. Однак у застосуваннях часто трапляється нелінійності експоненціального росту, наприклад, добре відоме рівняння Франка–Каменського.

В даній роботі отримані умови існування, єдиності та неперервної залежності слабких розв'язків від правих частин та початкових даних. При цьому нелінійності можуть допускати ріст вище степеневого. Також для розв'язків отримані оцінки у спеціальних Соболевських нормах.

Ключові слова: процес Вінера, лапласіан, еліптичність, простір Соболева, крайова задача.

1. Вступ. В даній роботі вивчається стохастично збурене нескінченновимірним Q -вінерівським процесом рівняння реакція-дифузія вигляду:

$$\begin{cases} dy = (\Delta y + f(y) + u(t))dt + \sigma(y)dW(t), \\ y(t, x) = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \in [0, T], \\ y(0, x) = y_0(x, w), \end{cases} \quad (1)$$

де $D \subset R^d$, $d \geq 2$, обмежена область із ляпуновською межею, Δ — оператор Лапласа, f і σ дійсні скалярні функції з R^1 в R^1 , що породжують відповідні

абстрактні відображення як відображення Немицького: $y(x) \rightarrow f(y(x)), \sigma(y(x)), u(t)$ певне випадкове збурення, що часто інтегрується як вектор керування. Такі рівняння виникають у застосуваннях як математичні моделі процесів із розподіленими параметрами, що зазнають випадкових впливів. Типовими представниками є, наприклад, модель Ходжкіна–Каменського–Хакслі (нейрофізіологія), де $y(t, x)$ є еластичним потенціалом клітинного нерва [1], модель Давсона–Флемінга популяційної динаміки [2] та багато інших моделей.

Але, результати, що стосуються коректної розв’язності відповідних рівнянь отримані за умови степеневого росту функції реакції f , наприклад [3, 4] для детерміністичного випадку та [5, 6] для стохастичного випадку.

Однак, зустрічаються ситуації, коли функція $f(y)$ має ріст вище лінійного, типовим представником тут є рівняння Франка–Каменського [7], де функція f має експоненційний ріст. Тому важливо довести конкретну розв’язність задачі (1) і в подібних випадках.

Для отримання відповідного результату ми використовуємо підхід робіт [8, 9], розроблений для детермінованого випадку, де основною умовою на функцію f є наступна:

$$f'(s) \leq \Lambda_f, \quad \Lambda_f \geq 0.$$

Очевидно, що наприклад, функція $f(s) = e^{-s}$ дану умову задовольняє, але не задовольняє умову степеневого росту.

2. Постановка задачі та основний результат. Позначимо наступні простори $H = L^2(D)$, $V = H_0^1$, $V' = H^{-1}$. Тоді $V \subset H \subset V'$ утворюють трійку Гельфанда. Надалі $\|\cdot\|$ — норма в H , $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спарка між V' і V (тобто $\langle z, v \rangle := z(v)$, для $z \in V'$, $v \in V$.)

При цьому

$$\langle z, v \rangle = (z, v) \text{ для } z \in H, v \in V.$$

Нехай (Ω, F, P) є повним ймовірностним простором, а (F_t) — нормальна фільтрація, $t \in [0, T]$. Позначимо також $Q = D \times (0, T)$ і $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$.

Задамо послідовність $\{\lambda_i\}_1^\infty$ — невід’ємних чисел таку, що $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 < \infty$ і нехай $\{l_i\}_1^\infty$ є ортогональним базисом в H , що $l_i \in L^\infty(D)$ і $\sup_i \|l_i\|_{L^\infty} < \infty$.

Введемо лінійний неперервний оператор Q такий, що він є невід’ємно визначеним і $Tr(Q) < \infty$, $Ql_i = \lambda_i l_i$.

За допомогою цього оператора стандартним чином можна визначити H — значний процес Вінера

$$W(t) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i l_i(x) \beta_i(t), \quad t > 0$$

який називається Q -вінерівським процесом. Тут $\beta_i(t)$ є стандартними, скалярними, незалежними в сукупності процесами Вінера. Відносно $W(t)$ і потоку σ -алгебр (F_t) будемо вважати наступне:

- 1) $W(t) \in F_t$ — вимірним при всіх $t \in [0, T]$;
- 2) $W(t+h) - W(t)$ не залежить від σ -алгебри F_t при всіх $h \geq 0$, $t \geq 0$.

Позначимо $U = Q^{\frac{1}{2}}(H)$. Тоді з [10, Lemma 2.2] випливає, що $U \in L^\infty(D)$. Аналогічно [10] введемо мультиплікативний оператор $\Phi : U \rightarrow H$ наступним чином

$$\Phi(\psi) := \varphi\psi, \quad \psi \in U,$$

що визначений функцією $\varphi \in H$. Оскільки $\psi \in L^\infty(D)$, то даний оператор визначений коректно. Тоді $\Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} : H \rightarrow H$ визначає оператор Гільберта-Шмідта.

Простір таких операторів позначатимемо $L_2^0 = L_2(Q^{\frac{1}{2}}H, H)$, а норму в ньому $\|\cdot\|_{L_2^0}$.

При цьому

$$\begin{aligned} \left\| \Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2^0}^2 &:= \sum_{i=1}^{\infty} \left\| \Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} l_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \int_D \varphi^2(x) l_i^2(x) dx \leq \\ &\leq \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 \cdot \|\varphi\|^2 Tr(Q), \end{aligned} \quad (2)$$

де $TrQ = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = \lambda$.

Тоді, для F_t — вимірного процесу $\Phi : \Omega_T \rightarrow L(U, H)$, що задовольняє умову

$$E \int_0^T \left\| \Phi \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_2^0}^2 dt < \infty,$$

можемо визначити стохастичний інтеграл $\int_0^t \Phi(s) dW(s)$ як елемент простору H . Деталі можна подивитись в [11].

Даний інтеграл допускає представлення

$$\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^t \Phi(s, \cdot) l_i(\cdot) d\beta_i(s),$$

при цьому

$$E \left\| \int_0^t \Phi(s) dW(s) \right\|^2 \leq \lambda_i \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 \int_0^t E \|\Phi(s, \cdot)\|^2 ds. \quad (3)$$

Приведемо тепер умови на дійсні функції f і σ , що характеризують реакцію та випадкові впливи.

(A1) $f : R^1 \rightarrow R^1$ є неперервно диференційовною функцією, що $f(0) = 0$ і існує стала $\Lambda_f \geq 0$ така, що $f'(s) \leq \Lambda_f$, для всіх $s \in R^1$;

(A2) $\sigma : R^1 \rightarrow R^1$, задовольняє глобальну умову Ліпшиця зі сталою L_σ .

Очевидно, що $|\sigma(s)| \leq L_\sigma |s| + |\sigma(0)|$.

(A3). Існує стала $C > 0$ така, що

$$|f'(s)\sigma^2(s)| \leq C(1 + |s|^p), \quad (4)$$

для деякого $p \geq 2$.

Зрозуміло, що можна завжди вважати p -парним.

Розв'язок задачі (1) будемо розглядати у слабкому сенсі. А саме:

Означення 1. Нехай $y_0 \in F_0$ — вимірним випадковим процесом, а $u(t) \in F_t$ — вимірним. Тоді F_t — адаптований випадковий процес $y(t) \in L^2(\Omega_T, V)$ називається слабким розв'язком задачі (1) на $[0, T]$, якщо для всіх $\phi \in V$ виконується рівність:

$$\begin{aligned} (y_k(t), \phi) &= (y_0, \phi) - \int_0^t \left(\frac{\partial y(s)}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + (u(s), \phi) + \\ &+ (f(y(s)), \phi) ds + \int_0^t (\phi, \sigma(y(s)) dW(s)). \end{aligned} \quad (5)$$

для майже всіх $t \in [0, T]$ з ймовірністю 1.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1 (Існування та єдиності). *Нехай виконані умови (A1)–(A3) і $y_0 \in L^\infty(\Omega, L^\infty(D))$ та $E \int_0^T \int_D u^p(t, x) dx dt < \infty$.*

Тоді задача (1) має єдиний слабкий розв'язок на $[0, T]$.

Нехай $y(t, y_0, u)$ і $y(t, y_1, u_1)$ два розв'язки рівняння (1) з початковими умовами y_0, y_1 і процесами $u_1(t)$ та $u_2(t)$ у правій частині (1) відповідно.

Наступна теорема гарантує неперервну залежність розв'язків від початкових даних та процесів $u_1(t)$ та $u_2(t)$.

Теорема 2 (Неперервна залежність). *За умов теореми 1 існує стала $C(T)$ така, що*

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} E \|y(t, y_0, u) - y(t, y_1, u_1)\|^2 &\leq C(T)(E \|y_0 - y_1\|^2 + \\ &+ \int_0^T E \|u_1(t) - u(t)\|^2 dt). \end{aligned} \quad (6)$$

3. Доведення теорем 1 і 2. Доведення теореми 1. Замість рівняння (1) розглянемо спочатку “зрізане” рівнянням із обмеженими коефіцієнтами.

Для кожного цілого $k \geq \|y_0\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))}$, покладемо $f_k(s) = f(P_k(S))$ і $\sigma_k(s) = \sigma(P_k(s))$, де $P_k(s) = \min\{\max\{-k, s\}, k\}$.

Далі розглянемо “зрізане” рівняння

$$\begin{cases} dy_k = (\Delta y_k + f_k(y_k) + u)dt + \sigma_k(y_k)dW(t), \\ y_k = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \in [0, T] \\ y_k(0, x) = y_0(x, w). \end{cases} \quad (7)$$

В даному рівнянні $f_k \in \sigma_k$ є обмеженими функціями (зі сталою залежною від k), а також глобально ліпшицевими, причому стала Ліпшиця для σ_k така ж, як і для σ , а для f_k , звичайно, залежить від k .

Таким чином, рівняння (7) задовольняє умови теореми 7.5 [12, гл. 6], а отже має єдиний слабкий розв'язок на $[0, T]$. При цьому справедлива енергетична рівність:

$$\begin{aligned} \|y_k(t)\|^2 &= \|y_0\|^2 + 2 \int_0^t (-\|\nabla y_k(s)\|^2 + (f_k(y_k(s)), y_k(s)) + (u(s), y_k(s)) ds + \\ &+ \int_0^t \|\sigma_k(y_k(s))\|_{L_2^0}^2 ds + 2 \int_0^t \sigma_k(y_k(s)) dW(s), y_k(s)). \end{aligned} \quad (8)$$

З (2) також випливає, що

$$\|\sigma_k(y_k(t))\|_{L_2^0} = \sum_i \lambda_i^2 \int_D \sigma_i^2(y_k) l_i^2(x) dx \leq \lambda \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 l_\sigma^2 (1 + \|y_k\|^2). \quad (9)$$

Також з (A1), з використання теорема про середнє значення, отримуємо:

$$(f_k(y_k(s)), y_k(s)) = \int_D y_k f_k(y_k) dx \leq \Lambda_f \|y_k\|^2. \quad (10)$$

Також маємо, що

$$(u(s), y_k(s)) \leq \frac{1}{2}(\|u(s)\|^2 + \|y_k(s)\|^2). \quad (11)$$

Далі, із енергетичної рівності (8) маємо

$$\begin{aligned} \|y_k(t)\|^2 &\leq \|y_0\|^2 + 2 \int_0^t (-\Lambda \|y_k(s)\|_V^2 + C_1 \|y_k(s)\|^2 + \Lambda_f \|y_k(s)\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \|u(s)\|^2 + \|y_k(s)\|^2 + \lambda \sup_i \|l_i\|_{L^\infty}^2 L_\sigma^2 (1 + \|y_k(s)\|^2) ds + \\ &+ 2 \int_0^t (\sigma_k(y_k(s)) dW(s), y_k(s)), \end{aligned}$$

для деяких додатніх сталих Λ і C_1 . Отже,

$$\begin{aligned} E\|y_k(t)\|^2 + \Lambda E \int_0^t \|y_k(s)\|_V^2 ds &\leq E\|y_0\|^2 + C_2 \int_0^t E\|y_k(s)\|^2 ds + C_3 + \\ &+ \int_0^t E\|u(s)\|^2 ds \leq E\|y_0\|^2 + C_3 + \\ &+ C_2 \int_0^t E\|y_k(s)\|^2 ds + T \left(\int_0^t E\|u(s)\|_{L^p}^p ds \right)^{\frac{2}{p}} \end{aligned} \quad (12)$$

для деяких додатніх сталих C_2 і C_3 , залежних лише від T . З (12) з використанням леми Гронвулла маємо

$$\sup_{t \in [0, T]} E\|y_k(t)\|^2 + \int_0^t E\|y_k(s)\|_V^2 ds \leq C(y_0, T, u). \quad (13)$$

Отже, y_k слабо збігається (за підпоследовністю) в $L^2(\Omega_T; V)$. З лінійного росту σ , маємо також, що

$$E \int_0^T \|\sigma_k(y_k(t))\|_{L_2^0}^2 dt \leq C_4, \quad (14)$$

отже $\sigma_k(y_k) \rightarrow \Phi$ (слабко), $k \rightarrow \infty$ в $L^2(\Omega_T; L_2^0)$.

Далі розглянемо функцію $F_k(z) = -\int_0^z f_k(s) ds$. Маємо, що $F'_k = -f_k(z)$, $F''_k(z) = -f'_k(z)$. Покладемо

$$G(y_k(t)) = \int_D F_k(y_k(t)) dx.$$

Використовуючи формулу Іто для G , матимемо

$$\begin{aligned} G(y_k(t)) - G(y_k(0)) &= \int_0^t (-(\nabla y_k(s), \nabla f_k(y_k(s)) - (f_k(y_k(s)), u(s))) ds - \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^t \int_D f_k(y_k(s)) \sigma_k(y_k(s)) l_i(x) dx d\beta_i(s) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \int_D f'_k(s) \sigma_k^2(y_k(s)) l_i^2(x) dx ds - \\ &- \int_0^t \|f_k(y_k(s))\|^2 ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, що

$$(\nabla y_k(s), \nabla f_k(y_k)) \leq C_4 \|y_k\|_V^2, \quad (16)$$

для деякої додатної сталої C_4 . Також,

$$|(f_k(y_k), u)| \leq \epsilon \|f_k(y_k)\|^2 + \frac{C_5}{\epsilon} \|y_k(s)\|^2, \quad (17)$$

для $C_5 > 0$ і $\epsilon > 0$.

Оцінимо тепер $G(y_k)$. З теореми про середнє значення випливає існування функції: $\Theta : R^1 \rightarrow [0, 1]$, такої, що для $z > 0$

$$\begin{aligned} F_k(z) &= - \int_0^z f_k(s) ds = - \int_0^z f'(\Theta(s)P_k(s))P_k(s) ds \geq \\ &\geq \int_0^z \Lambda_f(-P_k(s)) ds \geq \Lambda_f \int_0^z -s ds = -\frac{\Lambda_f}{2} z^2 \end{aligned}$$

Якщо $z < 0$, то маємо

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \int_z^0 f_k(s) ds = \int_z^0 f'(\Theta(s)P_k(s))P_k(s) ds \geq \\ &\geq \int_z^0 \Lambda_f P_k(s) ds \geq \Lambda_f \int_z^0 s ds = -\frac{\Lambda_f}{2} z^2. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримуємо наступну оцінку

$$G(y_k(t)) = \int_D F_k(y_k(t)) dx \geq -\frac{\Lambda_f}{2} \|y_k(t)\|^2. \quad (18)$$

Для $G(y_k(0))$, враховуючи неперервність F_k і належність y_0 до простору $L^\infty(\Omega, L^\infty(D))$, матимемо

$$|G_k(y_0)| \leq C_6 \|y_0\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))}^2, \quad (19)$$

де $C_6 = C_6(y_0, f) > 0$. Взявши в (15) математичне сподівання, матимемо

$$\begin{aligned} -\frac{\Lambda_f}{2} E \|y_k(t)\|^2 &\leq C_6 E \|y_0\|_{L^\infty(\Omega, L^\infty(D))}^2 + C_4 \int_0^t E \|y_k(s)\|_V^2 ds + \\ &+ \frac{C_5}{\epsilon} \int_0^t E \|y_k(s)\|^2 ds + \epsilon \int_0^t E \|f_k(y_k(s))\|^2 ds + \frac{T}{\epsilon} \left(\int_0^T E \|u(t)\|_{L^p}^2 dt \right)^{\frac{p}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 E \int_0^t \|f'_k(y_k(s)) \sigma_k^2(y_k(s)) l_i^2(x) dx ds - \int_0^T E \|f_k(y_k(s))\|^2 ds. \end{aligned} \quad (20)$$

Звідси, з використанням (A2) і (13) матимемо

$$E \int_0^T \|f_k(y_k(t))\|^2 dt \leq C_7 + C_8 \int_0^T E \int_D |y_k(t)|^p dx dt, \quad (21)$$

для деяких сталих $C_7 = C_7(y_0, u) > 0$ і $C_8 > 0$.

Отже, ми отримаємо рівномірну оцінку

$$E \int_0^T \|f_k(y_k(s))\|^2 ds \leq C_9, \quad (22)$$

якщо доведемо рівномірну оцінку для

$$E \int_0^T \|f_k(y_k(s))\|_{L^p}^p ds \leq C_{10}. \quad (23)$$

Для її отримання ми використаємо теорію стохастичного інтегрування в банахових просторах, зокрема в $L^p(L^p - \text{теорія})$. А саме, скористаємось теоремою 1.1 з [13]. Неважко переконатися, що для “зрізаного” рівняння (7) виконані всі умови цієї теореми. Дійсно, в ролі спектральної міри, що фігурує в даній теоремі, (умова $H1$) можна взяти наступну міру: для кожної борелевої множини A із R^d покладемо $\mu(A) := \lambda(A \cap D)$, де λ — міра Лебега на R^d . Тоді міра μ має вигляд типу $(H1) : \mu = \mu + \mu_1$, де $\mu_1(A) = 0$, для кожної борелевої множини A із R^d . Очевидно, що μ_1 абсолютно неперервна відносно міри λ . Таким чином, характеристика a_w , що фігурує в умові $(H1)$ теореми 1.1 [13] рівна нулю. Перевірка решти умов цієї теореми для рівняння (7) тривіальна.

Таким чином, рівняння (7) має єдиний м'який розв'язок z_k такий, що

$$E \sup_{t \in [0, T]} \|z_k(t)\|_{L^p}^p < \infty. \quad (24)$$

Оскільки $z_k(t) \in L^2(D)$ то даний процес є м'яким розв'язком (7) і в H . Але, у нашому випадку, слабкий розв'язок співпадає із м'яким, [5. Пропозиція G05 та зауваження G06]. Тоді, в силу єдиності, $y_k(t) = z_k(t)$, а тому врахувавши (24), можна використати формулу Іто для $\int_D y_k^p(t, x) dx$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_D y_k^p(t) dx - \int_D y_k^p(0) dx &= \int_0^t (p \langle \Delta y_k, y_k^{p-1} \rangle dx + p(u(s), y_k^{p-1}(s)) + \\ &+ p \left(f_k(y_k(s), y_k^{p-1}(s)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \int_D p(p-1) y_k^{p-2} \sigma_k^2(y_k(s)) l_i^2 dx \right) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_0^t \int_D p y_k^{p-1}(s) \sigma_k(y_k(s)) l_i(x) dx d\beta_i(s). \end{aligned} \quad (25)$$

Оцінимо в (25) кожний доданок окремо. Для спарки між просторами V і V' маємо

$$\langle \Delta y_k, y_k^{p-1} \rangle = - \int_D (p-1) y_k^{p-2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq 0. \quad (26)$$

Далі

$$(u, y_k^{p-1}) = \int_D y_k^{p-1} u(s) dx \leq C_{11} (\|y_k\|_{L^p}^p + \|u\|_{L^p}^p), \quad (27)$$

а також

$$(f_k(y_k), y_k^{p-1}) = \int_D y_k^{p-2} y_k f_k(y_k) dx \leq \int_D \Lambda_f y_k^p dx. \quad (28)$$

Тут ми використали умову (A1). Також отримаємо

$$\int_D y_k^{p-2} \sigma^2(y_k) l_i^2 dx \leq \int_D y_k^{p-2} L_\sigma^2 (1 + |y_k^2| dx) \leq C_{12} \int_D y_k^p dx + C_{13}, \quad (29)$$

для деяких додатніх сталих $C_{10} - C_{13}$.

Взявши математичне сподівання в (25), з використанням (25)–(29), матимемо

$$E \int_D y_k^p(t) dx \leq C_{14} + C_{15} \int_0^t E \int_D y_k^p(s) dx ds,$$

звідки, прийнявши до уваги нерівність Гронуолла, отримаємо оцінку (23), а відтак і (22).

Отже, послідовність $\{f_k(y_k)\}$ є слабо компактною в $L^2(\Omega_T, L^2(D))$, а отже за послідовністю

$$\begin{aligned} y_k &\rightharpoonup y \text{ в } L^2(\Omega_T, V), \\ \sigma_k(y_k) &\rightharpoonup \Phi \text{ в } L^2(\Omega_T, L_2^0) \\ f_k(y_k) &\rightharpoonup \psi \text{ в } L^2(\Omega_T, H). \end{aligned} \quad (30)$$

Далі обґрунтуємо граничний перехід в (7). Позначимо $S(t)$ — напівгрупу, генератором якої є оператор Лапласа. Оскільки y_k є слабким розв'язком (7) то, як було сказано вище, у нашому випадку, y_k є також м'яким розв'язком. Тому, в силу означення м'якого розв'язку, маємо наступне інтегральне представлення

$$\begin{aligned} y_k(t) &= S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)(f_k(y_k(s)) + u(s))ds + \\ &+ \int_0^t S(t-s)\sigma_k(y_k(s))dW(s). \end{aligned} \quad (31)$$

Добре відомо, що напівгрупа $S(t)$ компактна при $t > 0$, як відображення з H в H [4, гл. 6].

Для $\alpha \in (\frac{1}{p}; 1]$ введемо до розгляду оператор G_α :

$$(G_\alpha \varphi)(t) = \int_0^1 (t-s)^{\alpha-1} S(t-s)f(s)ds. \quad (32)$$

Для даного відображення є справедливим наступне твердження.

Твердження 1 (11). *Якщо $S(t)$ компактний оператор при $t > 0$, то оператор G_α з (32) є також компактным оператором з $L^p(0, T; H)$ в $C([0, T]; H)$.*

Нагадаємо, що у наших позначеннях $H = L^2(D)$ і ми беремо $p > 2$.

Із стохастичного аналогу теореми Фубіні [11] отримується наступна факторизаційна формула

$$\int_0^t S(t-s)\psi(s)dW(s) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} (G_\alpha Y)(t), \quad t \in [0, T], \quad (33)$$

де

$$Y(t) = \int_0^t (t-\epsilon)^{-\alpha} S(t-\tau)\Phi(\tau)dW(\tau). \quad (34)$$

Тому

$$y_k(t) = S(t)y_0 + G_1(f_k(y_k)) + u(t) + G_\alpha(Y_k)(t), \quad (35)$$

де

$$Y_k(t) = \int_0^t (t-s)^{-\alpha} S(t-s) \sigma_k(y_k(s)) dW(s). \quad (36)$$

Звідси маємо

$$E \int_0^T \|Y_k(t)\|^p dt \leq C_{16} E \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha} \|\sigma_k(y_k(s))\|_{z_2^0}^2 ds \right)^{\frac{p}{2}} dt.$$

Використавши нерівність Хаусдорфа-Юнга для конволюцій, матимемо

$$E \int_0^T \|Y_k(t)\|^p dt \leq C_{16} E \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-2\alpha} \right) \|\sigma_k(y_k(t))\|_{z_2^0}^p dt, \quad (37)$$

для $\alpha \in (\frac{1}{p}, \frac{1}{2})$.

Прийнявши також до уваги лінійне зростання σ , матимемо

$$E \int_0^T \|Y_k(t)\|^p dt \leq C_{17} \int_0^T (1 + E \|y_k(t)\|^p) dt.$$

Але

$$\begin{aligned} E \int_0^T \|y_k(t)\|^p dt &= E \int_0^T \left(\int_D y_k^2(t, x) dx \right)^{\frac{p}{2}} dt \leq \\ &\leq C_{18} E \int_0^T \left(\int_D y_k^p(t, x) dx \right) dt \leq C_{19}, \end{aligned} \quad (38)$$

в силу (22). Тут $C_{15} - C_{19}$ — деякі додатні сталі.

Аналогічно маємо

$$E \int_0^T \|f_k(y_k(t))\|^2 dt \leq C_{20}, \quad (39)$$

і

$$E \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leq C_{21} + C_{22} \left(E \int_0^T \left(\int_D u^p(t, x) dx \right) dt \right)^{\frac{2}{p}} \leq C_{23}, \quad (40)$$

для деяких додатніх сталих $C_{21} - C_{23}$.

З твердження ([11]) випливає, що множина

$$K(r) = \left\{ S(\cdot)y_0 + G_\alpha \varphi(\cdot) + G_1 g(\cdot) : \int_0^T \|f(t)\|^p dt \leq r, \int_0^T \|g(t)\|^2 dt \leq r \right\},$$

є компактом в $C([0, T]; H)$. Тоді з (36)–(38), з використанням нерівності Чебишева, отримаємо, що для довільного $\epsilon > 0$ можна знайти $r > 0$ таке, що для всіх $k \in N$

$$\begin{aligned} P \{y_k \notin K(r)\} &\leq P \left\{ \int_0^T \|f_k(y_k(t)) + u(t)\|^2 dt > r \right\} + \\ &+ P \left\{ \int_0^T \|y_k(t)\|^p dt > \frac{\pi r}{\sin \alpha \pi} \right\} \leq \frac{C_{24}}{r^2} + \frac{C_{25}}{r^p} < \epsilon, \end{aligned}$$

де C_{24} і C_{25} додатні сталі.

Таким чином, для множини мір $z(y_k)$ маємо

$$z(y_k)(K(r)) = P\{y_k \in K(r)\} \geq 1 - \epsilon, k = 1, 2, \dots$$

Тоді, згідно з теоремою Прохорова, ця множина мір компактна, а отже $\mu_k = z(y_k)$ слабо збігається в $C([0, T]; H)$ до деякої міри μ . За теоремою Скорохода [14] існує ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$, фільтрація $(\tilde{F}_t)$ і процес Вінера $\tilde{W}(t)$, випадкові процеси $\tilde{y}_k, \tilde{y}, \tilde{u}$ такі, що $z(\tilde{y}) = \mu$, $z(\tilde{y}_k) = z(y_k)$, $z(\tilde{u}) = z(u)$, і $\tilde{y}_k \rightarrow \tilde{y}$ в $C([0, T]; H)$ майже всюди за мірою $\tilde{P}$.

Оскільки закони розподілів співпадають, то з означення слабкої збіжності маємо, що $\tilde{y}_k \rightharpoonup \tilde{y}$ в $L^2(\tilde{\Omega}, V)$, $\sigma_k(\tilde{y}_k) \rightharpoonup \tilde{\Phi}$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; L_2^0)$ та $f_k(\tilde{y}_k) \rightharpoonup \tilde{\Psi}$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; H)$. Тоді, з використанням леми Ліонса [15, Леми 1.3] $f_k(\tilde{y}_k) \rightharpoonup f(\tilde{y})$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; H)$, $\tilde{y}_k(t, x, w) \rightarrow y(t, x, w)$ майже всюди, $\sigma_k(\tilde{y}_k) \rightharpoonup \sigma(\tilde{y})$ в $L^2(\tilde{\Omega}_T; L_2^0)$.

Із властивостей стохастичного інтеграла випливає, що інтеграл $\int_0^t f(s) dW(s)$ є лінійним неперервним оператором з банахового простору $L^2(\Omega_T, L_2^0)$ в $L^2(\Omega, H)$, а отже і неперервним відносно слабкої збіжності.

Значить

$$\int_0^t \sigma_k(\tilde{y}_k^s) d\tilde{W}(s) \rightarrow \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s)) d\tilde{W}(s).$$

в $L^2(\Omega_T, L_2^0)$ і зокрема в $L^\infty([0, T]; L^2(\Omega, H))$.

Для f_k із умови (A1) отримуємо

$$(f_k(s_1) - f_k(s_2))(s_1 - s_2) \leq \Lambda_f(s_1 - s_2)^2. \quad (41)$$

Оскільки $\sigma_k(s)$ є ліпшицевими зі сталою L_σ , то

$$\|\sigma_k(u) - \sigma_k(v)\|_{L_2^0}^2 \leq L_\sigma^2 C_{20} \|u - v\|^2, \quad (42)$$

для деякої сталої $C_{20} > 0$.

Далі, з використанням теореми Фубіні і означення слабкої збіжності, для довільної $\phi \in L^\infty(\tilde{\Omega}_T)$, $v \in V$ матимемо

$$\begin{aligned} E \int_0^T (\tilde{y}(t), \varphi(t)v) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \int_0^T (\tilde{y}_k(t), \varphi(t)v) dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T (\tilde{y}_0, \varphi(t)v) dt + \int_0^T \int_0^t \langle \Delta \tilde{y}_k(s), \varphi(s)v \rangle ds dt + \right. \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t (f_k(\tilde{y}_k(s), \varphi(t)v)) ds dt + \int_0^T \int_0^t (\tilde{u}(s) \varphi(t), v) ds dt + \\ &\quad + \int_0^T \int_0^t (\sigma_k(\tilde{y}_k(s), d\tilde{W}(s), \phi(t)v)) ds dt = \lim_{k \rightarrow \infty} E \int_0^T (\tilde{y}_0, \varphi(t)v) dt + \\ &\quad + E \int_0^T \langle \Delta \tilde{y}_k(s), \int_0^T \phi(t) dt v \rangle ds + E \int_0^T (f_k(\tilde{y}_k(s), \int_0^T \varphi(t) dt v) ds + \\ &\quad + E \int_0^T (\tilde{u}(s), \int_s^T \varphi(t) dt v) ds + E \int_0^T \left(\int_0^t \sigma_k(\tilde{y}_k(s)) d\tilde{W}(s), \varphi(t)v \right) dt = \end{aligned}$$

$$= E \left(\int_0^T < \tilde{y}_0 + \int_0^t (\Delta \tilde{y}(s) + f(\tilde{y}(s)) + \tilde{u}(s)) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s)) d\tilde{W}(s), \varphi(t)v > dt \right).$$

В силу довільності ϕ і v звідси отримуємо, що

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \int_0^t (\Delta \tilde{y} + f(\tilde{y}) + \tilde{u}(s)) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{y}(s)) d\tilde{W}(s)$$

в V .

Отже $\tilde{y}$ є слабким мартингальним розв'язком (1) на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$. Енергетична рівність випливає з формули Іто для $\|y(t)\|^2$.

Доведемо тепер потраєкторну єдиність.

Нехай $\tilde{y}_1$ і $\tilde{y}_2$ два розв'язки рівняння (1) на $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ і $\tilde{y}_1(0) = \tilde{y}_2(0) = \tilde{y}_0$. Тоді

$$d(\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)) = \int_0^t (\Delta(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)) + f(\tilde{y}_1) - f(\tilde{y}_2) dt + \int_0^t (\sigma(\tilde{y}_1) - \sigma(\tilde{y}_2)) d\tilde{W}(t).$$

Отже

$$\begin{aligned} E \|\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)\|^2 &= E \left(2 \int_0^t (< \Delta(\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)), \tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s) > + \right. \\ &\quad \left. + (f(\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)), \tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s))) ds + \int_0^t \|\sigma(\tilde{y}_1(s)) - \sigma(\tilde{y}_2(s))\|_{z_0}^2 ds \right) \leq \\ &\leq 2 \int_0^t -C_4 E \|\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)\|_v^2 ds + C_{27} \int_0^t E \|\tilde{y}_1(s) - \tilde{y}_2(s)\|^2 ds, \end{aligned}$$

$C_{27} > 0$. Звідси, з використанням леми Гронсуолла, отримуємо

$$E \|\tilde{y}_1(t) - \tilde{y}_2(t)\|^2 = 0.$$

Звідси випливає потраєкторна єдиність розв'язку. Отже, враховуючи нескінченновимірний аналог теореми Ямада-Ватанабе [13, Т.2] отримуємо доведення теореми 1.

Доведення теореми 2. Доведення даної теореми подібне до доведення єдиності попередньої теореми. Покладемо

$$y(t) = y(t, y_0, u) \quad \text{та} \quad z(t) = y(t, y_1, u_1).$$

Тоді

$$\begin{aligned} d(y(t) - z(t)) &= (\Delta(y(t) - z(t)) + f(y(t)) - f(z(t)) + u_1(t) - u_2(t)) dt + \\ &\quad + (\sigma(y(t)) - \sigma(z(t))) dW(t). \end{aligned}$$

Далі, з використанням енергетичної рівності маємо

$$\begin{aligned} E \|y(t) - z(t)\|^2 &= E \|y_0 - y_1\|^2 + 2E \int_0^t (< \Delta(y(s) - z(s)), y(s) - z(s) > + \\ &\quad + (f(y(s)) - f(z(s)), y(s) - z(s)) ds + \int_0^t E \|\sigma(y(s)) - \sigma(z(s))\|_{z_0}^2 ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq E \|y_0 - y_1\|^2 + C_{28} \int_0^t E \|y(s) - z(s)\|^2 ds + \int_0^t \|y(s) - z(s)\|_{z_0}^2 ds, \quad C_{28} > 0.$$

Тоді нерівність (5) випливає з леми Гронуолла, що і доводить теорему.

4. Висновки. В даній роботі нами отримано достатні умови існування та єдиності слабких розв'язків стохастичних рівнянь параболічного типу, збурених нескінченновимірним процесом білого шуму. Основною відмінністю даної роботи від раніше відомих є те, що наші умови допускають зростання нелінійностей швидше степеневого, наприклад, одностороннє експоненційне. Тому ці умови розширюють коло застосувань отриманих теоретичних результатів до конкретних математичних моделей. Зокрема, стає можливим вивчення рівняння Франка–Каменського [7].

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект 2023, 03/0074 “Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою”.

Список використаної літератури

1. McKean H. P. Nagumo's Equation. *Advances in Mathematics*. 1970. Vol. 4, No. 3. P. 209–223. DOI: [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(70\)90023-X](https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90023-X)
2. Dawson D. A. Stochastic Evolution Equations. *Mathematical Biosciences*. 1972. Vol. 15, No. 3–4. P. 287–316.
3. Vishik M. I., Chepyzhov V. V. Attractors for Equations of Mathematical Physics. AMS. Providence : Rhode Island, 2002. 363 p.
4. Evans L. C. Partial Differential Equations. AMS. University of California. Berkeley : CA, 2010. Vol. 19. 662 p.
5. Liu W., Röcher M. Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer International Publishing : Springer, 2015. 272 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-22354-4> (date of access: 18.07.2024).
6. Liu W., Rockner M. Local and Global Well-Posedness of SPDE with Generalized Coercivity Conditions. *Journal of Differential Equations*. 2013. Vol. 254, No. 2. P. 725–755. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.09.014>
7. Frank-Kamenetskii D. A., Salnikov I. E. Journal Physical Chemistry. 1943. Vol. 17, No. 2. P. 79–86.
8. Casas E., Wachsmuth D. A note on existence of solutions to control problems of semilinear partial differential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 2023. Vol. 61, No. 3. P. 1095–1112. DOI: <https://doi.org/10.1137/22M1486418>
9. Casas E., Kunisch K. Infinite Horizon Optimal Control for a General Class of Semilinear Parabolic Equations. *Applied Mathematics & Optimization*. 2023. Vol. 88, No. 47. P. 46–84. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00245-023-10006-4>
10. Mantey R., Zausinger T. Stochastic Evolution Equations in $L_0^{2\nu}$. *Stochastic Reports*. 1999. Vol. 66, No. 1–2. P. 37–85. DOI: <https://doi.org/10.1080/17442509908834186>
11. Da Prato G., Zabczyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press : Cambridge, 1992. 454 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107295513>
12. Chow P.-L. Stochastic Partial Differential Equations. Chapman Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman Hall/CRC : Boca Raton, FL, 2007. 281 p. URL: https://www.routledge.com/Stochastic-Partial-Differential-Equations/Chow/p/book/9780367453121?srsltid=AfmBOorpp6c3u2w_zCII7BB0N1hW6zGxdL_YWdgmpp_vUzInGfvlDzlk (date of access: 15.07.2024).
13. Ondrejat M. Uniqueness for Stochastic Evolution Equations in Banach spaces : Dissertations Mach 426 / Institute of Mathematics of The Polish Academy of Sciences. Warsaw. 2004. P. 1–63. DOI: <https://doi.org/10.4064/dm426-0-1>
14. Skorokhod A. Random Linear Operators. Institute of Mathematics : Kiev GSP, 1984. 230 p. URL: <https://link.springer.com/book/9789027716699> (date of access: 15.07.2024).

15. Lions J. L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. Dunod, Cauthier-Vallars : Paris, 1965. 554 p.

Капустян О. В., Stanzhytskiy A. O., Stanzhytskiy O. M. Weak solutions of stochastically perturbed parabolic equations with rapidly growing external perturbations.

This paper studies stochastic evolution equations in infinite-dimensional spaces. These equations are mathematical models of real natural science processes with distributed parameters and those that are influenced by random factors in the process of their evolution. These factors can be considered as the total result of a large number of independent random variables. Then, by virtue of the central limit theorem, we obtain that random disturbances are described by an infinite-dimensional white noise process, which leads to stochastic equations of the Ito type. The characteristic example of such equations are stochastic parabolic equations with nonlinear wear. The main differential operator here is, as a rule, a second-order operator of elliptic type. Previously known results related to the existence and unity of weak solutions of such equations under the condition of power-law growth of nonlinearities and certain conditions of monotonicity. However, nonlinearities of exponential growth often occur in applications, for example, the well-known Frank–Kamensky equation.

In this work, the conditions of existence, unity and continuous dependence of weak solutions on the right parts and initial data are obtained. At the same time, non-linearities can allow growth above the exponent. Also, for the solutions, estimates were obtained in special Sobolev's norms.

Keywords: Wiener process, Laplacian, ellipticity, Sobolev space, boundary value problem.

References

1. McKean, H. P. (1970). Nagumo's Equation. *Advances in Mathematics*, 4(3), 209–223. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(70\)90023-X](https://doi.org/10.1016/0001-8708(70)90023-X)
2. Dawson, D. A. (1972). Stochastic Evolution Equations. *Mathematical Biosciences*, 15(3-4), 287–316.
3. Vishik, M. I., & Chepyzhov, V. V. (2002). *Attractors for Equations of Mathematical Physics*. AMS. Providence: Rhode Island.
4. Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*. AMS. University of California. Berkeley: CA, 19.
5. Liu, W., & Röcher, M. (2015). Stochastic Partial Differential Equations: An Introduction. Springer International Publishing: Springer. Retrieved from <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-22354-4>
6. Liu, W., & Rockner, M. (2013). Local and Global Well-Posedness of SPDE with Generalized Coercivity Conditions. *Journal of Differential Equations*, 254(2), 725–755. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.09.014>
7. Frank-Kamenetskii, D. A., & Salnikov, I. E. (1943). Journal Physical Chemistry. 17(2), 79–86.
8. Casas, E., & Wachsmuth, D. (2023). A note on existence of solutions to control problems of semilinear partial differential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 61(3), 1095–1112. <https://doi.org/10.1137/22M1486418>
9. Casas, E., & Kunisch, K. (2023). Infinite Horizon Optimal Control for a General Class of Semilinear Parabolic Equations. *Applied Mathematics & Optimization*, 88(47), 46–84. <https://doi.org/10.1007/s00245-023-10006-4>
10. Mantey, R., & Zausinger, T. (1999). Stochastic Evolution Equations in $L_0^{2\nu}$. *Stochastic Reports*, 66(1-2), 37–85. <https://doi.org/10.1080/17442509908834186>
11. Da Prato, G., & Zabczyk, J. (1992). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press: Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107295513>
12. Chow, P.-L. (2007). *Stochastic Partial Differential Equations*. Chapman Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman Hall/CRC : Boca Raton, FL. Retrieved from <https://www.routledge.com/Stochastic-Partial-Differential->

- Equations/Chow/p/book/9780367453121?srsId=AfmBOorpp6c3u2w_zCII7BB0N1hW6zGx-dL_YWdgmpp_vUzInGfvIDzlk
13. Ondrejat, M. (2004). *Uniqueness for Stochastic Evolution Equations in Banach spaces*: (Doctor's thesis). Institute of Mathematics of The Polish Academy of Sciences. Warsaw. <https://doi.org/10.4064/dm426-0-1>
 14. Skorokhod, A. (1984). *Random Linear Operators*. Institute of Mathematics: Kiev GSP. Retrieved from <https://link.springer.com/book/9789027716699>
 15. Lions, J. L. (1965). *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*. Dunod, Cauthier-Vallars: Paris.

Одержано 07.09.2024

Ю. Ю. Млавець¹, О. В. Панічек², О. А. Тимошенко³

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

² Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
магістр фізико-математичного факультету
panichekalex@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-8947-5836>

³ Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
Університет Осло (Норвегія),
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
otymoshenkokpi@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПЕРЕДАЧІ ТУБЕРКУЛЬОЗУ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗБУРЕНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІНЕРІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

У цій статті ми розробляємо стохастичну математичну епідемічну модель динаміки туберкульозу з метою покращення розуміння процесів передачі вірусу та прогнозування розвитку епідемії. Для запропонованої моделі за допомогою теорії функцій Ляпунова доведено існування єдиного майже напевно невід'ємного розв'язку. Наведено приклади симуляцій з використанням мови програмування Python, які підтверджують коректність теоретичних результатів.

Це дослідження виконано в рамках грантової програми MSCA4Ukraine, яка фінансується Європейським Союзом.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, лінійне стохастичне диференціальне рівняння, формула Іто, функція Ляпунова, SIR-модель, моделювання стохастичних диференціальних рівнянь.

1. Вступ. Математичне моделювання відіграє важливу роль у вивченні поширення та контролю інфекційних хвороб та у прийнятті рішень стосовно втручань для боротьби з ними. Розуміння механізмів передачі інфекцій у різних громадах, регіонах та країнах сприяє удосконаленню стратегій зниження рівня поширення цих захворювань.

Для аналізу та моделювання передачі захворювань використовують стохастичні диференціальні рівняння (СДР). СДР ефективно моделюють випадкові процеси, вони є основним інструментом для дослідження у багатьох галузях науки, зокрема і в біології та медицині. Цей математичний інструмент дозволяє краще описати невизначеність та випадковість у динаміці поширення інфекцій. Природна різноманітність у популяції, яку СДР враховують, дозволяє оцінити індивідуальні відмінності в передачі захворювання. Оскільки люди можуть мати різні частоти контактів та ступінь сприйнятливості, важливо враховувати ці

відмінності при моделюванні інфекційних захворювань. СДР успішно використовують для аналізу динаміки поширення захворювань, таких як COVID-19, віспа, СНІД та інших (див. наприклад, [1], [2], [3]). Більшість епідемічних моделей базуються на поділі населення на невелику кількість груп, кожна з яких містить людей, які ідентичні з точки зору їхнього статусу по відношенню до захворювання, що вивчається.

Математичні моделі динаміки інфекційних захворювань інтенсивно досліджуються протягом останнього століття. За основу для вивчення поширення захворювань використовується **SIR**-модель (Susceptible-Infected-Recovered, див. [4]), що включає в себе три звичайних диференціальних рівняння (або СДР, якщо враховується випадкова складова передачі інфекції), тобто задаються наступні класи осіб:

- Вразливі (**S**): це люди, які можуть захворіти, бо не мають імунітету, наприклад, новонароджені діти або ті, чий імунітет втрачається;
- Інфіковані (**I**): це особи, які вже заражені і можуть передавати інфекцію;
- Резистентні (**R**): це ті, хто одужав від хвороби і набув імунітет.

У цій роботі ми розглянемо стохастичну модель розповсюдження інфекційного захворювання на прикладі туберкульозу.

Туберкульоз — одне з найпоширеніших інфекційних захворювань, на яке хворіє близько двох мільярдів людей (третина всього населення світу на даний час інфіковані). Приблизно дев'ять мільйонів нових випадків активної форми захворювання реєструється щорічно, що призводить до двох мільйонів смертей, головним чином в країнах, що розвиваються. Оскільки передача та інфікування туберкульозом відбувається під впливом різних складних біологічних процесів, можна припустити існування випадковості в динаміці передачі захворювання. Тому динаміка передачі туберкульозу за допомогою математичних моделей важлива для того, щоб запропонувати найкращі механізми контролю за поширенням туберкульозу. Для України питання дослідження поширення захворювання на туберкульоз є актуальним. Тим часом, коли загальні показники захворюваності на туберкульоз знижуються у багатьох країнах світу, в деяких країнах вони продовжують зростати. Україна знаходиться серед країн-лідерів у поширенні туберкульозу, особливо щодо множинної лікарської стійкості, яка не врегульовується деякими найефективнішими протитуберкульозними препаратами. Згідно з даними Центру громадського здоров'я МОЗ України (див., [5]), за 2022 рік було зареєстровано 18 510 випадків туберкульозу, включаючи рецидиви, що становить 45.1 на 100 000 населення, що на 2.5% більше, ніж у 2021 році (18 241, або 44 на 100 000 населення). Записи захворюваності на туберкульоз серед дітей віком до 14 років залишилися у 2022 році на тому ж рівні, що і у 2021 році.

За даними МОЗ у 2023 році кількість уперше зареєстрованих в Україні захворювань на туберкульоз становила 19851, що на 7.3% більше аналогічного показника 2022 року.

Як видно з інфографіки на Рис. 1, кількість випадків захворюваності на туберкульоз зросла у більшості областей України. Падіння кількості захворюваності в більшості випадків (Луганська, Донецька, Херсонська) є результатом неможливості зібрати повну статистику з огляду на воєнні дії.

На жаль, війна в Україні призводить до збільшення випадків туберкульозу.



Рис. 1. Інфографіка захворюваності на туберкульоз станом на 2023 рік в порівнянні з 2022 роком за областями України.

Також в 2023 році захворіло на туберкульоз 639 дітей, що становить зростання понад 3%. Показник захворюваності серед підлітків збільшився на 55.3% — 196 випадків у 2023 році. Збільшення захворюваності на туберкульоз серед дітей та підлітків є наслідком погіршення епідемічної ситуації серед дорослих, умов життя та перебування.

Люди можуть захистити себе від захворювання на туберкульоз, дотримуючись основних правил гігієни, вакцинуватися та підтримувати імунітет. Оскільки в Україні туберкульоз є поширеним, вакцинація БЦЖ включена до переліку щеплень, рекомендованих Міністерством охорони здоров'я України.

Тому у цій роботі ми розглянемо стохастичну модель, яка є розширенням SIR-моделі, для вивчення динаміки захворюваності на туберкульоз з урахуванням вакцинації новонароджених дітей.

Метою цієї роботи є дослідження можливості та доцільності використання **SIRV**-моделі, що враховує аспект вакцинації населення та потенційно здатна враховувати більше факторів, у тому числі й випадкових, для прогнозування складних процесів перебігу епідемій туберкульозу. У межах роботи, ми сформулюємо умови невід'ємності траєкторій стохастичної **SIRV**-моделі та використаємо її для симуляції динаміки епідемії, порівняємо результати моделювання з реальною динамікою перебігу туберкульозу в Україні.

2. Формулювання та опис моделі. У порівнянні з існуючою літературою про динаміку туберкульозу, наша робота сприяє дослідженню складних аспектів захворювання, включаючи невизначеність у моделі та залежність параметрів моделі від часу. Поведінка епідемії є непередбачуваною через зовнішні збурення навколишнього середовища, які впливають на її поширення. Запропонована модель поділяє все населення на чотири класи відповідно до статусу захворювання: сприйнятливі S , інфіковані I , вакциновані V та резистентні R .

Починаючи з визначення детермінованої моделі (див. Рис. 2), щоб врахувати

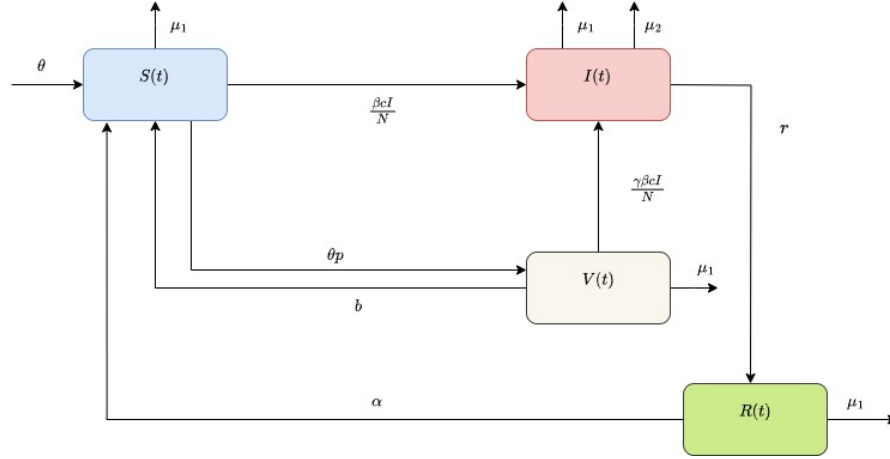


Рис. 2. Блок-схема детермінованої моделі динаміки епідемії туберкульозу.

невизначеність, ми вводимо стохастичні шуми, які моделюються за допомогою вінерівських процесів. Ці шуми впливають на систему, переважно через невизначеність у факторах смертності та народжуваності, а також через неточності в підрахунках чисельності популяції, тому стохастична модель дозволяє більш точно описувати динаміку перебігу хвороби з урахуванням випадкових впливів. Отже, ми розглядаємо наступну стохастичну модель:

$$\begin{aligned}
 dS(t) &= \left[(1-p)\theta(t) + b(t)V(t) + \alpha(t)R(t) - \mu_1(t)S(t) - \frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t) \right] dt + \\
 &\quad + \sigma_1(t)S(t)dW_1(t), \\
 dV(t) &= \left[p\theta(t) - \frac{\gamma \beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (b(t) + \mu_1(t))V(t) \right] dt + \sigma_2(t)V(t)dW_2(t), \\
 dI(t) &= \left[\frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t) + \frac{\gamma \beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t))I(t) \right] dt + \\
 &\quad + \sigma_3(t)I(t)dW_3(t), \\
 dR(t) &= [r(t)I(t) - \alpha(t)R(t) - \mu_1(t)R(t)] dt + \sigma_4(t)R(t)dW_4(t), \tag{1}
 \end{aligned}$$

де $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ — початкові значення, $W_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, — взаємно незалежні стандартні вінерівські процеси, визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathbb{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$, σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, — інтенсивності цих процесів (або волатильності). Також припустимо, що усі функції задіяні в моделі є неперервними додатніми функціями, а загальна чисельність популяції в момент часу t позначається через $N(t)$, і визначається як $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$.

Вразливий клас $S(t)$, $t \geq 0$ складається з осіб усіх вікових груп населення, які не мали ефективного контакту з бактерією, що спричиняє захворювання.

Клас інфікованих $I(t)$, $t \geq 0$ складається з осіб усіх вікових груп, інфікованих туберкульозом в активній стадії; з інфікованого класу людина отримує лікування і переходить до класу тих, що одужали $R(t)$, $t \geq 0$.

Вакцинований клас, $V(t)$, $t \geq 0$, складається з осіб, які були вакциновані, коли вони були новонародженими і досі мають частковий імунітет проти туберкульозу.

Вакцинований клас збільшується при народжуваності з швидкістю приросту $\theta(t)$, $t \geq 0$, з ймовірністю p ($0 \leq p \leq 1$). Вразливий клас збільшується при народжуваності з швидкістю приросту $\theta(t)$, $t \geq 0$, з ймовірністю $(1 - p)$ та за рахунок вакцинованого класу V зі швидкістю $b(t)$, $t \geq 0$, а також за рахунок тих, що одужали R з швидкістю приросту $\alpha(t)$, $t \geq 0$. У всіх підкласах $\mu_1(t)$, $t \geq 0$ — це швидкість природної смертності, $\mu_2(t)$, $t \geq 0$ — швидкість смертності, спричиненої хворобою, для окремих осіб з класу I , β — ймовірність того, що вразливі S і вакциновані V особи інфікуються від однієї інфікованої особи при одному контакті за одиницю часу. Швидкість, з якою інфікуються вразливі особи, дорівнює $\beta c(t)$, $t \geq 0$; швидкість, з якою інфікуються вакциновані особи, дорівнює $\gamma \beta c(t)$, $t \geq 0$, де $0 \leq \gamma \leq 1$ — це ефективність вакцинації. Якщо $\gamma = 0$, то ефективність захисту вакцинації дорівнює 100%, якщо $\gamma = 1$, то ефективність захисту вакцинації дорівнює 0%, а $1 - \gamma$ — це зниження ризику інфікування завдяки ефективності вакцинації. Також $r(t)$, $t \geq 0$ — це швидкість, з якою інфікована особа залишає інфекційний клас I і приєднується до класу R , $\frac{\beta c(t)I}{N}$, $t \geq 0$ — потужність інфекції.

3. Невід’ємність розв’язку стохастичної моделі. Спочатку перевіримо, чи є запропонована модель добре визначеною, і чи може вона достовірно моделювати майбутні можливі розвитку хвороби, залежно від початкових умов популяції на початку епідемії та набору параметрів. Важливо, щоб траєкторії були невід’ємними, оскільки від’ємні значення розв’язку не матимуть змістовної інтерпретації.

Теорема 1. Система, що описується рівнянням (1), має єдиний розв’язок,

$$(S(t), V(t), I(t), R(t)),$$

за початкової умови $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ при $t \geq 0$, і цей розв’язок залишиться додатним з ймовірністю 1, тобто

$$(S(t), V(t), I(t), R(t)) \in \mathbb{R}_+^4 \text{ для всіх } t \geq 0 \text{ майже напевно (м. н.)},$$

якщо σ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, μ_j , $j = 1, 2$, r, α, β, c є обмеженими функціями.

Доведення. Оскільки коефіцієнти рівняння є локально ліпшицевими для будь-якого заданого початкового значення $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$, то існує єдиний локальний розв’язок $(S(t), V(t), I(t), R(t))$ на $t \in [0, \tau_e)$, де τ_e — момент за якого розв’язок досягає нескінченності (див. [6]). Для того, щоб довести, що цей розв’язок є глобальним, треба показати, що $\tau_\infty = \infty$ м.н. Для цього задамо достатньо велике значення для $m_0 \geq 0$, таке, що

$$(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \left[\frac{1}{m_0}, m_0 \right]^{\times 4}.$$

Далі визначимо час зупинки для кожного цілого $m \geq m_0$:

$$\tau_m = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : (S(t), V(t), I(t), R(t)) \notin \left(\frac{1}{m}, m \right)^{\times 4} \right\}. \quad (2)$$

За означенням τ_m зростає, при $m \rightarrow \infty$. Тоді $\tau_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m \leq \tau_e$ м.н.

Для завершення доведення треба показати, що $\tau_\infty = \infty$ м.н. Якщо це твердження хибне, то можна знайти $T > 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ такі, що $P\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$. Отже, існує ціле число $m_1 \geq m_0$ таке, що

$$P\{\tau_m \leq T\} \geq \varepsilon \text{ для всіх } m \geq m_1. \quad (3)$$

Далі застосуємо формулу Іто (див. [7]) до функції Ляпунова $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 1 - \ln x_1) + (x_2 - 1 - \ln x_2) + (x_3 - 1 - \ln x_3) + (x_4 - 1 - \ln x_4),$$

до того ж $f'_{x_i} = 1 - \frac{1}{x_i}$ та $f''_{x_i x_i} = \frac{1}{x_i^2}$, при $i = 1, 2, 3, 4$. Відмітимо, що функція f є невід'ємною, оскільки $x_i - 1 - \log x_i \geq 0$ для всіх $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тоді,

$$\begin{aligned} df(S(t), V(t), I(t), R(t)) = & \left(1 - \frac{1}{S(t)}\right) dS(t) + \left(1 - \frac{1}{V(t)}\right) dV(t) + \\ & + \left(1 - \frac{1}{I(t)}\right) dI(t) + \left(1 - \frac{1}{R(t)}\right) dR(t) + \frac{1}{2S^2(t)} \sigma_1^2(t) S^2(t) dt + \\ & + \frac{1}{2V^2(t)} \sigma_2^2(t) V^2(t) dt + \frac{1}{2I^2(t)} \sigma_3^2(t) I^2(t) dt + \frac{1}{2R^2(t)} \sigma_4^2(t) R^2(t) dt. \end{aligned}$$

Звідки маємо,

$$\begin{aligned} df(S(t), V(t), I(t), R(t)) = & [\theta(t) + 4\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t) + \alpha(t) + b(t)] dt - \\ & - [\mu_1(t)(S(t) + V(t) + I(t) + R(t)) + \mu_2(t)I(t)] dt + \\ & + \left((1 + \gamma) \frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)} - \frac{(1-p)\theta(t)}{S(t)} - \frac{b(t)V(t)}{S(t)} - \frac{\alpha(t)R(t)}{S(t)} - \frac{p\theta(t)}{V(t)} - \right. \\ & \left. - \frac{\beta c(t)S(t)}{N(t)} - \gamma \frac{\beta c(t)V(t)}{N(t)} - \frac{r(t)I(t)}{R(t)} \right) dt + \\ & + \frac{1}{2} (\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t) + \sigma_3^2(t) + \sigma_4^2(t)) dt + \\ & + \sigma_1(t) (S(t) - 1) dW_1(t) + \sigma_2(t) (V(t) - 1) dW_2(t) + \\ & + \sigma_3(t) (I(t) - 1) dW_3(t) + \sigma_4(t) (R(t) - 1) dW_4(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Позначимо у останньому співвідношенні коефіцієнт при dt через $Lf : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ та оцінимо його. Тоді, оскільки функції $\sigma_i, i = 1, 2, 3, 4$, $\mu_j, j = 1, 2$, r, α, β, c є обмеженими та $\frac{I}{N} < 1$, то

$$Lf(S(t), V(t), I(t), R(t)) \leq \hat{\theta} + 4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{b} + (1 + \gamma)\beta\hat{c} + \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_4^2),$$

де $\hat{\theta} = \sup_{t \geq 0} \theta(t)$, $\hat{\mu}_j = \sup_{t \geq 0} \mu_j(t)$, $j = 1, 2$, $\hat{r} = \sup_{t \geq 0} r(t)$, $\hat{\alpha} = \sup_{t \geq 0} \alpha(t)$, $\hat{b} = \sup_{t \geq 0} b(t)$, $\hat{c} = \sup_{t \geq 0} c(t)$, $\hat{\sigma}_i = \sup_{t \geq 0} \sigma_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Покладемо

$$K = \hat{\theta} + 4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{b} + (1 + \gamma)\beta\hat{c} + \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_4^2).$$

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (4) від 0 до $\tau = \min\{\tau_m, t\}$. На цьому кроці з урахуванням нерівності $dLf(S(t), V(t), I(t), R(t)) \leq K$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau df(S(s), V(s), I(s), R(s)) &= \int_0^\tau dLf(S(s), V(s), I(s), R(s)) + \\ &+ \int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s) - 1)dW_1(s) + \int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s) - 1)dW_2(s) + \\ &+ \int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s) - 1)dW_3(s) + \int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s) - 1)dW_4(s) \leq \\ &\leq K\tau + \int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s) - 1)dW_1(s) + \int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s) - 1)dW_2(s) + \\ &+ \int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s) - 1)dW_3(s) + \int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s) - 1)dW_4(s). \end{aligned}$$

Візьмемо математичне сподівання від обох частин попередньої нерівності:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau df(S(s), V(s), I(s), R(s)) \right] &\leq K\mathbb{E}[\tau] + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s) - 1)dW_1(s) \right] + \\ &+ \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s) - 1)dW_2(s) \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s) - 1)dW_3(s) \right] + \\ &+ \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s) - 1)dW_4(s) \right]. \end{aligned}$$

Оскільки $t \in [0, T]$, то $\tau = \min\{\tau_m, t\} \leq T$. Також необхідно врахувати, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s) - 1)dW_1(s) \right] &= 0, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s) - 1)dW_2(s) \right] = 0, \\ \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s) - 1)dW_3(s) \right] &= 0, \quad \mathbb{E} \left[\int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s) - 1)dW_4(s) \right] = 0. \end{aligned}$$

Відтак, отримаємо наступну нерівність:

$$\mathbb{E}[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))] \leq KT + f(S(0), V(0), I(0), R(0)). \quad (5)$$

Введемо множину $A_m = \{\tau_m \leq t\}$, $m > m_1$, для якої згідно з (3) справедливо, що $P(A_m) \geq \epsilon$. Принаймні одне зі значень $S(\tau)$, $V(\tau)$, $I(\tau)$, $R(\tau)$ рівне $\frac{1}{m}$ або m , а тому справедливою є оцінка:

$$E[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))] \geq \min \left\{ (m - 1 - \ln m), \left(\frac{1}{m} - 1 - \ln \frac{1}{m} \right) \right\}. \quad (6)$$

Враховуючи результат (5) та (6), отримаємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned} KT + f(S(0), V(0), I(0), R(0)) &\geq E[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))] \geq \\ &\geq E[\mathbb{I}_{A_m} f(S(\tau_m), V(\tau_m), I(\tau_m), R(\tau_m))] \geq \\ &\geq \epsilon \min \left\{ (m - 1 - \ln m), \left(\frac{1}{m} - 1 - \ln \frac{1}{m} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Якщо взяти границю при $m \rightarrow \infty$ від обох частин нерівності вище, отримаємо, що:

$$\begin{aligned} K \lim_{m \rightarrow \infty} T + f(S(0), V(0), I(0), R(0)) &\geq \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\min \left\{ (m - 1 - \ln m), \left(\frac{1}{m} - 1 - \ln \frac{1}{m} \right) \right\} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що $T \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Отже, отримуємо суперечність, оскільки неможливо знайти таке $T > 0$, щоб виконувалася нерівність за припущенням: $P\{\tau_m \leq T\} \geq \epsilon$. Таким чином, теорему доведено.

4. Моделювання розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Чисельне моделювання значень стохастичних диференціальних рівнянь можна здійснювати за допомогою низки методів, серед яких: метод Ейлера-Маруямі, схема Мільштейна, методи Рунге-Кутта (див. [8], [9], [10], [11]). Для чисельного моделювання траєкторій процесів системи стохастичних диференціальних рівнянь застосуємо метод Ейлера за його простоту виконання.

Метод Ейлера полягає в обчисленні кожного наступного значення випадкового процесу (у вузлі t_{n+1} за попереднім — у вузлі t_n) за рахунок наступних наближень:

$$X_i(t_{n+1}) \approx X_i(t_n) + a_i(t_n, X(t_n))(t_{n+1} - t_n) + b_i(t_n, X(t_n))(W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n)).$$

Тут $a_i(t, X(t))$ — функція при dt , $b_i(t, X(t))$ — функція при $dW_i(t)$, також тут $X_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ — певний процес $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, $V(t)$.

Використання такої простої схеми допомагає чисельно змоделювати розв'язки з достатньо високою швидкістю.

Для системи рівнянь (1) введено сукупність числових параметрів та функцій-параметрів системи. У межах даної роботи, вважатимемо, що значення функцій-параметрів сталі для довільного t . Початкові значення $(S(0), R(0), V(0), I(0))$, які використовуються в моделюванні, були визначені на основі доступних даних. Загальна чисельність населення становить $N(0) = 42153200$, що відповідає кількості жителів України на початок 2019 року (див. [13]). Кількість людей, що мають природний імунітет до туберкульозу, встановлена як $R(0) = 0$.

Це пояснюється тим, що з огляду на особливості захворювання та його поширеність в Україні, наявність ефективного природного імунітету вважається надзвичайно малоімовірною подією. Відсоток вакцинованих проти туберкульозу складає приблизно 70%, що є адекватною оцінкою з урахуванням фактичної обов'язковості щеплення БЦЖ. Кількість інфікованих людей на початковий момент часу вибрана відповідно до даних офіційних джерел і дорівнює $I(0) = 21132$. Задамо параметри волатильності для кожного класу:

$$\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.03, \sigma_3 = 0.01, \sigma_4 = 0.05.$$

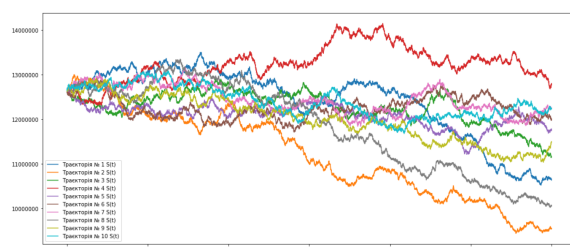
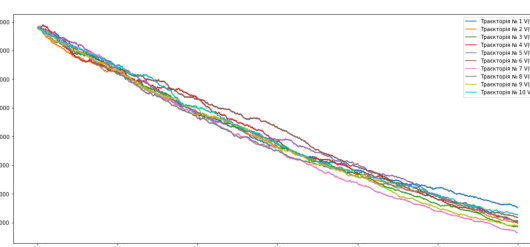
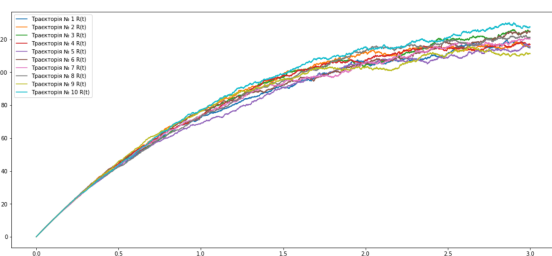
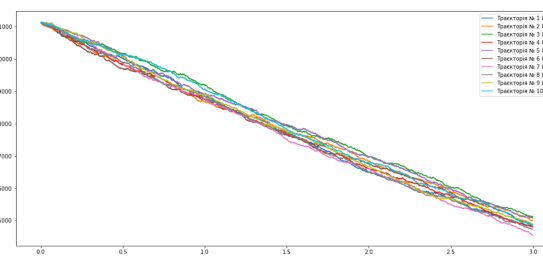
Інші елементи моделі наведено у Таблиці 1.

Таблиця 1.

Значення параметрів моделі

Параметр	p	θ	α	β	γ	b	c	r	μ_1	μ_2
Значення	0.5	0.71	0.4	0.5	0.7	0.1	0.1	0.005	0.185	0.0053

Як видно з Рис. 3 – Рис. 6 результати моделювання за період в три роки (від січня 2019 року до грудня 2021, $T = 3$) підтверджують теоретичний висновок Теорема 1 про невід'ємність траєкторій процесів, що є складовими моделі. Рис. 4 демонструє зростання кількості резистентних осіб в моделі з вакцинацією. Спадання кількості вакцинованих обумовлено низьким фактором народжуваності та високим рівнем смертності.

Рис. 3. Зміна популяції осіб S , що сприйнятливі до бактерій туберкульозу.Рис. 5. Зміна поведінки процесу V , що відповідає популяції вакцинованих осіб.Рис. 4. Поведінка процесу R - популяції осіб, які є стійкими до захворювання.Рис. 6. Поведінка траєкторій процесу I , що описує клас інфікованих осіб.

На Рис. 6 при збільшенні часу кількість інфікованих зменшується. Це очікувано, оскільки з плином часу вакцинація впливає на швидкість росту кількості

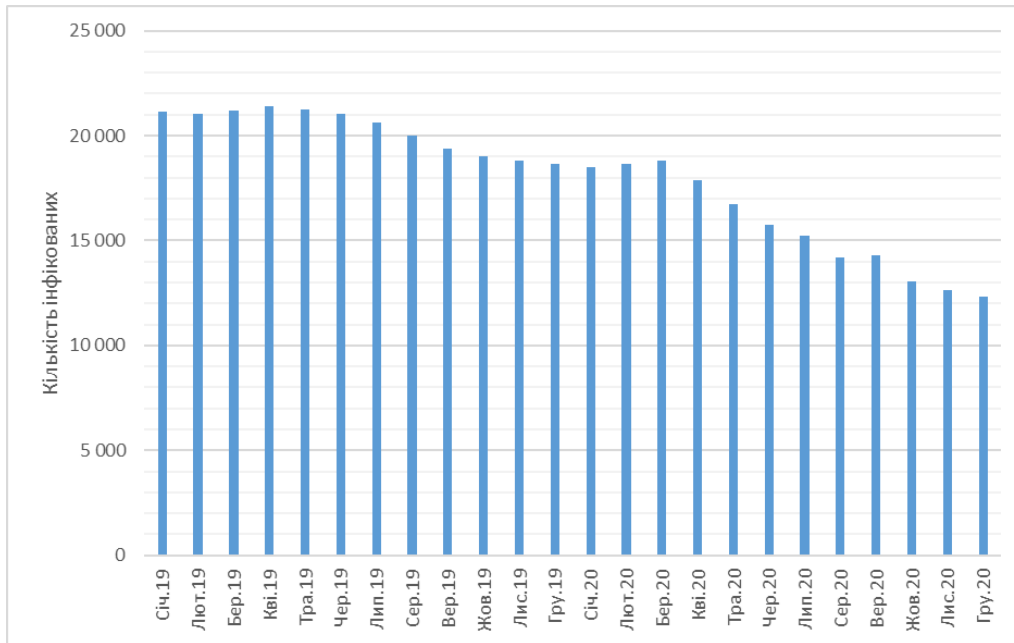


Рис. 7. Динаміка захворюваності на туберкульоз в період з 2019 до 2020.

інфікованих та усе більше інфікованих переходять з активної стадії захворювання до латентної стадії.

Порівнюємо результати SIRV-моделі з реальними даними. Для цього використовуватимемо дані Центру громадського здоров'я МОЗ України (див. [5]) захворюваності на туберкульоз за місяцями. Відповідну інфографіку кількості хворих за місяцями протягом періоду від січня 2019 року до кінця 2020 року наведено на Рис. 7.

Порівнюємо результати прогнозу за період від січня 2019 року до початку 2020 року. Для розрахунку прогнозованої кількості інфікованих осіб скористаємося математичним середнім значень змодельованих процесів, представлених на Рис. 6. Ми будемо використовувати дані з десяти траєкторій $I(t)$ на початку кожного місяця 2019 року.

Побудуємо графік (див Рис. 8), на якому представлені фактичні дані про кількість хворих за зазначений період, що відповідають значенням на Рис. 7, а також кількість інфікованих осіб, отриманих за допомогою SIRV-моделі (Рис. 6).

З огляду на графіки, можна констатувати, що різниця між фактичними та прогнозованими значеннями зростає з підвищенням часу симуляції. Це свідчить про важливість дослідження моделей з коефіцієнтами, що змінюються в часі. Моделі, які використовують постійні коефіцієнти, забезпечують точні результати лише на коротких інтервалах. Крім того, для підтримання допустимої точності моделі необхідно періодично переглядати її параметри. Тому використання параметрів у вигляді аналітично заданих функцій має краще відображати реальні процеси.

Оцінити близькість значень нашого прогнозу до реальної кількості хворих. Для цього використаємо середню відсоткову похибку (або скорочено MAPE), яка вимірює середнє відхилення прогнозованих значень від цільової величини у відсотках:

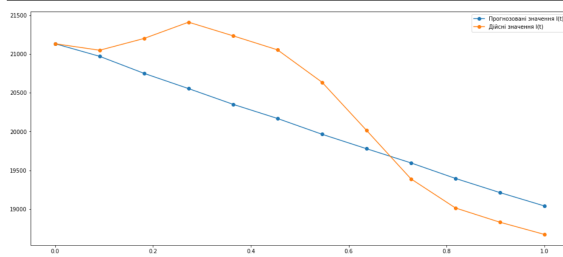


Рис. 8. Ламана значень $I(t)$ (блакитна) в порівнянні з ламаною дійсних значень захворюваності на туберкульоз за 2019 рік (помаранчева).

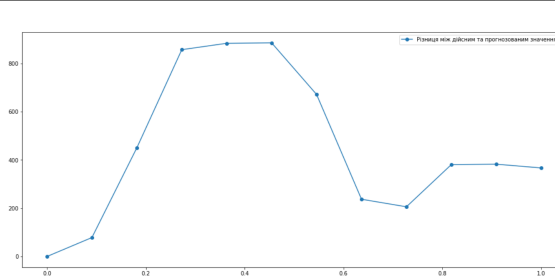


Рис. 9. Абсолютні різниці дійсних та прогнозованих величин кількості хворих за 2019 рік.

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i - f_i}{a_i} \right|,$$

де a_i — актуальне значення в i -ому вузлі (у межах симуляції — на i -ому місяці), f_i — прогнозоване значення, а n — загальна кількість інтервалів (місяців), що розглядаються.

Більше про методи визначення якості прогнозування та метрики, які широко застосовуються на практиці, можна переглянути в [12].

Середня відсоткова похибка (MAPE) рівна 2.2% для інфікованих осіб. Це достатньо непогана точність, але для досягнення такого результату необхідно визначити оптимальні параметри, що не завжди коректно виходить, оскільки епідеміологічні процеси — високоволатильні та недостатньо вивчені. Відтак, SIRV-модель може бути непоганим інструментом прогнозування на короткотривалу перспективу розвитку епідеміологічної ситуації за умови своєчасного перегляду результатів та корегування параметрів.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній статті розглянуто математичну модель поширення туберкульозної інфекції, яку побудовано з урахуванням вакцинації при народженні. Ця модель базується на схемі SIRV.

Надалі було б цікаво продовжити дослідження стохастичної SIRV-моделі захворювання на туберкульоз, а саме встановити фактори, які можуть призвести до зникнення захворювання, або ж зменшити швидкість розповсюдження інфекції. На основі отриманих результатів роботи [14] заплановано дослідити характеристики процесів моделі з огляду на їхню поведінку в довгостроковій перспективі.

Список використаної літератури

1. Cai Y., Wang X., Wang W., Zhao M. Stochastic Dynamics of an SIRS Epidemic Model with Ratio-Dependent Incidence Rate. *Abstract and Applied Analysis*. 2013. P. 415–425. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/172631>
2. Rahman Gh., Tymoshenko O., Di Nunno G. Insights on Stochastic Dynamics for Transmission of Monkeypox. *Biological and Probabilistic Behaviour*. 2024. arXiv. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.05486>
3. Rao F., Luo J. Stochastic effects on an HIV/AIDS infection model with

- incomplete diagnosis. *Chaos Solitons & Fractals*. 2021. Vol. 152. 111344. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111344>
4. Yang Q., Jiang D., Shi N., and Ji C. The ergodicity and extinction of stochastically perturbed SIR and SEIR epidemic models with saturated incidence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012. Vol. 388, No. 1. P. 248–271.
 5. Центр Громадського Здоров'я України. URL: <https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/tuberkuloz/statistika-z-tb> (дата звернення: 05.06.2024).
 6. Arnold L. Stochastic, Differential Equations: Theory and Applications. Wiley : New York, 1972.
 7. Гіхман Й. І., Скороход А. В. Стохастичні диференціальні рівняння. Київ : Наукова думка, 1968. 356 с.
 8. Asmussen S. Glynn P. W. Stochastic Modelling and Applied Probability. New York : Springer, 2007. 476 p.
 9. Kloeden P. E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992. 326 p.
 10. Mitsui T. Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.* 1995. P. 124–138.
 11. Tocino A., Ardanuy R. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations. *Journal of Comp. and App. Mathematics*. 2002. Vol. 138. P. 219–241.
 12. Леонт'єва Ю. Ю. Прогнозування: Конспект лекцій (для студентів 4 курсу заочної форми навчання напряму підготовки 6.030504 — «Економіка підприємства» і слухачів другої вищої освіти) / Леонт'єва Ю. Ю. Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. Харків: ХНАМГ, 2008. 79 с.
 13. Міністерство фінансів України, демографічна інформація за 2019 рік. URL: <https://index.minfin.com.ua/ua/reference/people/2019> (дата звернення: 05.06.2024).
 14. Десницький О. М., Млавець Ю. Ю., Орловський І. В., Тимошенко О. А. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних диференціальних рівнянь загального вигляду збурених за допомогою вінерівського процесу. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 41, № 2. С. 29–40. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).29-40](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).29-40)

Мlavets Yu. Yu., Panichek O. V., Tymoshenko O. A. Mathematical modelling of the dynamics of tuberculosis transmission based on differential equations perturbed by Wiener processes.

In this paper, we develop a stochastic mathematical epidemic model of tuberculosis dynamics with the aim of enhancing our understanding of the transmission processes of the disease and predicting epidemic trajectories. For the proposed model, the existence of a unique global almost sure non-negative solution is proven. We also provide illustration of the obtained results with numerical examples realized with Python.

This project has received funding through the MSCA4Ukraine project, which is funded by the European Union.

Keywords: stochastic differential equation, linear stochastic differential equation, Itô formula, Lyapunov function, SIR-model, modelling of stochastic differential equations.

References

1. Cai, Y., Wang, X., Wang, W., & Zhao, M. (2013). Stochastic Dynamics of an SIRS Epidemic Model with Ratio-Dependent Incidence Rate. *Abstract and Applied Analysis*, 415–425. <https://doi.org/10.1155/2013/172631>
2. Rahman, Gh., Tymoshenko O., & Di Nunno, G. (2024). Insights on Stochastic Dynamics for Transmission of Monkeypox. *Biological and Probabilistic Behaviour*, arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.05486>
3. Rao, F., & Luo, J. (2021). Stochastic effects on an HIV/AIDS infection model with incomplete diagnosis *Chaos Solitons & Fractals*, 152, 111344. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111344>
4. Yan, Q., Jiang, D, Shi, N., & Ji, C. (2012). The ergodicity and extinction of stochastically

- perturbed SIR and SEIR epidemic models with saturated incidence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 388(1), 248–271.
5. Centre for Public Health in Ukraine. Retrieved from <https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/tuberkuloz/statistika-z-tb> [in Ukrainian].
 6. Arnold, L. (1972). *Stochastic, Differential Equations: Theory and Applications*. Wiley: New York.
 7. Gihman, I. I., & Skorohod, A. V. (1972). *Stochastic differential equations*. Kyiv: Nauk. dumka [in Ukrainian].
 8. Asmussen, S. & Glynn, P. W. (2007). *Stochastic Modelling and Applied Probability*. New York: Springer.
 9. Kloeden, P. E., & Platen, E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.
 10. Mitsui, T. (1995). Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations. *Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ*, 124–138.
 11. Tocino, A., & Ardanuy, R. (2002). Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations. *Journal of Comp. and App. Mathematics*, 138, 219–241.
 12. Leontieva, Y. Y. (2008). *Forecasting: Coursebook*. Charkiv: Charkiv National Academy of Urban Economy [in Ukrainian].
 13. Ministry of Finance of Ukraine, demographic data for 2019. Retrieved from <https://index.minfin.com.ua/ua/reference/people/2019>
 14. Desnytskyi, O. M., Mlavetz, Yu. Yu., Orlovskiy, I. V., & Tymoshenko, O. A. (2022). Asymptotic behaviour of solutions of linear differential equations of general form perturbed by means of a Wiener process. *Sci. Bull. of Uzhhorod Univ. Ser. of Math. and Inf.*, 41(2), 29–40. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).29-40](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).29-40) [in Ukrainian].

Одержано 23.09.2024

UDC 512

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).110-114](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).110-114)**Iryna Raievska**

University of Warsaw, Warsaw, Poland;
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine,
Kyiv, Ukraine,
Visiting researcher; Senior researcher,
Candidate of Sciences in Physics and Mathematics
raeirina@imath.kiev.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6764-480X>

LOCAL NEARRINGS WITH ADDITIVE GROUPS OF ORDER 128

The determination of the finite non-abelian p -groups which are the additive groups of local nearrings is an open problem (Feigelstock, 2006). Therefore it is important to determine such groups and to classify some classes of nearrings with identity on these groups, for example, local nearrings. We study local nearrings on 2-generated groups of order 128.

Keywords: local nearring, additive group, 2-generated group.

1. Preliminaries.

Nearrings are generalization of associative rings, in which the additive group can be non-abelian, and addition is connected with multiplication by only one distributive law, left or right. In this sense local nearrings are generalization of local rings.

Clearly every associative ring is a nearring and each group is the additive group of a nearring, but not necessarily of a nearring with identity. However, it is not true that any finite non-abelian group is the additive group of a nearring with identity.

A nearring with an identity is called local if the set of all non-invertible elements forms a subgroup of its additive group. A study of local nearrings was initiated by Maxson [2] who defined a number of their basic properties.

Complicated symbolic computations are being used to solve problems from different areas of mathematics, in particular, to study of algebraic structures. Based on well-known system of computer algebra GAP [3] we construct and investigate one-sided distributive structures (i.e., local nearrings of small orders) with a view of classification of such models.

Boykett and Nöbauer [4] classified all non-abelian groups of order less than 32 that can be the additive groups of a nearring with identity and found the number of non-isomorphic nearrings with identity on such groups (see also GAP package SONATA [5]).

For the researchers in nearrings, the list of all 698 local nearrings of order at most 31 up to isomorphism is provided by the GAP package SONATA; however, classifying nearrings of higher orders is a significant challenge.

2. Local nearrings on 2-generated groups of order 128.

We recall some definitions.

Definition 1. A non-empty set R with two binary operations “ $+$ ” and “ $\cdot$ ” is a nearring if:

- 1) $(R, +)$ is a group with neutral element 0;
- 2) $(R, \cdot)$ is a semigroup;
- 3) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ for all $x, y, z \in R$.

Such a nearring is called a left nearring. If axiom 3) is replaced by an axiom $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ for all $x, y, z \in R$, then we get a right nearring.

The group $(R, +)$ of a nearring R is denoted by R^+ and called the *additive group* of R . If in addition $0 \cdot x = 0$ for all $x \in R$, then the nearring R is called *zero-symmetric*. Furthermore, R is a *nearring with an identity* i if the semigroup $(R, \cdot)$ is a monoid with identity element i .

Definition 2. A nearring R with identity is called *local* if the set L of all non-invertible elements of R forms a subgroup of the additive group R^+ and a nearfield, if $L = 0$.

It was found that the additive group of a finite zero-symmetric local nearring is a p -group [2].

There exist 2328 non-isomorphic groups of order $128 = 2^7$ from which 162 are 2-generated groups: 5 groups are of exponent 64 and only 2 of these groups are the additive groups of local nearrings, 18 groups are of exponent 32 and only 6 of these groups are the additive groups of local nearrings, 65 groups are of exponent 16 and only 16 of these groups are the additive groups of local nearrings, 72 groups are of exponent 8 (unknown the number of the groups which are the additive groups of local nearrings), and 2 groups are of exponent 4 and both of these groups are the additive groups of local nearrings).

Let $[n, i]$ be the i -th group of order n in the SmallGroups library in the computer system algebra GAP. We denote by C_n and Q_n the cyclic and quaternion groups of order n , respectively.

Theorem 1. The following 2-generated groups of exponent 4 and only they are the additive groups of zero-symmetric local nearrings of order 128:

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 36]	$(C_2 \times ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2)) \rtimes C_4$	> 80384
[128, 125]	$(C_4 \times C_4 \times C_2) \rtimes C_4$	> 35040

Lemma 1. The following 2-generated groups of exponent 8 are the additive groups of zero-symmetric local nearrings of order 128:

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 2]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_4) \rtimes C_2$	> 41184
[128, 4]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_8$	> 103424
[128, 5]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$	> 1536
[128, 6]	$(C_8 \times C_4) \rtimes C_4$	> 73728
[128, 7]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$	> 4160
[128, 8]	$(C_4 \times C_8) \rtimes C_4$	> 10240
[128, 12]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	> 1336
[128, 13]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$	> 33928
[128, 27]	$(C_8 \rtimes C_4) \rtimes C_4$	> 106240
[128, 38]	$((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_4$	> 80384
[128, 48]	$((((C_8 \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2)$	> 194080
[128, 49]	$(C_4 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_8$	> 191520
[128, 50]	$((C_4 \times C_2) \rtimes C_8) \rtimes C_2$	> 16992
[128, 51]	$(C_2 \times Q_8) \rtimes C_8$	> 16992
[128, 56]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_8$	> 254208
[128, 57]	$(C_4 \times C_4) \rtimes C_8$	> 127488

Question 1. Are the following 2-generated groups of exponent 8 the additive groups of zero-symmetric local nearrings of order 128?

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>
[128, 9]	$(C_8 \times C_2) \rtimes C_8$
[128, 28]	$(C_4 \rtimes C_8) \rtimes C_4$
[128, 126]	$(C_2 \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = (C_2 \times C_2) \cdot (C_4 \times C_2)) \rtimes C_4$

Theorem 2. Only the following groups of order 128 and exponent 16 are the additive groups of zero-symmetric local nearrings:

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 42]	$C_{16} \times C_8$	> 134754
[128, 43]	$C_{16} \rtimes C_8$	> 133866
[128, 44]	$C_8 \rtimes C_{16}$	> 145648
[128, 46]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	> 24704
[128, 47]	$((C_{16} \times C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	252928
[128, 52]	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	> 115840
[128, 53]	$((C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_2) \rtimes C_2$	> 277248
[128, 54]	$(C_4 \times C_2) \rtimes C_{16}$	> 82944
[128, 55]	$(C_4 \times C_2) \cdot ((C_4 \times C_2) \rtimes C_2) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	640
[128, 59]	$C_4 \cdot ((C_2 \times C_2 \times C_2) \rtimes C_4) = (C_4 \times C_2) \cdot (C_8 \times C_2)$	> 13056
[128, 99]	$C_8 \rtimes C_{16}$	> 29248
[128, 102]	$C_8 \rtimes C_{16}$	> 5376
[128, 106]	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_4$	> 2808
[128, 107]	$(C_{16} \times C_2) \rtimes C_4$	> 16460
[128, 108]	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_4$	> 1344
[128, 109]	$(C_{16} \rtimes C_2) \rtimes C_4$	> 2344

Theorem 3. *There exist 389976 zero-symmetric local nearrings on 2-generated additive groups of exponent 32 of order 128:*

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 128]	$C_{32} \times C_4$	48968
[128, 129]	$C_{32} \rtimes C_4$	48968
[128, 131]	$(C_{32} \times C_2) \rtimes C_2$	144016
[128, 132]	$(C_{32} \rtimes C_2) \rtimes C_2$	23936
[128, 153]	$C_4 \rtimes C_{32}$	118968
[128, 154]	$C_{16}.D_8 = C_4.(C_{16} \times C_2)$	5120

Theorem 4. *There exist 1024 zero-symmetric local nearrings on 2-generated additive groups of exponent 64 of order 128:*

<i>IdGroup</i>	<i>Structure Description</i>	<i>Number of LNR</i>
[128, 159]	$C_{64} \times C_2$	512
[128, 160]	$C_{64} \rtimes C_2$	512

The library of zero-symmetric local nearrings of order 128 on 2-generated groups can be extracted from [7] using GAP and the package LocalNR [6].

Acknowledgement. The author is grateful to IIE-SRF for the support of her fellowship at the University of Warsaw.

References

1. Feigelstock, S. (2006). Additive Groups of Local Near-Rings. *Comm. Algebra*, 34, 743–747.
2. Maxson, C. J. (1968). On local near-rings. *Math. Z.*, 106, 197–205.
3. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; 2024. <https://www.gap-system.org>
4. Boykett, T. H. H., & Nöbauer C. (1998). *A class of groups which cannot be the additive groups of near-rings with identity*. Contributions to general algebra, 10 (Klagenfurt, 1997). Klagenfurt: Heyn.
5. Aichinger, E., Binder, F., Ecker, Ju., Mayr, P., & Noebauer, C. (2018). SONATA — system of near-rings and their applications. *GAP package, Version 2.9.1*. <https://gap-packages.github.io/sonata/>
6. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Y. (2024). LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.4 (GAP package). <https://gap-packages.github.io/LocalNR/>
7. Raievska, I., Raievska, M., & Sysak, Y. (2022). DatabaseEndom128: (v0.2) [Data set]. Zenodo. <https://zenodo.org/records/7225377>

Раєвська І. Ю. Локальні майже-кілець з адитивною групою порядку 128.

Визначення скінченних неабелевих p -груп, які є адитивними групами локальних майже-кілець, є відкритою проблемою (Feigelstock, 2006). Тому важливо визначити такі групи та класифікувати деякі класи майже-кілець з одиницею на цих групах, наприклад, локальні майже-кілець. В статті ми досліджуємо локальні майже-кілець на 2-породжених групах порядку 128.

Ключові слова: локальне майже-кілець, адитивна група, 2-породжена група.

Список використаної літератури

1. Feigelstock S. Additive Groups of Local Near-Rings. *Comm. Algebra*. 2006. Vol. 34. P. 743–747.
2. Maxson C. J. On local near-rings. *Math. Z.* 1968. Vol. 106. P. 197–205.
3. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.13.0; 2024.
<https://www.gap-system.org>
4. Boykett T. H. H., Nöbauer C. A class of groups which cannot be the additive groups of near-rings with identity. *Contributions to general algebra*, 10 (Klagenfurt, 1997). Klagenfurt : Heyn, 1998. P. 89–99.
5. Aichinger E., Binder F., Ecker Ju., Mayr P., and Noebauer C. (2018). SONATA — system of near-rings and their applications. *GAP package, Version 2.9.1*.
<https://gap-packages.github.io/sonata/>
6. Raievska, I., Raievska, M., and Sysak, Y. LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.4. 2024. (GAP package).
<https://gap-packages.github.io/LocalNR/>
7. Raievska, I., Raievska, M., and Sysak, Y. DatabaseEndom128: (v0.2) [Data set]. Zenodo, 2022.
<https://zenodo.org/records/7225377>

Recived 15.04.2024

УДК 519.248; 81`32

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).115-125](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).115-125)**Є. В. Турчин¹, Ю. С. Федорченко²**

¹ Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
доцент кафедри статистики й теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
evgturchyn@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8947-1359>

² Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
студент 4-го курсу механіко-математичного факультету
yura.fedor4enko@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6191-4033>

РОЗПОДІЛ ЧАСТИХ СЛІВ У КОРОТКИХ ТЕКСТОВИХ ПОВІДОМЛЕННЯХ

Розглядається задача про розподіл частот слів у текстовому корпусі, що складається з коротких повідомлень (акцент зроблено на частих словах). Серед декількох сімей розподілів знайдені найбільш адекватні (використовувався критерій хі-квадрат, а також порівняння за допомогою статистик AIC та BIC).

Ключові слова: розподіл частот слів, математична лінгвістика, критерій хі-квадрат, критерій AIC, критерій BIC.

1. Вступ. У математичній лінгвістиці та інтелектуальному аналізі тексту порівняно багато вивчалися різні аспекти коротких текстів — це задачі класифікації, кластерного аналізу, ідентифікації автору, тематичного моделювання та інші (див, наприклад, [1–11]) Але задача про розподіл частот слів у коротких текстах явно вивчена недостатньо. Мета даною статті — заповнити (хоча б частково) цю прогалину. Ми з'ясуємо, які сім'ї дискретних розподілів краще підходять для описання розподілу частот частих слів у великій колекції коротких текстів.

2. Основні результати. Для дослідження було взято випадкові 10% від набору даних [12]. Отриманий таким чином набір даних складається з великої кількості порівняно коротких англійських текстів (це SMS-повідомлення, Telegram-повідомлення та електронна пошта). Слід зазначити, що приблизно 40% цих текстів є спам-повідомленнями. Попередня обробка текстів з нашого набору даних включала, зокрема, видалення чисел та знаків пунктуації, видалення так званих стоп-слів (це займенники, прийменники, сполучники, різні форми допоміжних дієслів та ще декілька інших слів) і стемінг (тобто виділення основи слова). Хоча фактично ми працюємо з основами слів, але надалі заради зручності ми будемо замість фрази “основа слова” писати просто “слово”.

Після попередньої обробки у текстовому корпусі залишилося приблизно 35700 унікальних слів та приблизно 480000 слів усього, документів усього — близько 4700. Кількість слів у документі корпусу знаходиться у межах від 0 до приблизно 10300, середнє число слів у документі дорівнює 100.8.

Для моделювання частот із слів, що зустрічаються в усьому текстовому корпусі як мінімум 330 разів, було відібрано 46 слів. Зазначимо, що серед обраних 46 слів є різні слова — це як “маркери” спаму (зокрема, “free”, “save”, “money”), так і просто часті слова.

Для кожного фіксованого слова $\mathbf{w}$ утворимо вибірку $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, де ξ_i — кількість повторень слова $\mathbf{w}$ у i -му документі нашого текстового корпусу. Що можна сказати про розподіл ξ_i ?

Для всіх наших слів має місце дуже сильно виражене явище “роздутості” маси нуля (zero inflation) — для емпіричного розподілу частот маса нуля часто більше 0.9. Це природно, оскільки для великої кількості документів конкретне слово $\mathbf{w}$ зустрічатися у них не буде. Тому надалі ми моделюємо не розподіл ξ_i , а розподіл елементів перетвореної вибірки. Робимо наступне: з вибірки ξ вилучимо всі нулі, отримаємо вибірку $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_j, \dots, \eta_m)$, а потім зсунемо на 1 всі її елементи, тобто перейдемо до вибірки

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_j, \dots, \zeta_m),$$

де $\zeta_j = \eta_j - 1$ (і ζ_j вже набувають значення $0, 1, 2, \dots$). І надалі нашою задачею буде моделювання розподілу ζ_j .

Вартою уваги особливістю емпіричних розподілів частот слів є те, що для багатьох слів “довжина емпіричного хвоста” є високою або навіть надзвичайно високою. Точніше,

$$\frac{\max\{\zeta\}}{q_{0.9}(\zeta)} > 10$$

для 15 з 46 слів (через q_α позначено емпіричну α -квантиль), та

$$\frac{\max\{\zeta\}}{q_{0.9}(\zeta)} \geq 5$$

для 40 з 46 слів.

Наведемо тепер розподіли, які будуть використовуватись для моделювання частот слів у перетвореній вибірці (тобто вибірці ζ).

Розподіл Зіхеля (Sichel distribution, див. [13]) з параметрами ω, κ, γ означається формулою

$$P(l; \omega, \kappa, \gamma) = \frac{(\omega/\alpha)^\gamma}{K_\gamma(\omega)} \cdot \frac{(\kappa\omega/\alpha)^l K_{\gamma+l}(\alpha)}{l!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де $\alpha = ((\omega + \kappa)^2 - \kappa^2)^{1/2}$, $K_\nu(z)$ — модифікована функція Бесселя другого роду.

Бета-від’ємний біномний розподіл (beta-negative binomial distribution, див. [13]) з параметрами α, β, r задається наступним чином:

$$P(l; \alpha, \beta, r) = \frac{\Gamma(r+l)}{\Gamma(l+1)\Gamma(r)} \cdot \frac{B(\alpha+r, \beta+l)}{B(\alpha, \beta)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Цей розподіл має важкий хвіст, у нього існує лише скінчена кількість моментів.

Пуассонівський логнормальний розподіл (Poisson lognormal distribution, див. [14]) з параметрами μ, σ означається формулою

$$P(l; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma l!} \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{l-1} \exp \left\{ -\frac{(\ln \lambda - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} d\lambda, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Дискретний розподіл Вейбулла (див. [15]) з параметрами q, β означається так:

$$P(l; q, \beta) = q^{l^\beta} - q^{(l+1)^\beta}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Такі добре відомі розподіли як пуассонівський та геометричний не розглядалися в якості моделей з огляду на їх недостатню гнучкість.

Для кожної сім'ї розподілів за допомогою критерію χ^2 було перевірено гіпотезу вигляду $H_0: F = G$, де F — розподіл частот даного слова, G — гіпотетичний розподіл (що залежить від невідомих параметрів). Невідомі параметри оцінювались за методом максимальної правдоподібності.

Також були отримані значення інформаційних критеріїв AIC та BIC. Нагадаємо, що статистики AIC та BIC означаються наступними формулами:

$$\text{AIC} = -2(l - p),$$

$$\text{BIC} = p \ln(N) - 2l,$$

де p — кількість параметрів, якими задається розподіл, l — значення логарифмічної функції правдоподібності, N — обсяг вибірки.

Розрахунки проводились на мові програмування R із використанням пакетів `DiscreteWeibull`, `fitdistrplus`, `gamlss.dist`, `sads` та `tm` (див. [16–20]).

Значення p -value критерію χ^2 наведено у табл. 1 та 2; значення статистик AIC та BIC — відповідно у табл. 3, 4 (AIC) та 5, 6 (BIC). Прочерки у деяких клітинках означають те, що відповідний розподіл підігнати не вдалося. Використані позначення BNB, DW, NB, PL відповідно для бета-від'ємного біномного розподілу, дискретного розподілу Вейбулла, від'ємного біномного розподілу та пуассонівського логнормального розподілу.

Таблиця 1.

p -value критерія χ^2

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
like	0.1413	$1.76 \cdot 10^{-13}$	0.0615	0.7052	0.6041
now	0.0245	$1.52 \cdot 10^{-16}$	0.0001	0.2010	0.2752
provid	0.6665	$1.37 \cdot 10^{-8}$	0.1253	0.8267	0.8839
product	0.0857	$1.60 \cdot 10^{-6}$	0.1291	0.0528	0.1457
inform	—	$9.09 \cdot 10^{-9}$	0.0412	0.0035	0.0135
number	0.0046	$6.96 \cdot 10^{-8}$	0.0156	0.0335	0.0522
offer	0.1455	$4.80 \cdot 10^{-9}$	0.0263	0.2608	0.0148
time	0.5632	$1.59 \cdot 10^{-12}$	0.0183	0.4442	0.0766
trade	0.3080	$1.30 \cdot 10^{-11}$	$3.54 \cdot 10^{-6}$	0.3956	0.8730
work	0.1711	$6.14 \cdot 10^{-10}$	0.1602	0.2266	0.0843
secur	—	$2.30 \cdot 10^{-6}$	0.0006	$3.60 \cdot 10^{-8}$	0.0003
includ	0.4074	$1.06 \cdot 10^{-9}$	0.0501	0.7641	0.5750
list	0.0444	$2.65 \cdot 10^{-12}$	0.0031	0.2059	0.2888
cash	0.0357	$2.17 \cdot 10^{-4}$	0.0409	0.2228	0.0962
opportun	—	$8.78 \cdot 10^{-7}$	0.1889	0.0729	0.0680
increas	—	$4.21 \cdot 10^{-5}$	0.0063	0.0001	0.0014
softwar	0.3699	$1.04 \cdot 10^{-3}$	0.6592	0.5677	0.4276
cost	0.3766	$1.81 \cdot 10^{-3}$	0.8146	0.3628	0.5024
world	0.0271	$3.02 \cdot 10^{-7}$	0.0195	0.0547	0.0574
approv	0.1910	$2.68 \cdot 10^{-4}$	0.3716	0.3512	0.1647
present	0.4601	$4.65 \cdot 10^{-5}$	0.7881	0.4651	0.4399
financ	0.6325	$2.54 \cdot 10^{-5}$	0.1224	0.9157	0.8742
home	0.2704	$8.57 \cdot 10^{-5}$	0.1005	0.4558	0.1277
plan	0.6598	$5.66 \cdot 10^{-4}$	0.3768	0.7614	0.4791
url	—	$9.43 \cdot 10^{-6}$	0.1488	0.1199	0.1424

Таблиця 2.

 p -value критерія χ^2 , продовження

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
credit	0.0895	$1.23 \cdot 10^{-4}$	0.0193	0.2186	0.0345
execut	0.2777	$5.91 \cdot 10^{-5}$	0.0046	0.5307	0.5989
first	0.5630	$5.79 \cdot 10^{-5}$	0.2730	0.6922	0.7425
fund	0.0135	$9.98 \cdot 10^{-6}$	0.0423	0.0558	0.0530
last	0.0365	$1.05 \cdot 10^{-7}$	0.0004	0.0704	0.0778
news	0.0110	$2.16 \cdot 10^{-5}$	0.0269	0.0033	0.0120
peopl	0.0940	$1.64 \cdot 10^{-7}$	0.0002	0.1370	0.2602
question	0.1862	$6.05 \cdot 10^{-7}$	0.0474	0.5752	0.4276
right	0.0866	$1.59 \cdot 10^{-6}$	0.0026	0.3139	0.3273
sale	0.0126	$2.04 \cdot 10^{-7}$	0.0042	0.0682	0.0877
term	0.0009	$1.48 \cdot 10^{-7}$	0.0007	0.0061	0.0022
transact	0.7511	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.5070	0.8782	0.6282
valu	0.0213	$1.76 \cdot 10^{-4}$	0.0209	0.4851	0.1664
move	0.0469	$2.04 \cdot 10^{-6}$	0.1273	0.8272	0.7724
buy	0.5468	$2.56 \cdot 10^{-4}$	0.0188	0.8314	0.1239
claim	—	$1.68 \cdot 10^{-4}$	0.0003	$3.74 \cdot 10^{-8}$	0.0000
high	0.0203	$3.06 \cdot 10^{-8}$	0.0154	0.1826	0.1166
save	0.0015	$2.09 \cdot 10^{-3}$	0.0228	0.0005	0.0041
billion	0.0112	$6.65 \cdot 10^{-8}$	$6.03 \cdot 10^{-6}$	0.0120	0.0777
compani	$3.43 \cdot 10^{-5}$	$4.06 \cdot 10^{-16}$	$9.76 \cdot 10^{-11}$	0.0003	0.0004
deal	0.7321	$4.40 \cdot 10^{-5}$	0.0771	0.8647	0.6723

Таблиця 3.

Значення AIC

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
like	1073.919	1076.704	1079.409	1071.088	1071.891
now	1034.329	1047.799	1057.33	1028.515	1025.887
provid	1024.096	1028.647	1031.029	1021.226	1022.077
product	1112.814	1111.143	1111.204	1116.548	1111.646
inform	—	1783.784	1782.552	1800.536	1784.552
number	1063.598	1062.380	1061.951	1070.928	1063.407
offer	838.844	846.588	853.525	835.881	837.663
time	1971.167	1984.697	2003.675	1970.120	1975.928
trade	923.134	945.424	963.692	920.518	917.507
work	1298.469	1299.216	1301.972	1297.612	1299.534
secur	—	1097.535	1097.276	1112.183	1099.276
includ	1015.669	1021.323	1024.785	1012.509	1013.176
list	959.341	967.788	971.867	955.248	954.776
cash	397.311	395.510	395.933	395.050	394.684
opportun	—	459.278	459.111	461.992	461.111
increas	—	402.813	401.325	411.117	403.497
softwar	490.502	488.522	488.602	490.072	490.383
cost	493.637	491.927	492.749	493.014	494.151
world	408.779	408.767	409.653	406.282	407.065
approv	436.206	434.416	434.785	434.974	436.207
present	504.251	502.283	502.396	503.353	504.370
financ	470.174	474.599	477.354	467.573	468.783

Таблиця 4.

Значення AIC, продовження

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
home	489.996	490.295	493.730	487.957	489.630
plan	549.016	547.823	549.321	547.455	548.178
url	—	612.554	612.641	612.907	614.166
credit	545.821	546.600	550.038	543.433	544.539
execut	414.665	418.898	423.496	412.059	412.264
first	684.814	684.033	686.041	683.076	683.351
fund	516.442	516.361	519.462	516.394	519.180
last	612.137	618.543	626.479	608.932	608.908
news	590.990	589.082	589.053	597.566	591.053
peopl	635.583	641.664	647.494	632.226	631.588
question	538.807	541.150	544.685	535.985	537.201
right	497.069	501.433	506.737	493.895	493.587
sale	538.091	539.398	540.738	535.475	535.803
term	649.873	653.966	658.369	647.858	650.215
transact	570.138	570.115	573.326	568.772	570.617
valu	482.817	482.306	483.461	480.294	480.311
move	476.753	478.836	480.744	474.167	475.512
buy	433.025	435.181	438.805	430.419	431.285
claim	—	467.600	466.533	478.757	468.533
high	505.384	509.234	511.189	502.165	502.918
save	460.922	459.095	460.481	461.264	462.213
billion	341.529	349.568	354.570	339.277	338.005
compani	2066.078	2087.486	2116.992	2060.633	2060.711
deal	1018.781	1025.508	1037.541	1016.756	1019.938

Таблиця 5.

Значення BIC

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
like	1087.520	1085.772	1088.476	1080.156	1085.492
now	1047.722	1056.729	1066.259	1037.445	1039.281
provid	1035.948	1036.548	1038.930	1029.128	1033.929
product	1124.673	1119.050	1119.110	1124.454	1123.506
inform	—	1792.688	1791.456	1809.440	1797.908
number	1075.697	1070.447	1070.018	1078.994	1075.506
offer	850.907	854.630	861.567	843.923	849.726
time	1985.493	1994.248	2013.226	1979.671	1990.254
trade	934.049	952.701	970.969	927.795	928.422
work	1311.714	1308.046	1310.802	1306.442	1312.779
secur	—	1104.956	1104.696	1119.604	1110.407
includ	1027.783	1029.399	1032.861	1020.585	1025.290
list	971.338	975.786	979.865	963.246	966.772
cash	406.665	401.746	402.169	401.286	404.038
opportun	—	466.119	465.952	468.833	471.373
increas	—	409.535	408.047	417.840	413.581
softwar	500.047	494.886	494.966	496.435	499.929
world	419.067	415.626	416.512	413.141	417.353
approv	446.086	441.003	441.371	441.560	446.087
present	514.526	509.133	509.246	510.203	514.644
financ	479.265	480.660	483.414	473.634	477.874

Таблиця 6.

Значення ВІС, продовження

Слово	BNB	DW	NB	PL	Sichel
cost	503.547	498.533	499.355	499.621	504.061
home	500.802	497.500	500.934	495.161	500.437
plan	559.640	554.905	556.404	554.538	558.801
url	—	618.984	619.071	619.336	623.811
credit	555.466	553.030	556.468	549.863	554.184
execut	423.490	424.781	429.380	417.942	421.089
first	696.388	691.749	693.757	690.792	694.925
fund	525.630	522.486	525.587	522.520	528.368
last	623.685	626.242	634.177	616.631	620.456
news	600.252	595.257	595.228	603.742	600.315
peopl	646.704	649.078	654.908	639.640	642.710
question	550.620	549.025	552.560	543.860	549.013
right	508.069	508.766	514.070	501.228	504.586
sale	547.955	545.974	547.315	542.052	545.668
term	659.872	660.631	665.034	654.523	660.213
transact	579.492	576.351	579.562	575.008	579.971
valu	492.445	488.725	489.880	486.713	489.939
move	486.618	485.413	487.321	480.744	485.376
buy	442.905	441.767	445.392	437.005	441.165
claim	—	473.320	472.252	484.476	477.112
high	515.523	515.994	517.949	508.925	513.057
save	471.210	465.953	467.340	468.122	472.501
billion	348.481	354.203	359.205	343.912	344.958
compani	2078.426	2095.718	2125.224	2068.864	2073.059
deal	1029.962	1032.961	1044.995	1024.209	1031.119

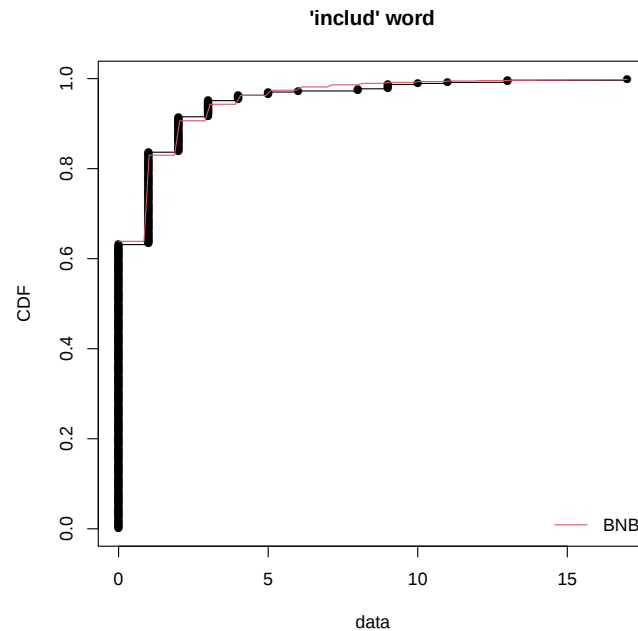


Рис. 1. Слово “includ”, бета-від’ємний біномний розподіл.

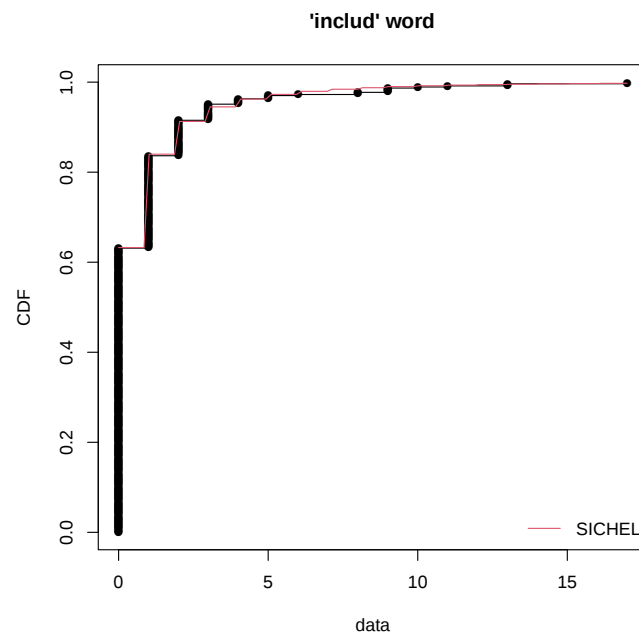


Рис. 2. Слово “includ”, розподіл Зіхеля.

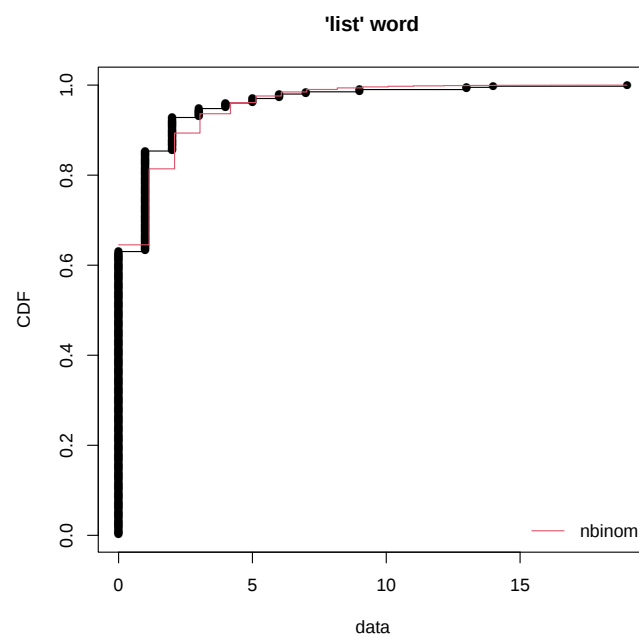


Рис. 3. Слово “list”, від’ємний біномний розподіл.

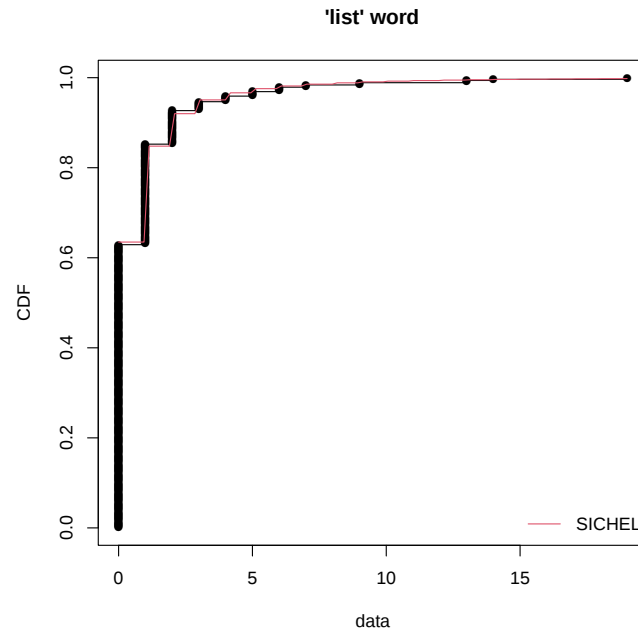


Рис. 4. Слово “list”, розподіл Зіхеля.

Графіки емпіричних функцій розподілу та функцій розподілу деяких з теоретичних розподілів для слів “includ” та “list” наведено на рис. 1, 2, 3 та 4.

Проаналізуємо отримані результати.

Дискретний розподіл Вейбулла є непридатним для моделювання частот слів — цей розподіл не є адекватним за критерієм χ^2 (p -value менше 0.05) у всіх 46 випадках.

Решта розподілів (за винятком від’ємного біномного) порівняно непогано підганяються до даних: p -value критерію χ^2 більше 0.10 для 50%, 57% і 65% з наших 46 слів відповідно для бета-від’ємного біномного розподілу, розподілу Зіхеля та пуассонівського логнормального розподілу.

Від’ємний біномний розподіл пристосований для моделювання частот слів гірше — p -value критерію χ^2 більше 0.10 лише для 33% слів. Варто зазначити, що, незважаючи на порівняно погану якість підгонки цього розподілу “у цілому”, від’ємний біномний розподіл часто добре підганяється до вибірок з порівняно коротким “емпіричним хвостом” (де $\max\{\zeta\} \leq 25$).

Що стосується критеріїв AIC та BIC, оптимальним розподілом найчастіше є пуассонівський логнормальний розподіл — для нього значення AIC та BIC є найменшими відповідно для 23 слів та 31 слова.

3. Висновки. Знайдено ймовірнісні розподіли, які є оптимальними для моделювання частот широко вживаних слів у великій колекції коротких текстів. Отримані результати можуть бути використані, зокрема, для класифікації документів та побудови регресійних моделей, де залежною змінною є частота слова.

Розподіл роботи співавторів. Є. В. Турчин: постановка задачі, методологія, написання статті, частково — обчислення. Ю. С. Федорченко: частково — обчислення.

Список використаної літератури

1. Tagg C. A corpus linguistics study of SMS text messaging. Ph. D. thesis : Birmingham, 2009. 402 p. URL: <https://etheses.bham.ac.uk/id/eprint/253/> (date of access: 08.06.2024).
2. Ni X. et al. Short text clustering by finding core terms. *Knowledge and Information Systems*. 2011. Vol. 27, No. 3. P. 345–365. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10115-010-0299-7>
3. Rafeeqe P. C., Sendhilkumar S. A survey on short text analysis in Web. Proceedings of *2011 Third International Conference on Advanced Computing* : Chennai. India, 2011. P. 365–371. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6165203/> (date of access: 08.06.2024).
4. Brocardo M. L. et al. Authorship verification for short messages using stylometry. Proceedings of *2013 International Conference on Computer, Information and Telecommunication Systems (CITS)* : Athens. Greece, 2013. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/CITS.2013.6705711>
5. Lyddy F. et al. An analysis of language in university students' text messages. *Journal of Computer-Mediated Communication*. 2014. Vol. 19, No. 3. P. 546–561. URL: <https://academic.oup.com/jcmc/article-abstract/19/3/546/4067601> (date of access: 08.06.2024).
6. Xu J. et al. Self-taught convolutional neural networks for short text clustering. *Neural Networks*. 2017. Vol. 88. P. 22–31. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.12.008>
7. Zheng C. T., Liu C., Wong H. S. Corpus-based topic diffusion for short text clustering. *Neurocomputing*. 2018. Vol. 275. P. 2444–2458. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.11.019>
8. Sjarif A. N. N. et al. SMS spam message detection using term frequency-inverse document frequency and random forest algorithm. *Procedia Computer Science*. 2019. Vol. 161. P. 509–515. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050919318617> (date of access: 08.06.2024).
9. Srinivasan L., Nalini C. An improved framework for authorship identification in online messages. *Cluster Computing*. 2019. Vol. 22. P. 12101–12110. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10586-017-1563-3>
10. Albalawi R., Yeap T. H., Benyoucef M. Using topic modeling methods for short-text data: a comparative analysis. *Frontiers in Artificial Intelligence*. 2020. Vol. 3. P. 42. URL: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/frai.2020.00042/full> (date of access: 08.06.2024).
11. Qiang J. et al. Short text topic modeling techniques, applications, and performance: a survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2022. Vol. 34, No. 3. P. 1427–1445. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9086136/> (date of access: 08.06.2024).
12. mshenoda/spam-messages · Datasets at Hugging Face
URL: <https://huggingface.co/datasets/mshenoda/spam-messages> (date of access: 08.06.2024).
13. Johnson N. L., Kemp A. W., Kotz S. Univariate Discrete Distributions. Hoboken, N.J. : Wiley, 2005. 646 p.
14. Bulmer M. G. On fitting the poisson lognormal distribution to species-abundance data. *Biometrics*. 1974. Vol. 30, No. 1. P. 101–110. DOI: <https://doi.org/10.2307/2529621>
15. Nakagawa T., Osaki S. The discrete Weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*. 1975. Vol. R-24, No. 5. P. 300–301. DOI: <https://doi.org/10.1109/TR.1975.5214915>
16. Delignette-Muller M. L., Dutang C. fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software*. 2015. Vol. 64, No. 4. P. 1–34. DOI: <https://doi.org/10.18637/jss.v064.i04>
17. DiscreteWeibull: Discrete Weibull Distributions (Type 1 and 3).
URL: <https://cran.r-project.org/package=DiscreteWeibull> (date of access: 08.06.2024).
18. Feinerer I., Hornik K. (2024). tm: Text Mining Package. R package version 0.7-13. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=tm> (date of access: 08.06.2024).
19. gamlss.dist: Distributions for Generalized Additive Models for Location Scale and Shape. URL: <https://cran.r-project.org/package=gamlss.dist> (date of access: 08.06.2024).
20. Prado P., Dantas Miranda M., Chalom A. sads: Maximum Likelihood Models for Species Abundance Distributions. URL: <https://CRAN.R-project.org/package=sads> (date of access: 08.06.2024).

Turchyn I. V., Fedorchenko Yu. S. Distribution of frequent words in short text messages.

We consider a problem of word frequency distribution in a text corpus which consists of short messages (the emphasis is put on frequent words). The most adequate distributions were found among several distribution families (the chi-square test was used, the distributions were compared using the AIC and BIC statistics).

Keywords: word frequency distribution, mathematical linguistics, chi-square test, AIC criterion, BIC criterion.

References

1. Tagg, C. (2009). A corpus linguistics study of SMS text messaging [PhD Thesis, University of Birmingham]. Retrieved from <https://etheses.bham.ac.uk/id/eprint/253/>
2. Ni, X., Quan, X., Lu, Z., Wenyin, L., & Hua, B. (2011). Short text clustering by finding core terms. *Knowledge and Information Systems*, 27(3), 345–365. <https://doi.org/10.1007/s10115-010-0299-7>
3. Rafeeqe, P. C., & Sendhilkumar, S. (2011). A survey on short text analysis in web. *2011 Third International Conference on Advanced Computing*. Retrieved from <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6165203/>
4. Brocardo, M. L., Traore, I., Saad, S., & Woungang, I. (2013). Authorship verification for short messages using stylometry. *2013 International Conference on Computer, Information and Telecommunication Systems (CITS)*. <https://doi.org/10.1109/CITS.2013.6705711>
5. Lyddy, F., Farina, F., Hanney, J., Farrell, L., & O'Neill, N. K. (2014). An analysis of language in university students' text messages. *Journal of Computer-Mediated Communication*, 19(3), 546–561. Retrieved from <https://academic.oup.com/jcmc/article-abstract/19/3/546/4067601>
6. Xu, J., Xu, B., Wang, P., Zheng, S., Tian, G., Zhao, J., & Xu, B. (2017). Self-taught convolutional neural networks for short text clustering. *Neural Networks*, 88, 22–31. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.12.008>
7. Zheng, C. T., Liu, C., & Wong, H. S. (2018). Corpus-based topic diffusion for short text clustering. *Neurocomputing*, 275, 2444–2458. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.11.019>
8. Sjarif, N. N. A., Azmi, N. F. M., Chuprat, S., Sarkan, H. M., Yahya, Y., & Sam, S. M. (2019). SMS spam message detection using term frequency-inverse document frequency and random forest algorithm. *Procedia Computer Science*, 161, 509–515. Retrieved from <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050919318617>
9. Srinivasan, L., & Nalini, C. (2019). An improved framework for authorship identification in online messages. *Cluster Computing*, 22(S5), 12101–12110. <https://doi.org/10.1007/s10586-017-1563-3>
10. Albalawi, R., Yeap, T. H., & Benyoucef, M. (2020). Using topic modeling methods for short-text data: A comparative analysis. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 3, 42. Retrieved from <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/frai.2020.00042/full>
11. Qiang, J., Qian, Z., Li, Y., Yuan, Y., & Wu, X. (2020). Short text topic modeling techniques, applications, and performance: a survey. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 34(3), 1427–1445. Retrieved from <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9086136/>
12. mshenoda/spam-messages · Datasets at Hugging Face. Retrieved from <https://huggingface.co/datasets/mshenoda/spam-messages>
13. Johnson, N. L., Kemp, A. W., & Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions*. Hoboken, N.J.: Wiley.
14. Bulmer, M. G. (1974). On fitting the Poisson lognormal distribution to species-abundance data. *Biometrics*, 30(1), 101. <https://doi.org/10.2307/2529621>
15. Nakagawa, T., & Osaki, S. (1975). The discrete weibull distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, R-24(5), 300–301. <https://doi.org/10.1109/TR.1975.5214915>
16. Delignette-Muller, M. L., & Dutang, C. (2015). fitdistrplus: An R package for fitting distributions. *Journal of Statistical Software*, 64(4), 1–34. <https://doi.org/10.18637/jss.v064.i04>
17. DiscreteWeibull: Discrete Weibull Distributions (Type 1 and 3). Retrieved from <https://cran.r-project.org/web/packages/DiscreteWeibull/index.html>

18. Feinerer I., & Hornik K. (2024). tm: Text Mining Package. R package version 0.7-13. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=tm>
19. gamlss.dist: Distributions for Generalized Additive Models for Location Scale and Shape. Retrieved from <https://cran.r-project.org/package=gamlss.dist>
20. Prado P., Dantas Miranda M., & Chalom A. sads: Maximum Likelihood Models for Species Abundance Distributions. Retrieved from <https://CRAN.R-project.org/package=sads>

Одержано 11.07.2024

С. Ю. Бабич¹, Н. О. Ярецька², В. Ф. Лазар³, Ю. Ю. Млавець⁴

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yaretskano@khmnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3726-2878>

³ Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат технічних наук
vflazar@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2457-571X>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
зам. декана факультету математики та цифрових технологій,
доцент кафедри кібербезпеки та прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ДВОХ ПІВПРОСТОРІВ ТА КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА

В статті представлено аналітичний розв'язок контактної задачі для двох пружних півпросторів з початковими напруженнями та попередньо напруженого кільцевого штампа без врахування сил тертя. Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту кільцевого штампа та півпросторів залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. Задачу розв'язано у випадку рівних коренів визначального рівняння. Дослідження представлено у загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності при довільній структурі пружного потенціалу.

Припускається, що початкові стани пружного кільцевого штампа та пружних півпросторів однорідні та рівні. Дослідження проводиться в координатах початкового деформованого стану, які пов'язані з лагранжевими координатами. Крім того, вплив кільцевого штампа викликає невеликі збурення відповідних величин основного напружено-деформованого стану. Також передбачається, що пружний кільцевий штамп та пружні півпростори виготовлені з різних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів. У випадку ортотропних тіл будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають із напрямком осей координат у деформованому стані. У результаті, розв'язки поставленої задачі представлені у вигляді нескінченних рядів, коефіцієнти яких визначаються з нескінченної квазірегулярної системи алгебраїчних рівнянь. Для дослідження задачі використовується велика кількість фундаментальних результатів таких як: перетворення Ханкеля, потрібні інтегральні рівняння, та інші методи теорії контактних задач лінеаризованої теорії пружності.

У статті також встановлено зв'язок між осіданням та рівнодіючою силою навантаження. Отже, за допомогою отриманих розв'язків можна вивчити вплив початкових (залишкових) напружень на розподіл контактних напружень та переміщень у двох пружних півпросторах та пружному кільцевому штампі.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір, інтегральні рівняння.

1. Вступ. Дослідження та розв'язок контактних задач теорії пружності є актуальним напрямком розвитку сучасної науки, враховуючи виклики та випробування сьогодення. Значна кількість практичних завдань зводиться до розв'язання задач механіки твердого деформованого тіла, наприклад: розрахунок та дослідження напружено-деформованого стану важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в межах дії гравітаційних сил, а також градієнтів, водонапірних веж, димових труб та інших інфраструктурних споруд та залізобетонних конструкцій [1–3]. Основна частина даних практичних задач формулюється для таких тіл як півпростір або шар з областями контакту різноманітної форми та складності.

Поява нових матеріалів, необхідність підвищення якості їх характеристик також вимагає все більшої уваги науковців до напрямку досліджень в рамках механіки твердого деформованого тіла.

Особливу увагу в цьому напрямку, слід приділити впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл. Враховуючи те, що початкові напруження присутні практично в усіх елементах конструкцій, і можуть бути викликані різного роду причинами, такими як: виробничі процеси (при виготовленні цілого ряду матеріалів), технологічні операції або складання конструкцій. Внаслідок дії геостатичних та геодинамічних сил початкові напруження виникають у земній корі. Також, вони виникають у композитних матеріалах — в результаті технологічних процесів при їх створенні. Присутність початкових напружень існує навіть у кровоносних судинах живих організмів. Початкові напруження необхідно враховувати й при розв'язуванні задач про деформацію мерзлих ґрунтів. Крім того, у пружно-пластичних тілах також можуть існувати внутрішні залишкові напруження після зняття навантаження. Іноді доречно навмисно створювати початкові (залишкові або технологічні) напруження для компенсації тих напружень, які виникають у елементах конструкцій у процесі їх роботи.

У багатьох публікаціях періодичних наукових видань та працях навчального і монографічного характеру [4, 5] досить детально вивчені питання, що стосуються контактних задач для пластичних, пружних та в'язко пружних тіл без дії на них початкових напружень. Але запити сучасної інженерно-технічної практики висувають до науковців ряд задач, які потребують використання більш ускладнених моделей, що дозволятимуть враховувати вплив початкових (технологічних або залишкових) напружень, поверхневі властивості матеріалу, вплив тертя, жорсткість поверхні, тепловиділення, зносостійкість поверхні тіл тощо [6–8]. Аналіз результатів цих досліджень дозволяє сформулювати умови на межі поверхонь контактуючих деформованих тіл, що відповідають дійсності.

Отже, враховуючи виклик інженерно-технічної практики, можна пояснити тенденцію збільшення кількості опублікованих робіт з нелінійної теорії пружності та лінеаризованої механіки деформованих тіл (яку застосовують при досить великих початкових (залишкових) напруженнях). Розв'язки таких задач до-

звояють краще описувати та враховувати фізичні характеристики матеріалів і дію на них сил тертя. До праць даного напрямку належать оглядові статті та праці монографічного характеру [9–13].

Фундаментальні результати лінеаризованої теорії пружності, на якій ґрунтуване дане дослідження, були одержані українським вченим, академіком НАН України проф. Гузем О. М. [6, 8–10, 13]. Ним вперше було розв'язано ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з довільною формою пружного потенціалу та однорідними початковими напруженнями, що оснований на теорії функції комплексної змінної для плоских задач і теорії потенціалу для просторових задач. Подальшого розвитку теорія контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями отримала у працях його учнів [8, 9, 11, 12, 14, 15] та інших вітчизняних і зарубіжних вчених [7, 13, 15]. Існує також ряд узагальнюючих публікацій [1–3, 5, 10–12, 14–18], які повністю або частково пов'язані з тематикою цієї статті.

На думку авторів статті, перевага підходу, запропонованого О. М. Гузем полягає в тому, що цей підхід дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А необхідні графіки та числові результати для конкретних пружних потенціалів можуть бути отримані лише на завершальному етапі. Це дозволяє більш широко використовувати отримані аналітичні залежності.

Тому у даній статті дослідження контактної задачі для попередньо напружених ідентичних півпросторів та пружного кільцевого штампу з початковими напруженнями без врахування сил тертя для випадку рівних коренів визначального рівняння [9] виконано у межах підходу запропонованого Гузем О. М.

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружного кільцевого штампа позначаються верхнім індексом «(3)», верхнього півпростору — «(1)», а нижнього півпростору — «(2)». Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампі та півпросторах однакові. У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [4].

2. Постановка задачі. Нехай пружний кільцевий штамп висотою H з початковими напруженнями (рис. 1), геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю y_3 циліндричної системи координат (r, θ, y_3) стискається (розтягується) двома ідентичними попередньо напруженими півпросторами за допомогою віссесиметричного навантаження, що зводиться до рівнодійної сили P . Зовнішнє навантаження прикладене таким чином, що точки не навантажених поверхонь обох попередньо напружених півпросторів та віддалених від області контакту півпросторів з пружним кільцевим штампом, переміщуються відносно координатної площини $y_3 = 0$ на величину ε . Величини: R_1 та R_2 — відповідно внутрішній та зовнішній радіуси кільцевого штампа, $h = 0.5H$.

Будемо вважати, що поверхні поза межею контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а на межі контакту переміщення та напруження — неперервні. На рис. 1. величини λ_i ($i = 1, 2, 3$) — коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану, а S_0^{11} , S_0^{22} компоненти симетричного тензора початкових напружень.

Також, у дослідженні будемо розглядати пружні ізотропні тіла (стисливі або

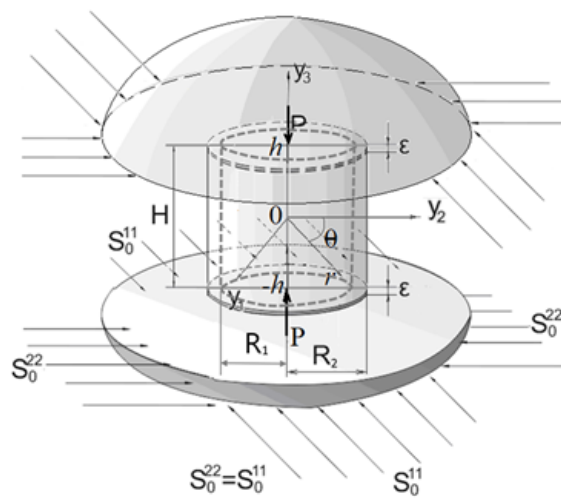


Рис. 1. Тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями.

нестисливі) з довільною формою пружного потенціалу. Причому, пружні потенціали — двічі неперервно-диференційовні функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [9]. Крім того, дія штамп викликає у півпросторах мале збурення основного напруженого стану, для якого виконуються умови

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \quad (1)$$

Дослідження проведено у координатах початкового деформованого стану y_i , які пов'язані з лагранжевими координатами (початкового стану) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i = \overline{1, 3}$).

У даній статті обмежимося випадком нерівних коренів ($\xi_2'^2 \neq \xi_3'^2$) характеристичного (визначального) рівняння [9].

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i) , де $z_i = v_i^{-1} y_3$, $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = 1, 2$), $n_1 = \xi_2'^2$, $n_2 = \xi_3'^2$ такієї постановці відповідають граничні умови:

- 1) на торцях пружного кільцевого штамп в області контакту $z_i = \pm h/v_i$, де $v_i = \sqrt{n_i}$, ($i = \overline{1, 2}$):

$$u_3^{(i)} - u_3^{(3)} = \varepsilon, \quad Q_{33}'^{(3)} = Q_{33}'^{(i)}, \quad Q_{3r}'^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(i)} = 0, \quad (R_1 \leq r \leq R_2) \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

- 2) на межах пружних півпросторів поза ділянкою контакту $z_i = \pm h/v_i$, де ($i = \overline{1, 2}$):

$$Q_{33}'^{(i)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(i)} = 0, \quad u_3^{(i)} = 0, \quad (0 < r < R_1 \text{ або } r > R_2) \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

- 3) на боковій поверхні пружного кільцевого штамп $r = R_1$ або $r = R_2$:

$$Q_{rr}'^{(3)} = 0, \quad Q_{3r}'^{(3)} = 0, \quad (|z_i| \leq h/v_i) \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

Умова рівноваги, яка встановлює зв'язок між осіданням торців та рівнодією навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r |Q'_{33}(3)| dr, \quad |Q'_{33}(3)| = |Q'_{3r}(3)|_{z_i=\pm H/v_i} \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Умова (5) закриває постановку просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого скінченного циліндричного штампа із двома пружними півпросторами з початковими напруженнями.

3. Основні співвідношення та метод розв'язку. Напружено-деформований стан в ділянках контакту у попередньо напружених півпросторах будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [9]

$$\begin{aligned} Q'_{33}(i)(\rho; 0) &= \frac{C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)}{R_1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta, \\ Q'_{3r}(i)(\rho; \xi) \Big|_{\xi=0} &= \\ &= -\frac{C_{44}(1+m_1)}{v_1} \left(\xi - \frac{h}{R_1} \right) \int_0^\infty \eta F(\eta) e^{(\xi-h/R_1)\eta/v_1} J_1(\eta\rho) d\eta \Big|_{\xi=0} = 0, \\ U'_3(i)(\rho; 0) &= -\frac{m_1(s_1-s_0)}{v_1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta\rho) d\eta, \\ U'_r(i)(\rho; 0) &= -(1-s_0) \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta\rho) d\eta, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}, \\ \kappa'_{1313}. \end{cases} \quad m_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1111}n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}, \\ \frac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases} \quad l_i = \begin{cases} \frac{\omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} + \frac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \frac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111}n_i + \omega'_{1133}}, \\ \frac{\kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \frac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \frac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases}$$

$\xi = \frac{z_i v_i}{R_1}$, $\zeta_i = \frac{\xi}{v_i} = \frac{z_i}{R}$, $\eta = \xi R_1$, $(i = 1, 2)$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$, $s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$, $s_1 = (m_1-1)m_1^{-1}$, $s_2 = (v_1 m_2)(v_2 m_1)^{-1}$, $s_3 = s_0 v_1 v_2^{-1}$, $F(\eta)$ — шукана функція, $J_v(x)$ — функції Бесселя дійсного аргументу.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у кільцевому пружному штампі з початковими напруженнями у випадку рівних коренів ($\xi_2'^2 = \xi_3'^2$) характеристичного рівняння [9] прийемо у вигляді:

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + v_i z_i \tilde{\chi}_2, \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 &= C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + A_0 (r^2 - 2z_1^2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(A_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + A_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r) \right) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ &\quad \left. + \left(T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} Y_0(\alpha_k r) \right) S_2(\alpha_k z_1) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_2 = & C_0 z_1 (3r^2 - 2z_1^2) + A_0 (r^2 - 2z_1^2) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(B_k^{(1)} I_0(\gamma_k v_1 r) + B_k^{(2)} K_0(\gamma_k v_1 r) \right) S_1(\gamma_k v_1 z_1) + \right. \\ & \left. + \left(T_k^{(2)} J_0(\alpha_k r) + T_k^{(1)} {}_2Y_0(\alpha_k r) \right) S_3(\alpha_k z_1) \right],\end{aligned}$$

$I_v(x)$ — функція Бесселя уявного аргументу, $S_1 = C_k \sin(\gamma_k v_1 z_1) + D_k \cos(\gamma_k v_1 z_1)$, $S_2 = E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, $S_3 = N_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + M_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)$, C_k , D_k , E_k , F_k , N_k , M_k , $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, $B_k^{(1)}$, $B_k^{(2)}$, $T_k^{(1)}$, $T_k^{(2)}$ — деякі сталі коефіцієнти, α_k , γ_k — власні значення задачі (2)–(5). Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому кільцевому штампі для стисливих (нестисливих) тіл та рівних коренів рівняння [14], із врахуванням граничних умов (2)–(5), представимо у вигляді

$$\begin{aligned}U_r^{(3)} = & \frac{\varepsilon \omega_2}{R_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -2\tilde{A}_0 r + \alpha_k \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\alpha_k}{v_1} (E_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + F_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) + (1 + \alpha_k z_1) M_k (\operatorname{ch}(\alpha_k z_1) + \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) \right) \left. \right\} T_k, \\ Q_{3r}^{(3)} = & \frac{C_{44}}{v_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^2 \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \left\langle (1 + m_1) \alpha_k \left(\frac{1}{v_1} (E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) + (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \right) + (1 + m_2) (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) + \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \right\rangle \left. \right\} T_k, \\ U_3^{(3)} = & \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \\ & \times \left\langle (m_1 h \alpha_k - (m_2 - 1) v_1) (\operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) M_k - \right. \\ & - m_1 \alpha_k (F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) + \\ & \left. \left. + \frac{4}{n_1} [m_1 (\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2) h] \tilde{A}_0 \right\rangle \right\} T_k, \\ Q_{33}^{(3)} = & C_{44} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left\langle \frac{\alpha_k^3}{v_1} (1 + m_1) l_1 \left[Y_1(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_1(\alpha_k r) \right] \times \right. \right. \\ & \times (F_k \operatorname{ch}(\alpha_k z_1) - E_k \operatorname{sh}(\alpha_k z_1)) T_k + (1 + m_2) l_2 \alpha_k^2 (\operatorname{sh}(\alpha_k z_1) - \operatorname{ch}(\alpha_k z_1)) M_k \left. \right\rangle + \\ & \left. + 4 l_2 (1 + m_2) \tilde{A}_0 \right\} T_k,\end{aligned}\tag{8}$$

де

$$\omega_2 = \frac{v_1^3}{m_1 (s_3 - s_2)},$$

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{2(1 + \tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[Y_1(\alpha_k R_1) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k R_1) \right],$$

$$M_k = \frac{(1 + m_1) \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right]}{(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \left\langle (1 + m_2) + (1 + m_1) \left(\alpha_k - \frac{(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_0)} \right) \right\rangle},$$

$$F_k = -\frac{v_1}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} - \frac{v_1(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k,$$

$$E_k = \frac{v_1}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} - \frac{v_1(\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1 + \alpha_k \tilde{c}_2)}{\alpha_k(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1)} M_k,$$

$$\tilde{c}_0 = \begin{cases} \omega'_{1111} \omega'^{-1}_{1122}; \\ \lambda_1 q_1 (\lambda_3 q_3)^{-1} (\kappa'_{1133} + \kappa'_{1313}) \kappa'^{-1}_{1122}; \end{cases} \quad \tilde{c}_i = \begin{cases} \lambda_3 \omega'_{1133} m_i \omega'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \\ (\kappa'_{1133} m_i - \kappa'_{3113}) \kappa'^{-1}_{1122} n_i^{-1}; \end{cases}$$

($i = \overline{1, 2}$), T_k — шукані сталі.

Використовуючи розв'язок для штамп (8) та задовольняючи третій умові (2), другій умові (3), знаходимо власні значення задачі (2)–(5) для рівних коренів визначального рівняння [9] ($n_1 = n_2$):

γ_k — розв'язок рівняння $I_1(\gamma_k v_1 R_2) K_1(\gamma_k v_1 R_1) - I_1(\gamma_k v_1 R_1) K_1(\gamma_k v_1 R_2) = 0$,

$$\alpha_k = \frac{\mu_k}{R_1} (J_1(\mu_k) Y_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) - Y_1(\mu_k) J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}) = 0),$$

де μ_k — розв'язок рівняння $J_1(\mu_k) = 0$.

Із граничних умов (3) маємо $C_0 = C_k = 0$. Також, задовольнивши першу умову (1), визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (6) з потрібних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta &= 0, \quad (R_2 < r < \infty), \\ \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta &= f(r), \quad (R_1 < r < R_2), \\ \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta &= 0, \quad (0 < r < R_1), \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$\begin{aligned} f(r) = \varepsilon + \frac{\alpha_k}{n_1} &\left[(\alpha_k h m_1 - v_1(m_1 - 1)) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) M_k - \right. \\ &- m_1 \alpha_k \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \cdot \left[Y_0(\alpha_k r) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k r) \right] T_k + \\ &\left. + \frac{4}{n_1} [m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 + m_2)h] \tilde{A}_0 T_k. \right. \end{aligned}$$

Далі з потрібних інтегральних рівнянь (9) та перших граничних умов (2)–(3) визначимо невідому функцію $F(\eta)$ для (6) через нескінченну систему кон-

стант T_k

$$\begin{aligned} \frac{F(\eta)}{\eta} = & \frac{2}{\pi} \left(\varepsilon \psi_0(\eta, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \frac{\alpha_k}{m_1} T_k \left[\left(\alpha_k h m_1 - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - v_1(m_1 - 1) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right) M_k \psi_0(\eta, 0) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right] \left(\psi_0(\eta, 0) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\eta, \mu_k) \right) \right) \right) + \\ & + \frac{4}{n_1} [m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2)h] \tilde{A}_0 T_k \psi_0(\eta, 0) \Big\rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\psi(\eta, 0) = \frac{\sin \eta}{\eta}, \quad \psi(\eta, \mu_k) = \frac{\eta \sin \eta \cos \mu_k - \mu_k \sin \mu_k \cos \eta}{\eta^2 - \mu_k^2}.$$

З другої умови (2) отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = & \frac{R_1}{(1 + m_1) l_1(s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[Y_0(\alpha_k \rho) - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} J_0(\alpha_k \rho) \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1) l_1}{v_1} \cdot \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k^2(1 + m_2) l_2 M_k \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + 4(1 + m_2) l_2 \tilde{A}_0 \right\} T_k, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\rho = \frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$ — безрозмірна координата.

Проінтегруємо рівність (11) по $\rho J_0(\mu_n \rho) d\rho$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^{\infty} F(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = & \frac{R_1}{(1 + m_1) l_1(s - s_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1) l_1}{v_1} \cdot \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \alpha_k^2(1 + m_2) l_2 M_k \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \right) + \\ & \left. + 4(1 + m_2) l_2 \tilde{A}_0 \frac{R_2 J_1(\mu_n R_2) - R_1 J_1(\mu_n R_1)}{\mu_n} \right\} T_k, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} t_{nk}^{(1)} = & \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) Y_1(\alpha_k R_1) - R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) Y_0(\alpha_k R_1)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} + \\ & + \frac{R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) Y_1(\alpha_k R_2) - R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) Y_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}, \end{aligned}$$

$$t_{nk}^{(2)} = \frac{R_1 \alpha_k J_0(\mu_n R_1) J_1(\alpha_k R_1) - R_1 \mu_n J_1(\mu_n R_1) J_0(\alpha_k R_1)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2} + \\ + \frac{R_2 \mu_n J_1(\mu_n R_2) J_1(\alpha_k R_2) - R_2 \alpha_k J_0(\mu_n R_2) J_1(\alpha_k R_2)}{\mu_n^2 - \alpha_k^2}.$$

При обчисленні (12) використовуємо значення інтегралів:

$$\int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) \int_0^\infty \eta \psi_0(0, \eta) J_0(\eta \rho) d\eta d\rho = \psi_0(0, \mu_k), \\ \int_0^\infty \eta \psi(\eta, \mu_k) \int_0^1 \rho J_0(\mu_n \rho) J_0(\eta \rho) d\rho d\eta = \psi(\mu_n, \mu_k).$$

А для відшукування невідомих T_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$), що входять до (6), (7) та (10) отримаємо нескінченну систему

$$\tilde{\alpha}_k T_k + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_{kn} T_n = \tilde{\beta}_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

де

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{2\varepsilon\varpi_k}{\pi}; \quad \tilde{\alpha}_k = \frac{8}{\pi n_1} (m_1(\alpha_k^2 - h) + (1 - m_2)) \tilde{A}_0 \varpi_k; \\ \tilde{\alpha}_{kn} = \frac{R_1}{(1 + m_1)l_1(s - s_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[t_{nk}^{(1)} - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} t_{nk}^{(2)} \right] \left(\frac{\alpha_k^3(1 + m_1)l_1}{v_1} \times \right. \right. \\ \times \left[F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] + \alpha_k^2(1 + m_2)l_2 M_k \times \\ \times \left[\operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right] \Bigg) + 4(1 + m_2)l_2 \tilde{A}_0 \frac{R_2 J_1(\mu_n R_2) - R_1 J_1(\mu_n R_1)}{\mu_n} \Bigg\} - \\ - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\alpha_k}{m_1} \left[(\alpha_k h m_1 - v_1(m_1 - 1)) \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) M_k \varpi_k - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_k m_1 \left(F_k \operatorname{ch} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) - E_k \operatorname{sh} \left(\frac{\alpha_k h}{v_1} \right) \right) \right] \left(\varpi_k - \frac{Y_1(\alpha_k R_1)}{J_1(\alpha_k R_1)} \psi_0(\mu_n, \mu_k) \right) \right\rangle, \\ \varpi_k = \frac{(-1)^k \left[R_2^{2(k+1)} \tau_k(R_2) - R_1^{2(k+1)} \tau_k(R_1) \right]}{2^{2n+1}(k+1)k!(k+1)},$$

де

$$\tau_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} \Gamma(2+k) \Gamma(0.5+n) \Gamma(n+1+k)}{n! \Gamma(2+n+k) \Gamma(0.5) \Gamma(1+k)}.$$

Відмітимо, що коефіцієнти системи (13) залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу та висоти і радіусів кільцевого штамп.

Використавши умову рівноваги (5), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодійною навантаження у вигляді

$$P = 4\pi\epsilon C_{44}(1 + m_2)l_2(R_1^2 - R_2^2)\tilde{A}_0T_0.$$

Визначивши невідомі сталі T_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$) із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (13), обчислимо компоненти переміщень та напружень як у пружних півпросторах, так і у пружному кільцевому штампі за формулами (6) та (8).

4. Висновок. В статті представлено аналітичні розв'язки актуальної контактної задачі в рамках лінеаризованої теорії пружності для сучасного машинобудування та будівництва споруд, машин та інженерних конструкцій, а саме — задачу про тиск двох попередньо напружених півпросторів на пружний кільцевий циліндричний штамп з початковими напруженнями без врахування сил тертя. Розв'язки цієї задачі подані у вигляді рядів через нескінченну систему сталих величин χ_k , ($k = 0, 1, 2, \dots$), які визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (13) методом утинання.

Отже, розв'язок даної задачі дає змогу розширити коло наукових досліджень у межах механіки деформованого твердого тіла.

Список використаної літератури

- Чеканович М. Г. Метод одночасного попереднього напруження і пересування залізобетонних конструкцій. *Таврійський науковий вісник. Серія: Технічні науки*. № 3. С. 198–204. DOI: <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.3.22>
- Zharko L., Tarasiuk V., Ovchar V., Boretskaia N., Belokon A., Tashchilova A. Ризики та дефекти стикування арматурних стрижнів опресовуванням муфт. *Наука та будівництво*. Т. 18, № 4. С. 60–64. DOI: <https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.58>
- Veliyev Q. J., Ipek C. The Influence of the Material Properties of an Inhomogeneous Pre-Stressed Hollow Cylinder Containing an Inviscid Fluid on the Dispersion of Quasi-Scholte Waves. *Int Appl Mech*. 2023. Vol. 59. P. 619–629. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01246-0>
- Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов : Вища шк., 1981. 136 с.
- Semenyuk N. P., Zhukova N. B. Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*. 2020. Vol. 56, No. 1. P. 40–53. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
- Guz A. N. On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58, No. 1. P. 1–29. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
- Kaminsky A. O., Kurchakov E. E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*. 2022. Vol. 58, No. 2. P. 154–159. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
- Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Saarbrücken : LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.
- Гузь А. Н., Рудницький В. Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст]. Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. 710 с.
- Guz A. N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. Cham : Springer, 2021. 366 p.
- Yarets'ka N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses : Edited by: Guz A. N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V. M. *Advances in Mechanics*. Vol. 191. Advanced Structured Materials. Springer : Cham, 2023. P. 517–546. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29
- Yaretska N. O. Mathematical model and solution of spatial contact problem for prestressed

- cylindrical punch and elastic layer. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia : "Baltija Publishing", 2022. P. 261–295. DOI: <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
13. Altenbach H., Bogdanov V., Bulat A., Guz A., Nazarenko V. A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine : Advances in Mechanics. Vol. 191. Advanced Structured Materials. Springer : Cham, 2023. P. 1–19. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
 14. Babich S. Yu., Glukhov Y. P. On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57, No. 1. P. 43–52. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>
 15. Діхтярук М. М., Кравчук О. А. Дослідження поля впливу пружних переміщень і напружень для попередньо напруженої смуги від дії зосередженої сили. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 40, № 1. С. 146–154. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).146-154)
 16. Habrusiev H., Habrusieva I., Shelestovskyi B. Simulation of a pre-deformed plate compression by two indenters of complex shape. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*. 2023. Vol. 112, No. 4. P. 91–101.
 17. Бабич С. Ю., Ярецька Н. О., В. Ф. Лазар, Н. П. Щекань. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. Т. 41, № 2. С. 91–102. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102)
 18. Бабич С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В. Ф. Динамічні процеси в тілах (матеріалах) з початковими напруженнями. Частина 3. Динамічні процеси у пружному двохшаровому півпросторі з початковими напруженнями при дії рухомих навантажень. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Т. 39, № 2. С. 116–124. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124)
 19. Шелестовський Б., Габрусєва І. Стиснення двома жорсткими кільцевими штампами ізотропного шару з наявними залишковими деформаціями. *Вісник ТНТУ*. 2012. Т. 66, № 2. С. 82–88.

Babich S. Yu., Yaretska N. O., **Lazar V. F., Mlavets Yu. Yu.** Analytical solution of the contact problem for pre-stressed two half-spaces and an ring stamp.

The article presents an analytical solution to the contact problem for two elastic half-spaces with initial stresses and a prestressed ring stamp, without considering frictional forces. We will assume that the surfaces outside the contact boundary of the ring stamp and the half-spaces remain free from the influence of external forces, and at the contact boundary displacements and stresses are continuous. The problem is solved in the case of equal roots of the defining equation. The study is presented in a general form for the theory of large initial strains and two variants of the theory of small initial strains within the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential.

It is assumed that the initial states of the elastic ring stamp and the elastic bases are homogeneous and equal. The research is carried out in the coordinates of the initial deformed state, which are related to the Lagrangian coordinates. In addition, the influence of the ring stamp causes small perturbations of the corresponding values of the basic stress-strain state. It is also assumed that the elastic ring stamp and the elastic half-spaces are made of different isotropic, transversally isotropic or composite materials. In the case of orthotropic bodies, we will assume that the elastically equivalent directions coincide with the direction of the coordinate axes in the deformed state. As a result, the solutions of the given problem are presented in the form of infinite series, the coefficients of which are determined from an infinite quasi-regular system of algebraic equations. Several fundamental results, such as the Hankel transformation, triple integral equations, and other methods of the theory of contact problems of the linearized theory of elasticity, are used to study this problem.

In the article also establishes the connection between sinking and the corresponding

burden. Therefore, with the help of the obtained solutions, it is possible to study the influence of initial (residual) stresses on the distribution of contact stresses and displacements in two elastic half-spaces and an elastic ring stamp.

Keywords: linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, ring stamp, half-space, integral equations.

References

1. Chekanovych, M. H. (2022). A method of prestressing reinforced concrete structures that increases their strength. *Taurida Scientific Herald. Series: Technical Sciences*, (3), 198–204. <https://doi.org/10.32851/tnv-tech.2022.3.22> [in Ukrainian].
2. Zharko, L., Tarasiuk, V., Ovchar, V., Boretskaia, N., Belokon, A., & Tashchilova, A. (2018). Risks and defects of reinforcement bars splicing by sleeves crimping. *Science and Construction*, 18(4), 60–64. <https://doi.org/10.33644/scienceandconstruction.v18i4.58> [in Ukrainian].
3. Veliyev, Q. J., & Ipek, C. (2023). The Influence of the Material Properties of an Inhomogeneous Pre-Stressed Hollow Cylinder Containing an Inviscid Fluid on the Dispersion of Quasi-Scholte Waves. *Int Appl Mech.*, 59, 619–629. <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01246-0>
4. Hrilytskyi, D. V., & Kizyma, Ya. M. (1981). *Osesymetrychni kontaktni zadachi teorii pruzhnosti ta termopruzhnosti* [Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity and thermoelasticity]. Lviv: Vyshcha shk. [in Ukrainian].
5. Semenyuk, N. P., & Zhukova, N. B. (2020). Stability of a Sandwich Cylindrical Shell with Core Subject to External Pressure and Pressure in the Inner Cylinder. *International Applied Mechanics*, 56(1), 40–53. <https://doi.org/10.1007/s10778-020-00995-y>
6. Guz, A. N. (2022). On General List of References to the Monograph “Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics”. *International Applied Mechanics*, 58(1), 1–29. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01131-8>
7. Kaminsky, A. O., & Kurchakov, E. E. (2022). Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy. *International Applied Mechanics*, 58(2), 154–159. <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01142-5>
8. Guz, A. N., Babych, S. Iu., & Glukhov, Yu. P. (2015). *Mixed problems for an elastic foundation with initial stresses*. Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing.
9. Guz, A. N., & Rudnitsky, V. B. (2006). *Fundamentals of the contact interaction theory of elastic bodies with initial (residual) stresses*. Khmelnytskyi: vyd. PP Melnyk.
10. Guz, A. N. (2021). *Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics*. Cham: Springer.
11. Yarets'ka, N. (2023). Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: Guz, A. N., Altenbach, H., Bogdanov, V., & Nazarenko, V. M. (eds.). *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_29
12. Yaretska, N. O. (2022). *Mathematical model and solution of spatial contact problem for pre-stressed cylindrical punch and elastic layer*. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences: Collective monograph. Riga, Latvia: “Baltija Publishing”. <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-10>
13. Altenbach, H., Bogdanov, V., Bulat, A., Guz, A., & Nazarenko, V. (2023). A Brief Review of the Development of Mechanics in the National Academy of Sciences of Ukraine. *Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials*. (Vol. 191). Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_1
14. Babich, S. Yu., & Glukhov, Y. P. (2021). On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses. *International Applied Mechanics*, 57(1), 43–52. <http://doi.org/10.1007/s10778-021-01061-x>
15. Dikhtiaruk, M. M., & Kravchuk, O. A. (2022). Investigation of the field of influence of elastic displacements and stresses for a pre-stressed strip from concentrated force. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 146–154. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).146-154) [in Ukrainian].
16. Habrusiev, H., Habrusieva, I., & Shelestovskyi, B. (2023). Simulation of a pre-deformed plate compression by two indenters of complex shape. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, 112(4), 91–101.
17. Babych, S. Iu., Yaretska, N. O., Lazar, V. F., & Shchekan, N. P. (2022). Analytical solutions

- of the static problem on the pressure of pre-tensioned half-spaces and an elastic cylinder with initial stresses. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 41(2), 91–102. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102) [in Ukrainian].
18. Babych, S. Yu., Hlukhov, Yu. P., & Lazar, V. F. (2021). Dynamic processes in bodies (materials) with initial stresses. Part 3. Dynamic processes in an elastic two-layer half-space with initial stresses under the action of moving loads. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 39(2), 116–124. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39\(2\).116-124](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.39(2).116-124) [in Ukrainian].
19. Shelestovskyi, B., & Habrusieva, I. (2012). Pressing two hard ring stamps on an isotropic ball with obvious excessive deformations. *Visnyk TNTU*, 66(2), 82–88 [in Ukrainian].

Одержано 27.05.2024

УДК 656.025.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).139-152](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).139-152)**О. І. Баран¹, Ю. В. Андрашко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
oleksandr.baran@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9960-6437>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат технічних наук
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ ОПТИМІЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ

Стаття розглядає критичні виклики оптимізації транспортних потоків у динамічних та непередбачуваних умовах, особливо під час воєнних дій та порушення інфраструктури, як це спостерігається в Україні. У ній наголошується на недоліках традиційних статичних моделей управління транспортом, які не можуть адаптуватися до змін у реальному часі, таких як блокування доріг, руйнування або збільшення трафіку через об'їзди.

Запропонований підхід базується на використанні динамічних моделей оптимізації, що ґрунтуються на задачі розміщення, для врахування часової та просторової змінності у транспортних мережах. Ці моделі інтегрують зовнішні фактори, такі як погодні умови, аварії та пошкодження інфраструктури. Використання математичних методів дозволяє визначити оптимальні вузли транспортної інфраструктури та сприяє оптимізації маршрутів у реальному часі з метою мінімізації затримок і транспортних витрат.

У дослідженні підкреслено трансформаційний потенціал штучного інтелекту та машинного навчання у аналізі великих обсягів даних, зокрема супутникових зображень, для адаптивного управління транспортними потоками. Завдяки алгоритмам, керованим ШІ, система може динамічно коригувати маршрути, прогнозувати затори та оперативно реагувати на зміни в інфраструктурі. Приклади глобальних інтелектуальних транспортних систем у містах, таких як Сінгапур і Токіо, демонструють ефективність подібних технологій у підвищенні ефективності та безпеки руху.

Ключові слова: динамічні моделі, транспортні потоки, оптимізація, дискретна задача розміщення, транспортна мережа.

1. Вступ. Оптимізація транспортних потоків в умовах сучасної війни та непередбачуваних змін в інфраструктурі є одним із найактуальніших викликів для логістики та управління міськими системами. Зокрема, під час військових дій в Україні, транспортні шляхи можуть бути заблоковані, зруйновані або тимчасово непроїзні внаслідок ракетних чи дронів атак. Це створює додаткові труднощі для забезпечення безперервності транспортних операцій та потребує негайної адаптації транспортної мережі до нових умов.

Класичні моделі управління транспортом, що ґрунтуються на статичних показниках, виявляються недостатньо гнучкими, оскільки вони не здатні враховувати непередбачувані зміни, такі як пошкодження інфраструктури, раптове перекриття шляхів чи зростання трафіку через перенаправлення потоків на об'їзні шляхи. У таких умовах постає завдання розробки новітніх підходів до

управління транспортними потоками, які б інтегрували можливості штучного інтелекту та аналізу супутникових знімків.

Актуальним стає використання динамічних моделей оптимізації транспортних потоків, які враховують не лише поточні обставини, але й здатні прогнозувати зміни в умовах транспортної мережі. Одним з таких підходів є застосування дискретної задачі розміщення, яка дозволяє ефективно моделювати розташування ключових вузлів транспортної інфраструктури (дороги, мости, контрольні пункти), а також оптимізувати маршрути з урахуванням їх змін у реальному часі.

Враховуючи складні умови, що склалися в Україні під час війни, проблема оптимізації транспортних потоків стає критично важливою. Вона має стратегічне значення як для забезпечення військової логістики, так і для підтримки громадянської інфраструктури. Застосування супутникових знімків, проаналізованих штучним інтелектом, може суттєво покращити ефективність і безпеку транспортних операцій, а також сприяти швидшому відновленню пошкоджених шляхів.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останні роки дослідження оптимізації динамічних транспортних мереж з використанням дискретних моделей розташування досягли значного прогресу. Декілька вчених зробили внесок у цю сферу, інтегрувавши сучасні обчислювальні методи та підкріплюючи навчання в існуючі моделі для обробки динамічних змін у транспортних системах у реальному часі.

Дослідження Чена і Ванга [1] підкреслили обмеження статичних моделей, просуючи дослідження динамічної оптимізації, де розглядаються зміни в обсягах трафіку та варіабельності маршруту. Остання робота Десолньєрса [2] зосереджена на математичних моделях для оптимізації транспортування, вносячи ключові ідеї щодо того, як справлятися з обчислювальною складністю великих мереж.

Роботи Оладимеджи [3], підкреслюють важливість використання IoT для управління транспортними потоками в розумних містах. Ці дослідження включають застосування великих даних і машинного навчання для оптимізації маршрутів, управління паркуванням, освітленням та виявлення аварій.

Це особливо актуально для адаптивних систем, що працюють в реальному часі. Александрес Нікітас [4] детально досліджують зв'язок між штучним інтелектом і транспортними системами у контексті розумного міста. Автори підкреслюють потенціал CAV (connected and autonomous vehicles), безпілотних літальних апаратів та концепції MaaS (мобільність як послуга) для підвищення ефективності міського транспорту. Ця робота пропонує системний аналіз того, як нові технології можуть сприяти сталому розвитку міських транспортних систем.

Дослідження Чохолаца в 2020 році [5] присвячено проблемам міської логістики і трендам у застосуванні нових технологій для оптимізації міських транспортних мереж. Автори систематично досліджують тенденції, виклики та можливості інтеграції різних технологій для підвищення ефективності міського транспорту.

Всі ці нещодавні досягнення мають вирішальне значення для побудови більш надійних і адаптивних транспортних систем, але все ще існують проблеми з

масштабуванням цих рішень для великих мереж. Крім того, застосування їх у гетерогенних середовищах, таких як мультимодальні або міжнародні перевезення, все ще є сферою розвитку.

Незважаючи на те, що дослідження надали потужні обчислювальні інструменти, практичне застосування залишається складним і потребує подальших досліджень, щоб ефективно впоратися з конкретними порушеннями, такими як зміни навколишнього середовища чи інфраструктури. Відповідно, вище зазначене вказує на поступовість розрив між теоретичними моделями та практичними реалізаціями, просуваючись до більш ефективної та стійкої транспортної інфраструктури з 2024 року.

3. Основні результати. Сучасні транспортні системи перебувають під постійним тиском через швидке зростання урбанізації, збільшення обсягів перевезень і необхідність врахування багатьох змінних факторів, таких як погода, затори, аварії, коливання попиту чи якість дорожнього покриття.

В таких умовах важливою задачею є пошук ефективних рішень для управління транспортними потоками, що дозволить зменшити затримки та підвищити ефективність пересування.

Одним із перспективних підходів до вирішення цього завдання є використання динамічних моделей оптимізації транспортних потоків на основі дискретної задачі розміщення.

Динамічні моделі, що враховують змінні фактори, такі як погодні умови, аварії, сезонні коливання, та інші зовнішні впливи, стають основою для вирішення цього завдання.

Дискретна задача розміщення (FLP) є класичною математичною задачею, в якій потрібно знайти оптимальні місця для розташування певних об'єктів у мережі (наприклад, складів, транспортних вузлів або терміналів) для мінімізації витрат або часу транспортування. Ця модель є основою багатьох рішень для транспортних систем і використовується для оптимального планування транспортної інфраструктури [6].

Наприклад, вона допомагає визначати, де найкраще розмістити склади, щоб мінімізувати витрати на транспортування товарів або максимізувати ефективність доставки пасажирів громадським транспортом.

Проте класичні моделі дискретної задачі розміщення не враховують змінні умови, що виникають у реальних транспортних системах. У таких умовах використання динамічних моделей стає необхідним для адаптації до зміни транспортних потоків, трафіку та інших факторів.

Динамічні моделі дозволяють не тільки враховувати зміни у транспортній системі в реальному часі, але й передбачати можливі сценарії розвитку подій. Наприклад, ці моделі можуть використовувати дані про стан доріг, інтенсивність руху, погодні умови та навіть передбачення аварій. Це дає змогу ефективно перерозподіляти транспортні потоки, забезпечуючи мінімізацію затримок та оптимальне використання ресурсів.

Використання динамічних моделей у транспортних системах має кілька ключових переваг, а саме: адаптуватися до змін та швидко реагувати на зміни умов, таких як аварії або затори, і перерозподіляти транспортні потоки відповідно до нових умов; прогнозувати можливі затори або аварії та пропонувати альтернативні маршрути; дозволяють зменшити витрати на транспортування шляхом

оптимізації розміщення логістичних об'єктів і планування маршрутів.

Через необхідність врахування зміни попиту на перевезення, зміни стану доріг, а також можливих заторів або аварій було розроблено математичну модель, що поєднує елементи класичної дискретної задачі розміщення із часопросторовими обмеженнями.

Розглянемо на прикладі формули транспортну мережу, яка складається з множини вузлів N та множини ребер E , що з'єднують ці вузли. Кожен вузол $i \in N$ може бути кандидатом для розміщення транспортного центру. Нехай $f(i, t)$ описує функцію вартості перевезення від вузла i до інших вузлів у момент часу t , а $d_{ij}(t)$ — функція попиту на перевезення між вузлами i та j у момент часу t . Метою є мінімізація загальних витрат перевезень протягом періоду часу T , що записується як:

$$\min \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f(i, t) * d_{ij}(t).$$

До моделі можна інтегрувати зовнішні фактори, такі як погодні умови або аварії, через коригування функції вартості $f(i, t)$. Наприклад, за умови заторів або аварій, значення $f(i, t)$ збільшується, що дозволяє динамічно перерозподіляти потоки через інші вузли мережі.

Моделі дискретної задачі розміщення (Facility Location Problem, FLP) застосовуються для визначення оптимальних локацій транспортних вузлів, таких як склади або станції. Ця модель є важливою для проектування ефективних логістичних систем, оскільки дозволяє зменшити витрати на транспортування.

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij},$$

де Z — загальні витрати на транспортування, c_{ij} — вартість транспортування між точками i та j , x_{ij} — бінарна змінна (1, якщо об'єкт розміщено в точці i для обслуговування точки j , інакше 0).

Основна мета моделі FLP полягає в оптимізації витрат на транспортування товарів до кінцевих споживачів. Це досягається шляхом визначення оптимальних місць для розміщення логістичних центрів. За допомогою математичних моделей і алгоритмів (таких як алгоритм гілок і меж) можна швидко знаходити оптимальні рішення.

Використання FLP дозволяє зменшити загальні витрати на логістику, підвищити швидкість доставки та зменшити затори. Впровадження моделей машинного навчання в даному контексті дозволяє адаптувати розміщення вузлів в залежності від зміни попиту, прогнозуючи, де будуть найбільші потреби.

Однак, моделі FLP можуть бути чутливими до змін вхідних параметрів (наприклад, зміна витрат на транспортування). Крім того, необхідність у великій кількості даних для моделювання може ускладнити їх застосування в містах з нестабільною інфраструктурою.

Однією з найважливіших задач у процесі оптимізації транспортних потоків є врахування впливу реальних умов, таких як погода, дорожні роботи, аварії та інші непередбачувані фактори. Це значно ускладнює процес моделювання та

вимагає від моделей здатності адаптуватися до зміни параметрів у реальному часі.

Для прикладу, адаптивна транспортна модель може включати змінні, що враховують перешкоди на дорогах або коливання в інтенсивності трафіку в різний час доби чи року. Таким чином, рішення щодо оптимального розподілу потоків можуть оновлюватися в реальному часі, забезпечуючи ефективне функціонування транспортної мережі.

На основі аналізу реальних даних було створено модель адаптації транспортних потоків для великого міста, що враховує сезонні коливання інтенсивності руху, а також погодні умови. На рисунку 1.1 наведено графік зміни інтенсивності трафіку протягом року у різних кліматичних умовах

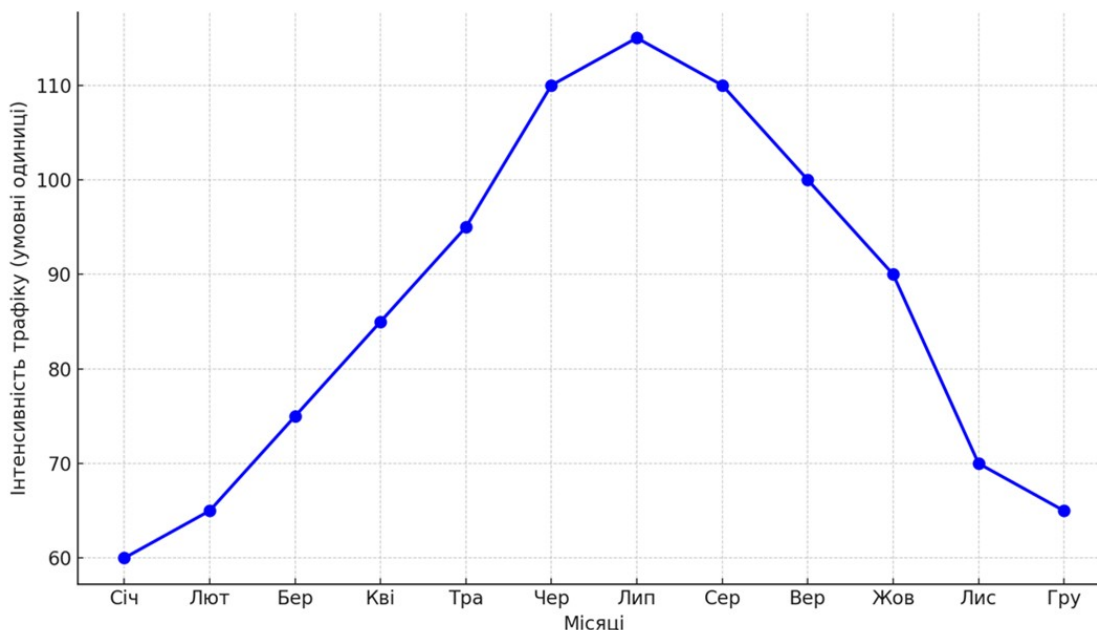


Рис. 1. Зміна інтенсивності транспортного трафіку в столиці протягом 2023 року.

На графіку видно певні сезонні коливання інтенсивності транспортного трафіку протягом року. Пояснимо, чим може бути спричинено зростання і падіння:

- **Січень — Лютий:** Інтенсивність трафіку низька через святковий сезон. Новорічні та різдвяні свята призводять до зниження ділової активності, а багато людей беруть відпустки або проводять більше часу вдома, що зменшує кількість поїздки.
- **Березень — Травень:** Поступове зростання інтенсивності руху пояснюється закінченням зимових свят і відновленням економічної активності. Вже в березні помітне збільшення поїздки через повернення до роботи, навчання, а також покращення погодних умов.
- **Червень — Серпень:** Найвищі значення інтенсивності трафіку спостерігаються в літні місяці. Це може бути пов'язано з відпустками, подорожами, а також зростанням ділової активності. Важливо, що в цей період багато людей вибираються за межі міст, що також може впливати на підвищення трафіку в певних напрямках.

- **Вересень:** Легке зниження після літнього піку. Це пояснюється завершенням відпусток і поверненням людей до роботи та навчання. Однак активність ще залишається високою через початок навчального року та повернення ділової активності.
- **Жовтень — Листопад:** У ці місяці спостерігається подальше зниження інтенсивності руху через зниження туристичної активності та підготовку до зимового періоду.
- **Грудень:** Невелике підвищення в грудні може бути зумовлене передсвятковим періодом, коли люди здійснюють більше поїздок для покупок і підготовки до свят.

Таким чином, коливання на графіку є типовими для багатьох великих міст і пояснюються поєднанням сезонних, економічних та соціальних факторів.

Оптимізація транспортних потоків за допомогою моделей лінійного програмування є ще одним важливим аспектом, який дозволяє підвищити ефективність транспортних систем. Це передбачає визначення оптимального маршруту для перевезення вантажів або пасажирів.

Основна мета оптимізації полягає в мінімізації загальних витрат на перевезення, що включає в себе як фінансові витрати, так і час у дорозі. Моделі дозволяють планувати маршрути, що враховують не лише відстань, але й інші фактори, такі як затори, дорожні роботи та погодні умови.

Використання таких моделей дозволяє зменшити час очікування та час у дорозі, а також покращити загальну ефективність транспортної системи. Впровадження штучного інтелекту дозволяє модифікувати маршрути в реальному часі, реагуючи на зміни в дорожній ситуації.

Однак, як і в попередньому випадку, моделі лінійного програмування можуть вимагати великої кількості даних для точних розрахунків. Крім того, реальні умови можуть бути настільки складними, що їх важко точно моделювати.

Однак оптимізація транспортних потоків є важливою складовою сучасної логістики та управління транспортними системами. У зв'язку з різноманітністю умов та обмежень, що виникають у реальних транспортних системах, застосування різних методів розв'язання ДЗР є вкрай складним, тому було проведено в таблиці 1.1 порівняльний аналіз кількох алгоритмів, які використовуються для розв'язання дискретної задачі розміщення. Серед них: алгоритм гілок і меж, евристичні алгоритми та методи машинного навчання. Кожен з цих підходів має свої переваги та недоліки, що визначає їхню доцільність у залежності від специфіки задачі.

Алгоритм гілок і меж (Branch and Bound, B&B) є класичним методом для розв'язання задач оптимізації, зокрема дискретних задач розміщення. Цей підхід базується на систематичному дослідженні всіх можливих варіантів рішень шляхом розділення проблеми на підзадачі (гілки) і визначення меж для можливих оптимальних рішень. Основна перевага алгоритму полягає в тому, що він може знаходити оптимальні рішення, але зростання обчислювальної складності в разі великої кількості змінних робить його менш ефективним для масштабних задач. Дослідження показують, що алгоритм гілок і меж є особливо ефективним для задач з невеликою кількістю можливих рішень, але вимагає значних ресурсів при вирішенні більш складних випадків [7].

Евристичні алгоритми пропонують практичні рішення, коли точне рішення є занадто затратним у часі. Ці алгоритми використовують наближені методи для швидкого отримання рішень, які можуть не бути оптимальними, але достатньо близькими до нього. Прикладами є жадібний алгоритм, генетичні алгоритми та алгоритми симульованого відпау. Вони демонструють високу швидкість обчислень і можуть бути адаптовані до специфіки задачі, що робить їх дуже корисними в умовах реального часу. Проте, оскільки ці алгоритми не гарантують досягнення оптимального рішення, їх використання вимагає обережності і глибокого аналізу результатів [8].

Методи машинного навчання, зокрема алгоритми класифікації, регресії та нейронні мережі, все більше впроваджуються в оптимізацію транспортних потоків. Ці методи можуть аналізувати великі обсяги даних, виявляти закономірності та передбачати зміни в транспортних потоках на основі історичних даних. Їх використання дозволяє забезпечити адаптивність моделей, оскільки алгоритми можуть автоматично вдосконалюватися в процесі навчання, спираючись на нові дані. Це робить їх особливо ефективними для складних систем, де традиційні підходи можуть бути недостатніми. Проте, вони також вимагають значних обчислювальних ресурсів і якісних даних для навчання, що може бути обмеженням для їх застосування [9].

Таблиця 1.

Порівняння ефективності методів оптимізації дискретної задачі розміщення

Метод	Основні характеристики	Переваги	Недоліки	Приклади застосування
Алгоритм гілок і меж	Використовує систематичний підхід до розв'язання задачі.	Розділяє проблему на підзадачі та обмежує можливі рішення. Гарантує знаходження оптимального рішення.	Підходить для задач з обмеженою кількістю варіантів. Висока обчислювальна складність при великих розмірах задачі.	Час виконання може бути значним. Оптимізація розміщення складів у логістиці.
Евристичні алгоритми	Використовує наближені методи для швидкого отримання рішень.	Використовує жадібні або генетичні алгоритми. Швидкість обчислень.	Може працювати з великими даними. Не гарантує знаходження оптимального рішення.	Результати можуть варіюватися. Плани розподілу ресурсів у реальному часі.
Методи машинного навчання	Аналізує великі обсяги даних для виявлення закономірностей.	Може адаптуватися на основі нових даних. Висока адаптивність та точність.	Може працювати з динамічними системами. Потребує великої кількості навчальних даних.	Висока обчислювальна складність. Прогнозування транспортних потоків у містах.

Вибір методу для розв'язання дискретної задачі розміщення залежить від специфіки задачі та ресурсів, доступних для її вирішення. Кожен метод має свої сильні та слабкі сторони, які слід враховувати при розробці оптимізаційних рішень у транспортних системах.

Протне як видно з таблиці, методи машинного навчання демонструють найвищу ефективність при мінімальних затратах часу на обчислення. Однак, вони вимагають значної кількості навчальних даних та адаптації до конкретної

транспортної системи.

Моделі машинного навчання, зокрема алгоритми, що використовуються для прогнозування трафіку, є потужним інструментом для адаптації моделей до реальних умов. З їх допомогою можна аналізувати великі обсяги даних, що надходять з різних джерел, включаючи супутникові знімки, дані про затори та погоду.

Основна мета використання машинного навчання полягає в підвищенні точності прогнозів. Алгоритми можуть враховувати безліч факторів, що впливають на транспортні потоки, і автоматично коригувати моделі в реальному часі.

Переваги машинного навчання включають здатність до самооптимізації та адаптації. Це дозволяє зменшити затори на дорогах, підвищити ефективність перевезень і зменшити викиди вуглекислого газу.

Проте, існують ризики, пов'язані з недостатньою надійністю моделей, що базуються на неповних або неточних даних. Крім того, алгоритми можуть вимагати значних обчислювальних ресурсів для навчання та застосування.

Хочеться зазначити, що прогресом у галузі оптимізації транспортних потоків можна вважати впровадженням штучного інтелекту (ШІ).

У сучасних умовах, коли в Україні тривають військові дії, це питання стає особливо актуальним, адже перекриття або пошкодження доріг значно ускладнюють пересування транспорту. Завдяки супутниковим даним і їх аналізу ШІ можна отримати оперативну інформацію про стан доріг, наявність перешкод або аварійні ситуації, що дозволяє приймати швидкі рішення для маршрутизації транспортних потоків.

Враховуючи складні умови, що склалися в Україні під час війни, проблема оптимізації транспортних потоків стає критично важливою. Вона має стратегічне значення як для забезпечення військової логістики, так і для підтримки громадянської інфраструктури. Застосування супутникових знімків, проаналізованих штучним інтелектом, може суттєво покращити ефективність і безпеку транспортних операцій, а також сприяти швидшому відновленню пошкоджених шляхів.

ШІ здатен не лише виявляти реальні проблеми, такі як пошкодження інфраструктури, але й на основі цих даних генерувати динамічні маршрути, оптимізовані в реальному часі. Це особливо важливо для екстрених служб, військових перевезень та гуманітарної допомоги, де кожна хвилина може бути вирішальною.

Адже ШІ-алгоритми дозволяють аналізувати великі масиви даних у реальному часі, прогнозувати затори та аварії, а також забезпечувати адаптивне управління транспортними потоками. За допомогою технологій машинного навчання можна динамічно коригувати маршрути, перерозподіляти транспортні потоки та покращувати функціонування транспортної інфраструктури.

Використання динамічних моделей оптимізації транспортних потоків вже продемонструвало свою ефективність у багатьох містах світу. Наприклад, у таких містах, як Сінгапур та Токіо, активно застосовуються інтелектуальні транспортні системи (ITS), які на основі динамічних моделей та ШІ прогнозують затори, коригують сигнали світлофорів та надають рекомендації щодо вибору маршрутів для водіїв у режимі реального часу. В таблиці 1.2 наведемо більш

детальний опис інтелектуальних транспортних систем в різних містах світу.

Таблиця 2.

Новітні інтелектуальні транспортні системи (ITS) в найбільших містах світу

Місто	Інтелектуальні транспортні системи (ITS)
Сінгапур	Smart Traffic Management System: автоматичне управління дорожнім рухом на основі даних в режимі реального часу [10]. Electronic Road Pricing (ERP): система автоматичної оплати за проїзд в центральних районах, що зменшує затори [11].
Токіо	Tokyo Traffic Control System: інтегрована система моніторингу та управління трафіком, що використовує дані від сенсорів [12]. VICS (Vehicle Information and Communication System): надає водіям інформацію про стан доріг і затори [13].
Барселона	Smart Traffic Lights: адаптивні світлофори, які коригують час зміни сигналів на основі реального трафіку [14]. Public Transport Management System: система, що оптимізує маршрути громадського транспорту на основі даних про пасажирів [15].
Лондон	Congestion Charge Zone: система, що стягує плату за в'їзд у центр міста в години пік для зменшення заторів [16]. TfL Traffic Information: надає дані про затори і дорожні роботи в реальному часі [17].
Нью-Йорк	NYC Traffic Management Center: централізоване управління дорожнім рухом з використанням аналітики даних та відеонагляду [18]. Waze for Cities: співпраця з додатком Waze для отримання даних про трафік і рекомендацій щодо маршруту [19].
Сеул	Smart Traffic Management System: система, що використовує сенсори для моніторингу трафіку та корекції світлофорів [20]. Public Transport Operation System: оптимізація роботи громадського транспорту на основі пасажиропотоку [21].

Сучасний розвиток інтелектуальних транспортних систем (ITS) у великих містах, таких як Сінгапур, Токіо, Барселона, Лондон, Нью-Йорк та Сеул, демонструє значний прогрес у сфері оптимізації транспортних потоків. Ці системи використовують різноманітні технології, такі як автоматизоване управління дорожнім рухом, адаптивні світлофори та моніторинг стану доріг у режимі реального часу. Всі ці методи є частиною динамічних моделей оптимізації транспортних потоків, які забезпечують ефективність і зручність для водіїв та пасажирів.

Проте, в умовах непередбачуваних ситуацій, з якими стикається Україна, стає очевидним, що традиційні моделі, які базуються на дискретних задачах розміщення, вже не здатні адекватно реагувати на динаміку сучасного дорожнього руху. Різні фактори, такі як природні катастрофи, аварії, зміни в маршрутній мережі або навіть соціально-політичні обставини, можуть раптово змінити трафік і ускладнити прогнозування.

Для того щоб ефективно вирішувати ці виклики, необхідно впроваджувати нові технології, які не лише збирають дані, але й обробляють їх у реальному часі. Застосування машинного навчання і штучного інтелекту може суттєво покращити адаптивність моделей до постійно змінюваних умов. Наприклад, системи, які використовують супутникові знімки та дані з мобільних додатків, можуть автоматично коригувати маршрути і управляти світлофорами, зменшуючи затори та час очікування.

Ми пропонуємо розробити комплексну систему, що базується на динамічних моделях оптимізації транспортних потоків, яка включатиме:

- **Системи збору даних у реальному часі:** Використання сенсорів, камери спостереження та мобільних додатків для збору даних про стан доріг, затори та пасажиропотоки.
- **Алгоритми обробки даних:** Розробка алгоритмів на основі машинного навчання, які зможуть аналізувати великі обсяги даних і виявляти патерни, що дозволить швидко реагувати на зміни в транспортних потоках.
- **Адаптивні моделі управління:** Запровадження адаптивних моделей, які можуть самостійно коригувати алгоритми управління транспортними потоками на основі отриманих даних. Це дозволить оптимізувати сигнали світлофорів, управління громадським транспортом та маршрути для приватних автомобілів.
- **Супутникові технології:** Використання супутникових знімків для моніторингу дорожнього руху і виявлення проблемних зон, що дозволить проводити швидкі корекції в управлінні трафіком.

Також динамічні моделі активно використовуються в логістиці для планування транспортування товарів. Наприклад, великі логістичні компанії застосовують ці моделі для оптимізації маршрутів доставки, що дозволяє зменшити витрати на перевезення та підвищити ефективність управління складськими запасами.

Однією з ключових переваг інтеграції ІІІ в рішення ДЗР є можливість поєднувати традиційні методи оптимізації, такі як алгоритм гілок і меж, з потужностями сучасних алгоритмів машинного навчання. Штучний інтелект може використовуватися для генерування оптимальних початкових рішень на основі аналізу історичних даних. Це, в свою чергу, може прискорити процес знаходження оптимальних рішень та знизити загальні витрати часу.

Нейронні мережі, які є одним з елементів штучного інтелекту, можуть використовуватися для прогнозування змін у транспортних потоках. Завдяки здатності аналізувати великі обсяги даних, ІІІ може передбачати попит на транспортні послуги, а також виявляти патерни в даних про затори, аварії та інші події. Це дозволяє системам адаптуватися до нових умов у режимі реального часу, що є критично важливим для ефективного управління транспортними потоками.

Важливим аспектом впровадження ІІІ в дискретні задачі розміщення є можливість оптимізації в реальному часі. Штучний інтелект може постійно аналізувати дані з різних джерел, таких як сенсори, камери та мобільні додатки, щоб виявляти аномалії та коригувати маршрути або управлінські рішення. Це дозволяє системі швидко реагувати на зміни у транспортному середовищі, забезпечуючи більш ефективне управління потоками.

Ще одним важливим напрямком є використання ІІІ для створення нових евристичних алгоритмів, що відповідають специфіці дискретних задач. Алгоритми машинного навчання можуть навчатися на історичних даних, виявляти патерни і використовувати їх для прийняття рішень, які оптимізують розміщення ресурсів. Цей підхід може суттєво підвищити якість рішень, адже системи на основі ІІІ можуть адаптуватися до специфічних умов та вимог.

Інтеграція штучного інтелекту в дискретні задачі розміщення несе в собі безліч переваг. По-перше, це покращення ефективності — ІІІ може забезпечити більш оптимальні рішення за менший час. По-друге, адаптивність систем, що базуються на ІІІ, робить їх більш стійкими до змін у середовищі. По-третє,

автоматизація процесів знижує потребу в людській участі, що також зменшує ймовірність помилок.

Проте реалізація таких систем також пов'язана з певними викликами. Одним із них є складність інтеграції ІІІ у вже існуючі системи, що може вимагати значних зусиль та ресурсів. Крім того, ефективність ІІІ значною мірою залежить від наявності якісних та об'ємних даних для навчання. Технічні проблеми, такі як високі вимоги до обчислювальних потужностей і необхідність у фахівців для реалізації таких рішень, також не варто ігнорувати.

Таким чином, впровадження штучного інтелекту в дискретні задачі розміщення є не лише можливим, але й доцільним кроком у напрямку підвищення ефективності транспортних систем. Синергія між традиційними методами оптимізації та новими технологіями ІІІ може суттєво зменшити час та ресурси, необхідні для оптимізації транспортних потоків. Це, в свою чергу, дозволить досягти більшої стійкості та адаптивності системи, що є критично важливим у світі, де зміни відбуваються з величезною швидкістю. Застосування штучного інтелекту не лише покращить управління транспортними потоками, але й створить нові можливості для розвитку та інновацій у сфері транспорту.

4. Висновки. У статті було представлено підхід до вирішення проблеми оптимізації транспортних потоків у динамічних умовах на основі дискретної задачі розміщення. Запропонована математична модель дозволяє враховувати часові та просторові зміни в транспортних мережах, що є важливим для реальних логістичних систем. Запропоновані моделі використання динамічних моделей оптимізації транспортних потоків, заснованих на дискретній задачі розміщення, які є ключовими для підвищення ефективності управління транспортом.

Ці моделі дозволяють адаптуватися до реальних змін, таких як погодні умови та трафік, що підвищує точність прогнозів і знижує затримки. Додатково, інтеграція елементів машинного навчання сприяє оптимізації розміщення логістичних об'єктів і покращує оперативність реакцій на зміни в попиті та дорожніх умовах.

Приклад адаптації транспортних потоків в умовах великого міста демонструє, як сезонні коливання і погодні фактори можуть бути інтегровані в моделі для ефективного управління. Використання алгоритмів, таких як методи машинного навчання та алгоритми оптимізації, дозволяє не лише поліпшити управлінські рішення, а й істотно зменшити витрати на транспортування.

У контексті сучасних викликів, зокрема військових дій в Україні, важливість оптимізації транспортних потоків стає критичною. Інтелектуальні транспортні системи, що використовують динамічні моделі, здатні забезпечити ефективну логістику, зменшити ризики та покращити безпеку перевезень. Загалом, інтеграція сучасних технологій в транспортні системи є важливим кроком у досягненні їхньої ефективності та надійності в умовах швидко змінюваного середовища.

Перспективи подальших досліджень полягають у розширенні моделі для мультиагентних систем та інтеграції штучного інтелекту для прогнозування транспортних потоків.

Список використаної літератури

1. Chen X., Wang Y. Dynamic Optimization of Transportation Flows in Smart Cities. *Journal of Advanced Transportation Systems*. 2020. Vol. 45, Issue 3. P. 245–268.

2. Desaulniers G. Mathematical Modeling in Transportation Networks and Complexity. *Computational Optimization and Applications*. 2018. Vol. 71, Issue 2. P. 341–367.
3. Oladimeji D., Gupta K., Köse N. A., Gündoğan K., He L., Liang F. Smart Transport: Overview of Technologies and Applications. *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 10617–10632. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3241234>
4. Nikitas A., Michalakopoulou K., Njoya E. T., Karampatzakis D. Artificial Intelligence, Transport and Smart City: Definitions and Measurements of a New Era of Mobility. *Sustainability*. 2020. Vol. 12, Issue 7. Pub. 2789. DOI: <https://doi.org/10.3390/su12072789>
5. Chocholáč J., Kučera T., Sommerauerová D., Hruška R., Machalík S., Křupka J., Hyršlová J. Smart City and Urban Logistics - Research Trends and Challenges: Systematic Literature Review. *Sustainability*. 2020. Vol. 12, Issue 10. Pub. 4115.
6. Bertsimas D., Vohra S. Discrete Optimization. Cambridge : MIT Press, 2006.
7. Bland R. G. An Overview of Branch and Bound Algorithms for Solving Facility Location Problems. *Journal of Operations Research*. 2016. Vol. 24, Issue 1. P. 1–16.
8. Kumar A., Singh A., Heuristic Algorithms for Facility Location Problems: A Review. *International Journal of Operations Research*. 2019. Vol. 16, Issue 1. P. 29–38.
9. Holland J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. University of Michigan Press, 1975.
10. Khan M. S., Ali A. Machine Learning Techniques for Traffic Management: A Review. *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 129856–129871. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3119704>
11. Zhao J., Zheng Y. Real-Time Traffic Management Using Smart Traffic Systems: A Review. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2019. Vol. 100. P. 1–18. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.01.017>
12. Chen C. H., Kuo S. C. Smart Traffic Management System: An Overview. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*. 2020. Vol. 7, Issue 2. P. 114–123. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2020.01.003>
13. Klein R. M. Electronic Road Pricing: A Comprehensive Analysis of Impact and Implementation. *Transportation Research Record*. 2020. Vol. 2674, Issue 2. P. 42–51. DOI: <https://doi.org/10.1177/0361198120908097>
14. Okumura T., Yamada T. The Tokyo Traffic Control System: Integration of Real-Time Data for Effective Traffic Management. *Intelligent Transportation Systems*. 2018. Vol. 22, Issue 6. P. 900–911. DOI: <https://doi.org/10.1080/15472450.2018.1436692>
15. Kishi Y., Ueno H. VICS: Vehicle Information and Communication System. *Journal of Advanced Transportation*. 2019. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1155/2019/8741538>
16. Gonzalez M., Farooq A. Smart Traffic Lights: Adaptive Signal Control for Urban Environments. *Transportation Science*. 2022. Vol. 56, Issue 2. P. 253–268. DOI: <https://doi.org/10.1287/trsc.2022.1076>
17. Patel M. R., Chetan K. Public Transport Management Systems: Innovations and Challenges. *Journal of Transportation Technologies*. 2020. Vol. 10, Issue 3. P. 112–128. DOI: <https://doi.org/10.4236/jtts.2020.103008>
18. Huang Y., Zhuang Z. Evaluating the Effectiveness of Congestion Charge Zones in Urban Areas: A Case Study. *Sustainability*. 2021. Vol. 13, Issue 2. Pub. 888. DOI: <https://doi.org/10.3390/su13020888>
19. Transport for London (TfL). TfL Traffic Information: Real-Time Data on Congestion and Roadworks. 2023. URL: <https://tfl.gov.uk/modes/driving/traffic-information> (date of access: 11.09.2024).
20. New York City Department of Transportation (NYC DOT). NYC Traffic Management Center: Innovations in Data Analytics and Surveillance. 2023. URL: <https://www.nyc.gov/html/dot/downloads/pdf/nyc-traffic-management-center.pdf> (date of access: 10.09.2024).
21. Waze. Waze for Cities: Collaborating with Local Governments for Better Traffic Management. 2023. URL: <https://www.waze.com/en-GB/for-cities> (date of access: 10.09.2024).

Baran O. I., Andrashko Yu. V. Dynamic models of traffic flow optimization.

The article addresses the critical challenges of optimizing transport flows under dynamic and unpredictable conditions, particularly during wartime and disruptions in infrastruc-

ture, as observed in Ukraine. It highlights the inadequacies of traditional static transportation management models in adapting to real-time changes such as road blockages, destruction, or increased traffic due to detours.

The article underscores the transformative potential of artificial intelligence and machine learning in analyzing large datasets, including satellite imagery, for adaptive transport flow management. By employing AI-driven algorithms, the system can dynamically adjust routes, predict traffic congestion, and provide rapid responses to infrastructural changes. Examples from global intelligent transport systems in cities like Singapore and Tokyo demonstrate the efficacy of similar technologies in enhancing traffic efficiency and safety.

The proposed approach leverages dynamic optimization models rooted in the facility location problem to account for temporal and spatial variability in transport networks. These models integrate external factors like weather conditions, accidents, and infrastructure damage. The use of mathematical frameworks enables the identification of optimal transport infrastructure nodes and facilitates real-time route optimization to minimize transportation delays and costs.

Keywords: dynamic models, traffic flows, optimization, discrete facility location problem, transport network.

References

1. Chen, X., & Wang, Y. (2020). Dynamic Optimization of Transportation Flows in Smart Cities. *Journal of Advanced Transportation Systems*, 45(3), 245–268.
2. Desaulniers, G. (2018). Mathematical Modeling in Transportation Networks and Complexity. *Computational Optimization and Applications*, 71(2), 341–367.
3. Oladimeji, D., Gupta, K., Köse, N. A., Gündoğan, K., He, L., & Liang, F. (2023). Smart Transport: Overview of Technologies and Applications. *IEEE Access*, 11, 10617–10632. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3241234>
4. Nikitas, A., Michalakopoulou, K., Njoya, E. T., & Karampatzakis, D. (2020). Artificial Intelligence, Transport and Smart City: Definitions and Measurements of a New Era of Mobility. *Sustainability*, 12(7), 2789. <https://doi.org/10.3390/su12072789>
5. Chocholáč, J., Kučera, T., Sommerauerová, D., Hruška, R., Machalík, S., Křupka, J., & Hyršlová, J. (2020). Smart City and Urban Logistics — Research Trends and Challenges: Systematic Literature Review. *Sustainability*, 12(10), 4115.
6. Bertsimas, D., & Vohra, S. (2006). *Discrete Optimization*. Cambridge: MIT Press.
7. Bland, R. G. (2016). An Overview of Branch and Bound Algorithms for Solving Facility Location Problems. *Journal of Operations Research*, 24(1), 1–16.
8. Kumar, A., & Singh, A., (2019). Heuristic Algorithms for Facility Location Problems: A Review. *International Journal of Operations Research*, 16(1), 29–38.
9. Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press.
10. Khan, M. S., & Ali, A. (2021). Machine Learning Techniques for Traffic Management: A Review. *IEEE Access*, 9, 129856–129871. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3119704>
11. Zhao, J., & Zheng, Y. (2019). Real-Time Traffic Management Using Smart Traffic Systems: A Review. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 100, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.trc.2019.01.017>
12. Chen, C. H., & Kuo, S. C. (2020). Smart Traffic Management System: An Overview. *Journal of Traffic and Transportation Engineering*, 7(2), 114–123. <https://doi.org/10.1016/j.jtte.2020.01.003>
13. Klein, R. M. (2020). Electronic Road Pricing: A Comprehensive Analysis of Impact and Implementation. *Transportation Research Record*, 2674(2), 42–51. <https://doi.org/10.1177/0361198120908097>
14. Okumura, T., & Yamada, T. (2018). The Tokyo Traffic Control System: Integration of Real-Time Data for Effective Traffic Management. *Intelligent Transportation Systems*, 22(6), 900–911. <https://doi.org/10.1080/15472450.2018.1436692>
15. Kishi, Y., & Ueno, H. (2019). VICS: Vehicle Information and Communication System. *Journal of Advanced Transportation*, 1–10. <https://doi.org/10.1155/2019/8741538>

16. Gonzalez, M., & Farooq, A. (2022). Smart Traffic Lights: Adaptive Signal Control for Urban Environments. *Transportation Science*, 56(2), 253–268. <https://doi.org/10.1287/trsc.2022.1076>
17. Patel, M. R., & Chetan, K. (2020). Public Transport Management Systems: Innovations and Challenges. *Journal of Transportation Technologies*, 10(3), 112–128. <https://doi.org/10.4236/jtts.2020.103008>
18. Huang, Y., & Zhuang, Z. (2021). Evaluating the Effectiveness of Congestion Charge Zones in Urban Areas: A Case Study. *Sustainability*, 13(2), 888. <https://doi.org/10.3390/su13020888>
19. Transport for London (TfL). (2023). TfL Traffic Information: Real-Time Data on Congestion and Roadworks. Retrieved from: <https://tfl.gov.uk/modes/driving/traffic-information>
20. New York City Department of Transportation (NYC DOT). (2023). NYC Traffic Management Center: Innovations in Data Analytics and Surveillance. Retrieved from: <https://www.nyc.gov/html/dot/downloads/pdf/nyc-traffic-management-center.pdf>
21. Waze. (2023). Waze for Cities: Collaborating with Local Governments for Better Traffic Management. Retrieved from: <https://www.waze.com/en-GB/for-cities>

Одержано 28.09.2024

УДК 378+51

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).153-163](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).153-163)С. В. Вронський¹, Ю. В. Андрашко²

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
s.vronsky@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9960-6437>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат технічних наук
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

ДИНАМІЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

У статті запропоновано динамічний підхід до оцінювання рівня знань, що дозволяє безпосередньо під час проходження тесту виявити слабкі та сильні сторони вступника в процесі навчання та майбутнього освоєння професії. Динамічне оцінювання знань дозволяє з точки зору теорії ймовірностей та математичної статистики визначити, яка частка відповідей, даних вступником, базується не на конкретних знаннях, а на факторі вгадування. Також приділено увагу математичному моделюванню наближеного оцінювання знань при виконанні тестових завдань.

Ключові слова: автоматизована система оцінювання, якість оцінювання рівня знань, динамічний підхід до оцінки рівня знань, вступник, здобувач вищої освіти.

1. Вступ. Автоматизована система оцінювання знань здобувачів вищої освіти дозволяє об'єктивно визначити рівень знань та вмінь, що можуть бути необхідними та ефективними при подальшій професійній діяльності. В загальному автоматизований підхід дозволяє оцінити знання та навички вступника незалежно від людського фактору. Використання автоматизованого підходу суттєво знижує ймовірність помилкового рішення щодо оцінки правильності відповіді та адекватності суджень, що до неї привели.

2. Основний результат. Постановка завдання. Головною метою даної наукової роботи є дослідження динамічного підходу до формування тестових завдань для перевірки знань та навиків вступників. Розглядається іноземний досвід використання тестового автоматизованого підходу до оцінювання знань, його ефективність на практиці.

Запропоновано статистико-математичний метод аналізу даних щодо результатів тестового контролю знань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідженням автоматизованого підходу займалися такі вітчизняні дослідники, як Т. В. Ковалюк, С. В. Король, О. О. Неділько, А. Я. Архангельський, В. Яковина, О. С. Шкіль, В. І. Шинкаренко, А. Н. Шиков, Є. Я. Швець, Л. В. Пшенична.

Серед досліджень закордонних вчених варто відмітити роботи А. З. Бродера, Дж. Д. Брауна, Т. Хоффмана, Ч. Клапчама, Д. Уолла та інших.

У дослідженнях вказаних авторів розглядається не тільки сама ефективність застосування автоматизованого підходу до оцінювання рівня знань, проте також і психологічна складова процесу тестування.

Основні результати даних досліджень присвячені:

- оцінці рівня складності пропонованих завдань задля визначення рівня знань вступника;
- принципу порівняння рівня складності тестів при переході від одного блоку завдань до наступного;
- оцінюванню завдань творчого характеру (наприклад, для гуманітарних дисциплін);
- дослідженню ймовірності вгадування правильних відповідей в тестових завданнях та його впливу на кінцевий результат тестування;
- аналізу вагових балових коефіцієнтів балів залежно від блоку, до якого належить завдання, також безпосередньо від предмету.

У загальному випадку поняття «ефективність виконання завдання» можливо звести до твердження, що весь процес оцінки рівня знань зводиться до таких комплексних рис, як:

- вміння застосовувати для вирішення запропонованих завдань знань, здобутих під час процесу попереднього навчання;
- здатність компонувати між собою відомі алгоритми для пошуку правильної відповіді;
- прояв творчого нестандартного підходу у поєднанні зі стандартними способами вирішення завдання.

Головною причиною введення стандартного тестування є виключення людського фактору допущення помилки під час перевірки отриманих даних. Оскільки для складання тестів, як і для підрахунку балів, використовують комп'ютерні програми, процедура є повністю автоматизованою.

Здобувачі під час тестування перебувають у рівних умовах, умови завдань однакові. Тести охоплюють усі розглядувані під час навчання теми, тому всі отримують рівні можливості незалежно від місця проживання чи типу освітнього закладу, в якому вони навчалися.

Практично усі вивчені теми навчальних дисциплін включаються до тестування. У той час, як здача усного іспиту зазвичай передбачає відповідь на певну кількість теоретичних питань і виконання кількох практичних завдань, тестування дозволяє перевірити знання вступника з усього курсу, виключивши елемент випадковості.

Тестування є більш точним, ніж звичайний іспит, методом оцінки рівня знань, оскільки дозволяє оцінити як знання конкретних фактів, окремих теоретичних та практичних тверджень, так і вміння їх використовувати за умов, коли завдання не має наперед заданого алгоритму точного вирішення. Таким чином, деякі блоки завдань передбачають знання виключно теоретичної частини вивченого матеріалу, інші — практичне їх застосування. Кількість питань достатньо велика, щоб поступово покрити весь курс вивченого матеріалу.

При розробці тесту, що є зрозумілим здобувачу, необхідно залучати досвідчених фахівців та проводити пробні тестування на фокус-групах [5]. Це дозволить отримати попередні дані про ефективність використання розроблених завдань при майбутньому тестуванні вступників.

Загалом витрати під час тестування припадають на розробку якісного матеріалу. При цьому витрати на проведення тесту значно нижчі, ніж при письмовому чи усному проведенні іспиту.

Безпосередньо тестування та контроль результатів займає півтори-дві години (іноді більше) та потребує присутності кількох спостерігачів. Усний чи письмовий іспит триває щонайменше чотири години і навіть кілька днів, а для обговорення та оцінювання результатів необхідним є створення компетентної комісії. Автоматизована система оцінювання дозволяє зменшити термін перевірки відповідей у кілька разів, що дозволить підвищити ефективність обробки результатів, що відображають якість знань здобувачів вищої освіти.

Тестування ставить всіх здобувачів у однакові умови, використовуючи стандартну процедуру та єдині критерії оцінки, що дозволяє знизити рівень хвилювання та стресу серед них [7]. З психологічної точки зору важливо розділяти два види стресу — дистрес та еустрес, оскільки перший вид стресу провокує негативне ставлення до іспиту, інший — створює позитивне, що за певних умов сприятливо вплинуло на інтенсивність процесу мислення.

Використання тестового контролю є ефективним при перевірці основних, базових знань на основі виконання стандартних завдань. Дані, отримані в результаті тестування, є статистичним відображенням проблем в розумінні учнем конкретних тем. З іншого боку, також є ймовірність того, що умова завдання була неоднозначною, і тестований не зрозумів суті питання, чи не розібрався, як заповнювати тестовий бланк та переплутав відповіді.

Вищезгадані переваги тестового контролю рівня знань призвели до широкого його розповсюдження в багатьох країнах світу (див. табл. 1), що обумовлено неупередженістю системи перевірки готових результатів, швидкістю обробки кінцевих даних та зниженням ймовірності допущення помилки під час перевірки виконаних завдань до мінімального значення.

Як свідчить міжнародний досвід впровадження тестового контролю перевірки якості знань вступників, його формат зводиться не тільки до підготовки безпосередньо до здачі іспиту, але також і до принципу «навчання протягом життя», тобто, на відміну від традиційних іспитів, при здачі яких необхідно давати «розгорнуті» відповіді на поставлені запитання та вирішувати невелику кількість практичних завдань, тестовий формат дозволяє охопити майже весь навчальний матеріал та перевірити вміння вступника мислити нестандартно і приймати обдумані рішення у складних ситуаціях.

Джерело: складено автором на основі [3].

Загалом підходи, що використовуються при розробці алгоритмів проведення контролю знань, переважно уніфіковані та спрямовані на:

- якомога ширше охоплення теоретичного матеріалу за предметами;
- перевірку вміння використовувати знання на практиці;
- вміння мислити нестандартно та поєднувати між собою для вирішення завдань різноманітних (навіть різнорідних) засобів та методів, що свідчитиме про нестандартність мислення вступника.

Головним недоліком тестування є неможливість повністю перевірити та оцінити високі, продуктивні рівні знань, пов'язані з творчістю, тобто імовірнісні, абстрактні та методологічні знання.

Процес тестування містить в собі елемент випадковості. Типовою є ситуація, за якої вступник, який не відповів на просте запитання, може дати правильну відповідь на складніше. Така випадкова подія (ймовірність її настання незначна) спотворює підсумкові результати тесту.

Таблиця 1.

Формат проведення тестових перевірок знань, аналогічних ЗНО/НМТ в країнах світу

Країна	Аналоги ЗНО/НМТ
Польща	Найближчим аналогом є «Матура» (<i>Egzamin maturalny</i>), що є комплексною перевіркою знань з польської та іноземної мов, математики. Мови складають усно, математика та додатковий іспит письмово. Іспити проходять у школах за присутності викладачів з інших учбових закладів. Для отримання атестату зрілості, достатньо набрати лише третину правильних відповідей. Такий формат перевірки рівня знань обов'язковий для вступників до ВНЗ та випускників ліцеїв.
Велика Британія	<i>General Certificate of Secondary Education</i> . Шкільна освіта триває 13 років; два останніх присвячуються підготовці до вступу до ВНЗ. A-level (GCE Advanced Exam, просунутий рівень іспиту GCE рівня A) — результати є підставою для вступу до обраного ВНЗ.
Німеччина	<i>Zeugnis der allgemeinen Hochschulreife (Abiturzeugnis, Abitur)</i> . Оскільки вступних іспитів немає, в їх ролі виступають результати Абітур разом із сертифікатом, що підтверджує достатнє знання німецької чи англійської мов для іншомовних громадян.
Франція	Єдиного вступного іспиту немає. Для перевірки знань використовується тест для випускників, що отримали повну середню освіту — <i>Baccalaureat Français</i> . В атестат, що видається (Le BAC), вказана спеціалізація: література, природничі науки, економіка (літери L, S, EC).
США	При вступі можна проходити дві перевірки рівня знань: <i>SAT (Scholastic Assessment Test)</i> , оцінювальний академічний тест; <i>ACT (American College Testing)</i> , тест для американських коледжів. Обидва можна скласти кілька разів на рік, обидва є платними (близько 50 доларів). При вступі до уваги беруться максимально вдалі результати одного з тестів.
Японія	Під час оцінки знань складаються шкільні випускні випробування, і вступні екзамени. Вступ відбувається в два етапи. Спочатку вступник складає загальний для всіх тест, потім окремо — тести в обраний вуз. Єдине тестування проводить Національний центр з прийому студентів до університетів.
Китай	<i>Гаокао</i> — всекитайський державний вступний іспит до вузів; дводенний, включає тестування і твір з китайської мови. Обов'язковими предметами, крім рідної мови, є англійська мова, математика і предмети за вибором. Зарахування майбутніх студентів до ВУЗу здійснюється на основі отриманих результатів

Для усунення елемента випадковості (вгадування) система має поступово оцінювати рівень знань вступника, що складається з попередніх відповідей на поставлені питання.

За умови застосування автоматизованої системи оцінювання рівня її ефективності є поліморфною, оскільки, залежно від характеру системи, кінцевий результат може бути різноманітним. У випадку використання блокового компонування завдань вся тестова система поділена на частини, рівень складності яких для кожної окремо є приблизно рівним, або поступово збільшується, в залежності від предмету. В цьому випадку здійснюється оцінювання не тільки рівня знань здобувачів вищої освіти, проте також їх стресостійкість під час вирішення завдань.

Такий підхід дозволяє оцінити швидкість прийняття рішень в реальних умовах, що забезпечує ефективність здійснюваної ними діяльності. Суть динамі-

чного підходу зводиться до того, що система оцінювання враховує ймовірність помилки у наступному завданні залежно від результату відповіді на попередній тест. За допомогою такого підходу можливо дізнатися приблизну межу складності завдань, які може вирішити тестований.

Алгоритм побудови тестової системи дозволяє оцінити середній рівень знань вступників, а також сортувати їх за тим рівнем знань, що вони мали перед вступом до закладу вищої освіти.

Такий формат динамічної тестової перевірки знань дозволяє здійснити приблизний розподіл майбутніх студентів за групами, в яких рівень знань приблизно однаковий, що дозволить формувати індивідуальні програми підготовки та графік навчання, також скласти графік проведення лекційних, семінарських та практичних занять залежно від тих результатів, що були отримані в процесі попереднього тестування рівня знань.

Одним із варіантів, що може бути альтернативним до вже створеної системи оцінювання, є динамічний, що дозволяє оцінити рівень знань більш ефективно.

У випадку покрокової системи, коли складність завдання залежить від результату рішення попередніх тестів, рівень ефективності відбору здобувачів вищої освіти зростає. Це зумовлене тим, що сама програма регулює рівень складності завдань, оцінюючи можливий результат на основі попередніх відповідей, даних вступником.

Це дозволяє розподілити вступників за певними об'єктивними критеріями, що не впливатиме на подальше оцінювання.

Важливим аспектом в системі оцінювання якості знань є сам процес формування тестових завдань. На це впливає:

- структура завдання;
- рівень його складності;
- покрокова побудова тестів для вирішення.

Найважливіше при підготовці завдань, що виносяться на тестування – простота формулювання умови, без чого неможливе їх правильне вирішення та попередня оцінка рівня складності.

Поряд з почерговим оцінюванням знань альтернативою є дискретне пропонування завдань для вирішення: вступник може демонструвати показники успішності, що відрізняються між собою за правильністю, незалежно від того, які саме завдання пропонує система в залежності від попередніх відповідей.

Оцінити поточну систему зовнішнього незалежного оцінювання можливо виключно з точки зору теорії ймовірностей та математичної статистики [2].

Оскільки для тестів з однією правильною відповіддю в більшості випадків вірогідність того, що обрана відповідь є правильною, становить 25% (кількість пропонованих варіантів дорівнює 4), то в першому блоці, що пропонується для вирішення здобувачеві вищої освіти, ймовірність вгадування всіх відповідей правильно дорівнюватиме:

$$N = 0,25k,$$

де:

N — ймовірність того, що всі правильні варіанти відповідей до завдань будуть послідовно відгадані;

k — кількість тестів з чотирма варіантами відповідей.

Графічне представлення даної моделі вигляду (рис. 1) є:

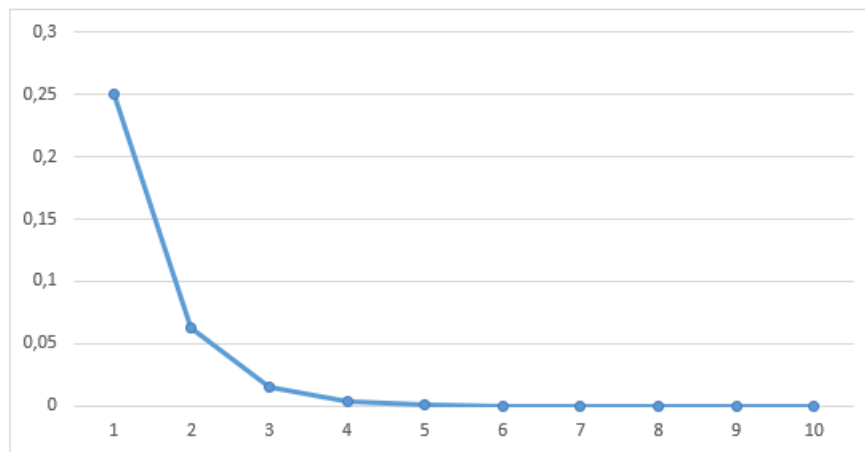


Рис. 1. Ймовірність вгадування правильної відповіді у блоці з 4-ма варіантами правильної відповіді.

Враховуючи, що ймовірність вгадування певну кількість разів підряд апроксимативно прямує до 0, то можна стверджувати, що такий варіант перевірки знань є ефективним, оскільки дозволяє оцінити саме рівень знань, а не інтуїцію здобувачів вищої освіти.

Наступний блок у системі оцінювання знань є тестові завдання на зіставлення кількох відповідей із запитаннями, що задаються. До чотирьох завдань тесту пропонуються п'ять варіантів з відповідями. В самому тестовому завданні наперед закладається одна хибна відповідь.

Ймовірність послідовного вгадування, за умови виключення з переліку завдань, відповіді на які були дані, становитиме:

- 1-ша спроба — 0,2 або 20%;
- 2-га спроба — 0,25, або 25%;
- 3-тя спроба — 0,333, або 33,3%;
- 4-та спроба — 0,5, або 50%.

В кінцевому результаті навіть для одного тесту на зіставлення питань і відповідей отримаємо кінцеве значення ймовірності вгадування правильних пар: $L = 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,33 \cdot 0,5 = 0,00825$, що є еквівалентним значенню вгадування 0,825%. Такий показник дозволяє стверджувати про низьку ймовірність вгадування всіх правильних пар (співвідношень «завдання — варіант відповіді») при вирішенні чергового завдання.

Якщо врахувати кількість тестів, що працюють за принципом пар «завдання — відповідь», то ймовірність вгадування при послідовному вирішенні завдань складатиме:

$$L = 0,00825n,$$

де:

L — загальна ймовірність вгадування всіх правильних відповідей у всіх тестових завданнях підряд;

n — кількість завдань.

Оскільки основа степеня є надто малою, порівняно з 1, величиною, то, як і в попередньому випадку, ймовірність, що наближається до 0, свідчить про

ефективність такої системи оцінювання рівня знань здобувачів вищої освіти та знижує вірогідність вгадування пар «питання — відповідь».

За умови використання виключно стандартного екзаменаційного порядку, кількість неправильно врахованих як правильні, неправильних відповідей, залежать від екзаменатора.

Незважаючи на те, що існує можливість виникнення ймовірної комбінації з правильних та неправильних відповідей, ймовірність, що послідовність буде правильною, також становить нескінченно малу величину.

Для формування тестового завдання необхідно враховувати певну кількість факторів [1]:

- адекватне формулювання умови завдання;
- підбір варіантів відповідей, що дозволяють виявити вгадування;
- оцінювання загальної системи блоків завдання.

Тест, що має адекватно відображати знання вступника, повинен задовольняти наступним вимогам:

- ступінь складності завдань повинен підвищуватися поступово, проте не стрибкоподібно;
- завдання мають поєднувати у собі теми за матеріалами програми у приблизно рівних пропорціях;
- рівень складності вирішення завдання має залежати від блоку, в якому це завдання подається для розв'язку.

При моделюванні блоків завдань можливо застосувати підхід, при якому кілька варіантів відповідей є вірогідними, а один з них — неправильний а ргіогі. Це дозволить зменшити ймовірність вгадування за рахунок введення додаткового елемента в поле ймовірних відповідей.

Таким чином, за умови, якщо кількість варіантів відповіді у першому тестовому блоці складала 0,25, або 25%, то при введенні додаткового питання складатиме 0,2, або 20%. Ймовірність вгадування при збільшенні кількості варіантів зображена на графіку (рис. 2):

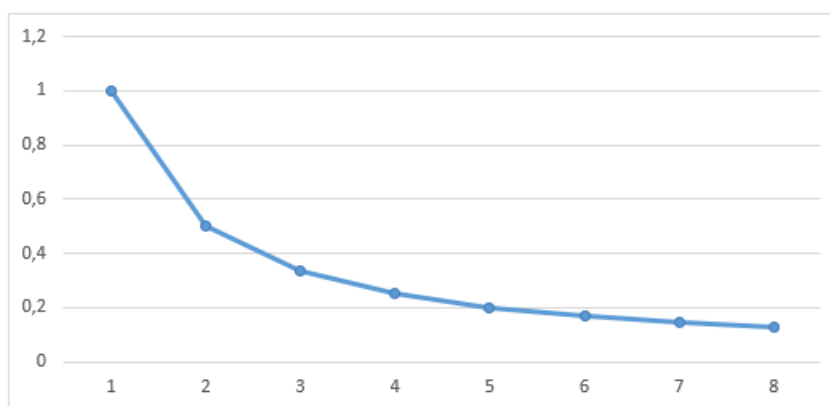


Рис. 2. Ймовірність вгадування правильної відповіді залежно від кількості запропонованих відповідей.

Додатковим варіантом перевірки рівня знань здобувачів вищої освіти є введення автоматичного перепитування за принципом: «Чи Ви впевнені у правиль-

ності даної відповіді?» Це дозволить виявити впевненість вступника у правильності власної відповіді за допомогою парадоксу Монті-Голла.

Парадокс Монті Голла [9] — одна з відомих задач теорії ймовірностей, розв'язок якої, на перший погляд, суперечить здоровому глузду. Задача формулюється як опис гіпотетичної гри, заснованої на американському телешоу «Let's Make a Deal».

Ця задача названа на честь ведучого цієї передачі Монті Голла. Найбільш розповсюджена версія гри була опублікована в 1990 році в журналі Parade Magazine і звучить так: «Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад, перші, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад, треті, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на другі двері?», «Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір?».

Аналогічне питання можливо ввести і в тестову систему оцінювання знань. З одного боку, це змусить засумніватися у тому, що кінцева відповідь точно є правильною, перевірити свої висновки, й або змінити вже дану відповідь, або залишити ту, що була дана. Така додаткова перевірка впевненості у тому, що відповідь є правильною, також перевіряє вступника на стресостійкість.

Може виникнути проблема із автоматичним оцінюванням рівня знань здобувачів вищої освіти, що вступають на гуманітарні спеціальності, оскільки самі завдання, що пропонується, є такими, що тестуванню не піддаються. Одним з таких типових завдань є написання твору на задану тему.

Оскільки твір має бути унікальним за своїм складом та змістом, необхідно оцінювати його саме за такими параметрами. Найбільш дієвим способом, що може усунути суб'єктивність оцінювачів та саму новизну тексту, є перевірка на плагіат [6] — а саме запозичення чужих думок.

На основі множини статистичних даних щодо успішності виконання тестових завдань з навчальних дисциплін, можливо на основі математичного інструментарію сформулювати модель, що приблизно описуватиме кумулятивну поведінку загальної кількості балів, набраних вступником за тест. При цьому варто враховувати характер завдання, його складність та ймовірність надання правильної відповіді за допомогою випадкового вгадування.

Крива набраних балів (див. рис. 3) відображає успішність виконання завдань, що даються послідовно і поділені на блоки за складністю.

Завдання невисокого рівня складності. Під час їх виконання кількість балів зростає достатньо швидко, оскільки, незважаючи на велику кількість завдань, вони потребують вирішення із розв'язанням, що здійснюється у кілька відносно простих, послідовно застосовуваних та логічно взаємопов'язаних між собою логічних та математичних дій.

Завдання середнього рівня складності. Їх вирішення займає більше часу, ніж виконання завдань відносно легкого рівня складності. У деяких випадках необхідно комбінувати між собою підходи та методи, характерні не тільки для тем, не завжди явно пов'язаних одна з одною, проте використовувати логічний інструментарій, що не завжди явний для пошуку правильної відповіді.

Завдання з підвищеним рівнем складності вимагають від вступника зорієнтуватися в тому, з чого необхідно почати їх вирішення, оскільки вибір правильного підходу дозволить уникнути тривалого та громіздкого «вишуко-

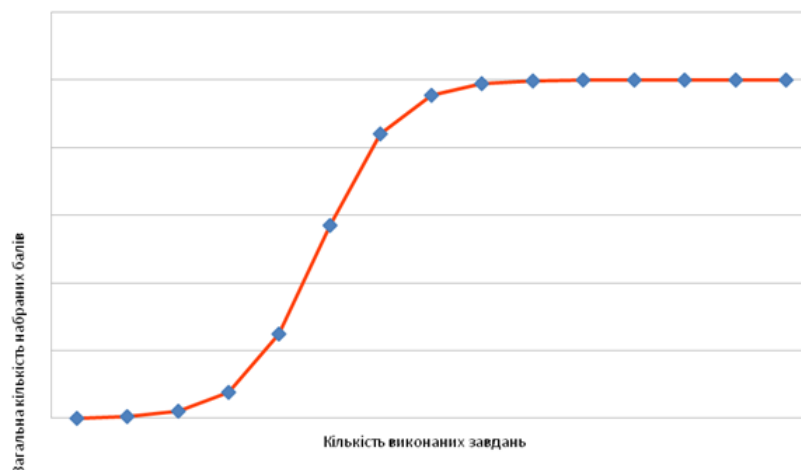


Рис. 3. Сумарна кількість набраних балів при послідовному виконанні тестових завдань.

ування» правильної відповіді, що дозволить зекономити час на відведення на тест. У той же час, результати виконання завдань найвищого рівня складності можуть демонструвати «ефект плато» [8] (plateau effect), за якого досягається максимальна кумулятивна кількість набраних за виконання завдань тесту балів. Кількість набраних балів за кожне завдання, рівень складності якого підвищується, навпаки — знижується.

Досягнення умовного «плато балів» демонструє граничне значення, якого може досягти об'єктивно вимірюваний обсяг знань при проходженні тестової перевірки з різноманітних предметів. Динаміка ефективності пропонованих тестових завдань (рис. 4) демонструє інтенсивність приросту показника набраних під час виконання тесту балів. Після досягнення певної межі, рівень набраних балів різко знижується при переході до кожного наступного завдання.

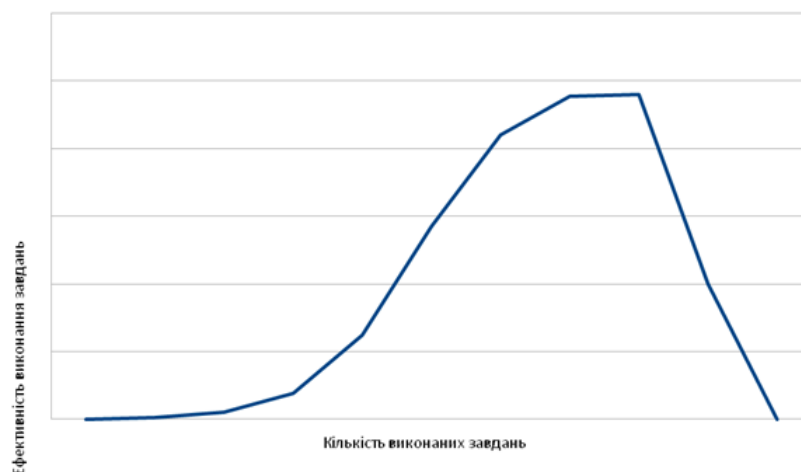


Рис. 4. Динаміка ефективності виконання тестових завдань.

В якості статистичного прикладу, на рис. 5 наведено розподіл результатів оцінювання з математики у 2018-му та 2019-му роках за даними відповідних

звітів Українського центру оцінювання якості освіти. Спостерігається «дзеркальний ефект плато», за якого після досягнення певного критичного порогу набраних балів, кількість учасників, що розв'язали завдання високої складності, неухильно зменшується.

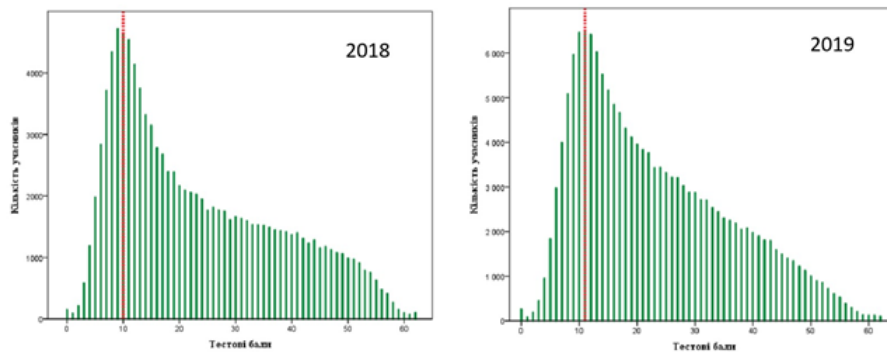


Рис. 5. Розподіл результатів оцінювання тестів з математики за 2018–2019 рр. [4].

За умови ретельної підготовки показник «стелі плато» може бути підвищений до певного граничного рівня, значення якого залежить від індивідуальних (психологічних) факторів. Значення індивідуальної «стелі плато» залежить також від природжених схильностей до вивчення предметів та дисциплін певного спрямування, що обумовлюється специфічністю способу мислення вступника.

3. Висновки. Зважаючи на рівень статистичної ефективності для оцінювання якості знань здобувачів вищої освіти, можливим є його впровадження в систему оцінювання знань загалом. Статичний метод є стаціонарною системою, що не реагує на відповіді вступника, проте динамічний підхід до складання блоків тестових завдань та використання системою методу «зворотного зв'язку» між рівнем складності пропонованого завдання та умовами наступного тесту, дозволить скласти більш точне уявлення про знання та навички вступника.

Динамічний метод дозволяє не тільки оцінити поточний рівень знань, проте також дає можливість спрогнозувати його подальшу успішність під час проходження освітнього процесу: оцінити навички, схильності до вивчення певних дисциплін, рівень уваги та сконцентрованості.

Список використаної літератури

1. Гнеденко Б. В. Нарис з історії теорії ймовірностей. Курс теорії ймовірностей. Київ : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2010. 464 с.
2. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. Київ : ВПЦ Київський університет, 2007. 504 с.
3. Механізми оцінювання якості вищої освіти в умовах євроінтеграції : монографія / Авт. : О. Воробйова, М. Дебич, В. Луговий, О. Оржель, О. Слюсаренко, Ж. Таланова, К. Трима; за ред. В. Лугового, Ж. Таланової. Київ : Ін-т вищої освіти НАПН України, 2020. 220 с.
4. Офіційний сайт Українського центру оцінювання якості освіти (УЦОЯО). URL: <https://testportal.gov.ua/> (дата звернення: 03.08.2024).
5. Пилипенко П. Фокус-група : Політична енциклопедія / Редкол. : Ю. Левенець (голова), Ю. Шаповал (заст. голови) та ін. Київ : Парламентське видавництво, 2011. 750 с.
6. Плагіат як соціальнокомунікаційне явище : монографія / Олена Рижко; Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ : Паливода А. В., 2017. 387 с.

7. Психологія стресу : підручник / Л. Б. Наугольник. Львів : Львівський державний університет внутрішніх справ, 2015. 324 с.
8. Lyster R. Differential effects of prompts and recasts in form-focused instruction. *In : Studies in Second Language Acquisition*. 2004. No. 26. P. 399–432.
9. Whitaker, Craig F. [Letter]. «Ask Marilyn» column, Parade Magazine. 9 September, 1990. 16 p.

Vronskiy S. V., Andrashko Yu. V. The dynamic approach to the formation of test tasks.

The article proposes a dynamic approach to assessing the level of knowledge, which allows identifying the applicant's strengths and weaknesses directly during the test-taking process, contributing to their learning and future professional development. Dynamic knowledge assessment enables, from the perspective of probability theory and mathematical statistics, the determination of what portion of the applicant's responses are based not on specific knowledge but on the factor of guessing. The article also focuses on mathematical modeling for approximate knowledge assessment when performing test tasks.

Keywords: automated assessment system, quality of knowledge level assessment, dynamic approach to knowledge level assessment, applicant, student of higher education.

References

1. Hnedenko B. V. (2010). *An essay on the history of probability theory. Probability theory course*. Kyiv: Publishing and Printing Center «Kyiv University» [in Ukrainian].
2. Kartashov, M. V. (2007). *Probability, processes, statistics*. Kyiv: VPTs Kyiv University [in Ukrainian].
3. Vorobiova, O., Debych, M., Lugovyi, V., Orzhel, O., Slyusarenko, O., Talanova, Zh., & Tryma, K. (2020). *Mechanisms for evaluating the quality of higher education in the conditions of European integration: monograph*. Lugovoi, V., & Talanova, Zh. (Ed.). Kyiv: Institute of Higher Education of the National Academy of Sciences of Ukraine [in Ukrainian].
4. The official website of the Ukrainian Center for the Evaluation of the Quality of Education (OCEQE). Retrieved from <https://testportal.gov.ua/> [in Ukrainian].
5. Pylypenko, P. (2011). *Focus group: Political encyclopedia*. Levenets, Yu., & Shapoval, Yu., and others (Ed.). Kyiv: Parliamentary Publishing House [in Ukrainian].
6. Olena, R. (2017). *Plagiarism as a social communication phenomenon: a monograph*. National University of Kyiv named after Taras Shevchenko. Kyiv: Palivoda, A. V. [in Ukrainian].
7. Naugolnyk, L. B. (2015). *Psychology of stress: a textbook*. Lviv: Lviv State University of Internal Affairs [in Ukrainian].
8. Lyster, R. (2004). Differential effects of prompts and recasts in form-focused instruction. *In : Studies in Second Language Acquisition*, (26), 399–432.
9. Whitaker, & Craig, F. (9 September, 1990). [Letter]. «Ask Marilyn» column, Parade Magazine.

Одержано 30.09.2024

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).164-171](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).164-171)**А. Ю. Глухов¹, С. Ю. Бабич², Ю. Ю. Млавець³, О. К. Рейтій⁴**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uri@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0579-9046>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
oleksandr.reity@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6727-5418>

ХВИЛІ КРУЧЕННЯ В ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ НЕСТИСЛИВИХ МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ ШАРІВ

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка та метод розв'язку задач про поширення хвиль кручення в шаруватих композитних нестисливих заздалегідь напружених матеріалах при проковзуванні шарів. Досліджено випадок поширення хвиль вздовж шарів. Отримані дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль та їх довгохвильові наближення.

Ключові слова: шаруватий композитний нестисливий матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення.

1. Вступ. Концепція хвильового руху — одне з найширших наукових понять. Хвилі можна вивчати на будь-якому науково-технічному рівні. Важливими в практичному аспекті є дослідження закономірностей поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями.

Огляд наявних в цій області робіт і детальний аналіз отриманих результатів до певної міри представлений в оглядових статтях [1, 2] та інших, а також в узагальнюючих монографіях [3–5] та інших.

Для композитних матеріалів періодичної структури в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями отримала розвиток теорія поширення пружних хвиль у випадку однорідного початкового напружено-деформованого стану. Для дослідження задач застосовувалися загальні розв'язки, що приведені в монографіях [3–6] та інших.

Відповідно до класифікації О. М. Гузя [1], отримані результати можна об'єднати в три групи.

До першої групи відносяться публікації О. М. Гузя [3] та інші, в яких розглянуті методи приведення шаруватих композитних матеріалів з початковими напруженнями до однорідного середовища.

До другої групи відносяться публікації О. М. Гузя, Ле Мінх Кхана та О. М. Панасюка [7–9] та інші, в яких розглянуті питання поширення плоских хвиль в шаруватих матеріалах.

До третьої групи відносяться публікації О. М. Гузя, О. М. Жука, Н. А. Сітенка, А. Ю. Глухова [10–14] та інші про поширення в радіальному напрямку вісесиметричних хвиль та хвиль кручення в шаруватих композитних матеріалах періодичної структури.

В роботах [7, 9–12] результати отримані для випадку повного контакту шарів.

У найбільш повній формі вищевказані результати представлені в монографіях О. М. Гузя [3, 5].

В реальних композитних матеріалах, як правило, існують різного роду дефекти на межі розділу шарів. Для оцінки впливу таких дефектів на закономірності поширення плоских гармонічних хвиль в композитних матеріалах О. М. Панасюк [8] розглянув такий граничний випадок контакту шарів як повне проковзування.

Задача про поширення вісесиметричних пружних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з однорідними початковими напруженнями при проковзуванні шарів досліджувалась в роботах [13, 14].

З огляду літератури можна зробити висновок про те, що поширення плоских та вісесиметричних гармонічних хвиль у шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями вивчено достатньо повно. Дослідження даного класу задач проведені для випадку повного контакту шарів та для випадку повного проковзування шарів.

Для хвиль кручення аналогічні задачі розглядалися тільки для випадку повного контакту шарів.

В даній роботі досліджуються закономірності поширення пружних хвиль кручення в шаруватих нестиглих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів.

2. Постановка задачі і метод досліджень. Розглядається шаруватий композитний матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються, в кожному з яких матеріали і початкові напружено-деформовані стани є однаковими для розглянутого типу шарів.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3 , які в початковому напружено-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в початковому напружено-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь була спрямована по нормалі до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних

матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж осі Oy_3 .

Під хвилями кручення будемо розуміти нормальні хвилі, що поширюються в радіальному напрямку і відповідають крутильним коливанням нескінченного шару.

Вважаємо початковий напружений стан однорідним

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1) x_m; \quad \lambda_m = \text{const.} \quad (1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів реалізується вісесиметричний напружено-деформований стан

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} &= S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} &= \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

При вище вказаних умовах будемо досліджувати переміщення, що відповідають умовам [3, 4]

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_\theta^{(j)} = u_\theta^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_3^{(j)} \equiv 0; \quad u_4^{(j)} \equiv p^{(j)} \equiv 0. \quad (3)$$

У цьому випадку в поданні спільних рішень просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності стосовно до загального рішення задачі в циліндричних координатах можна прийняти

$$\Psi^{(j)} = \Psi^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad X^{(j)} \equiv 0. \quad (4)$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_\theta^{(j)}$ в кожному з шарів маємо наступні співвідношення [3, 4]

$$u_\theta^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi^{(j)}. \quad (5)$$

Для складових тензора напружень $Q^{(j)}$ при $y_3 = \text{const}$ отримуємо вирази

$$Q'_{3\theta}{}^{(j)} = \kappa'_{3113}{}^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_3} u_\theta^{(j)}. \quad (6)$$

В співвідношеннях (5) функції $\Psi^{(j)}$ визначаються із рівнянь

$$\left(\Delta' + \kappa'_{3113}{}^{(j)} \kappa'_{1221}{}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \rho'^{(j)} \kappa'_{1221}{}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi^{(j)} = 0. \quad (7)$$

Тут $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}$; $\rho'^{(j)}$ — щільність матеріалів кожного з шарів в попередньо напруженому стані; τ — час. Складові тензорів $\kappa'^{(j)}$ визначаються для конкретних постановок задач [3, 5].

Таким чином, відповідно до вище викладеного дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (7) при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке.

Розглянемо поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. У цьому випадку за аналогією з [3, 5] для визначення “істинної” фазової швидкості поширення хвиль кручення у шаруватому композитному матеріалі з початковими напруженнями приймемо

$$\Psi^{(j)}(r', y_3, \tau) = \Psi^{(j)(0)}(y_3) H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \quad C = \omega k^{-1}; \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

В (8) k і ω — хвильове число і кругова частота; C — “істина” фазова швидкість хвиль кручення; $H_0^{(1)}(x)$ — функція Ханкеля нульового порядку першого роду, що забезпечує поширення хвиль кручення, що йдуть на “нескінченність”; $\Psi^{(j)(0)}(y_3)$ — амплітудна функція. Надалі індексами (0) відзначені всі амплітудні величини при представленнях типу (8).

Підставляючи (8) в (5), для визначення переміщень отримуємо наступні вирази:

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(j)}(r', y_3, \tau) &= u_{\theta}^{(j)(0)}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ u_{\theta}^{(j)(0)}(y_3) &= -\Psi^{(j)(0)}(y_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогічно, підставляючи (8) в (6), для визначення складових тензора напружень $\tilde{Q}^{(j)}$, при $y_3 = \text{const}$ отримуємо

$$\begin{aligned} Q'_{3\theta}(r', y_3, \tau) &= Q'_{3\theta}(y_3) \frac{\partial}{\partial r'} H_0^{(1)}(r'k) e^{-i\omega\tau}; \\ Q'_{3\theta}(y_3) &= -\kappa'_{3113} \frac{\partial}{\partial y_3} \Psi^{(j)(0)}(y_3). \end{aligned} \quad (10)$$

Підставляючи (8) в рівняння (7), отримаємо рівняння для визначення функції $\Psi^{(j)(0)}$ в наступному вигляді

$$\left(\kappa'_{3113} \kappa'_{1221} \frac{d^2}{dy_3^2} + \rho^{(j)} \omega^2 \kappa'_{1221} - k^2 \right) \Psi^{(j)} = 0. \quad (11)$$

Оскільки в (8)–(11) всі співвідношення представлені через амплітудні величини, то умови на границі контакту шарів і умови періодичності також запишемо для амплітудних величин. Для цього виділимо два сусідні шари і будемо вважати, що шар, величини якого відмічені індексом 1, займає по вісі Oy_3 область $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$ і шар, всі величини якого відмічені індексом 2, займає по вісі Oy_3 область $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$.

За умови проковзування при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності

$$Q'_{3\theta}^{(1)(0)}(0) = 0; \quad Q'_{3\theta}^{(2)(0)}(0) = 0; \quad (12)$$

і умови періодичності

$$Q'_{3\theta}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = 0; \quad Q'_{3\theta}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \quad (13)$$

Таким чином, для нестисливого тіла необхідно знайти розв’язок звичайного диференціального рівняння (11), що задовольнить умовам (12) і (13) з урахуванням позначень (9) і (10).

За аналогією з результатами, викладеними в [1], розв'язок рівняння (11) представимо в такій формі:

$$\Psi^{(j)(0)}(y_3) = A_5^{(j)} e^{ik\alpha_3^{(j)} y_3} + A_6^{(j)} e^{-ik\alpha_3^{(j)} y_3}; \quad A_n^{(j)} = \text{const.} \quad (14)$$

Введемо в розв'язок (14) для кожного шару нові константи $B_n^{(j)}$ і запишемо його відносно середини кожного із шарів. В цьому випадку (14) можна записати у формі

$$\begin{aligned} \Psi^{(1)(0)}(y_3) &= B_5^{(1)} e^{ik\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{1}{2}h'(1))} + B_6^{(1)} e^{-ik\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{1}{2}h'(1))}; \\ \Psi^{(2)(0)}(y_3) &= B_5^{(2)} e^{ik\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{1}{2}h'(2))} + B_6^{(2)} e^{-ik\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{1}{2}h'(2))}. \end{aligned} \quad (15)$$

В (14) і (15) через $\alpha_3^{(j)}$ відповідно до (11) позначені наступні величини

$$\alpha_3^{(j)} = \sqrt{\kappa_{3113}^{(j)-1} \left(\rho^{(j)} C^2 - \kappa_{1221}^{(j)} \right)}; \quad C = \omega k^{-1}. \quad (16)$$

У розглянутому випадку для шаруватих композитних нестисливих матеріалів з початковими напруженнями вихідну задачу можна розділити на дві незалежні задачі: симетрична хвиля кручення (в кожному шарі $u_\theta^{(j)}$ симетричні відносно середини кожного шару), що поширюється уздовж вісі Or' ; антисиметрична хвиля кручення (в кожному шарі $u_\theta^{(j)}$ антисиметричні відносно середини кожного шару), що поширюється уздовж вісі Or' . Надалі розглянемо окремо симетричні та антисиметричні хвилі кручення.

Симетричні хвилі кручення. Для розглянутого випадку в (15) прийнемо такі залежності:

$$B_5^{(j)} = B_6^{(j)}. \quad (17)$$

Із (17), (15) і (9) випливає, що $u_\theta^{(j)}$ будуть симетричними відносно середини кожного із шарів.

В цьому випадку із (17), (15), (9), (10), (12), (13) слідує, що умови неперервності і періодичності співпадають.

У випадку нежорсткого контакту між шарами композитного матеріалу умови неперервності і періодичності мають вигляд

$$\begin{aligned} B_5^{(1)} k \alpha_3^{(1)} \kappa_{3113}^{(1)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_3^{(1)} h'(1) &= 0; \\ B_5^{(2)} k \alpha_3^{(2)} \kappa_{3113}^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_3^{(2)} h'(2) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Дисперсійне рівняння при нежорсткому контакті має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} \kappa_{3113}^{(1)} \kappa_{3113}^{(2)} \sin \frac{1}{2} k \alpha_3^{(1)} h'(1) \sin \frac{1}{2} k \alpha_3^{(2)} h'(2) = 0. \quad (19)$$

Рівняння (19) можна розв'язати аналітично. Чотири розв'язки рівняння (19) мають вигляд

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\kappa_{1221}^{(1)}}{\rho^{(1)}}}; \quad C_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\kappa_{1221}^{(2)}}{\rho^{(2)}}}; \quad C_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\kappa_{1221}^{(1)}}{\rho^{(1)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \kappa_{3113}^{(1)}}{\rho^{(1)} k^2 h'(1)^2}}; \\ C_2^{(2)} &= \sqrt{\frac{\kappa_{1221}^{(2)}}{\rho^{(2)}} + \frac{4\pi^2 n^2 \kappa_{3113}^{(2)}}{\rho^{(2)} k^2 h'(2)^2}}; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Із (19) і (20) слідує, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження симетричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення симетричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома формулами (20).

Відзначимо, що перші вирази у формулах (20) визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

Антисиметричні хвилі кручення. Для розглянутого випадку в представленні розв'язку у формі (17) для двох сусідніх шарів приймемо наступні залежності

$$B_5^{(j)} = -B_6^{(j)}. \quad (21)$$

За умови (21) з (15) і (9) випливає, що $u_\theta^{(j)}$ будуть антисиметричними відносно середини відповідних шарів.

В цьому випадку із (21), (15), (9), (10), (12), (13) слідує, що умови неперервності і періодичності співпадають.

У випадку нежорсткого контакту між шарами композитного матеріалу умови неперервності і періодичності мають вигляд

$$\begin{aligned} B_5^{(1)} k \alpha_3^{(1)} \kappa'_{3113} \cos \frac{1}{2} k \alpha_3^{(1)} h^{(1)} &= 0; \\ B_5^{(2)} k \alpha_3^{(2)} \kappa'_{3113} \cos \frac{1}{2} k \alpha_3^{(2)} h^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Дисперсійне рівняння при нежорсткому контакті має вигляд

$$\alpha_3^{(1)} \alpha_3^{(2)} \kappa'_{3113} \kappa'_{3113} \cos \frac{1}{2} k \alpha_3^{(1)} h^{(1)} \cos \frac{1}{2} k \alpha_3^{(2)} h^{(2)} = 0. \quad (23)$$

Рівняння (23) можна розв'язати аналітично. Чотири розв'язки рівняння (23) мають вигляд

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= \sqrt{\frac{\kappa'_{1221}^{(1)}}{\rho'^{(1)}}}; \quad C_1^{(2)} = \sqrt{\frac{\kappa'_{1221}^{(2)}}{\rho'^{(2)}}}; \quad C_2^{(1)} = \sqrt{\frac{\kappa'_{1221}^{(1)}}{\rho'^{(1)}} + \frac{\kappa'_{3113}^{(1)} \pi^2 (1+2n)^2}{\rho'^{(1)} k^2 h'^{(1)2}}}; \\ C_2^{(2)} &= \sqrt{\frac{\kappa'_{1221}^{(2)}}{\rho'^{(2)}} + \frac{\kappa'_{3113}^{(2)} \pi^2 (1+2n)^2}{\rho'^{(2)} k^2 h'^{(2)2}}}; \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Із (23) і (24) слідує, що між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження антисиметричних хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень.

Для довгохвильового наближення швидкості поширення симетричних хвиль кручення для кожного з шарів будуть визначатися першими двома формулами (24).

Відзначимо, що перші вирази у формулах (24) визначають швидкості поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

3. Висновки. Таким чином, в даній роботі проведені дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів. Задача зводиться до побудови розв'язків рівняння відносно амплітудної функції при виконанні умов неперервності в площинах розділу шарів і умов періодичності, відповідно теорії Флоке. Для симетричних і антисиметричних хвиль кручення отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення.

Між шарами композитного матеріалу у випадку проковзування не відбувається взаємодії. Швидкості розповсюдження хвиль кручення в кожному із шарів залежать від механічних параметрів матеріалу шару, товщини шару та початкових напружень. При довгохвильовому наближенні швидкості поширення симетричних і антисиметричних хвиль кручення для кожного з шарів рівні швидкостям поширення поперечних хвиль в однорідному матеріалі з початковими напруженнями відповідно першого і другого шарів.

РЕЗЮМЕ. Досліджено поширення хвиль кручення у шаруватих композитних нестисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів. Розглянуто випадок поширення хвиль уздовж шарів. Отримано дисперсійні рівняння для симетричних і антисиметричних хвиль, а також їх довгохвильові наближення.

Список використаної літератури

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. *Прикл. механика*. 2002. Т. 38, № 1. С. 35–78.
2. Akbarov S. D. Recent Investigations on Dynamic Problems for an Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review). *Int. Appl. Mech.* 2007. Vol. 41, No 12. P. 1305–1324. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Київ : А.С.К., 2004. 672 с.
4. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Часть 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 501 с.
5. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Часть 2. Волны в частично ограниченных телах. Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 505 с.
6. Guz A. N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin : Springer-Verlag, 1999. 555 p.
7. Гузь А. Н., Кхань Л. М. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. *Сов. прикл. механика*. 1976. Т. 12, № 1. С. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01073873>
8. Панасюк О. Н. Распространение плоских упругих волн в композитных слоистых материалах с начальными напряжениями при условии проскальзывания слоев. *Прикл. механика*. 2009. Т. 45, № 3. С. 120.
9. Khanh L. M. Propagation of Floquet waves in an elastic media with initial homogeneous deformations. *Rev. roum. sci. techn., Ser. mech. appl.* 1981. Vol. 26, No. 2. P. 233–247.
10. Гузь А. Н., Ситенок Н. А., Жук А. П. Осесимметричные упругие волны в слоистом сжимаемом композиционном материале с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20, № 7. С. 3–10.
11. Ситенок Н. А. Волны кручения в слоистых композитных материалах с начальными напряжениями. *Прикл. механика*. 1984. Т. 20, № 8. С. 112–116.
12. Guz A. N. Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses. Book of Abst. of ICIAM 95 : Hamburg, 3–7 July 1995. 173 p.
13. Glukhov A. Yu. Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composi-

- te Materials with Sliding Layers. *Int. Appl. Mech.* 2018. Vol. 54, No. 4. P. 399–410. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0893-z>
14. Guz A. N., Babich S. Yu., Glukhov A. Yu. Axisymmetric waves in highly elastic composite material with initial stresses. Long-wave approximation. *Int. Appl. Mech.* 2021. Vol. 57, No. 2. P. 134–147. URL: <http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001246803> (date of access: 18.04.2024).

Glukhov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu., Reity O. K. Torsion waves in layered composite incompressible materials with initial stresses at the slip of layers.

In the framework of the linearised theory of elasticity for bodies with initial stresses, the torsional wave propagation in layered composite incompressible materials with initial stresses at layer slippage is investigated. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersion equations for symmetric and antisymmetric waves and their long-wave approximations are obtained.

Keywords: laminated composite incompressible material, initial stresses, elastic waves, dispersive equation, long-wave approximation.

References

1. Guz, A. N. (2002). Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *Appl. Mechanics*, 38(1), 35–78.
2. Akbarov, S. D. (2007). Recent Investigations on Dynamic Problems for an Elastic Body with Initial (Residual) Stresses (Review). *Int. Appl. Mech.*, 43(12), 1305–1324. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
3. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. Kyiv: A.S.K. [in Russian].
4. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 1. General questions. Waves in infinite bodies and surface waves*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
5. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses: in 2 parts. Part 2. Waves in partially constrained bodies*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing [in Russian].
6. Guz, A. N. (1999). *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies*. Berlin: Springer-Verlag.
7. Guz, A. N., & Khanh, L. M. (1976). Wave propagation in composite layered materials with large initial deformations. *Soviet Applied Mechanics*, 12(1), 1–7. <https://doi.org/10.1007/BF01073873> [in Russian].
8. Panasiuk, O. N. (2009). Propagation of plane elastic waves in composite layered materials with initial stresses under the condition of slippage of layers. *Appl. Mechanics*, 45(3), 120 [in Russian].
9. Khanh, L. M. (1981). Propagation of Floquet waves in an elastic media with initial homogeneous deformations. *Rev. roum. sci. techn., Ser. mech. appl.*, 26(2), 233–247.
10. Guz, A. N., Sitenok, N. A., & Zhuk, A. P. (1984). Axisymmetric elastic waves in a layered compressible composite material with initial stress. *Appl. Mechanics*, 20(7), 3–10 [in Russian].
11. Sitenok, N. A. (1984). Torsional waves in layered composites with initial stresses. *Appl. Mechanics*, 20(8), 112–116 [in Russian].
12. Guz, A. N. (3–7 July, 1995). *Elastic Waves in Laminated Periodic Bodies with Initial (residual) Stresses*. Book of Abst. of ICIAM 95: Hamburg.
13. Glukhov, A. Yu. (2018). Axisymmetric Waves in Prestressed Incompressible Laminated Composite Materials with Sliding Layers. *Int. Appl. Mech.*, 54(4), 399–410. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0893-z>
14. Guz, A. N., Babich, S. Yu., & Glukhov, A. Yu. (2021). Axisymmetric waves in highly elastic composite material with initial stresses. Long-wave approximation. *Int. Appl. Mech.*, 57(2), 134–147. Retrieved from <http://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001246803>

Одержано 20.09.2024

УДК 519.7+517

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).172-187](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).172-187)**Г. М. Гнатієнко¹, О. Г. Гнатієнко²**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
заступник декана факультету інформаційних технологій з наукової роботи,
кандидат технічних наук

g.gna5@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0465-5018>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри інформаційних систем та технологій
oleksii.hnatiienko@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8546-5074>

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НЕЧІТКИХ ЗНАЧЕНЬ ВІДНОСНОЇ ВАЖЛИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИК АЛЬТЕРНАТИВ З ВИКОРИСТАННЯМ СПОСОБУ НАШАРУВАННЯ

Дослідження присвячене розробці інструментарію, призначеного для аналізу та агрегування інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив. Слабкоструктуровані предметні області характеризуються невизначеністю і у конкретних ситуаціях прийняття рішень це проявляється в розмитому оцінюванні експертами характеристик альтернатив у вигляді інтервальних значень. У статті пропонується метод агрегування інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик, одержаних від групи експертів, у вигляді функції належності нечіткій множині. В основу методу покладено запропонований авторами спосіб нашарування. Описано алгоритм визначення кількості шарів при дослідженні взаємного попарного розташування інтервалів на прямій. Наводяться також результати експерименту виявлення відносної важливості ролей керівників організаційної системи для забезпечення її функціональної стійкості.

Ключові слова: інтервальні значення, вагові коефіцієнти, функція належності, аналіз розташування інтервалів, важливість ролей в організації, функціональна стійкість.

1. Вступ. У багатьох практичних ситуаціях особа, яка приймає рішення, закономірно змушена діяти в слабкоструктурованих предметних областях. До того ж, побудова структури переваг у формалізованому вигляді є складною задачею для людини [1, 2]: для експертів у предметних областях складно будувати метризовані відношення на множині об'єктів. Зокрема, людина не може задавати достовірні вагові коефіцієнти відносної важливості характеристик альтернатив чи критеріїв, коефіцієнти компетентності експертів, числові значення елементів метризованих матриць попарних порівнянь, побудувати обґрунтовану достовірну функцію належності тощо. Тим часом такі проблеми регулярно виникають у багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень в різних напрямках людської життєдіяльності і вимагають свого вирішення.

Багатоатрибутний вибір є одним з напрямків, який сприяє адекватній формалізації ситуацій прийняття рішень та допомагає експертам і особам, що приймають рішення, вирішувати слабкоструктуровані та неструктуровані проблеми, які характеризуються значною кількістю критеріїв, атрибутів та цілей. При описі процесу прийняття рішень зазвичай розглядаються:

- альтернативи — набір об'єктів, варіантів, продуктів, дій, виборів, планів, проєктів, стратегій тощо;

- атрибути — набір характеристик, ознак, показників, факторів тощо, які визначають кожну альтернативу;
- цілі — бажаний стан альтернативи, бажані значення набору атрибутів альтернативи, які обряться особою, що приймає рішення;
- ваги — відносні коефіцієнти важливості, значущості кожного атрибуту альтернатив, відносної важливості критеріїв, вагомості альтернатив, числові показники компетентності експертів.

Зазвичай розрізняють багатоцільове прийняття рішень, багатоатрибутне прийняття рішень та багатокритеріальне прийняття рішень. Багатоцільове прийняття рішень містить набір конфліктуючих цілей, які можуть бути досягнуті одночасно. Багатоатрибутне прийняття рішень здійснюється для завдань вибору набору альтернатив, що характеризуються їх атрибутами, найчастіше за наявності однієї мети. Багатокритеріальним прийняттям рішень зазвичай вважається прийняття рішень при багатьох атрибутах і за наявності кількох конфліктуючих критеріїв.

Часто експерти мають неоднозначну інформацію про переваги, нерідко бувають не впевнені у своїх оцінках та не можуть визначити їх точні числові значення. Тому реальніший підхід для вираження переваг полягає у використанні вербальних тверджень замість числових величин.

При груповому прийнятті рішень процес розвивається з використанням згортки, яка агрегує узагальнені переваги окремих експертів або за одержаними усередненими оцінками вибирається найкраща альтернатива. Водночас практично завжди існує проблема узгодження оцінок при груповому прийнятті рішень та визначенні властивостей об'єктів. Судження експертів найчастіше є різними і мають бути агреговані для того, щоб отримати єдиний висновок, який був би в якомусь сенсі близький до усіх експертних значень. Нечіткі моделі використовуються як основний засіб для агрегування індивідуальної експертної інформації в різних практичних ситуаціях прийняття рішень.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню та аналізу методів вирішення проблеми визначення структури переваг на множині об'єктів, зокрема, вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив, присвячено значну кількість робіт у вітчизняній та зарубіжній літературі. В деяких роботах [1, 3] відзначається складність отримання безпосередньої несуперечливої інформації від експерта про числові значення вагових коефіцієнтів атрибутів альтернатив. На основі проведених досліджень [1] доводиться, що експерт може адекватно визначити вагові коефіцієнти, тобто, коефіцієнти значущості, у випадках, коли кількість атрибутів, що характеризують альтернативи, не перевищує трьох. У випадках, коли альтернативи характеризуються більшою кількістю атрибутів, можливе застосування непрямих методів, в яких структура переваг відновлюється на основі попередньо прийнятих експертних рішень.

Серед поширених способів представлення значень вагових коефіцієнтів слід відзначити такі [1]:

- довільні дійсні чи натуральні числа $-\infty < x_i < \infty$, $i \in I$;
- дійсні числа з врахуванням обмежень (односторонніх чи двосторонніх), наприклад, $x_i > 0$, $i \in I$; $-5 \leq x_i \leq 5$, $i \in I$; $0 < x_i < 1$, $i \in I$;

- дійсні чи натуральні числа з урахуванням умови центрованості:

$$\sum_{i \in I} x_i = 0, \quad -\infty < x_i < \infty, \quad i \in I;$$

- дійсні числа з урахуванням умови нормованості:

$$\sum_{i \in I} x_i = 1, \quad x_i > 0, \quad i \in I.$$

Поширеною формою представлення нормованих вагових коефіцієнтів є інтервальна форма — гіперпаралелепіпед вагових коефіцієнтів [1]

$$x \in [x_i^H, x_i^B], \quad i \in I, \quad 0 < x_i^H \leq x_i^B < 1, \quad i \in I.$$

Причому, $I = \{1, \dots, k\}$ — множина індексів експертів, k — кількість експертів.

Методи визначення інтервальних значень вагових коефіцієнтів розглядалися, зокрема, в роботах [1, 4]. В роботі [7] запропоновано крім фіксованих та інтервальних значень вагових коефіцієнтів розглядати також відносні коефіцієнти важливості чи впливовості деяких величин.

На сьогодні підходи, які використовують методи теорії нечітких множин, дозволяють проводити обробку розмитих експертних оцінок, але такі підходи не враховують особливостей сприйняття експертами кількісних значень фізичних величин. Для обґрунтування та подальшого викладення матеріалу введемо кілька додаткових евристик.

Евристика Е1. *Інтервали або сегменти значень більшою мірою відображують судження експертів про відношення переваги, ніж точкові значення вагових коефіцієнтів.*

Евристика Е2. *Функція належності нечіткій множині містить більше інформації про відношення переваги групи експертів, ніж інтервали або сегменти, і краще відображає колективне судження групи експертів.*

Таким чином, акумульована (агрегована, узагальнена, узгоджена тощо) інформація, одержана від групи експертів, не втрачається, хоч і трансформується в інший аналітичний вигляд з деякими неминучими і закономірними похибками.

Наголосимо також на основному моменті для такого роду експертиз. Експерти працюють у звичній для себе предметній області і визначення інтервалів чи сегментів значень відносної важливості характеристик альтернатив здійснюється непрямыми методами.

В роботі [8] розглянуто спосіб нашарування для агрегування інтервалів або сегментів значень вагових коефіцієнтів та визначення структури переваг експертів у вигляді функцій належності нечіткій множині.

3. Постановка задачі. Основна мета цього дослідження полягає у розробці підходу, який дозволяв би агрегувати задані експертами інтервали або сегменти відносної важливості характеристик альтернатив і, за можливості, мінімізував би при цьому втрати інформації про переваги між характеристиками альтернатив, тобто максимально відображав би судження групи експертів про рівень впливу на прийняття рішення кожної характеристики альтернативи. В

багатьох випадках експертові зручніше задавати переваги в нечіткій, розмитій формі у вигляді інтервалів зміни коефіцієнтів відносної важливості об'єктів, тобто гіперпаралелепіпеда значень у просторі вагових коефіцієнтів.

Постановки задач визначення відносної важливості критеріїв, ваги альтернатив, впливовості їх характеристик та компетентності експертів у більшості випадків схожі і відрізняються лише інтерпретацією. Тому будемо розглядати визначення вагових коефіцієнтів взагалі, маючи на увазі те, що ця задача може інтерпретуватися у будь-якому з чотирьох зазначених аспектів.

Нехай задано множину альтернатив (об'єктів, варіантів, планів, проєктів тощо) $a_i \in A$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, кожна з яких характеризується m ознаками (атрибутами, характеристиками, факторами тощо) $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^m)$, $i \in I$.

Для побудови моделі конкретної задачі нерідко виникає необхідність у визначенні відносної вагомості характеристик та їх впливу на прийняття рішення — для збільшення визначеності та підвищення структурованості предметної області. Оскільки людина у більшості випадків не спроможна адекватно призначати відносну вагу [1], перспективним напрямком для вирішення проблеми визначення вагових коефіцієнтів характеристик є непрямі методи.

У практичних випадках нерідко існує історія переваг між об'єктами (гравцями, проєктами, підрозділами тощо) — проведення серії турнірів, за результатами неодноразового вимірювання переваг експертів, будь-якої іншої природної інформації. На основі одержаної таким чином інформації необхідно визначити відносні рівні впливу одержаних в результаті експертизи інтервальних значень в числовому вираженні. При цьому слід забезпечити максимальне збереження початкової інформації про відношення переваги, яка надійшла від експертів.

4. Математична модель. Для побудови математичної моделі визначення нечітких значень відносних вагових коефіцієнтів розглянемо ситуацію прийняття рішення.

Нехай за участі кожного експерта непрямыми методами задано інтервали відносної важливості вагових коефіцієнтів:

$$\left[x_i^{Hj}, x_i^{Bj} \right], \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m,$$

де:

k — кількість експертів;

m — кількість атрибутів альтернатив.

При цьому слід зазначити, що є не важливою конфігурація заданих інтервалів. Тобто, інтервали можуть співпадати, перетинатися, бути вкладеними один в одного. Деякі інтервали можуть бути представлені єдиною точкою, коли

$$\exists i, j : x_i^{Hj} = x_i^{Bj}, \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m.$$

Задача полягає у здійсненні агрегування інтервалів, заданих або обчислених за участі експертів. Тобто, інформація про відношення переваги експертів, представлена у вигляді K наборів інтервалів, має бути представлена у вигляді функції належності нечіткій множині, яка б зберігала інформацію про задані експертами відношення, на скільки це можливо.

Евристика Е3. Множина значень відносної важливості характеристик альтернатив, утворена на основі інтервалів значень вагових коефіцієнтів, одержаних від експертів, є нечіткою.

Введемо такі позначення відповідно для сегментів та інтервалів вагових значень коефіцієнтів:

$$P^i = \left[\min_{j=1,\dots,k} x_i^{Hj}, \max_{j=1,\dots,k} x_i^{Bj} \right], \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$P^i = \left(\min_{j=1,\dots,k} x_i^{Hj}, \max_{j=1,\dots,k} x_i^{Bj} \right), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Означення 1. Для множин P^i , $i = 1, \dots, m$ та функцій належності $\mu^i : P^i \rightarrow [0, 1]$ нечіткі множини визначаються як

$$\tilde{A}^i = \{ (x, \mu^i A(x)) \mid x \in P^i \}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Функції належності для вагових коефіцієнтів, які відображують нечітку важливість характеристик альтернатив, будемо будувати з урахуванням того, що з ними асоціюється властивість відображати міру належності вагових коефіцієнтів до деяких визначених значень, тобто властивість мати кількісно заданий рівень відносної важливості.

Для кожного вагового коефіцієнта x_i , $i = 1, \dots, m$ універсумом є інтервал $X = (0, 1)$. Функція $\mu^i(x)$, $i = 1, \dots, m$ є функцією належності, а її значення — ступенем належності значення x_i , $i = 1, \dots, m$ нечіткій множині $\tilde{A}^i \subset X$, $i = 1, \dots, m$. Носієм нечіткої множини $\tilde{A}^i$, $i = 1, \dots, m$, називається така множина, яка містить лише ті елементи множини $\tilde{A}^i$, $i = 1, \dots, m$, ступінь належності яких $\mu^i(x) > 0$, $i = 1, \dots, m$, тобто носієм нечіткої множини значень вагових коефіцієнтів x_i , $i = 1, \dots, m$ є сегменти або інтервали виду (1) чи (2).

Евристика Е4. Будемо вважати, що нечіткі множини значень вагових коефіцієнтів та відповідних функцій належності є унімодальними.

Евристика Е5. Вважатимемо, що функції належності для усіх вагових коефіцієнтів є нормальними, тобто $\mu^i(x) = 1$, $i = 1, \dots, m$.

4.1. Спосіб нашарування. Коротко розглянемо суть ідеї нашарування. Будемо умовно вважати, що кожному заданому чи обчисленому інтервалу або сегменту відповідає деяка геометрична фігура з такими ж координатами, але ця фігура має деяку товщину. При визначенні чергового інтервалу чи сегменту для кожного вагового коефіцієнта характеристик альтернатив такі фігури нашаровуються одна на одну. Але таке нашарування здійснюється особливим чином — як при грі в «Тетріс». Фрагменти інтервалів заповнюють порожнини між шарами так, що чергова утворена конфігурація шарів є цілісною, без порожнин. В результаті на основі нашарування k шарів утворюється деяка фігура, яка може бути для зручності використання апроксимована функцією належності усталеного виду — трикутною, трапецієподібною, S-подібною, Z-подібною, П-подібною, Гаусовою тощо.

5. Одержані результати дослідження.

5.1. Аналіз варіантів взаємного попарного розташування інтервалів на прямій. Розглянемо та проілюструємо можливі комбінації взаємного попарного розташування інтервалів вагових коефіцієнтів на прямій. Для реалізації підходу нашарування слід врахувати ситуації, які можуть виникнути при включенні в систему кожного чергового інтервалу.

Зрозуміло, що оскільки експерти вільні у визначенні значень відносної важливості характеристик альтернатив, то вони можуть запропонувати найрізноманітніші варіанти власних індивідуальних уявлень про нормовані вагові коефіцієнти. Для загального аналізу визначення комплексного розташування усіх індивідуальних розташувань експертних вагових інтервалів, розглянемо усі можливі варіанти взаємного попарного розташування цих інтервалів.

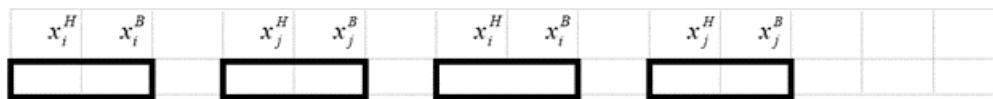


Рис. 1. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ не перетинаються, $[x_i^H, x_i^B] < [x_j^H, x_j^B]$.

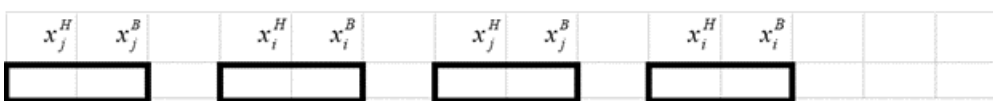


Рис. 2. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ не перетинаються, $[x_j^H, x_j^B] < [x_i^H, x_i^B]$.

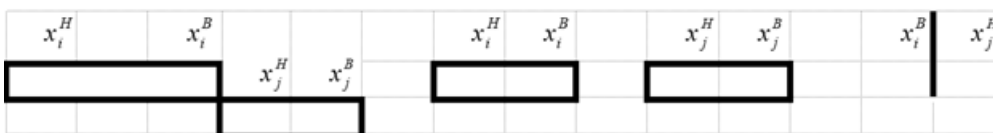


Рис. 3. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ дотичні, $x_i^B = x_j^H$.

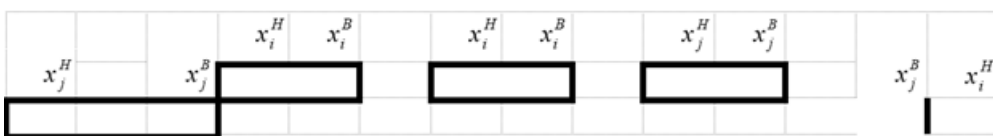


Рис. 4. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ дотичні, $x_j^B = x_i^H$.

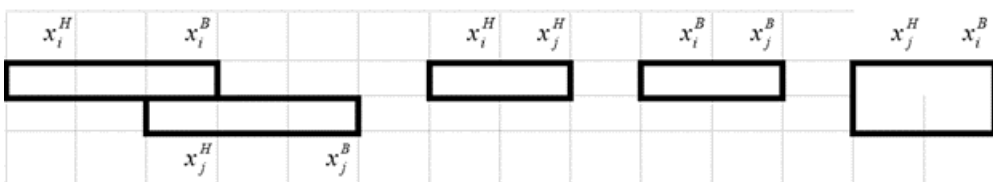


Рис. 5. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_j^H = x_i^B$.

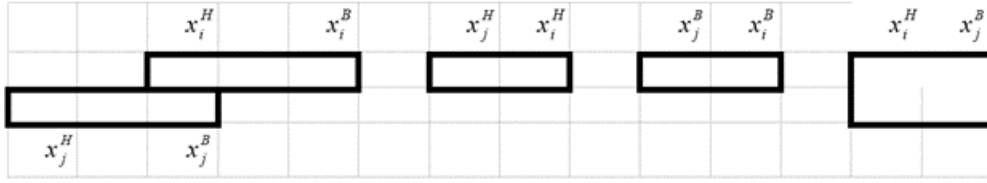


Рис. 6. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^B$.

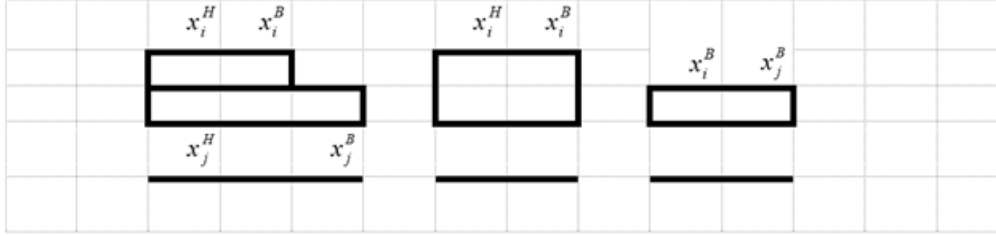


Рис. 7. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^H$, $x_i^B < x_j^B$.

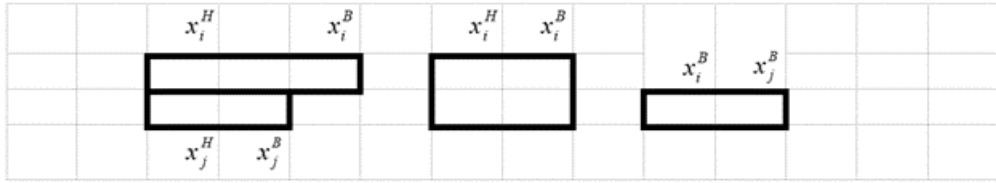


Рис. 8. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_i^H = x_j^H$, $x_j^B < x_i^B$.

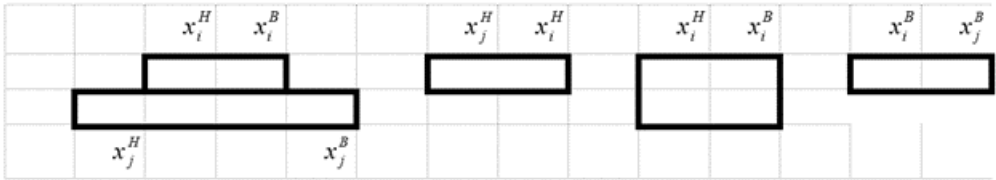


Рис. 9. Інтервал $[x_i^H, x_i^B]$ включається в інтервал $[x_j^H, x_j^B]$, $[x_i^H, x_i^B] \subset [x_j^H, x_j^B]$.

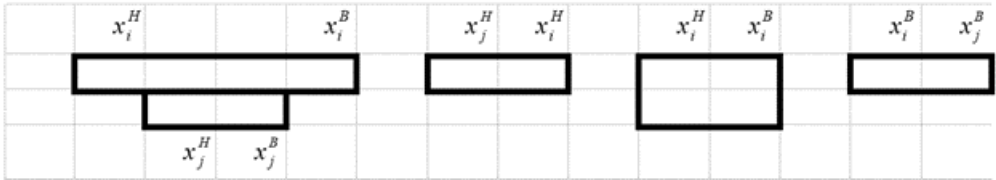
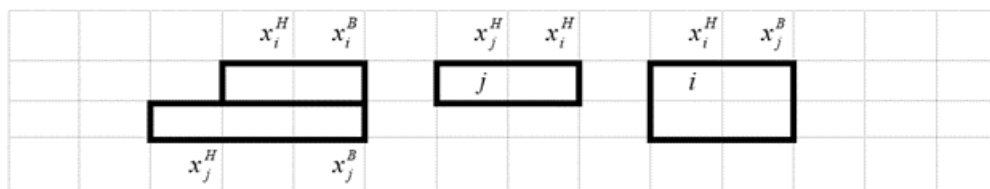
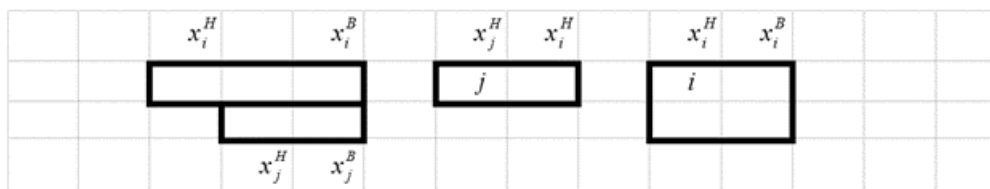
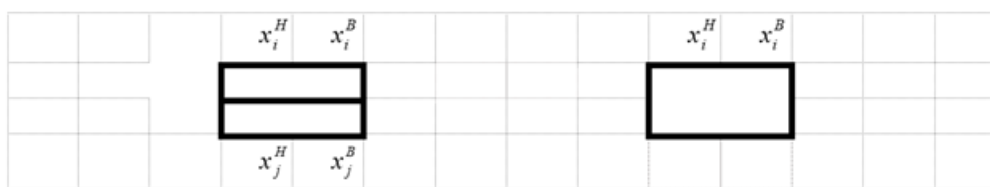


Рис. 10. Інтервал $[x_j^H, x_j^B]$ включається в інтервал $[x_i^H, x_i^B]$,
 $[x_j^H, x_j^B] \subset [x_i^H, x_i^B]$.

Рис. 11. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_j^H < x_i^H$, $x_i^B = x_j^B$.Рис. 12. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ перетинаються, $x_i^H < x_j^H$, $x_i^B = x_j^B$.Рис. 13. Інтервали $[x_i^H, x_i^B]$ та $[x_j^H, x_j^B]$ співпадають, $[x_i^H, x_i^B] = [x_j^H, x_j^B]$.
Вилучення інтервалу з індексом j .

Зведемо в таблицю 1 усі можливі варіанти взаємного розташування інтервалів і визначимо зміни у нашаруваннях залежно від попарної конфігурації інтервалів.

Таблиця 1.

Усі можливі варіанти взаємного розташування сегментів

№ рисунка	Умови	Лічильник сегментів	Нові значення границь	Нова висота
Рис. 1	$x_i^H < x_j^H$ & $x_i^B < x_j^B$	$s = s$	$[x_i^H, x_i^B], [x_j^H, x_j^B]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 2	$x_j^H < x_i^H$ & $x_j^B < x_i^B$	$s = s$	$[x_i^H, x_i^B], [x_j^H, x_j^B]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 3	$x_i^H < x_j^H$ & $x_i^B = x_j^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$[x_i^H, x_i^B], [x_j^H, x_j^B]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 4	$x_j^H < x_i^H$ & $x_j^B = x_i^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$[x_i^H, x_i^B], [x_j^H, x_j^B]$ без змін	h_i, h_j без змін
Рис. 5	$x_i^H < x_j^H$ & $x_j^H < x_i^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_j^H, x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$

			$x_i^H = x_i^H, x_i^B = x_j^H,$ $x_j^H = x_i^B, x_j^B = x_j^B$	h_i, h_j без змін
Рис. 6	$x_j^H < x_i^H \& x_i^H < x_j^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_i^H, x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_j^H = x_j^H, x_j^B = x_i^H,$ $x_i^H = x_j^B, x_i^B = x_i^B$	h_i, h_j без змін
Рис. 7	$x_i^H = x_j^H \& x_i^H < x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_i^B, x_j^B = x_j^B$	$h_j = h_j$ без змін
			$[x_i^H, x_i^B], [x_j^H, x_j^B]$ без змін	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 8	$x_i^H = x_j^H \& x_j^H < x_i^B$	$s = s$	$x_i^H = x_i^H, x_i^B = x_i^B$ без змін	$h_i = h_i + h_j$
			$x_j^H = x_j^B, x_j^B = x_i^B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 9	$x_j^H < x_i^H \& x_i^B < x_j^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_i^H, x_s^B = x_i^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_i^B = B, x_i^H = x_j^H,$ $x_i^B = x_i^H$	$h_i = h_i$ без змін
			$x_j^H = B, x_j^B = x_j^B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 10	$x_i^H < x_j^H \& x_j^B < x_i^B$	$s = s + 1$	$x_s^H = x_j^H, x_s^B = x_j^B$	$h_s = h_i + h_j$
			$x_i^B = B, x_i^H = x_i^H,$ $x_i^B = x_j^H$	$h_i = h_i$ без змін
			$x_j^H = x_j^B, x_j^B = B$	$h_j = h_j$ без змін
Рис. 11	$x_j^H < x_i^H \& x_i^B = x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_j^H, x_i^B = x_i^H$	$h_j = h_j$ без змін
			$x_i^H = x_i^H, x_i^B = x_j^B$	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 12	$x_i^H < x_j^H \& x_i^B = x_j^B$	$s = s$	$x_j^H = x_i^H, x_j^B = x_i^B$	$h_j = h_j$ без змін
			$x_i^H = x_j^H, x_i^B = x_j^B$	$h_i = h_i + h_j$
Рис. 13	$x_i^H = x_j^H \& x_i^B = x_j^B$	$s = s - 1$ вилучення сегмента з індексом j	$x_i^H = x_i^H, x_i^B = x_i^B$ без змін	$h_i = h_i + h_j$

На наступному етапі застосування методу нашарувань слід використати закономірності, представлені в Таблиці 1, для побудови єдиної цілісної фігури з заданими координатами, про яку йшлося в підпункті 4.1 при описанні ідеї способу нашарування. Розглянемо алгоритм, який реалізує такий підхід.

5.2. Алгоритм визначення кількості шарів при дослідженні взаємного розташування сегментів на прямій. Для ситуації, коли виникла необхідність аналізу взаємного розташування одночасно кількох сегментів k , можна застосувати такий алгоритм.

1. Цикл по $l = 1, \dots, t$, тобто, організація повторюваності дій для кожного окремого вагового коефіцієнта характеристик альтернатив.
2. Встановити лічильник поточної кількості сегментів $s = k$.
3. Цикл по $i = 1, \dots, k - 1$.
4. Вкладений цикл $j = i + 1, \dots, k$.

5. Визначення попарної конфігурації сегментів та побудова системи нашарування залежно від наявної інформації.
6. Завершення циклів по j та по i .
7. Вилучення сегментів з індексами, які виявлено для ситуації, відображеної на Рис. 13, та переіндексація номерів сегментів.
8. Присвоєння нового значення кількості сегментів $k = s$.
9. Упорядкування сегментів за неспаданням нижніх границь та зростанням верхніх границь.
10. Завершення циклу по l .

5.3. Обчислювальний експеримент. Для перевірки роботи описаного у цій роботі методу нашарування було проведено обчислювальний експеримент за участі експертів та менеджерів однієї з бізнесових компаній.

Множина ролей, якими для забезпечення функціональної стійкості формалізується діяльність підрозділів організаційної системи та взаємодія між елементами системи складається з ролей, які будемо позначати:

$$R = \{r_1, \dots, r_{p1}\}, \quad (3)$$

де $p1$ — кількість ролей елементів системи, які будуть використані при моделюванні забезпечення функціональної стійкості організаційної системи та визначенні рівня критичності її елементів.

Множину елементів організаційної системи позначимо через:

$$B = \{b_1, \dots, b_{p2}\}, \quad (4)$$

де $p2$ — кількість елементів організаційної системи, які забезпечують виконання множини функцій і, відповідно, забезпечують її властивість функціональної стійкості;

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{p3}\}, \quad (5)$$

де $p3$ — кількість функцій, які виконуються елементами системи з множини (5), і які слід підтримувати заради функціональної стійкості організації.

Зазначимо, що потужність множини елементів організаційної системи (4) у загальному випадку є значно більшою, ніж потужність множини ролей (3), які виконуються елементами системи для забезпечення підтримки функціональної стійкості і виконання множини функцій (5), тобто $p3 \gg p1$.

Евристика Е6. Будемо виходити з припущень, що для кожної конкретної функції виду (5), яка виконується елементами системи, можна визначити:

- ролі (3) елементів системи (4), завдяки яким виконується функція (5);
- важливість ролей (3) для кожної функції (5) у вигляді інтервалів вагових коефіцієнтів, а відтак, відносну важливість кожного елемента системи (4) для виконання кожної функції та функціональної стійкості.

Тобто, відносна важливість ролей (3) в організаційній системі не є константою, а має змінний характер, залежно від того, яка роль виконується елементами системи (4) для забезпечення функціональної стійкості.

Експерти надають свої висновки про відношення переваги між ролями у звичних для них термінах предметної області. Інтервали вагових коефіцієнтів

ролей обчислюються на основі непрямих методів визначення відносної важливості ролей [8, 9].

Евристика Е7. При визначенні вагових коефіцієнтів непрямыми методами може бути збільшена точність обчислення значень, оскільки у цьому випадку експерт надає інформацію про його переваги у звичній для нього ситуації прийняття рішень в знайомій предметній області. Такі рішення експерт або осола, що приймає рішення, приймають щодня і при цьому не прикладають зусиль для їх оцифровки. Числові значення вагових коефіцієнтів знаходяться шляхом застосування спеціально розроблених, досліджених та обґрунтованих алгоритмів.

Евристика Е8. Обмеження на ширину інтервалу не встановлюються: інтервали можуть бути як достатньо широкими, так і вироджуватися в точку. Величина визначеного інтервалу відображує не тільки компетентність експертів, але і його психологічні характеристики — схильність до ризику, темперамент тощо, особливості предметної області та деякі інші аспекти ситуації прийняття рішення.

При цьому не порушуються вимоги теорії вимірювання для типів шкал вимірювання. Водночас немає вимог щодо ранжування альтернатив, тобто інтервали можуть перетинатися, як це проілюстровано на рисунках 1–13.

Оцінювалися 4 ролі топ-менеджерів ($p_1 = 4$) компанії на основі непрямої інформації про переваги, одержаної в темінах предметної області управління персоналом від 10 експертів ($k = 10$). На основі відношень переваги, заданих 10 експертами у звичній для них предметній області, було обчислено нижні та верхні границі вагових коефіцієнтів ролей топ-менеджерів у компанії, у якій проводився консалтинг. Причому, рівень виконання ролей та їх відносної важливості є частиною загальної моделі оцінювання діяльності персоналу компанії.

Основні вимоги до інтервалів вагових коефіцієнтів альтернатив, визначених на основі експертних висновків у термінах предметної області, є природними і не обтяжливими:

- нижні границі інтервалів чи сегментів x_i^H , $i = 1, \dots, m$ мають бути в межах $0 < x_i^H \leq 1$, $i = 1, \dots, m$;
- верхні границі інтервалів чи сегментів x_i^B , $i = 1, \dots, m$ також мають бути в межах $0 < x_i^B \leq 1$, $i = 1, \dots, m$;
- верхні границі інтервалів чи сегментів x_i^B , $i = 1, \dots, m$ мають бути не меншими від нижніх границь інтервалів $0 < x_i^H \leq x_i^B \leq 1$, $i = 1, \dots, m$;
- сума верхніх границь інтервалів чи сегментів має задовольняти умові:

$$1 - \sum_{j=1}^m x_j^B < \min_{j=1, \dots, m} x_j^H;$$
- сума нижніх границь інтервалів чи сегментів має задовольняти умові:

$$1 - \sum_{j=1}^m x_j^H < \min_{j=1, \dots, m} x_j^B.$$

Причому, слід зазначити, що експертам не нав'язуються зайві обмеження — вони встановлюють свої відношення переваги на множині характеристик альтернатив у звичній для них предметній області. Методи визначення інтервалів або сегментів вагових коефіцієнтів передбачають виконання наведених вище вимог до границь зазначених інтервалів чи сегментів.

Результати визначення інтервалів вагових коефіцієнтів важливості ролей у організації на основі інформації, одержаної від експертів, представлено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Результати визначення інтервалів вагових коефіцієнтів важливості ролей у організації на основі інформації, одержаної від експертів

	Роль 1 НВ_ВВ		Роль 2 НВ_ВВ		Роль 3 НВ_ВВ		Роль 4 НВ_ВВ		СУМА НВ_ВВ	
Експерт 1	0,12	0,23	0,27	0,39	0,21	0,24	0,24	0,31	0,84	1,17
Експерт 2	0,15	0,25	0,31	0,34	0,24	0,35	0,18	0,19	0,88	1,13
Експерт 3	0,14	0,18	0,21	0,33	0,18	0,23	0,32	0,37	0,85	1,11
Експерт 4	0,11	0,16	0,33	0,33	0,15	0,25	0,24	0,27	0,83	1,01
Експерт 5	0,15	0,18	0,31	0,35	0,22	0,29	0,23	0,25	0,91	1,07
Експерт 6	0,11	0,14	0,22	0,36	0,32	0,33	0,3	0,34	0,95	1,17
Експерт 7	0,13	0,21	0,23	0,25	0,19	0,23	0,36	0,4	0,91	1,09
Експерт 8	0,17	0,17	0,26	0,3	0,25	0,26	0,2	0,29	0,88	1,02
Експерт 9	0,17	0,18	0,32	0,35	0,13	0,25	0,35	0,35	0,97	1,13
Експерт 10	0,16	0,27	0,3	0,3	0,3	0,31	0,2	0,23	0,96	1,11

У таблиці 2 в назвах стовпчиків літерами позначено:

НВ — нижні границі вагових коефіцієнтів ролей;

ВВ — верхні границі вагових коефіцієнтів ролей топ-менеджерів компанії.

5.4. Алгоритм побудови функції належності нечіткій множині на основі на основі гранулювання універсуму. Для вирішення проблеми агрегування інтервалів вагових коефіцієнтів можна також застосувати алгоритм дискретизації, який є дещо спрощеним, але менш точним від попереднього алгоритму.

1. Розбиття універсуму $X = (0, 1)$ на деяку кількість малих сегментів D , наприклад $D = 100$ або $D = 200$. Довжина кожного сегмента: $\delta = 1/D$.
2. Нумерація малих сегментів від 1 до D : $c_j = j/D$, $j = 1, \dots, D$.
3. Визначаємо мінімальні та максимальні границі значень вагових коефіцієнтів сегментів (1) чи інтервалів (2).
4. Здійснюємо трансформацію інтервалів чи сегментів в характеристичні матриці $B^l = (b_{ij}^l)$, $l = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, D$, які визначають для кожної характеристики альтернативи з індексами $l = 1, \dots, m$, чи співпадають значення вагових коефіцієнтів сегментів (1) або інтервалів (2) із значеннями малих сегментів за такими умовами:

$$b_{ij}^l = \begin{cases} 0, & \forall i = 1, \dots, k, \quad j < x_j^H \cdot \delta \vee \forall i = 1, \dots, k, \quad j > x_j^B \cdot \delta; \\ 1, & \forall i = 1, \dots, k, \quad x_j^H \cdot \delta \leq j \leq x_j^B \cdot \delta \end{cases}.$$

5. На основі визначених на кроці 4 матриць B^l , $l = 1, \dots, m$ побудуємо табличні значення функцій належності вагових коефіцієнтів і зведемо їх в таблицю 3, де

$$\mu_j^l = \sum_{i=1}^k b_{ij}^l, \quad l = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, D.$$

6. На основі аналізу табличних значень функцій належності відновлюємо початкові координати вагових коефіцієнтів за формулою $x_j = c_j \cdot \delta$ і здійснюємо апроксимацію трикутними чи трапецієподібними функціями належності в аналітичному вигляді.
7. Перетворюємо обчислені на попередньому кроці функції належності у нормальну форму.

Таблиця 3.

Табличні значення функцій належності вагових коефіцієнтів на універсумі

$$X = (0, 1)$$

c_j	1	2	$\dots$	D
$\mu_A^1(x)$	μ_1^1	μ_1^1	$\dots$	μ_D^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\mu_A^m(x)$	μ_1^m	μ_1^m	$\dots$	μ_D^m

Скориставшись наведеними у цій роботі алгоритмами, на основі таблиці 2, побудованої за результатами обчислювального експерименту, обчислимо аналітичні значення функцій належності вагових коефіцієнтів 4 ролей в організації і зведемо їх в таблицю 4.

Таблиця 4.

Числові показники агрегованих у вигляді функцій належності інтервальних значень вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив

	Нижня границя	Максимум	Верхня границя
Роль 1	0,11	0,17	0,27
Роль 2	0,21	0,33	0,39
Роль 3	0,13	0,22	0,35
Роль 4	0,18	0,24	0,40
СУМА	0,63	0,96	1,41

Таким чином, при апроксимації результатів обчислювального експеримента трикутними функціями належності одержимо такі значення вагових коефіцієнтів в аналітичному вигляді:

$$\mu^1(x_1; x_1^H; x_1^{\max}; x_1^B) = \begin{cases} 0; & x_1 \leq 0,11 \\ (x_1 - 0,11)/0,06; & 0,11 \leq x_1 \leq 0,17 \\ (0,27 - x_1)/0,1; & 0,17 \leq x_1 \leq 0,27 \\ 0; & 0,27 \leq x_1 \end{cases},$$

$$\mu^2(x_2; x_2^H; x_2^{\max}; x_2^B) = \begin{cases} 0; & x_2 \leq 0,21 \\ (x_2 - 0,21)/0,12; & 0,21 \leq x_2 \leq 0,33 \\ (0,39 - x_2)/0,06; & 0,33 \leq x_2 \leq 0,39 \\ 0; & 0,39 \leq x_2 \end{cases},$$

$$\mu^3(x_3; x_3^H; x_3^{\max}; x_3^B) = \begin{cases} 0; & x_3 \leq 0,13 \\ (x_3 - 0,22) / 0,09; & 0,13 \leq x_3 \leq 0,22 \\ (0,35 - x_3) / 0,13; & 0,22 \leq x_3 \leq 0,35 \\ 0; & 0,35 \leq x_3 \end{cases},$$

$$\mu^4(x_4; x_4^H; x_4^{\max}; x_4^B) = \begin{cases} 0; & x_4 \leq 0,18 \\ (x_4 - 0,24) / 0,06; & 0,18 \leq x_4 \leq 0,24 \\ (0,4 - x_4) / 0,06; & 0,24 \leq x_4 \leq 0,4 \\ 0; & 0,4 \leq x_4 \end{cases}.$$

Зауваження 1. Апроксимація одержаних з використанням описаного методу характеристичних матриць може здійснюватися для S-подібних, Z-подібних, Гаусових та інших функцій належності.

Зауваження 2. Якість апроксимації може визначатися не тільки за критерієм середньоквадратичних відхилень, а й з використанням інших критеріїв, які доцільно застосовувати за логікою розв'язання задачі.

Зауваження 3. Описаний спосіб визначення функцій належності нечіткій множині вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив доцільно застосовувати для узгоджених експертних оцінок при наявності великої кількості результатів вимірювання.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій роботі ми обгрунтовано агрегували великий масив інформації з незначними втратами і представили у вигляді, зручному для подальшого використання. Запропонований у цій роботі підхід до визначення нечітких вагових коефіцієнтів характеристик альтернатив має широкі перспективи. Він може бути застосований для визначення функцій належності нечіткій множині вагових коефіцієнтів не тільки атрибутів альтернатив, але й для визначення відносної важливості самих альтернатив, критеріїв або коефіцієнтів компетентності експертів у нечіткому вигляді. Для апроксимації одержаних агрегованих значень інтервалів можуть бути застосовані інші аналітичні види функцій належності нечіткій множині: трапецієподібні, S-подібні, Z-подібні, П-подібні, Гаусові тощо. Зрозуміло, що можуть бути використані комбінації цих функцій — для різних індексів вагових коефіцієнтів слід застосовувати ті види функцій, які найкращим чином апроксимують одержану в результаті обчислень агреговану множину експертних значень коефіцієнтів.

Список використаної літератури

1. Гнатієнко Г. М., Снитюк В. Є. Експертні технології прийняття рішень: Монографія. Київ : ТОВ «Маклаут», 2008. 444 с.
2. Волошин О. Ф., Лавер В. О. Нечітка математика: навч. посіб. Київ : Київськ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, 2023. 111 с. URL: https://csc.knu.ua/media/filer_public/8f/e6/8fe65834-9cf5-4fec-a8ab-953c7745734d/fuzzy_metodichka.pdf (дата звернення: 12.04.2024).
3. Kadenko S. Defining Relative Weights of Data Sources during Aggregation of Pair-wise Comparisons. In *CEUR Workshop Proceedings*. 2017. Vol. 2067. P. 47–55. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2067/paper7.pdf> (date of access: 12.04.2024).
4. Мальяр М. М. Моделі і методи багатокритеріального обмежено-раціонального вибору: Монографія. Ужгород : РА «АУТДОР-ШАРК», 2016. 222 с.
5. Гнатієнко Г. М., Мальяр М. М., Поліщук А. В. Знаходження вагових коефіцієнтів для моделей задач багатокритеріального лінійного програмування. *Обчислювальний інтелект*

- (результати, проблеми, перспективи) : праці міжнар. наук.-практ. конф. Київ-Черкаси : Київ ВПЦ «Київський університет», 16–18 травня 2017 р. С. 230–231.
6. Мавренков О., Матвійчук С. Вибір методу визначення коефіцієнтів вагомості показників технічної досконалості при оцінюванні технічного рівня зразків озброєння та військової техніки. *Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації*. 2023. Вип. 19, № 26. С. 71–79. URL: <https://znp.dndia.org.ua/index.php/znp/issue/view/3> (дата звернення: 12.04.2024).
 7. Гнатієнко Г. М. Визначення вагових коефіцієнтів критеріїв задачі багатокритеріальної оптимізації у вигляді функцій належності нечіткій множині. *Матеріали доповідей V Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та взаємодії» : (IT&I — 2018)*. Київ : Київ ВПЦ «Київський університет», 2018. С. 29–30.
 8. Гнатієнко О. Г., Гнатієнко Г. М. Метод побудови функції належності нечіткій множині на основі інтервальних значень ознак об'єктів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі* : матеріали IX Міжнародної науково-практичної конференції. М-во освіти і науки України. Київськ. нац. ун-т культури і мистецтв. Київ : Видавничий центр КНУКиМ, 2024. С. 100–102.
 9. Bozók S., and Tsyganok V. The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems*. 2019. Vol. 48, No. 3–4. P. 362–381 DOI: <https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432>
 10. Saaty T. L. Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. RWS Publications : Pittsburgh, 1988.
 11. Гнатієнко О. Г. Метод визначення відносної важливості працівників організації на основі аналізу їх ролей. *Міжнародний науковий симпозиум «Інтелектуальні рішення-С». Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи). Теорія прийняття рішень* : праці міжнар. наук. симпозиуму. Київ-Ужгород, Україна / М-во освіти і науки України, КНУ імені Тараса Шевченка та [ін.]. Київ : Видавництво «Каравела», 28 вересня 2023. С. 123–128.
 12. Hnatiienko O., Druzhynin V. A Web Application for Describing the Structure of Roles and Performers of an Organizational System to Ensure its Functional Sustainability. *Proceedings of the 1st international scientific and practical conference "Information Systems and Technology: Results and Prospects"* : (IST 2024). Kyiv: FIT TSNUK, March 6, 2024. P. 136–139.

Hnatiienko H. M., Hnatiienko O. H. Method of Determining Fuzzy Values of the Relative Importance Characteristics of Alternatives Using the Layering Method.

The study is devoted to the development of tools intended for the analysis and aggregation of interval values of the weighting coefficients of the characteristics of the alternatives. Weakly structured subject areas are characterized by uncertainty, and in specific decision-making situations, this is manifested in a blurred assessment by experts of the characteristics of alternatives in the form of interval values. The article considers some approaches to the expert assignment of interval values of the characteristics of alternatives. A method of aggregating the interval values of the weighting coefficients of the characteristics obtained from a group of experts in the form of a function of belonging to a fuzzy set is proposed. The basis of the method is the method of layering proposed by the authors. The algorithm for determining the number of layers during the study of the mutual location of intervals determined by experts on a straight line is described. The results of the experiment to identify the relative importance of the roles of managers of the organizational system to ensure its functional stability are also given.

Keywords: interval values, weighting factors, membership function, analysis of the location of intervals, relative importance of roles in the organization, functional stability.

References

1. Hnatiienko, H. M., & Snytyuk, V. Y. (2008). *Expert decision-making technologies: Monograph*. Kyiv: Maklout LLC [in Ukrainian].

2. Voloshyn, O. F., & Laver, V. O. (2023). *Fuzzy mathematics: teaching. manual*. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. Retrieved from https://csc.knu.ua/media/filer_public/8f/e6/8fe65834-9cf5-4fec-a8ab-953c7745734d/fuzzy_metodichka.pdf [in Ukrainian].
3. Kadenko, S. (2017). Defining Relative Weights of Data Sources during Aggregation of Pairwise Comparisons. In *CEUR Workshop Proceedings*, 2067, 47–55. Retrieved from <https://ceur-ws.org/Vol-2067/paper7.pdf>
4. Malyar, M. M. (2016). *Models and methods of multi-criteria bounded rational choice: Monograph*. Uzhhorod: RA "OUTDOOR-SHARK" [in Ukrainian].
5. Hnatiienko, H. M., Malyar, M. M., & Polishchuk, A. V. (May 16–18, 2017). Finding weighting coefficients for multicriteria linear programming problem models. *Computational intelligence (results, problems, prospects): Proceedings of the International science and practice conference*. Kyiv-Cherkasy: Kyiv PPC "Kyiv University" [in Ukrainian].
6. Mavrenkov, O., & Matviychuk, S. (2023). The choice of the method of determining the weighting coefficients of indicators of technical excellence when evaluating the technical level of samples of weapons and military equipment. *Collection of scientific papers of the State Aviation Research Institute*. 19(26), 71–79 [in Ukrainian].
7. Hnatiienko, H. M. (2018). Determination of the weight coefficients of the criteria of the multi-criteria optimization problem in the form of functions belonging to a fuzzy set. *Materials of reports of the 5th International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Interactions"*. (IT&I — 2018). Kyiv: Kyiv PPC "Kyiv University" [in Ukrainian].
8. Hnatiienko, H. M. (2024). Determining the weight coefficients of parameters in the form of a membership function using the layering method. *Information technologies in culture, art, education, science, economy and business: materials of the International Scientific and Practical Conference*. Ministry of Culture of Ukraine, Kyiv. National University of Culture and Arts. Kyiv: KNUKiM Publishing Center [in Ukrainian].
9. Bozóki, S., & Tsyganok, V. (2019). The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete additive (multiplicative) pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems*, 48(3–4), 362–381. <https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432>
10. Saaty, T. L. (1988). *Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process*. RWS Publications: Pittsburgh,
11. Hnatiienko, O. H. (September 28, 2023). The method of determining the relative importance of the employees of the organization based on the analysis of their roles. *International Scientific Symposium "Intelligent Solutions (s)". Computational intelligence (results, problems, prospects)*. Theory of decision-making: works of the International of science of the symposium. Kyiv-Uzhgorod, Ukraine & Ministry of Education and Science of Ukraine, Taras Shevchenko National University of Kyiv and [oth.]. Kyiv: Karavela Publishing House [in Ukrainian].
12. Hnatiienko, O., & Druzhynin, V. (March 6, 2024). A Web Application for Describing the Structure of Roles and Performers of an Organizational System to Ensure its Functional Sustainability. *Proceedings of the 1st international scientific and practical conference "Information Systems and Technology: Results and Prospects"* (IST 2024. Kyiv, Ukraine). Kyiv: FIT TSNUK.

Одержано 25.10.2024

УДК 51-7:368.025(045)

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).188-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).188-194)**Л. М. Іллічева¹, Т. В. Авдеєва², О. П. Томащук³**

¹ Національний авіаційний університет,
доцент кафедри прикладної математики
факультет комп'ютерних наук та технологій,
кандидат фізико-математичних наук
m_ilicheva@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-5209-6823>

² Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,
старший викладач кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь
avdeeva.tetyana@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7775-8512>

³ Національний авіаційний університет,
доцент кафедри прикладної математики
факультет комп'ютерних наук та технологій,
кандидат педагогічних наук
o_tomaschuk@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5631-3418>

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ ПОЗОВІВ, ЩО ФОРМУЮТЬСЯ ЗА СХЕМАМИ ЛАНЦЮГОВОЇ РЕАКЦІЇ ТА ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ

Сумарна величина клієнтських позовів за певний проміжок часу важлива для правильного менеджменту страхової компанії. У роботі розглядається випадок, коли кількість позовів наростатиме згідно із ланцюговою реакцією або у відповідності до гіллястого процесу. Таке збільшення кількості позовів, зазвичай, пов'язано із випадками стихійного лиха (буревіями, великими повеннями) або воєнними діями. Якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p , то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$. Якщо позови формуються за схемою гіллястого процесу, наведена формула для Ex^{Z_n} , де Z_n — очікувана кількість позовів на n -му етапі.

Ключові слова: випадкова величина, що не залежить від майбутнього, ланцюгова реакція, гіллястий процес, моделювання кількості позовів, середня величина кількості позовів.

1. Вступ. Для страхової компанії ключовим поняттям слугує тарифна ставка, тобто адекватне грошове вираження зобов'язань страховика за укладеним договором страхування. Тарифна ставка, по якій укладається договір страхування, називається брутто-ставкою. В свою чергу, вона складається з нетто-ставки і навантаження. Саме нетто-ставка виражає ціну страхового ризику. Вона повинна бути побудована так, щоб забезпечити еквівалентність відносин між страховиком і страхувальником [7]. Сумарна величина клієнтських позовів за певний проміжок часу важлива для правильного менеджменту страхової компанії. Іншими словами, страхова компанія повинна зібрати стільки страхових премій, скільки має бути потім виплачено страхувальникам. Нехай випадкова величина S означає сумарні виплати, тобто сумарну величину позовів, що належать до даного ризику. Нехай випадкова величина Y_i — позначає величину i -го позову, а випадкова величина N — кількість позовів протягом періоду страхування.

Тоді $S = \sum_1^N Y_i$, де суму вважають рівною 0, коли $N = 0$. Фактори, які впливають на величини позовів та на їх кількість, можуть бути різними.

Вводять такі припущення:

- Кількість позовів не впливає на величини індивідуальних позовів.
- На величину окремого позову не впливають величини інших позовів.
- Розподіл величини індивідуальних позовів не змінюється протягом терміну дії полісу.

У більш строгому математичному сенсі припускаємо, що:

- Випадкові величини $\{Y_i\}_{i=1}^N$ є незалежними й однаково розподіленими.
- Випадкова величина N не залежить від $\{Y_i\}_{i=1}^N$.

У роботах [1, 3] розглядаються оцінки величин сумарних позовів, коли N має розподіл Пуассона з параметром $\lambda > 0$, ($N \sim Pois(\lambda)$), тоді S має складний розподіл Пуассона з параметрами λ і $F(x)$ ($F(x)$ — функція розподілу величини позову Y_i). Якщо N розподілено за біноміальним законом з параметрами n і q ($N \sim b(n, q)$), S має складний біноміальний розподіл. Коли N має від'ємний біноміальний розподіл ($N \sim NB(k, p)$), S — має складний від'ємний біноміальний розподіл. Якщо відбулася страхова подія, власник страхового полісу (або уповноважена ним особа) звертається до страхової компанії з позовом (вимогою) про відшкодування збитків. У деяких випадках, наприклад, при страхуванні життя, один поліс може привести до одного позову, а в інших (наприклад, при страхуванні автотранспорту) — протягом дії договору може виникнути кілька позовів. [6]. У роботі [5] використовуються статистичні методи оцінювання величин збитків в залежності від видів ризиків. У роботі [2] представлені приклади стохастичних моделей прийняття рішень в умовах ризику і особлива увага приділяється «портфельному» підходу в теорії грошей. Але даний розгляд не враховує специфіку страхової діяльності.

Іноді у роботах приділяють увагу екстремальним випадкам при формуванні клієнтських позовів. Так, у розділі 3.6.3 [6] розглядається зміна кількості позовів при страхуванні домашнього майна за припущенням, що кількість буревіїв, які їх спричиняють, має розподіл Пуассона із визначеним параметром. При цьому кількість позовів, викликаних окремим буревієм, у свою чергу, теж має розподіл Пуассона із наперед відомим параметром.

2. Постановка завдання. Оцінити середню кількість позовів, якщо вони виникають за схемою ланцюгової реакції або гіллястого процесу. Таке збільшення кількості позовів, зазвичай, пов'язано із випадками стихійного лиха (буревіями, великими повеннями) або воєнними діями, які, на жаль, теж можуть трапитися.

3. Огляд літератури. При формуванні страхової політики особливу увагу привертає мінливість фінансового стану домогосподарства внаслідок різних життєвих негараздів. Виконуються статистичні дослідження, що дозволяють визначити зміни у демографічному, гендерному складі; моделюються різні ситуації, проводяться ймовірнісні підрахунки для окреслення ситуацій, коли члени домогосподарств потребуватимуть допомоги. Для підкріплення фінансового стану домогосподарств пропонуються додаткові страхові продукти для проміжного страхування (bridging insurance) [8]. Оскільки фінансові труднощі домогосподарства доволі часто пов'язані одне з одним, при формуванні таких продуктів слід враховувати характер цього зв'язку.

Загальновідомо, що у розвинутих суспільствах спостерігається підвищення попиту на медичні послуги. Цей процес обумовлений не тільки феноменом «старіння» населення, але й значним технологічним прогресом у царині медицини. Як наслідок, підвищуються соціальні витрати на охорону здоров'я, які вже неможливо задовольнити без додаткової платні з боку пацієнта. Один з підходів полягає у розвитку приватного медичного страхування, особливо, для підтримки літніх пацієнтів з хронічними хворобами. Розглядаються перспективи розвитку страхових продуктів медичної спрямованості, призначених саме для таких категорій клієнтів [9, 10].

У статті [11] для опису подібних ситуацій вводиться множинна марківська модель станів, яка дозволяє класифікувати різні життєві випадки. Такий підхід доповнює вже доволі розповсюджений механізм прижиттєвих анuitетів, який широко застосовується на практиці. При оцінці перспектив застосування цього підходу слід враховувати ланцюговий або гіллястий характер наростання позовів з боку клієнта.

4. Основний результат. У даній роботі розглядається випадок, коли кількість позовів N наростатиме згідно із ланцюговою реакцією або у відповідності до гіллястого процесу. Нехай на ймовірнісному просторі $\langle \Omega, F, P \rangle$ задана послідовність $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots\}$ незалежних випадкових величин і цілочислова випадкова величина $\mu \geq 0$. Нехай $F_{k,n} = \sigma \{\xi_k, \dots, \xi_n\}$ позначає σ -алгебру, яка породжується $n - k + 1$ випадковими величинами $\xi_k, \dots, \xi_n$ [2].

Кажуть, що випадкова величина μ не залежить від майбутнього, якщо подія $\{\mu \leq n\}$ не залежить від $F_{k,\infty}$.

Довільна випадкова величина μ , яка не залежить від послідовності $\xi_1, \xi_2, \dots$ (не залежать $\sigma(\mu)$ та $F_{1,\infty}$), буде випадковою величиною, яка не залежить від майбутнього.

Введемо поняття суми випадкового числа випадкових величин [4]:

$$S_\mu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\mu.$$

Стосовно математичного сподівання суми випадкового числа випадкових величин відома тотожність Вальда [1]: Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots$ незалежні і однаково розподілені, $E|\xi_k| < \infty$, випадкова величина μ не залежить від майбутнього, $E\mu < \infty$, то $ES_\mu = E\xi_1 \cdot E\mu$.

Тобто, якщо ввести обмеження на кількість позовів за допомогою випадкової величини μ , можна обчислити середнє значення сумарного позову як добуток середнього значення одного позову та середнього значення цієї випадкової величини [3, 6].

Розглянемо детально характеристики для кількості позовів. Вважається, що позови виникають згідно з моделлю, яка описує появу подій протягом певного проміжку часу. Для моделювання кількості позовів застосуємо схему ланцюгової реакції [1].

Якщо припустити, що величини збитків мають вигляд послідовності випадкових величин $\{Y_j, j = 1, 2, \dots\}$, причому μ — номер першої випадкової величини у послідовності, котра більше, або дорівнює N , тобто,

$$\mu = \inf \{k : Y_k \geq N\}.$$

Тоді, якщо Y_j — незалежні випадкові величини, то μ не залежить від майбутнього, оскільки подія

$$\{\mu \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{Y_k \geq N\} \in F_{1,n}.$$

Значення N можна трактувати як порогове значення для величини фінансового збитку, починаючи з якого страхова компанія розглядає можливість відшкодування.

Спочатку маємо один позов, котрий або задовольняється з ймовірністю q , або на його основі формується m позовів з ймовірністю $p = 1 - q$. Кожний позов нового покоління поводить себе аналогічно. Оцінимо математичне сподівання кількості позовів у n -му поколінні.

Розглянемо оцінку середньої кількості позовів за схемою ланцюгової реакції. Введемо подвійну послідовність

$$\{X_k^{(n)}\}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots;$$

незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають значення m та 0 із ймовірностями p та q , причому $p = 1 - q$. Тоді елементи послідовностей

$$\{X_k^{(1)}\}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \{X_k^{(2)}\}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \dots;$$

де змінюється верхній індекс — будуть незалежними між собою. Якщо ввести нову послідовність випадкових величин $\{Z_n\}$, ($Z_0 = 1$) як суму елементів відповідних послідовностей, одержимо:

$$\begin{aligned} Z_1 &= X_{Z_0}^{(1)} = X_1^{(1)}, \\ Z_2 &= X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + \dots + X_{Z_1}^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_{Z_{n-1}}^{(n)}. \end{aligned}$$

Оскільки послідовність $\{X_k^{(n)}\}$ не залежить від Z_{n-1} та

$$EX_k^{(n)} = pm, \quad k = 1, 2, \dots,$$

за тотожністю Вальда одержимо:

$$EZ_n = EX_1^{(n)} \cdot EZ_{n-1} = pm \cdot EZ_{n-1} = (pm)^n.$$

Подібний розгляд дозволяє оцінювати середню кількість позовів на кожному етапі, якщо позови формуються згідно з наданою моделлю.

При оцінці дисперсії одержимо:

$$V[X_k^{(n)}] = E[X_k^{(n)} - EX_k^{(n)}]^2 = E[X_k^{(n)} - pm]^2 =$$

$$= (m - pm)^2 p + (0 - pm)^2 q = m^2 qp (q - p),$$

звідки

$$E \left[X_k^{(n)} \right]^2 = V \left[X_k^{(n)} \right] + (pm)^2 = m^2 p (q^2 + p^2). \quad (1)$$

Отже, якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p , то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$.

Тепер розглянемо більш складний випадок, коли позови формуються за схемою гіллястого процесу. Тобто, позови формуються не із сталою ймовірністю, а з ймовірностями $\{f_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $\sum_0^\infty f_k = 1$. Спочатку маємо один позов, на основі якого формується наступна k кількість позовів. Ці позови формують «перше покоління». Кожний позов із цього «покоління» поводить себе аналогічно [1].

Для опису усього процесу введемо незалежні між собою послідовності незалежних однаково розподілених величин

$$\{X_k^{(1)}\}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \{X_k^{(2)}\}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \dots;$$

де $\{X_k^{(n)}\}$ мають розподіл: $P(X_k^{(n)} = j) = f_j, j = 0, 1, 2, \dots$

Послідовність Z_n матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1, \\ Z_1 &= X_1^{(1)}, \\ Z_2 &= X_1^{(2)} + X_2^{(2)} + \dots + X_{Z_1}^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_{Z_{n-1}}^{(n)}. \end{aligned}$$

Розглядаючи суму випадкового числа випадкових величин, у якій $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots$ не залежать від Z_{n-1} , за формулою повної ймовірності можна одержати для функції: $f_{(n)}(x) = Ex^{Z_n}$ такий вираз:

$$\begin{aligned} f_{(n)}(x) &= Ex^{Z_n} = \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = j) \cdot Ex^{X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \dots + X_j^{(n)}} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P(Z_{n-1} = j) \cdot f^j(x) = f_{(n-1)}(f(x)), \end{aligned}$$

де $f(x) = f_{(1)}(x) = Ex^{X_1^{(1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$. Позначимо ітерації функції $\varphi(x)$, таким чином: $\varphi_1(x) = \varphi(x)$; $\varphi_2(x) = \varphi(\varphi(x))$; $\dots$

Якщо таким же чином ввести ітерації функції $f(x)$, за допомогою індукції одержують:

$$Ex^{Z_n} = f_n(x). \quad (2)$$

Таким чином, якщо у початковий момент маємо один позов, який із ймовірністю $\{f_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $\sum_1^\infty f_k = 1$ — переходить у k позовів того ж типу, причому

цей процес може продовжуватися, тоді стосовно функції Ex^{Z_n} , де Z_n — очікувана кількість позовів на n -му етапі, справедливе одержане вище співвідношення (1) або (2), в залежності від ситуації.

Відомо [1], що в середньому один позов призводить тільки до ще одного позову, тобто середня величина кількості позовів на кожному етапі дорівнює 1, можна визначити ймовірність припинення цього процесу на кроці n . Тобто, мають місце такі оцінки: якщо

$$f'(1) = 1, \quad 0 < b \equiv f''(1) < \infty, \quad \text{то}$$

- ймовірність завершення процесу (виродження) на кроці n дорівнює $\frac{2}{bn^2}$;
- ймовірність продовження процесу формування позовів приблизно дорівнює $\frac{2}{nb}$.

5. Висновки і перспективи подальших досліджень. Якщо позови формуються за схемою ланцюгової реакції, тобто кожний позов може бути задоволений із ймовірністю q або перетворитися у m аналогічних позовів з ймовірністю p , то на n етапі середня кількість позовів дорівнюватиме $(pm)^n$. Якщо у початковий момент маємо один позов, який із ймовірністю $\{f_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, $\sum_1^\infty f_k = 1$ — переходить у k позовів того ж типу, причому цей процес може продовжуватися, тоді стосовно закономірності для кількості позовів на n -му етапі — а саме, для випадкової величині Z_n — справедливе співвідношення:

$$Ex^{Z_n} = f(f(\dots f(x)\dots)),$$

де у правій частині n разів застосовується функція $f(x) = \sum_{j=0}^\infty f_j x^j$.

У подальшому можна досліджувати розподіл кількості позовів при інших обмеженнях на закони їх розподілів.

Список використаної літератури

1. Бондаренко Я. С. Теорія ризику в страхуванні. Основні поняття, приклади, задачі [Текст] : навч. посіб. / Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин. Дніпропетровськ : РВВ ДНУ, 2010. 180 с.
2. Ястремський О. І. Моделювання економічного ризику. Київ : Либідь, 1992. 176 с.
3. Bowers N. L., Gerber H. U., Hickman J. C., Jones D. A., Nesbitt C. J. Actuarial Mathematics 2nd Edition. The Society of Actuaries, 1997. 753 p.
4. Бабак В. П., Білецький А. Я., Приставка О. П., Приставка П. О. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики : Навч. посібник / МОН України. Київ : КВІЦ, 2003. 432 с.
5. Thomas M. Schadenversicherungsmathematik. Deutsche Gesellschaft fur Versicherungsmathematik, Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe. 2002. 416 s.
6. Зинченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику : навч. посібн. / Київ : Видавн.-полігр. центр «Київський університет», 2008. 224 с.
7. Ковтун І. О., Денисенко М. П., Кабанов В. Г. Основи актуарних розрахунків : Навч. посібник / Київ : «ВД Професіонал», 2008. 480 с.
8. Jedrzychowska A. Bridge Life Insurance for Households—Diagnosis and Motives. *Risks*. 2022. Vol. 10, No. 4. P. 113–133. DOI: <https://doi.org/10.3390/risks10040081>
9. Paolucci F., Przemyslaw M., Sowa M. and Henry E. Mandatory Aged Care Insurance: A Case for Australia. *Ageing & Society*. 2015. Vol. 35, No. 2. P. 231–245.
10. Pitacco E. Health Insurance. Basic Actuarial Models. Berlin-Heidelberg : Springer, 2014. 172 p.
11. Marciniuk A. and Zmysłona B. Marriage and Individual Equity Release Contracts with Dread Disease Insurance as a Tool for Managing the Pensioners' Budget. *Risks*. 2022. Vol. 10, No. 7. P. 113–133. DOI: <https://doi.org/10.3390/risks10070140>

Illicheva L. M., Avdieieva T. V., Tomaschuk O. P. Estimation of the number of lawsuits formed according to the scheme of chain reaction and branching process.

The total value of client claims for a certain period of time is important for the correct management of an insurance company. The paper considers the case when the number of lawsuits will increase according to a chain reaction or in accordance with a branching process. Such an increase in the number of claims is usually associated with cases of natural disaster (storms, major floods) or military operations. If claims are formed according to the scheme of a chain process, that is, each claim can be satisfied with probability q or turn into m similar claims with probability p , then at stage n the average number of claims will be equal to $(pm)^n$. If claims are formed according to the scheme of a branching process, the formula for Ex^{Z_n} is given, where Z_n is the expected number of claims at the n -th stage.

Keywords: random variable that does not depend on the future, chain process, branching process, modeling the number of lawsuits, average number of lawsuits.

References

1. Bondarenko, Ya. S., Turchyn, V. M., & Turchyn, E. V. (2010). *Theory of risk in insurance. Basic concepts, examples, problems [Text]*. Dnipropetrovsk: RVV DNU, 2010 [in Ukrainian].
2. Yastremsky, O. I. (1992). *Modeling of economic risk*. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
3. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. *Actuarial Mathematics 2nd Edition*. The Society of Actuaries, 1997.
4. Babak, V. P., Biletskyi, A. Ya., Prystavka, O. P., & Prystavka, P. O. (2003). *Basics of probability theory and mathematical statistics: Education manual*. Kyiv: KVITS [in Ukrainian].
5. Thomas, M. (2002). Schadenversicherungsmathematik. *Deutsche Gesellschaft für Versicherungsmathematik. Schriftreihe Angewandte Versicherungsmathematik*. Verlag Versicherungswirtschaft: Karlsruhe [in German].
6. Zinchenko, N. M. (2008). *Mathematical methods in the theory of risk: Education manual*. Kyiv: Kyiv University [in Ukrainian].
7. Kovtun, I. O., Denysenko, M. P., & Kabanov, V. G. (2008). *Basics of actuarial calculations*. Education manual. Kyiv: VD Professional [in Ukrainian].
8. Jedrzychowska, A. (2022). Bridge Life Insurance for Households—Diagnosis and Motives. *Risks*, 10(4), 113–133. <https://doi.org/10.3390/risks10040081>
9. Paolucci, F., Przemyslaw, M., Sowa, M., & Henry, E. (2015). Mandatory Aged Care Insurance: A Case for Australia. *Ageing & Society*, 2015. 35(2), 231–245.
10. Pitacco, E. (2014). *Health Insurance. Basic Actuarial Models*. Berlin-Heidelberg: Springer.
11. Marciniuk, A., & Zmysłona, B. (2022). Marriage and Individual Equity Release Contracts with Dread Disease Insurance as a Tool for Managing the Pensioners' Budget. *Risks*, 10(7), 113–133. <https://doi.org/10.3390/risks10070140>

Одержано 03.09.2024

УДК 004.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).195-204](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).195-204)**Н. В. Ічанська¹, М. В. Лисенко², В. В. Пікалова³**

¹ Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
itm.ichanska@nupp.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5963-9288>

² Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
доцент кафедри комп'ютерних технологій та інформаційних систем,
кандидат фізико-математичних наук
lysenkop1@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0995-2991>

³ Національний університет «Полтавська політехніка ім. Юрія Кондратюка»,
студентка 201 ФД
lerapikalova4@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0494-4801>

РОЗВИТОК ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В БІБЛІОТЕЧНІЙ СПРАВІ

Стаття розглядає роль штучного інтелекту (ШІ) в сучасній бібліотечній справі. У роботі досліджено можливості застосування ШІ для покращення обслуговування користувачів, оптимізації робочих процесів та розвитку цифрових бібліотечних сервісів. Автори досліджують різні аспекти, включаючи покращений пошук інформації, який дозволяє користувачам швидко та ефективно знаходити релевантну літературу. У статті звертається увага на персоналізовані рекомендації, які надають користувачам індивідуально налаштовані рекомендації щодо літератури та джерел інформації. Автоматизація процесів каталогізації та управління колекціями спрощує роботу бібліотекарів та дозволяє бібліотекам ефективно управляти своїми ресурсами. Взаємодія з користувачами через чат-ботів та віртуальних асистентів стає більш інтерактивною та зручною. Розвиток цифрових архівів та електронних ресурсів робить доступ до інформації більш швидким та зручним для користувачів. Для управління мережею бібліотек на рівні країни або регіонів ефективним є застосування нейромережевих технологій.

У роботі автори використали ці технології для прогнозування кількості відвідувань бібліотек та звернень до їхніх web-сайтів (на прикладі Полтавської області). Результати дослідження можуть бути використані фахівцями у сфері бібліотечної справи з метою покращення обслуговування читачів і подальшого вдосконалення сучасних бібліотечних сервісів.

Ключові слова: штучний інтелект, бібліотеки, пошукові системи, чат-боти, віртуальні асистенти, нейромережеві технології.

1. Вступ. На сьогодні передача інформації здійснюється за допомогою різних методів, форм й інструментів. Зважаючи на свою ключову роль у збереженні інформації, цифровізація бібліотек є необхідною вимогою сучасності. Поряд із цифровими сервісами для підвищення ефективності роботи бібліотек ефективним є використання технологій штучного інтелекту: виявлення інформації за допомогою голосової ідентифікації та ідентифікації зображень, каталогізація документів, підготовка колекції, технічні служби, довідкові служби, запити, предметний показчик, ідентифікаційні інформаційні потреби користувачів.

Історія штучного інтелекту починається з 1950-х років, його концепції широко розроблялися ентузіастами того часу. Одним із них був видатний британський дослідник Алан Тюрінг, який досліджував математичні можливості штучного інтелекту. Саме він висловив думку, що машини можуть мати здатність вирішувати завдання та приймати рішення, як люди. Ця ідея лягла в основу його статті «Обчислювальна техніка та інтелект» (1950), де розглянуто можливість створення інтелектуальних машин і методи перевірки їх інтелектуальних здібностей [9].

Стаття Тюрінга стала початком багатьох інших досліджень і сприяла розвитку штучного інтелекту. Його внесок є фундаментальним для подальшого розуміння та розвитку штучного інтелекту, а ідеї Тюрінга й зараз продовжують надихати багатьох вчених.

Дослідження Алана Тюрінга продовжують розвиватися. Важливий крок до розвитку та застосування ідей Тюрінга зробили:

- Джон Маккарті (1927–2011). Він був одним із піонерів штучного інтелекту та ввів термін «штучний інтелект». Маккарті працював над розробкою програм, які відображали психологічні процеси.
- Марвін Мінскі (1927–2016). Він зробив значний внесок у сферу штучного інтелекту, зосередившись на проблемі відтворення людського мислення та інтелекту за допомогою комп'ютерів.
- Джеффри Хінтон (1947). Він найбільш відомий своїми дослідженнями глибокого навчання та нейронних мереж, які стали ключовими поняттями в сучасних дослідженнях штучного інтелекту.
- Річард Саттон (1938–2009) та Ендрю Барто (1948). Їхні дослідження навчання з підкріпленням зробили значний внесок у розвиток автономних систем і штучного інтелекту.

Ці вчені та багато інших дослідників продовжують вивчати та розвивати штучний інтелект.

Однією з перших спроб створити комп'ютерну програму, що розв'язує логічні задачі та моделює людську розумові процеси є програма "The Logic Theorist". Її було профінансовано й представлено на Дартмутському семінарі (DSRPAI) Джоном Маккарті та Марвіном Мінскі в 1956 році. На цій семінар-конференції Маккарті представив для відкритого обговорення концепцію штучного інтелекту та саме там ним було введено термін "штучний інтелект" [9].

Введення терміну «штучний інтелект» відобразило стрімке розширення та спеціалізацію в галузі. Цей термін допоміг уникнути плутанини з кібернетикою та уточнив напрямок досліджень. Він відобразив амбіційну мету створення програм та систем, які здатні досягати інтелектуальних результатів, що раніше були характерні лише для людини. Широке використання терміну «штучний інтелект» в наш час стало показником значного прогресу в цій області та важливим аспектом технологічного розвитку [9].

Зауважимо, що в основному ШІ користуються люди від 18 до 39 років і переважно — в ознайомчих чи приватних цілях, тобто ставляться до нього, як до розваги [11]. У 2023 році дослідниками було проведено опитування про обізнаність і використання штучного інтелекту. За його результатами лише 42% опитуваних «приблизно уявляє», що таке штучний інтелект, ще 33,9% взагалі не знають, що це. І лише 24% респондентів упевнені, що добре розуміють цю

технологію. Лише 8,6% відповіли, що використовують чат-бот GPT в роботі, при цьому 64% не користуються ним, а майже 9% узагалі не знають, що це [1].

2. Постановка задачі. Сучасний світ неможливо уявити без комп'ютерів, гаджетів та штучного інтелекту (ШІ). Комп'ютери та гаджети стали необхідними для практично кожного аспекту життя, починаючи від роботи й навчання до спілкування та розваг. Вони дозволяють швидко і ефективно виконувати завдання, отримувати доступ до інформації та спілкуватися з іншими, навіть, на великій відстані.

Штучний інтелект відіграє важливу роль у розвитку сучасних технологій. Він дозволяє розв'язувати складні завдання, аналізувати великі обсяги даних, робити прогнози та приймати рішення на основі цих даних.

Ці технології стимулюють інновації у всіх галузях, від медицини та науки до бізнесу та розваг. Для установ, які працюють із величезними потоками інформації ШІ буквально стає порятунком: допомагає виконувати рутинні операції, обробляючи дані, надаючи аналітику. Вони допомагають автоматизувати процеси, підвищувати продуктивність й ефективність роботи.

Комп'ютери, гаджети та ШІ зробили багато аспектів життя зручнішими та доступнішими для людей з усього світу. Вони дозволяють отримувати інформацію та послуги швидко і легко, забезпечуючи нові можливості для розвитку й розваг.

Мета статті — показати можливості застосування ШІ в бібліотечній справі з метою оптимізації роботи бібліотек.

3. Основний результат. ШІ використовується в багатьох суспільного життя, зокрема:

- **Охорона здоров'я.** Діагностика захворювань, розробка нових ліків, персоналізація лікування. Штучний інтелект здатний оцінити, наскільки добре адміністратор клініки спілкується з пацієнтами телефоном, чи дотримується правил. ШІ навіть може поставити оцінку роботі працівника. Все це відбувається практично миттєво — на відміну від ситуації, коли аудіо розмов прослуховує людина, витрачаючи на кожний діалог по декілька хвилин [8].
- **Виробництво.** Оптимізація виробничих процесів, контроль якості, прогнозування поломок. Інтеграція ШІ у виробництво дозволяє мінімізувати кількість браку та визначити фактори виникнення дефектів. Забезпечення точного й повністю автоматизованого контролю за якістю продуктів, які виходять з виробничої лінії [13].
- **Транспорт.** Розробка безпілотних автомобілів, оптимізація маршрутів, управління трафіком. Безпілотні автомобілі, також відомі як автономні автомобілі, оснащені безліччю датчиків, камер і алгоритмів штучного інтелекту, які дозволяють їм інтерпретувати навколишнє середовище та самостійно керувати автомобілем, продуктивно змінюють міську мобільність та особистий транспорт. Системи штучного інтелекту аналізують схеми транспортних потоків, щоб прогнозувати затори та керувати ними. Розуміючи, як трафік переміщується через мережу, ці системи ефективно впроваджують заходи для зменшення заторів, перш ніж це стане проблематичним [12].
- **Освіта.** Персоналізація навчання, оцінка успішності, створення інтерактивних курсів, розробка алгоритмів, аналіз даних, пошук інформації, автома-

тизація завдань [3–5].

- **Економіка.** Застосування математичних методів та ШІ у бізнесі залишається одним з трендів на світовому ринку і викликає інтерес у багатьох науковців [16]. Сучасні підприємства активно впроваджують та використовують технології штучного інтелекту в різних сегментах діяльності, розглядаючи їх як конкурентну перевагу та можливість для розвитку бізнесу та освоєння нових методів діяльності. Штучний інтелект дозволяє компаніям оптимізувати бізнес-процеси, знижувати витрати та покращувати якість продукції й послуг. Зараз ШІ використовують в маркетингу та рекламі, у кадровому менеджменті, логістиці, виробництві. Наприклад, компанія Amazon інтегрувала ШІ для прогнозування попиту та оптимізації запасів на складах. Це дозволило зменшити час доставки товарів до клієнтів та мінімізувати витрати на зберігання [13].

ШІ використовується в бібліотечній справі для вирішення різноманітних завдань з метою оптимізації роботи сучасної бібліотеки та спрощення доступу до інформації для користувачів.

Наведемо кілька способів використання ШІ у бібліотеках:

1. *Розширені можливості пошуку та організації інформації.* ШІ може створювати продуктивніші та ефективніші системи пошуку, які дозволяють користувачам швидко знаходити релевантну інформацію серед великих обсягів даних. Це може включати пошук за ключовими словами, категоризацію, фільтрацію та сортування матеріалів.
2. *Аналіз змісту інформації.* Аналіз текстового змісту книги, статті та інших джерел інформації, виявляти ключові теми, терміни та зв'язки між різними документами, що допомагає конкретизувати результати пошуку та робить його більш точним.
3. *Персоналізовані рекомендації.* Використання алгоритму машинного навчання для аналізу читацьких вподобань та інтересів, щоб надавати користувачам індивідуально налаштовані рекомендації щодо літератури та джерел інформації.
4. *Автоматизований облік та управління колекціями.* Ведення обліку та управління бібліотечними колекціями, знаходити дублікати, відстежувати заповнення та повернення книг, а також оптимізувати процеси закупівель нових матеріалів.
5. *Взаємодія з користувачами через чат-боти та віртуальних асистентів.* Створення інтерактивних чат-ботів та віртуальних асистентів, які надають користувачам швидкий доступ до інформації, відповідають на запитання та надають допомогу у реальному часі.
6. *Розвиток цифрових архівів та електронних ресурсів:* ШІ допомагає розвивати цифрові архіви, електронні бази даних та інші електронні ресурси, забезпечуючи доступ до них в будь-який час та з будь-якого пристрою.

Яскравим прикладом застосування штучного інтелекту є розробка комп'ютерної програми для архівів студентами Львівської політехніки [6]. Цю розробку впроваджено в Державному архіві Львівської області, де система штучного інтелекту допомагає працівникам архіву швидко знаходити та виправляти помилки в номенклатурі документів, аналізує текст документів, які надходять до архіву, та підкреслює ті частини, які ймовірно містять

помилки. Це дозволяє працівникам архіву зробити опис документів більш чітким та достовірним [6].

7. *Візуалізація творів з метою популяризації літературної та мистецької спадщини.* Так, за допомогою штучного інтелекту фахівці Національної бібліотеки «оживили» збірку поезій «Тече вода з-під явора» 1939 року видання з ілюстраціями української художниці Любові Джолос [12].
8. *Інтерактивність.* Бібліотека має бути адаптована до сучасних проблем користувача і особливо її виставкова складова. Сучасна книжкова виставка повинна бути яскравою і привабливою, мати цікаву тему та форму, бути структурованою, оригінальною та стильною, доповнену атрибутикою, мати інтерактивний елемент. Наприклад, яскравим прикладом застосування цього є Китайська бібліотека Changning Library. Людський аватар, оснащений алгоритмом рекомендацій, сканує читацькі квитки або обличчя людей, щоб дізнатися їхні читацькі історії та запропонувати відповідні книги. Потім роботи доставляють ці книги відвідувачам. Бібліотека впровадила ці функції штучного інтелекту восени 2022 року [17].

Впровадження в бібліотеках інноваційних технологій ChatGPT 3.5, Gemini, Bing Chat та Grok дасть можливість підвищити ефективність маркетингової діяльності, в автоматичному режимі аналізувати вподобання читачів, вести облік прочитаних ними книг та формувати на цій основі відповідні рекомендації. Використання нейронних мереж сприятиме полегшенню роботи бібліотекарів та підвищенню якості обслуговування користувачів [7].

Програми та технології штучного інтелекту дають можливість створення в бібліотеках нових сервісів для пошуку літератури, організації каталогів, підбору літератури бажаної тематики тощо. На основі штучного інтелекту можливо створення автоматичних програмних агентів для виконання деяких завдань працівників [10].

Інтеграція систем та елементів штучного інтелекту в діяльність бібліотек сприяє підвищенню доступності інформації, розвитку самоосвіти, цифровізації бібліотечної справи, підвищує роль даної галузі в розвитку суспільства [15].

Важливим напрямом в управлінні мережею бібліотек є планування та реалізація заходів щодо поліпшення обслуговування читачів. Критерієм ефективності таких заходів є річна кількість відвідувань бібліотек та кількість звертань до їх web-сайтів. Тому важливим елементом в підготовці управлінських рішень є отримання науково обґрунтованих прогнозів даних показників.

Для прогнозування динаміки кількості відвідувань бібліотек та кількості звертань до їх web-сайтів можна використати нейромережеві технології, які являються фундаментальною основою штучного інтелекту.

Використаємо дані технології для одержання прогнозів наведених вище показників для бібліотек Полтавської області на 2024 та 2025 роки. Інформаційною основою прогнозування є статистичні дані про кількість відвідувань та кількість звертань до web-сайтів цих бібліотек протягом ретроспективного періоду від 2007 до 2022 року [1].

Для прогнозування нами вибрана нейронна мережа типу Feed-forward back propagation. Дана мережа включає три види нейронів — один вхідний, три проміжних та один вихідний. На вхідний нейрон надходить сигнал, який в незмінному вигляді передається на проміжні нейрони. Величини вхідних сигналів ви-

значаються рівністю

$$X(t) = \frac{t}{T + T_1 + T_2 + 1},$$

де T — тривалість (в роках) ретроспективного періоду, T_1 — кількість років між ретроспективним періодом та періодом прогнозування, T_2 — тривалість періоду прогнозування, t — порядковий номер року, починаючи від початку ретроспективного періоду. Проміжні нейрони N_1 , N_2 та N_3 мають по одному входу, які сприймають сигнали від вхідного нейрону, та по одному виходу, звідки сигнал передається на вихідний нейрон. Входам проміжних нейронів N_1 , N_2 та N_3 зіставляються вагові коефіцієнти w_{11} , w_{12} та w_{13} . Параметрами проміжного нейрона N_i є зміщення a_i , та функція активації $f(x)$. При роботі мережі проміжний нейрон N_i виробляє вихідний сигнал $Y_i(t)$, величина якого визначається рівністю

$$Y_i(t) = f(w_{1i}X(t) + a_i).$$

Вихідний нейрон N_0 має три входи, які сприймають вихідні сигнали від проміжних нейронів. Параметрами вихідного нейрону є вагові коефіцієнти w_{21} , w_{22} та w_{23} його входів, зміщення a_0 та функція активації $f(x)$. Цей нейрон виробляє вихідний сигнал

$$G(t) = f(w_{21}Y_1(t) + w_{22}Y_2(t) + w_{23}Y_3(t) + a_0).$$

Для проміжних нейронів та вихідного нейрона вибрана функція активації

$$\text{tansig}(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} - 1.$$

В процесі навчання мережі одержані вихідні сигнали $G(t)$ порівнюються із відомими еталонними величинами $L(t)$, одержаними із статистичних даних про відвідування бібліотек та звертання до їх web-сайтів протягом ретроспективного періоду. В якості еталонних значень для навчання мережі вибираємо значення

$$L(t) = \frac{Q(t)}{1,5Q^{\max}},$$

де $Q(t)$ — величина показника, що досліджується, в t -тий рік ретроспективного періоду, $Q^{\max}$ — максимальне значення цього показника в ретроспективному періоді. Якщо вихідний сигнал $G(t)$ відрізняється від еталону на величину, що перевищує задану точність, то мережа здійснює коригування вагових коефіцієнтів входів та зміщень проміжних нейронів та вихідного нейрона.

При прогнозуванні кількості відвідувань бібліотек після навчання мережі її параметри приймають такі значення:

$$w_{11} = 11,1036; \quad w_{12} = -7,1799; \quad w_{13} = 4,8403;$$

$$a_1 = -7,7028; \quad a_2 = 0,55373; \quad a_3 = 0,37212;$$

$$w_{21} = -0,93234; \quad w_{22} = 0,75206; \quad w_{23} = 0,47902; \quad a_0 = 0,37212.$$

Для одержання прогнозів на 2024 та 2025 рока на вхід мережі подаються значення $X(18) = 0,9$ та $X(19) = 0,95$, що відповідають даним рокам. Одержимо вихідні значення $L(18) = 0,38449$ та $L(19) = 0,38361$. Вони відповідають

прогнозованим кількостям відвідувань бібліотек — 2747,4 тисяч в 2024 році та 2741,1 тисяч в 2025 році.

При прогнозуванні кількості звернень до web-сайтів бібліотек після навчання мережі її параметри приймають такі значення:

$$w_{11} = 4,3442; \quad w_{12} = 3,5833; \quad w_{13} = 4,3116;$$

$$a_1 = -3,988; \quad a_2 = 1,6948; \quad a_3 = 4,0246;$$

$$w_{21} = 1,5029; \quad w_{22} = 0,52734; \quad w_{23} = 0,77955; \quad a_0 = 0,27538.$$

Для одержання прогнозів на 2024 та 2025 рока на вхід мережі подаються значення $X(18) = 0,9$ та $X(19) = 0,95$, що відповідають даним рокам. Одержимо вихідні значення $L(18) = 0,66483$ та $L(19) = 0,66515$. Вони відповідають прогнозованим кількостям звернень до web-сайтів бібліотек — 576,3 тисяч в 2024 році та 576,6 тисяч в 2025 році.

Таким чином, прогнозування на основі нейромережових технологій показало, що в 2024 та 2025 роках очікується стабілізація розглянутих показників при наявності незначних тенденцій до зростання кількості звернень до web-сайтів та зменшення кількості відвідувань бібліотек.

Сучасна бібліотека має бути цифровізованою, відкривати нові можливості отримання й сприйняття інформації. Впровадження штучного інтелекту у бібліотечну справу має потенціал для суттєвого підвищення ефективності роботи бібліотек і покращення якості обслуговування користувачів.

4. Висновки. Комп'ютери, гаджети та штучний інтелект відіграють важливу роль у сучасному світі. Їхня значимість продовжує зростати з розвитком технологій та цифрової економіки.

Застосування штучного інтелекту в сучасній бібліотечній справі є надзвичайно перспективним і корисним. Ця технологія відкриває широкі можливості для покращення обслуговування користувачів, оптимізації робочих процесів, розвитку цифрових бібліотечних сервісів та підвищення ефективності управлінських рішень в організації роботи бібліотек.

ШІ дозволяє розробляти ефективніші системи пошуку та організації інформації, надавати персоналізовані рекомендації, автоматизувати процеси каталогізації та управління колекціями, покращувати взаємодію з користувачами через віртуальних асистентів та чат-ботів, а також сприяти розвитку цифрових архівів та електронних ресурсів. Використання ШІ сприяє подальшому розвитку бібліотечної сфери, забезпечуючи зручний доступ до знань та інформації для користувачів усього світу.

Список використаної літератури

1. Бібліотекар України. Статистичний збірник «Бібліотечна Україна в цифрах». Статистична аналітика 2019–2020. URL: <https://profy.nlu.org.ua/articles.php?lng=uk&pg=10488> (дата звернення: 18.11.2024).
2. Івашкевич О. Штучний інтелект в акустиці функціонування книгозбірень України. *Бібліотекознавство. документознавство. інформологія*. 2023. № 2. С. 97–101. DOI: <https://doi.org/10.32461/2409-9805.2.2023.284672>
3. Ічанська Н. В., Дем'яненко В. О. Освітні інтернет ресурси та онлайн середовища в навчально-виховній діяльності викладача закладу вищої освіти. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2020. Т. 4, № 62. С. 40–42. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.4.040>

4. Ічанська Н. В. Засоби та інструменти для розробки веб-додатку з тестування рівня знань студентів. *Механіка та математичні методи*. 2024. Т. 6, № 1. С. 95–106. DOI: <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-1-95-106>
5. Ічанська Н. В., Сіровий С. С. Застосування освітніх інтернет-ресурсів у навчальній роботі з іноземними студентами. *Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць*. 2020. Т. 3, № 61. С. 86–89. DOI: <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.3.086>
6. Кравченко Н. Як в Україні використовують штучний інтелект. MS Detector Media. URL: <https://ms.detector.media/trendi/post/33704/2023-12-10-yak-v-ukraini-vykorystovuyut-shtuchnyy-intelekt> (дата звернення: 10.05.2024).
7. Маранчак М. Перспективи застосування публічними бібліотеками України технологій штучного інтелекту. *Країнський журнал з бібліотекознавства та інформаційних наук*. 2024. № 13. С. 61–71. DOI: <https://doi.org/10.31866/2616-7654.13.2024.307118>
8. Нікітченко К. Штучний інтелект в медицині: сьогодення і майбутнє. Медична справа. URL: <https://medplatforma.com.ua/article/17164-yak-shtuchniy-intelekt-transformue-robotu-kerivnika-medichnogo-zakladu-likarya-ta-medsestri> (дата звернення: 28.06.2024).
9. Романенко К. Еволюція штучного інтелекту (ШІ): визначні моменти в історії та застосування. Друкарня. URL: <https://drukarnia.com.ua/articles/evolyuciya-shtuchnogo-intelektu-shi-viznachni-momenti-v-istoriyi-ta-zastosuvannya-dO-YV> (дата звернення: 25.06.2024).
10. Сокіл М., Зворський А. Перспективи застосування штучного інтелекту для оптимізації роботи академічної бібліотеки. *Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки*. 2024. Т. 333, № 2. С. 55–60. DOI: <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-9>
11. Новини відділів на місцях. Освіта Львівщини. URL: <https://osvita.loda.gov.ua/?page=blog&id=785> (дата звернення: 06.05.2024).
12. Флоркін Ж. ШІ в транспорті: революція в майбутньому мобільності. URL: <http://surl.li/lufefv> (дата звернення: 28.06.2024).
13. Штучний інтелект для бізнесу: сфери застосування, ризики та перспективи. URL: <https://strategi.com.ua/shtuchnyy-intelekt-dlia-biznesu> (дата звернення: 28.06.2024).
14. Штучний інтелект у Національній бібліотеці «оживив» твори Шевченка для дітей. Укрінформ — актуальні новини України та світу. URL: <https://www.ukrinform.ua/rubric-culture/3836858-stuchnij-intelekt-u-nacionalnij-biblioteci-oziviv-tvori-sevcenka-dla-ditej.html> (дата звернення: 24.06.2024).
15. Штучний інтелект у виробництві: роль та переваги. URL: <https://wezom.com.ua/ua/blog/shtuchniy-intelekt-u-virobnitstvi-perevagi-ta-prikladi-zastosuvannya> (дата звернення: 28.06.2024).
16. Onyshchenko V., Ichanska N., Skryl V., Furmanchuk O. Economic and Mathematical Modeling of Innovative Development of Enterprises in the Construction Industry / Onyshchenko V., Mammadova G., Sivitska S., Gasimov A. *Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. ICBI 2020 : Lecture Notes in Civil Engineering*. Vol. 181. Springer : Cham, 2021. P. 697–709. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
17. Zac A. 5 Ways Artificial Intelligence Is (Quietly) Changing Libraries. The HackerNoon Newsletter. URL: <https://hackernoon.com/5-ways-artificial-intelligence-is-quietly-changing-libraries> (date of access: 25.06.2024).

Ichanska N. V., Lysenko M. V., Pikalova V. V. Development of Artificial Intelligence and its Application in Librarianship.

The article examines the role of artificial intelligence (AI) in modern librarianship. The paper explores the possibilities of using AI to improve user experience, optimize workflows, and develop digital library services. The authors explore various aspects, including improved information search, which allows users to find relevant literature quickly and efficiently. The article draws attention to personalized recommendations, which provide users with individually customized recommendations on literature and information sources. Automation of cataloging and collection management processes simplifies the work of librarians and allows libraries to effectively manage their resources. Interaction with users through chatbots and virtual assistants is becoming more interactive and convenient. The

development of digital archives and electronic resources makes access to information faster and more convenient for users. To manage a network of libraries at the country or regional level, neural network technologies are effective. In this paper, the authors used these technologies to predict the number of visits to libraries and access to their websites (based on the example of Poltava region).

The results of the study can be used by library professionals to improve reader service and further develop modern library services.

Keywords: artificial intelligence, libraries, search engines, chatbots, virtual assistants, neural network technologies.

References

1. Librarian of Ukraine. Statistical collection "Library Ukraine in Figures". Statistical analytics 2019–2020. Retrieved from <https://profy.nlu.org.ua/articles.php?lng=uk&pg=10488> [in Ukrainian].
2. Ivashkevych, O. (2023). Artificial Intelligence in Acoustics of Library Functioning in Ukraine. *Library Science. Document Science. Informology*, 2, 97–101. <https://doi.org/10.32461/2409-9805.2.2023.284672> [in Ukrainian].
3. Ichanska, N. V., & Demianenko, V. O. (2020). Educational Internet resources and online environments in the educational activities of a teacher of a higher education institution. *Control, Navigation and Communication Systems. Academic Journal*, 4(62), 40–42. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.4.040> [in Ukrainian].
4. Ichanska, N. (2024). Tools and instruments for developing a web application with student knowledge level testing. *Mechanics and Mathematical Methods*, VI(1), 95–106. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-1-95-106> [in Ukrainian].
5. Ichanskaya, N. V., & Sirovoy, S. S. (2020). Application of educational Internet resources in educational work with foreign students. *Control, Navigation and Communication Systems. Academic Journal*, 3(61), 86–89. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2020.3.086> [in Ukrainian].
6. Kravchenko, N. How artificial intelligence is used in Ukraine. MS Detector Media. Retrieved from <https://ms.detector.media/trendi/post/33704/2023-12-10-yak-v-ukraini-vykorystovuyut-shtuchnyy-intelekt> [in Ukrainian].
7. Maranchak, M. (2024). Prospects for Applying Artificial Intelligence Technologies by Public Libraries of Ukraine. *Ukrainian Journal of Library and Information Science*, (13), 61–71. <https://doi.org/10.31866/2616-7654.13.2024.307118> [in Ukrainian].
8. Nikitchenko, K. Artificial Intelligence in Medicine: Present and Future. Medical Business. Retrieved from <https://medplatforma.com.ua/article/17164-yak-shtuchniy-intelekt-transformue-robotu-kerivnika-medichnogo-zakladu-likarya-ta-medsestri> [in Ukrainian].
9. Romanenko, K. Evolution of Artificial Intelligence (AI): Highlights in History and Application. Printing House. URL: <https://drukarnia.com.ua/articles/evolyuciya-shtuchnogo-intelektu-shiviznachni-momenti-v-istoriyi-ta-zastosuvannya-dO-YV> [in Ukrainian].
10. Sokil, M., & Zvorsky, A. (2024). Prospects for the use of artificial intelligence to optimize the work of the academic library. *Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*, 333(2), 55–60. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2024-333-2-9> [in Ukrainian].
11. News of Departments on the Places. Education of Lviv region. Retrieved from <https://osvita.loda.gov.ua/?page=blog&id=785> [in Ukrainian].
12. Florkin, J. AI in transport: A Revolution in the Future of Mobility. Retrieved from <http://surl.li/lufefv> [in Ukrainian].
13. Artificial Intelligence for Business: Areas of Application, Risks and Prospects. Retrieved from <https://strategi.com.ua/shtuchnyy-intelekt-dlia-biznesu> [in Ukrainian].
14. Artificial intelligence in the National Library “revived” Shevchenko’s works for children. Ukrinform — current news of Ukraine and the world. Retrieved from <https://www.ukrinform.ua/rubric-culture/3836858-stuchnij-intelekt-u-nacionalnij-biblioteci-oziviv-tvori-sevcenka-dla-ditej.html> [in Ukrainian].
15. Artificial Intelligence in Production: Role and Benefits. Retrieved from <https://wezom.com.ua/ua/blog/shtuchniy-intelekt-u-virobnitstvi-perevagi-ta-prikladi-zastosuvannya> [in Ukrainian].

16. Onyshchenko, V., Ichanska, N., Skryl, V., & Furmanchuk, O. (2022). Economic and Mathematical Modeling of Innovative Development of Enterprises in the Construction Industry. In: *Onyshchenko, V., Mammadova, G., Sivitska, S., & Gasimov, A. (eds.). Proceedings of the 3rd International Conference on Building Innovations. ICBI 2020*. Lecture Notes in Civil Engineering, 181. Springer: Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85043-2_65
17. Zac, A. 5 Ways Artificial Intelligence Is (Quietly) Changing Libraries. The HackerNoon Newsletter. Retrieved from <https://hackernoon.com/5-ways-artificial-intelligence-is-quietly-changing-libraries>

Одержано 03.07.2024

UDC 004.8:519.23:336.76

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).205-215](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).205-215)**N. E. Kondruk¹, S. V. Hetsko²**¹ Uzhhorod National University,

Associate Professor of Department of Cybernetics and Applied Mathematics,

Candidate of Technical Sciences

natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>² Uzhhorod National University,

Postgraduate student of Department of Cybernetics and Applied Mathematics

serhii.hetsko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-5279>

FORECASTING CURRENCY RATES USING MACHINE LEARNING MODELS

Accurate forecasting of foreign exchange (FOREX) currency rates is crucial for various financial activities. However, both the time interval and the chosen model can have a significant impact on forecasting accuracy. Therefore, investigating the effect these elements have on the prediction accuracy of multivariate time series data representing Open, High, Low, and Close (OHLC) prices in FOREX markets, requires further research.

The aim of paper is to evaluate and compare the performance of different quantitative forecasting models (VAR, LSTM, GRU, Random Forest) in predicting Foreign Exchange (FOREX) currency rates across various timeframes (daily (D), 4-hourly (H4), hourly (H1), 15-minute (M15)).

The performance of VAR, LSTM, GRU, and Random Forest – was evaluated on four FOREX datasets. These datasets included data from different Timeframes including D, H4, H1, M15. Each model was trained on historical data, and then their prediction accuracy was assessed on unseen test data. Accuracy was measured using MAE and MSE.

The influence of timeframe and machine learning methods on forecasting exchange rates EUR/USD is studied. Effectiveness of various forecasting models was analyzed.

Random Forest model outperformed other models on every Dataset (Timeframe) with astounding result of MAE = 0.00004 and MSE = 0.000000007 on M15 Dataset. Future research will focus on: developing a forecasting method based on fuzzy logic; constructing a model capable of online learning with real-time data; and creating a decision support system for algorithmic trading.

Keywords: LSTM, GRU, Random Forest, forecasting, multivariate timeseries, FOREX.

ABBREVIATIONS

FOREX — Foreign Exchange;

GRU — Gated Recurrent Unit;

LSTM — Long short-term memory;

MAE — mean absolute error;

MSE — mean squared error;

OHLC — Open, High, Low, Close;

VAR — Vector Autoregression.

NOMENCLATURE

$f_i(x)$ is a base model, typically a decision tree;

$g(x)$ is a final prediction;

k is a number of endogenous variables;

m is a input features observed at time t ;
 t is a time period, numbered $t = 1, \dots, T$;
 x is a original value;
 $\{x_1, x_2, \dots, x_T\}$ is a time series;
 X is a 2-dimensional tensor (or matrix);
 x' is a normalized value;
 $x_{\max}$ is a maximum value of the original data;
 $x_{\min}$ is a minimum value of the original data;
 y is the target variable;
 y_t is a vector of length k representing the variables at time;
 $\hat{y}_{t+k}$ is a predicted value of the target variable at time $t + k$.

1. Introduction. The Foreign Exchange Market (Forex) is the world's largest financial market, enabling the trading of currencies and other assets, such as metals. Its high liquidity makes it an essential platform for international trade and investment [1].

To make informed trading decisions in the Forex market, investors and traders rely on various analysis methods. Fundamental analysis focuses on identifying a currency's "fair value" by considering economic data and financial indicators. Technical analysis, on the other hand, utilizes price charts and technical indicators to identify historical price patterns and potential future movements. The core principle of technical analysis is that all relevant market information is already reflected in the price itself.

While fundamental and technical analysis are widely used for market decisions, quantitative analysis offers a distinct approach. Quantitative analysis views market prices as time series data and employs sophisticated mathematical models and statistical techniques to forecast future price movements. This data-driven approach complements traditional analysis methods by providing a more objective and systematic way to identify trading opportunities.

Within quantitative analysis, there exists a vast array of models, encompassing statistical methods, machine learning and deep learning models. Each type of model offers unique advantages and addresses specific challenges in market prediction.

However, the effectiveness of these quantitative models varies greatly. This paper will delve into the efficiency of different model types, including statistical methods, machine learning algorithms, and deep learning architectures, to identify the most promising approaches for market prediction.

So the object of study is foreign currency rates (FOREX) on the markets, represented by OHLC data and the subject of study is the efficiency of different machine learning models in forecasting exchange rates at different time intervals.

A significant amount of research has explored quantitative forecasting in financial markets. However, these studies often focus on predicting a single variable, typically the closing price, using univariate time series analysis. This approach overlooks the rich information available within market data. Our work takes a more comprehensive approach by investigating the forecasting of multivariate time series using OHLC data (Open, High, Low, Close). This allows us to capture the full range of price movements within a specific timeframe. Additionally, we explore the impact of timeframe on efficiency. By analyzing the effectiveness of these models across different time horizons (e.g., daily, hourly), we aim to provide a more nuanced

understanding of their predictive capabilities.

The purpose of this work is to compare the efficiency of various forecasting models employed in quantitative analysis when applied to different timeframes.

To achieve the purpose of the work, the following problems shall be solved:

- to analyze existing forecasting models;
- to create and prepare data sets;
- to implement and train forecasting models for each data set;
- to make a comparative analysis of the obtained results.

2. Problem Statement. Given a time series, where each is a vector of input features observed at time, the task is to develop a predictive model that utilizes historical data represented as a 2-dimensional tensor of shape to forecast a target variable at a future time point. The goal is to accurately predict the future target value using the model.

Given a time series for predicting a future target variables, the challenge lies in identifying the most efficient forecasting model across various timeframes. To achieve this, we will employ different models on multivariate time series data with varying time horizons. The MAE and MSE will be calculated for each model's predictions to assess their accuracy and identify the most efficient model for specific time intervals based on their lowest values.

3. Review of the literature. Financial market forecasting is a notoriously intricate task. Despite the valuable insights gleaned from popular methods like technical and fundamental analysis [1], accurately predicting future price movements requires navigating a complex interplay of economic data, market sentiment, and other factors. This highlights the need for a more systematic and objective approach to identify efficient forecasting models. Quantitative analysis emerges as a complementary approach, leveraging mathematical models and statistical techniques to dissect market data and objectively predict future price movements [2].

While Vector Autoregression (VAR) models, a popular statistical approach to forecasting, have been explored in previous research [3, 4], their ability to capture all the dependencies within financial data remains a challenge.

This necessitates exploring more intricate models. Machine learning algorithms, with their ability to learn from vast datasets and identify hidden patterns, offer a compelling alternative. Using the machine learning models described in [5], we aim to develop a more comprehensive understanding of market dynamics and identify the most efficient forecasting approach across different timeframes. In particular, these are models of Long Short-Term Memory (LSTM) networks [6], Gated Recurrent Units (GRUs) [6] and Random Forests [7].

In [8] statistical model was compared with LSTM. Paper [9] compared LSTM with Random Forest.

Our study will compare classic statistical model VAR with LSTM, GRU and Random Forest. Moreover, we will determine the impact of timeframe on efficiency.

4. Materials and Methods. VAR model. A VAR model [4] describes the evolution of a set of k variables, called endogenous variables, over time. Each period of time is numbered, $t = 1, \dots, T$. The variables are collected in a vector, y_t , which is of length k . Equivalently, this vector might be described as a $(k \times 1)$ -matrix. The vector is modelled as a linear function of its own lagged values. The inclusion of lagged values allows the model to capture the dynamic interdependencies between

the variables.

LSTM model. Long Short-Term Memory (LSTM) networks [6] are a special type of neural network that can learn from long sequences of data, unlike regular RNNs which struggle with remembering distant information.

LSTMs have an internal memory that helps them remember important information from past data points. This allows them to understand how events further back in time can influence future events, something regular RNNs struggle with.

LSTM has forget gates, input gates, and output gates. These gates control how information flows within the LSTM's memory. They can decide what information to keep, what to forget, and how to combine it with new data to make better predictions.

GRU model [6]. Gated Recurrent Units (GRUs) are another type of neural network similar to LSTMs, but with a slightly simpler approach. They also aim to learn from long sequences of data and address the vanishing gradient problem.

Like LSTMs, GRUs have internal mechanisms (gates) that control how information flows within their memory. These gates, named update, reset, and candidate, decide what information to keep from the past, what to forget, and what new information to integrate.

The key difference is that GRUs use a single set of gates instead of the separate forget, input, and output gates in LSTMs. This makes them slightly more efficient computationally.

In simpler terms, both LSTMs and GRUs are like neural networks with good memories for past data. GRUs achieve this with a slightly more streamlined approach compared to LSTMs.

Random Forest.

Random Forest [7] is a powerful machine learning technique for predictive analytics. It falls under the category of ensemble learning, where the final prediction is derived by combining the outputs of multiple, simpler models. Formally, these models can be expressed as:

$$g(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_i(x).$$

This approach of combining multiple models to improve predictive performance is known as model ensembling. In Random Forests, each base decision tree is built independently using a random subset of the data (bootstrapping). This helps to reduce variance and improve the overall robustness of the final model.

Normalization is used to bring data to a common scale. In this study, the min-max technique was employed:

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}. \quad (1)$$

Accuracy indices.

To assess how well the models learned, we used a measure called Mean Squared Error (MSE) [10] as the loss function during training. This helps us identify if the model is becoming too focused on training data and might not perform well on unseen data (overfitting).

In addition to MSE, we also evaluated the model's performance on unseen data using Mean Absolute Error (MAE) [11, 12]. MAE is a robust measure of prediction

accuracy that calculates the average absolute difference between the predicted values and the actual values. Unlike MSE, which squares the errors and thus penalizes larger errors more heavily, MAE provides a straightforward interpretation of the average error magnitude.

5. Experiments. 1. Datasets.

We applied the four machine learning techniques to the EUR/USD data sets from the finance.yahoo.com Website to perform Time Series Forecasting (TSF) for OHLC predictions.

Four data sets collected from different Timeframes are used. Each of them includes data for two year time period November 18, 2021 to November 17, 2023 and has 9 columns. First and second columns labeled as Date and Time were combined into single feature called “Date Time”. The following four columns labeled as Open, High, Low, Close were used as input features. And they were used as target variables as well. The column names and explanations are presented in table 1.

Table 1.

Column names and explanations		
Name	Explanation	Comment
Date	Date of Bar	Merged into single feature
Time	Time of Bar	
Open	Opening price	Input features & Targets
High	Highest price of bar	
Low	Lowest price of bar	
Close	Closing Price	
Volume	Volume of Bar	Ignored
Tick Volume	Volume of Tick	
Spread	Difference between	

Information about the generated datasets:

1. data set M15 has 50 001 rows, data was collected every 15 minutes;
2. data set H1 has 12 503 rows, data was collected hourly;
3. data set H4 has 3 128 rows, data was collected every 4 hours;
4. data set 1D has 522 rows, data was collected daily.

Data were normalized values to a range of [0, 1] using the Min-Max normalization technique as shown in (1).

The data were divided into training set (first 70% rows) and test set (last 30% rows).

2. Scheme of experiment.

VAR model was implemented as stated in [4]. And applied to all datasets.

A Random Forest model was constructed utilizing the scikit-learn library [14]. This model was then applied to all datasets for analysis.

The LSTM and GRU models were implemented as follows. Firstly, the data underwent a pre-processing step involving min-max scaling (1) to normalize the feature values. Subsequently, the data was segmented into batches, each with a size equivalent to the look-up window employed for the forecasting models. This window represents the amount of historical data fed into the model. We chose window sizes

that corresponded to one week of data for each dataset: 480 for 15-minute intervals, 120 for hourly intervals, 30 for 4-hour intervals and 5 for daily intervals.

The construction of our models was accomplished utilizing the TensorFlow [13] library.

To investigate the impact of model complexity on performance, we constructed Long Short-Term Memory (LSTM) and Gated Recurrent Unit (GRU) models with varying numbers of hidden layers. A 1-layer model served as the baseline, representing the simplest configuration. Additionally, a 4-layer model was implemented, where the number of hidden layers matched the combined quantity of features and target variables. Finally, a more complex model with 10 hidden layers was constructed. The selection of 10 layers was based on empirical observations, as models with a greater number of layers exhibited signs of overfitting.

The optimal number of neurons within the hidden layers and the learning rate hyperparameters were determined through hyperparameter tuning using KerasTuner [15].

To prevent overfitting and underfitting, the optimal number of training epochs was determined by employing the EarlyStopping callback from TensorFlow. This callback automatically halts training when the validation performance ceases to improve for a predefined number of epochs, effectively identifying the optimal stopping point.

The visualization of the model outputs and actual values was achieved using the Mplfinance library [16].

6. Results. Table 2 presents the results obtained for the datasets, following the methodology outlined in Section 4.

Table 2.

Mean Absolute Error (MAE) and Mean Squared Error (MSE) Values by Dataset and Forecasting Method

		M15		H1	
		MAE	MSE	MAE	MSE
VAR		0.0123	0.000233	0.01239	0.0002364
LSTM	1 Layer	0.000276	0.000000154	0.000462	0.000000562
	4 Layers	0.000283	0.000000169	0.000487	0.00000056
	10 Layers	0.000296	0.000000177	0.000370	0.000000606
GRU	1 Layer	0.000235	0.000000132	0.000486	0.000000526
	4 Layers	0.000257	0.000000145	0.000627	0.000000764
	10 Layers	0.000323	0.000000189	0.000616	0.000000712
Random Forest		0.000043	0.000000007	0.000112	0.000000036
		H4		D	
		MAE	MSE	MAE	MSE
VAR		0.0124	0.00023	0.0124389	0.000235
LSTM	1 Layer	0.00098	0.000002	0.00395	0.000025
	4 Layers	0.000984	0.000002	0.00333	0.00002
	10 Layers	0.00108	0.000002	0.00996	0.000185
GRU	1 Layer	0.00110	0.000002	0.00300	0.000015
	4 Layers	0.001055	0.000002	0.00241	0.0000118
	10 Layers	0.001197	0.000002	0.0026	0.000012
Random Forest		0.000286	0.00000018	0.00095	0.0000016

The colored cells in Table 2 highlight the Mean Absolute Error (MAE) values corresponding to the forecasting method that achieved the best performance on each dataset.

The analysis of the results reveals that the classic statistical method of Vector

Autoregression (VAR) consistently yielded the highest MAE values, indicating its underperformance compared to other models. Conversely, the Random Forest model emerged as a standout performer, exhibiting exceptionally low MAE values across various datasets. This suggests its potential as a robust forecasting tool in this context.

In Figures 1–4 compared top results of each method.

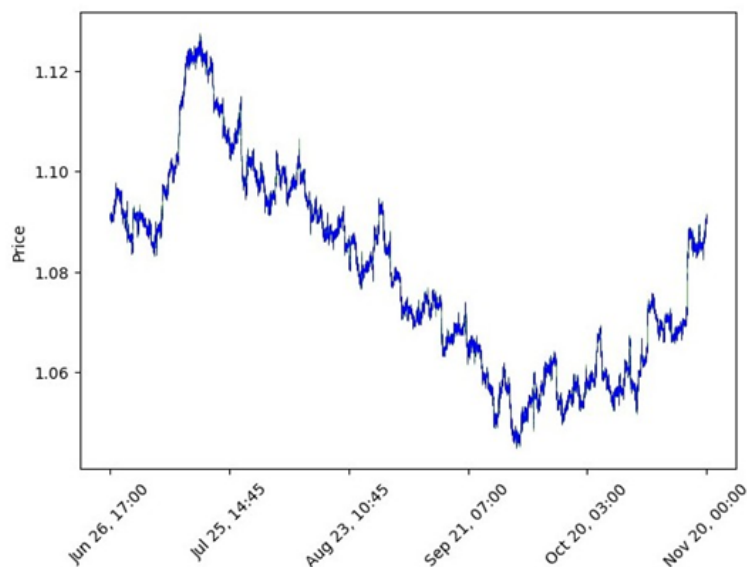


Figure 1. Actual values (green) compared with values predicted by LSTM model on M15 Dataset.

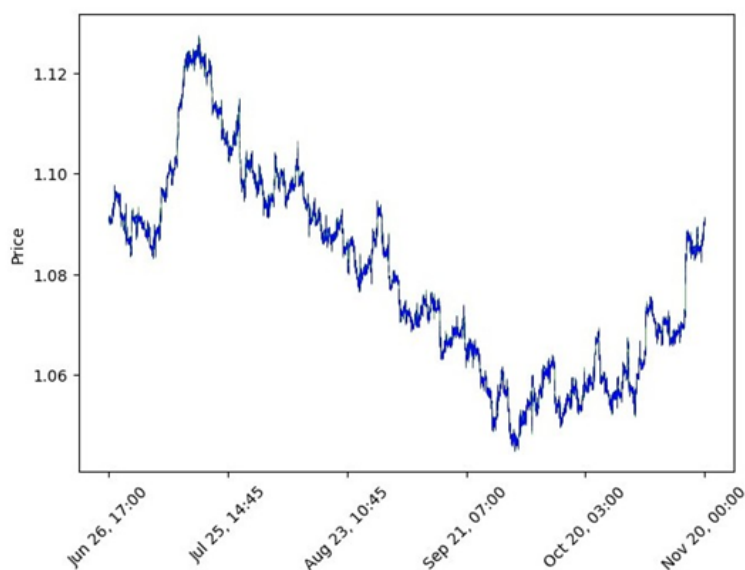


Figure 2. Actual values (green) compared with values predicted by GRU model on M15 Dataset.

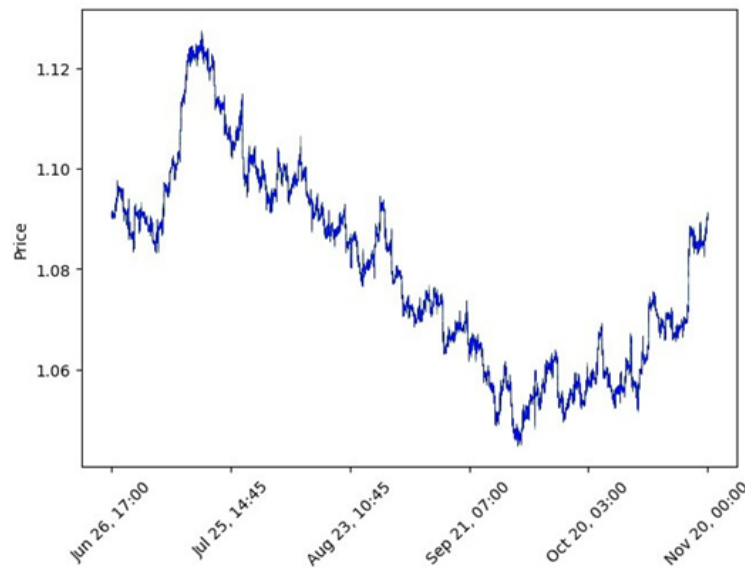


Figure 3. Actual values (green) compared with values predicted by Random Forest model on M15 Dataset.

7. Discussions. All models except VAR performed relatively well with peak performance of $MAE \sim 0.0003$ on the M15 dataset.

However, current research has determined that Random Forest is outperforming other models on the task of forecasting multivariate timeseries. The only disadvantage of Random Forest is its low forecasting capabilities based on real-time data (online forecasting).

8. Conclusions. The problem of comparing the efficiency of various forecasting models employed in quantitative analysis when applied to different timeframes is being solved.

The scientific novelty of the obtained results is as follows:

1. VAR, Random Forest, LSTM, GRU models were used for multidimensional forecasting of OHLC data on the exchange rate of the EUR/USD currency pair generated at different time intervals;
2. the hyperparameters of the models and the architecture of neural networks were adjusted in accordance with the tasks under consideration;
3. to identify the most effective forecasting models, a critical analysis of the results was carried out, taking into account the visualisation of the forecast and accuracy metrics;
4. according to the results of the study, the best forecasting model was Random Forest with $MAE = 0.4 \cdot 10^{-4}$, $MSE = 0.7 \cdot 10^{-8}$.

The practical significance of our findings lies in the development of software equipped with various forecasting models. Experiments have demonstrated the effectiveness of these models on specific timeframes. This software can empower CFD (Contract for Difference) traders with the ability to predict market movements based on data-driven insights. Furthermore, the models and the underlying methodology presented in this work can serve as valuable resources for other researchers seeking to advance the field of financial forecasting.

Future research is to develop a method for forecasting such time series based on fuzzy logic. This will allow the results to be used not only to predict future values, but also to convert the forecasts into actionable recommendations for CFD traders, such as 'Buy', 'Sell' or 'Wait'. It is also planned to develop a decision support system for algorithmic trading that will provide traders with the ability to execute trades automatically based on forecasts and recommendations generated by forecasting models.

References

1. Priyanka, K. (2022). The study of fundamental & technical analysis. *International Journal of Scientific Research in Engineering and Management*, 6(5). <https://doi.org/10.55041/ijrem13093>
2. Gnawali, Y. P. (2022). Use of mathematics in quantitative research. *Ganeshman Darpan*, 7(1), 10–15. <https://doi.org/10.3126/gd.v7i1.53528>
3. Abdullah, L. T. (2022). Forecasting time series using Vector Autoregressive Model. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(1), 499–511. <https://doi.org/10.22075/IJNAA.2022.5521>
4. Elsayed, A. M. M. (2021). Forecasting EGX30 index time series using vector autoregressive models VARS. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*, 6(2), 6–20. <https://doi.org/10.22271/math.2021.v6i2a.658>
5. Sako, K., Mpinda, B. N., & Rodrigues, P. C. (2022). Neural networks for financial time series forecasting. *Entropy*, 24(5), 657. <https://doi.org/10.3390/e24050657>
6. Alfredo, C. S., & Adytia, D. A. (2022). Time series forecasting of significant wave height using GRU, CNN-GRU, and LSTM. *Jurnal RESTI (Rekayasa Sistem dan Teknologi Informasi)*, 6(5), 776–781. <https://doi.org/10.29207/resti.v6i5.4160>
7. Dudek, G. (2022). A comprehensive study of random forest for short-term load forecasting. *Energies*, 15(20), 7547. <https://doi.org/10.3390/en15207547>
8. Taslim, D. G., & Murwantara, I. M. (2022). A Comparative Study of ARIMA and LSTM in Forecasting Time Series Data. *2022 9th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering (ICITACEE)*. Semarang: Indonesia. <https://doi.org/10.1109/ICITACEE55701.2022.9924148>
9. Ghosh, P., Neufeld, A., & Sahoo, J. K. (2021). Forecasting directional movements of stock prices for intraday trading using LSTM and random forests. *Finance Research Letters*, 102280. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102280>
10. Hodson, T. O., Over, T. M., & Foks, S. S. (2021). Mean squared error, deconstructed. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 13(12). <https://doi.org/10.1029/2021ms002681>
11. Qi, J., et al. (2020). On mean absolute error for deep neural network based vector-to-vector regression. *IEEE Signal Processing Letters*, 27, 1485–1489. <https://doi.org/10.1109/lsp.2020.3016837>
12. Robeson, S. M., & Willmott, C. J. (2023). Decomposition of the mean absolute error (MAE) into systematic and unsystematic components. *PLOS ONE*, 18(2). e0279774. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0279774>
13. Pang, B., Nijkamp, E., & Wu, Y. N. (2019). Deep learning with TensorFlow: a review. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 45(2), 227–248. <https://doi.org/10.3102/1076998619872761>
14. Logroño, S. I. N., et al. (2022). Analysis of the use of the python programming language for statistical calculations. *Espiraes Revista Multidisciplinaria de Investigación*, 6(41). <https://doi.org/10.31876/er.v6i41.813>
15. Meshram, A. A. (2022). Review on different software tools for deep learning. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*, 10(1), 565–571. <https://doi.org/10.22214/ijraset.2022.39873>
16. Cao, S., et al. (2021). Research on python data visualization technology. *Journal of Physics: Conference Series*, 1757(1), 012122. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1757/1/012122>

Кондрук Н. Е., Гецько С. В. Прогнозування курсів валют засобами машинного навчання.

Точне прогнозування валютних курсів (FOREX) має вирішальне значення для різних видів фінансової діяльності. Однак, як часовий інтервал, так і обрана модель можуть мати значний вплив на якість прогнозів. Тому вивчення впливу цих елементів на точність прогнозування багатовимірних часових рядів даних, що представляють ціни відкриття, максимуму, мінімуму та закриття (OHLC) на ринках FOREX, потребує подальших досліджень.

Метою роботи є оцінка та порівняння ефективності різних кількісних моделей прогнозування (VAR, LSTM, GRU, Random Forest) у передбаченні валютних курсів на міжнародних валютних ринках (FOREX) за різними часовими інтервалами (денний (D), 4-годинний (H4), годинний (H1), 15-хвилинний (M15)).

Ефективність VAR, LSTM, GRU та Random Forest було оцінено на чотирьох наборах даних FOREX. Ці датасети включали дані з різних таймфреймів, включаючи D, H4, H1, M15. Кожна модель була навчена на історичних даних, а потім їх точність прогнозування була оцінена на невидимих тестових даних. Точність була виміряна за допомогою метрик MAE та MSE.

Досліджено вплив таймфрейму та методів машинного навчання на прогнозування валютних курсів ЄВРО/ДОЛАР США. Проаналізовано ефективність різних моделей прогнозування.

Модель Random Forest перевершила інші моделі на кожному наборі даних (таймфреймі) з вражаючим результатом $MAE = 0.00004$ та $MSE = 0.000000007$ на датасеті M15. Подальші дослідження будуть зосереджені на: розробці методу прогнозування на основі нечіткої логіки; побудові моделі, здатної до онлайн-навчання на даних в реальному часі; створенні системи підтримки прийняття рішень для алгоритмічної торгівлі.

Ключові слова: LSTM, GRU, Random Forest, прогнозування, багатовимірні часові ряди, FOREX.

Список використаної літератури

1. Priyanka K. The study of fundamental & technical analysis. *International Journal of Scientific Research in Engineering and Management*. 2022. Vol. 6, No. 5. DOI: <https://doi.org/10.55041/ijsem13093>
2. Gnawali Y. P. Use of mathematics in quantitative research. *Ganeshman Darpan*. 2022. Vol. 7, No. 1. P. 10–15. DOI: <https://doi.org/10.3126/gd.v7i1.53528>
3. Abdullah L. T. Forecasting time series using vector autoregressive model. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*. 2022. Vol. 13, No. 1. P. 499–511. DOI: <https://doi.org/10.22075/IJNAA.2022.5521>
4. Elsayed A. M. M. Forecasting EGX30 index time series using vector autoregressive models VARS. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. 2021. Vol. 6, No. 2. P. 6–20. DOI: <https://doi.org/10.22271/math.2021.v6.i2a.658>
5. Sako K., Mpinda B. N., Rodrigues P. C. Neural networks for financial time series forecasting. *Entropy*. 2022. Vol. 24, No. 5. 657. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24050657>
6. Alfredo C. S., Adytia D. A. Time series forecasting of significant wave height using GRU, CNN-GRU, and LSTM. *Jurnal RESTI (Rekayasa Sistem dan Teknologi Informasi)*. 2022. Vol. 6, No. 5. P. 776–781. DOI: <https://doi.org/10.29207/resti.v6i5.4160>
7. Dudek G. A comprehensive study of random forest for short-term load forecasting. *Energies*. 2022. Vol. 15, No. 20. 7547. DOI: <https://doi.org/10.3390/en15207547>
8. Taslim D. G., Murwantara I. M. A comparative study of ARIMA and LSTM in forecasting time series data. In *2022 9th International Conference on Information Technology, Computer, and Electrical Engineering (ICITACEE)*. Semarang : Indonesia, 2022. P. 231–235. IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICITACEE55701.2022.9924148>
9. Ghosh P., Neufeld A., Sahoo J. K. Forecasting directional movements of stock prices for intraday trading using LSTM and random forests. *Finance Research Letters*. 2021. 102280. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2021.102280>

10. Hodson T. O., Over T. M., Foks S. S. Mean squared error, deconstructed. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*. 2021. Vol. 13, No. 12. DOI: <https://doi.org/10.1029/2021ms002681>
11. Qi J., et al. On mean absolute error for deep neural network based vector-to-vector regression. *IEEE Signal Processing Letters*. 2020. Vol. 27. P. 1485–1489. DOI: <https://doi.org/10.1109/lsp.2020.3016837>
12. Robeson S. M., Willmott C. J. Decomposition of the mean absolute error (MAE) into systematic and unsystematic components. *PLOS ONE*. 2023. Vol. 18, No. 2. e0279774. DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0279774>
13. Pang B., Nijkamp, E., Wu Y. N. Deep learning with TensorFlow: A review. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*. 2019. Vol. 45, No. 2. P. 227–248. DOI: <https://doi.org/10.3102/1076998619872761>
14. Logroño S. I. N., et al. Analysis of the use of the python programming language for statistical calculations. *Espiraes Revista Multidisciplinaria de Investigación*. 2022. Vol. 6, No. 41. DOI: <https://doi.org/10.31876/er.v6i41.813>
15. Meshram A. A. Review on different software tools for deep learning. *International Journal for Research in Applied Science and Engineering Technology*. 2022. Vol. 10, No. 1. P. 565–571. DOI: <https://doi.org/10.22214/ijraset.2022.39873>
16. Cao S., et al. Research on python data visualization technology. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1757, No. 1. 012122. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1757/1/012122>

Recived 12.10.2024

УДК 004.6, 004.8, 004.942, 004.021: 519.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).216-222](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).216-222)**Н. О. Михайлов**

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри теорії та технології програмування
nikmikhailov13@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9374-3403>

АДАПТИВНА МОДЕЛЬ ПЛАНУВАННЯ ПРОЄКТІВ ТА ОЦІНКИ РИЗИКІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Ефективне управління проектами в умовах постійно змінюваних ринкових вимог та технологічного прогресу є необхідною складовою успішної діяльності компаній. Оптимізація процесу планування та управління ризиками відіграє ключову роль у підвищенні якості результатів і скороченні термінів реалізації. Традиційні методи планування, такі як метод критичного шляху і метод програмування в мережі, ефективно допомагають структурувати задачі проекту. Однак, через зростаючу складність проєктів, ці методи не завжди можуть врахувати динаміку змін та непередбачені ризики.

Застосування сучасних технологій, зокрема машинного навчання, дозволяє розробляти гнучкі та адаптивні системи управління, здатні враховувати як історичні дані, так і нові зміни в проєкті в режимі реального часу. Алгоритми машинного навчання можуть ефективно прогнозувати строки виконання завдань, оцінювати ризики та допомагати в оптимальному розподілі ресурсів. Дана стаття зосереджена на розробці адаптивної моделі, що дозволяє покращити точність планування та мінімізувати ризики під час виконання проєктів.

Ключові слова: машинне навчання, оцінка ризиків, нейронні мережі, управління проєктами, обробка даних, методи оптимізації, обчислювальні методи, інтелектуальні системи.

1. Вступ. Ефективне управління проектами в умовах швидких змін є критично важливим для досягнення успіху в будь-якій організації. Сучасний бізнес вимагає високого рівня точності у плануванні та прогнозуванні ризиків, щоб забезпечити стабільність виконання завдань і мінімізувати можливі збої. Традиційні методи планування, досі залишаються важливими, проте вони мають певні обмеження в умовах постійних змін і непередбачуваних факторів.

Впровадження алгоритмів машинного навчання дозволяє підвищити адаптивність систем управління проектами, використовуючи великі обсяги історичних даних для прийняття рішень. Такі технології допомагають системам автоматично коригувати плани відповідно до нових викликів і зменшують ймовірність виникнення помилок. Використовуючи ці підходи, організації можуть краще керувати ресурсами, прогнозувати терміни виконання та оцінювати ризики у режимі реального часу, що особливо актуально в умовах сучасних ринкових умов.

У статті запропоновано адаптивну модель управління проектами, яка заснована на використанні машинного навчання. Модель спрямована на покращення процесу планування, а також на більш ефективне управління ризиками, що виникають під час реалізації складних проєктів.

2. Аналіз показників планування. Показники планування проєктів є важливим інструментом для оцінки та оптимізації виконання завдань. Одним

із ключових показників є тривалість завдань, що визначає загальну тривалість проєкту. Для ефективного управління досить важливо оцінити наявні ресурси, включаючи їх доступність та ефективність використання. Пріоритетність завдань дозволяє концентрувати зусилля на особливо важливих етапах, забезпечуючи оптимальний порядок їх виконання. Використання буфера часу допомагає запобігти затримкам через непередбачувані обставини. Оцінка ефективності виконання завдань у порівнянні з початковими планами дозволяє вчасно визначати відхилення та коригувати процес. Також варто звернути увагу на рівномірний розподіл навантаження між членами команди, задля уникнення перевантаження і забезпечення продуктивності на кожному етапі проєкту [1].

Такий підхід дозволяє забезпечити комплексний аналіз планування і допомагає ефективно управляти як ресурсами, так і часом, що є вирішальним для успішного завершення проєкту.

Аналіз наведених показників планування дозволяє точніше визначити оптимальні стратегії управління проєктом, але традиційні методи не завжди забезпечують необхідну гнучкість і адаптивність. Для подолання цих обмежень пропонується розробка алгоритму на основі машинного навчання, який буде враховувати зазначені показники — тривалість завдань, ресурси, пріоритетність і взаємозалежність — і автоматично коригувати плани у відповідь на нові дані. Цей алгоритм дозволить підвищити точність прогнозування та мінімізувати ризики, пов'язані з динамікою проєкту [2].

3. Аналіз показників оцінки ризиків. Оцінка ризиків є важливою складовою управління проєктами, оскільки вона дозволяє ідентифікувати потенційні загрози та вчасно вжити заходів для їх мінімізації. Одним із основних показників оцінки ризиків є ймовірність виникнення події, яка може вплинути на успішність проєкту. Визначення рівня впливу таких подій допомагає оцінити, наскільки серйозно вони можуть зашкодити виконанню завдань. Інший важливий показник — це час реакції на ризик: чим швидше команда може реагувати на ризики, тим менше вони впливатимуть на проєкт. Крім того, важливо враховувати ступінь контролю над ризиком, оскільки деякі ризики є зовнішніми і не можуть бути повністю усунені.

Для проведення глибокого аналізу ризиків необхідно використовувати як якісні, так і кількісні методи оцінки. Це включає збір історичних даних про подібні проєкти та використання прогнозних моделей для оцінки потенційних загроз. Тут на допомогу приходять алгоритми машинного навчання, які здатні автоматично визначати взаємозв'язки між різними ризиковими факторами та оцінювати їхній вплив на проєкт. Застосування таких моделей дозволяє створювати системи, здатні оперативно і точно оцінювати ризики та вносити корективи в плани [3].

Результати оцінки ризиків допомагають приймати рішення щодо розподілу ресурсів для запобігання найбільш ймовірним і значущим загрозам. Це, в свою чергу, сприяє підвищенню надійності виконання проєкту і зниженню ймовірності серйозних відхилень від плану.

В рамках цієї роботи пропонується розробка системи, яка використовує машинне навчання для адаптивної оцінки ризиків. Завдяки алгоритмам машинного навчання, система зможе автоматично прогнозувати ризики на основі великих обсягів даних і миттєво оновлювати оцінки в реальному часі, забезпечуючи

ефективне управління ризиками на всіх етапах проєкту [4].

4. Запропонований алгоритм. Запропонований алгоритм ґрунтується на глибокій нейронній мережі, яка здатна виконувати аналіз і обробку великих масивів даних проєктного планування та ризиків. Модель побудована так, що на вхідний шар подаються дані про тривалість та тип завдань, їх виконавців та затрачений час на виконання. Дані нормалізуються для подальшої обробки прихованими шарами.

Нейронна мережа включає кілька прихованих шарів, серед яких використовуються рекурентні нейронні мережі, оскільки вони ефективно працюють з часовими послідовностями даних, наприклад, змінами у стані проєкту протягом його виконання. Вхідні дані, що складаються з історичної інформації та нових умов, обробляються для виявлення закономірностей, які можуть вплинути на планування або оцінку ризиків [5].

Спеціалізований шар нейронної мережі відповідає за прогнозування можливих ризиків за допомогою алгоритму зворотного поширення помилок. На основі історичних даних модель генерує оцінку ймовірності виникнення ризику.

Ще одна ключова функція алгоритму — прогнозування тривалості. Шар, що відповідає за прогнозування термінів, використовує попередні дані та поточну доступність ресурсів для коригування часових рамок між завданнями.

На виході модель генерує два основні показники: прогнозовану тривалість виконання та рівень ризику. Ці результати інтегруються в систему планування, дозволяючи проєктним менеджерам приймати обґрунтовані рішення та швидко реагувати на зміни в умовах виконання проєкту [6].

5. Детальний опис алгоритму. Початковий етап передбачає підключення до JIRA за допомогою API для отримання даних про завдання зі спринтів. JIRA є популярним інструментом для управління проєктами, тому отримані дані відображають реальні робочі процеси команди. Після підключення через API, з JIRA можна отримати інформацію про попередні спринти. Ці дані включають імена виконавців завдань, тривалість виконання (скільки часу було витрачено на виконання кожного завдання), початкові оцінки часу та пріоритети завдань тощо. Підключення до JIRA дозволяє автоматизовано отримувати дані, що спрощує процес збору інформації для прогнозів, оскільки це робиться без ручного втручання [7].

Так як нейронні мережі працюють із числовими даними, категорійні дані, такі як імена виконавців і пріоритети завдань, перетворюються у числовий формат. Для цього використовуються спеціальні алгоритми перетворення, які змінюють текстові значення на числові коди. Наприклад, кожен виконавець отримує свій унікальний числовий код, що дозволяє моделі аналізувати їх вплив на тривалість виконання завдань.

Також, оскільки дані про час виконання завдань можуть мати різні діапазони (одні завдання можуть тривати години, а інші — дні), необхідно нормалізувати ці значення, щоб привести їх у стандартний формат, що є зручним для навчання моделі. Цього можна досягти за допомогою масштабування, яке перетворює всі значення в діапазон $[0, 1]$. Такий підхід дозволяє підвищити ефективність навчання моделі, оскільки вона працює з даними в одному масштабі [8].

Нейронна мережа складається з вхідного шару, кількох прихованих шарів та

двох вихідних шарів. Кожен шар мережі реалізує функцію, яка обчислюється на основі вагових коефіцієнтів та функції активації. Для прогнозування тривалості завдань використовується регресія, а для оцінки ризиків — класифікація [9].

Вхідний шар приймає набір характеристик завдання. Ці характеристики подаються у вигляді вектора, де кожен елемент відповідає певній характеристиці, такий як:

- виконавець (закодований як числове значення);
- пріоритет завдання;
- тип завдання (наприклад, «feature», «bug» тощо);
- початкова оцінка часу;
- витрачений час.

Припустимо, що вхідний вектор можна описати як:

$$X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n],$$

де:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — це числові значення кожної характеристики.

Модель містить два приховані шари, які використовують функцію активації Rectified Linear Unit (ReLU). Формально функція ReLU визначається як:

$$\text{ReLU}(z) = \max(0, z),$$

де ця функція вибрана тому, що вона дозволяє уникнути проблеми «зникаючого градієнта» та сприяє ефективному навчанню глибоких нейронних мереж.

Кожен нейрон у прихованому шарі обчислює лінійну комбінацію вхідних значень:

$$z = \sum_{i=1}^n w_i x_i + b,$$

де:

- w_i — вагові коефіцієнти;
- b — зміщення (bias).

Значення z передається через функцію активації ReLU, що дозволяє моделі враховувати лише позитивні значення для подальших обчислень.

Мережа має два виходи: один для прогнозування тривалості завдання, інший для оцінки ризиків. Оскільки задача прогнозування є регресійною (тривалість — це безперервне число), використовуються лінійні нейрони без активації:

$$\hat{y}_{duration} = w \times z + b,$$

де:

- $\hat{y}_{duration}$ — прогнозоване значення тривалості.

Для задачі оцінки ризиків використовується бінарна класифікація, тому вихідний шар використовує сигмоїдну функцію активації:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}.$$

Значення на виході в інтервалі $[0, 1]$ визначає ймовірність ризику виконання завдання [10].

Для навчання нейронної мережі використовуються дві різні функції втрат:

1. Середньоквадратична похибка (MSE) для прогнозування тривалості:

$$L_{duration} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{duration,i} - \hat{y}_{duration,i})^2,$$

де:

- $y_{duration,i}$ — це фактична тривалість;
- $\hat{y}_{duration,i}$ — прогнозоване значення для завдання i .

2. Бінарна крос-ентропія для оцінки ризиків:

$$L_{risk} = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{risk,i} \log(\hat{y}_{risk,i}) + (1 - y_{risk,i}) \log(1 - \hat{y}_{risk,i})),$$

де:

- $y_{risk,i}$ — фактичне значення ризику для завдання i ;
- $\hat{y}_{risk,i}$ — прогнозована ймовірність ризику.

Для оптимізації використовується алгоритм Adam (Adaptive Moment Estimation), який є варіантом градієнтного спуску. Алгоритм адаптивно оновлює ваги моделі на основі моментів першого та другого порядку градієнтів:

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t,$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2,$$

де:

- g_t — градієнт функції втрат;
- m_t та v_t — моменти;
- β_1, β_2 — параметри згладжування.

Оптимізатор Adam використовується через його стійкість до зміни масштабів градієнтів і стабільність у процесі навчання на різних наборах даних. Це особливо важливо для задач прогнозування, де дані можуть бути неоднорідними за своїм масштабом (наприклад, різні естимейти часу) [11].

Після навчання модель перевіряється на тестовій вибірці даних, щоб визначити, наскільки точно вона може передбачати результати. Потім нові завдання подаються на вхід моделі для прогнозування тривалості їх виконання і рівня ризику. Це дозволяє менеджерам проєктів отримувати прогнози ще до початку роботи над завданнями, допомагаючи краще планувати час і ресурси [12].

6. Висновки. Запропонований алгоритм для планування проєктів на основі машинного навчання має низку переваг. Він не лише прогнозує тривалість завдань, але й оцінює ризики, що дає змогу проєктним командам реагувати на можливі проблеми до їх виникнення. Алгоритм використовує рекурентні нейронні мережі для обробки даних і враховує такі ключові показники, як виконавець, початковий естимейт, витрачений час і пріоритет та тип завдання.

Завдяки своїй здатності працювати навіть із невеликими наборами даних, алгоритм є гнучким і придатним для багатьох типів проєктів, незалежно від їх масштабу. Навіть якщо дані обмежені, модель може ефективно навчатися

та генерувати корисні прогнози, що є значною перевагою в умовах, коли доступність історичних даних мінімальна. Однак, із розширенням обсягів даних точність прогнозів і оцінка ризиків значно покращуються.

Ключова перевага в тому, що алгоритм дозволяє автоматично оновлювати плани на основі змін у реальному часі. Це значно полегшує управління великими, складними проєктами, де фактори ризику і непередбачувані події можуть суттєво впливати на результати.

Список використаної літератури

1. Kerzner H. Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling. John Wiley & Sons, 2017. P. 129–133.
2. Shtub A., Bard J. F., Globerson S. Project Management: Processes, Methodologies, and Economics. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2005. P. 215–223.
3. Hillson D. Managing Risk in Projects. New York : Routledge, 2017. P. 145–167.
4. Raz T., Shenhar A. J., Dvir D. Risk management, project success, and technological uncertainty. *R&D Management*. 2002. Vol. 32, No. 2. P. 101–109. DOI: <https://doi.org/10.1111/1467-9310.00243>
5. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016. P. 315–350.
6. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2nd Edition. Springer Series in Statistics : Springer, 2009. P. 389–400.
7. Rapp K. Mastering JIRA 7: An expert guide to building and managing JIRA projects. Packt Publishing, 2018. P. 89–105.
8. Nielsen M. A. Neural Networks and Deep Learning. Determination Press, 2015. P. 120–145.
9. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer-Verlag New York : Springer, 2006. P. 205–250.
10. Glorot X., Bordes A., Bengio Y. Deep sparse rectifier neural networks. *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. Fort Lauderdale, FL, USA, 2011. Vol. 15. P. 315–323.
11. Kingma D. P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations (ICLR) : Main Conference — Poster Presentations*. Ithaca, NY: ArXiv, 2015. P. 1–13.
12. Schmidhuber J. Deep learning in neural networks: An overview. *Neural Networks*. 2015. Vol. 61. P. 85–117.

Mykhailov N. O. Adaptive model for project planning and risk assessment using machine learning.

Effective project management in the context of constantly changing market demands and technological progress is essential for the success of companies. Optimizing the planning process and risk management is key to improving result quality and reducing project timelines. Traditional methods like Critical Path Method and Program Evaluation and Review Technique help structure project tasks but often fail to account for dynamic changes and unforeseen risks.

The application of modern technologies, such as machine learning, enables the development of flexible and adaptive management systems that incorporate historical data and real-time project changes. Machine learning algorithms can accurately forecast task durations, assess risks, and optimize resource allocation. This article focuses on developing an adaptive model that improves planning accuracy and minimizes risks during project execution.

Keywords: machine learning, risk assessment, neural networks, project management, artificial intelligence, data processing, optimization methods, computational methods, intelligent systems.

References

1. Kerzner, H. (2017). *Project Management: A Systems Approach to Planning, Scheduling, and Controlling*. John Wiley & Sons.
2. Shtub, A., Bard, J. F., & Globerson, S. (2005). *Project Management: Processes, Methodologies, and Economics*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
3. Hillson, D. (2017). *Managing Risk in Projects*. New York: Routledge.
4. Raz, T., Shenhar, A. J., & Dvir, D. (2002). Risk management, project success, and technological uncertainty. *R&D Management*, 32(2), 101–109. <https://doi.org/10.1111/1467-9310.00243>
5. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
6. Hastie, T., Tibshirani, R., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction. 2nd Edition*. Springer Series in Statistics: Springer.
7. Rapp, K. (2018). *Mastering JIRA 7: An expert guide to building and managing JIRA projects*. Packt Publishing.
8. Nielsen, M. A. (2015). *Neural Networks and Deep Learning*. Determination Press.
9. Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York: Springer.
10. Glorot, X., Bordes, A., & Bengio, Y. (2011). Deep sparse rectifier neural networks. *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*. Fort Lauderdale, FL, USA, 15.
11. Kingma, D. P., & Ba, J. (2015). Adam: A method for stochastic optimization. *International Conference on Learning Representations (ICLR)*. Ithaca, NY: ArXiv.
12. Schmidhuber, J. (2015). Deep learning in neural networks: An overview. *Neural Networks*, 61, 85–117.

Одержано 09.09.2024

УДК 510

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).223-229](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).223-229)І. А. Мич¹, В. В. Ніколенко², О. В. Варцаба³, Н. І. Когут⁴

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук

ihor.mych@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3392-1442>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри інформаційних управляючих систем та технологій,
кандидат фізико-математичних наук

volodymer.nikolenko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0071-6896>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики

olena.vartsaba@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9158-2365>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістр факультету математики та цифрових технологій

kohut.nikita@student.uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3305-9948>

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ ДЕДЕКІНДА

У даній роботі показано, що клас монотонних функцій співпадає з класом тупикових диз'юнктивних нормальних форм (ТДНФ). Монотонні функції від n змінних можна задати на вершинах n -мірного кубу. У роботі знаходяться всі монотонні функції від n змінних ($n = 1, 2, \dots, 13$), які є одноярусними ТДНФ. У даній роботі запропонований алгоритм для знаходження монотонних функцій, які є одноярусними тупиковими диз'юнктивними нормальними формами для n змінних.

Ключові слова: монотонні функції, проблема Дедекінда, класи Поста, одноярусні монотонні функції.

1. Вступ. У роботі проведені дослідження класу монотонних функцій багатьох змінних. Вивчена структура класу тупикових диз'юнктивних нормальних форм. Оскільки клас монотонних функцій для $n > 9$ майже невивчений, то дана робота присвячена дослідженню підкласів монотонних функцій для $n = 9, 10, 11, 12, 13$. Монотонні функції знаходять широке застосування в теорії перемикальних схем, у криптографії, у теорії груп і кілець, а також інших алгебраїчних структур.

Функція $f(x) : Z_2^n \rightarrow Z_2$ називається монотонною, якщо для будь-яких двох порівнювальних наборів $x, y \in Z_2^n$ виконується умова $f(x) \leq f(y)$. Нехай D^n — множина всіх монотонних булевих функцій з Z_2^n . Задача визначення потужності множини $|D^n|$ називається проблемою Дедекінда, а безпосередньо потужність множини $d_n = |D^n|$ називається числом Дедекінда для вказаного n .

У 1897 році Дедекінд розв'язав цю задачу для $n = 4$, у 1940 році Черч для $n = 5$ та Вард для $n = 6$ у 1946 році. На даний час відомі значення числа Дедекінда для булевих функцій від семи, восьми та дев'яти змінних [1]. У [2] Відеман

підрахував число монотонних функцій для восьми змінних. Цей результат був підтверджений у [3].

У 1954 році Гільберт отримав таку оцінку числа Дедекінда $2^{C_{n, [n/2]}} \leq d_n \leq n^{C_{n, [n/2]+2}}$. Надалі верхня оцінка була покращена до $3^{C_{n, [n/2]}}$. Відомі роботи [2, 3, 4, 5], у яких було покращено цю оцінку.

У роботі [6] показано, що за характеристикою Поста можна побудувати сімнадцять непорожніх класів, які утворюють решітку Поста. Для тринадцяти класів знайдені формули обчислення потужностей цих класів для довільного n . Клас монотонних функцій — це об'єднання підкласів $n_0, n_3, n_9, n_{12}, n_{14}$. Для класів n_0, n_9, n_{14} знайдені оцінки обчислення потужностей для довільної кількості змінних, а для класів n_3, n_{14} такі оцінки не знайдені.

2. Основні результати.

Означення 1. *Елементарною кон'юнкцією, утвореною із булевих змінних $X_1, X_2, \dots, X_n$, називається вираз вигляду $X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_k}$, де $k \leq n$ та $i_p \neq i_q$, якщо $p \neq q$.*

Ранг елементарної кон'юнкції це число k , яке визначає кількість змінних, які входять до її складу.

Твердження 1. *Всі елементарні кон'юнкції є монотонними функціями.*

Доведення випливає з того факту, що кон'юнкція є монотонною функцією, а клас монотонних булевих функцій є замкнутим.

Означення 2. *Диз'юнктивною нормальною формою називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій.*

Твердження 2. *Всі диз'юнктивні нормальні форми є монотонними функціями.*

Доведення аналогічне доведенню попереднього твердження.

Означення 3. *Тупиковою диз'юнктивною нормальною формою монотонної функції називається диз'юнктивна нормальна форма, у якій ні одна елементарна кон'юнкція не є власною частиною іншої елементарної кон'юнкції.*

Теорема 1. *Тупикові диз'юнктивні нормальні форми є канонічними.*

Доведення. Доведемо, що кожна монотонна функція має єдину канонічну тупикову диз'юнктивну нормальну форму.

Випишемо системи тотожностей булевої алгебри, які відносяться до монотонних функцій.

- | | |
|-----------------------|---|
| 1. $0 \wedge 0 = 0$; | 1. $x \wedge x = x$; |
| 2. $0 \vee 0 = 0$; | 2. $x \vee y = y \vee x$; |
| 3. $1 \wedge 1 = 1$; | 3. $x \wedge y = y \wedge x$; |
| 4. $1 \vee 1 = 1$; | 4. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$; |
| 5. $0 \wedge x = 0$; | 5. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$; |
| 6. $0 \vee x = x$; | 6. $(x \vee y) \wedge z = x \wedge z \vee y \wedge z$; |
| 7. $1 \wedge x = x$; | 7. $x \vee y \wedge z = (x \vee y) (x \vee z)$; |
| 8. $1 \vee x = 1$; | 8. $x \vee x \wedge y = x$; |
| 9. $x \vee x = x$; | 9. $x (x \vee y) = x$. |

Легко показати, що якщо у формулу монотонної функції входять константи нуля та одиниці, то їх можна поглинути, використовуючи тотожності 1–8, крім випадку, якщо функції є константою нуля або одиниці.

За допомогою тотожностей 9–18 отримаємо диз'юнктивну нормальну форму, яка є тупиковою. Доведемо, що тупикова диз'юнктивна нормальна форма є канонічною. Нехай монотонна функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має дві тупикові диз'юнктивні нормальні форми $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_l$ і $q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_k$. Зрозуміло, що $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_l = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_k$. Покажемо, що $\forall p_i, i = 1, 2, \dots, l, \exists q_j, j = 1, 2, \dots, k$, такі, що p_i і q_j лексикографічно співпадають. Нехай $p_i = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}$. Розглянемо функцію $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на наборі $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = 1$, а решта змінних $x_{i_s} = 0; s \notin \{1, 2, \dots, m\}$. На цьому наборі $p_i = 1$, а тому і $F(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$. У цьому випадку повинна існувати $q_j = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}$, яка на цьому наборі дорівнює одиниці, а це можливо тільки тоді, якщо кожна змінна $x_{j_r}, r \in \{1, 2, \dots, l\}$ належить p_i .

Розглянемо випадок, коли q_j є власною частиною p_i . На наборі, для якого $x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j_l} = 1$, а решта змінних рівна нулю, отримаємо, що в диз'юнктивній нормальній формі $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_l$ повинна існувати елементарна кон'юнкція p_v , яка є власною частиною p_i . Це протирічить тому, що $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_l$ є тупиковою диз'юнктивною нормальною формою. Теорема доведена.

Означення 4. *Тупиковою диз'юнктивною нормальною формою k -го порядку називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій, які мають ранг k .*

Наприклад, $x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_5 \vee x_1x_2x_5$ — тупикова диз'юнктивна нормальна форма третього порядку, а $x_1x_2x_3x_4x_5$ — п'ятого порядку.

Потужність тупикової диз'юнктивної нормальної форми — це число, що дорівнює кількості диз'юнктивів у диз'юнктивній нормальній формі.

Наприклад, $|x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_4x_5| = 3$, а $|x_1 \vee x_3x_4| = 2$.

Позначимо через $D_{i,j}^n$ — множину тупикових диз'юнктивних нормальних форм від n змінних i -го порядку з рангом j .

Для $n = 4$ випишемо всі елементи множини $D_{i,j}^4$, і знайдемо формули для знаходження потужності $D_{i,j}^4$.

- 1) $D_{1,1}^4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, |D_{1,1}^4| = C_4^1 = 4$.
- 2) $D_{1,2}^4 = \{x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_3, x_1 \vee x_4, x_2 \vee x_3, x_2 \vee x_4, x_3 \vee x_4\}, |D_{1,2}^4| = C_4^2 = 6$.
- 3) $D_{1,3}^4 = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_4, x_2 \vee x_3 \vee x_4, x_2 \vee x_3 \vee x_4\}, |D_{1,3}^4| = C_4^3 = 4$.
- 4) $D_{1,4}^4 = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4\}, |D_{1,4}^4| = C_4^4 = 1$.
- 5) $D_{2,1}^4 = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}, |D_{2,1}^4| = C_4^2 = 6$.
- 6) $D_{2,2}^4 = \{x_1x_2 \vee x_1x_3, x_1x_2 \vee x_1x_4, x_1x_2 \vee x_2x_3, x_1x_2 \vee x_2x_4, x_1x_2 \vee x_3x_4, x_1x_3 \vee x_1x_4, x_1x_3 \vee x_2x_3, x_1x_3 \vee x_2x_4, x_1x_3 \vee x_3x_4, x_1x_4 \vee x_2x_3, x_1x_4 \vee x_2x_4, x_1x_3 \vee x_3x_4, x_2x_3 \vee x_2x_4, x_2x_4 \vee x_3x_4, x_2x_3 \vee x_3x_4\}, |D_{2,2}^4| = C_6^2 = 15$.

Аналогічно, знаходимо потужність решти множин $D_{i,j}^4$, а саме:

$$|D_{2,3}^4| = C_6^3 = 20; \quad |D_{2,4}^4| = C_6^4 = 15; \quad |D_{2,5}^4| = C_6^5 = 6; \quad |D_{2,6}^4| = C_6^6 = 1;$$

$$|D_{3,1}^4| = C_4^3 = 4; \quad |D_{3,2}^4| = C_4^2 = 6; \quad |D_{3,3}^4| = C_4^3 = 4;$$

$$|D_{3,4}^4| = C_4^4 = 1; \quad |D_{4,1}^4| = C_4^4 = 1.$$

Означення 5. *Тупикова диз'юнктивна нормальна форма називається одноярусною, якщо вона є диз'юнкцією елементарних кон'юнкцій, які мають однаковий ранг.*

Твердження 3. *Кількість одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм для чотирьох змінних дорівнює 94 і обчислюється за формулою*

$$\sum_{t=1}^4 C_{C_4^1}^t + \sum_{t=1}^4 C_{C_4^2}^t + \sum_{t=1}^4 C_{C_4^3}^t + \sum_{t=1}^4 C_{C_4^4}^t.$$

У даній роботі запропонований алгоритм для знаходження монотонних функцій, які є одноярусними тупиковими диз'юнктивними нормальними формами для n змінних.

Узагальнюючи міркування, наведені для $n = 4$, отримаємо відповідні формули для обчислення одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм для n змінних.

Теорема 2. *Кількість одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм дорівнює*

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^n C_{C_n^1}^t + \sum_{t=1}^n C_{C_n^2}^t + \dots + \sum_{t=1}^n C_{C_n^n}^t &= |D_{1,1}^n| + |D_{1,2}^n| + \dots + |D_{1,n}^n| + \\ &+ |D_{2,1}^n| + |D_{2,2}^n| + \dots + |D_{2,n}^n| + \dots + |D_{n,1}^n| + |D_{n,2}^n| + \dots + |D_{n,n}^n|. \end{aligned}$$

У даній роботі розроблено програмне забезпечення на мові Python для обчислення одноярусних тупикових диз'юнктивних нормальних форм.

Дана мова програмування має вбудовану підтримку роботи з великими числами (довга арифметика), оскільки вже при значеннях $n \geq 7$ числові операнди не можуть бути представлені стандартними 64-бітними типами даних. Python-скрипт є прямою реалізацією вище наведених формул — одним циклом обчислюється сума $|D_{1,1}^n| + |D_{1,2}^n| + \dots + |D_{n,n}^n|$, а іншим — значення кожного доданку, тобто $\sum_{t=1}^n C_{C_n^i}^t$. Окрім цього, застосовані наступні оптимізації, необхідні для отримання бажаного інтервалу результатів:

- Обчислення біноміального коефіцієнту C_n^k реалізовано як функцію-підпрограму. Для невеликих чисел, підійшла б рекурсивна реалізація даної формули: $C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$, проте в нашому випадку було застосоване усунення хвостової рекурсії (tail recursion elimination), щоб уникнути переповнення стеку.
- Додатково в функцію обчислення біноміального коефіцієнту додано кешування отриманих значень, із зберіганням їх у хеш-мапі.
- Вхідні параметри n , k хешуються за допомогою функції парування Сзудзіка [7], що дозволяє уникнути створення списків чи великих рядків при зберіганні значення-ключа в хеш-мапі.
- Весь скрипт був паралелізований за допомогою вбудованого модуля concurrent. Це дозволило розподілити обчислення кожного із значень n між різними ядрами процесора.

Алгоритм можна і надалі оптимізувати, проте даних покращень достатньо для отримання необхідних емпіричних даних для цієї роботи.

Позначимо кількість одноярусних монотонних функцій для довільного n через M'_n . Після близько 2 годин виконання програми на 16-ядерному Intel процесорі, отримали результати для усіх значень n від 1 до 13, які наведені у табл. 1.

Таблиця 1.

Кількість одноярусних монотонних функцій

n	M'_n	d_n
1	1	3
2	4	6
3	15	20
4	94	168
5	2109	7581
6	1114236	7828354
7	68723671291	2414682040998
8	1180735735906024030714	56130437228687557907788
9	170141183460507917357914971986913657849	28638657766829841112846915 1667598498812366
10	723700557733555322308782897512730417919714 7198604070555943173844710572689400	
11	238170513177184465895202425368741325817044 946084516042231526158512054234356305294904 144148681975608466856729790283581642146941 68094211837943	
12	141812983367708498267942666831007057202511 448421643827125349472119773535022654196943 944209450975037768339007732459544512725221 726759486456306391423731808917670558303020 063768732533713950908137270269160833647989 425881755169137192813409227664868035160693 806114244902552366349295606	
13	738758609270024209965454657683069677260386 656729278905586842644232395681812556747321 788066586922125536827933697818591623337035 720169993336001366030397874589276419552284 835453970579351391959773273488415652976103 375342719551996969762427017855859631621725 784601710328953268332288528234864115228186 588666802595591076050723075869603653902072 610273009464776994054492247292748821466108 364060833431050467374018687430061639026192 717549361179136998494285354179742122679355 281943238944043468706196125572554998224378 5045998321653	

Оскільки наразі відомі значення чисел Дедекінда до $n = 9$, то зобразимо на графіку відносну частку одноярусних монотонних функцій від загальної кількості монотонних функцій (M'_n/d_n) .

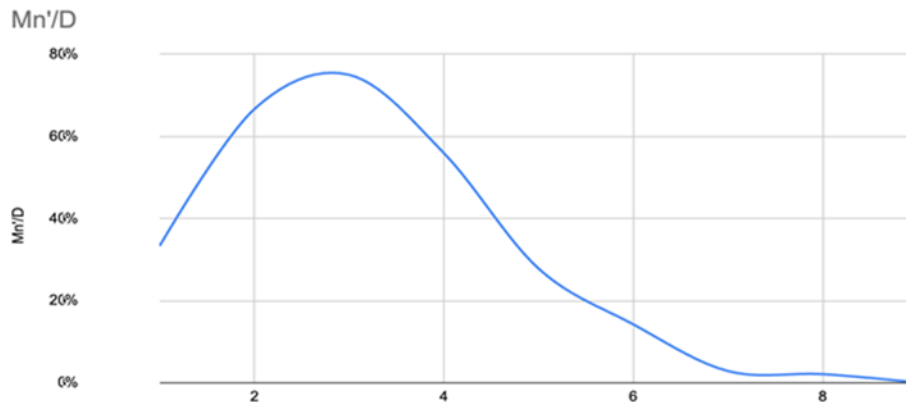


Рис. 1. Графік функції $y_n = M'_n/d_n$.

3. Висновки. У роботі показано, що для $n = 13$ число однарусних монотонних булевих функцій більше ніж 10^{518} . Через це обчислення кількості монотонних функцій, тобто знаходження чисел Дедекінда, яке значно перевищує кількість однарусних ТДНФ не є перспективною. Представляє інтерес аналітичне описання підкласів n_3 , n_{14} монотонних функцій і знаходження їх потужності. Інший напрям у знаходженні числа Дедекінда полягає у поділі множини монотонних функцій на класи функцій, які є багаторусними диз'юнктивними нормальними формами. У наступній роботі планується дослідження монотонних функцій, які належать кільком ярусам n -мірного кубу.

Список використаної літератури

1. Van Hirtum L., De Causmaecker P., Goemaere J., et al. A computation of D(9) using FPGA Supercomputing. Published online. 2023. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.03039>
2. Wiedemann D. A computation of the eighth Dedekind number. *Order*. 1969. Vol. 8, No. 1. P. 5–6. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00385808>
3. Fidytek R., Mostowski A., Somla R., Szepietowski A. Algorithms counting monotone Boolean functions. *Inform. Process. Lett.* 2011. Vol. 79, No. 5. P. 203–209. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(00\)00230-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(00)00230-1)
4. Bakoev V. On more way for counting monotone Boolean functions. *Thirteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*. Pomorie : Bulgaria, June 15–21, 2012. P. 47–52.
5. Pawelski B. On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. 2021. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.13997>
6. Мич І. А., Ніколенко В. В., Варцаба О. В. Проблема Дедекінда та класи Поста. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування інформатики»*. 2022. Вип. 67, № 5. С. 42–50. URL: <https://jnas.nbuv.gov.ua/article/UJRN-0001383907> (дата звернення: 09.07.2024).
7. Szudzik M. An Elegant Pairing Function. URL: <https://szudzik.com/ElegantPairing.pdf> (date of access: 11.07.2024).
8. Kleitman D. On Dedekind's Problem: The Number of Monotone Boolean Functions *Proc. Amer. Math. Soc.* 1969. Vol. 21. P. 677–682.
9. Yusun T. Counting inequivalent monotone Boolean functions. 2012. URL: <https://sfu.ca/~tyusun/inequivalentMBF.html> (date of access: 09.07.2024).

Mych I. A., Nykolenko V. V., Vartsaba O. V., Kohut N. I. On one approach to solving the Dedekind problem.

This paper demonstrates that the class of monotone functions coincides with the class

of dead-end disjunctive normal forms (DNF). Monotonic functions of n variables can be defined on the vertices of an n -dimensional cube. The paper contains all monotonic functions of n variables ($n = 1, 2, \dots, 13$), that are single-tier TDNF. It proposes an algorithm for finding monotone functions that are single-level dead-end disjunctive normal forms for n variables.

Keywords: monotonic functions, Dedekind's problem, Post classes, single-level monotonic functions.

References

1. Van Hirtum, L., De Causmaecker, P., Goemaere, J., & et al. (2023). A computation of D(9) using FPGA Supercomputing. Published online. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.03039>
2. Wiedemann, D. (1969). A computation of the eighth Dedekind number. *Order*, 8(1), 5–6. <https://doi.org/10.1007/BF00385808>
3. Fidytek, R., Mostowski, A., Somla, R., & Szepietowski, A. (2011). Algorithms counting monotone Boolean functions. *Inform. Process. Lett.*, 79(5) 203–209. [https://doi.org/10.1016/S0020-0190\(00\)00230-1](https://doi.org/10.1016/S0020-0190(00)00230-1)
4. Bakoev, V. (June 15–21, 2012). On more way for counting monotone Boolean functions. *Thirteenth International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory*. Pomorie: Bulgaria.
5. Pawelski, B. (2021). On the number of inequivalent monotone Boolean functions of 8 variables. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2108.13997>
6. Mych, I. A., Nykolenko, V. V., & Vartsaba, O. V. (2022). Dedekind's problem and Post's classes. *International Scientific Technical Journal "Problems of control and informatics"*, 67(5), 42–50. Retrieved from <https://jnas.nbu.gov.ua/article/UJRN-0001383907> [in Ukrainian].
7. Szudzik, M. An Elegant Pairing Function. Retrieved from <https://szudzik.com/ElegantPairing.pdf>
8. Kleitman, D. (1969). On Dedekind's problem: the number of monotone Boolean functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21, 677–682.
9. Yusun, T. (2012). Counting inequivalent monotone Boolean functions. Retrieved from <https://sfu.ca/~tyusun/inequivalentMBF.html>

Одержано 01.11.2024

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).230-237](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).230-237)**В. В. Поліщук¹, І. В. Поліщук², А. А. Матей³, Ю. Ю. Феделеш⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри програмного забезпечення систем,
доктор технічних наук, професор
volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
асистент кафедри програмного забезпечення систем
inna.polishchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6395-4744>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
andrej.matey@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0280-1763>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
yurii.fedelesh@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8512-4358>

НЕЧІТКА МОДЕЛЬ ОЦІНКИ БЕЗПЕКИ МІЖНАРОДНИХ ТА ТРАНСКОРДОННИХ ПРОЦЕСІВ СПІВРОБІТНИЦТВА З УРАХУВАННЯМ РИЗИКОВИХ ФАКТОРІВ

Проведено дослідження актуальної задачі розроблення нечіткої моделі оцінки безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва, з урахуванням ризикових факторів та експертних висновків щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпеки країн-партнерів.

В основу дослідження покладений апарат нечітких множин, що базується на інтервалах оцінок. Кожен ризик-орієнтований фактор впливу на виконання міжнародних та транскордонних процесів співробітництва оцінюється лінгвістичним висновком експерта щодо рівня ймовірності настання ризикової ситуації, описану відповідним критерієм та числа впевненості міркувань експерта для такого висновку. Новаторською особливістю моделі є врахування експертного висновку щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпеки країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві. Модель розкриває нечіткість вхідних оцінок, здатна вивести лінгвістичне значення рівня безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва та його оцінку достовірності, чим підвищує ступінь обґрунтованості прийняття подальших управлінських рішень.

Подальше дослідження проблематики вбачаємо в розробленні математичних моделей та програмної підтримки для оцінювання проектів транскордонного співробітництва за умов гарантування національних безпеки країн-партнерів при реалізації проекту.

Ключові слова: нечітка модель, прийняття рішень, оцінювання ризиків, національна безпека, транскордонне співробітництво, міжнародне співробітництво.

1. Вступ. У сучасних умовах глобалізації транскордонне співробітництво є важливим інструментом для розвитку економіки та підвищення рівня життя громадян. Оцінка безпеки таких процесів дозволяє ефективно інтегруватися у світову економіку, зменшувати ризики для національної безпеки та оптимізувати співпрацю з іншими країнами.

Україна активно рухається до європейської інтеграції. Важливим аспектом цього процесу є розвиток транскордонного співробітництва з сусідніми країнами ЄС. Участь у міжнародних та транскордонних проектах може бути пов'язана з різноманітними ризиками, такими як політична нестабільність, корупція, кіберзагрози тощо. Дослідження цих ризиків дозволить Україні більш точно оцінювати потенційні загрози та розробляти стратегії для їх мінімізації. Також, оцінка ризиків сприятиме більш ефективному та безпечному входженню в європейський простір.

Безпечна взаємодія з міжнародними партнерами є критично важливою для збереження суверенітету та стабільності держави. Оцінка безпеки таких процесів сприяє захисту національних інтересів у міжнародній співпраці. Таким чином, актуальність проведеного дослідження визначається необхідністю безпечної та ефективної міжнародної інтеграції, мінімізації ризиків у транскордонному співробітництві та забезпечення національної безпеки.

Основною метою даного дослідження є розроблення нечіткої моделі оцінки безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва з урахуванням ризикових факторів та експертних висновків щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпек країн-партнерів.

2. Огляд літератури. Транскордонне співробітництво — це одна з форм сприяння регіональному розвитку, що виникає в результаті стратегічних зусиль різних учасників, заснованих на довірі, взаєморозумінні та бажанні до співпраці. У роботі [1] досліджуються різноманітні моделі та доводиться факт, що в ЄС не існує єдиної найкращої стратегії транскордонного співробітництва. Багато авторів зосереджують увагу на розв'язання чітких прикладних проблем шляхом міжнародного або транскордонного співробітництва [2–4]. Перешкоди для розвитку транскордонного співробітництва існують у кількох вимірах. Внутрішні бар'єри впливають найбільше на соціальні цілі співпраці. Їх можна подолати через політику муніципалітетів та підприємців [5]. Зовнішні бар'єри характерні для периферійних регіонів, які віддалені від національних та регіональних центрів прийняття рішень, що призводить до ряду негативних наслідків. Ефективним інструментом їх подолання може бути транскордонне співробітництво. А для можливості оцінювання таких процесів потрібно сучасні системи підтримки прийняття рішень [4].

Методи, що базуються на теорії нечіткої математики, можуть забезпечити аналітичну підтримку для якісних процесів прийняття рішень на будь-якому рівні управління [6]. Для успішного розвитку регіонів потрібно розробляти інноваційні інструменти та системи знань, які підтримуватимуть їхню сталість, з метою забезпечення інформаційної безпеки та в інтересах національних безпек країн-партнерів. Для відображення знань про об'єкт дослідження варто використовувати теорію нечітких множин [7] та сучасні підходи до використання інтелектуального аналізу знань у системах підтримки прийняття рішень [8].

Таким чином, існує актуальність розробки моделей оцінки безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва з урахуванням ризикових факторів.

3. Матеріали та методи. Нехай системну теоретико-множинну модель задачі оцінювання безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробі-

тництва, представимо наступним чином:

$$\{P, K_R, M_R, L | Y(f)\}. \quad (1)$$

P — деякий процес міжнародного або транскордонного співробітництва. Процес транскордонного співробітництва — це форма взаємодії між прикордонними регіонами різних держав, спрямована на спільне вирішення економічних, соціальних, екологічних, культурних та інших проблем, які виникають у прикордонних зонах. Таке співробітництво сприяє покращенню взаєморозуміння між країнами, розвитку інфраструктури, торгівлі, науки, а також зміцненню миру та стабільності в регіонах, що межують.

K_R — інформаційна модель критеріїв оцінювання ризик-орієнтованих факторів впливу, які впливають на успішність досягнення мети процесу міжнародного та транскордонного співробітництва.

M_R — нечітка математична модель оцінювання ризиків для гарантування безпеки у процесі міжнародного та транскордонного співробітництва.

L — експертні висновки щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпек країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві.

В результаті отримуємо вихідну оцінку $f = \mu_Y(f(m_r))$ та рівень Y , що містить зміст рівня безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва.

K_R — інформаційна модель критеріїв оцінювання ризик-орієнтованих факторів впливу, які впливають на успішність досягнення мети процесу міжнародного та транскордонного співробітництва.

Питання оцінювання ризик-орієнтованих факторів впливу на успішність досягнення мети виконання будь-якого процесу дуже складне. В залежності від процесу потрібно набудовувати різні показники ризиків. Наприклад, у процесі транскордонного співробітництва можуть виникати такі ризики:

K_{R1} — політична нестабільність.

Зміни урядів, політичні конфлікти або напруженість між країнами можуть перешкоджати реалізації спільних проектів або повністю їх зупинити.

K_{R2} — економічні ризики.

Відмінності у рівні економічного розвитку країн-партнерів, різниця в системах оподаткування, митні бар'єри та нестабільність валютних курсів можуть ускладнювати співпрацю.

K_{R3} — правові та адміністративні перешкоди.

Різні правові системи, законодавчі вимоги, а також бюрократичні процедури в кожній країні можуть гальмувати спільні ініціативи.

K_{R4} — культурні та соціальні відмінності.

Нерозуміння міжкультурних відмінностей або соціальних традицій може призвести до конфліктів або труднощів у комунікації між партнерами.

K_{R5} — екологічні ризики.

Транскордонні проекти, пов'язані з інфраструктурою, можуть мати негативний вплив на довкілля, якщо не врахувати екологічних стандартів і потреб регіонів.

K_{R6} — невідповідність інтересів.

Партнери з різних країн можуть мати різні пріоритети та очікування від

співпраці, що ускладнює узгодження спільних планів і цілей.

K_{R7} — корупція та непрозорість.

Корупційні практики в окремих країнах можуть створювати додаткові труднощі в реалізації проектів, знижуючи ефективність та прозорість використання фінансових ресурсів.

K_{R8} — безпекові ризики.

Загрози тероризму, організованої злочинності, контрабанди, нелегальної міграції можуть негативно вплинути на стабільність регіонів і успішність співпраці.

M_R — нечітка математична модель оцінювання ризиків для гарантування безпеки у процесі міжнародного та транскордонного співробітництва.

Нехай задано процес P міжнародного або транскордонного співробітництва по якому потрібно визначити рівень безпеки. Процес будемо оцінювати згідно запропонованої інформаційної моделі критеріїв K_R , відповідно по критеріях $\widetilde{K}_R = (K_{R1}, K_{R2}, \dots, K_{Rk_R})$. Кожен ризик-орієнтований фактор впливу (критерій ризику) буде оцінюватись гібридним чином, а саме:

- висновків щодо рівня ймовірності настання ризикової ситуації, описану відповідним критерієм $\widetilde{K}_R$. Такі висновки пропонуємо уніфікувати за допомогою одного із термів наступної терм-множини: $T = \{t_1(\text{низький рівень ризику}); t_2(\text{рівень ризику нижче середнього}); t_3(\text{середній рівень ризику}); t_4(\text{рівень ризику вище середнього}); t_5(\text{високий рівень ризику})\}$;
- числа ε впевненості міркувань експерта з інтервалу $[0; 1]$, для кожного висновку за відповідним критерієм $\widetilde{K}_R$. Покладаючи наступний зміст: 0 — мінімальна впевненість у своїх висновках, а 1 відповідно — максимальна.

Представимо нечітку модель оцінювання ризиків для гарантування безпеки у процесі міжнародного та транскордонного співробітництва у вигляді оператора:

$$\eta(t; \varepsilon) \rightarrow m_r. \quad (2)$$

де η — оператор, що ставить у відповідність вихідне нормоване значення ризиків виконання процесу m_r , при вхідних змінних $t; \varepsilon$.

На першому етапі здійснимо фазифікацію вхідних гібридних даних.

Для фазифікації вхідних гібридних даних $(t_u; \varepsilon_u)$, $u = \overline{1, k_R}$ використаємо підхід моделювання нечітких знань у багатовимірному просторі [8]. Наприклад, застосуємо конусоподібну функцію належності двох змінних для об'єднання висновків щодо рівня ймовірності настання ризикової ситуації та числа впевненості міркувань експерта щодо надання свого висновку:

$$O_u = \begin{cases} 100 - 20 \cdot \varepsilon_u, & \text{якщо висновок } t_1; \\ 100 - 40 \cdot \varepsilon_u, & \text{якщо висновок } t_2; \\ 100 - 60 \cdot \varepsilon_u, & \text{якщо висновок } t_3; \\ 100 - 80 \cdot \varepsilon_u, & \text{якщо висновок } t_4; \\ 100 - 100 \cdot \varepsilon_u, & \text{якщо висновок } t_5. \end{cases} \quad (3)$$

$$\omega_u = \sqrt{\frac{(O_u - 100)^2}{100}} + (\varepsilon_u - 1)^2. \quad (4)$$

$$\mu(K_{Ru}) = \begin{cases} 1 - \omega_u, & \text{якщо } \omega_u < 1, \\ 0, & \text{якщо } \omega_u \geq 1. \end{cases} \quad (5)$$

O_u, ε_u — значення u -го критерію $u = \overline{1, k_R}$.

Зміст значення функції належності $\mu(K_{Ru})$ показує рівень критерію, тобто чим більше значення $\mu(K_{Ru})$ тим вищий рівень. А представлення вхідних даних у вигляді лінгвістичної оцінки та впевненості її присвоєння дозволяє більш якісно розкрити міркування експертів.

На другому етапі особа, що приймає рішення (ОПР) вводить вагові коефіцієнти за кожним ризик-орієнтованим фактором впливу (критерієм) на виконання процесу.

Позначимо вагові коефіцієнти $v_u, u = \overline{1, k_R}$, з деякого інтервалу $[1; 10]$. В іншому випадку, критерії ризику можуть бути рівно важливими. Оскільки працюємо у просторі оцінок $[0; 1]$, тоді, аналогічно, потрібно нормувати вагові коефіцієнти:

$$\overline{v}_u = \frac{v_u}{\sum_{u=1}^{k_R} v_u}, \quad u = \overline{1, k_R}. \quad (6)$$

На третьому етапі виведемо агреговану оцінку ризику. Для цього побудуємо функцію належності, як одну із запропонованих згорток, в залежності від побажань ОПР. Не зменшуючи загальності, наприклад, візьмемо середню згортку:

$$m = \sum_{u=1}^{k_R} \overline{v}_u \cdot \mu(K_{Ru}). \quad (7)$$

Отримане значення несе у собі наступний зміст: чим більша агрегована оцінка $m_r \in [0; 1]$, тим менші ризики виконання процесу.

Таким чином, відбувся перехід від висновків щодо рівня ймовірності настання ризикової ситуації та числа впевненості міркувань експерта з цього приводу, до кількісної оцінки, що підвищує ступень обґрунтованості майбутніх рішень.

Нехай експерти, що оцінюють безпеку міжнародних та транскордонних процесів співробітництва висловлюють висновки щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпеки країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві. Для такого висновку введемо лінгвістичну змінну можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпеки країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві $L = \{L_1; L_2; \dots; L_5\}$, де: L_1 — висока можливість; L_2 — можливість вище середнього; L_3 — середня можливість; L_4 — низька можливість; L_5 — дуже низька можливість.

Для інтерпретації залежності вихідної оцінки m_r та експертного висновку L щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпеки країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві, пропонуємо наступну функцію належності [8]:

$$f(m_r) = \begin{cases} 0, & m_r < 0; \\ (m_r)^k, & 0 \leq m_r < 1; \\ 1, & m_r \geq 1. \end{cases} \quad (8)$$

де k — поріг можливості досягнення мети. Значення даного порогу змінюється в залежності експертного висновку L . Наприклад, експериментально поставимо: $k = \frac{2}{9}$ коли маємо експертний висновок L_1 ; $k = \frac{7}{9} - L_2$; $k = \frac{4}{9} - L_3$; $k = \frac{5}{9} - L_4$; $k = \frac{3}{2} - L_5$.

Таким чином, отримано агреговану нормовану оцінку $f(m_r)$ з інтервалу $[0; 1]$.

Рівні Y безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва, представимо наступним чином: y_1 — дуже низький рівень; y_2 — низький рівень; y_3 — середній рівень; y_4 — високий рівень; y_5 — дуже високий рівень. Рівні прийняття рішень Y можна розглядати за допомогою трикутних функцій належності. Це обумовлюється тим, що вони будуть мати перетини вихідних значень, а це дозволить розширити можливості прийняття рішень:

$$\mu_{y_1} = \begin{cases} 1, & f(m_r) \leq \delta - \frac{\delta}{2}; \\ \frac{3\delta - 4 \cdot f(m_r)}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{2} < f(m_r) \leq \delta - \frac{\delta}{4}. \end{cases} \quad (9)$$

$$\mu_{y_2} = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(m_r) - 2\delta}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{2} < f(m_r) \leq \delta - \frac{\delta}{4}; \\ \frac{4\delta - 4 \cdot f(m_r)}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{4} < f(m_r) \leq \delta. \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu_{y_3} = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(m_r) - 3\delta}{\delta}, & \delta - \frac{\delta}{4} < f(m_r) \leq \delta; \\ \frac{5\delta - 4 \cdot f(m_r)}{\delta}, & \delta < f(m_r) \leq \delta + \frac{\delta}{4}. \end{cases} \quad (11)$$

$$\mu_{y_4} = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(m_r) - 4\delta}{\delta}, & \delta < f(m_r) \leq \delta + \frac{\delta}{4}; \\ \frac{6\delta - 4 \cdot f(m_r)}{\delta}, & \delta + \frac{\delta}{4} < f(m_r) \leq \delta + \frac{\delta}{2}. \end{cases} \quad (12)$$

$$\mu_{y_5} = \begin{cases} \frac{4 \cdot f(m_r) - 5\delta}{\delta}, & \delta + \frac{\delta}{4} < f(m_r) \leq \delta + \frac{\delta}{2}; \\ 1, & f(m_r) \geq \delta + \frac{\delta}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

В залежності від того, в який інтервал попадає значення $f(m_r)$, вибираємо ту чи іншу функцію належності μ_y відносно ступеня δ . Ступінь δ належить з інтервалу $[0; 1]$ та налаштовується ОПР, причому при потребі його можна змінювати. Таке налаштування має переваги в тому, що модель легко адаптується для різних процесів транскордонного співробітництва. Оскільки побудовані функції належності мають перетини, то при оцінюванні процесів отримується або один, або два рівні прийняття рішень Y і відповідно таку ж кількість для них достовірностей.

В результаті обчислення, отримаємо Y лінгвістичне значення рівня безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва, а також його оцінку достовірності. Тобто, достовірність того, що оцінка належить до одного, або іншого рівня. ОПР на основі вихідних даних приймає подальші рішення щодо зниження загроз безпеки виконання процесів міжнародних та/або транскордонних процесів співробітництва.

Переваги моделі аргументуються тим, що на основі вхідних гібридних даних розкривається нечіткість вхідних оцінок. Покращується ефективність отримання вхідних оцінок використовуючи досвід, знання та компетенції експертів. Модель здатна вивести кількісне та лінгвістичне значення рівня безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва, чим підвищує ступінь обґрунтованості прийняття подальших управлінських рішень.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі побудована нечітка модель оцінки безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва з урахуванням ризикових факторів. Особливістю моделі є те, що вхідні дані є гібридними, а відповідно мають вищу якість. В основу дослідження покладений апарат нечітких множин, що базується на інтервалах оцінок, показуючи коридор значень прогнозних параметрів. Кожен ризик-орієнтований фактор впливу на виконання міжнародних та транскордонних процесів співробітництва оцінюється лінгвістичним висновком експерта щодо рівня ймовірності настання ризикової ситуації, описану відповідним критерієм та числа впевненості міркувань експерта для такого висновку. Новаторською особливістю моделі є врахування експертного висновку щодо можливості досягнення мети стосовно гарантування національних безпек країн-партнерів при міжнародному або транскордонному співробітництві. Модель розкриває нечіткість вхідних оцінок, здатна вивести лінгвістичне значення рівня безпеки міжнародних та транскордонних процесів співробітництва та його оцінку достовірності, чим підвищує ступінь обґрунтованості прийняття подальших управлінських рішень.

Отримані результати демонструють наукову та прикладну цінність проведеного дослідження. Подальше дослідження проблематики вбачаємо в розробленні математичних моделей та програмної підтримки для оцінювання проєктів транскордонного співробітництва за умов гарантування національних безпек країн-партнерів при реалізації проєкту.

5. Подяка. Наукове дослідження та підготовка статті відбулося в рамках наукового проєкту молодих вчених "Захист інформаційної безпеки при управлінні проєктами міжнародного співробітництва на засадах гарантування національної безпеки України" (ДБ-921М) за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України.

Список використаної літератури

1. Durand A., Decoville A. Multidimensional measurement of the integration between European border regions. *J. Eur. Integrat.* 2020. Vol. 42, No. 2. P. 163–178. DOI: <https://doi.org/10.1080/07036337.2019.1657857>
2. Yue S., Yang X. Establishing a mechanism for international cooperation for Fukushima nuclear-contaminated water monitoring. *Chinese Journal of Population, Resources and Environment.* 2024. Vol. 22, No. 1. P. 20–33. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cjpre.2024.03.003>
3. Wang Q., Ren F., Li R. Assessing the impact of geopolitics on international scientific cooperation — The case of US-China marine pollution research. *Marine Policy.* 2023. Vol. 155. 105723. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.marpol.2023.105723>
4. Skare M., Gavurova B., Polishchuk V. Fuzzy multicriteria evaluation model of cross-border cooperation projects under resource curse conditions. Part B. *Resources Policy.* 2023. Vol. 85. 103871. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2023.103871>
5. Kurowska-Pysz J., Castanho R. A., Naranjo Gómez J. M. Cross-border cooperation: the barriers analysis and the recommendations. *Polish Journal of Management Studies.* 2018. Vol. 17, No. 2. P. 134–147. DOI: <https://doi.org/10.17512/pjms.2018.17.2.12>
6. Sir G. D. B., Çalışkan E. Assessment of development regions for financial support allocation with fuzzy decision making: a case of Turkey. *Soc. Econ. Plann. Sci.* 2019. Vol. 66. P. 161–169. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seps.2019.02.005>
7. Wenshun Lv., Park Ju. H., Lu Ju., Guo R. Adaptive fuzzy output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems in the presence of sensor attacks. *Journal of the Franklin Institute.* 2022. Vol. 360, No. 3. P. 2326–2343. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.10.047>
8. Polishchuk V., Kelemen jr. M., Polishchuk I., Kelemen M. Decision Support System Regarding

the Possibility of Financing Cross-Border Cooperation Projects. *Proceedings of The Seventh International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems. CEUR Workshop Proceedings*. 2024. Vol. 3702. P. 58–71. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-3702/paper6.pdf> (date of access: 18.05.2024).

Polishchuk V., Polishchuk I., Matei A., Fedeleish Yu. A fuzzy model of security assessment of international and cross-border cooperation processes considering risk factors.

Research has been carried out on the urgent task of developing a vague model for assessing the security of international and cross-border cooperation processes, considering risk factors and expert opinions on the possibility of achieving the goal of guaranteeing the national security of partner countries.

The research is based on the apparatus of fuzzy sets, which are based on evaluation intervals. Each risk-oriented factor of influence on the implementation of international and cross-border cooperation processes is evaluated by the expert's linguistic conclusion regarding the level of probability of the occurrence of a risk situation, described by the corresponding criterion and the number of confidences of the expert's reasoning for such a conclusion. An innovative feature of the model is the consideration of an expert opinion on the possibility of guaranteeing the national security of partner countries during international or cross-border cooperation. The model reveals the vagueness of the input estimates and can derive the linguistic meaning of the level of security of international and cross-border cooperation processes and its credibility assessment, which increases the degree of validity of further management decisions.

Further research of the problem is seen in the developed mathematical models and software support for evaluating cross-border cooperation projects under the conditions of guaranteeing the national security of the partner countries during project implementation.

Keywords: fuzzy model, decision-making, risk assessment, national security, cross-border cooperation, international cooperation.

References

1. Durand, A., & Decoville, A. (2020). Multidimensional measurement of the integration between European border regions. *J. Eur. Integrat.*, 42(2), 163–178. <https://doi.org/10.1080/07036337.2019.1657857>
2. Yue, S., & Yang, X. (2024). Establishing a mechanism for international cooperation for Fukushima nuclear-contaminated water monitoring. *Chinese Journal of Population, Resources and Environment*, 22(1), 20–33. <https://doi.org/10.1016/j.cjpre.2024.03.003>
3. Wang, Q., Ren, F., & Li, R. (2023). Assessing the impact of geopolitics on international scientific cooperation — The case of US-China marine pollution research. *Marine Policy*, 155, 105723. <https://doi.org/10.1016/j.marpol.2023.105723>
4. Skare, M., Gavurova, B., & Polishchuk, V. (2023). Fuzzy multicriteria evaluation model of cross-border cooperation projects under resource curse conditions. Part B. *Resources Policy*, 85, 103871. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2023.103871>
5. Kurowska-Pysz, J., Castanho, R. A., & Naranjo Gómez, J. M. (2018). Cross-border cooperation: the barriers analysis and the recommendations. *Polish Journal of Management Studies*, 17(2), 134–147. <https://doi.org/10.17512/pjms.2018.17.2.12>
6. Sir, G. D. B., & Çalışkan, E. (2019). Assessment of development regions for financial support allocation with fuzzy decision making: a case of Turkey. *Soc. Econ. Plann. Sci.*, 66, 161–169. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2019.02.005>
7. Wenshun, Lv., Park, Ju. H., Lu, Ju., & Guo, R. (2022). Adaptive fuzzy output feedback control for a class of uncertain nonlinear systems in the presence of sensor attacks. *Journal of the Franklin Institute*, 360(3), 2326–2343. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.10.047>
8. Polishchuk, V., Kelemen, jr. M., Polishchuk, I., & Kelemen, M. (2024). Decision Support System Regarding the Possibility of Financing Cross-Border Cooperation Projects. *Proceedings of The Seventh International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems. CEUR Workshop Proceedings*, 3702, 58–71. Retrieved from <https://ceur-ws.org/Vol-3702/paper6.pdf>

Одержано 14.09.2024

UDC 004.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).238-248](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).238-248)**M. V. Robotyshyn¹, M. M. Malyar²**¹ Uzhhorod National University,

PhD student

mykola.robotyshyn@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6567-6974>² Uzhhorod National University,

Professor of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics,

Doctor of Technical Sciences

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

THE USE OF MATHEMATIC MODELLING IN FINOPS DOMAIN

The advent of cloud computing has revolutionized the way organizations manage their IT resources, offering scalable and flexible solutions for various operational needs. However, with the increased adoption of cloud services, financial operations (FinOps) have become more complex, presenting challenges in cost management, resource allocation, and financial forecasting. Traditional methods often fail to address these complexities effectively, leading to inefficiencies and suboptimal decision-making. This paper explores the application of mathematical modeling in the FinOps domain as a robust solution to these challenges. By proposing a classification of FinOps problems into distinct classes and suggesting a mathematical formulation for each class, the research aims to enhance the efficacy of FinOps practices. The integration of mathematical models improves accuracy and efficiency while providing a systematic approach to managing financial operations in the cloud. Through case studies and real-world examples, this paper demonstrates the transformative potential of mathematical modelling in driving innovation and operational excellence in FinOps.

Keywords: mathematic modelling, cloud management, data analysis, forecasting, FinOps, optimization processes.

1. Introduction. The rapid advancement and adoption of cloud computing have significantly changed how organizations handle their IT infrastructure. By providing scalable and flexible solutions, cloud technology helps businesses manage their costs more effectively. As a result, companies across various industries have increasingly migrated their operations to the cloud, taking advantage of its cost-saving benefits. However, this shift has also introduced new complexities in financial management. The dynamic and often unpredictable nature of cloud costs has necessitated the development of specialized practices to optimize financial operations in this new environment. This need has given rise to the field of Financial Operations, or FinOps, which focuses on managing cloud spending and maximizing the value derived from cloud investments. FinOps combines financial management principles with the agile, data-driven methodologies inherent to cloud computing, ensuring that organizations can maintain control over their cloud expenses while achieving their strategic objectives.

A central focus of FinOps is to ensure that organizations can effectively manage and optimize their cloud spending. The primary goals of FinOps include cost optimization, financial accountability, and operational efficiency. By fostering a culture of financial responsibility, FinOps encourages collaboration between finance and engineering teams, ensuring that both sides work together to achieve cost-effective

cloud usage. This collaborative approach is guided by core principles such as data-driven decision-making and continuous improvement. FinOps practitioners rely on real-time data and analytics to monitor cloud expenses and make informed decisions that align with the organization's financial objectives. Without a structured FinOps approach, organizations often struggle with overspending, lack of transparency, and inefficiencies in their cloud operations.

These challenges underscore the necessity of FinOps in maintaining control over cloud costs and maximizing the value derived from cloud investments. However, implementing FinOps practices is not without its difficulties, especially when it comes to data analysis. The large amount of data generated by cloud environments can be hard to manage and analyze quickly. This can lead to delays in decision-making and overspending. Another major challenge is predicting and controlling cloud expenses, which can change a lot based on usage patterns and pricing models. This makes it hard for organizations to forecast costs accurately and stay within their budget. Additionally, combining financial data with operational metrics adds another layer of complexity. Effective FinOps requires a complete view that includes both financial information and operational data, like resource usage and performance metrics. However, this is often difficult due to data silos and inconsistent data formats. Mathematical concepts and techniques can help solve these problems. For example, statistical models can forecast cloud costs by looking at past spending patterns. Optimization algorithms can help allocate resources more effectively, ensuring that organizations get the most value from their cloud investments. Machine learning models can also identify unusual patterns and inefficiencies in cloud usage, helping to manage costs proactively and improve operations. By using these mathematical tools, FinOps practitioners can overcome data analysis challenges and manage financial operations in the cloud more effectively.

The relevance of this problem is best demonstrated by the amount of money businesses are willing to invest in its research. The global cloud FinOps market was valued at approximately \$832.2 million in 2023 and is expected to grow to \$2,750.5 million by 2028, reflecting a compound annual growth rate (CAGR) of 18.8% [1]. This significant growth underscores the increasing importance of FinOps as organizations seek to optimize their cloud spending and enhance financial accountability. As businesses continue to migrate to cloud environments, the demand for effective FinOps strategies will only increase. This trend highlights the need for advanced solutions, such as mathematical modeling, to address the complex challenges associated with cloud financial management. Furthermore, there are numerous startups leveraging data analysis, AI, and ML to enhance FinOps practices. These startups are driving innovation by providing tools and platforms that improve cost visibility, optimization, and forecasting. The growing number of these tech-driven startups indicates a strong market trend towards integrating advanced analytics and automation in FinOps [2].

Implementing advanced solutions grounded in mathematical modeling can significantly streamline FinOps processes, allowing companies to shift their focus to other important strategic problems. However, it's important to recognize that such automation isn't a cure-all. While mathematical models and algorithms can automate complex tasks like cost forecasting, resource optimization, and anomaly detection, their effectiveness largely depends on the quality of data and the robustness of the

models used. Automating these processes can indeed reduce manual effort and improve efficiency, freeing up valuable time and resources. This enables teams to address other critical issues, such as innovation, customer experience, and market expansion. However, the initial setup and ongoing maintenance of these advanced solutions require significant investment in both time and expertise. Organizations must ensure they have the right talent and infrastructure to support these technologies.

For example, advanced mathematical models and algorithms can continuously monitor and optimize cloud spending, providing real-time insights and proactive recommendations. This allows FinOps practitioners to move from a reactive approach to a more strategic and proactive one, focusing on long-term financial health and operational excellence. Nevertheless, reliance on automated solutions also requires vigilance; without proper oversight, there's a risk of over-reliance on these tools, potentially missing out on nuanced, human insights.

In general, by leveraging these advanced solutions, companies can achieve a higher level of financial management maturity, ensuring sustainable growth and competitive advantage in the rapidly evolving cloud landscape. However, it's crucial to balance automation with human oversight to maximize the benefits and mitigate potential risks.

This work focuses on providing a comprehensive understanding of the FinOps domain, highlighting the main challenges it faces, and exploring how mathematical modeling can offer solutions. It includes an overview of existing optimization techniques that leverage mathematical modeling and various algorithms to address these challenges. Additionally, this paper contributes a unique classification of FinOps problems based on a mathematical perspective, considering the different types of data used to solve these problems. In the author's opinion, the application of mathematical modeling in FinOps is highly relevant in today's context and continues to trend upward. The insights gained from this research can guide organizations in implementing more effective FinOps practices, ensuring better financial management and operational efficiency in the cloud environment.

2. Different classes of problems in FinOps. The FinOps domain is still evolving, and there is no definitive way to classify the various problems it addresses. Different organizations may prioritize different aspects based on their unique needs and perspectives. For instance, some might focus on operational efficiency and cost control, while others might emphasize the development of robust solutions using advanced mathematical models. Additionally, the type and quality of data available for analysis can also influence how these problems are classified.

The classes defined by the authors in this paper are based on a mathematical perspective, also taking into account the different types of data used to solve these problems. This approach aims to provide a structured method for understanding and addressing FinOps challenges. These classifications are not absolute, and other approaches can be equally valid and useful. Furthermore, the authors' perspective is dynamic and evolves with new innovations and insights in the field. The key is to apply the most relevant methods to effectively manage and optimize financial operations in the cloud.

2.1. Resource utilization. Resource utilization is a common problem for companies that heavily rely on cloud services. The goal is to use exactly as much

as you need at any given moment and not more, because in the cloud, you typically pay for what you use. Depending on a company's maturity, this problem can vary in scale. Efficient resource utilization is crucial for maintaining cost-effective and high-performance cloud operations. Underutilization and overprovisioning are common issues that can lead to unnecessary expenses and reduced operational efficiency.

One major challenge is resources running idle or using significantly less than their capacity. This often happens when resources such as EC2 instances are provisioned based on peak demand but remain underutilized during off-peak times, leading to wasted expenditures. Other common scenarios include forgetting to turn off instances after use, over-provisioning storage volumes, and leaving unused services running. These situations result from not accurately aligning resource provisioning with actual workload requirements, causing financial inefficiencies and wasted cloud spending. To address these issues, data on compute instances such as CPU usage, RAM utilization, and disk I/O can be collected. This time-series data provides a continuous stream of performance metrics over time, enabling detailed analysis. Various methods, from simple statistical techniques to complex machine learning models, can be applied to this data to optimize resource utilization.

Detecting patterns in utilization data is essential for identifying inefficiencies and opportunities for optimization. By analyzing these patterns, organizations can better understand usage trends and predict future demands. This allows for more accurate provisioning of resources, ensuring they are used efficiently. Predictive analytics uses historical data and machine learning algorithms to forecast future resource demands. By predicting usage patterns, organizations can better plan and allocate resources to match demand, reducing idle time and avoiding over-provisioning.

To formalize this approach, let's define an optimization metric and an algorithm. For a single resource, the optimization metric could be the cost over a given day C_d :

$$C_d = \sum_{i=1}^{24} Cost(R, t_i),$$

where $Cost(R, t_i)$ represents the cost of resource R at hour t_i .

For multiple resources, or a workload, the cost can be extended to consider all resources over a 30-day period C_{30} :

$$C_{30} = \sum_{d=1}^{30} C_d.$$

Then we can define f as an algorithm that takes various data sources D (such as CPU usage, RAM utilization, disk I/O, historical data, and forecasted demand) and outputs optimized resource allocations. The cost function can be expressed as:

$$\text{minimize } f(C_{30}, D),$$

where the objective is to minimize 30-day cost given the data D . Now, with this mathematical problem statement, we can use different algorithms as f and different data sources or even different time granularities for D . The reason cost was selected as the metric is that we usually focus on reducing cost. Even though other metrics

could be applied, this one is suitable for quantifying and explaining because cost is a key concept in FinOps.

2.2. Cloud cost forecasting. In mature companies, planning cloud spending in advance is a standard practice, which creates a necessity for accurate cost forecasting. It is essential to ensure that actual spending aligns with these forecasts. Accurate forecasting helps companies to manage their budgets, allocate resources effectively, and avoid unexpected expenses. Forecasting is a well-known problem in the mathematical world, with many established methods available to tackle it. These methods include time series analysis, regression models, machine learning algorithms, and stochastic processes. However, cloud cost forecasting is particularly challenging due to the multiple dimensions involved. These dimensions include the variability in cloud usage patterns, different pricing models offered by cloud providers, the impact of reserved instances and spot instances, seasonal trends, and sudden changes in demand or application performance. The complexity of these factors makes it difficult to create accurate forecasts, requiring sophisticated models that can account for the multifaceted nature of cloud cost data.

In paper [3], the authors investigated various methods such as ARIMA time series models and machine learning algorithms to forecast cloud costs. They found that machine learning models, particularly those using neural networks, provided better accuracy in dynamic environments. Another study [4] explored the use of regression models and ensemble methods for cloud cost forecasting, highlighting that combining multiple models often leads to more reliable predictions. The main finding was that hybrid models combining statistical methods with machine learning techniques can handle the complex patterns in cloud cost data more effectively. Additionally, a study by Hofmann and Rutschmann [5] emphasized the integration of different data sources in demand forecasting. They showed that big data analytics could significantly enhance forecast accuracy by utilizing diverse data inputs, including historical data, performance metrics, and market trends. Another relevant work [6] reviewed various AI-based forecasting methods in financial accounting, finding that hybrid models combining support vector machines, fuzzy logic, and genetic algorithms provided reliable forecasts. Access to diverse and comprehensive data is crucial for accurate forecasting. Several open data sources can be utilized for cloud cost forecasting. The FOCUS (FinOps Open Cost and Usage Specification) initiative is an open-source specification that aims to standardize cost and usage billing data across different cloud vendors. This initiative helps reduce complexity for FinOps practitioners by providing consistent datasets for analysis [7]. Additionally, platforms like Kaggle offer various datasets that can be used for machine learning projects, including cloud cost forecasting [8]. Amazon Forecast also provides tools and templates for deploying time-series forecasting models, which can utilize historical usage data stored in Amazon S3 [9]. Google BigQuery public datasets offer another resource for accessing diverse datasets that can be integrated into forecasting applications [10]. These open data sources provide the necessary historical data and contextual information needed to develop robust forecasting models that can accurately predict future cloud costs.

From a mathematical standpoint, forecasting is a well-defined problem. It involves predicting future values based on historical data using various statistical and machine learning methods. The core idea is to build a model that can understand

and extrapolate the patterns in the historical data to make accurate future predictions. Common methods include time series analysis, regression models, and machine learning algorithms like neural networks. However, when you apply forecasting algorithms to different domains, the mathematical formulation can be adjusted to better suit the specific characteristics and requirements of that domain. Each domain may have unique factors that influence the forecasting process, necessitating modifications to the standard forecasting models.

FinOps is no exception, and because companies plan their budgets, we need to consider these unique factors in our forecasting models. Cloud cost forecasting must account for various dimensions such as seasonality (e.g., summer, winter), company growth plans, cost dynamics, team growth, business domain, and other variables depending on the company. These factors are often difficult to quantify numerically, adding complexity to the forecasting models. This makes it necessary to adapt traditional forecasting techniques to the specific needs of FinOps.

To formalize the problem, we consider the following mathematical formulation. Let Y_t represent the cloud cost at time t . The goal is to predict future costs $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+h}$ for a forecast horizon h . The feature set X_t includes variables such as season, company growth plans, cost dynamics, team growth, business domain, and other variables depending on the company. The forecasting model f

$$Y_{t+h}^{\wedge} = f(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}),$$

where p is the number of lag observations considered in the model. The objective is to minimize the forecast error, which can be measured using metrics such as Mean Absolute Error (MAE), Mean Squared Error (MSE), or Root Mean Squared Error (RMSE):

$$\sum_{i=1}^n L(Y_{t+i}, Y_{t+i}^{\wedge}) \rightarrow \min,$$

where L is the loss function, and n is the number of forecasted time points. By defining the problem this way, we can leverage existing forecasting techniques while incorporating the unique aspects of cloud cost management. This approach ensures that our models are tailored to the specific needs of FinOps, providing more accurate and reliable cost forecasts.

This forecasting definition is applicable not only to the overall cost but also to costs for specific services, cloud accounts, compute types, and other granular levels of cloud expenditure.

2.3. Anomaly Detection. In mature companies, monitoring cloud spending in real-time is essential to ensure financial efficiency and prevent unexpected costs. Despite careful planning and forecasting, actual cloud expenses can sometimes deviate significantly from expectations due to various reasons such as sudden changes in usage patterns, misconfigurations, or even security breaches. Detecting these anomalies quickly is crucial to mitigate potential financial losses and operational disruptions. Anomaly detection mechanisms play a vital role in identifying unusual spending patterns that deviate from the norm, allowing companies to take immediate corrective actions.

Anomaly detection is closely tied to cloud cost forecasting. Effective forecasting provides a baseline of expected costs and usage patterns, which anomaly detection systems use to identify deviations. While forecasting aims to predict future

costs based on historical data, anomaly detection focuses on identifying unexpected variations in real-time. Although they are interrelated, we consider them distinct classes of problems because forecasting primarily addresses planning and budgeting, whereas anomaly detection deals with operational monitoring and immediate response to deviations.

As discussed in the cloud cost forecasting chapter, the vast amount of data generated in real-time from cloud services, combined with the variability in usage patterns, presents a significant challenge for anomaly detection. Additionally, integrating anomaly detection systems with existing monitoring and management tools is crucial. These systems need to provide real-time alerts and insights while fitting seamlessly into the organization's current infrastructure. Ensuring compatibility and smooth integration can be complex but is essential for effective anomaly detection and timely responses to potential issues. However, the implementation details of such integrations are a separate topic of discussion and are beyond the scope of this paper.

To better explain the anomaly detection problem in the FinOps domain, let's focus on the cost of compute instances (EC2) rather than the whole cloud cost. This does not mean we lose any information or limit our scope. The principles applied to EC2 can be extended to other services and resources, preserving the original problem statement's generality. Anomaly detection in this context revolves around three key variables: Baseline, Threshold, and Time-Granularity.

The *baseline* represents the expected cost, which can be defined using statistical measures (such as average or median) or based on values provided by domain experts. This helps establish a reference point against which current costs can be compared. The *threshold* defines the acceptable deviation from the baseline before an anomaly is flagged. It can also be determined using statistical measures (such as standard deviation or the 75th percentile) or based on expert judgment. This value helps to distinguish between normal fluctuations and actual anomalies.

Anomaly detection can be applied at different *time granularities*: hourly, daily, weekly, etc. It's important to understand the chosen granularity because an anomaly might be detected on an hourly level but not on a daily level due to the dynamic nature of workloads. For example, a high cost at a particular hour might be offset by lower costs in other hours, making it important to consider the context in which anomalies are detected.

Define the baseline $Y_t^\wedge$ using an appropriate statistical measure or expert input:

$$Y_t^\wedge = \text{StatisticalMeasure}(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-n}).$$

The anomaly score S_t can be calculated as the difference between the current cost Y_t and the baseline $Y_t^\wedge$:

$$S_t = |Y_t - Y_t^\wedge|.$$

Set or calculate a threshold θ to determine when a deviation is considered an anomaly:

$$\text{Anomaly if } S_t > \theta.$$

This method is straightforward and computationally efficient. It provides a clear and immediate indication of anomalies based on recent cost patterns without the

need for complex forecasting models. The simplicity of this approach makes it well-suited for real-time monitoring and quick response to deviations in cloud spending. Even though we defined the anomaly score as an absolute difference, in practice, we will likely care only about cases where costs are higher and not lower.

A cascade architecture can be used to enhance anomaly detection. In this approach, anomalies are evaluated at multiple levels of granularity. For example, an anomaly detected at an hourly level (Anomaly Level 1) may prompt immediate investigation. However, if this anomaly does not affect the daily cost (Anomaly Level 2), it might be considered a transient fluctuation rather than a true anomaly. This method ensures that short-term anomalies are validated over longer periods, reducing false positives and providing a clearer understanding of cost deviations. The authors believe that due to the unique nature of FinOps, where costs are visible at different levels and need constant monitoring, the cascade architecture is particularly well-suited.

Implementing anomaly detection in cloud cost management involves several practical considerations, such as ensuring data quality and consistency through pre-processing steps like normalization, handling missing values, and outlier removal. Deploying the detection mechanism to operate in real-time is crucial, providing immediate alerts and insights. Seamless integration with existing cloud monitoring and management tools allows for automated responses and comprehensive visibility.

Defining any abstract problem using mathematical concepts is crucial to ensure that the problem statement is clear and precise. Once the mathematical formulation of the problem is established, various parameters such as the algorithm and data sources can be adjusted without altering the core definition of the problem. This approach ensures consistency and accuracy in addressing the problem, allowing for effective monitoring and management of cloud spending, ensuring financial control and operational efficiency.

2.4. Cost management and optimization. As cloud technology continues to evolve, the variety of pricing and commitment options available to organizations has increased significantly. Cloud providers offer numerous pricing models such as on-demand, reserved instances, spot instances, and various discount plans. Additionally, there are multiple ways to commit to these resources, each with its own set of terms and potential cost savings. With these options, there are more combinations and strategies for managing cloud costs based on an organization's specific needs and usage patterns. However, this increased flexibility also adds complexity, making it challenging to determine the most cost-effective approach.

When an organization grows large enough, managing cloud costs at scale for a vast number of resources becomes a significant challenge. The dynamic nature of cloud pricing, combined with the need to monitor and optimize resource usage continuously, requires sophisticated tools and strategies.

One major challenge is understanding and selecting the most cost-effective pricing options while considering usage patterns. It is difficult to estimate how many commitments to buy and to understand if, at any given moment, you can manipulate instances to avoid driving usage to unused commitments, thus wasting money on resources that are not being fully utilized. Cloud providers frequently update their pricing structures, which necessitates continuous adaptation and strategy updates. This complexity, together with the variability in cloud usage, further complicates

cost management. These challenges necessitate the use of advanced mathematical models and optimization techniques to manage and optimize cloud costs effectively. FinOps practitioners must leverage these tools to navigate the complexity of cloud pricing, manage resource usage efficiently, and ensure that spending aligns with business objectives.

To address the challenges of cost management and optimization in the FinOps domain, we will focus on the most dynamic and complex resource type, which is EC2 (Elastic Compute Cloud) in AWS. The variability and cost structure of EC2 instances present unique challenges that require sophisticated mathematical models and optimization techniques. Let's define a more detailed cost function that accounts for different types of EC2 instances (Box, Spot) and the impact of purchasing commitments (Reserved Instances, Compute Savings Plans, EC2 Savings Plans). The total EC2 cost is the sum of the costs for both Box and Spot instances. For simplicity, we define an EC2 instance that is not Spot as Box. Each cloud provider has its own terminology for these instances.

Cost of Spot Usage can be defined like this:

$$Spot\ Cost(N_{spot}) = \sum_{i=1}^{N_{spot}} (SpotPrice_i \times Usage_i),$$

where:

- N_{spot} is the total number of spot instances;
- $SpotPrice_i$ is the price of the i -th spot instance;
- $Usage_i$ describes amount of usage of spot instance (normalized units or amount of minutes/hours).

Cost of "Box" Usage can be defined like this:

$$Box\ Cost(N_{box}, commitments) = \sum_{i=1}^{N_{box}} (PricingOption_i \times Usage_i),$$

where:

- N_{box} is the total number of spot instances;
- $commitments$ is a variable that defines amount of commitments customer has;
- $PricingOption_i$ is the cost of instance depends on $commitments$ it can be different even for same instance;

Then the total EC2 Cost is given by:

$$EC2\ Cost = Box\ Cost(N_{box}, commitments) + Spot\ Cost(N_{spot}) + CW,$$

where new variable CW means commitments waste or amount of cost customer wasting because of not proper use of commitments and more exactly because of commitments underutilization.

To minimize the total $EC2\ Cost$, we need to find the optimal values for $(N_{spot}, N_{box}, commitments)$ for cost function:

$$EC2\ Cost(N_{spot}, N_{box}, commitments) \rightarrow \min.$$

Intentionally for simplicity time granularity dimension was ignored but as in any other FinOps problem this cost function can be viewed on hourly, daily, weekly and monthly level, etc.

In a more general view current approach can be applied to any cloud services or to the whole cloud account at once. However, different compute types and services could have different ways of optimization. In this paper we focused on the most complex case, which is compute instances.

3. Conclusion. FinOps faces numerous challenges that arise from the dynamic and complex nature of cloud environments. The increasing variety of pricing models, the need for real-time data analysis, and other complexities create many abstract problems. Mathematical modeling provides a way to address these abstract problems effectively, enhancing decision-making and operational efficiency.

For any abstract problem to be effectively addressed, it must be defined mathematically. Mathematical formulations provide a structured way to solve problems, allowing for the application of advanced techniques like optimization algorithms and machine learning. This approach not only clarifies the problem but also offers systematic methods to address it.

This paper overviews the main FinOps problems and contributes by classifying these problems into distinct categories. By proposing mathematical formulations for each class, we think that integrating statistical models, optimization algorithms, and machine learning techniques can improve the accuracy and efficiency of FinOps practices. This structured approach guides organizations toward better financial management and operational excellence in the cloud.

References

1. State of FinOps. Retrieved from: <https://data.finops.org>
2. AI and FinOps Predicted to Lead Observability Innovation in 2024. Retrieved from <https://www.infoq.com/news/2024/02/observability-2024-predictions>
3. Gaur, R. R., Budruk, S. C., & Patil, N. V. (2022). Survey on Cloud Load Prediction using Machine Learning Techniques. *IJIRT*, 9(1), 792–796.
4. Archana, Y., Kushwaha, Sh., Gupta, J., Saxena, D., & Singh, A. K. (2021). A survey of the workload forecasting methods in cloud computing. In *Proceedings of 3rd International Conference on Machine Learning, Advances in Computing, Renewable Energy and Communication*. MARC. Singapore: Springer Nature Singapore.
5. Hofmann, E., & Rutschmann, E. (2018). Big data analytics and demand forecasting in supply chains: a conceptual analysis. *The international journal of logistics management*, 29(2), 739–766.
6. Kureljusic, M., & Karger, E. (2023). Forecasting in financial accounting with artificial intelligence — A systematic literature review and future research agenda. *Journal of Applied Accounting Research*, 25(1), 81–104.
7. FinOps Open Cost and Usage Specification. Retrieved from <https://focus.finops.org>
8. Find Open Datasets and Machine Learning Projects. Retrieved from <https://www.kaggle.com/datasets>
9. Automate the deployment of an Amazon Forecast time-series forecasting model. Retrieved from <https://aws.amazon.com/blogs/machine-learning/automate-the-deployment-of-an-amazon-forecast-time-series-forecasting-model/>
10. BigQuery public datasets. Retrieved from <https://cloud.google.com/bigquery/public-data>

Роботишин М. В., Маляр М. М. Застосування математичного моделювання у domeйні FinOps.

Розвиток хмарних обчислень революціонував підхід організацій до управління ІТ-ресурсами, пропонуючи масштабовані та гнучкі рішення для різноманітних операційних потреб. Проте, з підвищенням впровадженням хмарних сервісів, фінансові операції (FinOps) стали більш складними, створюючи виклики в управлінні витратами, розподілі ресурсів та фінансовому прогнозуванні. Традиційні методи часто не здатні

ефективно вирішувати ці складнощі, що призводить до неефективності та субоптимального прийняття рішень. У цій роботі досліджується застосування математичного моделювання в сфері FinOps як потужного рішення цих викликів. Пропонується класифікація проблем FinOps на окремі класи та математична постановка задачі для кожного класу, що має на меті підвищити ефективність FinOps-практик. Інтеграція математичних моделей покращує точність та ефективність, забезпечуючи систематичний підхід до управління фінансовими операціями у хмарному середовищі. Через вивчення кейсів та прикладів з реального світу ця робота демонструє трансформаційний потенціал математичного моделювання у стимулюванні інновацій та досягненні операційної досконалості в FinOps.

Ключові слова: математичне моделювання, управління хмарними обчисленнями, аналіз даних, прогнозування, FinOps, оптимізаційні процеси.

Список використаної літератури

1. State of FinOps. URL: <https://data.finops.org> (date of access: 25.08.2024).
2. AI and FinOps Predicted to Lead Observability Innovation in 2024. URL: <https://www.infoq.com/news/2024/02/observability-2024-predictions> (date of access: 25.08.2024).
3. Gaur R. R., Budruk S. C., Patil N. V. Survey on Cloud Load Prediction using Machine Learning Techniques. *IJIRT*. 2022. Vol. 9, No. 1. P. 792–796.
4. Archana Y., Kushwaha Sh., Gupta J., Saxena D., Singh A. K. A survey of the workload forecasting methods in cloud computing. *Proceedings of 3rd International Conference on Machine Learning, Advances in Computing, Renewable Energy and Communication* : MARC. Singapore : Springer Nature Singapore, 2021. pp. 539–547.
5. Hofmann E. and Rutschmann E. Big data analytics and demand forecasting in supply chains: a conceptual analysis. *The international journal of logistics management*. 2018. Vol. 29, No. 2. P. 739–766.
6. Kureljusic M. and Karger E. Forecasting in financial accounting with artificial intelligence — A systematic literature review and future research agenda. *Journal of Applied Accounting Research*. 2023. Vol. 25, No. 1. P. 81–104.
7. FinOps Open Cost and Usage Specification. URL: <https://focus.finops.org> (date of access: 25.08.2024).
8. Find Open Datasets and Machine Learning Projects. URL: <https://www.kaggle.com/datasets> (date of access: 27.08.2024).
9. Automate the deployment of an Amazon Forecast time-series forecasting model. URL: <https://aws.amazon.com/blogs/machine-learning/automate-the-deployment-of-an-amazon-forecast-time-series-forecasting-model/> (date of access: 27.08.2024).
10. BigQuery public datasets. URL: <https://cloud.google.com/bigquery/public-data> (date of access: 25.08.2024).

Recived 11.10.2024

UDC 519.711:004.023:004.421

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).249-258](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).249-258)**O. S. Serhieiev¹, S. A. Us²**¹ Dnipro University of Technology,

Postgraduate student at the System Analysis and Control Department

serhieiev.o.s@nmu.one

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5781-5540>² Dnipro University of Technology,

Professor of System Analysis and Control Department,

Cand. Sc. (Physics and Mathematics)

us.s.a@nmu.one

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0311-9958>

EXPLORING TWO SOLUTION METHODS FOR THE TWO-STAGE LOCATION-ACTIVATION PROBLEM

This study highlights the importance of medical logistics research during crises that might stress the system. We formulated a practical problem statement for the organizational structure of the medical logistics system, which has three types of centers: regional, subregional, and distribution. We also proposed a mathematical model for the two-stage location-activation problem, which minimizes the costs of operation, delivery, location, and activation. For the proposed mathematical model, two solution approaches are presented. The first approach divides the process into two steps: locate the distribution centers by solving the continuous problem and then use the obtained coordinates to solve the second (discrete) part. The second approach is a combined solution technique combining continuous and discrete parts using full information during the algorithm's execution. Both can be used to solve the problem, the first is simpler and has a lower time complexity, and the second uses more information but has higher time complexity.

Keywords: discrete optimization, continuous optimization, effective decisions, evolutionary algorithms, transportation, medical logistics.

1. Introduction. Recent years have shown that the medical logistics system has some significant weaknesses and areas for improvement. The global pandemic in 2020 demonstrated how unprepared we were to handle the demand for large quantities of medicines and immunobiological products. It also highlighted the strain on the system when rapid and efficient action is needed during a crisis. The situation worsened with the full-scale invasion in 2022, which created an even greater need to move large quantities of medicines as part of the humanitarian response. This unprecedented demand put a lot of pressure on the existing infrastructure, underscoring the need for a strong and adaptable medical logistics system that can handle crises. These challenges have also highlighted the importance of modernizing and optimizing the way medical supplies are transported.

2. Literature review. The paper [1] describes a solution to the optimal warehouse location problem. A new model of mixed integer linear programming for solving the problem of warehouse location using linearization of Euclidean distance is proposed. The study [2] proposes a new approach to the location of manufacturing enterprises using fuzzy logic and inference systems. The study is useful for decision-makers in the manufacturing industry and allows for the effective use of fuzzy logic and inference systems to solve complex problems of manufacturing plant location. The proposed model can be applied in various industries, including the

automotive, electronics, and food industries. The capacity allocation problem [3] with differentiated convex production costs is a variant of the classical capacity allocation problem, where the cost of production at each plant is modeled as a convex function of its production capacity. The authors propose a fast, accurate method based on the branch-and-price approach that exploits the structure of the problem and the convexity of production costs. The publication [4] describes the solution to the traveling salesman problem using swarm methods and highlights that evolutionary algorithms play a crucial role during logistics improvements. A combination of the particle swarm method and a genetic algorithm is used, using the output of one for the input of the other algorithm. An interesting aspect of the work is the study of the effectiveness of the roulette method and the multi-point cyclic crossover. When tested using samples of large sizes, the algorithm demonstrates 100% success for the clear case. Paper [5] deals with the two-stage transportation problem with fixed charges. They propose a fast, parallel-friendly solution method for real-world applications. Their iterative constructive heuristic reduces the solution space at each step. The problem of reasonable planning and optimization of shelter locations [6] aims to reduce losses from natural disasters and sustainable urban development. Paper considers a sequential solution to a two-criteria problem based on sequential decision logic to maximize economic sustainability and social utility. A two-stage transportation problem with a fixed route toll is researched in the publication [7]. To solve this problem, the authors transition to a different form of the problem, which is similar to the two-stage transportation problem with the cost of transportation per unit of goods. The cost of the goods is presented as a conditional expression depending on whether this route is used or not. A genetic algorithm is used to solve the problem. The chromosome is encoded using a matrix representation. The paper proves the robustness of the proposed algorithm using randomly generated entities. An alternative approach to deal with that problem is studied in [8]. The work described problem of optimizing evacuation logistics during emergencies to ensure the efficient distribution of resources and human flows. The proposed solution involves the introduction of a mathematical model and algorithm that optimize the location of rescue facilities and the zoning of territories to manage evacuation traffic effectively. The study [9] investigates the best location for a pharmaceutical warehouse in one of the major Turkish cities using the analytic hierarchy process and EDAS method, which evaluate locations around an average solution within a spherical fuzzy environment. This unique approach is applied for the first time to this problem. It identifies the most optimal location and comes with robustness analysis, ensuring the reliability of the method. Additive Manufacturing greatly enhances the flexibility of manufacturing networks. The paper [10] addresses a location-production routing problem for a distributed manufacturing platform, integrating decisions on location, production planning, and delivery routing. To solve this complex problem, the authors introduce a Neural Genetic Algorithm, which efficiently finds near-optimal solutions, reducing computation time by 99% compared to traditional methods. Sensitivity analysis shows that unit shortage costs heavily influence customer service and facility distribution.

3. Practical problem statement. In critical situations, such as emergencies, natural disasters, or military conflicts, there may be an urgent need for rapid and efficient distribution of essential medical supplies (medicines or medical devices) to

the population. In such circumstances, the speed and accuracy of delivery can be critical to saving lives and health. To ensure such distribution, each region has a fixed number (N) of regional centers (RCs) and several (M) subregional centers (SRCs) that serve as distribution middle points for medical supplies. However, due to limited resources such as fuel, vehicles, personnel, or difficult logistical conditions, the government may decide to activate only a portion of these centers. To reduce costs and optimize the use of available resources, only L of the M subregional centers are activated. Schematically the practical problem statement is illustrated on Fig. 1.

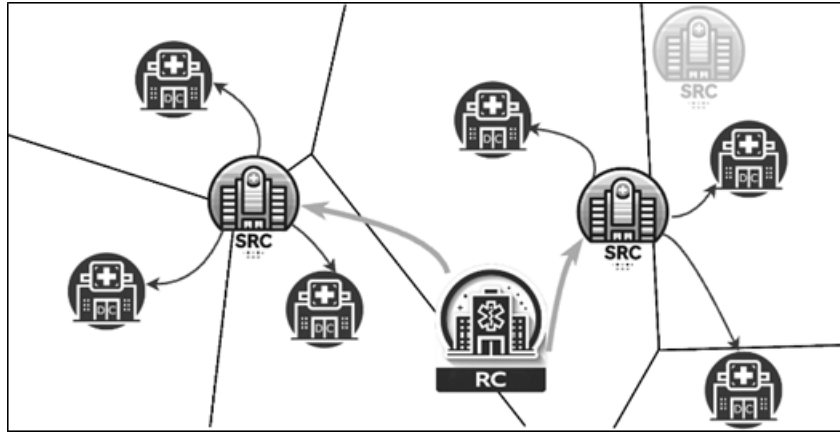


Figure 1. Diagram for practical problem statement.

The activated SRCs are responsible for redistributing medical supplies to distribution centers located throughout the region. In total, there are K such distribution centers (DCs) located at key points to ensure the fastest possible access to medical supplies for the population. These distribution centers serve as final delivery points from which medicines and medical supplies are distributed directly to consumers in their service areas. The primary goal of this process is to minimize overall transportation costs and delivery time while ensuring that the needs of each distribution center and consumer for necessary medical supplies are fully met. It is also important to consider factors that may affect logistics, such as the geography of the region, the state of the infrastructure, and potential risks that may arise during transportation. Achieving this goal is critical to ensuring the resilience and reliability of the medical logistics system during emergencies.

4. Mathematical model. Let's define the following:

- Ω — customer distribution area;
- Ω_i — customer service for i -th DC, $i = \overline{1, N}$;
- N — the required number of DCs;
- M — the total number of SRCs available for activation;
- L — the maximum number of possible activated SRCs;
- J — set of subregional centers available for activation;
- b_i^I — demand of the i -th DC, $i = \overline{1, N}$;
- b_j^{II} — capacity of the j -th SRC, $j = \overline{1, M}$;
- A_j — activation costs for j -th SRC;
- $c_i^I = c(x, \tau_i^I)$ — transportation cost between DC i and customer at x ;
- $c_{ij} = c(\tau_i^I, \tau_j^{II})$ — transportation cost between SRC (τ_j^{II}) and DC (τ_i^I);

- $\rho(x)$ — demands from medicines in point x of the area Ω ;
- $\tau_i^r = (\tau_{i1}^r, \tau_{i2}^r)$ — coordinates of DC(r =I) or SRC (r =II);
- v_{ij}^I — the volume weight units number of medicines and medical equipment transported from SRC j to DC i ;
- $\theta_j = \begin{cases} 1, & \text{if SRC } j \text{ is activated,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

Then mathematical model can be defined as:

$$\min_{\theta(\cdot) \in \Theta, \tau^I \in \Omega^N, v \in R_{NM}^+} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} v_{ij}^I, \quad (1)$$

under the constraints:

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^I \theta_j = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^I \leq b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^M \theta_j \leq L, \quad (4)$$

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (5)$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (6)$$

$$v_{ij}^I \geq 0, \quad \theta_j \in \{0; 1\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (7)$$

$$\tau^I = (\tau_1^I, \tau_2^I, \dots, \tau_N^I), \quad \tau^I \in \Omega^N. \quad (8)$$

where: (1) — main optimization task of the two-stage location-activation problem which summarizes the total expenses for location and activation of distribution and subregional centers and transportation costs; (2) — the amount of medications shipped to the i -th distribution center is equal to its needs; (3) — the amount of medications shipped from the j -th subregional center not exceed its capacity; (4) — the number of activated subregional center is less or equal to specified non-negative value L ; (5) — the service areas of the distribution centers encompass the entire region; (6) — each customer is served by only one distribution center; (7) and (8) are balance constraints;

Θ is defined as:

$$\Theta = \{\theta_1(\cdot), \theta_2(\cdot), \dots, \theta_N(\cdot) : 0 \leq \theta_i(x) \leq 1; \sum_{i=1}^N \theta_i = 1 \text{ for almost all } x \in \Omega\}.$$

5. First solution approach. We propose to use a combination of evolutionary algorithms and the approach from the theory of optimal partitioning of sets. Given this, we can divide the solution of problems (1)–(8) into two stages. At the first

stage, distribution centers are located and their service areas are determined by solving the problem of optimal partitioning of sets in formulation (9)–(11), where N is the required number of centers.

Minimize

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} c_i^I(x, \tau_i^I) \rho(x) dx, \quad (9)$$

under the constraints:

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = \Omega, \quad (10)$$

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (11)$$

The (9)–(11) problem is a well-studied problem of optimal partition of sets. The paper [11] contains more information about the approaches and practical applications for such tasks. At the second stage, we solve the discrete location problem (12)–(16):

$$\sum_{j=1}^M A_j \theta_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^I(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^I \rightarrow \min, \quad (12)$$

under the constraints:

$$\sum_{j=1}^M v_{ij}^I \theta_j = b_i^{*I}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^I \leq b_j^{II}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^M \theta_j \leq L, \quad (15)$$

$$v_{ij}^I \geq 0, \quad \theta_j \in \{0; 1\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (16)$$

where $\tau^I = (\tau_1^I, \tau_2^I, \dots, \tau_N^I)$, $\tau^I \in \Omega^N$ — distribution centers location that was obtained during first stage; b_i^{*I} — determined capacity of distribution centers:

$$b_i^{*I} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \quad i = \overline{1, N}.$$

Additionally, we define this solvability condition:

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx \leq \sum_{j=1}^M b_j^{II} \theta_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

The solution for discrete task (12)–(16) is more deeply investigated by authors in [12]. The example of program implementation for the first solution approach can be found in [13]. Despite the successful location and activation of the centers, the proposed approach has several drawbacks:

- the located distribution centers are independent of chromosomes, which reduces variability and does not fully correspond to the idea of the genetic algorithm;
- when solving the location problem, the transportation plan is not taken into account, which leads to a more uniform distribution of centers, which can lead to inefficient placement of distribution centers.

To eliminate these drawbacks, we propose to use a different approach.

6. Second solution approach. We propose to use a genetic approach to solving the two-stage location-activation problem. The proposed modifications compared to the first approach:

- In the objective function (1), we additionally take into account the transportation plan between centers. This will add influence links between the placed centers and the activated ones, making the approach more rational in considering all the links and constraints.
- Each chromosome or other solution from evolutionary algorithm represents a transportation plan between certain centers. Therefore, the encoding and decoding procedure depends on the actual coordinates of the corresponding centers. We propose to modify the chromosome estimation procedure (and decoding procedures) in the form of solving the placement problem to build a more complete transportation plan.

Using the evolutionary algorithms, we can formulate the second solution approach:

1. We will use the mathematical model (1)–(8). The general scheme of the genetic algorithm is the following:
2. The population $P(t)$ is initialized using priority-based encoding. We get the first generation of potential solutions to the problem.
3. We evaluate the fitness of each chromosome in the population by solving the location problem on the model (1)–(8) with a transportation plan included in the optimization task. After solving the problem, the DCs' location, capacity, and transportation plan are obtained for each chromosome.
4. Chromosomes are selected for reproduction using the roulette method.
5. The selected chromosomes are crossed to produce offspring.
6. Some chromosomes undergo mutation to introduce variations.
7. A new population $P(t + 1)$ is formed from the offspring and possibly some individuals from the current population. The new generation replaces the old one.
8. Check whether the stopping requirement is met. If so, go to the next step. Otherwise, return to step 2 with the population value $t + 1$.
9. Finish the algorithm. Decode the effective chromosome and return the value of the objective function and the transportation plan. The algorithm is described.

The second approach proposes a more connected solution for the problem (1)–(8) where we consider the actual determined locations of the centers. We also improved the decoding procedure to ensure that the decision on where to place the center was made under full information. One of the drawbacks of such an approach is that we create circular dependency for minimization functional and chromosome evaluation procedure that requires more computation and time complexity for the algorithm's implementation.

7. Experiments. Let us run some experiments to demonstrate and compare different approaches. To illustrate the work of the proposed mathematical model and proposed approaches, we developed a software implementation using C++ (location module) and Python (UI module) technologies. For the experimental environment, we use an Apple M3 Max chip featuring a 12-core CPU and 18-core GPU, 36 GB of unified memory, a 512 TB SSD, and running macOS Sequoia 15.1. To demonstrate differences in performance between the two described methods, we run a set of experiments: the problems will have sizes 4×10 , 7×20 , 10×25 , 12×30 , 15×35 . As random generation plays a crucial role during the solution, we will rerun each experiment 20 times and find the average value for these parameters: algorithm execution time and fitness function value. These comparisons are illustrated in Fig. 2.

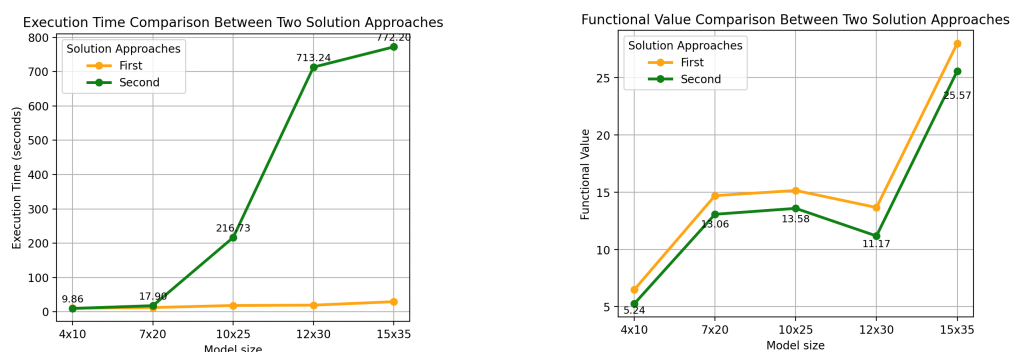


Figure 2. Comparison of first and second solution approached for execution time (left) and functional value (right).

From the results obtained from experiments, we can state that, as expected, the solution time for the second solution approach is significantly greater (starting from 10×25 size) than for the first one. This is expected, as we apply the location of the centers for each chromosome for the second solution approach while doing it only once in the first solution approach. At the same time, as we are solving the minimization problem, the second solution approach gives more efficient results where the average functional value of the second solution approach is 13.44% lower than the first one. We can conclude that the first solution approach is more usable when fast and approximate solutions for the location-activation process are required (e.g. real-time routing of medical supply vehicles or points in a city where quick decisions are critical to ensure the timely delivery of medicines) and the second solution approach gives a more efficient solution but takes drastically more time to execute (e.g. long-term planning for the establishment of new centers of medical logistics to optimize coverage and resource allocation across a region). As the decision about location or opening some centers from a practical problem statement is usually something more like a strategic one rather than short-term, the second solution approach should be utilized to manage medical logistics efficiently.

8. Conclusions. In the paper, we highlighted the importance of medical logistics research. The topic's relevance becomes more vital during the crises that put the system under challenge. We formulated a practical problem statement that represents the organizational structure of the medical logistics system and it contains several types of centers: regional, subregional and distribution. We also propose a

mathematical model for the two-stage location-activation problem and this model minimizes the expenses for operation, delivery, location, and activation. For the mentioned mathematical model, two solution approaches are introduced. The first one contains the idea of dividing the process into two steps, wherein in the first step, we only locate the distribution centers by solving the continuous optimization task. We use the obtained coordinate to solve the second (discrete) part in the second step. The second solution approach proposes a combined solution technique where continuous and discrete parts are linked together so that we use full information during the algorithm run. For the first and the second methods, we run a set of experiments that demonstrate that both ways can be used to solve the mentioned problem, with the difference that the first one is significantly faster and can be used in areas where solutions are required during runtime or live mode, while the second one uses more information and has longer execution time but provides more efficient solutions that can greatly optimize costs and can be used during strategic and long-term planning for location or activation of centers of different levels. Both approaches can be used to solve the mentioned problem and the first one is simpler and has simpler time complexity while the second one uses more information but has longer execution time.

This publication was prepared as a part of the scientific theme 0123U100011 "Problems of analysis, modeling, and optimization of technological processes in complex systems of different nature", which is implemented on the System Analysis and Control Department at Dnipro University of Technology.

References

1. You, M., Xiao, Y., Zhang, S., Yang, P., & Zhou, S. (2019). Optimal mathematical programming for the warehouse location problem with Euclidean distance linearization. *Computers & Industrial Engineering*, 136, 70–79. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.020>
2. Paul, S. K., Chowdhury, P., Ahsan, K., Ali, S. M., & Kabir, G. (2022). An advanced decision-making model for evaluating manufacturing plant locations using fuzzy inference system. *Expert Systems With Applications*, 191, 116378. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116378>
3. Christensen, T. R. L., & Klose, A. (2020). A fast exact method for the capacitated facility location problem with differentiable convex production costs. *European Journal of Operational Research*, 292(3), 855–868. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.048>
4. Khan, I., Pal, S., & Maiti, M. K. (2019). A hybrid PSO-GA algorithm for traveling salesman problems in different environments. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 27(05), 693–717. <https://doi.org/10.1142/s0218488519500314>
5. Cosma, O., Pop, P. C., & Dănciulescu, D. (2020). A parallel algorithm for solving a two-stage fixed-charge transportation problem. *Informatika*, 1–26. <https://doi.org/10.15388/20-infor432>
6. He, L., & Xie, Z. (2022). Optimization of urban shelter locations using bi-level multi-objective location-allocation model. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 19(7), 4401. <https://doi.org/10.3390/ijerph19074401>
7. Calvete, H. I., Galé, C., Iranzo, J. A., & Toth, P. (2018). A matheuristic for the two-stage fixed-charge transportation problem. *Computers & Operations Research*, 95, 113–122. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.03.007>
8. Koriashkina, L. S., Dziuba, S. V., Us, S. A., Stanina, O. D., & Odnovol, M. M. (2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, (1), 130–139. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130>
9. Erdogan, M., & Ayyildiz, E. (2022). Investigation of the pharmaceutical warehouse locations under COVID-19 — A case study for Duzce, Turkey. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 105389. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105389>
10. Bootaki, B., & Zhang, G. (2024). A location-production-routing problem for distributed man-

- ufacturing platforms: A neural genetic algorithm solution methodology. *International Journal of Production Economics*, 109325. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2024.109325>
11. Kiseleva, E. M. (2018). The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n dimensional euclidean space. theory and application. *Journal of Automation and Information Sciences*, 50(9), 1–24. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i9.10>
 12. Serhieiev, O. S., & Us, S. A. (2023). Modified genetic algorithm approach for solving the two-stage location problem. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (3), 159. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2023-3-16>
 13. Svitlana, U., & Oleksii, S. (2024). An algorithm for solving a two-stage continuous-discrete location problem for medical logistics optimization. *System Technologies*, 5(148), 71–85. <https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-148-2023-07>

Сергєєв О. С., Ус С. А. Дослідження двох підходів до розв’язання дво-етапної задачі розміщення-активації.

У роботі досліджується система медичної логістики під час кризових ситуацій, що спричиняють надмірне навантаження. Авторами сформульовано практичну постановку задачі для структури медичної логістики, яка включає три типи центрів: регіональні, субрегіональні та дистрибуційні. Також було запропоновано математичну модель для двоетапної задачі розміщення-активації, що мінімізує витрати на експлуатацію, доставку, розміщення та активацію відповідних центрів. Для цієї математичної моделі було представлено два підходи до розв’язання. Перший підхід розділяє процес на два етапи: спочатку визначаються місця розташування дистрибуційних центрів шляхом розв’язання неперервної задачі, а потім використовуються отримані координати для розв’язання другої (дискретної) частини. Другий підхід є комбінованою методикою, яка поєднує як неперервну, так і дискретну частини, використовуючи всю доступну інформацію під час виконання алгоритму із застосуванням еволюційної теорії. Обидва підходи можуть бути використані для розв’язання задачі: перший є простішим і має меншу обчислювальну складність, а другий використовує більше інформації, але має вищу обчислювальну складність.

Ключові слова: дискретна оптимізація, неперервна оптимізація, ефективні рішення, еволюційна теорія, транспортування, медична логістика.

Список використаної літератури

1. You M. et al. Optimal mathematical programming for the warehouse location problem with Euclidean distance linearization. *Computers & industrial engineering*. 2019. Vol. 136. P. 70–79. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.07.020>
2. Paul S. K. et al. An advanced decision-making model for evaluating manufacturing plant locations using fuzzy inference system. *Expert systems with applications*. 2022. Vol. 191. P. 116378. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116378>
3. Christensen T. R. L., Klose A. A fast exact method for the capacitated facility location problem with differentiable convex production costs. *European journal of operational research*. 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.048>
4. Khan I., Pal S., Maiti M. K. A hybrid PSO-GA algorithm for traveling salesman problems in different environments. *International journal of uncertainty, fuzziness and knowledge-based systems*. 2019. Vol. 27, No. 05. P. 693–717. DOI: <https://doi.org/10.1142/s0218488519500314>
5. Cosma O., Pop P. C., Dănciulescu D. A parallel algorithm for solving a two-stage fixed-charge transportation problem. *Informatica*. 2020. P. 1–26. DOI: <https://doi.org/10.15388/20-infor432>
6. He L., Xie Z. Optimization of urban shelter locations using bi-level multi-objective location-allocation model. *International journal of environmental research and public health*. 2022. Vol. 19, No. 7. P. 4401. DOI: <https://doi.org/10.3390/ijerph19074401>
7. Calvete H. I. et al. A matheuristic for the two-stage fixed-charge transportation problem. *Computers & operations research*. 2018. Vol. 95. P. 113–122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.03.007>
8. Koriashkina L. S. et al. Two-stage problems of optimal location and distribution of the humani-

- tarian logistics system's structural subdivisions. *Naukovyi visnyk natsionalnoho hirnychoho universytetu*. 2024. No. 1. P. 130–139. DOI: <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130>
9. Erdogan M., Ayyildiz E. Investigation of the pharmaceutical warehouse locations under COVID-19 — A case study for Duzce, Turkey. *Engineering applications of artificial intelligence*. 2022. P. 105389. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2022.105389>
 10. Bootaki B., Zhang G. A location-production-routing problem for distributed manufacturing platforms: a neural genetic algorithm solution methodology. *International journal of production economics*. 2024. P. 109325. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2024.109325>
 11. Kiseleva E. M. The emergence and formation of the theory of optimal set partitioning for sets of the n dimensional euclidean space. theory and application. *Journal of automation and information sciences*. 2018. Vol. 50, No. 9. P. 1–24. DOI: <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i9.10>
 12. Serhieiev O. S., Us S. A. Modified genetic algorithm approach for solving the two-stage location problem. *Radio electronics, computer science, control*. 2023. No. 3. P. 159. DOI: <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2023-3-16>
 13. Svitlana U., Oleksii S. An algorithm for solving a two-stage continuous-discrete location problem for medical logistics optimization. *System technologies*. 2024. Vol. 5, No. 148. P. 71–85. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-5-148-2023-07>

Recived 14.10.2024

УДК 004.032.26:004.932.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).259-275](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).259-275)**Ю. О. Товт¹, А. Ю. Брила²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
yurii.tovt@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9556-0630>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІСТУ ВАГОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ НЕЙРОМЕРЕЖ У ЧАСТОТНІЙ ОБЛАСТІ

Розглянуто задачу фільтрації зображень за допомогою комплекснозначної нейронної мережі MLMVN у частотній області. Досліджено випадки наявності на зображеннях адитивного Гаусівського шуму та мультиплікативного спекл шуму. Для фільтрації використано комплекснозначну нейромережу прямого поширення. Проведено аналіз вагів коефіцієнтів нейроелементів на різних епохах процесу навчання та зміст ядер згорток утворених з вагів окремих нейроелементів у просторовій області.

Ключові слова: нейронні мережі, комплекснозначні нейронні мережі, цифрові зображення, фільтрація шуму.

1. Вступ. Попередня обробка зображень є обов'язковим і дуже важливим інструментом у розпізнаванні та аналізі зображень. Вона дозволяє значно спростити і прискорити процес навчання зосереджуючись саме на важливих деталях а не артефактах, які спотворюють зображення і можуть призвести до некоректних висновків. Не дивлячись на широкий спектр алгоритмів відновлення спотворених зображень у просторовій області велика кількість задач може бути ефективно вирішена саме у частотній області. Яскравими прикладами таких задач є відновлення дефокусованих зображень та фільтрація шумів, що виникають на практиці у різних важливих сферах діяльності людини, зокрема в медицині, аерофотозйомці та супутниковій зйомці. Також можна навести велику кількість прикладів застосування високочастотних та низькочастотних фільтрів, ВМЗД-фільтра [1], фільтра Вінера [2], та інших. Не дивлячись на широко розвинутий інструментарій нейронних мереж, комплекснозначні нейронні мережі ідеально підходять для аналізу зображень саме у частотній області завдяки роботі з комплексними числами. Саме ця особливість дозволяє будувати найбільш точні математичні моделі на основі перетворення Фур'є.

У статті досліджено контекстний зміст вагових коефіцієнтів, що отримані в процесі навчання комплекснозначної нейромережі MLMVN [3] з метою фільтрації шуму на цифрових зображеннях. Також було досліджено їх взаємозв'язок з ядрами фільтрів у просторовій області.

2. Основний результат.

Формат представлення цифрового зображення. Не зменшуючи загальності міркувань для спрощення процесів аналізу та їх інтерпретації було

розглянуто цифрові зображення у відтінках сірого. Зауважимо, що результати аналізу можуть бути адаптовані на випадок кольорових зображень.

У просторовій області цифрове зображення представляється у вигляді дискретної функції двох змінних $f(x, y)$, де x та y — просторові координати, а значенням функції у кожній точці простору є інтенсивність [4]. Оскільки дослідження проводилися у частотній області, то для переходу між просторовою та частотною областями було використано пряме та зворотне перетворення Фур'є.

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})},$$

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}.$$

З метою оптимізації обчислень у роботі для переходу у частотну область використано алгоритм швидкого двовимірного перетворення Фур'є (FFT) [5].

Моделювання досліджуваних зашумлених цифрових зображень. З метою формування навчальної вибірки для алгоритмів навчання комплексно-значних нейромереж було змодельовано навчальну вибірку з штучно зашумленими зображеннями. При цьому було використано найбільш поширені на практиці адитивний Гаусівський шум [6] та мультиплікативний спекл шум [7]. Для реалізації моделювання шуму використовувалися відповідні функції Matlab з пакету Image Processing Toolbox.

Гаусівський шум зазвичай має нормальний розподіл і часто виникає наприклад внаслідок електронних перешкод у фотосенсорах, а також під час отримання цифрових зображень при недостатньому рівні освітлення. Адитивний Гаусівський шум у даному дослідженні моделювався наступним чином:

$$f_{noisy}(x, y) = f(x, y) + n(x, y),$$

де $f_{noisy}(x, y)$ — зашумлене зображення, $f(x, y)$ — ідеальне зображення, $n(x, y)$ — випадковий шум з нормальним розподілом інтенсивностей.

Для моделювання адитивного Гаусівського шуму використовувався шум зі стандартним відхиленням у межах 0.1σ – 0.3σ (де σ — стандартне відхилення інтенсивностей пікселів кожного окремо взятого ідеального зображення).

Спекл шум часто виникає внаслідок когерентності хвиль, які взаємодіють з неоднорідностями в середовищі. Цей шум є типовим для ультразвукових та радіолокаційних зображень. У роботі було змодельовано рівномірний мультиплікативний спекл шум

$$f_{noisy}(x, y) = f(x, y) \cdot n(x, y),$$

де $f_{noisy}(x, y)$ — зашумлене зображення, $f(x, y)$ — ідеальне зображення, $n(x, y)$ — випадковий шум з рівномірним розподілом інтенсивностей.

При моделюванні мультиплікативного спекл-шуму стандартне відхилення шуму варіювалось у діапазоні 0.1σ – 0.4σ .

Важливо зауважити, що шум був змодельований таким чином, щоб середні значення інтенсивності (середня інтенсивність) ідеального та зашумленого

зображення були рівними. Це дозволяє забезпечити збереження середньої інтенсивності зображення після додавання шуму, що є критичним для коректного аналізу впливу шуму та подальших методів його фільтрації. У процесі навчання та валідації для оцінки якості фільтрації було використано оцінку максимального відношення сигнал\шум (PSNR).

Загальна схема навчання комплекснозначної нейронної мережі. Як було зазначено раніше, для обробки зображень у частотній області найбільш оптимальним вибором є використання нейромереж, у яких входи, виходи та ваги нейронів є комплексними числами. Такі нейронні мережі називають комплекснозначними. Алгоритми навчання комплекснозначних нейромережам всебічно розглянуті у численних публікаціях [3, 8, 9, 10, 11].

У роботі для формування навчальної вибірки було використано множину зображень у відтинках сірого різних розмірів. Процес навчання нейронної мережі був організований із застосуванням підходу навчання з валідацією. Для цього змодельована навчальна вибірка була поділена на дві частини: власне навчальну вибірку, яка використовувалася для коригування ваг нейронів, та валідаційну вибірку, яка застосовувалася для періодичної перевірки результату навчання. Навчальна вибірка складалася з пар ідеальних та зашумлених векторизованих фрагментів зображень у частотній області. Потужність навчальної вибірки становила 60 000 навчальних зразків.

Процес навчання був проведений окремо для адитивного Гаусівського шуму та мультиплікативного спекл-шуму, однак загальна процедура формування навчальних вибірок і підхід до навчання були однаковими для обох типів шуму. Для перевірки якості навчання нейромережі використовувалася валідаційна вибірка. Вона складалася з пар ідеальних та зашумлених зображень, які не входили до навчальної вибірки.

Для фільтрації шуму на цифрових зображеннях використовувалася комплекснозначна нейронна мережа прямого поширення, яка має n входів, один прихований шар із N_{h1} нейронами та вихідний шар із N_o нейронами. Архітектура цієї нейромережі була обрана на основі емпіричних даних. При цьому слід зауважити, що кількість прихованих шарів і нейронів, які використовувалися в даному дослідженні, не можна вважати оптимальною. Оптимізація цих параметрів є предметом подальших досліджень.

Навчання мережі проводилося з використанням алгоритму навчання пакетами (batch learning) [10, 11]. Основною перевагою цього методу порівняно з класичним алгоритмом навчання для комплекснозначних нейромереж є можливість одночасно коригувати ваги нейронів прихованого та вихідного шарів на основі декількох навчальних зразків. Навчання проводилося до моменту досягнення бажаного значення PSNR на валідаційній вибірці або досягнення наперед заданої кількості епох навчання.

Аналіз ваг нейронів сформованих у процесі навчання. Навчання нейромережі є ітеративним процесом, на кожному кроці якого обчислюється похибка мережі та похибка кожного нейроелемента, після чого, згідно з правилом навчання, оновлюються ваги нейроелементів. Таким чином ваги синапсів нейронів є одним із найважливіших факторів, які впливають на їхній вихід, а відповідно й на вихід нейромережі загалом.

Розглянемо k -й нейроелемент першого прихованого шару комплекснозначної

нейромережі. Вихід цього нейрона обчислюється за формулою:

$$O_1^{(k)} = P \left(\sum_{i=0}^n w_i^{(k)} x_i^{(p)} \right),$$

де $P(\cdot)$ — активаційна функція, $w_0^{(k)}, w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)}$ — ваги нейрона ($w_0^{(k)}$ називається вільною вагою), $x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)}$ — входи нейрона ($x_0^{(p)}$ — штучний вхід, який завжди рівний 1).

Попередню формулу можна записати у наступному вигляді:

$$O_1^{(k)} = P \left(w_0^{(k)} x_0^{(p)} + \sum_{i=1}^n w_i^{(k)} x_i^{(p)} \right) = P \left(w_0^{(k)} x_0^{(p)} + R^{(k,p)} \right),$$

$R^{(k,p)}$ є сумою елементів вектора, який є результатом поелементного добутку векторів $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, w_2^{(k)}, \dots, w_n^{(k)})$ та $x^{(p)} = (x_1^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$. Як зазначено вище, на вхід нейромережі, а відповідно й на кожен нейрон першого прихованого шару, подаються векторизовані фрагменти зображення у частотній області. Оскільки фрагмент зображення у просторовій області можна розглядати як дискретну функцію двох змінних, його можна записати у вигляді матриці, де кожен елемент є інтенсивністю у відповідних просторових координатах. Таким чином, при переході у частотну область (за допомогою двовимірного швидкого перетворення Фур'є) отримаємо матрицю коефіцієнтів перетворення Фур'є такого ж розміру, як і фрагмент зображення. З вищенаведеного випливає, що вектор $x^{(p)}$ так само як і $w^{(k)}$, можуть бути записані у вигляді матриць

$$X_f^{(p)} = \begin{pmatrix} x_1^{(p)} & x_1^{(p)} & \cdots & x_{r_1}^{(p)} \\ x_{r_1+1}^{(p)} & x_{r_1+2}^{(p)} & \cdots & x_{r_2}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{r_2+1}^{(p)} & x_{r_2+2}^{(p)} & \cdots & x_n^{(p)} \end{pmatrix}, \quad W_f^{(p)} = \begin{pmatrix} w_1^{(k)} & w_1^{(k)} & \cdots & w_{r_1}^{(k)} \\ w_{r_1+1}^{(k)} & w_{r_1+2}^{(k)} & \cdots & w_{r_2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{r_2+1}^{(k)} & w_{r_2+2}^{(k)} & \cdots & w_{r_n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Оскільки обробка відбувається у частотній області, то, згідно з теоремою згортки [13], можемо записати таке:

$$X_s^{(p)} * W_s^{(k)} = \mathcal{F}^{-1} \left(X_f^{(p)} \times W_f^{(k)} \right),$$

де $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ — обернене двомірне перетворення Фур'є, $*$ — оператор згортки, $\times$ — оператор поелементного множення, $X_s^{(p)} = \mathcal{F}^{-1} \left(X_f^{(p)} \right)$, $W_s^{(k)} = \mathcal{F}^{-1} \left(W_f^{(k)} \right)$.

З останньої рівності випливає, що $R^{(k,p)}$ є сумою елементів згортки у просторовій області фрагменту зображення $X_s^{(p)}$ з ядром $W_s^{(k)}$.

У таблицях 1–6 наведено результати згорток у просторовій області вхідних фрагментів зображень з ядрами, сформованими вагами різних нейронів першого прихованого шару при навчанні мережі для фільтрації Гаусівського та спекл шуму.

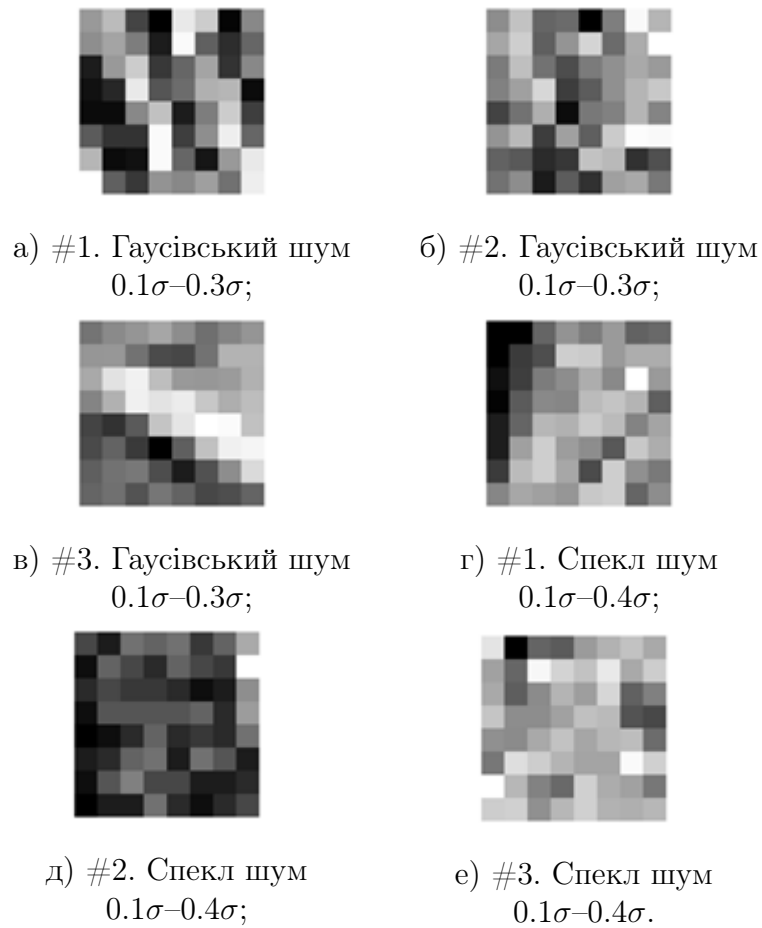


Рис. 1. Фрагмент зашумленого зображення розміром 8×8 .

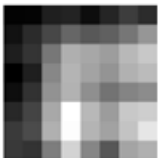
Таблиця 1.

Результати згортки у просторовій області зображення #1 (рис. 1 (а)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #5	Епоха навчання #10
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

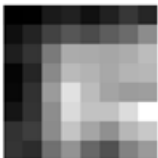
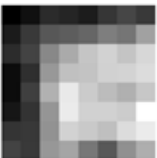
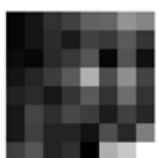
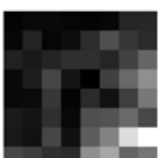
Таблиця 2.

Результати згортки у просторовій області зображення #2 (рис. 1 (б)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #5	Епоха навчання #10
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

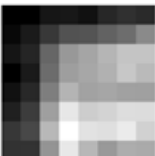
Таблиця 3.

Результати згортки у просторовій області зображення #3 (рис. 1 (в)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #5	Епоха навчання #10
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

Таблиця 4.

Результати згортки у просторовій області зображення #4 (рис. 1 (г)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #7	Епоха навчання #9
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

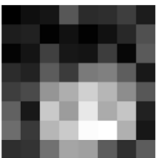
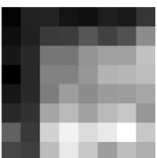
Таблиця 5.

Результати згортки у просторовій області зображення #5 (рис. 1 (д)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #7	Епоха навчання #9
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

Таблиця 6.

Результати згортки у просторовій області зображення #6 (рис. 1 (е)) з ядрами, що утворюються вагами нейронів першого прихованого шару

	Епоха навчання #1	Епоха навчання #7	Епоха навчання #9
Нейрон #1			
Нейрон #256			
Нейрон #512			
Нейрон #768			
Нейрон #1024			

Доцільно також порівняти ядра згортки, сформовані вагами нейронів, із деякими відомими ядрами згортки у просторовій області. Для порівняння використовувалася косинусна подібність.

$$s(A, B) = \frac{\Re(\langle A, B \rangle)}{\|A\| \|B\|},$$

де A та B — векторизовані ядра згортки, $\langle \cdot \rangle$ — скалярний добуток, $\Re(\cdot)$ — функція, яка повертає дійсну частину комплексного числа, $\|\cdot\|$ — норма Фробеніуса. Значення $s(A, B)$ близькі до 1 свідчать про подібність ядер згортки.

У таблицях 7 та 8 наведено результати порівняння ядер згортки у просторовій області, отриманих з ваг нейронів комплекснозначної нейромережі на 10-й епосі навчання для фільтрації Гаусівського шуму (таблиця 7) та спекл-шуму (таблиця 8) з деякими відомими ядрами згортки у просторовій області.

Таблиця 7.

Порівняння ядер згортки, що утворюються вагами нейронів з деякими відомими ядрами згортки в просторовій області

	Бокс фільтр, 8×8	Гаусівський фільтр, 8×8, стандартне відхилення 0.5	Гаусівський фільтр, 8×8, стандартне відхилення 1
Нейрон #1	0.022833	−0.18097	−0.14759
Нейрон #256	0.062074	−0.047544	−0.042503
Нейрон #512	0.048572	−0.063726	−0.025157
Нейрон #768	0.0036742	−0.083041	−0.11821
Нейрон #1024	0.038796	−0.091296	−0.054479

Таблиця 8.

Порівняння ядер згортки, що утворюються вагами нейронів з деякими відомими ядрами згортки в просторовій області

	Бокс фільтр, 8×8	Гаусівський фільтр, 8×8, стандартне відхилення 0.5	Гаусівський фільтр, 8×8, стандартне відхилення 1
Нейрон #1	0.020731	−0.18133	−0.12566
Нейрон #256	0.065181	−0.15032	−0.098496
Нейрон #512	0.050016	−0.024569	−0.017305
Нейрон #768	−0.0096031	−0.028489	−0.011391
Нейрон #1024	0.047493	−0.053494	−0.026364

У таблицях 9–14 наведено результати фільтрації зашумлених зображень за допомогою відомих методів фільтрації. Зображення з номерами 1,2,3 містять адитивний Гаусівський шум із стандартним відхиленням 0.1σ , 0.2σ та 0.3σ (де σ — стандартне відхилення кожного окремо взятого ідеального зображення) відповідно. Зображення з номерами 4,5 та 6 містять мультиплікативний спекл шум зі стандартним відхиленням 0.2σ , 0.3σ та 0.4σ відповідно. У таблицях 15–19 наведено результати згортки зображень з номерами 1–6 з ядром, сформованим з ваг комплекснозначного нейроелемента.

Таблиця 9.

Фільтрація зображень з використанням BM3D фільтра

Зображення #1	32.3497	0.77856	0.9961
Зображення #2	29.4844	0.627	0.983
Зображення #3	25.7033	0.51686	0.96354
Зображення #4	30.7613	0.76866	0.99502
Зображення #5	28.8852	0.60848	0.98245
Зображення #6	22.2808	0.44534	0.958

Таблиця 10.

Фільтрація зображень з використанням Frost фільтра з ядром розміру 3×3

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #4	28.3072	0.76486	0.99069
Зображення #5	26.2537	0.60972	0.97556
Зображення #6	22.6432	0.5086	0.95369

Таблиця 11.

Фільтрація зображень з використанням Lee фільтра з ядром розміру 3×3

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #4	29.5624	0.78081	0.99319
Зображення #5	27.7981	0.66759	0.983
Зображення #6	23.6314	0.62605	0.9689

Таблиця 12.

Фільтрація зображень з використанням Гаусівського фільтра розміром 3×3

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	28.792	0.75903	0.99126
Зображення #2	27.1301	0.64375	0.97459
Зображення #3	24.5305	0.62553	0.96113
Зображення #4	28.9979	0.8114	0.99217
Зображення #5	26.7999	0.69389	0.97962
Зображення #6	23.2128	0.6139	0.96229

Таблиця 13.

Фільтрація зображень з використанням mean фільтра

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	27.5266	0.69113	0.98822
Зображення #2	26.1626	0.54263	0.96654
Зображення #3	23.4641	0.51558	0.94956
Зображення #4	27.7646	0.75651	0.98935
Зображення #5	25.931	0.60199	0.97281
Зображення #6	22.4884	0.50564	0.95102

Таблиця 14.

Фільтрація зображень з використанням median фільтру

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	28.9261	0.70792	0.99131
Зображення #2	26.4753	0.54488	0.9705
Зображення #3	24.0154	0.50745	0.95491
Зображення #4	29.5767	0.78316	0.99248
Зображення #5	27.279	0.60831	0.97708
Зображення #6	22.2505	0.50074	0.95563

Таблиця 15.

Згортка з ядром сформованим з ваг нейрона #1 першого прихованого шару

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	9.679	0.14058	0.75555
Зображення #2	11.1107	0.039981	0.62206
Зображення #3	7.1767	-0.009568	0.32788
Зображення #4	9.7986	0.17531	0.76509
Зображення #5	11.3959	0.060549	0.65415
Зображення #6	7.0937	-0.012968	0.34234

Таблиця 16.

Згортка з ядром сформованим з ваг нейрона #256 першого прихованого шару

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	15.2185	0.28548	0.88255
Зображення #2	20.0616	0.21385	0.85416
Зображення #3	14.4664	0.16622	0.67291
Зображення #4	15.2535	0.33429	0.88482
Зображення #5	19.737	0.24288	0.8664
Зображення #6	13.757	0.14491	0.68519

Таблиця 17.

Згортка з ядром сформованим з ваг нейрона #512 першого прихованого шару

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	15.9611	0.31671	0.93556
Зображення #2	20.8287	0.16441	0.87298
Зображення #3	14.6615	0.14323	0.78444
Зображення #4	16.7474	0.39105	0.93785
Зображення #5	21.1445	0.20906	0.88693
Зображення #6	14.9326	0.12511	0.79323

Таблиця 18.

Згортка з ядром сформованим з ваг нейрона #768 першого прихованого шару

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	7.3852	0.090734	0.11664
Зображення #2	6.5666	0.044863	−0.11016
Зображення #3	3.7031	0.01698	−0.14104
Зображення #4	7.491	0.091222	0.24199
Зображення #5	6.6837	0.050447	−0.010282
Зображення #6	3.9845	0.022352	−0.015933

Таблиця 19.

Згортка з ядром сформованим з ваг нейрона #1024 першого прихованого шару

	PSNR	SSIM	Кореляція
Зображення #1	9.8989	0.21524	0.80256
Зображення #2	9.5571	0.17998	0.70795
Зображення #3	7.0918	0.14029	0.53676
Зображення #4	9.9547	0.24695	0.80882
Зображення #5	9.7059	0.20776	0.73009
Зображення #6	7.4643	0.12938	0.54255

Зі значень PSNR та SSIM [14] (таблиці 15–19) видно, що ядра згорток не забезпечують фільтрацію шуму на достатньому рівні (значення PSNR менше 20dB вважається низьким) і не наближаються за якістю фільтрації до жодного з наведених методів. У більшості випадків зберігся середній рівень кореляції між результатом згортки та ідеальним зображенням, що свідчить про збереження певного рівня подібності між ними.

3. Висновки. У роботі було проведено дослідження вагів комплекснозначної нейромережі MLMVN у процесі навчання з метою фільтрації зображень, на яких присутній адитивний Гаусівський шум та мультиплікативний спекл шум. Зроблено аналіз окремих нейроелементів на різних епохах навчання. Проведені дослідження дозволяють зробити висновок, що ядра згорток утворених з ваг окремих нейроелементів не дозволяють сформувати ефективні фільтри у просторовій області і не є близькими до відомих методів фільтрації. Проте ваги нейронів акумулюють інформацію отриману в процесі навчання, що дозволяє нейромережі здійснювати реальну успішну фільтрацію шуму на цифрових зображеннях.

Список використаної літератури

1. Dabov K., Foi A., Katkovnik V., Egiazarian K. Image denoising by sparse 3-D Transform-Domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2007. Vol. 16, No. 8, P. 2080–2095. DOI: <https://doi.org/10.1109/tip.2007.901238>
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: With Engineering Applications. The M.I.T. Press : Cambridge, Massachusetts, 1949. 158 p.
3. Aizenberg I., Moraga C. Multilayer feedforward neural network based on multi-valued neurons (MLMVN) and a backpropagation learning algorithm. *Soft Computing*. 2006. Vol. 11, No. 2. P. 169–183. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-006-0075-5>

4. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing, Global Edition*. Pearson Education : UK, 2018. pp. 18–19.
5. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*. 1965. Vol. 19, No. 90. P. 297–301. DOI: <https://doi.org/10.2307/2003354>
6. Jahan I. A Comparative study of Gaussian noise removal methodologies for gray scale images. *International Journal of Computer Applications*. 2017. Vol. 172, No. 5. P. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.5120/ijca2017915138>
7. Pradeep S., Nirmaladevi P. A Review on Speckle Noise Reduction Techniques in Ultrasound Medical images based on Spatial Domain, Transform Domain and CNN Methods. *International Virtual Conference on Robotics, Automation, Intelligent Systems and Energy*. Erode : India, 2021. Vol. 1055, No. 1. 012116. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1055/1/012116>
8. Aizenberg I. Hebbian and error-correction learning for complex-valued neurons. *Soft Computing*. 2012. Vol. 17, No. 2. P. 265–273. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0891-8>
9. Bindi M., Luchetta A., Lozito G. M., Carobbi C. F. M., Grasso F., Piccirilli M. C. Frequency characterization of medium voltage cables for fault prevention through Multi-Valued neural networks and power line communication technologies. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2023. Vol. 38, No. 5. P. 3227–3237. DOI: <https://doi.org/10.1109/tpwrd.2023.3270128>
10. Aizenberg I., Luchetta A., Manetti S. A modified learning algorithm for the multilayer neural network with multi-valued neurons based on the complex QR decomposition. *Soft Computing*. 2011. Vol. 16, No. 4. P. 563–575. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-011-0755-7>
11. Aizenberg E., Aizenberg I. Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins. *IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining (CIDM)*. Orlando : USA, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1109/cidm.2014.7008147>
12. Lawson C. L., Hanson R. J. Solving least squares problems. SIAM : USA, 1995. 349 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611971217>
13. Gonzalez R. C., Woods R. E. *Digital Image Processing, Global Edition*. Pearson Education : UK, 2018. pp. 213–214.
14. Sara U., Akter M., Uddin M. S. Image Quality Assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR — A Comparative Study. *Journal of Computer and Communications*. 2019. Vol. 7, No. 3. P. 8–18. DOI: <https://doi.org/10.4236/jcc.2019.73002>

Tovt Yu. O., Bryla A. Yu. Study of the content of weights of complex-valued neural networks in frequency domain.

The problem of image filtering using complex-valued neural networks in the frequency domain is considered. The cases of the presence of additive Gaussian noise and multiplicative speckle noise in images are investigated. A complex-valued feedforward neural network is used for filtering. The weights of the neurons at different epochs of the learning process and the content of convolution kernels formed from the weights of individual neurons in the spatial domain are analysed.

Keywords: neural networks, complex-valued neural networks, digital images, noise filtering.

References

1. Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V., & Egiazarian, K. (2007). Image denoising by sparse 3-D Transform-Domain collaborative filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(8), 2080–2095. <https://doi.org/10.1109/tip.2007.901238>
2. Wiener, N. (1949). *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: With Engineering Applications*. The M.I.T. Press: Cambridge, Massachusetts.
3. Aizenberg, I., & Moraga, C. (2006). Multilayer feedforward neural network based on multi-valued neurons (MLMVN) and a backpropagation learning algorithm. *Soft Computing*, 11(2), 169–183. <https://doi.org/10.1007/s00500-006-0075-5>
4. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing, Global Edition*. (pp. 18–19). Pearson Education: UK.

5. Cooley, J. W., & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of Computation*, 19(90), 297–301. <https://doi.org/10.2307/2003354>
6. Jahan, I. (2017). A Comparative study of Gaussian noise removal methodologies for gray scale images. *International Journal of Computer Applications*, 172(5), 1–6. <https://doi.org/10.5120/ijca2017915138>
7. Pradeep, S., & Nirmaladevi, P. (2021). A Review on Speckle Noise Reduction Techniques in Ultrasound Medical images based on Spatial Domain, Transform Domain and CNN Methods. *International Virtual Conference on Robotics, Automation, Intelligent Systems and Energy*. Erode: India. 1055(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1055/1/012116>
8. Aizenberg, I. (2012). Hebbian and error-correction learning for complex-valued neurons. *Soft Computing*, 17(2), 265–273. <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0891-8>
9. Bindi, M., Luchetta, A., Lozito, G. M., Carobbi, C. F. M., Grasso, F., & Piccirilli, M. C. (2023). Frequency characterization of medium voltage cables for fault prevention through Multi-Valued neural networks and power line communication technologies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 38(5), 3227–3237. <https://doi.org/10.1109/tpwrd.2023.3270128>
10. Aizenberg, I., Luchetta, A., & Manetti, S. (2011). A modified learning algorithm for the multilayer neural network with multi-valued neurons based on the complex QR decomposition. *Soft Computing*, 16(4), 563–575. <https://doi.org/10.1007/s00500-011-0755-7>
11. Aizenberg, E., & Aizenberg, I. (2014). Batch linear least squares-based learning algorithm for MLMVN with soft margins. *IEEE Symposium on Computational Intelligence and Data Mining (CIDM)*. Orlando: USA. <https://doi.org/10.1109/cidm.2014.7008147>
12. Lawson, C. L., & Hanson, R. J. (1995). *Solving least squares problems*. SIAM: USA. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971217>
13. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital Image Processing, Global Edition*. (pp. 213–214). Pearson Education: UK.
14. Sara, U., Akter, M., & Uddin, M. S. (2019). Image Quality Assessment through FSIM, SSIM, MSE and PSNR — A Comparative Study. *Journal of Computer and Communications*, 7(3), 8–18. <https://doi.org/10.4236/jcc.2019.73002>

Одержано 25.10.2024

УДК 004.94

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).276-285](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).276-285)**І. М. Черевко¹, І. Т. Косович²**

¹ Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
завідувач кафедри математичного моделювання,
доктор фізико-математичних наук

i.cherevko@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2690-2091>

² Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича,
аспірант кафедри математичного моделювання

kosovych.ihor@chnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1081-1790>**ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ SIR МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ
КЛІТИННИХ АВТОМАТІВ**

Для узагальненої епідеміологічної SIR моделі методом клітинних автоматів вивчається динаміка поширення інфекційних захворювань. Запропонована методика створення динамічного середовища взаємодії агентів, де можна встановлювати та коригувати параметри моделі. Проведено моделювання ряду стратегій та обмежень на параметри моделі. Отримані результати моделювання та врахування впровадження соціального дистанціювання дозволяє аналізувати різні схеми обмежувальних заходів та оцінити їх доцільність.

Ключові слова: SIR, клітинні автомати, імітаційне моделювання, навчання з підкріпленням, соціальне дистанціювання, COVID-19.

1. Вступ. Поширення інфекційних захворювань являє собою складне явище з великою кількістю непередбачуваних факторів. Створення імітаційних моделей поширення інфекцій є важливим елементом для дослідження складної динаміки захворювання. Найпоширенішими моделями розповсюдження інфекційних захворювань є SIR-модель (Susceptible-Infected-Recovered) та багаточисельні її узагальнення, які ділять популяцію на три різні групи: здорові особини, що можуть підхопити інфекцію (S); заражені, особини, що переносять хворобу (I), і ті, хто одужав і перестав розповсюджувати хворобу (R) [1–2].

В основі цих моделей є система диференціальних рівнянь, яка описує поведінку динаміки захворювання на макrorівні зберігаючи високий рівень абстрагування від реальності. При цьому не враховуються індивідуальні властивості об'єктів, оскільки процес поширення інфекції дискретний та неможливо передбачити наслідки, які активно впроваджуються.

Ще один підхід для моделювання процесів у епідеміології - є імітаційне моделювання із допомогою мультиагентного методу. Він дає змогу, задавши початкові параметрами для кожного типу об'єктів і систему правил їхньої взаємодії визначити динамічні закономірності розвитку інфекції і найважливіші властивості агентів, які сприяють зміні темпів поширення. Перевагою даного підходу є те, що враховуються індивідуальні властивості кожного об'єкту складної системи [3]. Застосування агентного моделювання забезпечує можливість експериментувати з параметрами моделі та отримати різні сценарії розвитку подій, розширюючи наше бачення про те, що може відбутися в майбутньому [4–5].

2. Огляд праць. Моделювання епідемії зазвичай виконується за допомогою компартментних моделей, які часто називають SIR моделями, розпочалося з робіт А. Г. Маккендріка та В. О. Кермака [1–2]. Подальші дослідження кількості агентів у конкретній фракції та швидкості їх зміни розглянуто в роботах [5–6].

У роботах [7–9] було здійснено моделювання SIR моделей за допомогою клітинних автоматів де було розглянуто частину карантинних обмежень, однак не досліджено повний комплекс заходів та не проаналізовано їх взаємодію.

У першій частині даної роботи ми пропонуємо спосіб моделювання коронавірусної інфекції методом клітинних автоматів, в якому реалізовано різні режими і підходи розповсюдження захворювання та здійснено аналіз і порівняння ефективності запроваджених обмежень. Друга частина роботи присвячена аналізу ефективності впровадження соціального дистанціювання на основі технології навчання з підкріпленням Reinforcement learning.

3. Імітаційне моделювання SIR моделей. У найпростіших SIR моделях здійснюються базові припущення, наприклад, що кожен має однакові шанси підхопити вірус від інфікованої людини, оскільки популяція ідеально і рівномірно змішана, і що всі люди з хворобою однаково заразні, поки не помруть або не одужають. Більш просунуті моделі, які роблять кількісні прогнози, необхідні під час нової пандемії, поділяють людей на менші групи — за віком, статтю тощо.

Особливий інтерес становлять клітинні автомати, що моделюють рух індивідів. Клітинні автомати можуть подолати недоліки підходу з використанням диференціальних рівнянь і розглядаються як ефективний альтернативний метод для моделювання поширення епідемії.

У класичній SIR моделі є набір агентів, які рухаються в популяції. У нашій симуляції ми розглядаємо набір агентів, які рухаються у просторі, і тим самим імітують життя в місті. Кожен агент може належати до однієї з трьох категорій залежно від свого стану: S (susceptible) — здоровий і сприйнятливий до хвороби, I (infected) — інфікований, який може заразити інших, R (recovered) — видужав або не сприйнятливий. Агенти поступово переходять між цими станами в процесі моделювання: $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Для моделювання необхідно ініціалізувати параметри моделі [10]:

- загальна кількість агентів (N);
- відстань при якій є ймовірність заразитися (d);
- тривалість моделювання (t);
- інфіковані агенти на першій ітерації (n_{inf});
- позиція агента (x, y);
- швидкість агента (v) та вектор руху (k);
- радіус зараження (r);
- інфікованість агента (inf);
- вакцинованість агента (vac);
- чи носить агент маску ($mask$);
- чи агент знаходиться на самоізоляції ($isol$).

Якщо неінфікований агент потрапляє у радіус зараження інфікованого, відбувається оцінка ймовірності інфікування. Якщо агент сприйнятливий (статус S), то з певною ймовірністю він може заразитися та змінити свій статус на

І. Значення ймовірності інфікування визначається випадковим числом z з інтервалу $[0, 1]$. Якщо $z < p$, де p — ймовірність зараження, агент інфікується. Важливо враховувати різні фактори, що впливають на ймовірність інфікування, наприклад, наявність маски чи вакцини у агента. Наявність маски може значно знизити ймовірність зараження, оскільки вона обмежує передачу вірусу від інфікованого до сприйнятливого агента. Вакцинація також відіграє певну роль, оскільки вакциновані агенти мають знижений ризик зараження або можуть мати легший перебіг хвороби. Такі деталі дозволяють врахувати складну динаміку поширення вірусу і допомагають моделювати реальні сценарії епідемії.

Після завершення часу інфікування агент або одужує (статус змінюється на R), або помирає. Рішення про те, чи агент помирає, залежить від рівня летальності D : генерується випадкове число з інтервалу $[0, 1]$, і якщо це число більше за D , агент виживає і переходить до статусу R , інакше він помирає і видаляється з процесу моделювання.

Симуляція триває до моменту, поки всі інфіковані агенти не вилікуються або не помруть.

Моделювання обмежувальних заходів.

Ізоляція: створюються умови, за яких хворий агент не може заразити інших. Це можна реалізувати або через додатковий статус з перевіркою на кожному кроці ітерації, або шляхом створення окремої зони (ізолятор або домашній карантин), де знаходяться інфіковані агенти і взаємодіють лише між собою. Після одужання агент повертається до основної області моделювання. У реальному житті виявити та ізолювати всіх інфікованих складно через інкубаційний період та можливість безсимптомного перебігу хвороби.

Масковий режим: зменшується ризик зараження, обмежуючи передачу вірусу через дихальні шляхи або контакт з забрудненими поверхнями. У моделюванні цей ефект враховується через зниження ймовірності зараження на константу $Q_{mask} = 0.6$. Таким чином, ймовірність зараження модифікується наступним чином: $z < pQ_{mask}$, де z — випадкова величина з інтервалу $[0, 1]$.

Вакцинація: не гарантується повного уникнення зараження, але значно знижується його ймовірність. Крім того, вакциновані агенти частіше переносять захворювання у легкій формі. У моделі це враховується через зменшення ризику зараження на константу $Q_{vaccination} = 0.4$. Ймовірність зараження розраховується як: $z < pQ_{vaccination}$, де z — випадкова величина з інтервалу $[0, 1]$.

Моделювання триває до моменту, поки всі інфіковані агенти не одужають. Це дозволяє моделювати різні сценарії під час однієї симуляції. Для аналізу сценаріїв можливе збереження стану системи в будь-який момент часу, що дозволяє продовжити моделювання з цього моменту для різних умов.

Вихідні дані моделі включають динаміку загальної кількості інфікованих, одужаних та померлих агентів. Запропонована модель дозволяє легко розрахувати ці показники шляхом підсумовування станів агентів.

На Рис. 1 зображені різні сценарії моделювання.

Моделювання 1: Враховано лише масковий режим. Кількість інфікованих агентів швидко зростає, створюючи критичне навантаження на медичну систему. Пік захворюваності є найвищим серед усіх сценаріїв, що свідчить про недостатню ефективність маскового режиму без додаткових заходів.

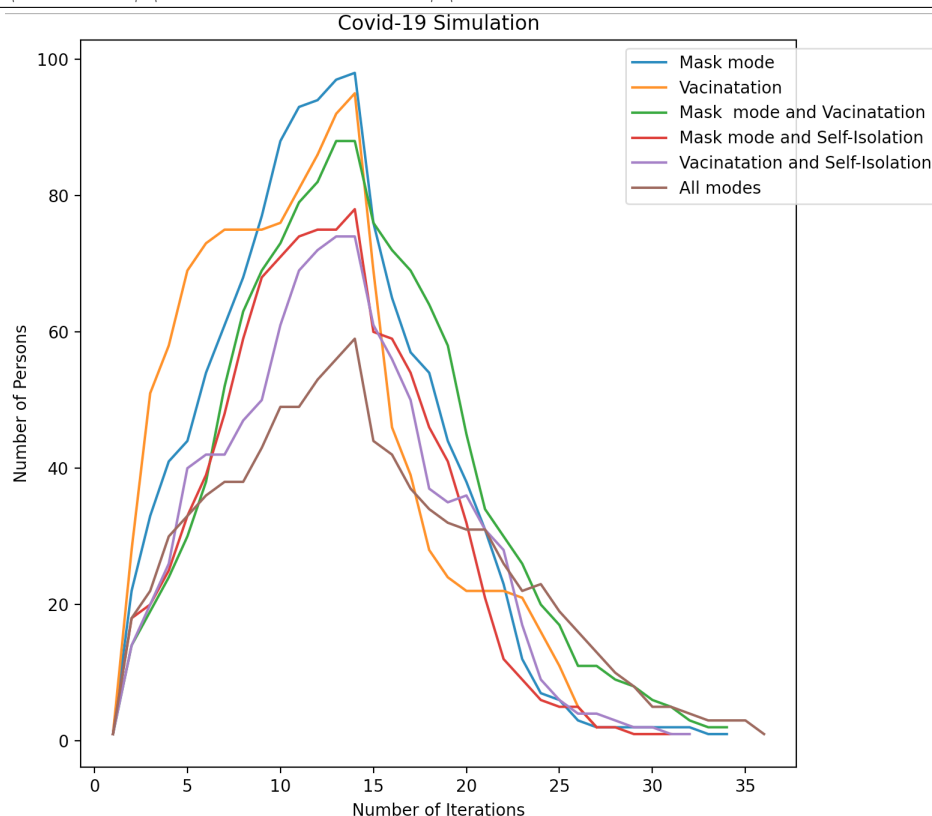


Рис. 1. Динаміка кількості інфікованих агентів при різних сценаріях.

Моделювання 2: Враховано лише вакцинацію. Також спостерігається високий пік інфікування, що призводить до значного навантаження на медичну систему. Лише вакцинація без інших обмежень виявляється неефективною у запобіганні стрімкому зростанню кількості хворих.

Моделювання 3: Комбінація маскового режиму та вакцинації. Хоча пік захворюваності залишається високим, спостерігається швидкий спад кількості інфікованих завдяки набуттю імунітету через вакцинацію. Це допомагає поступово зменшити навантаження на медичну систему, але ситуація все ще залишається критичною.

Моделювання 4: Самоізоляція у разі хвороби та масковий режим. Пік захворюваності стає меншим, а розвиток хвороби проходить більш плавно. Запровадження самоізоляції значно зменшує навантаження на медичну систему та дозволяє уникнути критичних ситуацій з переповненням лікарень.

Моделювання 5: Самоізоляція та вакцинація. Пік захворюваності значно знижується порівняно з попередніми сценаріями, розвиток хвороби проходить більш контрольовано. Ця комбінація заходів дозволяє уникнути переповнення медичної системи та є більш ефективною для стримування епідемії.

Моделювання 6 (основне): Враховано всі обмежуючі фактори — масковий режим, самоізоляцію, вакцинацію та період одужання. Сценарій показує найкращі результати з найменшим піком захворюваності та плавним розвитком хвороби. Пік епідемії зміщується в часі, що дозволяє медичній системі краще підготуватися та ефективно реагувати на зростання кількості випадків.

Комплексне запровадження всіх заходів є найбільш ефективним у стримуванні пандемії.

Результати моделювання показують, що найкращий результат досягається за умови застосування комбінації маскового режиму, вакцинації та самоізоляції (Моделювання 6). Це дозволяє розтягнути епідемічний процес у часі, уникнути критичного навантаження на медичну систему та забезпечити ефективне стримування пандемії.

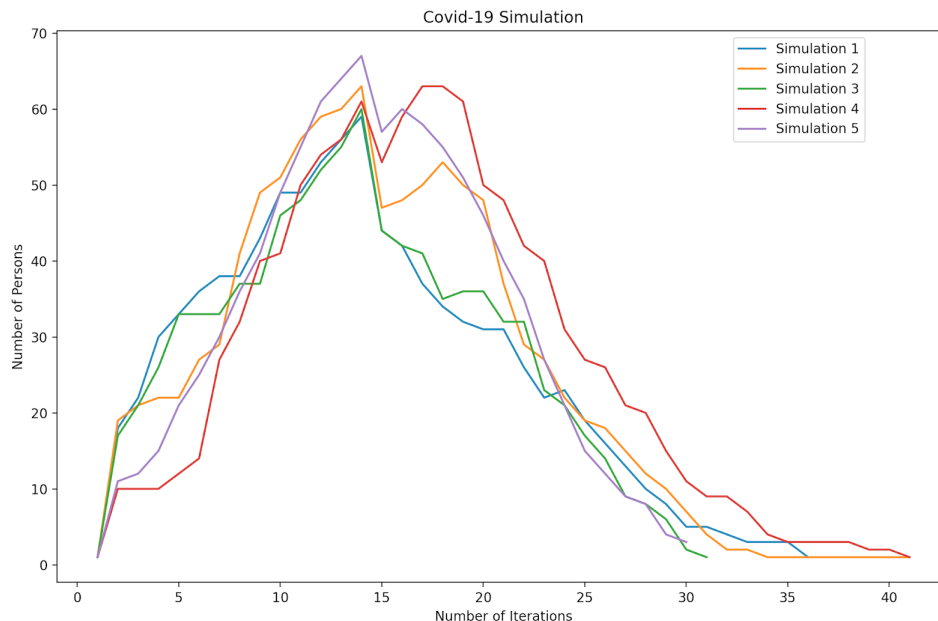


Рис. 2. Різні симуляції кількості інфікованих агентів основної моделі.

На рис. 2 показано п'ять різних симуляцій основної моделі для демонстрації її стійкості. Ми демонструємо, що попередні графіки не є випадковими, а різні симуляції на часовому проміжку мають схожі результати.

На осі x зображені ітерації моделі, а на осі y — кількість інфікованих агентів. З Рис. 2 видно, що основній моделі вдалося знизити пік захворюваності. Попередні симуляції мали пік із 80–100 інфікованими на одній ітерації, тоді як основна модель продемонструвала максимум 67 інфікованих. Середнє значення всіх симуляцій склало 62 особи як пік на ітераціях. В умовах перевантаження медичної системи це є значним досягненням. Також спостерігається покращення в часовому аспекті — розвиток хвороби проходить плавніше та повільніше порівняно з іншими симуляціями. Середня кількість ітерацій усіх основних симуляцій становила 36, що свідчить про ефективність параметрів основної моделі.

Аналіз пікових значень поширення інфекції. У процесі моделювання динаміки епідемії було проаналізовано пікові значення поширення інфекції та особливості динаміки інфекційних хвиль. Оцінка проведена за такими критеріями: максимальне та мінімальне значення піку, середнє значення піку, а також ітерації, на яких спостерігалися максимальні значення. Відхилення результатів наводиться у відсотках, що дає змогу оцінити варіативність моделі при різних параметрах.

Максимальне значення піку (в особах): Дослідження показало, що найбільша кількість інфікованих осіб у піковий момент склала 67 ± 2 з відхиленням $\pm 2.98\%$. Це значення відповідає найбільшій кількості інфікованих на етапі розгортання епідемії.

Мінімальне значення піку (в особах): Найменше значення піку склало 59 ± 2 , що відповідає відхиленню $\pm 3.38\%$. Це свідчить про мінімальну кількість інфікованих осіб під час пікового навантаження системи.

Середнє значення піку (в особах): Середнє значення піку за період моделювання склало 62.4 ± 6 , при цьому відхилення становило $\pm 9.61\%$. Це вказує на стабільність моделі в контексті середніх значень пікового навантаження.

Максимальна ітерація з найбільшим значенням: Максимум інфікованих осіб спостерігався на ітерації 16 ± 1 , з відхиленням $\pm 6.25\%$. Це дає уявлення про час, коли епідемія досягає свого піку.

Мінімальна ітерація з максимальним значенням: Перший пік інфікованих осіб спостерігався на ітерації 13 ± 1 , з відхиленням $\pm 7.69\%$. Це вказує на початкову фазу розгортання епідемії.

Середня ітерація з максимальним значенням: Середня ітерація, на якій спостерігалось максимальне значення, становить 13.6 ± 5 , з відхиленням $\pm 29.4\%$. Це свідчить про те, що пікові значення можуть виникати в різний час в залежності від параметрів моделі.

4. Дослідження соціального дистанціювання за допомогою навчання з підкріпленням. Моделювання поширення вірусу за допомогою навчання з підкріпленням (RL) є складним завданням через велику кількість невизначеностей і нестабільностей [11].

Основні кроки для моделювання поширення вірусу за допомогою RL [12]:

- 1. Визначення динамічного середовища:** необхідно створити середовище, у якому агенти будуть взаємодіяти між собою. Це може бути мережа зв'язків між людьми або географічна карта з визначеними місцями зустрічей.
- 2. Визначення агентів:** агенти можуть бути людьми з різними характеристиками (вік, стать, стан здоров'я тощо);
- 3. Визначення цілей агентів:** метою кожного агента може бути мінімізація ризику інфікування або максимізація користі від взаємодії з іншими агентами;
- 4. Визначення винагород:** необхідно визначити винагороди для кожного агента, що відображатимуть наближення до досягнення їхньої мети. Винагорода може нараховуватися за кожну взаємодію з іншим агентом або за певний період часу.

Середовище. Під час моделювання динаміки популяції в умовах пандемії ми визначаємо стан населення SIRD (сприйнятливі, інфіковані, одужалі, померлі) на певний день. Ця інформація про стан є важливою як для симуляції, так і для середовища RL. Вона включає частки сприйнятливих осіб (S), загальну кількість інфікованих (I), одужалих (R) та померлих (D) серед усього населення. Ці параметри передаються до довільного симулятора динамічних систем у середовищі WhyNot, яке далі інтегрує його в середовище Gym для RL:

- Динамічна система (`simulate_fn`);
- Конфігурація (`config`);

- Початковий стан для запуску симулятора (`initial_state`);
- Визначений простір дій для учня (`action_space`);
- Визначений простір спостереження (`observation_space`);
- Перетворення числових дій у втручання симулятора (`intervention_fn`);
- Визначена функція винагороди (`reward_fn`).

Симуляція починається з початкового стану і змінює стан за допомогою параметрів (`p`), взятих з конфігураційного кортежу:

- `start_time` — початок симуляції;
- `end_time` — кінець симуляції (кількість ітерацій);
- `delta_t` — частота перерахунку параметрів симулятора;
- `sigma` — ймовірність переходу від сприйнятливих до інфікованих;
- `mu_i` — ймовірність переходу від інфікованих до одужалих;
- `tau_i` — ймовірність переходу від інфікованих до смерті.

Процес моделювання пандемії з використанням моделі SIRD включає взаємодію агента RL із стимуляцією для оптимізації політики соціального дистанціювання. На початку епізоду симуляції середовище RL ініціалізується розподілом населення за станом здоров'я, що забезпечує початковий контекст для прийняття рішень агентом RL. Агент, керуючись своєю політикою, оцінює поточний стан і визначає рівень соціального дистанціювання, який представлений дискретними діями від 0% до 100%. Обрана дія коригує параметри, такі як рівень передачі в моделі SIRD, і симуляція продовжується на певну кількість днів для моделювання ефекту втручання. Після застосування дії модель SIRD оновлює стан здоров'я популяції, враховуючи динаміку захворювання та вплив заходів соціального дистанціювання. Після цього обчислюється винагорода, яка оцінює ефективність втручання з урахуванням впливу на здоров'я (наприклад, зниження смертності та кількості інфекцій).

Функція винагороди. Функція винагороди є важливою для спрямування поведінки агента, надаючи зворотний зв'язок про те, чи є зміни стану позитивними або негативними. У нашому дослідженні функція винагороди показує дії, що призводять до позитивних результатів, таких як зменшення кількості інфікованих осіб, і карає за дії, що погіршують ситуацію. Враховуючи як позитивні, так і негативні наслідки дій, функція винагороди допомагає агенту RL обирати дії, що мінімізують загальний вплив COVID-19.

Функція винагороди формулюється наступним чином:

$$R(t) = 100S(t) - 100I(t) - 1000D(t),$$

де:

- $R(t)$ — винагорода в момент часу t ;
- $S(t)$ — кількість сприйнятливих осіб в момент часу t ;
- $I(t)$ — кількість інфікованих осіб в момент часу t ;
- $D(t)$ — кількість смертей в момент часу t .

Ця функція винагороди стимулює політику, яка ефективно зменшує кількість інфікованих і померлих.

У даному підході ми розглянули різні політики для кривих захворюваності, щоб оцінити їхню ефективність та виявити умови, за яких фактор дистанціювання дає найбільшу винагороду Рис. 3.

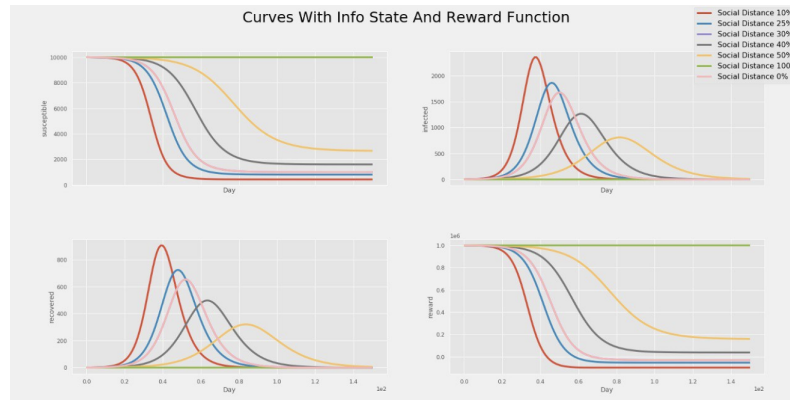


Рис. 3. Графіки із різними станами і результатами функції винагород.

Найкращий варіант — 100% соціальне дистанціювання, що забезпечує відсутність інфікованих, але є нереалістичним через економічні наслідки. Зниження дистанціювання до 50% зберігає високу ефективність, зменшуючи кількість інфікованих і підтримуючи економічну стабільність.

Помірні обмеження (30–40%) виявилися найбільш збалансованими, оскільки вони дозволяють знизити кількість інфікованих без значного впливу на економіку та спосіб життя. Такий підхід забезпечує баланс між запровадженням обмежень і контролем над зростанням захворюваності.

Відсутність соціального дистанціювання (0%), тобто відсутність будь-яких обмежень, є найгіршим варіантом з найвищим піком інфікування та мінімальною винагородою.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цьому дослідженні розглянуто два підходи до моделювання поширення інфекцій: SIR моделі та навчання з підкріпленням. SIR моделі є корисними для загального аналізу динаміки захворюваності та враховують ключові особливості взаємодії між групами населення, що дозволяє оцінити ефективність різних заходів на макрорівні.

Моделювання з RL надає можливість адаптивного реагування на зміни в епідемії, що дозволяє агентам навчатися та приймати рішення, спрямовані на зменшення поширення інфекції. Запропонована модель включає аспекти соціальної динаміки через прості правила, засновані на статистичних принципах. Найкращі результати досягнуто при 30–40% соціального дистанціювання, що забезпечує баланс між контролем епідемії та економічною стабільністю.

Комбінація SIR моделей з RL підходом забезпечує комплексний підхід до моделювання епідемій, що дозволяє ефективніше планувати заходи боротьби з інфекційними захворюваннями.

Список використаної літератури

1. Bacaër N. McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927). *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer : London, 2011. pp. 89–96. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8_16
2. Satsuma J., Willox R., Ramani A., Grammaticos B., Carstea A. Extending the SIR epidemic model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2004. Vol. 336, No. 3–4. P. 369–375. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.035>
3. Чумаченко Д. І., Чумаченко Т. О. Математичні моделі та методи прогнозуван-

- ня епідемічних процесів: монографія. Харків : ТОВ "Планета-Прінт 2020. 180 с. <https://dx.doi.org/10.25313/978-617-7751-88-4>
4. Currie C. M., Fowler J. W., Kotiadis K., Monks T., Onggo B. S., Robertson D. A., Tako A. A. How simulation modelling can help reduce the impact of COVID-19. *Journal of Simulation*. 2020. Vol. 14, No. 2. P. 83–97. DOI: <https://doi.org/10.1080/17477778.2020.1751570>
 5. Чумаченко Д. І., Чумаченко Т. О. Імітаційне моделювання епідемічних процесів: прикладні аспекти: монографія. Харків : ФОП Панов А. М., 2023. 300 с. DOI: <https://doi.org/10.30837/SMEP.2023>
 6. Rabajante J. F. Insights from early mathematical models of 2019-nCoV acute respiratory disease (COVID-19) dynamics. COVID-19 e-print, 2020. DOI: <https://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2002.05296>
 7. Hu Z., Ge Q., Jin L., Xiong M. Artificial Intelligence Forecasting of Covid-19 in China. COVID-19 e-print, 2020. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.07112>
 8. Anastassopoulou C., Russo L., Tsakris A., Siettos C. Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak. *PLoS ONE* 15. 2020. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0230405>
 9. Jithesh P. K. A model based on cellular automata for investigating the impact of lockdown, migration and vaccination on COVID-19 dynamics. *Comput. Methods Programs Biomed.* 2021. Vol. 211, No. 1. P. 1–10. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2021.106402>
 10. Косович І. Імітація поширення COVID-19 методом клітинних автоматів. *Матеріали міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій : Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології». 22–24 вересня 2022 р. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2022. С. 176–178. URL: <http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf> (дата звернення:).*
 11. Zong K., Luo C. Reinforcement learning based framework for COVID-19 resource allocation. *Computers & Industrial Engineering, Elsevier*. 2022. Vol. 167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.107960>
 12. Kosovych I., Cherevko I., Shchur T., Shkilniuk D. Computer Modeling of the Dynamics of Epidemiological Processes. 14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies : ACIT'2024. Ceske Budejovice : Czech Republic, 19–21 September 2024. P. 32–35.

Cherevko I. M., Kosovych I. T. Simulation Modeling of SIR Models Using Cellular Automata.

For a generalized epidemiological SIR model using cellular automata, the dynamics of infectious disease spread are studied. The proposed method involves creating a dynamic environment for agent interaction, where model parameters can be set and adjusted. A number of strategies and constraints on model parameters were simulated. The results obtained, along with the consideration of social distancing measures, allow for the analysis of different restrictive schemes and evaluation of their effectiveness.

Keywords: SIR, cellular automata, simulation modeling, reinforcement learning, social distancing, COVID-19.

References

1. Bacaër, N. (2011). *McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927)*. A Short History of Mathematical Population Dynamics, Springer: London. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-115-8_16
2. Satsuma, J., Willox, R., Ramani, A., Grammaticos, B., & Carstea, A. (2020). Extending the SIR epidemic model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336(3), 369–375. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2003.12.035>
3. Chumachenko, D. I., & Chumachenko, T. O. (2020). Mathematical Models and Methods for Predicting Epidemic Processes: Monograph. Kharkiv: Planet-Print LLC. <https://dx.doi.org/10.25313/978-617-7751-88-4> [in Ukrainian].

4. Currie, C. M., Fowler, J. W., Kotiadis, K., Monks, T., Onggo, B. S., Robertson, D. A., & Tako, A. A. (2020). How simulation modelling can help reduce the impact of COVID-19. *Journal of Simulation*, 14(2), 83–97. <https://doi.org/10.1080/17477778.2020.1751570>
5. Chumachenko, D. I., & Chumachenko, T. O. (2023). *Simulation Modeling of Epidemic Processes: Applied Aspects: Monograph*. Kharkiv: Panov, A. M. <https://doi.org/10.30837/SMEP.2023> [in Ukrainian].
6. Rabajante, J. F. (2020). Insights from early mathematical models of 2019-nCoV acute respiratory disease (COVID-19) dynamics. COVID-19 e-print. <https://dx.doi.org/10.48550/arXiv.2002.05296>
7. Hu, Z., Ge, Q., Jin, L., & Xiong, M. (2020). Artificial Intelligence Forecasting of Covid-19 in China. COVID-19 e-print. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2002.07112>
8. Anastassopoulou, C., Russo, L., Tsakris, A. & Siettos, C. (2020). Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak. *PLoS ONE* 15. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0230405>
9. Jithesh, P. K. (2021). A model based on cellular automata for investigating the impact of lockdown, migration and vaccination on COVID-19 dynamics. *Comput. Methods Programs Biomed.*, 211(1), 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2021.106402>
10. Kosovych, I. (September 22–24, 2022). Simulation of COVID-19 Spread Using Cellular Automata. *Materials of International Scientific Conference, dedicated to the 60th anniversary of the Department of Applied Mathematics and Information Technology*. Collection of materials of the international scientific conference "Applied Mathematics and Information Technologies". Chernivtsi: Chernivtsi National University. Retrieved from <http://www.amit60.fmi.org.ua/files/AMIT2022-Materials.pdf>
11. Zong, K., & Luo, C. (2022). Reinforcement learning based framework for COVID-19 resource allocation. *Computers & Industrial Engineering, Elsevier*, 167. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.107960>
12. Kosovych, I., Cherevko, I., Shchur, T., & Shkilniuk, D. (19–21 September 2024). Computer Modeling of the Dynamics of Epidemiological Processes. *14th International Conference on Advanced Computer Information Technologies*. ACIT'2024. Ceske Budejovice: Czech Republic.

Одержано 03.11.2024

УДК 004.932+004.056.53

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).286-291](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).286-291)**С. В. Шкіря¹, О. В. Корник²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
serhii.shkiria@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7129-2823>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу
oleksandr.kornyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0170-2309>

АНАЛІЗ МЕТОДІВ АВТЕНТИФІКАЦІЇ ЦИФРОВИХ ОБ'ЄКТІВ

У статті розглянуто проблему автентифікації цифрових об'єктів, що має важливе значення для багатьох сучасних технологій і досліджень, зокрема розпізнавання образів та обробки зображень. Описані виклики, пов'язані з аналізом і класифікацією зображень в умовах зростаючих обсягів цифрових даних, а також потреба у створенні ефективних методів, здатних працювати в реальному часі.

Сучасні технології, такі як глибоке навчання та нейронні мережі, відкрили нові можливості у вирішенні цих завдань, забезпечуючи високу точність і продуктивність. Проте залишаються невирішеними проблеми, пов'язані з обробкою зображень за поганого освітлення, різноманітністю об'єктів, потребою у великих навчальних вибірках і високою обчислювальною складністю.

Проаналізовано сучасні методи розпізнавання облич, включно з такими, як DeepFace, DeepID, FaceNet, VGG Face, та OpenFace. У статті наведено порівняльний аналіз їхньої точності, особливостей і вимог до обчислювальних ресурсів. Особливу увагу приділено використанню глибоких згорткових нейронних мереж у поєднанні зі спеціалізованими функціями втрат, що забезпечують високу точність розпізнавання.

Запропоновані напрями можуть значно розширити можливості застосування цих технологій у прикладних задачах.

Ключові слова: автентифікація цифрових об'єктів, розпізнавання образів, глибоке навчання, нейронні мережі, методи розпізнавання облич.

1. Вступ. Задача автентифікації цифрових об'єктів є актуальною в багатьох областях сучасних технологій та досліджень. Наприклад, розпізнавання образів та обробка зображень є критичними компонентами для розробки систем автоматичного керування, медичних діагностичних систем, безпекових систем та багатьох інших прикладних сфер. Зокрема, задачі, пов'язані з класифікацією та аналізом зображень у різних умовах освітлення та на різних типах об'єктів, часто виникають на практиці та потребують ефективних рішень.

З кожним роком обсяги цифрових даних, включаючи зображення та відео, стрімко зростають. Це створює потребу в ефективних методах аналізу та класифікації зображень, які можуть працювати в режимі реального часу та обробляти великі обсяги інформації.

Сучасні технології, зокрема глибоке навчання та нейронні мережі, відкрили нові можливості для вирішення задач класифікації зображень. Вони дозволяють досягти високої точності та ефективності, але водночас потребують подальших досліджень для оптимізації та адаптації до різних умов і вимог.

Незважаючи на значні досягнення, задачі класифікації зображень стикаються з низкою викликів, таких як обробка зображень в умовах поганого освітлення, різноманітність об'єктів, потреба у великих навчальних вибірках та висока обчислювальна складність. Це робить дослідження в цій сфері актуальним та необхідним.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні системи розпізнавання та класифікації зображень включають широкий спектр методів і технологій. Наведемо кілька важливих напрямків, для яких тестувалася задача розпізнавання образів (чи це одна й та сама людина чи ні), а також відповідні джерела. Використання 3D моделювання облич та DCNN для розпізнавання облич DeepFace. Цей метод продемонстрував добру продуктивність на великих наборах даних, таких як LFW і був першим, який застосував глибокі згорткові нейронні мережі для розпізнавання облич. Однак, через велику обчислювальну складність, потребує багато ресурсів для навчання та роботи і може бути чутливим до змін умов освітлення та позицій обличчя [1].

Метод який ґрунтується на застосуванні DCNN та PCA для класифікації облич DeepID відзначився хорошою точністю завдяки архітектурним варіаціям та оптимізації функцій втрат, включає в себе використання різноманітних векторів ознак для покращення розпізнавання. Однак це потребує багато етапів налаштування та оптимізації, при цьому точність може знижуватись при перекритті облич або при значних змінах у зовнішності [2].

Модифікація DeepID з комбінованими функціями втрат DeepID2 забезпечила поліпшену точність завдяки комбінованим функціям втрат на різних рівнях нейронної мережі, однак потребує великої кількості обчислювальних ресурсів для тренування [3].

Використання DCNN, PCA з функціями втрат на різних рівнях DeepID2+ відзначився високою продуктивністю навіть при обмежених даних для навчання, включає в себе застосування вдосконалених архітектур та різноманітних векторів ознак для підвищення точності. При цьому метод потребує великого обсягу навчальних даних для підтримки високої точності та обчислювальних витрат для реалізації в реальному часі [4].

Використовує DCNN та триплетну функцію втрат для вбудовування зображень FaceNet підвищує точність розпізнавання, демонструє високу продуктивність на великих наборах даних та реальних зображеннях. При цьому накладаються вимоги до великого обсягу обчислювальних ресурсів для навчання а також присутня залежність від якісного збору триплетів для навчання, що може бути обчислювально затратним [5].

Face++ ґрунтується на застосуванні DCNN та PCA для розпізнавання облич. Його особливістю є те, що він використовує інноваційні підходи, такі як PCA та DCNN, для підвищення точності. Метод добре працює на різноманітних наборах даних завдяки гнучкості архітектури, але можливі проблеми з узагальненням на нові типи зображень або невідомі обличчя [6].

VGG Face є одним з найкращих методів розпізнавання облич, що базується на глибоких нейронних мережах і має високу точність розпізнавання облич на різних наборах даних. Метод використовує велику архітектуру з багатьма шарами, що дозволяє йому досягати високої точності [7].

Інструментарій з відкритим вихідним кодом OpenFace для розпізнавання

облич став популярним завдяки своїй легкій архітектурі та доступності для дослідників та розробників. Він використовує глибокі навчальні моделі, але при цьому залишається легким у реалізації [8].

3. Формалізація задачі. У багатьох прикладних задачах, пов'язаних із автентифікацією цифрових об'єктів, виникає необхідність порівняння двох зображень для визначення їх відповідності. Найчастіше такі завдання стосуються розпізнавання облич людей, оскільки ця технологія має широкий спектр застосувань у різних галузях. Наприклад, вона використовується в системах безпеки для контролю доступу до приміщень чи інформаційних систем, у мобільних пристроях для розблокування за допомогою обличчя, а також у відеоспостереженні для ідентифікації осіб у реальному часі. Окрім того, порівняння облич є важливим у таких сферах, як фінансові послуги для верифікації клієнтів, медицина для аналізу фізіологічних змін, та розваги, де технології автентифікації інтегруються в ігри або соціальні мережі. Автоматичне порівняння облич забезпечує високу точність і швидкість процесу, що робить ці методи критично важливими для сучасних систем, особливо в умовах зростаючих обсягів даних та потреби в обробці інформації в реальному часі. Розвиток таких технологій сприяє підвищенню безпеки, зручності користування та ефективності роботи багатьох систем.

Для двох вхідних зображень облич визначити, чи є вони зображеннями однієї і тієї ж особи, повернувши рішення у вигляді бінарного результату: *true*(1) або *false*(0). Вхідними даними для даної задачі є два зображення облич: x_1 та x_2 . Зображення x_1 та $x_2 \in R^{H \times W \times C}$, де H — висота зображення в пікселях, W — ширина, C — кількість кольорових каналів. Для стандартного кодування зображень RGB кількість каналів рівна 3. Нам потрібно побудувати таку функцію $f(x_1, x_2) \rightarrow \{0, 1\}$ яка мінімізує кількість помилкових рішень при визначенні відповідності облич та повертає значення 1, якщо на зображеннях одна особа, або 0 — якщо різні особи.

Навчальною множиною для даної задачі є множина $D = \{(x_{1i}, x_{2i}, y_i)\}_{i=1}^N$, де $y_i \in \{0, 1\}$. Навчальною множиною для задачі автентифікації цифрових об'єктів є набір зображень, який використовується для навчання алгоритму розпізнавання. Цей набір містить парні зображення, де кожна пара позначена відповідною міткою: 1 для пар, що належать одній особі, і 0 для пар, що представляють різних осіб. Метою використання такої множини є забезпечення алгоритму достатньої кількості даних для навчання моделі розпізнавання. Завдяки цьому алгоритм здатен навчитися виділяти ключові ознаки обличчя, визначати схожості й відмінності між зображеннями, а також адаптуватися до різних умов освітлення, ракурсів та якості зображень. Навчальна множина є критично важливою, оскільки якість і розмаїття даних у ній значною мірою впливають на точність і надійність роботи моделі в реальних умовах. Вона дозволяє мінімізувати помилки розпізнавання, що є ключовим фактором для успішного застосування алгоритму у практичних завданнях.

Для розрахунку похибки методу будемо користуватись формулою:

$$\Delta = (m - r)/m,$$

де r — кількість коректних автентифікацій, m — загальна кількість автентифікацій. При порівнянні функцій автентифікації при фіксованій множині D ,

кращою є та функція, яка забезпечує максимальну точність, тобто мінімізує похибку. При розв'язуванні практичних задач на обчислення функції аутентифікації діє обмеження по часу.

4. Порівняльна характеристика методів розпізнавання обличчя. Deep Convolutional Neural Networks (DCNN) є основною архітектурою нейромереж, що використовуються для завдань розпізнавання обличчя завдяки своїй високій точності та можливостям генералізації. В таблиці 1 наведено порівняльну характеристику точності методів та їх особливості.

Таблиця 1.

Порівняльний аналіз методів розпізнавання обличчя

Метод	Особливості	Точність (%)
DeepFace	Характеризується використанням 3D-моделювання обличчя для покращення виявлення просторових ознак, застосуванням DCNN для екстракції векторів ознак, з функцією втрат, яка базується на softmax.	97.35 ± 0.25
DeepID	Застосовує метод головних компонент (PCA) для зменшення розмірності ознак, використовує softmax функцію втрат для класифікації, вирізняється різноманітністю в архітектурних підходах для підвищення точності.	97.45 ± 0.26
DeepID2	Поліпшена версія DeepID, поєднує кілька функцій втрат, застосованих на різних рівнях DCNN.	99.15 ± 0.15
DeepID2+	Покращена версія DeepID2, яка включає додаткові вдосконалення архітектури, такі як використання різноманітних векторів ознак, отриманих на різних рівнях мережі, що забезпечує більш повний опис обличчя.	99.47 ± 0.12
FaceNet	Характеризується використанням тріплетної функції втрат для навчання моделі, що дозволяє мінімізувати відстань між вбудовуваннями обличчя однієї особи та максимізувати відстань між вбудовуваннями різних осіб. Використовується евклідовий простір, де близькість векторів відповідає схожості обличчя.	99.63 ± 0.09
Face++	Характеризується використанням DCNN для екстракції ознак обличчя, застосуванням методу головних компонент (PCA) для зменшення розмірності, а також впровадженням інших інноваційних підходів для покращення точності та ефективності розпізнавання обличчя.	99.50 ± 0.36
VGG Face	Відзначається використанням DCNN з великою кількістю шарів, що дозволяє моделі ефективно вивчати складні ознаки обличчя. Така архітектура сприяє досягненню високої точності в задачах розпізнавання та верифікації обличчя.	98.95
OpenFace	Характеризується як легка модель, що оптимізована для роботи на мобільних платформах. Забезпечує ефективне розпізнавання обличчя при збереженні високої продуктивності, навіть на пристроях з обмеженими обчислювальними ресурсами.	92.92

Тестування для них проводилося на наборі даних Labelled Faces in the Wild (LFW) та YouTube Faces (FaceNet), які стали стандартами для тестування алгоритмів розпізнавання. Рівень точності, досягнутий людиною у задачі розпізнавання обличчя на цьому наборі даних складає 97.53% [5]. Найкращі результати показали методи, що використовують глибокі згорткові нейронні мережі в поєднанні з функціями втрат, спеціально розробленими для задачі розпізнавання обличчя, як-от тріплетна функція втрат у FaceNet. При цьому на більшість методів накладаються вимоги до великого обсягу обчислювальних ресурсів для

навчання та обробки великої кількості зображень.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Актуальність задачі класифікації зображень обумовлена її важливістю для багатьох сфер життя та бізнесу, необхідністю обробки великих обсягів даних, швидким розвитком технологій та великим потенціалом для інновацій. У даній статті ми розглянули різні методи класифікації зображень з використанням нейронних мереж, їх переваги та недоліки. Основними критеріями порівняння були точність, швидкість обробки, вимоги до обчислювальних ресурсів та стійкість до варіацій зображень. Для більшості методів неврахованими факторами залишаються такі характеристики як перекриття обличчя, етнічна різноманітність, якість зображення та чутливість до зміни освітлення.

Незважаючи на досягнуті успіхи, методи все ще мають простір для покращення. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вдосконалення алгоритмів для кращої генералізації на нових наборах даних, підвищення стійкості до змін освітлення, виразів облич та позицій. Також важливим напрямком є розробка більш ефективних моделей, які б відповідали вимогам реального часу, особливо в умовах обмежених ресурсів. Ці напрямки можуть значно вплинути на різні аспекти нашого життя, допомогти усунути наявні недоліки та розширити можливості застосування цих технологій в реальних умовах.

Список використаної літератури

1. Taigman Y., Yang M., Ranzato M., Wolf L. DeepFace: Closing the Gap to Human-Level Performance in Face Verification. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2014. pp. 1701–1708.
2. Sun Y., Wang X., Tang X. Deep Learning Face Representation by Joint Identification-Verification. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2014. Vol. 27.
3. Sun Y., Chen Y., Wang X., Tang X. DeepID2: Deep Learning Face Representation with Joint Identification-Verification Supervision. 2014. arXiv:1404.2274.
4. Sun Y., Wang X., Tang X. DeepID3: Face Recognition with Very Deep Neural Networks. 2015. arXiv:1502.00873.
5. Schroff F., Kalenichenko D., Philbin J. FaceNet: A Unified Embedding for Face Recognition and Clustering. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2015. pp. 815–823.
6. Zhou E., Fan H., Cao Z., Jiang Y., Yin Q. Learning Deep Face Representation with Long-Tailed Data. 2015. arXiv:1506.01509.
7. Parkhi O. M., Vedaldi A., Zisserman A. Deep Face Recognition. *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*. 2015. BMVA Press. DOI: <https://doi.org/10.5244/C.29.41>
8. Amos B., Ludwiczuk B., Satyanarayanan M. OpenFace: A general-purpose face recognition library with mobile applications. CMU School of Computer Science. *Technical Report*. 2016. URL: <https://elijah.cs.cmu.edu/DOCS/CMU-CS-16-118.pdf>
9. Wang M., Deng W. Deep Face Recognition: A Survey. *Neurocomputing*. 2020. Vol. 429. pp. 215–244.

Shkiria S. V., Kornyk O. V. Analysis of digital object authentication methods.

The article addresses the problem of digital object authentication, which is of great importance for many modern technologies and studies, particularly in image recognition and processing. It describes the challenges associated with image analysis and classification in the context of increasing volumes of digital data, as well as the need to develop efficient methods capable of operating in real-time.

Modern technologies, such as deep learning and neural networks, have opened new opportunities for solving these tasks, providing high accuracy and performance. However,

unresolved issues remain, including image processing under poor lighting conditions, object diversity, the need for large training datasets, and high computational complexity.

The article analyzes contemporary face recognition methods, including DeepFace, DeepID, FaceNet, VGG Face, and OpenFace. A comparative analysis of their accuracy, features, and computational resource requirements is provided. Particular attention is given to the use of deep convolutional neural networks (DCNN) in combination with specialized loss functions, which ensure high recognition accuracy.

The proposed directions can significantly expand the applicability of these technologies in applied problems.

Keywords: Digital object authentication, Image recognition, Deep learning, Neural networks, Face recognition methods.

References

1. Taigman, Y., Yang, M., Ranzato, M., & Wolf, L. (2014). DeepFace: Closing the Gap to Human-Level Performance in Face Verification. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 1701–1708.
2. Sun, Y., Wang, X., & Tang, X. (2014). Deep Learning Face Representation by Joint Identification-Verification. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 27.
3. Sun, Y., Chen, Y., Wang, X., & Tang, X. (2014). DeepID2: Deep Learning Face Representation with Joint Identification-Verification Supervision. arXiv:1404.2274.
4. Sun, Y., Wang, X., & Tang, X. (2015). DeepID3: Face Recognition with Very Deep Neural Networks. arXiv:1502.00873.
5. Schroff, F., Kalenichenko, D., & Philbin, J. (2015). FaceNet: A Unified Embedding for Face Recognition and Clustering. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 815–823.
6. Zhou, E., Fan, H., Cao, Z., Jiang, Y., & Yin, Q. (2015). Learning Deep Face Representation with Long-Tailed Data. arXiv:1506.01509.
7. Parkhi, O. M., Vedaldi, A., & Zisserman, A. (2015). Deep Face Recognition. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*, BMVA Press. <https://doi.org/10.5244/C.29.41>
8. Amos, B., Ludwiczuk, B., & Satyanarayanan, M. (2016). OpenFace: A general-purpose face recognition library with mobile applications. CMU-CS-16-118, CMU School of Computer Science. *Tech. Rep.*
9. Wang, M., & Deng, W. (2020). Deep Face Recognition: A Survey. *Neurocomputing*, 429, 215–244.

Одержано 28.09.2024

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статті повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/about/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за алфавітом) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].
3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perecladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) Рукопис слід старанно вчитати.

12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//author/submit/1>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua//about/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Khol, M. (1962). Group theory. Moskow: Izdatelsvo inostrannay literatura [in Russian].
2. Ivanchuk, I. I. (2001). Title. *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(2), 274–278 [in Russian].

3. Petravchuk, P. P., & Ivanchuk, I. I. (2021). Title. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of mathematics and informatics*, 38(1), 143–148. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148) [in Ukrainian].
4. Karpenko, S.M. (1997). Nazva, yakshcho nema avtorskoho perekladu anhlijskoyu [The title if there is no author translation in English]. *Chyselni metody i zastosuvannia – Numerous methods and applications: Proceedings from '97*. (pp. 21–22). Kyiv [in Ukrainian].
5. Sayre, R. K., Devercelli, A. E., Neuman, M. J., & Wodon, Q. (2015). Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Schroeder, M. A., Aldridge, C. L., Apa, A. D., Bohne, J. R., Braun, C. E., Bunnell, S. D., ... & Stiver, S. J. (2004). Distribution of sage-grouse in North America. *The Condor*, 106(2), 363–376. <https://doi.org/10.1650/7425>.

Список використаної літератури

1. Холл М. Теория групп. Москва: Из-во иностр. лит., 1962. 468 с.
2. Іванчук І. І. Назва. *Український математичний журнал*. 2001. Вип. 53, № 2. С. 274–278.
3. Петравчук П. П., Іванчук І. І. Назва. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2021. Вип. 38 № 1. С. 143–148. DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).143-148](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).143-148).
4. Карпенко С. М. Назва, якщо нема авторського перекладу англійською. *Чисельні методи і застосування: матеріали допов. конф.* Київ, 1997. С. 21–22.
5. Sayre R. K., Devercelli A. E., Neuman M. J., Wodon Q. Investment in early childhood development: Review of the world bank's recent experience. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1596/978-1-4648-0403-8>.
6. Distribution of sage-grouse in North America / M. A. Schroeder al. *The Condor*. 2004. Vol. 106, Issue 2. P. 363–376. DOI: <https://doi.org/10.1650/7425>.

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 45 №2

2024

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, М. Ю. Бортош, Ф. Е. Гече,
Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, Н. Е. Кондрук, І. І. Король,
В. В. Маринець, К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, П. П. Мулеса,
В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,
В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак, М. М. Шаркаді, Н. М. Щобак.

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua