

НАУКОВИЙ ВІСНИК
Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 48 № 1

2026

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 48 № 1

Ужгород 2026

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2026. Т. 48, № 1. 258 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1)).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 1 від 26 січня 2026 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 1 від 29 січня 2026 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Реєстрація суб’єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 2178 від 27.06.2024 року Ідентифікатор медіа R30-04771

Засновник і видавець — ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМІЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2026

© Ужгородський національний університет,
2026

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 48 No 1

Uzhhorod 2026

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2026. Vol. 48, No 1. 258 p.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1)).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 1 of January 26, 2026) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 1 of January 29, 2026)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Registration of an entity in the field of print media: Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 2178 dated June 27, 2024 Media Identifier R30-04771

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., д.т.н., проф., декан факультету математики та цифрових технологій, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

Члени редакційної колегії:

- **Андрашко Ю. В.** — к.т.н., доц., доц. кафедри системного аналізу та теорії оптимізації, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. (Відповідальний секретар).
<https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>
- **Бабич С. Ю.** — д.т.н., проф., провідний науковий співробітник, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко НАН, Україна. <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>
- **Бовді В.** — доктор філ. в галузі мат., проф., професор кафедри математичної статистики, Університет ОАЕ, Аль-Айн, Абу-Дабі, ОАЕ. <https://orcid.org/0000-0001-5750-163X>
- **Бондаренко В. М.** — д.ф.-м.н., проф., провідний науковий співробітник відділу алгебри, Інститут математики НАН України, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>
- **Влох І.** — д.м.н., професор, проректор, Жешувська політехніка ім. Ігнація Лукасевича, Жешув, Польща. <https://orcid.org/0000-0002-9969-0827>
- **Гдовська К.** — доктор філ. в галузі управління, доц. кафедри стратегічного управління, Університет науки і технологій AGH у Кракові, Краків Польща.
<https://orcid.org/0000-0002-7964-3724>
- **Глебена М. І.** — к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедри системного аналізу та теорії оптимізації, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>
- **Гуляницький Л. Ф.** — д.т.н., старший науковий співробітник, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, член-кориспонтент НАН України, Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>
- **Зайченко Ю. П.** — д.т.н., проф., зав. відділенням другої вищої та післядипломної освіти ІПСА, Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-9662-3269>
- **Капустян О. А.** — д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, зав. кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>
- **Келемен М.** — доктор філ., доц. кафедри зв'язків з громадськістю та ділових протоколів, Технічний університет у Кошицях, Кошице, Словаччина.
<https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>
- **Кондрук Н. Е.** — к.т.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>
- **Король І. І.** — д.ф.-м.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. <https://orcid.org/0000-0001-7826-0249>
- **Кучанський О. Ю.** — д.т.н., проф., проф. школи штучного інтелекту та науки про дані, Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан. <https://orcid.org/0000-0003-1277-8031>
- **Маринець В. В.** — д.ф.-м.н., проф., проф. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>
- **Маринець К. В.** — к.ф.-м.н., доц., доц. UD1 інституту прикладної математики, Технічний університет Делфта, Делфт, Нідерланди. <https://orcid.org/0000-0002-0043-6336>
- **Млавець Ю. Ю.** — к.ф.-м.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>
- **Моклячук М. П.** — д.ф.-м.н., проф., Інститут математичної статистики, Бічвуд, Огайо, США. <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>

- **Муканова Б.** — доктор наук з мех. та мат., проф., проф. школи штучного інтелекту та науки про дані, Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан.
<https://orcid.org/0000-0002-0823-6451>
- **Мулеса П. П.** — д.пед.н., доц., зав. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>
- **Поліщук В. В.** — д.т.н., проф., проф. кафедри програмного забезпечення систем, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>
- **Рейтій О. К.** — к.ф.-м.н., доц., зав. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-6727-5418>
- **Семенова Н. В.** — д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу методів дискретної оптимізації математичного моделювання та аналізу складних систем, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-5808-1155>
- **Синявська О. О.** — к.ф.-м.н., доц., доц. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>
- **Сливка-Тилищак Г. І.** — д.ф.-м.н., проф., зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. (Заст. головн. редактора). <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>
- **Снитюк В. Є.** — д.т.н., проф., декан факультету інформаційних технологій, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-9954-8767>
- **Тилищак О. А.** — д.ф.-м.н., доц., проф. кафедри математики та інформатики, Закарпатський угорський університет ім. Ференца Ракоці II, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>
- **Тимошенко О. А.** — к.ф.-м.н., доц., постдокторальний науковий співробітник, кафедра математики, Ослоський університет, Осло, Норвегія.
<https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>
- **Шаркаді М. М.** — к.еко.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>
- **Єгорченкова Н.** — д.т.н., доц., факультет менеджменту, Університет Коменського в Братиславі, Словаччина. <https://orcid.org/0000-0001-5970-0958>
- **Єділхан Д.** — доктор філ. в галузі штуч. інт., проф., директор науково-дослідного центру «Smart City», Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан.
<https://orcid.org/0000-0002-6343-5277>

Технічний секретар — Порохнавець І. М., аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

EDITORIAL TEAM

Editor-in-Chief — Mykola Malyar, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Digital Technologies, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

Members of the Editorial Board:

- **Yurii Andrashko** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Systems Analysis and Optimization Theory, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. (Executive Secretary). <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>
- **Stepan Babych** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>
- **Viktor Bovdi** — PhD in Mathematics, Professor, Department of Mathematical Statistics, United Arab Emirates University, Al Ain, Abu Dhabi, UAE. <https://orcid.org/0000-0001-5750-163X>
- **Vitalii Bondarenko** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>
- **Iwona Włoch** — Doctor of Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector, Rzeszow University of Technology, Rzeszow, Poland. <https://orcid.org/0000-0002-9969-0827>
- **Katarzyna Gdowska** — PhD in Management, Associate Professor, Department of Strategic Management and Economicst, AGH University of Krakow, Krakow, Poland. <https://orcid.org/0000-0002-7964-3724>
- **Myroslava Hlebena** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Systems Analysis and Optimization Theory, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>
- **Leonid Hulyanitskyi** — Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>
- **Yurii Zaichenko** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Second Higher and Postgraduate Education, Institute for Applied System Analysis, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-9662-3269>
- **Olena Kapustian** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Head of the Department of Systems Analysis and Decision-Making Theory, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>
- **Martin Kelemen** — PhD, Associate Professor, Department of Public Relations and Business Protocol, Technical University of Košice, Slovakia. <https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>
- **Nataliia Kondruk** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>
- **Ihor Korol** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector for Scientific and Pedagogical Work, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-7826-0249>
- **Oleksandr Kuchanskyi** — Doctor of Technical Sciences, Professor, School of Artificial Intelligence and Data Science, Astana IT University, Astana, Republic of Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0003-1277-8031>
- **Vasyl Marynets** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>
- **Kateryna Marynets** — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant professor at Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands. <https://orcid.org/0000-0002-0043-6336>

- **Yurii Mlavets** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>
- **Mykhailo Mokliachuk** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, USA. <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>
- **Balgaisha Mukanova** — Doctor of Science in Mechanics and Mathematics, Professor, School of Artificial Intelligence and Data Science, Astana IT University, Astana, Republic of Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-0823-6451>
- **Pavlo Mulesa** — Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>
- **Volodymyr Polishchuk** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Software Systems, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>
- **Oleksandr Reitii** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-6727-5418>
- **Nataliia Semenova** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Leading research fellow of the department of discrete optimization methods for mathematical modeling and analysis of complex systems, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-5808-1155>
- **Olga Siniavska** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Probability Theory and Mathematical Analysis, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>
- **Ganna Slyvka-Tylyshchak** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Analysis, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. (Deputy Editor-in-Chief). <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>
- **Vitalii Snytiuk** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Information Technology, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-9954-8767>
- **Oleksandr Tylyshchak** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Ferenc Rakoczi II Transcarpathian Hungarian University, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>
- **Olena Tymoshenko** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Postdoctoral Research Fellow, Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norway. <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>
- **Mariana Sharkadi** — Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>
- **Nataliia Yehorchenkova** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Department of environmental management and spatial planning, Comenius University, Bratislava, Slovakia. <https://orcid.org/0000-0001-5970-0958>
- **Didar Yedilkhan** — PhD in Artificial Intelligence, Professor, "Smart City" Research and Innovation Center Director, Astana IT University, Astana, Republic of Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-6343-5277>

Technical Secretary — Ivan Porokhnavets, PhD student, Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Опис алгебр Ауслендера некомутативних ідемпотентних напівгруп третього порядку 13
2. *Вишенська О. В., Белова М. О., Шевчук Л. В.* Про інваріантну множину лінійного розширення диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями 21
3. *Волков О. Ю., Волков Ю. І., Войналович Н. М.* Про деякі дискретні квантові розподіли 28
4. *Глухов А. Ю., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю.* Динамічна задача для двошарового стисливого напівпростору з початковими напруженнями 38
5. *Єлейко Я. І., Дребот А. Ю.* Знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації ергодичних Марковських ланцюгів 47
6. *Маринець В. В., Питьовка О. Ю., Козутич О. І.* Модифікація двостороннього методу дослідження математичної моделі поширення вологи у пористих середовищах 52
7. *Хаць Р. В., Ярмошик В. П.* Двочленна асимптотика логарифмічної похідної канонічного добутку з покращеним розподілом нулів 64
8. *Чорненська А., Гутік О.* Про топологізацію піднапівгруп біциклічного моноїда 75
9. *Якімова Н. А.* Особливості матричного виконання деяких бінарних операцій над довільними графами 84
10. *Ярова О. А.* Асимптотика розв'язку суміші багатовимірних рівнянь відновлення 96

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Бурмей О. С., Антосяк П. П.* Сучасні підходи до прогнозування продажів у системах електронної комерції 103
2. *Вронський С. В., Андрашко Ю. В.* Інформаційні технології тестового контролю знань здобувачів вищої освіти: варіанти їх модернізації 113
3. *Камінський Д. О., Льовкін В. М.* Метод діагностування випадків пневмонії на основі компонентної структури моделі та алгоритмів глибокого навчання 127
4. *Коворданій В. В.* Гібридні архітектури глибокого навчання для класифікації веб-контенту 137
5. *Кондрук Н. Е.* Валідація ефективності експертно-орієнтованого кодування для аналізу схожості ординальних даних 146
6. *Красій Д. М., Ларін О. О.* Фізично-керована ланцюгова гаусівська регресія процесу для прогнозування прогресії атеросклеротичної бляшки 153
7. *Куруца О. С.* Повногеномний пошук генетичних асоціацій поширених захворювань в Україні: сучасні методи та інструменти 162
8. *Лях І. М., Дорогий В. І., Пономарьов М. В., Чухрай Я. О.* Прогнозування параметрів сну на основі математичного моделювання та машинного навчання 172
9. *Маляр М. М., Половко І. І., Шаркаді М. М.* Застосування нечіткої логіки в інформаційно-аналітичних системах екологічного моніторингу 186
10. *Морозов Ю. С., Зайцева Т. А.* Методика автоматизованої генерації великих наборів даних у Ansys Mechanical для навчання нейромереж 196

11. Самусь В. М. Гібридна модель аналізу сигналу ЕКГ на основі інженерних ознак та глибинного навчання	206
12. Товт Ю. О., Брила А. Ю. Фільтрація імпульсного шуму на цифрових зображеннях з використанням детектору імпульсів на основі нейронної мережі	218
13. Цегелик Г. Г., Сеньо П. С., Глебена М. І., Цегелик М. Г. Про один підхід до розв'язування задач булевого програмування на основі його структурної інтерпретації	232
14. Чупов С. В., Федорішко А. В. Покращений гібридний алгоритм для квадратичної задачі про призначення	243

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. <i>Bondarenko V. M., Zubaruk O. V.</i> Describing the Auslander algebras of non-commutative idempotent semigroups of third order	13
2. <i>Vyshenska O. V., Belova M. A., Shevchuk L. V.</i> On the invariant set of a linear extension of differential equations with discontinuous trajectories	21
3. <i>Volkov O. Yu., Volkov Yu. I., Voinalovych N M.</i> On Certain Discrete Quantum Distributions	28
4. <i>Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu.</i> Dinamic task for two-layered compressible half-space with initial stresses	38
5. <i>Yeleyko Ya. I., Drebot A. Y.</i> Finding the coefficients of a linear combination of ergodic Markov chains	47
6. <i>Marynets V. V., Pitovka O. Yu., Kohutych O. I.</i> Modification of the two-sided method for investigating a mathematical model of moisture distribution in porous environments	52
7. <i>Khats' R. V., Yarmoshyk V. P.</i> The two-term asymptotics of the logarithmic derivative of a canonical product with improved distribution of zeros	64
8. <i>Chornenka A., Gutik O.</i> On topologization of subsemigroups of the bicyclic monoid	75
9. <i>Yakimova N. A.</i> Peculiarities of matrix execution of some binary operations on arbitrary graphs	84
10. <i>Yarova O. A.</i> Asymptotics of the solution of a mixture of multidimensional renewal equations	96

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. <i>Burmei O. S., Antosiak P. P.</i> Modern approaches to sales forecasting in e-commerce systems	103
2. <i>Vronskiy S. V., Andrashko Yu. V.</i> Information technologies for testing knowledge control of higher education students: options for their modernization	113
3. <i>Kaminskiyi D. O., Lovkin V. M.</i> Method for Diagnosing Pneumonia Based on Component Model Structure and Deep Learning Algorithms	127
4. <i>Kovordaniy V. V.</i> Hybrid deep learning architectures for web content classification	137
5. <i>Kondruk N. E.</i> Validation of the effectiveness of expert-oriented encoding for similarity analysis of ordinal data	146
6. <i>Krasii D. M., Larin O. O.</i> Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression for Atherosclerotic Plaque Progression Prediction	153
7. <i>Kurutsa O. O.</i> Genome-Wide Analysis for Genetic Associations of Common Diseases in Ukraine: Current Methods and Tools	162
8. <i>Liakh I. M., Dorohii V. I., Ponomarov M. V., Chukhrai Y. O.</i> Forecasting Sleep Parameters Based on Mathematical Modelling and Machine Learning	172
9. <i>Malyar M. M., Polovko I. I., Sharkadi M. M.</i> Application of fuzzy logic in information and analytical systems of environmental monitoring	186
10. <i>Morozov Y. S., Zaytseva T. A.</i> Methodology for generating complex datasets in Ansys Mechanical for analysis, visualization, and neural network training in contact mechanics problems	196
11. <i>Samus V. M.</i> Hybrid ECG Signal Analysis Model Based on Engineered Features and Deep Learning	206
12. <i>Tovt Yu. O., Bryla A. Yu.</i> Impulse Noise Filtering In Digital Images Using A Neural-Network-Based Impulse Detector	218

13. <i>Tsehelyk H. H., Senio P. S., Hlebena M. I., Tsehelyk, M. H.</i> An approach to solving boolean programming problems based on structural interpretation	232
14. <i>Chupov S. V., Fedorishko A. V.</i> Improved hybrid algorithm for the quadratic as- signment problem	243

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).13-20](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).13-20)**В. М. Бондаренко¹, О. В. Зубарук²**

¹ Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук, професор
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

ОПИС АЛГЕБР АУСЛЕНДЕРА НЕКОМУТАТИВНИХ ІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

У сучасній теорії зображень, на відміну від класичної лінійної алгебри, важливу роль (чи навіть вирішальну, як в деяких західних алгебраїчних школах) відіграють відповідні категорії зображень. Однією з форм опису таких категорій над полем є обчислення їхніх алгебр Ауслендера як алгебр ендоморфізмів прямої суми представників класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такий опис особливо ефективний у випадках скінченного зображувального типу. Раніше (в сумісних статтях та статтях другого автора) описано алгебри Ауслендера для комутативних напівгруп третього порядку. Ця робота розпочинає аналогічні дослідження для некомутативних напівгруп.

Ключові слова: ідемпотентна напівгрупа, матричне зображення, скінченний зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Стаття присвячена категоріям матричних зображень напівгруп третього порядку. Такі напівгрупи описано в термінах таблиць Келі ще в 50-х роках минулого століття: вперше в 1953 році Т. Тамурою [1], а в 1955 році за допомогою комп'ютерної програми Г. Е. Форсайтом [2]. Зауважимо, що напівгрупи другого порядку не вимагають окремого розгляду, оскільки вони вкладаються в напівгрупи третього порядку шляхом зовнішнього приєднання одиничного чи нульового елемента. Проте мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку було вказано лише біля 10 років тому першим автором разом з одним із його учнів [3, 4]. Це дало їм можливість (див. [5]) дослідити зображення цих напівгруп над довільним полем методами Київської школи з теорії матричних задач. А саме, вперше було доведено, що всі напівгрупи третього порядку є ручними, а, окрім однієї комутативної та двох взаємно дуальних некомутативних напівгруп, — навіть скінченного зображувального типу. В останньому випадку ними також вказано канонічні форми матричних зображень (а значить і нерозкладні матричні зображення як переставно нерозкладні компоненти канонічних форм).

Підкреслимо, що в сучасній теорії зображень, на відміну від класичної лінійної алгебри, важливу роль (чи навіть вирішальну, як в деяких західних алгебраїчних школах) відіграють відповідні категорії зображень. Повністю описати таку категорію — значить вказати в явному вигляді представники всіх

класів еквівалентності та описати множини морфізмів для двох довільних представників. Однією з форм опису категорій зображень є обчислення їхніх алгебр Ауслендера як алгебр ендоморфізмів прямої суми представників усіх класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такий опис особливо ефективний у випадках скінченного зображувального типу.

Раніше (в сумісних статтях та статтях другого автора) описано алгебри Ауслендера для комутативних напівгруп третього порядку. Ця робота розпочинає аналогічні дослідження для некомутативних напівгруп.

2. Постановка завдання. Тематика статті пов'язана з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач для дослідження матричних зображень скінчених напівгруп малих порядків (щоб після аналізу отриманих результатів використати їх у більш загальних випадках). Мова в першу чергу йде не про опис матричних зображень (такі результати отримані раніше), а про опис категорій зображень. Більш конкретно: у випадках, коли напівгрупа має скінченний зображувальний тип (тобто скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), задача полягає в обчисленні її алгебри Ауслендера в матричному вигляді (як одного із способів опису категорії зображень) та задання її у вигляді таблиці множення для деяких фіксованих базисних елементів. У цій статті така задача ставиться для некомутативних ідемпотентних напівгруп третього порядку.

3. Огляд літератури. У статті [5] вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, тобто зі скінченим числом класів еквівалентності нерозкладних зображень. Це стало можливим у зв'язку з тим, що раніше [3, 4] цими ж авторами для таких напівгруп були вказані мінімальні системи твірних і відповідні системи визначальних співвідношень.

Ми виключаємо з розгляду напівгрупи, які є найпростішими і з точки зору теорії напівгруп, і з точки зору теорії зображень. Це напівгрупи, які є або циклічними, або майже циклічними (тобто згідно з нашим означенням можуть бути отримані з циклічних зовнішнім приєднанням одиничного чи нульового елемента; або обох). Оскільки згідно з означенням матричного зображення напівгрупи її одиничному та нульовому елементам (якщо вони є) відповідають одинична та нульова матриці, зображення таких напівгруп задається однією матрицею. Цей випадок добре відомий з класичної лінійної алгебри.

Якщо не розглядати циклічні та майже циклічні напівгрупи, то згідно з результатами роботи [5] комутативні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються з точністю до ізоморфізму, наступними напівгрупами:

$$(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = 0, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$(0, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = 0, cb = 0;$$

$$(c^2, b, c) = \langle b, c \rangle: b^3 = b^2, c^3 = c, b^2 = c^2, bc = c, cb = c.$$

Тут у круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, в кутових — мінімальна система твірних, а потім вписано визначальні співвідношення. Через 0 та e позначається відповідно нульовий та одиничний елементи. Тривіальні визначальні співвідношення для них не вписуються і надалі з формальних міркувань не називаються визначальними.

Матричні алгебри Ауслендера над довільним полем для таких напівгруп (разом з деякими їхніми наднапівгрупами) описані в працях [6–10].

Ця стаття присвячена опису алгебр Ауслендера некомутативних ідемпотентних напівгруп (тобто таких, всі елементи яких – ідемпотенти).

4. Формулювання основних результатів.

4.1. Основні означення. З формальних міркувань всі напівгрупи вважаються скінченними. *Матричним зображенням напівгрупи S розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K* називається довільний гомоморфізм $T : x \rightarrow T(x)$ із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K . Якщо напівгрупа задана твірними та визначальними співвідношеннями, то матричне зображення однозначно задається набором матриць, що відповідають твірним, та відповідними співвідношеннями між цими матрицями. Природно вважати, що у випадку, коли напівгрупа S має одиничний (відповідно нульовий) елемент, одиничному (відповідно нульовому) елементу відповідає одинична (відповідно нульова) матриця (див. [11]).

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для всіх $x \in S$.

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$T \oplus T'(x) := T(x) \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array} \right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють категорію $\text{Rep}_K(S)$, об'єктами якої є всі зображення, а множина морфізмів $\text{Hom}(T, T')$ з об'єкту T розмірності n в об'єкт T' розмірності t складається із всіх матриць Y розміру $n \times t$ таких, що $T(x)Y = YT'(x)$ для довільного $x \in S$. Зрозуміло, що коли в напівгрупі зафіксована система твірних, то рівності $T(x)Y = YT'(x)$ достатньо розглядати лише для елементів цієї системи (до того ж відмінних від 0 та e , якщо такі є).

Нехай S — напівгрупа скінченного зображувального типу, тобто має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень. Зафіксуємо представники T_1, \dots, T_s в цих класах. *Алгеброю Ауслендера $\text{Aus}_K(S)$ напівгрупи S над полем K* називається алгебра

$$\text{End}(T_1 \oplus \dots \oplus T_s) := \text{Hom}(T_1 \oplus \dots \oplus T_s, T_1 \oplus \dots \oplus T_s)$$

ендоморфізмів прямої суми представників T_1, \dots, T_s . Вона не залежить від вибору представників та їх нумерації в тому сенсі, що відповідні алгебри Ауслендера будуть ізоморфними (і навіть спряженими в повній матричній алгебрі $M_n(K)$, де n — сума розмірностей матричних зображень T_1, \dots, T_s). З подібних причин на практиці часто зручно замість прямих сум зображень брати перестановно еквівалентні їм зображення. З природних міркувань ці два поняття ототожнюються (бо коли матричним зображенням зіставити лінійні оператори в скінченновимірних векторних просторах, то при заданні операторів у деякому базисі порядок розташування базисних елементів не має ніякого значення).

Щоб підкреслити, що розглядаються саме матричні зображення напівгруп,

алгебру Ауслендера, будемо також називати матричною алгеброю Ауслендера.

4.2. Основні теореми. Згідно з результатами роботи [5] некомутативні ідемпотентні напівгрупи третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються з точністю до ізоморфізму, наступними напівгрупами:

$$S_1 : (bc, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, cb = c;$$

$$S_1^{op} : (bc, b, c) = \langle b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = c;$$

$$S_2 : (0, b, c) = \langle 0, b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c;$$

$$S_3 : (e, b, c) = \langle e, b, c \rangle: b^2 = b, c^2 = c, bc = b, cb = c.$$

Тут S_1^{op} позначає напівгрупу, дуальну до напівгрупи S_1 (тобто таку, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку).

Наступні теореми описують алгебри Ауслендера всіх цих напівгруп.

Теорема 1. Алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$ ізоморфна алгебрі з K -базисом $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ і наступною таблицею множення:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
λ_1	λ_1	0	0	0	λ_5	0
λ_2	λ_2	0	0	0	0	0
λ_3	0	λ_2	λ_3	0	0	0
λ_4	0	0	0	λ_4	0	0
λ_5	0	0	0	0	0	λ_5
λ_6	0	0	0	0	0	λ_6

Теорема 2. Алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ ізоморфна алгебрі, дуальній до алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$.

Теорема 3. Алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_2)$ і $\mathcal{A}_K(S_3)$ ізоморфна алгебрі з K -базисом $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_5$ і наступною таблицею множення:

	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
γ_1	γ_1	0	0	γ_4	0
γ_2	γ_2	0	0	0	0
γ_3	0	γ_2	γ_3	0	0
γ_4	0	0	0	0	γ_4
γ_5	0	0	0	0	γ_5

Окрім того, при доведенні цих теорем будуть обчислені матричні алгебри Ауслендера всіх вказаних напівгруп.

5. Доведення теорем 1 і 2. Обчислимо спочатку матричну алгебру Ауслендера напівгрупи S_1 .

Розглянемо матричне зображення напівгрупи S_1 , яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2 [5]):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Це зображення переставно подібне прямій сумі зображень

$$1) B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) B_2 = (1), \quad C_2 = (1);$$

$$3) B_3 = (1), \quad C_3 = (0);$$

$$4) B_4 = (0), \quad C_4 = (0),$$

кожне з яких є, очевидно, нерозкладним.

Оскільки довільне зображення, що має канонічний вигляд, не містить інших прямих нерозкладних доданків, окрім 1)–4) (бо при наявності одиничної клітини E порядку $s > 1$ воно еквівалентне прямій сумі s канонічних зображень меншої розмірності), то зображеннями 1)–4) вичерпуються всі, з точністю до еквівалентності, нерозкладні зображення напівгрупи S_1 . Отже, матрична алгебра Ауслендера задається рівностями $B_0X = XB_0$, $C_0X = XC_0$ як рівняннями відносно матриці $X = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 5$.

Оскільки для $a \neq b$ і одиничних матриць E, E' рівність

$$\begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aE & 0 \\ 0 & bE' \end{pmatrix}$$

еквівалентна рівностям $(a - b)Y_{12} = 0$, $(b - a)Y_{21} = 0$, а значить $Y_{12} = 0$, $Y_{21} = 0$, то як частинний випадок, із рівності $B_0X = XB_0$ маємо, що $x_{ij} = 0$ для $i = 1, 2, 3, j = 4, 5$ і для $i = 4, 5, j = 1, 2, 3$.

Розглянемо тепер рівність $C_0X = XC_0$ в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_3 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_3 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{32} = 0$, $x_{11} = x_{44}$, $x_{12} = 0$, $x_{54} = 0$.

Отже, доведене наступне твердження.

Теорема 4. Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1)$ над полем K складається з усіх матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{11} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K .

Позначимо через e_{ij} , де $1 \leq i, j \leq 5$, матрицю, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на всіх інших місцях — нульовий. Із теореми 4 випливає, що матриці $e_{11} + e_{44}$, e_{21} , e_{22} , e_{33} , e_{45} , e_{55} утворюють базис алгебри $\mathcal{A}(S_1)$. Враховуючи, що $e_{ij}e_{sk} = e_{ik}$, якщо $j = s$, і $e_{ij}e_{sk} = 0$, якщо $j \neq s$, маємо наступну таблицю множення:

	$e_{11} + e_{44}$	e_{21}	e_{22}	e_{33}	e_{45}	e_{55}
$e_{11} + e_{44}$	$e_{11} + e_{44}$	0	0	0	e_{45}	0
e_{21}	e_{21}	0	0	0	0	0
e_{22}	0	e_{21}	e_{22}	0	0	0
e_{33}	0	0	0	e_{33}	0	0
e_{45}	0	0	0	0	0	e_{45}
e_{55}	0	0	0	0	0	e_{55}

Ввівши позначення $\lambda_1 = e_{11} + e_{44}$, $\lambda_2 = e_{21}$, $\lambda_3 = e_{22}$, $\lambda_4 = e_{33}$, $\lambda_5 = e_{45}$, $\lambda_6 = e_{55}$, отримаємо таблицю, вказану в умові теореми 1.

Оскільки матриці $T'(x)$, транспоновані до матриць $T(x)$ зображення T , задають зображення дуальної напівгрупи (бо $[T(x)T(y)]' = T'(y)T'(x)$), то матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ задається матрицею, транспонованою до матриці, вказаній в теоремі 4. І, отже, теорема 2 випливає із теореми 1.

6. Доведення теореми 3. Напівгрупи S_2 і S_3 є фактор-напівгрупами напівгрупи S_1 : вони мають додаткове визначальне співвідношення $bc = b$. Тоді їхніми нерозкладними матричними зображеннями будуть зображення B_1, B_2 і B_4 , а зображення B_3 вже не буде (див. доведення теореми 1). Зображенню B_3 в матрицях B_0 і C_0 (як прямій сумі в переставно еквівалентному варіанті всіх нерозкладних зображень B_i) відповідають треті рядки і треті стовпці. Отже, матриці B'_0 і C'_0 , які отримуються із матриць B_0 і C_0 викреслюванням третіх рядків і стовпців, будуть задавати зображення переставно еквівалентне прямій сумі всіх (з точністю до еквівалентності) нерозкладних зображень напівгруп S_2 і S_3 . Тоді їхні алгебри Ауслендера задаються рівностями $B'_0Y = YB'_0$ і $C'_0Y = YC'_0$. Легко бачити, що матриця Y задовольняє ці рівності тоді і лише тоді, коли вона має вигляд матриці X , вказаній в теоремі 4 з викресленими третім рядком і третім стовпцем. Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 5. Матричні алгебри Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_2)$ і $\mathcal{A}_K(S_3)$ над полем K складаються з усіх матриць вигляду

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_{11} & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & y_{44} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{45} \\ 0 & 0 & 0 & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Із приведених вище міркувань випливає таке твердження.

Теорема 6. *Алгебри Ауслендера $\mathcal{A}(S_2)$ і $\mathcal{A}(S_3)$ ізоморфні фактор-алгебри алгебри Ауслендера $\mathcal{A}(S_1)$ за двостороннім ідеалом I , породженим базисним елементом λ_4 .*

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення над полем некомутативних ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Для таких напівгруп описано алгебри Ауслендера над довільним полем в абстрактному та матричному виглядах.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Конфлікт інтересів

Бондаренко Віталій Михайлович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Бондаренко В. М.: постановка задачі та методологія,
Зубарук О. В.: доведення теорем та редагування.

Авторські права ©



(2026). Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.*, 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2013). On the defining relations for the minimal

- systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov. Series of Physics and Mathematics*, 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 32–39.
 5. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 32(1), 36–49. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1\(32\).36-49](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).36-49) [in Ukrainian].
 6. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin of Taras Shevchenko University of Kyiv. Series of Physics and Mathematics*, 3, 110–114 [in Ukrainian].
 7. Zubaruk, O. V. (2020) On the Auslander algebra of one commutative semigroup of finite representation type. *Applied problems of mechanics and mathematics*, 18, 43–47. <https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.43-47> [in Ukrainian].
 8. Zubaruk, O. V. (2021) On the Auslander algebra of the semigroup generated by two annihilating 2-nilpotent and 2-potent elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 38(1), 48–54. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38\(1\).48-54](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2021.38(1).48-54) [in Ukrainian].
 9. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2022). On the category of representations of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 41(2), 23–28. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).23-28](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).23-28) [in Ukrainian].
 10. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2023). On the Auslander algebra over a field of characteristic two of the commutative noncyclic semigroup of third order without unic and zero elements. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 42(1), 12–17. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).12-17](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).12-17)
 11. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2024). Σ -functions of the categories of matrix representations of nilpotent semigroups. *J. Math. Sci. (N.Y)*, 282(5), 601–615. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07205-x>

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. Describing the Auslander algebras of non-commutative idempotent semigroups of third order.

In modern representation theory, unlike classical linear algebra, an important role (or even a decisive one, as in some Western algebraic schools) is played by the corresponding representation categories. One form of describing such categories over a field is to calculate their Auslander algebras as algebras of endomorphisms of the direct sum of representatives of the equivalence classes of indecomposable representations. Such a description is especially effective in cases of a finite representation type. Earlier (in related articles and articles by the second author) Auslander algebras for commutative semigroups of the third order have been described. This work begins analogous studies for noncommutative semigroups.

Keywords: idempotent semigroup, matrix representation, representation type, canonical form, Auslander algebra.

Отримано: 07.12.2025

Прийнято: 22.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).21-27](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).21-27)**О. В. Вишенська¹, М. О. Бєлова², Л. В. Шевчук³**

¹ Національний транспортний університет,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат фізико-математичних наук
oksana.vyshenska@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3360-8552>

² Державний торговельно-економічний університет,
доцент кафедри цифрової економіки та системного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
marisha67@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0546-8094>

³ Національний транспортний університет,
доцент кафедри вищої математики,
кандидат технічних наук
ludmilashevchuk25@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5748-9527>

ПРО ІНВАРІАНТНУ МНОЖИНУ ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНИМИ ТРАЄКТОРІЯМИ

Чимало еволюційних процесів у різних областях науки (фізика, біологія, економіка тощо) за час свого розвитку зазнають потужної короткочасної дії певних сил. Ця «короткочасність» часом настільки швидкоплинна, що можна вважати її миттєвою. При цьому розвиток процесу між моментами збурень відбувається плавно, а його розвиток під час збурення не має суттєвого значення. Важливим є лише його підсумковий ефект. Математичною моделлю таких еволюційних процесів може слугувати система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням.

У пропонованій статті розглянуто питання існування і асимптотичної стійкості інтегральної множини лінійного розширення системи диференціальних рівнянь, що зазнають короткочасних збурень у певні моменти часу.

Ключові слова: диференціальні рівняння, імпульсне збурення, асимптотична стійкість, інваріантна множина.

1. Вступ. Динамічні системи з розривними траєкторіями — один із напрямів теорії диференціальних рівнянь, що має застосування у дослідженнях коливальних процесів, які зазнають короткочасних імпульсних збурень. Така система визначається в [1]. Запит на вивчення систем таких рівнянь пов'язаний із розвитком новітньої техніки. Імпульсні обчислювальні системи, системи автоматичного регулювання застосовують у різних за фізичним змістом та функціональним призначенням технічних задачах.

Досліджується система диференціальних рівнянь, що зазнає імпульсного збурення у фіксовані моменти часу [6–8]; застосовані розроблені в [1–5, 9–10] методи відшукування наближеного розв'язку та встановлення умов його асимптотичної стійкості. Отримані результати можуть бути застосовані при розв'язуванні задач фізики і техніки, які потребують дослідження коливальних систем.

Метою роботи є з'ясування умов асимптотичної стійкості інтегральної множини розглянутого в [8] лінійного розширення системи диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями.

2. Основний результат. Нехай маємо систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t; \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= A(t; \varphi) \cdot x + f(t; \varphi), \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi) \cdot x + J_i(\varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут матричні функції $(t; \varphi)$, $B_i(\varphi)$ неперервні за аргументами t і φ , 2π — періодичні за φ_α , $\alpha = \overline{1, m}$ рівномірно обмежені для $t \in R$ та $i \in Z$; функції $a(t; \varphi)$, $f(t; \varphi)$ та $J_i(\varphi)$ неперервні для $t \in R$, $\varphi \in T^m$ ($\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$).

Згідно доведеної в [6] теореми, якщо функція $a(t; \varphi)$ задовольняє умові

$$\|a(t; \varphi_1) - a(t; \varphi_2)\| \leq l \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad (2)$$

часові моменти τ_i імпульсного збурення такі, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t; t+T)}{T} = p, \quad (3)$$

($i(t; t+T)$ — кількість точок τ_i на проміжку $[t; t+T]$), і існує функція Гріна $G_\tau^t(t_0; \varphi)$ задачі про обмежені на усій осі розв'язки, для якої виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G_\tau^t(t_0; \varphi)\| d\tau + \sum_{-\infty < \tau_i < +\infty} \|G_{\tau_i}^t(t_0; \varphi)\| \leq K < \infty, \quad (4)$$

для усіх $t \in R$, $\varphi \in T^m$, то система (1) має інтегральну множину

$$T = \{(t; \varphi; x) : x = u(t; \varphi), t \in R, \varphi \in T^m\}, \quad (5)$$

де

$$u(t; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_\tau^t(t; \varphi) \cdot f(\tau; \varphi_\tau(t; \varphi)) d\tau + \sum_{-\infty < \tau_i < +\infty} G_{\tau_i}^t(t; \varphi) \cdot J_i(\varphi_{\tau_i}(t; \varphi)). \quad (6)$$

($\varphi_\tau(t_0; \varphi)$ — загальний розв'язок першого з рівнянь (1)).

Припустимо тепер, що матрицант $\Omega_\tau^t(t_0; \varphi)$ лінійної системи рівнянь з імпульсним збуренням:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t; \varphi_\tau(t_0; \varphi)) \cdot x, \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi_{\tau_i}(t_0; \varphi)) \cdot x, \end{aligned} \quad (7)$$

допускає оцінку

$$\|\Omega_\tau^t(t_0; \varphi)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad (8)$$

коли $t \geq \tau$ для усіх $t_0 \in R$, $\varphi \in T^m$ та при певних додатних K і γ , що не залежать від t_0 і φ .

Тоді, згідно [6], якщо покласти $C(\varphi) = E$, то функція

$$G_{\tau}^t(t_0; \varphi) = \begin{cases} \Omega_{\tau}^t(t_0; \varphi), & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (9)$$

є функцією Гріна системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t; \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= A(t; \varphi) \cdot x, \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi) \cdot x. \end{aligned} \quad (10)$$

І інтегральну множину T системи (1) можна подати так:

$$x = u(t; \varphi) = \int_{-\infty}^t \Omega_{\tau}^t(t; \varphi) \cdot f(\tau; \varphi_{\tau}(t; \varphi)) d\tau + \sum_{\tau_i < t} \Omega_{\tau_i}^t(t; \varphi) \cdot J_i(\varphi_{\tau_i}(t; \varphi)). \quad (11)$$

Ця множина асимптотично стійка.

Справді. Нехай $x = x(t; t_0; \varphi; x_0) = \Omega_{t_0}^t(t; \varphi) \cdot x_0$ — загальний розв'язок (7). Оскільки маємо умову (8), то

$$\|x(t; t_0; \varphi; x_0)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\|, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Тобто $\|x = x(t; t_0; \varphi; x_0)\| \rightarrow 0$, коли $t \rightarrow \infty$.

Проте, завдяки лінійності системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t; \varphi_t(t_0; \varphi)) \cdot x + f(t; \varphi_t(t_0; \varphi)), \quad t \neq \tau_i;$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(t_0; \varphi)) \cdot x + J_i(\varphi_{\tau_i}(t_0; \varphi)),$$

різниця довільного її розв'язку $x = x(t; t_0; \varphi; x_0)$ і її розв'язку $x = u(t; \varphi(t_0; \varphi))$, що лежить на інтегральній множині T , є розв'язком системи (7). Тобто для цієї різниці справедлива оцінка (12), яка забезпечує експоненційну стійкість множини T .

Таким чином, має місце

Теорема 1. *Нехай система рівнянь (1) задовольняє умовам теореми із [6] і, окрім того, матрицант системи (7) допускає оцінку (8). Тоді система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину $T = \{(t; \varphi; x) : x = u(t; \varphi), t \in \mathbb{R}, \varphi \in T^m\}$. Функція $u(t; \varphi)$ визначається згідно виразу (11) і допускає оцінку*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in T^m} \|u(t; \varphi)\| \leq K_0 \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{\varphi \in T^m} \|f(t; \varphi)\| + \sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in T^m} \|J_i(\varphi)\| \right], \quad (13)$$

в якій $K_0 = \frac{K}{\gamma} + K \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$.

Слід також зазначити, що за умови існування границі (3) величина $\sup_{t \in R} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена. Справді, із умови (3) випливає існування таких чисел $l_0 > 0$ і натурального q , що будь-який відрізок часової осі завдовжки l_0 містить щонайбільше q членів послідовності $\{\tau_i\}$. Тому

$$\sup_{t \in R} \sum_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \leq \frac{q}{1 - e^{-\gamma l_0}},$$

тобто, в оцінці (13) за K_0 можна узяти число

$$K_0 = K \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{q}{1 - e^{-\gamma l_0}} \right).$$

Зокрема, якщо моменти імпульсного збурення τ_i такі, що $\tau_{i+1} - \tau_i \geq Q > 0$ для усіх $i \in Z$, то за l_0 може слугувати Q , а за q — одиниця. Тоді константою K_0 може бути число

$$K_0 = K \cdot \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1 - e^{-\gamma Q}} \right).$$

З'ясуємо, які умови забезпечать матрицанту $\Omega_\tau^t(t_0; \varphi)$ оцінку (8). Ці умови можемо отримати із твердження, яке є аналогом нерівності Важевського для диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням (теорема 9.1 із [1]).

Теорема 2. Для довільного розв'язку $x(t; x_0)$, $x(\tau; x_0) = x_0$ лінійної системи з імпульсним збуренням (7) за $t \geq \tau$ виконується нерівність:

$$\prod_{\tau < \tau_i < t} \lambda_i \cdot e^{\int_\tau^t \lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\| \leq \|x(t; x_0)\| \leq \prod_{\tau < \tau_i < t} \Lambda_i \cdot e^{\int_\tau^t \Lambda(\sigma) d\sigma} \cdot \|x_0\|, \quad (14)$$

де $\lambda(t)$, $\Lambda(t)$ — відповідно найменше та найбільше власні числа матриці

$$\hat{A}(t; \varphi_t(t_0; \varphi)) = \frac{1}{2} (A(t; \varphi_t(t_0; \varphi)) + A^T(t; \varphi_t(t_0; \varphi))),$$

A^T — транспонована до $A(t)$ матриця, λ_i^2 , Λ_i^2 — відповідно найменше та найбільше із власних чисел матриці

$$(E + B_i^T(\varphi_{\tau_i}(t_0; \varphi))) \cdot (E + B_i(\varphi_{\tau_i}(t_0; \varphi))), \quad i = 1, 2, \dots$$

Із цієї теореми можемо отримати таке твердження:

Теорема 3. Нехай найбільше із власних чисел матриці

$$\hat{A}(t; \varphi) = \frac{1}{2} (A(t; \varphi) + A^T(t; \varphi)),$$

задовольняє нерівність

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \Lambda(t; \varphi) \leq \alpha,$$

а найбільше із власних чисел матриці $(E + B_i^T(\varphi)) \cdot (E + B_i(\varphi))$ нерівність

$$\sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in T^m} \Lambda_i^2(\varphi) \leq \beta^2.$$

Якщо

$$\alpha + p \cdot \ln \beta < 0, \quad (15)$$

то матрицант системи рівнянь (7) допускає оцінку (8).

Справді, за виконання нерівності (15) будь-який розв'язок рівнянь (7) згідно попередньої теореми допускає оцінку

$$\|x(t; x_0)\| \leq K \cdot e^{-\gamma(t-t_0)} \cdot \|x_0\|, \quad t \geq t_0,$$

де за γ можемо узяти довільне додатне число, що задовольняє нерівність

$$0 < \gamma < |\alpha + p \cdot \ln \beta|.$$

Отже, й матрицант $\Omega_\tau^t(t_0; \tau)$ рівнянь (7) можна оцінити таким же чином, тобто нерівністю (8).

Аналогічно можемо переконатися, що має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай матриці $i(t; \varphi)$ і $v(\varphi)$ такі, що*

$$\sup_{t \in R} \max_{\varphi \in T^m} \max_{\|x\|=1} \langle A(t; \varphi)x; x \rangle \leq \alpha,$$

$$\sup_{i \in Z} \max_{\varphi \in T^m} \max_{\|x\|=1} \langle (E + B_i^T(\varphi))x; (E + B_i(\varphi))x \rangle \leq \beta^2,$$

а число p визначається згідно (3). Якщо $\alpha + p \cdot \ln \beta < 0$, то матрицант системи рівнянь (7) допускає оцінку (8).

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Отримані результати можуть зацікавити спеціалістів з прикладної математики, інженерів, що працюють в області обчислювальної техніки, автоматичного регулювання, спеціалістів з диференціальних рівнянь, а також і викладачів вищих навчальних закладів, адже елементи теорії диференціальних рівнянь з розривними траєкторіями нині входять до програми спеціальних курсів для студентів, які спеціалізуються з диференціальних рівнянь, теоретичної та прикладної механіки.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

О. В. Вишенська: концептуалізація, формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт. М. О. Белова: формальний аналіз, візуалізація, написання — рецензування та редагування. Л. В. Шевчук: курація даних, формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Вишенська О. В., Белова М. О., Шевчук Л. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1987). *Differential Equations with Impulsive Perturbation*. Kyiv: Vyshcha Shkola [in Ukrainian].
2. Samoilenko, A. M., & Stanzhytskyi, O. M. (2009). *Qualitative and Asymptotic Analysis of Differential Equations with Random Perturbations*. Kyiv: Naukova Dumka [in Ukrainian].
3. Parasiuk, I. O., & Perestyuk, M. O. (2013). *Local Analysis of Nonlinear Differential Equations*. Kamianets-Podilskyi: Aksioma [in Ukrainian].
4. Perestyuk, M. O., & Korol, Yu. Yu. (2016). Existence of an Invariant Torus of a Degenerate Linear System with Impulsive Action. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 28(1), 90–97. https://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvuumat_2016_1_12 [in Ukrainian].
5. Perestyuk, M. O., & Feketa, P. V. (2011). On Invariant Tori of Extensions of Dynamical Systems. *International Scientific Conference "Differential Equations and Their Applications": Abstracts*. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv [in Ukrainian].
6. Vyshenska, O. V. (2022). On the Existence of an Invariant Torus for a Class of Discontinuous Dynamical Systems. *VNTU. Series "Technical Sciences" Scientific Journal*, 1(51), 48–54. <https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-1-51-048-054> [in Ukrainian].
7. Bilobrytska, O. I., Vyshenska, O. V., & Meish, Yu. A. (2022). On the Invariant Set of One Dynamical System. *Modern Technologies*, 1(13), 29–36 [in Ukrainian].
8. Bilobrytska, O. I., Vyshenska, O. V., & Meish, Yu. A. (2022). Linear Extensions of Differential Equations with Impulsive Perturbation. *VNTU. Series "Technical Sciences". Scientific Journal*, 2(52), 33–39. <https://doi.org/10.33744/2308-6645-2022-3-53-075-081> [in Ukrainian].
9. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., & Samoilenko, A. M. (2011). Differential Equations with Impulse Effects: *Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities*. *De Gruyter*.
10. Samoilenko, A. M., & Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive Differential Equations*. World Scientific. Singapore. New Jersey. London. Hong Kong.

Vyshenska O. V., Belova M. A., Shevchuk L. V. On the invariant set of a linear extension of differential equations with discontinuous trajectories.

Many evolutionary processes in various fields of science (physics, biology, economics, etc.) experience powerful, short-term influences from certain forces during their develop-

ment. This 'short-term' nature is sometimes so fleeting that it can be considered instantaneous. In this case, the process develops smoothly between the moments of perturbation, and its evolution during the perturbation is not of significant importance. Only the final effect is crucial. A mathematical model for such evolutionary processes can be a system of differential equations with impulse perturbation.

The proposed article considers the existence and asymptotic stability of the integral set of a linear extension of a system of differential equations that undergo short-term perturbations at specific moments in time.

Keywords: differential equations, impulsive perturbation, asymptotic stability, invariant set.

Отримано: 08.09.2025

Прийнято: 25.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).28-37](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).28-37)**O. Yu. Volkov¹, Yu. I. Volkov², N. M. Voinalovych³**

¹ University of California, Berkeley,
Master's student at the Department of Statistics
oleksandr_volkov@berkeley.edu
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-0247-9921>

² Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,
Professor of the Department of Mathematics, Physics, and Teaching Methods,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
yuriivolkov38@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2270-3407>

³ Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University,
Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics, and Teaching Methods,
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor
voinalovichn@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0523-7889>

ON CERTAIN DISCRETE QUANTUM DISTRIBUTIONS

The article investigates the discrete q -distributions – the q -Binomial, q -Negative Binomial, and q -Poisson – which play an important role in quantum calculus, q -combinatorics, and the theory of special functions. Based on the application of q -derivatives and the q -Taylor formula, a unified approach is proposed for constructing recurrence relations for the initial and central moments of these distributions. Explicit formulas for low-order moments are obtained, generalizing classical results and correctly reducing to them when $q = 1$. The proposed method allows for the systematization of known fragmentary results and provides a basis for further research into q -probabilistic models, particularly in connection with q -orthogonal polynomials and stochastic processes.

Keywords: discrete quantum distributions, q -Binomial distribution, q -Negative Binomial distribution, q -Poisson distribution, q -calculus, moments of distributions.

1. Introduction. Quantum calculus (or q -calculus) is one of the important directions in modern mathematics, which emerged as a generalization of classical differential calculus and has found wide application in combinatorics, the theory of special functions, probability theory, and mathematical physics. q -analogs of discrete distributions attract significant attention from researchers because they are naturally connected with q -combinatorics and allow for the modeling of random processes with non-classical symmetries or dependencies that arise in quantum and stochastic systems.

The construction of q -distributions and the study of their properties have been actively developed over the last decades. Discrete probability distributions play a key role in modeling stochastic processes and analyzing random variables. The classical properties of such distributions, particularly the Binomial, Negative Binomial, and Poisson distributions, are systematically detailed in the monograph by Johnson, Kemp, and Kotz [1]. However, contemporary research increasingly turns to q -generalizations of these models, which naturally arise in the context of quantum calculus, q -combinatorics, and the theory of special functions.

The basic concepts of q -calculus — q -numbers, q -factorials, q -binomial coefficients, q -derivatives — are thoroughly discussed in the work by Kac and Cheung [4].

These tools form the basis for constructing q -analogs of classical distributions. The first systematic studies of the q -Binomial and q -Poisson distributions were presented in the work by Kupershmidt [3]. A much wider range of q -distributions is described in the monograph by Charalambides [2], where their role in statistics and combinatorics is emphasized.

The further development of the theory of q -distributions is related to the study of basic hypergeometric series [5] and q -orthogonal polynomials [6], in which moments play a fundamental role. Separate stochastic interpretations and generalizations of q -models are given in the works by Floreanini and Vinet [7]. Despite a significant number of results, a consistent approach to systematically obtaining the moments of the main q -distributions is still lacking in the literature, and the available formulas are often presented fragmentarily.

The goal of this work is to derive recurrence relations for the moments of the q -Binomial, q -Negative Binomial, and q -Poisson distributions based on q -derivatives and the q -Taylor formula, and to obtain explicit expressions for the initial and central moments of low orders.

2. Main result. In this section, the main results of the paper are presented, together with the necessary statements and lemmas used for constructing q -distributions and deriving recurrence relations for their moments. The presented relations ensure the correctness of the corresponding probabilistic models and allow a systematic application of q -derivatives and the q -Taylor formula.

We will use the notation and basic facts of quantum calculus (q -calculus) from the book [3]:

$$[n] = [n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + \dots + q^{n-1}, \quad q > 0, \quad [0] := 0,$$

$$[n]! = [n][n-1] \dots [3][2][1], \quad [0]! := 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix},$$

$$[a+b]_q^n = (a+b)(a+qb)(a+q^2b) \dots (a+q^{n-1}b),$$

$$D_q f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)}, \quad e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!},$$

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!}, \quad D_q(e_q(ax)) = a e_q(ax), \quad D_{1/q}(e_q(x)) = e_q(q^{-1}x),$$

$$\text{the } q\text{-Taylor formula is: } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-c)_q^k}{[k]!} D_q^k f(x) \Big|_{x=c}.$$

We begin with a normalizing identity for the q -binomial distribution, which guarantees that the corresponding probability mass function defines a valid probability distribution.

Lemma 1.

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1-x)_q^{n-k} = 1. \quad (1)$$

Proof. We apply the q -Taylor formula to the function $f(x) = x^n$, taking $c = 1$. We have

$$x^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)_q^k.$$

Replacing x with $1/x$, we obtain

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \left(\frac{1}{x} - q\right) \dots \left(\frac{1}{x} - q^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{-k} (1-x)_q^k,$$

whence

$$1 = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} (1-x)_q^k,$$

which is equivalent to (1).

The following lemma establishes an analogue of the normalization condition for the negative q -binomial distribution and plays a key role in the construction of the corresponding probabilistic model.

Lemma 2.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = 1, \quad x > 0, \quad 0 < q < 1, \quad n > 0. \quad (2)$$

Proof. We apply the q -Taylor formula to the function $f(t) = \frac{1}{(1-t)_q^n}$. We have

$$\frac{1}{(1-t)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-c)_q^k}{[k]_q!} D_q^k \frac{1}{(1-t)_q^n} \Big|_{t=c} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{(t-c)_q^k}{(1-c)_q^{n+k}}.$$

Since $(t-c)_q^k = (t-c)(t-qc) \dots (t-q^{k-1}c)$, for $t=0$ and $c=-x$,

$$(t-c)_q^k = q^{k(k-1)/2} x^k, \quad \text{and thus} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}.$$

The next lemma presents an identity related to the q -exponential function, which underlies the construction of the q -Poisson distribution.

Lemma 3.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]_q!} e_q(-xq^{-k}) = 1 \quad (3)$$

Proof. We apply the q -Taylor formula to the function $f(t) = e_q(-t)$. We have

$$e_q(-t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)_{1/q}^k}{[k]_{1/q}!} D_{1/q}^k e_q(-t) \Big|_{t=x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-x)_{1/q}^k}{[k]_{1/q}!} (-1)^k q^{-k(k-1)/2} e_q(-q^{-k}t) \Big|_{t=x}.$$

Taking $t=0$ in the last sum, and noting that $(-x)_{1/q}^k = (-1)^k q^{k(k-1)/2} x^k$ and $[k]_{1/q}! = q^{-k(k-1)/2} [k]_q!$, we obtain (3).

Lemmas 1–3 establish the main normalization relations for the corresponding q -distributions and guarantee the non-negativity and unit-sum property of the probability mass functions.

The expressions under the summation signs in formulas (1), (2), (3) are non-negative, and therefore they can be used for constructing probability distributions of random variables.

Definition 1. A random variable ξ is said to have a q -Binomial distribution with parameters n and x if

$$\Pr\{\xi = [k]\} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1-x)_q^{n-k}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

We will denote this fact as: $\xi \subset B_q(n, x)$.

Definition 2. A random variable ξ is said to have a q -Negative Binomial distribution with parameters n and x if

$$\Pr\left\{\xi = \frac{[k]}{q^{k-1}}\right\} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}}, \quad x > 0, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

We will denote this fact as: $\xi \subset NB_q(n, x)$.

Definition 3. A random variable ξ is said to have a q -Poisson distribution with parameter x if

$$\Pr\{\xi = [k]\} = q^{-k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]!} e_q(-xq^{-k}), \quad x > 0, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

We will denote this fact as: $\xi \subset P_q(x)$.

The following lemmas are used to derive recurrence relations for the moments of the corresponding q -distributions based on the properties of q -derivatives.

Lemma 4.

$$x(1-x)D_q(x^k(1-x)_q^{n-k}) = x^k(1-x)_q^{n-k}([k] - [n]x). \quad (4)$$

Proof. $D_q(x^k(1-x)_q^{n-k}) =$

$$\frac{x^k(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{n-k-1}x) - q^k x^k(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^{n-k}x)}{x(1-q)} =$$

$$= x^{k-1}(1-qx)\dots(1-q^{n-k-1}x)([k] - [n]x),$$

and from this, (4) follows.

Lemma 5.

$$\frac{x(x+q)}{q} D_{1/q} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \left(\frac{[k]}{q^{k-1}} - [n]x \right) \quad (5)$$

Proof.

$$D_{1/q} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \frac{1}{x(1-1/q)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n+k-1}x)} - \frac{x^k}{(1+x/q)(1+x)\dots(1+q^{n+k-2}x)} \right) = \\
&\frac{q}{x(q-1)} \frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n+k-2}x)} \left(\frac{1}{1+q^{n+k-1}x} - \frac{1}{q^k(1+x/q)} \right) = \\
&\frac{q}{x(q-1)} \frac{x^k}{(1+x)(1+qx)\dots(1+q^{n+k-2}x)} \left(\frac{q^k + xq^{k-1} - 1 - q^{n+k-1}x}{(1+q^{n+k-1}x)(q+x)q^{k-1}} \right) = \\
&\frac{q}{x(q+x)} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \left(\frac{(q^k-1)/(q-1) - xq^{k-1}(1-q^n)/(1-q)}{(1+q^{n+k-1}x)q^{k-1}} \right) = \\
&\frac{q}{x(q+x)} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \left(\frac{[k]q^{1-k} - [n]x}{(1+q^{n+k-1}x)(q+x)} \right),
\end{aligned}$$

and from this, (5) follows.

Lemma 6.

$$xD_q(x^k e_q(-q^{-k}x)) = x^k e_q(-q^{-k}x)([k] - x) \quad (6)$$

Proof. By the rules for finding the q -derivative of a product of two functions, we have:

$$D_q(x^k e_q(-q^{-k}x)) = q^k x^k D_q e_q(-q^{-k}x) + e_q(-q^{-k}x) D_q x^k,$$

and from this, (6) follows.

Let $m \in \mathbb{N}$, and $a \in \mathbb{R}$. We denote by $s_m(a)$ the expectation of the random variable ξ , that is, $s_m(a) = E(\xi - a)^m$. Then $s_m(0) = \alpha_m$ are the initial moments of order m , and $s_m(\alpha_1) = \mu_m$ are the central moments of order m .

Using the lemmas presented above, we proceed to establish recurrence formulas for the raw and central moments of the main q -distributions.

Theorem 1. *If $\xi \subset B_q(n, x)$, then*

$$s_{m+1}(a) = x(1-x)D_q s_m(a) + ([n]x - a)s_m(a), \quad s_0(a) = 1, \quad s_1(a) = [n]x - a. \quad (7)$$

If $\xi \subset NB_q(n, x)$, then

$$s_{m+1}(a) = x(x/q + 1)D_{1/q} s_m(a) + ([n]x - a)s_m(a), \quad s_0(a) = 1, \quad s_1(a) = [n]x - a. \quad (8)$$

If $\xi \subset P_q(x)$, then

$$s_{m+1}(a) = xD_q s_m(a) + (x - a)s_m(a), \quad s_0(a) = 1, \quad s_1(a) = x - a. \quad (9)$$

Proof. Let the function $f(x)$ be defined on the set of values of the random variable ξ . Then for $\xi \subset B_q(n, x)$, by virtue of Lemma 4,

$$x(1-x)D_q E f(\xi) = \sum_{k=0}^n f([k]) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} D_q (x^k (1-x)_q^{n-k}) =$$

$$\sum_{k=0}^n f([k]) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k (1-x)_q^{n-k} ([k] - a + a - [n]x) = E((\xi - a)f(\xi)) + (a - [n]x)E f(\xi).$$

Hence

$$E((\xi - a)f(\xi)) = x(1-x)D_q E f(\xi) + ([n]x - a)E f(\xi).$$

In this relation, we substitute $(x - a)^m$ for $f(x)$ to obtain (7).

If $\xi \in NB_q(n, x)$, then by virtue of Lemma 5,

$$\begin{aligned} \frac{x(x+q)}{q} D_{1/q} E f(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}\right) \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{x(x+q)}{q} D_{1/q} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{q^{k-1}}\right) \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \frac{x^k}{(1+x)_q^{n+k}} \left(\frac{[k]}{q^{k-1}} - a + a - [n]x\right) = \\ &= E((\xi - a)f(\xi)) + (a - [n]x)E f(\xi). \end{aligned}$$

Hence

$$E((\xi - a)f(\xi)) = \frac{x(x+q)}{q} D_{1/q} E f(\xi) + ([n]x - a)E f(\xi).$$

In this relation, we substitute $(x - a)^m$ for $f(x)$ to obtain (8).

If $\xi \in P_q(x)$, then by virtue of Lemma 6,

$$\begin{aligned} x D_q E f(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty} f([k]) q^{-k(k-1)/2} \frac{x}{[k]!} D_q(x^k e_q(-q^{-k}x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f([k]) q^{-k(k-1)/2} \frac{1}{[k]!} D_q(x^k e_q(-q^{-k}x)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f([k]) q^{-k(k-1)/2} \frac{x^k}{[k]!} e_q(-q^{-k}x) ([k] - a + a - x) = E((\xi - a)f(\xi)) + (a - x)E f(\xi). \end{aligned}$$

Hence

$$E((\xi - a)f(\xi)) = x D_q E f(\xi) + (x - a)E f(\xi).$$

In this relation, we substitute $(x - a)^m$ for $f(x)$ to obtain (9).

Corollary 1. *If $\xi \in B_q(n, x)$, then*

$$\begin{aligned} s_2(a) &= a^2 + [n](1 - 2a)x + [n]([n] - 1)x^2, \\ s_3(a) &= -a^3 + (1 - 3a + 3a^2)[n]x + ([n] - 1)[n](1 + [2] - 3a)x^2 + ([n] - 1)[n]([n] - [2])x^3, \\ s_4(a) &= x(1 - x)(1 - 3a + 3a^2)[n] + ([n] - 1)[n]((1 + [2] - 3a)[2]x + \\ &+ ([n] - 1)[n]([n] - [2]))[3]x^2 + ([n]x - a)s_3(a), \end{aligned}$$

In particular,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= [n]x + [n]([n] - 1)x^2, \quad \mu_2 = [n]x(1 - x), \\ \alpha_3 &= [n]x + ([n] - 1)[n](1 + [2])x^2 + ([n] - 1)[n]([n] - [2])x^3, \\ \mu_3 &= [n]x - [n](1 + [2][n] + [2] - [2][n])x^2 + [n]([2][n] - 2[n] + [2])x^3, \\ \alpha_4 &= [n]x + ([n] - 1)[n](1 + [2] + [2]^2)x^2 + ([n] - 1)[n]([n] - [2])(1 + [2] + [3])x^3 + \\ &+ ([n] - 1)[n]([n] - [2])([n] - [3])x^4, \\ \mu_4 &= x(1 - x)([n] - 1)[n]([n] - [2])[3]x^2 + ([n] - 1)[n](1 + [2] - 3[n]x) + \end{aligned}$$

$$+[n](1 - 3[n]x + 3[n]^2x^2).$$

If we set $q = 1$ in these formulas, we obtain the known formulas for the moments of the ordinary Binomial distribution [1, p. 110].

$$\alpha_2 = nx(1 - x + nx), \quad \mu_2 = nx(1 - x),$$

$$\alpha_3 = nx(1 - 3x + 3nx + (n - 1)(n - 2)x^2), \quad \mu_3 = nx(1 - x)(1 - 2x),$$

$$\alpha_4 = nx(1 + 7(n - 1)x + 6(n - 1)(n - 2)x^2 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)x^3),$$

$$\mu_4 = nx(1 - x)(1 - 6x + 6x^2 + 3nx - 3nx^2).$$

Corollary 2. *If $\xi \subset NB_q(n, x)$, then*

$$s_2(a) = a^2 + [n](1 + 2a)x + [n]([n] + 1/q)x^2,$$

$$s_3(a) = -a^3 + (1 - 3a + 3a^2)[n]x + ([n]q + 1)[n](q + [2] + 3aq)q^{-2}x^2 + \\ + ([n]q + 1)[n]([n]q^2 + [2])q^{-3}x^3,$$

$$s_4(a) = x(1 + x/q)(1 - 3a + 3a^2)[n] + ([n]q + 1)[n]((q + [2] + 3aq)[2]q^{-2}x + \\ + ([n]q + 1)[n]([n]q^2 + [2]))[3]q^{-5}x^2 + ([n]x - a)s_3(a),$$

In particular,

$$\alpha_2 = [n]x + [n]([n] + 1/q)x^2, \quad \mu_2 = [n]x(1 + x/q),$$

$$\alpha_3 = [n]x + ([n]q + 1)[n](q + [2])q^{-2}x^2 + ([n]q + 1)[n]([n]q^2 + [2])q^{-3}x^3,$$

$$\mu_3 = [n]x - [n](-q + 2[n]q^2 + [2] - [2][n]q)q^{-2}x^2 + [n](2[n]q^2 - [2] - [2][n]q)q^{-3}x^3,$$

$$\alpha_4 = [n]x + ([n]q + 1)[n](q^2 + [2]q + [2]^2)q^{-3}x^2 + ([n]q + 1)[n]([n]q^2 + \\ [2])(q^2 + [2]q + [3])q^5x^3 + ([n]q + 1)[n]([n]q^2 + [2])([n]q^3 + [3])q^{-6}x^4,$$

$$\mu_4 = [n]x + (-4[n]^2 + [n](1/q + [n]) + [n](1/q + [n])[2]q^{-1} + [n](1/q + [n])[2]^2q^{-2})x^2 \\ + (6[n]^3 - 4[n]^2(1 + [n]q)q^{-1} - 4[n]^2(1 + [n]q)[2]q^{-2} + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])q^{-3} + \\ + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])[2]q^{-4} + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])[3]q^{-5})x^3 + \\ + [n](1 + [n]q)([n]q^2 + [2])([n]q^3 + [3])q^{-6}x^4$$

If we set $q = 1$ in these formulas, we obtain the known formulas for the moments of the ordinary Negative Binomial distribution [1, p. 316].

$$\alpha_2 = nx(1 + x + nx), \quad \mu_2 = nx(1 + x),$$

$$\alpha_3 = nx(1 + 3(n + 1)x + (n + 1)(n + 2)x^2), \quad \mu_3 = nx(1 + x)(1 + 2x),$$

$$\alpha_4 = nx(1 + 7(n + 1)x + 6(n + 1)(n + 2)x^2 + (n + 1)(n + 2)(n + 3)x^3),$$

$$\mu_4 = 3n^2x^2(1 + x)^2 + nx(1 + x)(1 + 6x + 6x^2).$$

Corollary 3. *If $\xi \subset P_q(x)$, then*

$$s_2(a) = x + (x - a)^2, \quad s_3(a) = -a^3 + (1 - 3a - 3a^2)x + (1 + [2] - 3a)x^2 + x^3,$$

$$s_4(a) = a^4 + (-a + 3a^2 - 4a^3 + (1 - 3a + 3a^2))x + (1 - 4a + 6a^2 - [2]a + 1 + [2] - 3a)[2]x^2 + (1 - 4a + [2] + [3])x^3 + x^4,$$

$$s_5(x) = -a^5 + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4)x + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + [2] - 5[2]a + 10[2]a^2 + [2]^2 - 5[2]^2a + [2]^3)x^3 + (1 - 5a + 10a^2 + [2] - 5[2]a + [2]^2 + [3] - 5[3]a + [2][3] + [3]^3)x^3 + (1 + [2] + [3] + [4])x^4 + x^5.$$

In particular,

$$\alpha_2 = x + x^2, \quad \mu_2 = x,$$

$$\alpha_3 = x + (1 + [2])x^2 + x^3, \quad \mu_3 = x(1 - 2x + [2])x,$$

$$s_2(a) = x + (x - a)^2,$$

$$s_3(a) = -a^3 + (1 - 3a - 3a^2)x + (1 + [2] - 3a)x^2 + x^3,$$

$$s_4(a) = a^4 + (-a + 3a^2 - 4a^3 + (1 - 3a + 3a^2))x + (1 - 4a + 6a^2 - [2]a + 1 + [2] - 3a)[2]x^2 + (1 - 4a + [2] + [3])x^3 + x^4,$$

$$s_5(x) = -a^5 + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4)x + (1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + [2] - 5[2]a + 10[2]a^2 + [2]^2 - 5[2]^2a + [2][3])x^3 + (1 - 5a + 10a^2 + [2] - 5[2]a + [2]^2 + [3] - 5[3]a + [2][3])x^3 + (1 + [2] + [3] + [4])x^4 + x^5.$$

$$\alpha_4 = x + (1 + (1 + [2])[2])x^2 + (1 + [2] + [3])x^3 + x^4,$$

$$\mu_4 = x + (-3 + [2] + [2]^2)x^2 + (3 - 3[2] + [3])x^3,$$

$$\alpha_5 = x + (1 + [2](1 + [2] + [2]^2))x^2 + (1 + [2] + [2]^2 + (1 + [2] + [3](1 + [2] + [3])))x^3 + (1 + [2] + [3] + [4])x^4 + x^5,$$

$$\mu_5 = x + (-4 + [2] + [2]^2 + [2]^3)x^2 + (6 - 4[2] - 4[2]^2 + [3] + [2][3] + [3]^2)x^3 + (-4 + 6[2] - 4[3] + [4])x^4.$$

If we set $q = 1$ in these formulas, we obtain the known formulas for the moments of the ordinary Poisson distribution [1, p. 163]:

$$\alpha_2 = x + x^2, \quad \mu_2 = x,$$

$$\alpha_3 = x + 3x^2 + x^3, \quad \mu_3 = x,$$

$$\alpha_4 = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4, \quad \mu_4 = x + 3x^2,$$

$$\alpha_5 = x + 15x^2 + 25x^3 + 10x^4 + x^5, \quad \mu_5 = x + 10x^2.$$

3. Conclusions and prospects for further research. The article proposes a unified approach to constructing the moments of the main discrete q -distributions — the q -Binomial, q -Negative Binomial, and q -Poisson — based on the framework of q -derivatives and the q -Taylor formula. The derived recurrence relations for the initial and central moments provide a generalization of the classical results and are

logically recovered in the limit as $q = 1$. The presented explicit formulas for low-order moments demonstrate the effectiveness of the proposed method and allow for the systematization of results found fragmentarily in the literature.

The obtained results are useful for the further development of the theory of q -distributions, particularly in the context of stochastic models related to quantum calculus, q -combinatorics, and the theory of special functions. Prospects for future research include deriving asymptotic estimates of moments, analyzing their behavior under different regimes of the parameter q , applying the resulting formulas to problems of stochastic process modeling and the theory of random permutations, as well as employing q -distributions for constructing models of noisy data and new regularization methods in machine learning that ensure robustness to sample noise and anomalous observations.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Contributions of authors

Volkov O. Yu.: Conceptualization, Formal analysis, Methodology, Writing — original draft. Volkov Yu. I.: Data curation, Supervision, Writing — review & editing. Voinalovych N. M.: Writing — review & editing.

Copyright ©



(2026). Volkov O. Yu., Volkov Yu. I., Voinalovych N M. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Johnson, N. L., Kemp, A. W., & Kotz, S. (2005). *Univariate discrete distributions*. Wiley.

2. Charalambides, Ch. A. (2016). *Discrete q -distributions*. Wiley.
3. Kupershmidt, B. A. (2000). q -Probability: I. Basic discrete distributions. *Journal of Nonlinear Physics*, 5(1), 73–93. <https://doi.org/10.2991/jnmp.2000.7.1.6>
4. Кас, V., & Чеунг, P. (2002). *Quantum calculus*. Springer.
5. Gasper, G., & Rahman, M. (2009). *Basic hypergeometric series*. Cambridge University Press.
6. Koekoek, R., Lesky, P., & Swarttouw, R. (2010). *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues*. Springer.
7. Floreanini, R., LeTourneux, J., & Vinet, L. (1995). More on the q -oscillator algebra and q -orthogonal polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(10), L287. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/10/L01>

Волков О. Ю., Волков Ю. І., Войналович Н. М. Про деякі дискретні квантові розподіли.

У статті досліджуються дискретні q -розподіли — q -біноміальний, q -від’ємний біноміальний та q -пуассонівський — які відіграють важливу роль у квантовому численні, q -комбінаториці та теорії спеціальних функцій. На основі застосування q -похідних та q -формули Тейлора запропоновано єдиний підхід до побудови рекурентних співвідношень для початкових і центральних моментів зазначених розподілів. Отримано явні формули моментів низьких порядків, що узагальнюють класичні результати та коректно переходять до них при $q = 1$. Запропонований метод дозволяє систематизувати відомі фрагментарні результати та створює основу для подальших досліджень q -ймовірнісних моделей, зокрема у зв’язку з q -ортогональними многочленами та стохастичними процесами.

Ключові слова: дискретні квантові розподіли, q -біноміальний розподіл, від’ємний q -біноміальний розподіл; q -пуассонівський розподіл, q -числення, моменти розподілів.

Received: 05.12.2025

Accepted: 22.12.2025

Published: 29.01.2026

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).38-46](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).38-46)**А. Ю. Глухов¹, С. Ю. Бабич², Ю. Ю. Млавець³**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-0579-9046>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОШАРОВОГО СТИСЛИВОГО НАПІВПРОСТОРУ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

В рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка та метод розв'язку просторової усталеної задачі про збудження двошарового попередньо напруженого напівпростору поверхневим навантаженням, що рухається з сталою швидкістю. Розглянута тривимірна модель шаруватого середовища «пластина і попередньо напружений напівпростір». Рівняння руху пластини записуються з врахуванням зсуву та інерції обертання. Контакт між пластинною і напівпростором є нежорсткий. Фундаментальний розв'язок задачі отримано з допомогою метода інтегральних перетворень Фур'є.

Ключові слова: початкові напруження; навантаження, що рухається з сталою швидкістю; двошаровий півпростір; стисливий матеріал.

1. Вступ. Проблема взаємодії пластини з пружним півпростором у тривимірній постановці активно досліджується з початку ХХ століття. Фундаментальні результати у теорії хвиль у пружних тілах належать Дж. Ахенбаху [2], К. Граффу [6] та Дж. Мікловіцу [10], які заклали основу для опису поверхневих та об'ємних хвиль у півпросторі. Подальший розвиток контактних задач і застосування теорії пластин із врахуванням зсуву започатковано у роботах Е. Рейснера [12] та Р. Міндліна [11], а систематизований огляд таких моделей наведено у монографії Селвадурая [13].

Суттєвий прогрес у дослідженні тривимірної взаємодії пластини з півпростором досягнуто в роботах Каузела [8], Апсела і Луко [9], де були сформовані ефективні методи інтегральних перетворень Фур'є для багат шарових основ. За останні роки з'явилася низка робіт, присвячених впливу рухомих і високошвидкісних навантажень, умов контакту та початкових напружень у шаруватих середовищах [4, 5, 7, 14, 15 та інші]. Ці дослідження продемонстрували необхідність точних 3D-моделей для коректного опису хвильових процесів, зокрема в транс- та надзвуківих режимах.

У даній роботі розглянута просторова усталена задача про збурення двошарового стисливого напівпростору з початковими напруженнями рухомим поверхневим навантаженням.

Дослідження були проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями [1]. У лінеаризованій теорії пружності для тіл з початковими напруженнями та деформаціями передбачається, що збуреному стану тіла передують деякий початковий стан з відмінними від нуля напруженнями та деформаціями. При цьому розглядаються лише малі додаткові напруження (збурення) порівняно з напруженнями у початковому стані. Така теорія на відміну від лінійної класичної теорії пружності найповніше відбиває властивості реальних деформованих тіл.

Припускаємо, що рух верхнього шару може бути описаний системою рівнянь з теорії пластин, що враховує вплив інерції обертання та поперечного зсуву.

Підстилаючий півпростір має початкові напруження і складається з стисливого матеріалу з довільним пружним потенціалом. До вільної межі шару прикладено навантаження, що рухається з сталою швидкістю. Аналогічна плоска задача для двошарового стисливого півпростору розглянута в роботі [3].

2. Постановка задачі. Розглянемо шар товщиною $2h$, що лежить на півпросторі. Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан півпростору є однорідним і визначається наступними компонентами вектора переміщень та тензора узагальнених напружень

$$u_j^0 = \delta_{ij} (\lambda_i + 1) x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де λ_i — подовження ($\lambda_i = \text{const}$) вздовж осей лагранжової системи координат x_i , що збігається у природному стані з декартовою системою координат.

Розглянемо початковий стан у вигляді

$$\lambda_1^{\{s\}} = \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_0^{\{s\}11} = S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33}. \quad (2)$$

Поряд із лагранжовими координатами введемо декартові координати ξ_i початкового деформованого стану, пов'язані з координатами x_i співвідношеннями $\xi_i = \lambda_i x_i$.

Координатна вісь ξ_3 спрямована перпендикулярно до поверхонь елементів двошарового півпростору углиб півпростору.

Шаруватий півпростір віднесено до декартової системи координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), що відповідає початковому деформованому стану. Координатна вісь ξ_3 спрямована перпендикулярно до поверхні шаруватого півпростору вглиб півпростору.

До вільної межі шару прикладено навантаження, що рухається з сталою швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 . Відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений деформований стан. Якщо припустити, що навантаження рухається по прямій, що розташована під кутом ϕ до осі ξ_1 , то координати рухомої системи координат визначаються співвідношеннями

$$y_1 = \xi_1 - v \cos \phi \cdot t; \quad y_2 = \xi_2 - v \sin \phi \cdot t; \quad y_3 = \xi_3. \quad (3)$$

Також припустимо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менше початкових напружень. Зазначене припущення дозволяє

застосовувати лінеаризовану теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, спричиненого дією навантаження.

З урахуванням (1) і (2) в координатах рухомої системи координат (3) рівняння руху і компоненти напружено-деформованого стану стисливого півпростору можна записати в загальному вигляді наступним чином:

рівняння руху

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \Psi = 0; \\ & \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \zeta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left[\tilde{B} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) + \tilde{C} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{D} \frac{\partial^4}{\partial y_1^4} \right\} \chi^{\{s\}} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

переміщення

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1 \partial y_3}; & u_2 &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_2 \partial y_3}; \\ u_3 &= \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi; \end{aligned} \quad (5)$$

напруження

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii} &= \tilde{a}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\tilde{b}_{ii}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ii}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ii}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_3}; & i &= \overline{1, 3}; \\ \tilde{Q}_{ij} &= \left(\tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3}; & i, j &= 1, 2; \\ \tilde{Q}_{ij} &= \tilde{a}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_k \partial y_3} + \left(\tilde{b}_{ij}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{ij}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_i}; \\ & i, j, k = \overline{1, 3}; & k &\neq j; \quad k \neq i; \end{aligned} \quad (6)$$

де коефіцієнти \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} , ζ_j , $\tilde{\beta}_j$, $\tilde{a}_{ij}^{(m)}$, $\tilde{b}_{ij}^{(m)}$ у виразах (4)–(6) є функціями параметрів v , ϕ , що характеризують навантаження, і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища $\tilde{\omega}^{\{s\}}$. У разі стисливого матеріалу маємо

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; & \xi_{2,3}^2 &= c \pm (c^2 - \tilde{\omega}_{3113} \tilde{\omega}_{3333} \tilde{\omega}_{1331}^{-1} \tilde{\omega}_{1111}^{-1})^{\frac{1}{2}}; \\ 2c \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331} &= \tilde{\omega}_{1331} \tilde{\omega}_{3113} + \tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{3333} - (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^2; \\ \tilde{A} &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{1221}^{-1}; & \tilde{B} &= \tilde{\rho}^{-1} \tilde{D}^{-1} (\tilde{\omega}_{1111} + \tilde{\omega}_{1331}); \\ \tilde{C} &= \tilde{\rho}^{-1} \tilde{D}^{-1} (\tilde{\omega}_{3333} + \tilde{\omega}_{3113}); & \tilde{D} &= \tilde{\rho}^2 \tilde{\omega}_{1111}^{-1} \tilde{\omega}_{1331}^{-1}; \\ \beta_1 &= \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{1111}; & \beta_2 &= \tilde{\rho}^{-1} \beta_3 \tilde{\omega}_{3113}; & \beta_3 &= \tilde{\rho} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \\ a_{ii}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{ii11} - \tilde{\omega}_{ii22}; & b_{ii}^{(k)} &= \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\omega}_{iikk}; & k &= 1, 2; & b_{ii}^{(3)} &= \tilde{\rho}^{-1} b_{ii}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113}; \\ b_{ii}^{(4)} &= \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ii33} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; & i &= 1, 2, 3; \\ a_{ij}^{(1)} &= -\tilde{\omega}_{ij21}; & a_{ij}^{(2)} &= \tilde{\omega}_{ij12}; & b_{ij}^{(1)} &= \tilde{\omega}_{ij12} + \tilde{\omega}_{ij21}; & i, j &= 1, 2; \end{aligned}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \tilde{\omega}_{ij13}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij31} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \quad i, j = 1, 3;$$

$$a_{ij}^{(1)} = -\tilde{\omega}_{ij23}; \quad b_{ij}^{(1)} = b_{ij}^{(2)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{1111}; \quad b_{ij}^{(3)} = \tilde{\rho}^{-1} b_{ij}^{(4)} \tilde{\omega}_{3113} - \tilde{\omega}_{ij23};$$

$$b_{ij}^{(4)} = \tilde{\rho} \tilde{\omega}_{ij23} (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1}; \quad i, j = 2, 3; \quad \tilde{\rho} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \rho;$$

де ρ — густина матеріалу півпростору у природному стані.

Припустимо, рух шару може бути описано системою рівнянь з теорії пластин, що враховує вплив інерції обертання і поперечного зсуву. Для пластини, що знаходиться під впливом поперечних і тангенціальних поверхневих сил, відповідні рівняння в системі координат (3) можуть бути записані так

$$\begin{aligned} & \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_1 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right] + \tau_1 - \\ & \quad - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_1} + \Psi_1 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\ & \frac{2G_1 h^2}{3(1-\nu)} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Psi_2 + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \right] + \tau_2 - \\ & \quad - \kappa G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y_2} + \Psi_2 \right) = \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \\ & \kappa G_1 h (\nabla^2 w + \Phi) + q = 2h\rho_1 v^2 \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}; \quad \Phi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y_2};$$

ρ_1 — густина матеріалу пластини; G_1 — модуль зсуву; ν — коефіцієнт Пуассона; κ — коефіцієнт зсуву Тимошенко; Ψ_1 , і Ψ_2 — повороти щодо осей y_1 і y_2 ; w — переміщення серединної поверхні пластини; τ_1 , τ_2 , q — дотичні та нормальні навантаження, що діють на поверхні розділу пластини та півпростору; P_3 — нормальне навантаження на вільній поверхні пластини.

Розглянемо нежорсткий контакт між пластиною і півпростором при $y_3 = -h$:

$$\tilde{Q}_{31} = 0; \quad \tilde{Q}_{32} = 0; \quad \tilde{Q}_{33} = q; \quad \tau_1 = 0; \quad \tau_2 = 0; \quad u_3 = w. \quad (8)$$

При викладених вище умовах маємо тривимірну задачу, що полягає в спільному розв'язанні рівнянь руху (4) і (7) при граничних умовах (8) і умови згасання на нескінченності.

Скористаємося рівняннями (7) і (8) і співвідношеннями пружності (5) і (6) і

виразимо функції q , τ_1 , τ_2 і w через функції Ψ , χ , Ψ_1 і Ψ_2

$$\begin{aligned}
& \left(\tilde{a}_{31}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{31}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{31}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} = 0; \\
& \left(\tilde{a}_{32}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{a}_{32}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \Psi - \tilde{b}_{32}^{(1)} \frac{\partial^3 \chi}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} = 0; \\
& \theta_1 \nabla^2 \Psi_1 + \theta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \theta_3 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_1} - \theta_3 \Psi_1 = \theta_5 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y_1^2}; \\
& \theta_1 \nabla^2 \Psi_2 + \theta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} - \theta_3 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_2} - \theta_3 \Psi_2 = \theta_5 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y_1^2}; \quad (9) \\
& \theta_4 \nabla^2 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \chi + \theta_4 \Phi + \tilde{a}_{33}^{(1)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_1 \partial y_2} + \\
& + \left(\tilde{b}_{33}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{b}_{33}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{b}_{33}^{(3)} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial y_3} = \\
& = \theta_6 \left(\tilde{\beta}_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \tilde{\beta}_2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \tilde{\beta}_3 \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_1^2} + P_3 \delta(y_1) \delta(y_2).
\end{aligned}$$

Тут введено такі позначення

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{2}{3} G_1 h^2; \quad \theta_2 = \theta_1 \frac{1 + \nu}{1 - \nu}; \quad \theta_3 = \kappa G_1; \quad \theta_4 = \theta_3 h; \\
\theta_5 &= \frac{2\rho_1 h^2}{3} v^2 \cos^2 \varphi; \quad \theta_6 = 2h\rho_1 v^2 \cos^2 \varphi.
\end{aligned}$$

Таким чином, задача про рух двошарового стисливого півпростору при дії рухомого навантаження зводиться до знаходження функцій Ψ , χ , Ψ_1 і Ψ_2 з граничних умов (9).

3. Фундаментальний розв'язок задачі в області зображень Фур'є.

Для вирішення задачі скористаємося подвійним перетворенням Фур'є за координатами y_1 та y_2 . У просторі зображень Фур'є рівняння руху (4) можна подати у вигляді

$$\left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_1^2 \right) \Psi^F = 0; \quad \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_2^2 \right) \left(\frac{d^2}{dy_3^2} - \mu_3^2 \right) \chi^F = 0; \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 &= \zeta_1^{-2} \left(k_1^2 \tilde{A} + k_2^2 \right); \quad \mu_{2,3}^2 = B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - B_2}; \\
2B_1 &= \zeta_2^{-2} \zeta_3^{-2} \left[(\zeta_2^2 + \zeta_3^2) (k_1^2 + k_2^2) - k_1^2 \tilde{C} \right]; \\
B_2 &= \zeta_2^{-2} \zeta_3^{-2} \left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + k_1^2 k_2^2 \tilde{B} + k_1^4 (\tilde{B} + \tilde{D}) \right];
\end{aligned}$$

k_1, k_2 — параметри подвійного перетворення Фур'є.

Перетворена система граничних умов (9) має вигляд

$$\begin{aligned}
& - \left(k_1^2 \tilde{a}_{31}^{(1)} + k_2^2 \tilde{a}_{31}^{(2)} \right) \Psi^F + k_1 k_2 \tilde{b}_{31}^{(1)} \frac{d\chi^F}{dy_3} = 0; \\
& - \left(k_1^2 \tilde{a}_{32}^{(1)} + k_2^2 \tilde{a}_{32}^{(2)} \right) \Psi^F + k_1 k_2 \tilde{b}_{32}^{(1)} \frac{d\chi^F}{dy_3} = 0;
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& ik_1\theta_3 \left(k_1^2\tilde{\beta}_1 + k_2^2\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi^F - \\
& \quad - [k_1^2(\theta_1 + \theta_2 - \theta_5) + k_2^2\theta_1 + \theta_3] \Psi_1^F - k_1k_2\theta_2\Psi_2^F = 0; \\
& ik_2\theta_3 \left(k_1^2\tilde{\beta}_1 + k_2^2\tilde{\beta}_2 - \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} \right) \chi^F - k_1k_2\theta_2\Psi_1^F - \\
& \quad - [k_1^2(\theta_1 - \theta_5) + k_2^2(\theta_1 + \theta_2) + \theta_3] \Psi_2^F = 0; \\
& -k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)}\Psi^F + \left\{ \left(k_1^2\tilde{\beta}_1 + k_2^2\tilde{\beta}_2 \right) [k_1^2(\theta_4 - \theta_6) + k_2^2\theta_4] - \left(k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)} + k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)} \right) \frac{d}{dy_3} - \right. \\
& \quad \left. - [k_1^2(\theta_4 - \theta_6) + k_2^2\theta_4] \tilde{\beta}_3 \frac{d^2}{dy_3^2} + \tilde{b}_{33}^{(3)} \frac{d^3}{dy_3^3} \right\} \chi^F + ik_1\theta_4\Psi_1^F + ik_2\theta_4\Psi_2^F = P_3^F.
\end{aligned}$$

Розв'язки перетворених рівнянь (10) з урахуванням згасання на нескінченності шукатимемо у вигляді

$$\Psi^F = C_1 e^{\gamma_1(y_3+h)}; \quad \chi^F = C_2 e^{\gamma_2(y_3+h)} + [1 - \delta_{\mu_2\mu_3} + \delta_{\mu_2\mu_3}(y_3+h)] C_3 e^{\gamma_3(y_3+h)}. \quad (12)$$

Тут

$$\delta_{\mu_2\mu_3} = \begin{cases} 1, & \mu_2^2 = \mu_3^2; \\ 0, & \mu_2^2 \neq \mu_3^2; \end{cases}$$

$\gamma_j = \sigma_j \mu_j$; $\sigma_j \equiv \sigma = |\mu_j| / \mu_j$, якщо $\mu_j^2 > 0$, $\sigma_j = i$, якщо $\mu_j^2 < 0$ і $\gamma_j = \sigma \operatorname{Re} \mu_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \mu_j$, якщо μ_j^2 приймає комплексні значення.

Введемо заміну

$$\tilde{C}_j = C_j, \quad j = \overline{1, 3}; \quad \tilde{C}_{j+3} = i\Psi_j^F, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Підставляючи (12) і (13) у перетворену систему рівнянь (11), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь щодо невідомих \tilde{C}_j , $j = \overline{1, 5}$,

$$\begin{aligned}
& \zeta_{11}\tilde{C}_1 + \zeta_{21}\gamma_2\tilde{C}_2 + \zeta_{21}[\delta_{\mu_2\mu_3} + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3})\gamma_3]\tilde{C}_3 = 0; \\
& \zeta_{12}\tilde{C}_1 + \zeta_{22}\gamma_2\tilde{C}_2 + \zeta_{22}[\delta_{\mu_2\mu_3} + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3})\gamma_3]\tilde{C}_3 = 0; \\
& \zeta_{31}\zeta_{51}\tilde{C}_2 + \zeta_{51}[\delta_{\mu_2\mu_3}\zeta_3 + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3})\zeta_{32}]\tilde{C}_3 + \zeta_{61}\tilde{C}_4 + \zeta_4\tilde{C}_5 = 0; \\
& \zeta_{31}\zeta_{52}\tilde{C}_2 + \zeta_{52}[\delta_{\mu_2\mu_3}\zeta_3 + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3})\zeta_{32}]\tilde{C}_3 + \zeta_4\tilde{C}_4 + \zeta_{62}\tilde{C}_5 = 0; \\
& \zeta_9\tilde{C}_1 + \zeta_{71}\tilde{C}_2 + \{-\delta_{\mu_2\mu_3}\zeta_{10} + (1 - \delta_{\mu_2\mu_3})\zeta_{72}\}\tilde{C}_3 + \zeta_{81}\tilde{C}_4 + \zeta_{82}\tilde{C}_5 = P_3^F;
\end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= k_1^2(\theta_4 - \theta_6) + k_2^2\theta_4; \quad \zeta_2 = k_1^2(\theta_1 - \theta_5) + k_2^2\theta_1 + \theta_3; \quad \zeta_3 = -2\gamma_3\tilde{\beta}_3; \\
\zeta_4 &= k_1k_2\theta_2; \quad \zeta_5 = -k_1k_2\tilde{a}_{33}^{(1)}; \quad \zeta_6 = \zeta_{42} - 2\gamma_3^2\tilde{b}_{33}^{(3)} - \zeta_1\zeta_3; \\
\zeta_{1j} &= -\left(k_1^2\tilde{a}_{3j}^{(1)} + k_2^2\tilde{a}_{3j}^{(2)} \right); \quad \zeta_{2j} = k_1k_2\tilde{b}_{3j}^{(1)}; \quad \zeta_{3j} = k_1^2\tilde{\beta}_1 + k_2^2\tilde{\beta}_2 - \gamma_{j+1}^2\tilde{\beta}_3; \\
\zeta_{4j} &= k_1^2\tilde{b}_{33}^{(1)} + k_2^2\tilde{b}_{33}^{(2)} - \gamma_{j+1}^2\tilde{b}_{33}^{(3)}; \quad \zeta_{5j} = k_j\theta_3; \\
\zeta_{6j} &= \zeta_2 + k_j^2\theta_2; \quad \zeta_{7j} = \zeta_{3j}\zeta_1 - \zeta_{4j}\gamma_{1+j}; \quad \zeta_{8j} = k_j\theta_4; \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язання задачі про рух багатопарового пружного напівпростору з початковими напруженнями під впливом рухомого навантаження в області зображень Фур'є зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (14) щодо невідомих \tilde{C}_j , $j = \overline{1, 5}$.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянута постановка і метод розв'язання просторової динамічної задачі про збурення двошарового попередньо напруженого півпростору поверхневим навантаженням, що рухається з сталою швидкістю. У просторі зображень Фур'є у загальному вигляді отримано розв'язок задачі. Для отримання оригіналів трансформант відповідних компонентів напружено деформованого стану слід скористатися зворотним перетворенням Фур'є. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні напружено деформованого стану елементів шаруватих конструкцій.

Конфлікт інтересів

Бабич Степан Юрійович та Млавець Юрій Юрійович, члени редакційної колегії, є авторами цієї статті та не брали участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

А. Ю. Глухов: концептуалізація, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект. С. Ю. Бабич: валідація, формальний аналіз, методологія. Ю. Ю. Млавець: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Глухов А. Ю., Бабич С. Ю., Млавець Ю. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. Kiev: "A.S.K" [in Russian].
2. Achenbach, J. (1973). *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North-Holland.
3. Babich, S. Y., Glukhov, Y. P., & Guz, A. N. (2008). Dynamics of a prestressed compressible layered half-space under moving load. *International Applied Mechanics*, 44(3), 268–285. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0045-y>
4. Bao, T., & Liu, Z. L. (2021). Dynamic behaviour of thin surface layers bonded to a half-space under moving loads. *International Journal of Mechanical Sciences*, 190, 106023. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.106023>
5. Dutta, S. C., & Roy, R. (2015). High-speed moving loads on layered soils: analytical and numerical modelling. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 75, 200–212. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.04.001>
6. Graff, K. F. (1975). *Wave Motion in Elastic Solids*. New York: Dover Publications.
7. Hosseinzadeh, S., & Gatmiri, B. (2019). A 3D dynamic analysis of geomechanical layered systems under transient loads. *Computers and Geotechnics*, 108, 148–160. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.12.022>
8. Kausel, E. (1979). *Forced vibrations of circular foundations on layered media* (MIT Research Report R79-33). Massachusetts Institute of Technology. Retrieved from <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/56671>
9. Luco, J. E., & Apsel, R. J. (1983). On the Green's functions for a layered half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(4), 909–929. <https://doi.org/10.1785/BSSA0730040909>
10. Miklowitz, J. (1978). *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*. Amsterdam: North-Holland.
11. Mindlin, R. D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1), 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>
12. Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12(2), A69–A77. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>
13. Selvadurai, A. P. S. (1979). *Elastic Analysis of Soil–Foundation Interaction*. Amsterdam: Elsevier.
14. Wang, J., & Zhang, C. (2012). Dynamic response of layered elastic half-space under moving loads. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 35, 18–27. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2011.11.006>
15. Wu, B. (2017). Three-dimensional modelling of elastic layered media subjected to moving loads. *International Journal of Solids and Structures*, 120, 98–114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.04.036>

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Mlavets Yu. Yu. Dynamic task for two-layered compressible half-space with initial stresses.

Within the bounds of linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses a non-planar problem and the method for solution of the perturbation of moving with a constant speed of the surface load of two-layered pre-stressed half-space is considered. The three-dimensional model of the layered medium “a plate and pre-stressed half-space” is considered. Equations of plate motion are written down taking into consideration of shift and rotary inertia. Half-space material is assumed compressible, isotropic in the natural state. The homogeneous initial state is considered in a type of $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; $S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}$. The border surfaces of elements of the layered medium are flat and parallel. The contact between

a plate and a half-space is non-rigid. The surface load is point and moves rectilinearly. The fundamental solution of the problem is obtained using the Fourier integral method. The solution is presented in a general view for the equal and unequal roots of characteristic equation and different speeds of superficial loading movement. The form of elastic potential The shape of the elastic potential takes the general form and should be specified only under the numerical calculations. Obtained results can be used to investigate the mode of deformation of the elements of layered structures which are exposed to the moving loads.

Keywords: initial tensions; moving with permanent speed load; two-layered half-space; compressible material.

Отримано: 02.11.2025

Прийнято: 13.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).47-51](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).47-51)**Я. І. Єлейко¹, А. Ю. Дребот²**¹ ЛНУ імені Івана Франка,Професор кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

yaroslav.yeleyko@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2200-8447>² ЛНУ імені Івана Франка,

Аспірант кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь

Andrii.Drebot.AMTS@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2764-3334>

ЗНАХОДЖЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ЕРГОДИЧНИХ МАРКОВСЬКИХ ЛАНЦЮГІВ

Дана стаття зосереджена на дослідженні лінійної залежності ергодичних ланцюгів Маркова. Розглядається часовий ряд, який може бути розглянутий як ланцюг Маркова. Досліджується методологія зображення цього ланцюга як суміш, лінійну комбінацію, довільних ергодичних Марковських ланцюгів. Також, розглянуто приклад знаходження коефіцієнтів лінійної комбінації на реальних даних.

Ключові слова: ланцюги маркова, ергодична теорема, суміш ланцюгів маркова, граничний розподіл.

1. Вступ. Марковські ланцюги це інструмент для опису, аналізу та передбачення часових рядів. Дуже часто дані генеруються складними процесами, які бувають прихованими. Тому класичних методів статистичного аналізу може бути не достатньо для опису таких складних часових рядів.

Це стосується не тільки часових рядів, але і інших типів даних. У машинному навчанні вже існують підходи, що базуються на сумішах та ансамблях алгоритмів.

Використання сумішей моделей для аналізу числових рядів не є новою ідеєю і вже є різноманітні напрацювання у цьому напрямку. Також, вже існують дослідження сумішей прихованих Марковських моделей. Ці дослідження фокусуються на різноманітних аспектах суміші Марковських процесів. Деякі напрацювання сфокусовані на застосуванні варіаційних Байєсівських методів для розплітання суміші [1], [2]. Інші, досліджують асимптотичну поведінку сумішей [3]. Також, існують практичні застосування ідеї сумішей Марковських процесів [4], [5].

На відміну від існуючих досліджень, дане стаття використовує підхід до дослідження сумішей Марковських процесів, який базується на застосуванні Ергодичної теореми.

2. Основний результат. Отже, розглянемо Марковський стохастичний процес Y . Реалізації станів цього процесу є відомими. Також, припустимо, що стохастичний процес є ергодичним. Ми можемо зобразити процес як S_1, \dots, S_T , де $S_t, t = 1, \dots, T, T \rightarrow \infty$ це реалізація стану в момент часу t .

У даній статті зроблено припущення, що процес Y можна зобразити як суміш деяких незалежних Марковських ергодичних процесів Y_1, \dots, Y_K . Для кожного процесу Y_k є доступними стохастичні матриці переходу P_k . Процес Y_k

не обов'язково повністю точно описує послідовність S_1, \dots, S_T — ймовірності переходу у стохастичній матриці P_K можуть бути довільними. Маючи ці умови, можна сформулювати теорему яка описує метод зображення Марковського ланцюга як лінійну комбінацію скінченної множини довільних незалежних Марковських ланцюгів.

Теорема 1. *Розглянемо множину деяких Марковських ергодичних процесів Y_1, \dots, Y_K . Також, розглянемо Марковський ергодичний процес Y з кількістю станів N , реалізація станів якого є відомими. Тоді, можна зобразити процес Y як лінійну комбінацію незалежних процесів Y_1, \dots, Y_K :*

$$\sum_{k=1}^K w_k Y_k = Y,$$

де $\sum_{k=1}^K w_k = 1$. Коефіцієнти лінійної комбінації w_k є розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} & \Pi & \\ [1 & \dots & 1] \end{bmatrix} \cdot W = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix},$$

де Π це матриця розмірністю $N \times K$. Стовпець k матриці Π є граничним розподілом процесу Y_k ; W — вектор невідомих коефіцієнтів розмірністю $K \times 1$; $\hat{\Pi}$ — вектор розмірності $N \times 1$, що є граничним розподілом процесу Y .

Доведення. Використаємо ергодичну теорему для Марковських ланцюгів. Згідно з результатами описаними у [6] та [7], отримаємо даний результат:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-1} P^h(i, r) \xrightarrow{\text{м.н.}} \pi_r, \quad \forall i, r,$$

де P — стохастична матриця марковського процесу, π — граничний розподіл. Для оцінювання елементів матриці P скористаємося методом максимальної правдоподібності. Тобто, розв'язавши задачу оптимізації:

$$l(p) = \log(L(p)) = \log(\Pr\{S_1, \dots, S_T\}) = \log \Pr\{S_1 = s_1\} + \sum_{i,j} n_{ij} \log(p_{ij}),$$

$$l(p) \xrightarrow{p_{ij}} \max,$$

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Тобто, застосувавши результат ергодичної теореми для кожного з K процесів, та для процесу Y після знаходження матриці переходу методом максимальної правдоподібності. Це і дасть нам систему лінійних рівнянь:

$$\begin{bmatrix} & \Pi & \\ [1 & \dots & 1] \end{bmatrix} \cdot W = \begin{bmatrix} \hat{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теорему доведено.

Виходячи з формулювання теореми, необхідно розв'язати систему лінійних рівнянь з обмеженнями на змінні (коефіцієнти W повинні бути між 0 і 1). Також, загалом, $N + 1 \neq K$ і розв'язок може бути наближеним.

Розглянемо випадок коли $K = 3$. Коефіцієнти w_k , $k = 1, 2, 3$ будуть знайдені за допомогою задачі оптимізації:

$$\min \frac{1}{2} \cdot \left\| \Pi \cdot W - \hat{\Pi} \right\|^2, \quad 0 \leq w_k \leq 1; \quad k = 1, 2, 3.$$

Це можна зробити за допомогою модифікованого методу внутрішньої точки, що представлено у [8].

Застосуємо методологію до реальних даних. Для прикладу ми можемо використати дані з ресурсу Kaggle [9]. Ці дані містять інформацію про ціни акцій на початок і кінець дня для різноманітних компаній. Приклад даних можна побачити у таблиці 1.

Таблиця 1

Дата	Ціна акції на момент відкриття торгів	Ціна акції на момент закриття торгів
2004-04-07	20.0499	20.05
2004-04-08	20.5	20.43
2004-04-12	20.45	19.52
2004-04-13	19.51	19.52

Як приклад застосування теореми буде розглянуто історію акцій кількох компаній: Apple, Netflix та General Motors. Спочатку дані буде підготовлено для їх моделювання як часових рядів. Потім, результати теореми буде застосовано до даних.

Перед тим як застосувати даний метод потрібно підготувати дані. Частота оригінальних даних – один день і це впливає на довжину часових рядів, беручи до уваги, що дані містять інформацію за багато років. Тому, дані було підготовлено наступним чином:

- 1) Взято початкову і кінцеву ціну кожного тижня.
- 2) Взято відсоток зміни ціни у співвідношенні до початкової ціни: (кінцева ціна – початкова ціна) / початкова ціна.
- 3) Якщо зміна в межах $\pm 1\%$ – це стан стагнації і позначено як стан 0; якщо зміна більше 1% то це зростання і позначено як стан 1; якщо зміна менше -1% то це спад і позначено як стан 2.

Відповідно, ми можемо змодельовати часові ряди як ланцюг Маркова з 3 станами.

Як приклад P_k , $k = 1, 2, 3$, розглянемо:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.45 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.8 & 0.15 & 0.05 \end{pmatrix}.$$

Граничні розподіли для кожної з цих стохастичних матриць:

$$\pi_1 = (0.33, 0.39, 0.28); \quad \pi_2 = (0.14, 0.42, 0.44); \quad \pi_3 = (0.53, 0.21, 0.26).$$

Якщо застосувати метод до даних акцій Apple буде отримано граничний розподіл: $\hat{\pi} = (0.17, 0.44, 0.39)$ та коефіцієнти $w_1 = 0.12$, $w_2 = 0.82$, $w_3 = 0.05$. Для акцій Netflix: $\hat{\pi} = (0.12, 0.47, 0.41)$ та оптимальні коефіцієнти $w_1 = 0.04$, $w_2 = 0.91$, $w_3 = 0.05$. І для акцій General Motors: $\hat{\pi} = (0.24, 0.38, 0.38)$; $w_1 = 0.21$, $w_2 = 0.65$, $w_3 = 0.14$.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У підсумку, у цьому дослідженні було запропоновано методологію представлення ланцюга Маркова як лінійну комбінацію довільних ергодичних ланцюгів. Ці результати мають практичне застосування, а також можуть допомогти в майбутніх дослідженнях подібності ланцюгів Маркова.

В подальшому дослідженні можна послабити умови ергодичності ланцюгів Маркова і дослідити лінійну залежність.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Оригінальні дані, представлені в дослідженні, відкрито доступні для академічних досліджень у репозиторії Kaggle за адресою: <https://doi.org/10.34740/kaggle/dsv/1054465> під ліцензією CC0 (Creative Commons Zero)

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Я. І. Єлейко: концептуалізація, постановка задачі, перевірка результатів, А. Ю. Дребот: формальний аналіз, методологія, написання, курація даних.

Авторські права ©



(2026). Єлейко Я. І., Дребот А. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Miles, C. E., & Webber, R. J. (2024). *Dynamical mixture modeling with fast, automatic determination of Markov*.
2. Bao, J., Zhu, M., Li, Y., & Wang, S. (2024). *Representation and de-interleaving of mixtures of hidden Markov processes*.
3. Fitzpatrick, M., & Stewart, M. I. (2021). Asymptotics for Markov chain mixture detection. *Econometrics & Statistics*, 22, 56–66.
4. Du Roy de Chaumaray, M., Marbac, M., & Navarro, F. (2020). Mixture of hidden Markov models for accelerometer data. *The Annals of Applied Statistics*, 14(4), 1834–1855.
5. Vidotto, D., Vermunt, J. K., & Van Deun, K. (2020). Multiple imputation of longitudinal categorical data through Bayesian mixture latent Markov models. *Journal of Applied Statistics*, 47(10), 1720–1738.
6. Norris, J. R. (1998). *Markov Chains*. Cambridge University Press, pp. 52–57.
7. Walters, P. (2000). *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer, pp. 53–62.
8. Byrd, R. H., Lu, P., Nocedal, J., & Zhu, C. (1995). A subspace, interior, and conjugate gradient method for large-scale bound-constrained minimization problems. *Mathematical Programming*, 73(1), 247–269. <https://doi.org/10.1137/S1064827595289108>
9. Onyshchak, O. (2020). Stock market dataset, version 2. <https://doi.org/10.34740/kaggle/dsv/1054465>

Yeleyko Ya. I., Drebot A. Y. Finding the coefficients of a linear combination of ergodic Markov chains.

This article focuses on the study of linear dependence of ergodic Markov chains. A time series, which can be represented as a Markov chain, is considered. The methodology of representing this chain as a mixture, a linear combination, of arbitrary ergodic Markov chains is investigated. An example of finding the coefficients of a linear combination based on real data is also presented.

Keywords: Markov chains, ergodic theorem, mixture of Markov chains, limiting distribution.

Отримано: 10.10.2025

Прийнято: 15.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).52-63](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).52-63)**В. В. Маринець¹, О. Ю. Питьовка², О. І. Когутич³**

¹ ДВНЗ Ужгородський національний університет,
професор кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор
vasyl.marynets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>

² Мукачівський державний університет,
доцент кафедри інженерії, технологій та професійної освіти,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
O.Pitovka@mail.msu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0127-5032>

³ доктор філософії
oksana.kohutych@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3094-2467>

МОДИФІКАЦІЯ ДВОСТОРОННЬОГО МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПОШИРЕННЯ ВОЛОГИ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, що описує розподіл вологи в пористих середовищах. Отримано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та одержано апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку розглядуваної крайової задачі.

Ключові слова: модифікація двостороннього методу, функції порівняння, єдиність розв'язку, диференціальні рівняння в частинних похідних, наближений розв'язок.

1. Вступ. Математичні моделі, що описують такі складні фізичні процеси, як перенесення вологи в ґрунтах, фільтрацію рідини в середовищах з подвійною пористістю, передачу тепла в гетерогенному середовищі та інші, можна описати за допомогою скалярного рівняння вигляду [1, 2]

$$\begin{aligned} m(t, x)D^{(1.2)}u(t, x) + \alpha(t, x)D^{(1.1)}u(t, x) + d(t, x)D^{(0.1)}u(t, x) + \\ + \eta(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a(t, x)D^{(1.0)}u(t, x) + b(t, x)u(t, x) = g(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

де коефіцієнти диференціального рівняння в частинних похідних (ДРЧП) є неперервними функціями у заданій області $D \in \mathbb{R}^2$. Крайові задачі у випадку рівняння (1) при різних вихідних даних розглядалися у багатьох працях, зокрема в [2]–[4].

У монографії [5] досліджується крайова задача у випадку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} D^{(2.1)}U(x, y) = F(x, y, U(x, y), D^{(1.0)}U(x, y), D^{(0.1)}U(x, y), \\ D^{(1.1)}U(x, y), D^{(2.0)}U(x, y)) := F[U(x, y)], \end{aligned} \quad (2)$$

із крайовими умовами

$$U(x, 0) = T(x), \quad x \in [0, a],$$

$$D^{(1.0)}U(a, y) = \Psi(y), \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^a U(\xi, y) d\xi = \Omega(y), \quad y \in [0, b], \quad (3)$$

$$0 \leq x_0 \leq x < a,$$

де

$$D^k U : D_0 \rightarrow D_k \subset \mathbb{R}^n, \quad F : B \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad B = D_0 \times \prod_{k_1, k_2} D_{(k_1, k_2)} \subset \mathbb{R}^{5n+2},$$

$$D^k U(x, y) := (D^k U_i(x, y)), \quad T(x) := (\tau_i(x)), \quad \Psi(y) := (\psi_i(y)),$$

$$\Omega(y) := (\omega_i(y)), \quad F[U(x, y)] := (F_i[U(x, y)]), \quad i = 1, n - \text{вектор-функції.}$$

Для $T(x) \in C^2[0, a]$, $\Psi(y) \in C^1[a, b]$, $\Omega(y) \in C[0, b]$, виконуються умови узгодженості

$$T'(a) = \Psi(0), \quad (4)$$

а $F[U(x, y)] \in C(\bar{B})$.

Розв'язок крайової задачі (2)–(4) належить простору вектор-функцій $C_1^{(2.1)}(\bar{D}_0) := C^{(2.1)}(D_0) \cap C^{(1.1)}(\bar{D}_0)$ (регулярний розв'язок).

У праці [6] розглядається крайова задача з нелокальною крайовою умовою у випадку систем квазілінійних рівнянь в частинних похідних третього порядку, для якої будується та досліджується одна модифікація двостороннього методу прискореної збіжності наближеного її розв'язання. Такий підхід дозволяє значно покращити достатні умови існування та єдиності розв'язку задач, що досліджувалися раніше.

2. Основний результат. У даній праці продовжуються дослідження приведені в [5, 7] для нового класу крайових задач і будуються модифікації двостороннього методу, які забезпечують значно кращі результати, у порівнянні з раніше відомими.

Розглянемо крайову задачу: у просторі функцій $C^*(\bar{D}) := C^{(1.2)}(\bar{D}) \cap C^{(1.1)}(\bar{D}^*) \cap C(\bar{D})$, $D = \{(t, x) | t \in (0, b), x \in (0, a)\}$, $\bar{D}^* = \{(t, x) | t \in (0, b), x \in (0, a)\}$ знайти розв'язок крайової задачі

$$L_3 u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad D^{(1.0)}u(t, x), \quad D^{(0.1)}u(t, x) := f[u(t, x)], \quad (5)$$

де L_3 — диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом

$$l_3[u(t, x)] := D^{(1.2)}u(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.2)}u(t, x) + a_2(t, x)D^{(1.1)}u(t, x),$$

та крайовими умовами

$$D^{(1.1)}u(t, a) + m_1(t)D^{(0.1)}u(t, a) = \varphi_1(t), \quad t \in [0, b], \quad (6)$$

$$m_2(t)u(t, 0) + m_3(t)D^{(0.1)}u(t, a) = \varphi_2(t), \quad (7)$$

$$u(0, x) = T(x), \quad x \in [0, a], \quad (8)$$

де $D^{(k)}u(t, x) : D \rightarrow D_k \subset \mathbb{R}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_r = 0, 1, r = 1, 2$; $k_1 + k_2 < 2$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B = D \times \prod_{k_1, k_2} D_{(k_1, k_2)} \in \mathbb{R}^5$. Задані функції $m_1(t)$, $m_2(t) \neq 0$, $m_3(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in C[0; b]$, $T(x) \in C^1([0; a])$, $a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D)$, $a_2(t, x) \in C(D)$, причому виконуються умови узгодженості

$$\varphi_2(0) - m_3(0)T'(a) = m_2(0)T(0). \quad (9)$$

Неважко показати, що крайова задача (5)–(9) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$u(t, x) = \Phi(t, x) + \int_0^x \int_0^t \int_\xi^a F[u(\eta, \theta)] K(t, \xi, \eta, \theta) d\theta d\eta d\xi, \quad (10)$$

де

$$F[u(t, x)] := f[u(t, x)] + [D^{(0.1)}a_1(t, x) - a_1(t, x)a_2(t, x)] D^{(0.1)}u(t, x),$$

$$K(t, x; \eta, \xi) := \exp \left(\int_\xi^x a_2(\eta, \tau) d\tau + \int_\eta^t a_1(\tau, x) d\tau \right),$$

$$\begin{aligned} \Phi(t, x) := & \frac{1}{m_2(t)} [\varphi_2(t) - m_3(t)\varphi_3(t)] + \int_0^x T'(\xi) \exp \left(\int_0^t a_1(\eta, \xi) d\eta \right) d\xi + \\ & + \int_0^x \int_0^t \omega(\eta, \xi) \exp \left(\int_\eta^t a_1(\tau, \xi) d\tau \right) d\eta d\xi, \end{aligned}$$

$$\omega(t, x) := [\varphi_1(t) - (m_1(t) + a_1(t, a)\varphi_3(t))] \exp \left(\int_a^x a_2(t, \xi) d\xi \right),$$

$$\varphi_3(t) := T'(a) \exp \left(\int_t^0 m_1(\eta) d\eta \right) + \int_0^t \varphi_1(\eta) \exp \left(\int_t^\eta m_1(\tau) d\tau \right) d\eta,$$

а функція $f[u(t, x)] \in C(\overline{B})$.

Означення 1. Будемо говорити, що $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$, якщо функція $F[u(t, x)]$ задовольняє наступним умовам [8, 9]:

- 1) $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$,
- 2) в просторі функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^8$, $\text{Пр}_{t \in \overline{B}_1} \overline{B}_1 = \overline{D}$ існує така функція

$$H(t, x, u(t, x), D^{(1.0)}u(t, x), D^{(0.1)}u(t, x); v(t, x), D^{(1.0)}v(t, x), D^{(0.1)}v(t, x)) := H[u(x, y); v(x, y)],$$

що

$$(a) \quad H[u(t, x); u(t, x)] \equiv F[u(t, x)],$$

(б) для довільної з простору $C^{(k_1, k_2)}(\overline{D})$ пари функцій $u(t, x), v(t, x) \in \overline{B}_1$, які задовольняють умові $D^{(k_1, k_2)}[u(t, x) - v(t, x)] \geq (\leq) 0$, $k_1 = 0, 1$, $k_2 = 1 (k_2 = 0)$, $k_1 + k_2 < 2$, $(t, x) \in \overline{D}$, в області \overline{B}_1 виконується нерівність

$$H[u(t, x); v(t, x)] - H[v(t, x); u(t, x)] \geq 0, \quad (11)$$

3) функція $H[u(t, x); v(t, x)]$ в області \overline{B}_1 задовольняє умові Ліпшиця, тобто, для всяких з простору $C^*(\overline{D})$ функцій $u_r(t, x), v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, виконується умова

$$\begin{aligned} & |H[u_1(t, x); u_2(t, x)] - H[v_1(t, x); v_2(t, x)]| \leq \\ & \frac{1}{6} L \sum_{r=1}^2 (|w_r(t, x)| + |D^{(1,0)}w_r(t, x)| + |D^{(0,1)}w_r(t, x)|), \end{aligned}$$

де $w_r(t, x) := u_r(t, x) - v_r(t, x)$, $r = 1, 2$, $\frac{1}{6} L$ — стала Ліпшиця.

Очевидно, якщо функція $F[u(t, x)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з третього, то $F[u(t, x)] \in C_2^*(\overline{B})$ [5]. Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_p(t, x), V_p(t, x) \in C^k(\overline{D})$ належать області \overline{B}_1 і $p \in \mathbb{N}_0$. Введемо позначення:

$$W_p(t, x) = Z_p(t, x) - V_p(t, x), \quad (t, x) \in \overline{D}_0,$$

$$f^p(t, x) = H[Z_p(t, x); V_p(t, x)], \quad \bar{f}^p(t, x) = H[V_p(t, x); Z_p(t, x)],$$

$$D^k \bar{Z}_p(t, x) := D^k Z_p(t, x) - q_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$D^k \bar{V}_p(t, x) := D^k V_p(t, x) + c_p^k(t, x) D^k W_p(t, x),$$

$$k = (k_1, k_2), \quad k_r = 0, 1; \quad r = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

$$\bar{f}^p(t, x) := H[\bar{Z}_p(t, x); \bar{V}_p(t, x)], \quad \bar{f}_p(t, x) = H[\bar{V}_p(t, x); \bar{Z}_p(t, x)],$$

$$\omega_p(t, x) := \int_0^x f_p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi, \quad \omega^p(t, x) := \int_0^x \bar{f}^p(t, \xi) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\alpha_p(t, x) := D^{(1,1)} Z_p(t, x) + a_1(t, x) D^{(0,1)} Z_p(t, x) - \omega^p(t, x), \quad (12)$$

$$\beta_p(t, x) := D^{(1,1)} V_p(t, x) + a_1(t, x) D^{(0,1)} V_p(t, x) - \omega_p(t, x), \quad (t, x) \in \overline{D}_0,$$

$q_p^k(t, x), c_p^k(t, x) \in C(\overline{D})$ функціями, які задовольняють умови

$$0 \leq q_p^k(t, x) \leq 0, 5, \quad 0 \leq c_p^k(t, x) \leq 0, 5, \quad (13)$$

$$p \in \mathbb{N}_0, \quad (t, x) \in \overline{D}_0, \quad k_r = 0, 1; \quad k_1 + k_2 < 2.$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_p(t, x)\}, \{V_p(t, x)\}$ згідно формул

$$Z_{p+1}(t, x) = T \bar{f}^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}(t, x) = T \bar{f}_p(\eta, \zeta), \quad (t, x) \in \overline{D}_0, \quad (14)$$

де функції нульового наближення $Z_0(t, x)$, $V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\overline{D})$, які належать області \overline{B}_1 , вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{aligned} \alpha_0(t, x) \geq 0, \beta_0(t, x) \leq 0, D^{(k_1, k_2)}W_0(t, x) \geq (\leq)0, \\ (t, x) \in \overline{D}_0, k_1 = 0, 1; k_2 = 1(k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Означення 2. Функції $Z_0(t, x)$, $V_0(t, x) \in C^{(1.1)}(\overline{D})$, які належать області \overline{B}_1 і задовольняють крайовим умовам (6)–(8) та нерівностям (15), називаються функціями порівняння задачі (5)–(9).

Із (14) маємо

$$\begin{aligned} D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) &= \overline{\omega}^p(t, x), \\ D^{(1.1)}V_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t, x) &= \overline{\omega}_p(t, x). \end{aligned}$$

Таким чином із (12) та (14) одержимо

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(t, x) &= D^{(1.1)}Z_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}Z_{p+1}(t, x) - \omega^{p+1}(t, x) = \\ &= \overline{\omega}^p(t, x) - \omega^{p+1}(t, x), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \beta_{p+1}(t, x) &= D^{(1.1)}V_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}V_{p+1}(t, x) - \omega_{p+1}(t, x) = \\ &= \overline{\omega}_p(t, x) - \omega_{p+1}(t, x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_p(t, x) &= D^{(1.1)} [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] + \\ &+ a_1(t, x)D^{(0.1)} [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] + \overline{\omega}^p(t, x) - \omega^p(t, x), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \beta_p(t, x) &= D^{(1.1)} [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + \\ &+ a_1(t, x)D^{(0.1)} [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + \overline{\omega}_p(t, x) - \omega_p(t, x), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} W_{p+1}(t, x) = T \left(\overline{f}^p(\eta, \zeta) - \overline{f}_p(\eta, \zeta) \right), \\ D^{(1.1)}W_{p+1}(t, x) + a_1(t, x)D^{(0.1)}W_{p+1}(t, x) = \overline{\omega}^p(t, x) - \overline{\omega}_p(t, x). \end{cases} \quad (18)$$

Відмітимо, що в силу (13)

$$D^{(k_1, k_2)}V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)}\overline{V}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)}\overline{Z}_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)}Z_0(t, x),$$

$$k_1 = 0, 1; k_2 = 1(k_2 = 0), k_1 + k_2 < 2, (t, x) \in \overline{D},$$

тобто, якщо $D^k Z_0(t, x)$, $D^k V_0(t, x) \in \overline{B}_1$, то $D^k \overline{Z}_0(t, x)$ та $D^k \overline{V}_0(t, x)$ також нале-

жить області \bar{B}_1 . Із (17) одержимо

$$\begin{aligned}
 & D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] = \\
 & \int_0^t [\alpha_p(\eta, x) + \omega^p(\eta, x) - \bar{\omega}^p(\eta, x)] \exp\left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau]\right) d\eta := \bar{\alpha}_p(t, x), \\
 & D^{(0.1)}[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] = \\
 & \int_0^t [\beta_p(\eta, x) + \omega_p(\eta, x) - \bar{\omega}_p(\eta, x)] \exp\left(\int_t^\eta [a_1(\tau, x) d\tau]\right) d\eta := \bar{\beta}_p(t, x),
 \end{aligned} \tag{19}$$

звідки при $p = 0$, враховуючи (15), (13) та (11) одержимо

$$D^{(0.1)}[Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \geq 0, \quad D^{(0.1)}[V_0(t, x) - V_1(t, x)] \leq 0.$$

Інтегруючи останні нерівності по x від x до a та враховуючи крайові умови (6)–(8), маємо

$$Z_0(t, x) - Z_1(t, x) \leq 0, \quad V_0(t, x) - V_1(t, x) \geq 0.$$

Але тоді із (17) випливає, що

$$\begin{aligned}
 & D^{(1.1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] = \\
 & \alpha_0(t, x) - a_1(t, x) D^{(0.1)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] + \omega^0(t, x) - \bar{\omega}^0(t, x) \geq 0, \\
 & D^{(1.1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] = \\
 & \beta_0(t, x) - a_1(t, x) D^{(0.1)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] + \omega_0(t, x) - \bar{\omega}_0(t, x) \leq 0,
 \end{aligned}$$

а отже

$$D^{(1.0)} [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] \leq 0, \quad D^{(1.0)} [V_0(t, x) - V_1(t, x)] \geq 0.$$

Із (18) враховуючи, що $\bar{f}^0(t, x) - \bar{f}_0(t, x) \geq 0$ при $p = 0$ маємо

$$D^{(k_1, k_2)} W_1(t, x) \geq (\leq) 0, \quad k_1 = 0, 1; \quad k_2 = 1(k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2, \quad (t, x) \in \bar{D}.$$

Таким чином мають місце нерівності

$$D^{(k_1, k_2)} V_0(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} V_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_1(t, x) \leq (\geq) D^{(k_1, k_2)} Z_0(t, x),$$

а отже $D^k Z_1(t, x), D^k V_1(t, x) \in \bar{B}_1$. Але тоді із (16) при $p = 0$ маємо

$$\alpha_1(t, x) = \bar{\omega}^0(t, x) - \omega^1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}^0(t, \xi) - f^1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi,$$

$$\beta_1(t, x) = \int_0^x (\bar{f}_0(t, \xi) - f_1(t, \xi)) K(t, x; t, \xi) d\xi.$$

Вибираючи довільні з простору $C(\bar{D})$ функції $q_0^k(t, x)$ та $c_0^k(t, x)$, які задовольняють умовам (13) таким чином, щоб виконувались нерівності

$$D^k [Z_0(t, x) - Z_1(t, x)] - q_0^k(t, x)D^k W_0(t, x) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k [V_0(t, x) - V_1(t, x)] + c_0^k(t, x)D^k W_0(t, x) \leq (\geq) 0, k_2 = 1(k_2 = 0), (t, x) \in \bar{D},$$

із попередніх рівностей маємо $\alpha_1(t, x) \geq 0, \beta_1(t, x) \leq 0$, тобто побудовані функції $Z_1(t, x), V_1(t, x)$ є також функціями порівняння крайової задачі (5)–(9).

Беручи функції $Z_1(t, x)$ та $V_1(t, x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування методом математичної індукції, переконаємось, що якщо на кожному кроці ітерації (14) неперервні функції $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умовам (13), вибрати таким чином, щоб в області \bar{B}_1 виконувались нерівності

$$D^k [Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^k(t, x)D^k W_p(t, x) \geq (\leq) 0,$$

$$D^k [V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^k(t, x)D^k W_p(t, x) \leq (\geq) 0, \quad (20)$$

$$(t, x) \in \bar{D}, k_1 = 0, 1, k_2 = 1(k_2 = 0),$$

то для довільних $p \in \mathbb{N}$ матимемо

$$D^k V_p(t, x) \leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x) \quad (21)$$

$$(t, x) \in \bar{D}, k_2 = 1(k_2 = 0), p \in \mathbb{N}_0.$$

Покажемо, що множина функцій $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, які задовольняють умовам (13), (20), не порожня. Дійсно, позначимо:

$$\alpha_{p,1}(t, x) := \alpha_p(t, x) + \omega^p(t, x) - \bar{\omega}^p(t, x),$$

$$\alpha_{p,2}(t, x) = \int_0^t \alpha_{p,1}(\eta, x) \exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau\right) d\eta,$$

$$\beta_{p,1}(t, x) := \beta_p(t, x) + \omega_p(t, x) - \bar{\omega}_p(t, x),$$

$$\beta_{p,2}(t, x) = \int_0^t \beta_{p,1}(\eta, x) \exp\left(\int_t^\eta a_1(\tau, x) d\tau\right) d\eta,$$

$$\rho_{p,1}(t, x) := \alpha_{p,2}(t, x) + D^{(0,1)}W_p(t, x),$$

$$\rho_{p,2}(t, x) := -\beta_{p,1}(t, x) + D^{(1,1)}W_p(t, x).$$

Лема 1. *Нехай $a_1(t, x) \in C^{(0,1)}(D)$, $a_2(t, x) \in C(D)$, функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\bar{B})$, а крайова задача (5)–(9) має функції порівняння, то множина функцій $q_p^k(t, x), c_p^k(t, x)$, які задовольняють умовам (13), (20), не порожня.*

Доведення. Дійсно, якщо вибрати

$$q_p^{(0,1)}(t, x) = \frac{\alpha_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, q_p(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, q_p^{(1,0)}(t, x) = \frac{\int_x^a \alpha_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$c_p^{(0.1)}(t, x) = -\frac{\beta_{p,2}(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)}, \quad c_p(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi}, \quad c_p^{(1.0)}(t, x) = -\frac{\int_x^a \beta_{p,1}(t, \xi) d\xi}{\int_x^a \rho_{p,2}(t, \xi) d\xi},$$

$$(t, x) \in \bar{D}, \quad p \in \mathbb{N}_0,$$

то функції $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x)$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$, задовольняють умови (13), а

$$D^{(0.1)}[Z_p(t, x) - Z_{p+1}(t, x)] - q_p^{(0.1)} D^{(0.1)} W_p(t, x) = \alpha_{p,2}(t, x) \left[1 - \frac{D^{(0.1)} W_p(t, x)}{\rho_{p,1}(t, x)} \right] \geq 0,$$

$$[V_p(t, x) - V_{p+1}(t, x)] + c_p^{(0.1)} W_p(t, x) = -\int_x^a \beta_{p,2}(t, \xi) d\xi \left[1 + \frac{W_p(t, x)}{\int_x^a \rho_{p,1}(t, \xi) d\xi} \right] \geq 0.$$

Аналогічно можна переконатися у виконанні усіх нерівностей в (20).

Таким чином справедлива наступна

Теорема 1. *Нехай функція $F[u(t, x)] \in C_2^*(\bar{B})$, $a_1(t, x) \in C^{(0.1)}(D)$, $a_2(t, x) \in C(D)$ і крайова задача (5)–(9) має функції порівняння.*

Тоді для функцій $Z_p(t, x)$, $V_p(t, x)$, побудованих згідно закону (14), (15), де $q_p^k(t, x)$ та $c_p^k(t, x) \in C(\bar{D})$ задовольняють в області \bar{B}_1 умови (13), (20), справедливі нерівності (21) для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, $(t, x) \in \bar{D}$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.

Покажемо, що послідовності функцій $\{D^k Z_p(t, x)\}$, $\{D^k V_p(t, x)\}$, побудованих згідно закону (14), (15), (21), при існуванні функцій порівняння задачі (5)–(9), збігаються рівномірно при $(t, x) \in \bar{D}$ до єдиного розв'язку інтегродиференціального рівняння (10). Враховуючи нерівності (21), для цього достатньо показати, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^k W_p(t, x) = 0$ для $\forall (t, x) \in \bar{D}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$.

Позначимо:

$$d := \max_{k_1, k_2} \sup_{\bar{D}} |D^{(k_1, k_2)} W_0(t, x)|, \quad q := \max_{k_1, k_2} \sup_{\bar{D}} (1 - q_p^k(t, x) - c_p^k(t, x)),$$

$$c := \sup_{\bar{D}} |a_1(t, x)|, \quad K := \sup_{\bar{D} \times \bar{D}} K(t, x; \eta, \zeta)$$

$$\gamma := \max \{1, a + b, a(a + b), (a + b)(1 + ab)\}.$$

Тоді із (18) методом математичної індукції неважко переконатись у справедливості оцінок

$$|D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x)| \leq \frac{[qKL\gamma(a + t - x)]^p}{p!} d, \quad k_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \quad k_1 + k_2 < 2, \quad (22)$$

для всіх $(t, x) \in \bar{D}$, $p \in \mathbb{N}$.

Беручи до уваги оцінки (22) маємо, що $\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} W_p(t, x) = 0$, тобто

$$\lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} Z_p(t, x) = \lim_{p \rightarrow \infty} D^{(k_1, k_2)} V_p(t, x) := U_{k_1, k_2}(t, x).$$

Для того, щоб показати, що $U_{k_1, k_2}(t, x) = D^{(k_1, k_2)}U(t, x)$, де $U(t, x)$ є регулярним розв'язком інтегро–диференціального рівняння (10) достатньо в (14) перейти до границі, коли $p \rightarrow \infty$ і результат продиференціювати по t k_1 раз, а по x — k_2 рази, $k_1 + k_2 < 2$. Знайдена гранична функція і буде розв'язком крайової задачі (5)–(9).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови Теорему 1.*

Тоді:

- 1) інтегро–диференціальне рівняння (10) у класі функцій $C^*(\bar{D})$ має розв'язок і він єдиний при $(t, x) \in \bar{D}$,
- 2) послідовності функцій $\{Z_p^k(t, x)\}$, $\{V_p^k(t, x)\}$, побудовані згідно закону (14), (15), (21) збігаються рівномірно при $(t, x) \in \bar{D}$ до єдиного розв'язку рівняння (10),
- 3) мають місце оцінки (22),
- 4) для довільних $p \in \mathbb{N}_0$, $k_1, k_2 = 0, 1$, $k_1 + k_2 < 2$ та $(t, x) \in \bar{D}$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} D^k V_p(t, x) &\leq (\geq) D^k V_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k U(t, x) \leq \\ &(\geq) D^k Z_{p+1}(t, x) \leq (\geq) D^k Z_p(t, x) \end{aligned} \quad (23)$$

$$(t, x) \in \bar{D}, \quad k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1(k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2.$$

- 5) збіжність ітераційного методу (14), (15), (21) не повільніша збіжності методу, коли $q_p^k(t, x) \equiv 0$ та $c_p^k(t, x) \equiv 0$ для всіх $p \in \mathbb{N}_0$, тобто методу

$$Z_{p+1}^*(t, x) = T f^p(\eta, \zeta), \quad V_{p+1}^*(t, x) = T f_p(\eta, \zeta) \quad (24)$$

Доведення. Єдиність розв'язку рівняння (10) доводиться методом від супротивного [5]. Твердження пунктів 2) та 3) даної Теорему 2 доведені вище.

Доведемо справедливість нерівностей (23).

Припустимо, що для деякого номера $p \in \mathbb{N}$ у деякій точці $(t_0, x_0) \in \bar{D}$ виконується нерівність $D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0)$. Тоді для всякого $n \in \mathbb{N}$ у силу нерівностей (21)

$$D^k Z_{p+n}(t_0, x_0) \geq (\leq) D^k Z_p(t_0, x_0) < (>) D^k U(t_0, x_0),$$

$$k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 1(k_2 = 0), \quad k_1 + k_2 < 2,$$

а отже послідовність функцій $\{D^k Z_{p+n}(t_0, x_0)\}$ при $n \rightarrow \infty$ не збігається у точці (t_0, x_0) до $D^k U(t_0, x_0)$, що суперечить доведеному.

Аналогічно доводяться інші нерівності у (23).

Можна також показати, що збіжність методу (14), (15), (21) не повільніша збіжності ітераційного методу (24).

Нехай $Z_p(t, x)$ та $V_p(t, x)$ — функції порівняння задачі (5)–(9), побудовані згідно деякого двостороннього методу. Тоді із (14) та (24), враховуючи (11), маємо

$$Z_{p+1}^*(t, x) - Z_{p+1}(t, x) = T f^p(\eta, \zeta) - T \bar{f}^p(\eta, \zeta) = T[f^p(\eta, \zeta) - \bar{f}^p(\eta, \zeta)] \leq 0,$$

$$V_{p+1}^*(t, x) - V_{p+1}(t, x) = T[f_p(\eta, \zeta) - \bar{f}_p(\eta, \zeta)] \geq 0.$$

Тоді

$$Z_{p+1}^*(t, x) \leq Z_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}(t, x) \leq V_{p+1}^*(t, x),$$

що і потрібно було показати.

Зауваження 1. Оскільки за наближеної розв'язок приймається половина суми верхньої та нижньої функцій, тобто $\tilde{U}_p(t, x) := \frac{1}{2}[Z_p(t, x) + V_p(t, x)]$, то, беручи до уваги нерівності (23), одержуємо, що оцінка похибки наближеного розв'язку на p -ому кроці ітерації буде у два рази менша оцінки (22), тобто

$$\left| U(t, x) - \tilde{U}_p(t, x) \right| \leq \frac{[qKL\gamma(a + t - x)]^p}{2p!}.$$

Відмітимо, що одержана оцінка дає можливість знаходити похибку у будь-якій точці області D або підобласті області D , що є важливим при дослідженні реальних процесів практики.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У даній праці побудовано одну модифікацію двостороннього методу дослідження та наближеного розв'язання крайової задачі, що описує розподіл вологи у пористих середовищах. Отримано достатні умови існування, єдиності, регулярності та знакосталості шуканого розв'язку. Доведено теореми про диференціальні нерівності та отримано апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку крайової задачі.

Подальший науковий пошук може бути спрямований на дослідження інших класів крайових задач за допомогою побудованої модифікації двостороннього методу. Перспективними є також розробки нових модифікацій даного методу.

Конфлікт інтересів

Маринець Василь Васильович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Скінчені підгрупи повних матричних груп над кільцями. Крайові задачі та конструктивні методи їх дослідження» (державний реєстраційний номер 0122U201044).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Маринець В. В.: концептуалізація, дослідження, методологія. Питьовка О. Ю.: кураторство даних, формальний аналіз, написання — рецензування та редагування. Когутіч О. І.: формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Маринець В. В., Питьовка О. Ю., Когутіч О. І. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Chudnovskij, A. F. (1976). Thermal physics of soils. *M.: Nauka* [in Russian].
2. Nahushev, A. M. (1979). Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of soil moisture. *Differenc. uravneniya.*, 15(1), 96–105 [in Russian].
3. Shkhanukov, B. A. (1983). On some boundary value problems for a third-order equation and extremal properties of its solutions. *Differenc. uravneniya.*, 18(2), 145–152 [in Russian].
4. Vodahova, V. A. (1982). A boundary value problem with a nonlocal condition A.M. Nakhushhev for one pseudoparabolic equation of moisture transfer. *Differenc. uravneniya.*, 18(2), 280–288 [in Russian].
5. Marynets, V. V., Marynets, K. V., & Pytovka, O. Yu. (2019). Analytical methods of research of boundary value problems. *Uzhgorod: Vid-vo UzhNU "Goverla"*. Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/27984> [in Ukrainian].
6. Marynets, V. V., Kohutych, O. I., & Pytovka, O. Yu. (2023). One approach of the investigation of a mathematical model of moisture distribution in porous environments. *Scientific bulletin of Uzhhorod university. Series of Mathem. and Inform.*, 43(2), 42–51. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43\(2\).42-51](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).42-51)
7. Marynets, V. V. (1988). On some problems for systems of nonlinear partial differential equations with nonlocal boundary conditions. *Differenc. uravneniya.*, 24(8), 1393–1397 [in Russian].
8. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (2021). Study of the Boundary Value Problems for Nonlinear Wave Prehistory. Retrieved from https://www.mdpi.com/journal/mathematics/specialissues/Advanced_Methods_Computatioal_Mathematical_Physies
9. Marynets, V., Marynets, K., & Kohutych, O. (September, 2022). On a ovel aproache for the investigaion and aproximation of solutions to the systems of higher nonlinear PDES. *Monatshefte für Mathematik*. <https://doi.org/10.1007/s00605-022-01771-5>

Marynets V. V., Pitovka O. Yu., Kohutych O. I. Modification of the two-sided method for investigating a mathematical model of moisture distribution in porous environments .

The one modification of the two-sided method is constructed for the investigation and approximate solution of a boundary value problem describing moisture distribution in

porous environments. The sufficient conditions for the existence, uniqueness, regularity, and sign-preservation of the desired solution are obtained. Theorems about differential inequalities are proven, and the posterior estimation of error for the approximate solution of the boundary value problem is provided.

Keywords: modification of the two-sided method, comparison functions, uniqueness of the solution, partial differential equations, approximate solution.

Отримано: 04.11.2025

Прийнято: 26.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 517.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).64-74](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).64-74)**Р. В. Хаць¹, В. П. Ярмошик²**

¹ Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
доцент кафедри математики та економіки,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
khats@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

² Дрогобицький державний педагогічний університет ім. І. Франка,
аспірант кафедри математики та економіки
valentyn.yarmoshyk@dspu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7851-0863>

ДВОЧЛЕННА АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ КАНОНІЧНОГО ДОБУТКУ З ПОКРАЩЕНИМ РОЗПОДІЛОМ НУЛІВ

Досліджено зв'язок між регулярністю зростання логарифмічної похідної цілої функції скінченного порядку та покращеним розподілом її нулів на додатному промені в термінах двочленної асимптотики. Зокрема, для цілої функції f порядку $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, визначеної канонічним добутком Вейерштрасса роду p , рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ встановлено асимптотичне співвідношення вигляду

$$|f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi}) - H(\varphi; \Delta; \rho)r^{\rho-1} - H_1(\varphi; \Delta_1; \rho_1)r^{\rho_1-1}| \sin(\varphi/2) = o(r^{\rho_2-1}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції її нулів

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

де $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p + 1$, $H(\varphi; \Delta; \rho) \in L^1(0; 2\pi)$ і $H_1(\varphi; \Delta_1; \rho_1) \in L^1(0; 2\pi)$.

Ключові слова: канонічний добуток, логарифмічна похідна, двочленна асимптотика, ціла функція цілком регулярного зростання, покращений розподіл нулів.

1. Вступ. Нехай $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел, $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ — лічильна функція [1: 10] послідовності $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$, p — найменше

ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p-1} < +\infty$,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\sum_{\nu=1}^p \frac{z^\nu}{\nu \lambda_n^\nu}\right), \quad f(0) = 1, \quad (1)$$

— ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$, визначена [1: 25] канонічним добутком Вейерштрасса роду p і $F(z) := f'(z)/f(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1; +\infty)$, — логарифмічна похідна функції f .

Однією з важливих задач теорії цілих функцій є дослідження зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. В теоріях цілих функцій цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1, 2] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [3–14] подібний зв'язок встановлено в

термінах одночленних асимптотичних співвідношень. Відповідні результати мають численні застосування в різних розділах математики та суміжних науках (див. [1, 2]).

Наприкінці 20 століття в теорії цілих функцій почав розвиватися напрямок вивчення поведінки основних характеристик цих функцій в термінах точніших багаточленних асимптотик. Зокрема, в роботах [15–19] було досліджено асимптотичну поведінку цілих функцій цілком регулярного зростання скінченного порядку та асимптотичну поведінку лічильної функції їх нулів в термінах двочленних та багаточленних асимптотик. У статті [20] встановлено двочленну асимптотику цілих функцій скінченного порядку з покращеним розподілом нулів на додатному промені.

Нехай f — ціла функція порядку $\rho \in (0; +\infty)$ цілком регулярного зростання в розумінні Левіна-Пфлюгера [1: 95]. А. Гольдберг, М. Коренков та М. Строчик [21–23] для таких функцій знайшли асимптотичні формули їх логарифмічних похідних зовні деяких виняткових множин. Зокрема, в роботах [21, 22] (див. також [2: 95]) встановлено, що якщо $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \Delta \in [0; +\infty), \quad (2)$$

то для цілої функції f нецілого порядку $\rho \in (0; +\infty)$, визначеної канонічним добутком (1) роду $p = [\rho]$ (тут $[\rho]$ — ціла частина числа $\rho > 0$), для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$ виконується

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho} e^{-\pi\rho i} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} + o(r^{\rho-1}), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Крім цього, якщо умова (2) виконується з $\rho \in \mathbb{N}$, то для цілої функції (1) рівномірно за $\varphi \in [\delta; 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$, справджується співвідношення [21, 22]

$$F(re^{i\varphi}) = \Omega(re^{i\varphi}) + o(r^{\rho-1}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

де

$$\Omega(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + \Delta\rho i(\varphi - \pi) e^{i(\rho-1)\varphi} r^{\rho-1}, & p = \rho, \\ 0, & p = \rho - 1. \end{cases}$$

Аналогічні асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку з від'ємними нулями отримано в [24].

В роботах [3–14, 20] вивчалися точніші асимптотики цілої функції (1) покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0; +\infty)$ та лічильної функції $n(t)$ її нулів. Зокрема [8, 9], якщо для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконується умова $n(t) = \Delta t^{\rho_1} + o(t^{\rho_1})$, $t \rightarrow +\infty$, $\Delta \in [0; +\infty)$, то для цілої функції (1) порядку $\rho \in (0; +\infty)$, при $r \rightarrow +\infty$ виконуються асимптотичні співвідношення

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta\rho}{\sin\pi\rho} e^{-\pi\rho i} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} + \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad \rho_1 \in ([\rho]; \rho),$$

$$F(re^{i\varphi}) = \Omega(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad \rho \in \mathbb{N}, \quad \rho_1 \in (\rho - 1; \rho),$$

рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$, де функція $\Omega(re^{i\varphi})$ визначена вище.

Проте, згадані вище результати отримані для одночленних асимптотик логарифмічних похідних цілих функцій цілком регулярного зростання [21–24] та цілих функцій покращеного регулярного зростання [8, 9]. З огляду на це, актуальною є задача про дослідження двочленної асимптотики логарифмічної похідної цілої функції покращеного регулярного зростання, що передбачає отримання тонших асимптотичних оцінок в порівнянні з цілими функціями цілком регулярного зростання.

Метою статті є дослідження зв'язку між регулярністю зростання логарифмічної похідної канонічного добутку Вейерштрасса (1) скінченного порядку та покращеним розподілом його нулів на промені (див. умову (3)) у термінах двочленної асимптотики, що зумовлює необхідність розв'язання таких задач: отримання нових рівномірних (та зовні деякої малої виняткової множини) асимптотичних оцінок логарифмічної похідної канонічного добутку (1) в термінах двочленних співвідношень; встановлення нових двочленних асимптотичних рівностей для лічильних функцій послідовностей нулів; вивчення зв'язку між покращеним регулярним зростанням на деяких колах логарифмічної похідної канонічного добутку (1) нецілого порядку та покращеним розподілом його нулів на промені в термінах двочленних асимптотик.

2. Основні результати. Основні результати даної статті містяться в наступних твердженнях.

Теорема 1. *Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p + 1$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову*

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Тоді для канонічного добутку (1) при $r \rightarrow +\infty$ виконується

$$\left| F(re^{i\varphi}) - \frac{\Delta \pi \rho}{\sin \pi \rho} e^{-i\pi \rho} e^{(\rho-1)\varphi i} r^{\rho-1} - \frac{\Delta_1 \pi \rho_1}{\sin \pi \rho_1} e^{-i\pi \rho_1} e^{(\rho_1-1)\varphi i} r^{\rho_1-1} \right| \sin \frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2-1}), \quad (4)$$

рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $\varphi \in (0; 2\pi)$. Оскільки ([21: 19; 22: 364])

$$F(z) = z^p \left\{ pz \int_0^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^{p+1}(z-t)^2} - (p+1) \int_0^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^p(z-t)^2} \right\},$$

то

$$\begin{aligned} S &:= F(re^{i\varphi}) + r^p e^{ip\varphi} \left\{ -pre^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(re^{i\varphi} - t)^2} dt + (p+1) \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^p(re^{i\varphi} - t)^2} dt \right\} = \\ &= z^p \left\{ pz \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1}(z-t)^2} dt - (p+1) \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^p(z-t)^2} dt \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

Враховуючи (3), для як завгодно малого $\varepsilon > 0$ і всіх $N > N(\varepsilon)$, подібно як в [1: 81–82; 2: 67–69; 22: 365], отримуємо

$$\begin{aligned}
 |S| &\leq pr^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |re^{i\varphi} - t|^2} dt + (p+1)r^p \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^p |re^{i\varphi} - t|^2} dt < \\
 &< pr^{p+1} \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |re^{i\varphi} - t|^2} dt + (p+1)r^p \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^p |re^{i\varphi} - t|^2} dt + \\
 &\quad + \varepsilon pr^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2-p-1}}{|re^{i\varphi} - t|^2} dt + \varepsilon(p+1)r^p \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_2-p}}{|re^{i\varphi} - t|^2} dt := \\
 &= J_1(r, \varphi) + J_2(r, \varphi) + J_3(r, \varphi) + J_4(r, \varphi). \tag{6}
 \end{aligned}$$

Тоді ([1: 82; 2: 68; 21, 22])

$$\begin{aligned}
 &J_1(r, \varphi) + J_2(r, \varphi) = \\
 &= pr^{p+1} \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^{p+1} |re^{i\varphi} - t|^2} dt + (p+1)r^p \int_0^N \frac{|n(t) - \Delta t^p - \Delta_1 t^{\rho_1}|}{t^p |re^{i\varphi} - t|^2} dt = \\
 &= O(r^{p-1}) = o(r^{\rho_2-1}), \quad r \rightarrow +\infty, \tag{7}
 \end{aligned}$$

рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$. Позаяк [25: 126, 331]

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\mu}{x^2 + 2x \cos \varphi + 1} dx = \frac{\pi \sin(\mu\varphi)}{\sin \varphi \sin(\mu\pi)}, \quad 0 < |\varphi| < \pi, \quad \mu \in (-1; 1),$$

то, зробивши заміну $t = ur$, одержимо

$$\begin{aligned}
 J_3(r, \varphi) + J_4(r, \varphi) &= \varepsilon pr^{\rho_2-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{|e^{i\varphi} - u|^2} du + \varepsilon(p+1)r^{\rho_2-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p}}{|e^{i\varphi} - u|^2} du = \\
 &= \varepsilon pr^{\rho_2-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p-1}}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du + \varepsilon(p+1)r^{\rho_2-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_2-p}}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du < \\
 &< \varepsilon c(\rho_2) \frac{r^{\rho_2-1}}{\sin(\varphi/2)}, \quad \varphi \in (0; 2\pi), \tag{8}
 \end{aligned}$$

де $c(\rho_2)$ — стала, яка залежить від ρ_2 . Крім того, ([1: 82; 2: 95; 21: 20; 22: 364])

$$\begin{aligned}
 &r^p e^{ip\varphi} \left\{ -pr e^{i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^p + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^{p+1} (re^{i\varphi} - t)^2} dt + (p+1) \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^p + \Delta_1 t^{\rho_1}}{t^p (re^{i\varphi} - t)^2} dt \right\} = \\
 &= -p \Delta r^{\rho-1} e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{(e^{i\varphi} - u)^2} du + (p+1) \Delta r^{\rho-1} e^{ip\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p}}{(e^{i\varphi} - u)^2} du -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -p\Delta_1 r^{\rho_1-1} e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p-1}}{(e^{i\varphi}-u)^2} du + (p+1)\Delta_1 r^{\rho_1-1} e^{ip\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p}}{(e^{i\varphi}-u)^2} du = \\
& = -\frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho} e^{-i\pi\rho} e^{(\rho-1)\varphi} i r^{\rho-1} - \frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} e^{(\rho_1-1)\varphi} i r^{\rho_1-1}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Отже, з (5)–(9) випливає (4). Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для кожного $\gamma \in (0; \rho_1 - \rho_2)$ маємо*

$$F(re^{i\varphi}) = \frac{\Delta\pi\rho}{\sin\pi\rho} e^{-i\pi\rho} e^{(\rho-1)\varphi} i r^{\rho-1} + \frac{\Delta_1\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1} e^{-i\pi\rho_1} e^{(\rho_1-1)\varphi} i r^{\rho_1-1} + o(r^{\rho_2-1+\gamma}),$$

$$E_\gamma \not\exists z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty,$$

де $E_\gamma = \{z = re^{i\varphi} : |\varphi| < r^{-\gamma}\}$ і $\varphi \in (0; 2\pi)$.

Наступний приклад вказує в деякій мірі на точність теореми 1.

Приклад 1. *Нехай $f(z) = \cos\sqrt{z}$. Функція f є цілою функцією порядку $\rho = 1/2$ з нулями $\lambda_n = (\pi n + \pi/2)^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Згідно з теоремою Адамара-Бореля [1: 26]*

$$\cos\sqrt{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{((2n-1)\pi/2)^2}\right).$$

Для заданого $t \geq \lambda_1$ знайдеться n , для якого $\lambda_n \leq t < \lambda_{n+1}$. Тоді

$$n(t) = n = \sqrt{\lambda_n}/\pi - 1/2 \leq \sqrt{t}/\pi - 1/2,$$

і

$$n(t) = n + 1 - 1 = \sqrt{\lambda_{n+1}}/\pi - 3/2 > \sqrt{t}/\pi - 3/2.$$

Тому $n(t) = \sqrt{t}/\pi + O(1)$, $t \rightarrow +\infty$. Отже, умова (3) виконується для будь-якого $\rho_2 \in (0; 1/2)$ з $\Delta = 1/\pi$, $\rho = 1/2$ і $\Delta_1 = 0$. Оскільки

$$F(z) = -\frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad \varphi \in (0; 2\pi),$$

$$\frac{|i - \operatorname{tg}\sqrt{z}|}{2\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{1 + 2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} \cos(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}) + e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}}}},$$

$$\left(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} - 1\right)^2 \leq 1 + 2e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} \cos\left(2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right) + e^{4\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} \leq \left(e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} + 1\right)^2,$$

$$e^x > 1 + x, \quad x > 0,$$

то

$$0 < \frac{r^{\rho_2-1}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} + 1} < \left|F(re^{i\varphi}) + \frac{i}{2\sqrt{re^{i\varphi}}}\right| \leq \frac{r^{-1/2}}{e^{2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}} - 1} < \frac{r^{\rho_2-1}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Теорема 2. Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho - 1 < \rho_2 < \rho_1 < \rho$ і послідовність додатних чисел $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє умову (3). Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0; 2\pi)$ виконується

$$|F(re^{i\varphi}) - \Theta(re^{i\varphi})| \sin \frac{\varphi}{2} = o(r^{\rho_2-1}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (10)$$

де

$$\Theta(re^{i\varphi}) = \begin{cases} r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + \Delta \rho i(\varphi - \pi) r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} + \\ \quad + \Delta_1 \rho_1 i(\varphi - \pi) r^{\rho_1-1} e^{i(\rho_1-1)\varphi}, \quad p = \rho, \\ \Delta_1 \rho_1 r^{\rho_1-1} \left(\frac{e^{i(\rho-1)\varphi}}{\rho_1 - \rho} + i(\varphi - \pi) e^{i(\rho_1-1)\varphi} \right), \quad p = \rho - 1. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$ і $p = \rho$. Оскільки ([21: 21; 22: 370])

$$F(z) = z^{\rho-1} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \frac{n(r)}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^{\rho-1} -$$

$$- z^{\rho-1} \int_0^r n(t) \frac{\rho t - (\rho-1)z}{t^\rho (z-t)^2} dt - z^\rho \int_r^{+\infty} n(t) \frac{(\rho+1)t - \rho z}{t^{\rho+1} (z-t)^2} dt,$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{S} := F(re^{i\varphi}) - r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + (\Delta r^{\rho-1} + \Delta_1 r^{\rho_1-1}) e^{i\varphi(\rho-1)} + \\ + r^{\rho-1} e^{i\varphi(\rho-1)} \int_0^r (\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{\rho t - (\rho-1)re^{i\varphi}}{t^\rho (re^{i\varphi} - t)^2} dt + \\ + r^\rho e^{i\varphi\rho} \int_r^{+\infty} (\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{(\rho+1)t - \rho re^{i\varphi}}{t^{\rho+1} (re^{i\varphi} - t)^2} dt = - \frac{n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}}{r} \left(\frac{z}{r} \right)^{\rho-1} - \\ - z^{\rho-1} \int_0^r (n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{\rho t - (\rho-1)z}{t^\rho (z-t)^2} dt - \\ - z^\rho \int_r^{+\infty} (n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{(\rho+1)t - \rho z}{t^{\rho+1} (z-t)^2} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Враховуючи (3), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\begin{aligned} |\tilde{S}| \leq \frac{1}{r} |n(r) - \Delta r^\rho - \Delta_1 r^{\rho_1}| + r^{\rho-1} \int_0^r |n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}| \frac{\rho t + (\rho-1)r}{t^\rho |re^{i\varphi} - t|^2} dt + \\ + r^\rho \int_r^{+\infty} |n(t) - \Delta t^\rho - \Delta_1 t^{\rho_1}| \frac{(\rho+1)t + \rho r}{t^{\rho+1} |re^{i\varphi} - t|^2} dt < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \varepsilon r^{\rho_2-1} + \varepsilon r^{\rho_2-1} \int_0^1 u^{\rho_2-\rho} \frac{\rho u + (\rho - 1)}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du + \\
&+ \varepsilon r^{\rho_2-1} \int_1^{+\infty} u^{\rho_2-\rho-1} \frac{(\rho + 1)u + \rho}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du \leq \frac{o(r^{\rho_2-1})}{\sin(\varphi/2)}, r \rightarrow +\infty. \quad (12)
\end{aligned}$$

Крім того, ([21: 21; 22: 371])

$$\begin{aligned}
&r^{\rho-1} e^{i\varphi(\rho-1)} \int_0^r (\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{\rho t - (\rho - 1)r e^{i\varphi}}{t^\rho (r e^{i\varphi} - t)^2} dt + \\
&+ r^\rho e^{i\varphi\rho} \int_r^{+\infty} (\Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1}) \frac{(\rho + 1)t - \rho r e^{i\varphi}}{t^{\rho+1} (r e^{i\varphi} - t)^2} dt + (\Delta r^{\rho-1} + \Delta_1 r^{\rho_1-1}) e^{i\varphi(\rho-1)} = \\
&= -\Delta \rho i(\varphi - \pi) r^{\rho-1} e^{i(\rho-1)\varphi} - \Delta_1 \rho_1 i(\varphi - \pi) r^{\rho_1-1} e^{i(\rho_1-1)\varphi}. \quad (13)
\end{aligned}$$

Таким чином, з (11)–(13) отримуємо (10). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді ([21: 21; 22: 373])

$$\begin{aligned}
F(z) &= -z^{\rho-1} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} - \frac{n(r)}{r} \left(\frac{z}{r}\right)^{\rho-1} - \\
&- z^{\rho-1} \int_0^r n(t) \frac{\rho t - (\rho - 1)z}{t^\rho (z - t)^2} dt - z^\rho \int_r^{+\infty} n(t) \frac{(\rho + 1)t - \rho z}{t^{\rho+1} (z - t)^2} dt.
\end{aligned}$$

Оскільки в даному випадку $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho} < +\infty$, то (див. [5; 7–10; 20])

$$n(t) = \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Тому

$$\begin{aligned}
-z^{\rho-1} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} &= -z^{\rho-1} \int_r^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} = -z^{\rho-1} \left(t^{-\rho} n(t) \Big|_r^{+\infty} + \rho \int_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt \right) = \\
&= z^{\rho-1} \frac{n(r)}{r^\rho} - \rho z^{\rho-1} \int_r^{+\infty} t^{-\rho-1} n(t) dt = \\
&= z^{\rho-1} (\Delta_1 r^{\rho_1-\rho} + o(r^{\rho_2-\rho})) - \rho z^{\rho-1} \int_r^{+\infty} (\Delta_1 t^{\rho_1-\rho-1} + o(t^{\rho_2-\rho-1})) dt = \\
&= \frac{\Delta_1 \rho_1}{\rho_1 - \rho} r^{\rho_1-1} e^{i(\rho-1)\varphi} + \frac{o(r^{\rho_2-1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Отже, як і вище виконується (10). Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Теорема 1–2 можна узагальнити на випадок цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів.

Теорема 3. Нехай $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$, $\rho_1 \in (0; \rho)$, $\rho_2 \in (0; \rho_1)$ і для канонічного добутку (1) існує така послідовність (r_k) , $0 < r_k \uparrow +\infty$, що

$$r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_2}), \quad r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1} = o(r_k^{\rho_2}), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

і

$$F(r_k e^{i\varphi}) = \frac{\Delta \pi \rho}{\sin \pi \rho} e^{-i\pi \rho} e^{i(\rho-1)\varphi} r_k^{\rho-1} + \frac{\Delta_1 \pi \rho_1}{\sin \pi \rho_1} e^{-i\pi \rho_1} e^{i(\rho_1-1)\varphi} r_k^{\rho_1-1} + o(r_k^{\rho_2-1}), \quad k \rightarrow +\infty,$$

рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тоді виконується (3).

Доведення. Оскільки [26: 1011]

$$n(r) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(re^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi, \quad r = r_k \neq \lambda_n,$$

то при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} n(r_k) &= \frac{r_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r_k e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{r_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\Delta \pi \rho}{\sin \pi \rho} e^{-i\pi \rho} e^{i(\rho-1)\varphi} r_k^{\rho-1} + \frac{\Delta_1 \pi \rho_1}{\sin \pi \rho_1} e^{-i\pi \rho_1} e^{i(\rho_1-1)\varphi} r_k^{\rho_1-1} + o(r_k^{\rho_2-1}) \right) e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\Delta \rho r_k^\rho}{2 \sin \pi \rho} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(\varphi-\pi)} d\varphi + \frac{\Delta_1 \rho_1 r_k^{\rho_1}}{2 \sin \pi \rho_1} \int_0^{2\pi} e^{i\rho_1(\varphi-\pi)} d\varphi + o(r_k^{\rho_2}) = \\ &= \frac{\Delta r_k^\rho}{\sin \pi \rho} \frac{e^{i\pi \rho} - e^{-i\pi \rho}}{2i} + \frac{\Delta_1 r_k^{\rho_1}}{\sin \pi \rho_1} \frac{e^{i\pi \rho_1} - e^{-i\pi \rho_1}}{2i} + o(r_k^{\rho_2}) = \Delta r_k^\rho + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}). \end{aligned}$$

Для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \leq r < r_{k+1}$. Оскільки $n(r)$ є неспадною функцією, то за умовою (14), при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$\begin{aligned} n(r) &\leq n(r_{k+1}) = \Delta r_{k+1}^\rho + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_2}) = \\ &= \Delta (r_{k+1}^\rho - r_k^\rho) + \Delta r_k^\rho + \Delta_1 (r_{k+1}^{\rho_1} - r_k^{\rho_1}) + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^{\rho_2} r_k^{\rho_2}\right) = \\ &= \Delta r_k^\rho + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}) \leq \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}). \end{aligned}$$

З іншого боку, за умови (14), при $r \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} n(r) &\geq n(r_k) = \Delta r_k^\rho + \Delta_1 r_k^{\rho_1} + o(r_k^{\rho_2}) = \\ &= \Delta (r_k^\rho - r_{k+1}^\rho) + \Delta r_{k+1}^\rho + \Delta_1 (r_k^{\rho_1} - r_{k+1}^{\rho_1}) + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o\left(\left(\frac{r_k}{r_{k+1}}\right)^{\rho_2} r_{k+1}^{\rho_2}\right) \geq \\ &\geq \Delta r_{k+1}^\rho + \Delta_1 r_{k+1}^{\rho_1} + o(r_{k+1}^{\rho_2}) \geq \Delta r^\rho + \Delta_1 r^{\rho_1} + o(r^{\rho_2}). \end{aligned}$$

З обох останніх нерівностей випливає (3). Теорему 3 доведено.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті знайдено нові двочленні асимптотичні формули для логарифмічної похідної цілої функції скінченного порядку, визначеної канонічним добутком Вейерштрасса, за умови покращеної двочленної асимптотики лічильної функції її нулів на додатному промені (див. теореми 1 і 2). Крім того, вивчено зв'язок між покращеним регулярним зростанням на деякій послідовності кіл логарифмічної похідної канонічного добутку нецілого порядку та покращеним розподілом його нулів на промені в термінах двочленної асимптотики (теорема 3).

Отримані результати доповнюють результати робіт [3–24]. Вони можуть бути використані для вивчення асимптотичної поведінки похідних від логарифмічної похідної цілих функцій покращеного регулярного зростання, а також при дослідженні базисів і розв'язуванні деяких інтерполяційних задач в просторах аналітичних функцій [1, 2].

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Р. В. Хаць: концептуалізація, курація даних, координація і контроль, написання — оригінальний проект, рецензування та редагування. В. П. Ярмошик: формальний аналіз, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Хаць Р. В., Ярмошик В. П. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Levin, B. Ya. (1996). *Lectures on Entire Functions. Transl. Math. Monogr.* (Vol. 150). Amer. Math. Soc.: Providence, R.I. <https://doi.org/10.1090/mmono/150>
2. Gol'dberg, A. A., & Ostrovskii, I. V. (2008). *Value Distributions of Meromorphic Functions. Transl. Math. Monogr.* (Vol. 236). Amer. Math. Soc.: Providence, R.I. <https://doi.org/10.1090/mmono/236>
3. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2003). On the asymptotic behavior of entire functions of order less than one. *Mat. Stud.*, 19(1), 97–105. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2003/19_1/97_105.pdf
4. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of entire functions of noninteger order. *Mat. Stud.*, 21(2), 140–150. <https://doi.org/10.30970/ms.21.2.140-150> [in Ukrainian].
5. Khats', R. V. (2004). On the asymptotic behavior of canonical product of integer order. *Mat. Stud.*, 22(1), 105–110. <https://doi.org/10.30970/ms.22.1.105-110> [in Ukrainian].
6. Vynnyts'kyi, B. V., & Khats', R. V. (2005). On the regularity of growth of an entire function of noninteger order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 24(1), 31–38. <https://doi.org/10.30970/ms.24.1.31-38> [in Ukrainian].
7. Khats', R. V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud.*, 26(1), 17–24. <https://doi.org/10.30970/ms.26.1.17-24>
8. Khats', R. V. (2009). Asymptotics of the logarithmic derivative and logarithm of a canonical product of genus zero. *Actual problems of physics, mathematics and informatics*, (1), 54–56. Retrieved from <http://ir.dspu.edu.ua/jspui/handle/123456789/6607> [in Ukrainian].
9. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of logarithmic derivatives of entire functions with improved distribution of zeros. *Actual problems of physics, mathematics and informatics*, (2), 41–43. Retrieved from <http://ir.dspu.edu.ua/jspui/handle/123456789/6628> [in Ukrainian].
10. Khats', R. V. (2010). Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray. *Mat. Stud.*, 33(2), 215–219. <https://doi.org/10.30970/ms.33.2.215-219> [in Ukrainian].
11. Khats', R. V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ.*, 5(1), 129–133. <https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.129-133>
12. Khats', R. V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J.*, 7(1), 114–120. <https://doi.org/10.31861/bmj2019.01.114>
13. Khats', R. V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ.*, 12(1), 46–54. <https://doi.org/10.15330/cmp.12.1.46-54>
14. Khats', R. V. (2022). Asymptotic behavior of a special canonical product. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 82–93. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).82-93](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).82-93) [in Ukrainian].
15. Logvinenko, V. N. (1972). On entire functions with zeros on the half-line. I. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 16, 154–158. Retrieved from <https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2155> [in Russian].
16. Logvinenko, V. N. (1973). On entire functions with zeros on the half-line. II. *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.* Kharkov. Issue 17, 84–99. Retrieved from <https://ekhnuir.karazin.ua/handle/123456789/2179> [in Russian].
17. Agranovich, P. Z., & Logvinenko V. N. (2000). Exceptional sets for entire functions. *Mat. Stud.*, 13(2), 149–156. Retrieved from http://matstud.org.ua/texts/2000/13_2/13_2_149-156.pdf
18. Agranovich, P. Z. (2005). Polynomial asymptotic representations of subharmonic functions with masses on one ray in the space. *Mat. Stud.*, 23(2), 169–178. <https://doi.org/10.30970/ms.23.2.169-178>
19. Borova, O. I., & Zabolots'kyi, M. V. (2003). Polynomial asymptotics of entire functions of finite order. *Ukr. Math. J.*, 55(6), 873–884. <https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010590.47798.4f>

20. Khats', R. V., & Yarmoshyk, V. P. (2025). A two-term asymptotics of entire functions with improved distribution of zeros on a ray. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 46(1), 119–132. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).119-132](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).119-132)
21. Gol'dberg, A. A., & Korenkov, N. E. (1978). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of an entire function of completely regular growth. *Ukr. Math. J.*, 30(1), 17–22. <https://doi.org/10.1007/BF01130625>
22. Gol'dberg, A. A., & Korenkov, N. E. (1980). Asymptotic behavior of logarithmic derivative of entire function of completely regular growth. *Sib. Math. J.*, 21(3), 363–375. <https://doi.org/10.1007/BF00968180>
23. Gol'dberg, A. A., & Strochik, N. N. (1985). Asymptotic behavior of meromorphic functions of completely regular growth and their logarithmic derivatives. *Sib. Math. J.*, 6(6), 802–809. <https://doi.org/10.1007/BF00969100>
24. Zabolotskii, N. V. (1999). Asymptotics of the logarithmic derivative of an entire function of zero order. *Ukr. Math. J.*, 51(1), 34–43. <https://doi.org/10.1007/BF02591912>
25. Volkovyskii, L. I., Lunts, G. L., & Aramanovich, I. G. (1965). *A Collection of Problems on Complex Analysis*. Dover Publications, Inc.: New York.
26. Kalynets', R. Z., & Kondratyuk, A. A. (1998). On the regularity of the growth of the modulus and argument of an entire function in the metric of $L^p[0; 2\pi]$. *Ukr. Math.*, 50(7), 1009–1018. <https://doi.org/10.1007/BF02528830>

Khats' R. V., Yarmoshyk V. P. The two-term asymptotics of the logarithmic derivative of a canonical product with improved distribution of zeros.

We investigate the connection between the regularity of the growth of the logarithmic derivative of an entire function of finite order and the improved distribution of its zeros on a positive ray in terms of the two-term asymptotics. In particular, for an entire function f of order $\rho \in (0; +\infty) \setminus \mathbb{N}$ defined by the Weierstrass canonical product of genus p , the asymptotic relation of the form

$$\left| f'(re^{i\varphi})/f(re^{i\varphi}) - H(\varphi; \Delta; \rho)r^{\rho-1} - H_1(\varphi; \Delta_1; \rho_1)r^{\rho_1-1} \right| \sin(\varphi/2) = o(r^{\rho_2-1}), \quad r \rightarrow +\infty,$$

holds uniformly in $\varphi \in (0; 2\pi)$ under the improved two-term asymptotics of a counting function of its zeros

$$n(t) = \Delta t^\rho + \Delta_1 t^{\rho_1} + o(t^{\rho_2}),$$

as $t \rightarrow +\infty$, where $\Delta \in (0; +\infty)$, $\Delta_1 \in \mathbb{R}$, $p = [\rho] < \rho_2 < \rho_1 < \rho < p + 1$, $H(\varphi; \Delta; \rho) \in L^1(0; 2\pi)$ and $H_1(\varphi; \Delta_1; \rho_1) \in L^1(0; 2\pi)$.

Keywords: canonical product, logarithmic derivative, two-term asymptotics, entire function of completely regular growth, improved distribution of zeros.

Отримано: 03.11.2025

Прийнято: 25.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

UDC 512.536

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).75-83](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).75-83)**A. Chornenka¹, O. Gutik²**

¹ Ivan Franko National University of Lviv,
Master of the Faculty of Mechanics and Mathematics
adriana.chornenka@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-2704-2943>

² Ivan Franko National University of Lviv,
Professor of the Department of Cybersecurity,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associative Professor
oleg.gutik@lnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8513-0282>

ON TOPOLOGIZATION OF SUBSEMIGROUPS OF THE BICYCLIC MONOID

We show that if a subsemigroup S of the bicyclic monoid $\mathcal{C}(p, q)$ contains infinitely many idempotents, then S admits only the discrete Hausdorff shift-continuous topology. Also we prove that every right-continuous (left-continuous) Hausdorff Baire topology on the upper subsemigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ (down subsemigroup $(\mathcal{C}_-(a, b))$) of $\mathcal{C}(p, q)$ is discrete and the same statement holds for the bicyclic monoid.

Keywords: bicyclic monoid, semitopological semigroup, left topological semigroup, right topological semigroup, Baire space, discrete.

1. Introduction.

In this paper we shall follow the terminology of [2,3,5,6,10,15,20]. By ω and \mathbb{N} we denote the set of non-negative integers and the set of positive integers, respectively.

A semigroup S is called *inverse* if for any element $x \in S$ there exists a unique $x^{-1} \in S$ such that $xx^{-1}x = x$ and $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. The element x^{-1} is called the *inverse of $x \in S$* . If S is an inverse semigroup, then the function $\text{inv}: S \rightarrow S$ which assigns to every element x of S its inverse element x^{-1} is called the *inversion*. On an inverse semigroup S the semigroup operation determines the following partial order \preceq : $s \preceq t$ if and only if there exists $e \in E(S)$ such that $s = te$. This partial order is called the *natural partial order* on S .

Definition 1. Let X, Y and Z be topological spaces. A map $f: X \times Y \rightarrow Z$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, is called

- (i) right (left) continuous if it is continuous in the right (left) variable; i.e., for every fixed $x_0 \in X$ ($y_0 \in Y$) the map $Y \rightarrow Z$, $y \mapsto f(x_0, y)$ ($X \rightarrow Z$, $x \mapsto f(x, y_0)$) is continuous;
- (ii) separately continuous if it is both left and right continuous;
- (iii) jointly continuous if it is continuous as a map between the product space $X \times Y$ and the space Z .

Definition 2 ([2,20]). Let S be a non-void topological space which is provided with an associative multiplication (a semigroup operation) $\mu: S \times S \rightarrow S$, $(x, y) \mapsto \mu(x, y) = xy$. Then the pair (S, μ) is called

- (i) a right topological semigroup if the map μ is right continuous, i.e., all interior left shifts $\lambda_s: S \rightarrow S$, $x \mapsto sx$, are continuous maps, $s \in S$;

- (ii) a left topological semigroup if the map μ is left continuous, i.e., all interior right shifts $\rho_s: S \rightarrow S, x \mapsto xs$, are continuous maps, $s \in S$;
- (iii) a semitopological semigroup if the map μ is separately continuous;
- (iv) a topological semigroup if the map μ is jointly continuous.

We usually omit the reference to μ and write simply S instead of (S, μ) . It goes without saying that every topological semigroup is also semitopological and every semitopological semigroup is both a right and left topological semigroup.

A topology τ on a semigroup S is called:

- a *semigroup* topology if (S, τ) is a topological semigroup;
- an *inverse semigroup* topology if (S, τ) is an inverse topological semigroup with continuous inversion;
- a *shift-continuous* topology if (S, τ) is a semitopological semigroup;
- a *left-continuous* topology if (S, τ) is a left topological semigroup;
- a *right-continuous* topology if (S, τ) is a right topological semigroup.

The bicyclic monoid $\mathcal{C}(p, q)$ is the semigroup with the identity 1 generated by two elements p and q subjected only to the condition $pq = 1$. The semigroup operation on $\mathcal{C}(p, q)$ is determined as follows:

$$q^k p^l \cdot q^m p^n = \begin{cases} q^{k-l+m} p^n, & \text{if } l < m; \\ q^k p^n, & \text{if } l = m; \\ q^k p^{l-m+n}, & \text{if } l > m. \end{cases}$$

It is well known that the bicyclic monoid $\mathcal{C}(p, q)$ is a bisimple (and hence simple) combinatorial E -unitary inverse semigroup and every non-trivial congruence on $\mathcal{C}(p, q)$ is a group congruence [5].

It is well known that topological algebra studies the influence of topological properties of its objects on their algebraic properties and the influence of algebraic properties of its objects on their topological properties. There are two main problems in topological algebra: the problem of non-discrete topologization and the problem of embedding into objects with some topological-algebraic properties.

In mathematical literature the question about non-discrete (Hausdorff) topologization of groups was posed by Markov [17]. Pontryagin gave well known conditions a base at the unity of a group for its non-discrete topologization (see Theorem 3.9 of [18]). In [19] Ol'shanskiy constructed an infinite countable group G such that every Hausdorff group topology on G is discrete. Taimanov presented in [21] a commutative semigroup \mathfrak{T} which admits only discrete Hausdorff semigroup topology and gave in [22] sufficient conditions on a commutative semigroup to have a non-discrete semigroup topology. In [11] it is proved that each T_1 -topology with continuous shifts on \mathfrak{T} is discrete. The bicyclic monoid admits only the discrete semigroup Hausdorff topology [9]. Bertman and West in [1] extended this result for the case of Hausdorff semitopological semigroups.

In the paper [4] we construct two non-discrete inverse semigroup T_1 -topologies and a compact inverse shift-continuous T_1 -topology on the bicyclic monoid $\mathcal{C}(p, q)$. Also we give conditions on a T_1 -topology τ on $\mathcal{C}(p, q)$ to be discrete. In particular, we show that if τ is an inverse semigroup T_1 -topology on $\mathcal{C}(p, q)$ which satisfies one

of the following conditions: τ is Baire, τ is quasi-regular or τ is semiregular, then τ is discrete.

Subsemigroups of the bicyclic monoid were studied in [7, 8, 16]. In [16] the following anti-isomorphic subsemigroups of the bicyclic monoid

$$\mathcal{C}_+(a, b) = \{b^i a^j \in \mathcal{C}(a, b) : i \leq j, i, j \in \omega\}$$

and

$$\mathcal{C}_-(a, b) = \{b^i a^j \in \mathcal{C}(a, b) : i \geq j, i, j \in \omega\}$$

are studied. In the paper [12] topologizations of the semigroups $\mathcal{C}_+(a, b)$ and $\mathcal{C}_-(a, b)$ are studied. In particular in [12] it proved that every Hausdorff left-continuous (right-continuous) topology on $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) is discrete and there exists a compact Hausdorff topological monoid S which contains $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) as a submonoid. Also, a non-discrete right-continuous (left-continuous) topology τ_+^p (τ_-^p) on the semigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) which is not left-continuous (right-continuous) is constructed. In [13] is proved that the monoid $\mathcal{C}_+(a, b)$ (resp., $\mathcal{C}_-(a, b)$) contains a family $\{S_\alpha : \alpha \in \mathfrak{c}\}$ of continuum many subsemigroups with the following properties: (i) every left-continuous (resp., right-continuous) Hausdorff topology on S_α is discrete; (ii) every semigroup S_α admits a non-discrete right-continuous (resp., left-continuous) Hausdorff topology which is not left-continuous (resp., right-continuous).

In this paper we show that if a subsemigroup S of the bicyclic monoid $\mathcal{C}(p, q)$ contains infinitely many idempotents, then S admits only the discrete Hausdorff shift-continuous topology. Also we prove that every right-continuous (left-continuous) Hausdorff Baire topology on the semigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) is discrete and the same statement holds for the bicyclic monoid.

2. Main results.

Theorem 1. *Let S be a subsemigroup of the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$. If S contains infinitely many idempotents, then every shift-continuous Hausdorff topology on S is discrete.*

Proof. Without loss of generality we may assume that the semigroup S is infinite.

Fix an arbitrary element $b^i a^j$ of S . Since the set $E(S)$ is infinite, there exists a positive integer i_0 such that $i_0 \geq \max\{i, j\} + 1$. Then the equalities

$$b^{i_0} a^{i_0} \cdot b^k a^l = \begin{cases} b^k a^l, & \text{if } i_0 \leq k; \\ b^{i_0} a^{i_0-k+l}, & \text{if } i_0 > k \end{cases}$$

and

$$b^k a^l \cdot b^{i_0} a^{i_0} = \begin{cases} b^k a^l, & \text{if } i_0 \leq l; \\ b^{i_0} a^{i_0-l+k}, & \text{if } i_0 > l, \end{cases}$$

where $b^k a^l \in S$, imply that $A_{i_0} = S \setminus (S b^{i_0} a^{i_0} \cup b^{i_0} a^{i_0} S)$ is a finite subset of S and $b^i a^j \in A_{i_0}$. Also the above equalities imply that the mappings $\rho_{i_0} : S \rightarrow S$, $b^k a^l \mapsto b^k a^l \cdot b^{i_0} a^{i_0}$ and $\lambda_{i_0} : S \rightarrow S$, $b^k a^l \mapsto b^{i_0} a^{i_0} \cdot b^k a^l$ are retractions, and hence by [10, 1.5.C] the set A_{i_0} is open in S . This implies that the point $b^i a^j$ has an open finite neighbourhood in S , and hence it is an isolated point in the space S . This completes the proof of the theorem.

Corollary 1. *If S is an inverse subsemigroup of the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$ then every shift-continuous Hausdorff topology on S is discrete.*

Proof. In the case when $S = E(S)$ the statement is trivial. Hence we assume that $S \neq E(S)$. Fix an arbitrary $b^i a^j \in S \setminus E(S)$. Without loss of generality we may assume that $i < j$. Since the semigroup S is inverse, we obtain that $b^j a^i \in S$. Then for any positive integer n the semigroup operation of the bicyclic semigroup implies that

$$\begin{aligned} (b^i a^j)^n &= b^i a^{i+n(j-i)} \in S \setminus E(S), \\ (b^j a^i)^n &= b^{i+n(j-i)} a^i \in S \setminus E(S), \end{aligned}$$

and hence

$$(b^j a^i)^n \cdot (b^i a^j)^n = b^{i+n(j-i)} a^i \cdot b^i a^{i+n(j-i)} = b^{i+n(j-i)} a^{i+n(j-i)}$$

is an idempotent of S for any positive integer n . Next we apply Theorem 1.

We need the following proposition.

Proposition 1. *Let S be an infinite subsemigroup of the bicyclic monoid $\mathcal{C}(a, b)$. If S does not contain infinitely many idempotents, then either $S \subset \mathcal{C}_+(a, b)$ or $S \subset \mathcal{C}_-(a, b)$.*

Proof. Suppose to the contrary that there exists an infinite subsemigroup S of the bicyclic monoid $\mathcal{C}(a, b)$ such that $|E(S)| < \infty$, $(S \setminus E(S)) \cap \mathcal{C}_+(a, b) \neq \emptyset$ and $(S \setminus E(S)) \cap \mathcal{C}_-(a, b) \neq \emptyset$. Then there exist $b^i a^{i+k} \in S \cap \mathcal{C}_+(a, b)$ and $b^{j+l} a^j \in S \cap \mathcal{C}_-(a, b)$ for some $i, j, k, l \in \omega$ with $k, l > 0$. Since S is a subsemigroup of the bicyclic monoid $\mathcal{C}(a, b)$, the semigroup operation of $\mathcal{C}(a, b)$ implies that for any positive integer p we have that

$$(b^i a^{i+k})^{lp} = b^i a^{i+kp} \in S \quad \text{and} \quad (b^{j+l} a^j)^{kp} = b^{j+kp} a^j \in S.$$

Hence we obtain that the following elements

$$b^i a^{i+kp} \cdot b^{j+kp} a^j = \begin{cases} b^j a^j, & \text{if } i < j; \\ b^i a^j, & \text{if } i = j; \\ b^i a^i, & \text{if } i > j \end{cases}$$

and

$$b^{j+kp} a^j \cdot b^i a^{i+kp} = \begin{cases} b^{i+kp} a^{i+kp}, & \text{if } j < i; \\ b^{j+kp} a^{i+kp}, & \text{if } j = i; \\ b^{j+kp} a^{j+kp}, & \text{if } j > i \end{cases}$$

are idempotents of S . Also by the last equality we get that the semigroup S contains an infinite subset of idempotents $\{b^{i+kp} a^{i+kp} : p = 1, 2, 3, \dots\}$, a contradiction. The obtained contradiction implies the statement of the proposition.

Next we define the p -adic topology on the set of integers \mathbb{Z} . Fix an arbitrary prime positive integer p . For any integer a and any positive integer k we put $U_k(a) = a + p^k \mathbb{Z}$. The topology τ_p which is generated by the base $\mathcal{B}_p = \{U_k(a) : a \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, 3, \dots\}$ is called the p -adic topology on \mathbb{Z} . It is well known that the additive group of integers with the p -adic topology τ_p is a non-discrete topological group [18]. This implies that the additive semigroup of non-negative (resp.

positive) integers $(\omega, +)$ (resp. $(\mathbb{N}, +)$) with the induced topology from (\mathbb{Z}, τ_p) is a non-discrete Hausdorff topological semigroup which we denote by τ_p . It is obvious that the family $\mathcal{B}_p = \{V_k(a) : a \in \mathbb{Z}, k = 1, 2, 3, \dots\}$, where $V_k(a) = a + p^k\omega$ is a base of the topology τ_p on $(\omega, +)$ $((\mathbb{N}, +))$.

We observe that there exist a non-discrete right-continuous (left-continuous) topology τ_p^+ (τ_p^-) on the semigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) which is not left-continuous (right-continuous) [12]. The topology τ_p^+ on $\mathcal{C}_+(a, b)$ is constructed in the following way. The semigroup operation of $\mathcal{C}_+(a, b)$ implies that for any non-negative integer n that

$$\mathcal{C}_+^n(a, b) = \{b^n a^{n+i} : i \in \omega\}$$

is a subsemigroup of $\mathcal{C}_+(a, b)$. Moreover the semigroup $\mathcal{C}_+^n(a, b)$ is isomorphic to the additive semigroup of non-negative integers $(\omega, +)$ by the mapping $\mathfrak{I}_n : \omega \rightarrow \mathcal{C}_+^n(a, b)$, $i \mapsto b^n a^{n+i}$. Then for any $b^n a^{n+i} \in \mathcal{C}_+(a, b)$ the mapping \mathfrak{I}_n generates the base of the topology τ_p^+ at the point $b^n a^{n+i}$ as the image of the base $\mathcal{B}_p(i)$ of the topology τ_p at the point i [12]. The topology τ_p^- on the semigroup $\mathcal{C}_-(a, b)$ is constructed by the dual way.

Theorem 1 and Proposition 1 motivate to pose the following question.

Question. Let S be a subsemigroup of the monoid $\mathcal{C}_+(a, b)$ which has no infinitely many idempotents. Does S admit shift-continuous (semigroup) Hausdorff topology?

Example 1. Fix and arbitrary $n, m \in \omega$ such that $m \leq n$. We define

$$\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b) = \bigcup_{k=m}^n \mathcal{C}_+^k(a, b).$$

The semigroup operation of $\mathcal{C}_+(a, b)$ implies that $\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ is a subsemigroup of $\mathcal{C}_+(a, b)$. Also it is obvious that the semigroup $\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ is isomorphic to the monoid $\mathcal{C}_+^{[0, n-m]}(a, b)$ by the mapping $b^s a^{s+i} \mapsto b^{s-m} a^{s-m+i}$.

For an arbitrary prime positive integer p we define a topology $\tau_p^{m,n}$ on $\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ in the following way. For any $b^i a^{i+j} \in \mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$ with $i + j \leq n$ the point $b^i a^{i+j}$ is isolated in $(\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b), \tau_p^{m,n})$. If $i + j > n$ then the family

$$\mathcal{B}_p^{m,n}(b^i a^{i+j}) = \{V_s(b^i a^{i+j}) : s \in \mathbb{N}\},$$

where $V_s(b^i a^{i+j}) = \{b^i a^{i+j+t} : t \in p^s\omega\}$, is a base of the topology $\tau_p^{m,n}$ at the point $b^i a^{i+j}$. It is obvious that $\tau_p^{m,n}$ is a Hausdorff non-discrete topology on $\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$.

Proposition 2. $\tau_p^{m,n}$ is a semigroup topology on $\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$.

Proof. Fix arbitrary $b^{i_1} a^{i_1+j_1}, b^{i_2} a^{i_2+j_2} \in \mathcal{C}_+^{[m,n]}(a, b)$. Then we have that

$$b^{i_1} a^{i_1+j_1} \cdot b^{i_2} a^{i_2+j_2} = \begin{cases} b^{i_2-j_1} a^{i_2+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 < i_2; \\ b^{i_1} a^{i_2+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 = i_2; \\ b^{i_1} a^{i_1+j_1+j_2}, & \text{if } i_1 + j_1 > i_2. \end{cases}$$

We consider all possible cases.

Suppose that $i_1 + j_1 \leq n$ and $i_2 + j_2 \leq n$. Then $b^{i_1}a^{i_1+j_1}$ and $b^{i_2}a^{i_2+j_2}$ are isolated points in the topological space $(\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a,b), \tau_p^{m,n})$, and hence in this case the semigroup operation is continuous.

Suppose that $i_1 + j_1 \leq n$ and $i_2 + j_2 > n$. Then $b^{i_1}a^{i_1+j_1}$ is an isolated point in $(\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a,b), \tau_p^{m,n})$. Simple verifications show that for any positive integer s we have that

$$\begin{aligned} b^{i_1}a^{i_1+j_1} \cdot V_s(b^{i_2}a^{i_2+j_2}) &= b^{i_1}a^{i_1+j_1} \cdot \{b^{i_2}a^{i_2+j_2+t} : t \in p^s\omega\} = \\ &= \begin{cases} \{b^{i_2-j_1}a^{i_2+j_2+t} : t \in p^s\omega\}, & \text{if } i_1 + j_1 < i_2; \\ \{b^{i_1}a^{i_2+j_2+t} : t \in p^s\omega\}, & \text{if } i_1 + j_1 = i_2; \\ \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t} : t \in p^s\omega\}, & \text{if } i_1 + j_1 > i_2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} V_s(b^{i_2-j_1}a^{i_2+j_2}), & \text{if } i_1 + j_1 < i_2; \\ V_s(b^{i_1}a^{i_2+j_2}), & \text{if } i_1 + j_1 = i_2; \\ V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}), & \text{if } i_1 + j_1 > i_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Suppose that $i_1 + j_1 > n$ and $i_2 + j_2 \leq n$. Then $b^{i_2}a^{i_2+j_2}$ is an isolated point in $(\mathcal{C}_+^{[m,n]}(a,b), \tau_p^{m,n})$ and $i_2 < i_1 + j_1$. By usual calculations for any positive integer s we get that

$$\begin{aligned} V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1}) \cdot b^{i_2}a^{i_2+j_2} &= \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t} : t \in p^s\omega\} \cdot b^{i_2}a^{i_2+j_2} = \\ &= \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t} : t \in p^s\omega\} = \\ &= V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}). \end{aligned}$$

Suppose that $i_1 + j_1 > n$ and $i_2 + j_2 > n$. Then $i_2 < i_1 + j_1$. By usual calculations for any positive integer s we have that

$$\begin{aligned} V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1}) \cdot V_s(b^{i_2}a^{i_2+j_2}) &= \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t_1} : t_1 \in p^s\omega\} \cdot \{b^{i_2}a^{i_2+j_2+t_2} : t_2 \in p^s\omega\} = \\ &= \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+t_1+j_2+t_2} : t_1, t_2 \in p^s\omega\} \subseteq \\ &\subseteq \{b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2+t} : t \in p^s\omega\} = \\ &= V_s(b^{i_1}a^{i_1+j_1+j_2}). \end{aligned}$$

The above arguments imply the statement of the proposition.

We recall that a topological space X is said to be *Baire* if for each sequence $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ of dense open subsets of X the intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is a dense subset of X [14].

Theorem 2. *Every right-continuous (left-continuous) Hausdorff Baire topology τ on the semigroup $\mathcal{C}_+(a,b)$ ($\mathcal{C}_-(a,b)$) is discrete.*

Proof. We shall prove the statement of the theorem only for the semigroup $\mathcal{C}_+(a,b)$, because the semigroups $\mathcal{C}_+(a,b)$ and $\mathcal{C}_-(a,b)$ are anti-isomorphic [12, 16].

Fix an arbitrary $b^{i_0}a^{j_0} \in \mathcal{C}_+(a,b)$. Since every left shift on $(\mathcal{C}_+(a,b), \tau)$ is continuous and $b^{i_0+1}a^{j_0+1}$ is an idempotent of $\mathcal{C}_+(a,b)$, the mapping $\lambda_{b^{j_0+1}a^{j_0+1}} : \mathcal{C}_+(a,b) \rightarrow \mathcal{C}_+(a,b)$, $b^s a^t \mapsto b^{j_0+1}a^{j_0+1} \cdot b^s a^t$ is a continuous retraction. Then by [10, 1.5.C] the retract $b^{j_0+1}a^{j_0+1}\mathcal{C}_+(a,b)$ is a closed subset of the topological space $(\mathcal{C}_+(a,b), \tau)$. It is obvious that $b^{i_0}a^{j_0} \notin b^{j_0+1}a^{j_0+1}\mathcal{C}_+(a,b)$.

We define

$$A_{j_0+1} = \{b^i a^j \in \mathcal{C}_+(a, b) : i + j \leq 2(j_0 + 1)\}.$$

Then A_{j_0+1} is a finite subset of $\mathcal{C}_+(a, b)$ and $b^{i_0} a^{j_0} \in A_{j_0+1}$. Since the space $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$ is Hausdorff, the set

$$S = \mathcal{C}_+(a, b) \setminus (A_{j_0+1} \cup b^{j_0+1} a^{j_0+1} \mathcal{C}_+(a, b))$$

is open in $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$, and hence by Proposition 1.14 of [14] the space S is Baire. By Proposition 1.30 of [14] the space S contains infinitely many isolated points in S , because the set S is infinite and countable. Then there exists a non-negative integer $x_0 \leq j_0$ such that the set $S_{x_0} = \{b^{x_0} a^y : y \geq x_0\}$ contains infinitely many isolated points of S . This implies that there exists a positive integer y_0 such that $y_0 - j_0 > x_0 \geq 0$, and hence $b^{x_0} a^{y_0+i_0-j_0} \in \mathcal{C}_+(a, b)$. The semigroup operation of $\mathcal{C}_+(a, b)$ implies that

$$b^{x_0} a^{y_0+i_0-j_0} \cdot b^{i_0} a^{j_0} = b^{x_0} a^{y_0},$$

because $y_0 + i_0 - j_0 > x_0 + i_0 > i_0$. Since $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$ is a left topological semigroup, we have that the set of solutions U of the equation

$$b^{x_0} a^{y_0+i_0-j_0} \cdot X = b^{x_0} a^{y_0}$$

is an open subset of $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$ which contains the point $b^{i_0} a^{j_0}$. By Lemma I.1.(ii) of [9] the set U is finite. Since $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$ is a Hausdorff space, the point $b^{i_0} a^{j_0}$ is isolated in $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau)$. This completes the proof of the theorem.

A topological space X is called *locally compact*, if for any point $x \in X$ there exists an open neighbourhood $U(x)$ such that the closure $\text{cl}_X(U(x))$ of $U(x)$ is a compact set [10]. Since every locally compact Hausdorff space is Baire [10], Theorem 2 implies the following corollary.

Corollary 2. *Every right-continuous (left-continuous) Hausdorff locally compact topology on the semigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ ($\mathcal{C}_-(a, b)$) is discrete.*

Remark 1. *In [12] a non-discrete non-Baire Hausdorff topology τ_p^+ on the semigroup $\mathcal{C}_+(a, b)$ such that $(\mathcal{C}_+(a, b), \tau_p^+)$ is a metrizable right topological semigroup is constructed.*

Theorem 3 extends results of Theorem 1 from [4] onto Hausdorff right topological and left topological semigroups.

Theorem 3. *Every right-continuous (left-continuous) Hausdorff Baire topology τ on the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(a, b)$ is discrete.*

The proof of Theorem 3 is similar to Theorem 2.

Theorem 3 implies

Corollary 3. *Every right-continuous (left-continuous) Hausdorff locally compact topology on the bicyclic semigroup $\mathcal{C}(a, b)$ is discrete.*

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Contributions of authors

Chornenka, A.: Proofs of Main theorems, Writing — review & editing, Gutik, O.: Supervision, Proofs of Supporting Propositions, Construction of Examples, — review & editing.

Copyright ©



(2026). Chornenka A., Gutik O. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

- Bertman, M. O., & West, T. T. (1976). Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups. *Proc. Roy. Irish Acad.*, A76(21), 219–226. <https://www.jstor.org/stable/20489047>
- Carruth, J. H., Hildebrandt, J. A., & Koch, R. J. (1983). *The Theory of Topological Semigroups*. Vol. I. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.
- Carruth, J. H., Hildebrandt, J. A., & Koch, R. J. (1986). *The Theory of Topological Semigroups*. Vol. II. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc.
- Chornenka, A., & Gutik O. (2023). On topologization of the bicyclic monoid. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 95, 46–56. <https://doi.org/10.30970/vmm.2023.95.046-056>
- Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1961). *The algebraic theory of semigroups*. Vol. I. Providence, R.I., Amer. Math. Soc. Surveys 7.
- Clifford, A. H., & Preston, G. B. (1967). *The algebraic theory of semigroups*. Vol. II. Providence, R.I., Amer. Math. Soc. Surveys 7.
- Descalço, L., & Ruškuc N. (2005). Subsemigroups of the bicyclic monoid. *Int. J. Algebra Comput.*, 15(1), 37–57. <https://doi.org/10.1142/S0218196705002098>
- Descalço, L., & Ruškuc N. (2008). Properties of the subsemigroups of the bicyclic monoid. *Czech. Math. J.*, 58(2), 311–330. <https://doi.org/10.1007/s10587-008-0018-7>
- Eberhart, C., & Selden J. (1969). On the closure of the bicyclic semigroup. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 144, 115–126. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1969-0252547-6>
- Engelking, R. (1989). *General topology*. 2nd ed. Berlin: Heldermann.
- Gutik, O. (2016). Topological properties of the Taimanov semigroup. *Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc.*, 13, 1–5.
- Gutik, O. (2024). On non-topologizable semigroups. *Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat.*, 96,

- 25–36. <https://doi.org/10.30970/vmm.2024.96.025-036>
13. Gutik, O. (2026). On semigroups which admit only discrete left-continuous Hausdorff topology. *Preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.19881>
 14. Haworth, R. C., & McCoy, R. A. (1977). *Baire Spaces*. Warszawa: PWN, Dissertationes Math. Vol. 141.
 15. Lawson, M. (1998). *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, Singapore: World Scientific.
 16. Makanjuola, S. O., & Umar, A. (1997). On a certain subsemigroup of the bicyclic semigroup. *Commun. Algebra*, 25(2), 509–519, <https://doi.org/10.1080/00927879708825870>
 17. Markov, A. A. (1945). On free topological groups. *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 9(1), 3–64 [in Russian].
 18. Pontryagin, L. S. (1966). *Topological Groups*. New York: Gordon & Breach.
 19. Ol'shanskiy, A. Yu. (1980). Remark on countable non-topologized groups. *Vestnik Moscow Univ. Ser. Mech. Math.*, 39, 1034 [in Russian].
 20. Ruppert, W. (1984). *Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory*. Berlin: Springer. Lect. Notes Math., Vol. 1079. <https://doi.org/10.1007/BFb0073675>
 21. Taimanov, A. D. (1973). An example of a semigroup which admits only the discrete topology. *Algebra Logic*, 12(1), 64–65. <https://doi.org/10.1007/BF02218642>
 22. Taimanov, A. D. (1975). The topologization of commutative semigroups. *Math. Notes*, 17(5), 443–444. <https://doi.org/10.1007/BF01155800>

Чорненька А., Гутік О. Про топологізацію піднапівгруп біциклічного моноїда.

Ми доводимо якщо піднапівгрупа S біциклічного моноїда $\mathcal{C}(p, q)$ містить нескінченну кількість ідемпотентів, то кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на S дискретна. Також доведено, що кожна неперервна справа (неперервна зліва) гаусдорфова берівська топологія на верхній піднапівгрупі $\mathcal{C}_+(a, b)$ (нижній піднапівгрупі $\mathcal{C}_-(a, b)$ біциклічної напівгрупи $\mathcal{C}(p, q)$ дискретна, а також, що це твердження виконується і для біциклічного моноїда.

Ключові слова: біциклічний моноїд, напівтопологічна напівгрупа, ліва топологічна напівгрупа, права топологічна напівгрупа, берівський простір, дискретний.

Received: 10.12.2025

Accepted: 12.01.2026

Published: 29.01.2026

UDC 519.177:[512.643.12:512.643.93](045)

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).84-95](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).84-95)

N. A. Yakimova

Odessa I. I. Mechnikov National University,
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Differential Equations,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
nataliya_yakimova@onu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8577-2775>

PECULIARITIES OF MATRIX EXECUTION OF SOME BINARY OPERATIONS ON ARBITRARY GRAPHS

Graph theory has a wide range of practical applications. Graphs play an important role in scientific research (e.g., electrical circuits) and also surround us in everyday life (e.g., road and path maps). For everyday use, the geometric implementation of graphs is certainly the most convenient. But for computer information processing, this is not rational. In these cases, algebraic, namely matrix representation of graphs is used. Therefore, research devoted to this topic is becoming increasingly important. This article proves the possibility of algebraically performing some binary operations on adjacency matrices representing graphs. These methods have their own peculiarities and limitations, which are emphasized in this article.

Keywords: directed and undirected graph, adjacency matrix, incidence matrix, operations on graphs, elementary logical operations, Boolean matrix, multivalued logic.

1. Introduction. Today, science faces ever-new challenges. Systematization and digitalization, which permeate all spheres of human activity, require the establishment of interdisciplinary connections between branches of science that have historically been separated from each other by the division into purely humanitarian and natural sciences. Graph theory has been an applied branch of discrete mathematics since its inception. Its applications in natural and computer sciences have become commonplace and are not surprising to ordinary users. But in recent years, artificial intelligence systems that use natural language modeling to create interfaces of any level have been rapidly developing. In this regard, graph theory has also found its application in linguistics [1]. The mathematical basis for computer processing of natural speech includes models that use the geometric apparatus of graph theory. It allows us to visually depict the connections between elements of various systems. When studying a system of objects connected by some arbitrary types of relationships, both directed and undirected graphs can be used. Each such system is an ordered collection of elements with which certain changes can occur. At the same time, each such specific system can be represented graphically as a graph or in digital format as an adjacency matrix or incidence matrix of such a graph. In any case, changes in the elements of the system or the results of the interaction of different such systems are reflected by operations on the vertices or edges of the corresponding graphs. But computer processing of information involves its digital representation in matrix form. Therefore, a topical task is to study the regularities of transformations of arbitrary graphs precisely in matrix representation without resorting to their geometric implementation.

2. Statement of the task. The geometric implementation of all operations on graphs has already been well studied and described [2]. The classical algebraic

matrix apparatus is also widely represented in mathematical research [3]. This article aims to establish a correspondence between known operations on matrices and some operations on elements of an arbitrary graph or operations that reflect the interaction of several graphs. In this case, any known algebraic apparatus for processing matrices of various nature can be involved. Intuitively, the algorithms for such processing of adjacency and incidence matrices of arbitrary graphs are clear [4], but they require rigorous mathematical proof. The presence of a mathematical justification for these algorithms makes it possible to use the geometric representation of graphs only at the first (initial description of the system) and last (visual representation of the final result of the system's functioning) stages. In addition, in this way, a transition can be made from a geometric to an algebraic method of not only representing, but also processing various information, which greatly facilitates its computer processing.

3. Review of literature. In [5], algorithms for characterizing any arbitrary graph by all its matrices are described in detail, as well as algorithms for transitioning between different matrix representations of the same graph without restoring its geometric realization. The classical literature on linear algebra describes possible arithmetic operations on arbitrary matrices [3, 6]. The works [7, 8, 9] describe in detail algorithms for performing logical operations on Boolean and predicate logical matrices in two-valued logic. The apparatus of multivalued logic is investigated in [10, 11]. Generalizing these mathematical methods, it can be stated that if matrices are Boolean, then both ordinary algebraic operations on matrices and operations of two-valued logic described in [8, 9] can be performed with them. If matrices are not Boolean, then to perform logical operations of disjunction and conjunction with them, it is necessary to use the apparatus of multivalued logic. In this case, the operations of disjunction and conjunction of matrix elements are performed according to the following rules [10]:

$$a \vee b = \max\{a, b\}, \quad (1)$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad (2)$$

But both logical and arithmetic operations on matrices require certain conditions regarding their dimensionality [3, 7].

The classical literature on graph theory [2, 11, 12, 13] considers operations on graphs exclusively in geometric representation. Single attempts to perform some of these operations matrix-wise consider only the cases of simple graphs with the same number of vertices, using for this purpose the apparatus of exclusively classical two-valued logic [14] without additional preliminary matrix transformations. Pseudographs and multigraphs remain outside the scope of these studies. But in practice, different systems represented by geometric implementations of graphs do not always have the same number of objects (nodes). Therefore, the graphs corresponding to them will have a different number of vertices. This implies a different dimension of their adjacency matrices. Neither logical nor arithmetic operations can be performed on such matrices. This obstacle can be avoided by reducing both matrices to the same dimension by introducing additional identically named all-zero rows and columns into them. According to the characterization of graphs by their adjacency matrices, such pairs will correspond to isolated vertices [5, 15]. The new

extended adjacency matrices of both graphs participating in the operation will have the same dimension. Implementing such matrix expansion can lead to irrational use of the memory required to store this amount of information. This becomes especially relevant in cases where such a reduction required multiple execution of the operation of inserting an isolated vertex. The matrices become very sparse and their processing is too cumbersome. However, this obstacle can be avoided if the obtained extended adjacency matrices of the studied graphs are presented in the form of binary predicates [16]. This representation allows to significantly reduce the amount of memory used. The computer procedure for performing operations on logical matrices does not require additional space for storing information about their zero elements, storing the coordinates of only significant cells of both the studied and the obtained new matrices. As already noted above, this article aims only to mathematically prove the principle possibility of matrix execution of binary operations on graphs. Therefore, in this paper, to simplify the illustration of the obtained results, graphs that have the same number of vertices in advance are considered as examples. It is also assumed that vertices with the same numbers in these graphs have the same applied content load.

As is known, graphs are isomorphic if and only if their adjacency matrices can be obtained from each other by simultaneous permutations of the same-named rows and columns (i.e., simultaneously with the permutation of the i -th and j -th rows of the matrix, the permutation of the i -th and j -th columns of the matrix also occurs) [2]. From this fact it follows that using an isomorphism transformation for each graph in the extended adjacency matrix, new isolated vertices will correspond to such row-column pair numbers that reflect vertices that are absent in one graph but present in the other graph.

4. Main result. Let's consider the basic operations on graphs.

Theorem 1. *The adjacency matrix of the result of the graph union operation corresponds to the disjunction of the adjacency matrices of the graphs being joined.*

Proof. By definition, the graph H is the union of the graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$, if $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. If the graphs being joined have the same number of vertices, then the set of vertices of the graph H coincides with the sets of vertices of the graphs G_1 and G_2 , i.e. $V_1 \cup V_2 = V_1 = V_2$. In this case, their adjacency matrices $A(H)$, $A(G_1)$ and $A(G_2)$ will have the same dimension, so any operations can be performed with them without additional preliminary transformations. If the number of vertices in the graphs under study is different or has a different semantic load and, as a result, different numbering, then after introducing additional zero row-column pairs, we obtain matrices of the same dimension. By permutations, each of these matrices can be reduced to matrices of graphs isomorphic to the original ones, where all vertices have the same numbering, which corresponds to their meaningful loading. The elements of the adjacency matrix correspond to the number of edges connecting the corresponding vertices. Therefore, if in at least one of the graphs the vertices are adjacent, i.e. connected by a certain number of edges, then in the adjacency matrix of the union of these graphs the specified vertices will be connected by the same number of edges. This corresponds to the definition of the disjunction operation in its multivalued sense according to formula (1). Thus, to calculate the adjacency matrix of the result of the union of two arbitrary graphs, it is necessary

to perform the disjunction operation of the adjacency matrices of these graphs. The theorem is proved.

We will illustrate the result of this theorem with an example. Consider the two directed graphs shown in Fig. 1.

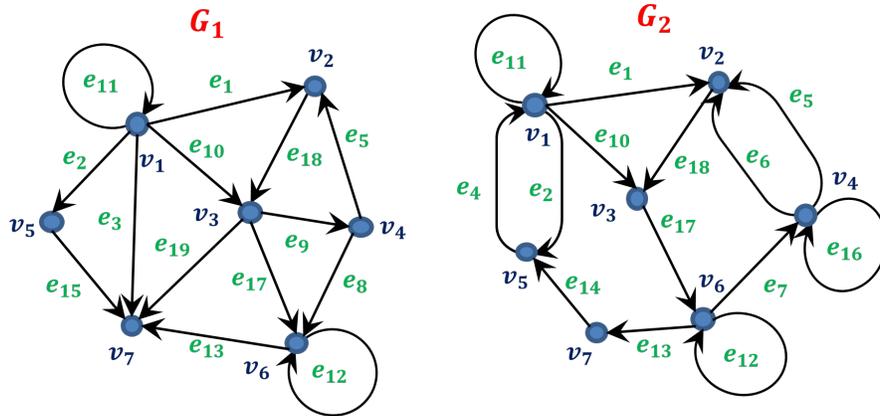


Figure 1. Directed graphs G_1 and G_2 .

For both of these graphs, we can construct adjacency matrices:

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

These matrices are constructed assuming that the row number corresponds to the starting vertex and the column number corresponds to the final vertex of each edge. But these graphs can be defined by these matrices from the very beginning. Performing operations on such graphs does not require reproduction of their geometric implementation [4].

The graph G_1 does not contain multiple edges, so its adjacency matrix is Boolean. Graph G_2 contains strictly parallel edges $e_5(v_4, v_2)$ and $e_6(v_4, v_2)$. Therefore, its adjacency matrix contains the element $a_{42} = 2$, i.e. it is not Boolean [8, 9]. But if we take into account that the disjunction operation for multivalued logic is performed according to rule (1), then the disjunction for these matrices takes the form [4, 17]:

$$A(G_1) \vee A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\cup}.$$

If the union operation of the specified graphs is performed geometrically, then we will get the graph shown in Fig. 2.

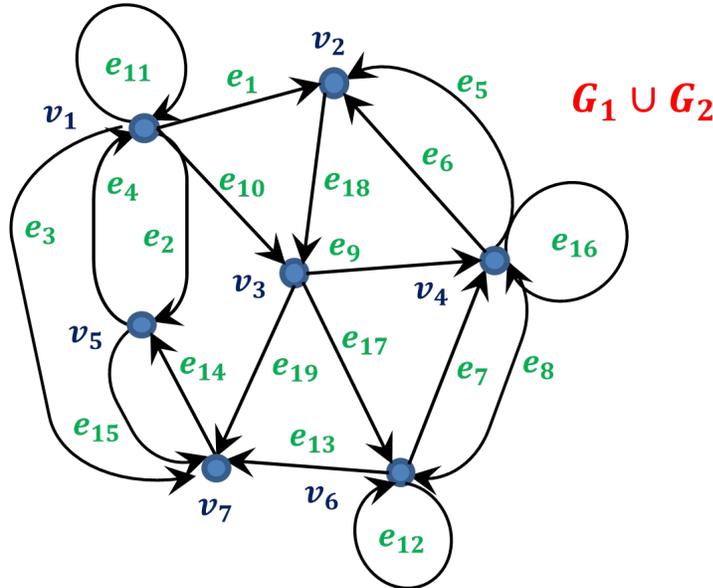


Figure 2. Graph $G_1 \cup G_2$.

It is easy to see that the adjacency matrix A_{\cup} corresponds to this graph.

Theorem 2. *The adjacency matrix of the result of the graph intersection operation corresponds to the conjunction of the adjacency matrices of the intersecting graphs.*

Proof. By definition, the graph F is the intersection of the graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$, if $F = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. If the graphs being joined have the same number of vertices, then the set of vertices of the graph F coincides with the sets of vertices of the graphs G_1 and G_2 , i.e. $V_1 \cap V_2 = V_1 = V_2$. In this case, their adjacency matrices $A(F)$, $A(G_1)$ and $A(G_2)$ will have the same dimension, so any operations can be performed with them without additional preliminary transformations.

If the sets of vertices in the graphs under study do not coincide, then, as in the case of unification graphs, after introducing additional zero row-column pairs, we obtain matrices of the same dimension, which are transformed into matrices of graphs isomorphic to the original graphs. The elements of the adjacency matrix correspond to the number of edges connecting the corresponding vertices. Therefore, if in at least one of the graphs any two vertices are connected by a smaller number of edges than in the second graph, then in the adjacency matrix of the intersection of these graphs the specified vertices will be connected by the same smaller number

of edges. This corresponds to the definition of the conjunction operation in its multivalued sense according to formula (2). Thus, to calculate the adjacency matrix of the result of the intersection of two arbitrary graphs, it is necessary to perform the conjunction operation of the adjacency matrices of these graphs. The theorem is proved.

Let us illustrate this theorem using the example of the graphs shown in Fig. 1. As already noted, for multivalued logic the conjunction operation is performed according to rule (2), so the conjunction for the matrices $A(G_1)$ and $A(G_2)$ takes the form:

$$\begin{aligned}
 A(G_1) \wedge A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\cap}.
 \end{aligned}$$

If the intersection of the specified graphs is performed geometrically, we will get the graph shown in Fig. 3.

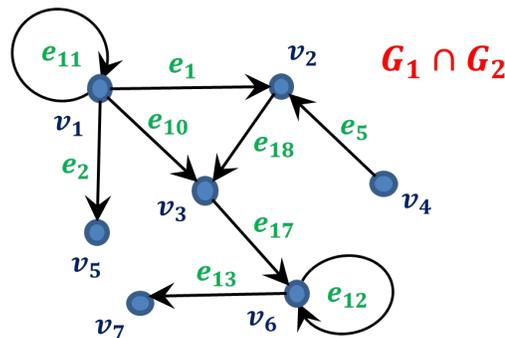


Figure 3. Graph $G_1 \cap G_2$.

It is easy to see that the adjacency matrix A_{\cap} corresponds to this graph [4].

Theorem 3. *The adjacency matrix of the result of performing the ring sum operation of graphs corresponds to the arithmetic subtraction of the adjacency matrices of the union and intersection of the graphs that participate in the specified operation.*

Proof. By definition, a graph R is a ring sum of graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ if it does not contain isolated vertices and consists of edges belonging to either graph G_1 or graph G_2 , but not to both simultaneously, i.e. [17]

$$E = \{(E_{G_1} \cup E_{G_2}) \setminus (E_{G_1} \cap E_{G_2})\}. \tag{3}$$

The set of edges $E_{G_1} \cup E_{G_2}$ is the result of the graphs union operation, and the set $E_{G_1} \cap E_{G_2}$ is the result of their intersection. This means that the matrix

$$A(R) = A_{\cup} - A_{\cap} = (A(G_1) \vee A(G_2)) - (A(G_1) \wedge A(G_2)), \quad (4)$$

will contain complete information about all edge-connected vertices of the graph R , i.e. will be its adjacency matrix in the extended sense. The theorem is proved.

By the definition of a ring sum of graphs, the graph obtained as a result of this operation cannot contain isolated vertices. Therefore, if they appear, they must be deleted from the resulting graph. Deleting a vertex from the graph entails deleting all edges incident to it, that is, deleting all connections of this object or node with other objects or nodes [4, 18]. This means that when deleting the vertex v_i from the adjacency matrix, it is necessary to delete the i -th row and i -th column. In this regard, the algorithm for performing the operation of deleting the vertex v_i from the graph in the matrix representation is similar to the algorithm for constructing the minor M_{ii} for the adjacency matrix of this graph [6]. The algorithm for deleting rows and columns from the matrix is already computerized. In this case, the software implementation will provide two shifts: for rows and columns [4, 17].

A sign of an isolated vertex in the adjacency matrix is the presence of a row and column of the same name that are all zero [5]. According to the described algorithm, this zero row-column pair should be removed from the extended adjacency matrix of the ring sum of graphs if such a pair appeared as a result of the procedure described in Theorem 3. The final matrix obtained as a result of these actions will be the adjacency matrix of the ring sum of the graphs under study.

Let us illustrate the result of Theorem 3 using the example of the graphs shown in Fig. 1. For these graphs, the matrices A_{\cup} and A_{\cap} have already been obtained. Therefore,

$$\begin{aligned} A_{\cup} - A_{\cap} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\oplus}. \end{aligned}$$

This matrix does not contain all zero row-column pairs. This means that the ring sum operation did not result in any isolated vertices that would be subsequently deleted from the resulting graph. Therefore, the obtained adjacency matrix does not require further processing by constructing its corresponding minor. Thus, the

resulting matrix is the final adjacency matrix of the ring sum of the considered graphs.

If we perform the ring sum operation of graphs G_1 and G_2 geometrically, we obtain the graph shown in Fig. 4.

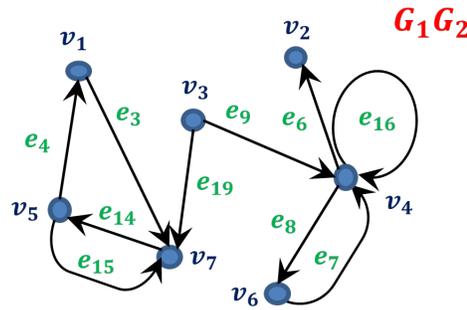


Figure 4. Graph $G_1 \oplus G_2$.

For this graph, it is also easy to see that the adjacency matrix A corresponds to it.

Theorem 4. *If two graphs do not contain multiple edges, or their number between corresponding vertices in these graphs differs by no more than one, then the adjacency matrix of the ring sum of these graphs can be obtained as a result of the sum modulo 2 operation of their adjacency matrices.*

Proof. As in the cases of graph union and intersection, first, if necessary, it is necessary to construct extended adjacency matrices for both graphs in order to achieve their same dimension. After that, using the isomorphism transformation, they should be reduced to matrices corresponding to the graphs under study. After that, the following situations are possible for the obtained adjacency matrices.

- A) If the graphs do not contain multiple edges at all, then their adjacency matrices are Boolean. In this case, if two vertices are adjacent in both graphs (in the case of a directed graph, the vertices in both graphs are connected by the same directed edge), then in both matrices there will be ones at the corresponding place. But the given edge is not included in the result of the ring sum of these graphs. Therefore, in the adjacency matrix of the result, the corresponding element must be equal to zero. If two vertices are adjacent in only one graph, then such an edge will be an element of the ring sum of these graphs, that is, the corresponding element of the adjacency matrix of the result will be equal to one. If the vertices are not adjacent in any graph, then the result of the ring sum will also not be adjacent, i.e. the corresponding element of the result's adjacency matrix will be equal to zero. All this corresponds to the sum modulo 2 as an elementary Boolean operation.
- B) In general, the sum modulo 2 is defined as the remainder of dividing the sum of the corresponding numbers by 2. If two vertices in both graphs are connected by the same number of q -multiple edges, then the sum of these edges will be equal to $2q$, which is an even number. The remainder of dividing such a number by 2 will always be zero, i.e. the corresponding matrix element will be equal to zero. This means that no multiple edge common to both graphs will be an

element of the ring sum of graphs, which corresponds to the definition of this operation.

- C) If any two vertices in both graphs are connected by multiple edges, and the number of these edges differs by more than one, then the number of multiple edges between the vertices when performing the ring sum of graphs must be equal to this number. This means that the corresponding element of the adjacency matrix of the result of this operation must be greater than one. But such a number cannot be the result of the sum modulo 2 operation. In this case, to calculate the adjacency matrix of the ring sum of graphs, we must use the formula (4) proposed by Theorem 3.
- D) If the number of multiple edges connecting two vertices in both graphs differs by exactly one, then these numbers can be denoted as k and $k + 1$. It follows from this that

$$(k + k + 1) \bmod 2 = (2k + 1) \bmod 2 = 1.$$

So, in this situation, the result of the sum modulo 2 is indeed equal to the number of edges that are different among the multiple edges between the two vertices. Incidentally, situation A) can be considered a special case of this situation.

The theorem is proven.

Let us illustrate the result of Theorem 4 with an example. Let us perform the sum modulo 2 operation with the given matrices $A(G_1)$ and $A(G_2)$, keeping in mind its general definition as the remainder of dividing the corresponding sum by 2 [4]. The indicated matrices correspond to situation D) described in Theorem 4.

$$\begin{aligned} A(G_1) \oplus A(G_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\oplus}. \end{aligned}$$

This matrix coincides with the matrix A for the ring sum of graphs G_1 and G_2 , calculated by formula (4), that is, the adjacency matrix of the graph obtained as a result of the ring sum of two graphs can be calculated in the this way. The results of Theorem 3 and Theorem 4 clearly shows that for matrix execution of operations on graphs, the simultaneous use of both arithmetic and logical operations is permissible.

5. Conclusions and prospects for further research. In the graphs considered as example, each edge is given a serial number. In practical application, these numbers may mean a certain content load. But with matrix display, this content can

be lost. The matrix reflects the presence or absence of an edge, that is, the presence or absence of a connection between objects. Therefore, if in two graphs between two vertices the same edge has a different content load (for example, a road and a dirt road), then the adjacency matrix will only show the presence or absence of this connection without explaining its nature. But usually, in practical applications, information about the presence of a connection is sufficient, therefore, for binary operations on directed graphs [17], the use of elementary multivalued logic operations on adjacency matrices according to proven algorithms is an effective mathematical tool. The same algorithms have differences depending on whether directed or free graphs are involved in the considered operations. Depending on the types of graphs, there are also restrictions on the display of meaningful information by the matrices of these graphs. But in practical applications, these restrictions are usually insignificant. Therefore, for each operation on graphs and each type of graph, it is possible to propose a combination of algebraic operations (arithmetic and logical) that allow obtaining the matrix of a new graph, or a clear, easily programmable algorithm for transforming the matrices of the initial graphs [4, 19]. None of the considered operations on graphs is impossible in the matrix implementation. The proposed algorithms can significantly simplify the computer processing of graphs.

With certain restrictions, the obtained results can be extended to the representation of graphs by incidence matrices. From the adjacency matrix, one can always go to the incidence matrix of a graph without restoring its geometric realization. For undirected graphs, incidence matrices are always Boolean [8]. Therefore, operations on them do not require the involvement of the multivalued logic apparatus. However, even in the case of the same number of vertices and edges, as for the adjacency matrix, one must pay attention to the numbering (naming) of these objects. Both the vertex sets and the edge sets for two graphs can be equivalent, but not identical [5]. In this case, the incidence matrices of the graphs under study also require a preliminary expansion procedure. However, the resulting zero columns in the incidence matrix are a sign of a loop. Exceptions may be undirected hypergraphs, where the loop feature is a single unit in the column. Constructing an adjacency matrix for hypergraphs is a very cumbersome procedure [20]. Therefore, the next direction of research should be to perform operations on hypergraphs using incidence matrices, the construction of which in this case does not cause difficulties. Therefore, it is these matrix models that can become an acceptable mathematical apparatus for studying complex systems represented by hypergraphs.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The study was conducted without financial support.

Data availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Copyright ©



(2026). Yakimova N. A. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Yakimova, N. A. (2008). Variants of formalization of natural language sentences and their graphical representation. *Opera annua in linguistica generalis*. Odessa: Astroprint, (8–9), 302–308 [In Ukrainian].
2. Kapitonova, Yu. V., Kryvyy, S. L., Letychevskiy, O. A., Lutzkiy, G. M., & Pechurin, M. K. (2002). *Foundation of Discrete Mathematics*. Kyiv: Naukova dumka [In Ukrainian].
3. Gantmacher, F. R. (2010). *The Theory of matrices*. Kyiv: Nadrukovano v Ukraine [In Ukrainian].
4. Yakimova, N. A., & Klishin, N. E. (2022). Matrix representation of operations on graphs. *Researches in mathematics and mechanics*, 27(1–2(38–39)), 121–141. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2\(39-40\).294314](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2022.1-2(39-40).294314) [In Ukrainian].
5. Yakimova, N. A. (2021). *Discrete Math. Part 1. Set theory. Graf theory*. Odessa: ONU im. I. I. Mechnikova [In Ukrainian].
6. Zykov, A. A. (2007). *Lectures on algebra*. Odessa: Astroprint [In Ukrainian].
7. Yakimova, N. A. (2024). Operation of reversing of logical matrices. *SWorldJournal*, 27(1), 165–172. <https://doi.org/10.30888/2663-5712.2024-27-00-017>
8. Yakimova, N. A. (2019). Predicative logical matrices. *Visnyk Odes'kogo Natzional'nogo universitetu. Researches in Mathematics and Mechanics*, 24(2(34)), 67–74. [https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2\(34\).190052](https://doi.org/10.18524/2519-206x.2019.2(34).190052) [In Ukrainian].
9. Yakimova, N. A. (2023). Operations on block predicate matrices. *Researches in mathematics and mechanics*, 28(1–2(41–42)), 185–199. [https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2\(41-42\).305269](https://doi.org/10.18524/2519-206X.2023.1-2(41-42).305269) [In Ukrainian].
10. Matvienko, M. P. (2012). *Computer logic*. Kyiv: Lira-K [In Ukrainian].
11. Kotzovskiy, V. M. (2016). *Discrete Mathematics and theory of algorithms*. Uzhgorod: UNU [In Ukrainian].
12. Nikolaeva, K. V., & Koybichuk, V. V. (2007). *Discrete analysis. Graphs and their applications in economics*. Sumy: UABS NBU [In Ukrainian].
13. Mikhaileenko, V. M., Fedorenko, N. D., & Demchenko, V. V. (2003). *Discrete Mathematics*. Kyiv: European University [In Ukrainian].
14. Serpinska, O. I., Terentjev, O. O., Balina, O. I., Bezklubenko, I. S., & Ryabchun, Yu. V. (2023). *Discrete Mathematics*. Kyiv: KNUBA [In Ukrainian].
15. Yakimova, N. A., & Klishin, N. E. (2024). Binary operations on graphs in matrix representation. In *Proceedings of the XXX International Scientific and Practical Conference «Youth, education and science through today's challenges»*, Porto: Portugal, 120–125. <https://doi.org/10.46299/ISG.2024.1.30> [In Ukrainian].
16. Yakimova, N. A. & Simonova, I. G. (2007). Binary predicates as a main of representation Boolean logic objects. *Researches in mathematics and mechanics*, 12(7), 174–184 [In Ukrainian].

17. Yakimova, N. A., & Sharai, N. V. (2024). Performing some operations on graphs using adjacency matrices. In *Proceedings of the 10th International Scientific and Practical Conference «Theory and Practice of Science: Key Aspects»*, Rome: Italy, 184–196. <https://doi.org/10.51582/interconf.19-20.09.2024.019>
18. Yakimova, N. A. (2025). Possibility of matrix representation of basic unary operations on graphs. *SWorldJournal*, 30(2), 147–153. <https://doi.org/10.30888/2663-5712.2025-30-02-013>
19. Kruglov, V. E., & Yakimova, N. A. (2025). Predicate model of some operations on logic matrices. In *Proceedings of the 14th International Scientific and Practical Conference «International Forum: Problems and scientific solutions»*, Melbourne: Australia, 249–254. <https://doi.org/10.51582/interconf.2024.231>
20. Yakimova, N. A. (2026). Economic interpretation of some operations on undirected hypergraphs. *Grail of Science*, 61, 265–275. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.23.01.2026.027>

Якімова Н. А. Особливості матричного виконання деяких бінарних операцій над довільними графами.

Теорія графів має широке розповсюдження з практичної точки зору. Графи відіграють важливу роль в наукових дослідженнях (наприклад, електросхеми), а також оточують нас у повсякденному житті (наприклад, карти доріг та шляхів). Для побутового застосування, безумовно, найзручнішою є геометрична реалізація графів. Але для комп'ютерної обробки інформації це не є раціональним. В цих випадках використовується алгебраїчне, а саме матричне подання графів. Тому все більшого значення набувають дослідження, присвячені саме цій темі. В даній статті доведено можливість алгебраїчного виконання деяких бінарних операцій над матрицями суміжності, якими подано графи. Ці методи мають свої особливості та обмеження, на яких зроблено акцент в даній статті.

Ключові слова: орієнтований та неорієнтований граф, матриця суміжності, матриця інцидентності, операції над графами, елементарні логічні операції, булева матриця, багатозначна логіка.

Received: 29.11.2025

Accepted: 17.12.2025

Published: 29.01.2026

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).96-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).96-102)**О. А. Ярова**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцентка кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

oksana.yarova@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6284-1193>

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ СУМІШІ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ВІДНОВЛЕННЯ

Дана стаття присвячена дослідженню розв'язків багатовимірних рівнянь відновлення. Розглядаються суміші рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу. Рівняння відновлення представлені в матричній формі. Метою статті є асимптотична поведінка розв'язку. Основний результат полягає в доведенні теореми про граничне представлення процесу відновлення в нелінійній апроксимації.

Ключові слова: рівняння відновлення, функція відновлення, суміш, процес з незалежними приростами, слабка збіжність.

1. Вступ. Багатовимірні рівняння відновлення посідають важливе місце в сучасній теорії стохастичних процесів, оскільки вони описують широкий спектр систем із випадковими моментами оновлення. Такі моделі природно виникають у задачах теорії черг, надійності, випадкової еволюції та різних форм стохастичної динаміки. Питання граничної поведінки багатовимірних процесів відновлення досліджувалися у низці робіт, зокрема у працях, присвячених матричним рівнянням відновлення та їх асимптотичним властивостям [1, 3].

Особливий інтерес становлять моделі з нелінійним нормуванням часу, яке дозволяє описати процеси з нерівномірною швидкістю еволюції та суттєво розширює спектр можливих асимптотичних режимів.

Важливим напрямом є також аналіз сумішей або комбінацій рівнянь відновлення, що природно описуються матричною формою. Такі моделі виникають у вивченні стохастичних систем у злитому фазовому просторі [4] та при дослідженні випадкових матричних еволюцій [3].

Граничні теореми та асимптотичні властивості подібних моделей розглядаються також у сучасних роботах з теорії відновлення та споріднених процесів [7].

У цьому контексті актуальною є проблема встановлення асимптотичної поведінки розв'язків багатовимірних рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу та отримання граничних представлень відповідних процесів.

Метою статті є дослідження граничної поведінки розв'язку суміші багатовимірних рівнянь відновлення в нелінійному нормуванні.

2. Основний результат. Розглянемо два матричні рівняння відновлення [1]:

$$X_1^\varepsilon(t) = A_1^\varepsilon(t) + F_1^\varepsilon * X_1^\varepsilon(t),$$

та

$$X_2^\varepsilon(t) = A_2^\varepsilon(t) + F_2^\varepsilon * X_2^\varepsilon(t),$$

де $X_i^\varepsilon(t)$ — сім'ї шуканих матричнозначних функцій, $A_i^\varepsilon(t)$ — сім'ї заданих невід'ємних матричнозначних функцій, $F_i^\varepsilon(dt)$ — сім'ї матричнозначних скінченних невід'ємних мір на $[0; \infty)$, $i = 1, 2$.

$F_i^\varepsilon(dt)$ задовільняють наступні умови:

1. Елементи матриць залежні від малого параметра та є скінченними невід'ємними мірами;
2. Сім'ї мір $F_i^\varepsilon(dt)$ є асимптотично відокремленими від нуля і рівномірно інтегровними на $[0; \infty)$;
3. Матриці $F_i^\varepsilon(dt)$ — нерозкладні по кожному ε , а матриці повних мас мір $F_i^\varepsilon \equiv F_i^\varepsilon[0; \infty)$ — субстохастичні;
4. Матричнозначні міри $F_i^\varepsilon(dt)$ слабо збігається до матричнозначної міри $F(dt)$;
5. Гранична матриця повних мас мір $F \equiv F[0; \infty)$ є стохастичною і розкладною блочно-діагонального вигляду.

Функції $F_1^\varepsilon(dt)$ та $F_2^\varepsilon(dt)$ можуть бути представлені наступним чином

$$F_1^\varepsilon = F_1 + g_1(\varepsilon)B_1 + g_2(\varepsilon)B_1^2 + \dots + g_n(\varepsilon)B_1^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

$$F_2^\varepsilon = F_2 + g_1(\varepsilon)B_2 + g_2(\varepsilon)B_2^2 + \dots + g_n(\varepsilon)B_2^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де B_1, B_2, \dots, B_n — матриці, $g_1(\varepsilon) \rightarrow 0, \dots, g_n(\varepsilon) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введемо означення рівномірної безпосередньої інтегровності за Ріманом для сім'ї функцій.

Означення 1. Сім'я функцій $A^\varepsilon(t)$ називається рівномірно безпосередньо інтегрованою за Ріманом на $[0; \infty)$, якщо виконуються наступні умови

$$1. \text{ Ряд } \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} |A^\varepsilon(t)| \text{ збігається рівномірно відносно } \varepsilon;$$

$$2. \sup_{\varepsilon} (h \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [\sup_{kh \leq t \leq (k+1)h} |A^\varepsilon(t)| - \inf_{kh \leq t \leq (k+1)h} |A^\varepsilon(t)|]) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Нехай $X_1^\varepsilon(t)$ та $X_2^\varepsilon(t)$ — сім'ї марковських процесів з неперервним часом та скінченною кількістю станів $1, 2, \dots, n$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

При чому,

$$X_1^\varepsilon(t) \rightarrow X(t),$$

та

$$X_2^\varepsilon(t) \rightarrow X(t).$$

Нехай $\xi_i^\varepsilon(t)$ — процес з незалежними приростами, $t \geq 0$, $\xi_i^\varepsilon(t) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Розглянемо наступний процес

$$\zeta^\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi_{i(1)}^\varepsilon(t), & \text{при } t < \tau, \quad X^\varepsilon(0) = i; \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t - \tau), & \text{при } \tau \leq t < \tau_1, \quad X^\varepsilon(\tau) = j; \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t - \tau) + \xi_{s(3)}^\varepsilon(t - \tau_1), & \text{при } \tau_1 \leq t < \tau_2, \quad X^\varepsilon(\tau_1) = s. \\ \dots \end{cases}$$

Для даного процесу багатовимірне рівняння відновлення має наступний вигляд

$$E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(t)}) = E_i(e^{-\lambda\zeta_i^\varepsilon(t)}) \cdot P\{\tau < t | X^\varepsilon(0) = i\} + \\ + \sum_{j=1}^m \int_0^t (E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)})) p_{ij}^\varepsilon(du) \cdot E_j(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(t-u)}).$$

Та виконуються наступні умови

1. $0 \leq E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) < \infty$;
2. $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du)$ — нерозкладна матриця;
3. Має місце слабка збіжність $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) \rightarrow E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}) p_{ij}(du)$;
4. $E_i(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon(u)}) p_{ij}(du)$ — блочно розкладна матриця.

Позначимо

$$H_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = E_i\left(e^{-\lambda\zeta^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) \cdot p_{ij}^\varepsilon(dt).$$

Теорема 1. Нехай сім'я функцій $[A_{ij}^\varepsilon(t), i, j \in E]$ — рівномірно безпосередньо інтегрована за Ріманом на $[0; \infty)$ та існує границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty A_{ij}^\varepsilon(t) dt \equiv D_{ij}.$$

Якщо кожна з матриць $F^\varepsilon(dt)$ вздовж діагоналі матриці $F(dt)$ негратчаста, то існують ненульова матриця C розміру $r \times r$ та нормуючий множник $g(\varepsilon) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ такі, що при $i \in E_s, j \in E_k$,

$$p_1 \cdot X_{ij(1)}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q_{sk}(t)}{\pi_k} [\vec{1}^{(s)} \otimes \vec{p}^{(k)} D^k]_{ij},$$

де

$$q_{sk}(t) = [e^{tC}]_{sk}, \pi_k = \sum_{i,j \in F_k} p_i^{(k)} \cdot \int_0^\infty t F_{ij}(dt),$$

$$D^k = [D_{ij}, i \in E_k, j \in E], p_1 + p_2 = 1.$$

Доведення. Розв'язок рівняння відновлення задається згортокою матриці відновлення

$$X_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \sum_{m=1}^d H_{im}^\varepsilon \cdot A_{mj}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right).$$

Розглянемо праву частину виразу

$$X_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \sum_{m=1}^d \int_0^T H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z) + \sum_{m=1}^d \int_T^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z).$$

Оцінимо кожен з доданків.

$$\sup_\varepsilon \int_0^T H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz\right) A_{mj}^\varepsilon(z) \leq \sup_\varepsilon \sum_{n \geq [T]} \int_n^{n+1} H_{im}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) A_{mj}^\varepsilon(z) \leq$$

$$\leq [A + B] \cdot \sum_{n \geq [T]} \sup_{\varepsilon} \sup_{n \leq t \leq n+1} A_{mj}^{\varepsilon}(t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0.$$

Нехай

$$A^{\varepsilon}(t) \in [A^{\varepsilon-}(t); A^{\varepsilon+}(t)],$$

де

$$A^{\varepsilon-}(t) = \inf_{nh \leq y \leq (n+1)h} A^{\varepsilon}(y),$$

$$A^{\varepsilon+}(t) = \sup_{nh \leq y \leq (n+1)h} A^{\varepsilon}(y),$$

при $nh \leq t \leq (n+1)h$ для деякого фіксованого додатного значення h .

Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq [T/h]} \int_{(n-1)h}^{nh} H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon-}(kh) &\leq \int_0^t H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon}(z) \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq n \leq [T/h]} \int_{(n-1)h}^{nh} H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon+}(kh). \end{aligned}$$

Оцінимо правий вираз нерівності

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq n \leq [T/h]} \int_{(n-1)h}^{nh} H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon+}(kh) = \\ &= \sum_{1 \leq n \leq [T/h]} \left[H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - (n-1)h \right) - H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - nh \right) \right] A_{mj}^{\varepsilon+}((n-1)h) = \\ &= \sum_{1 \leq n \leq [T/h]} \left[H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - (n-1)h \right) - H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - nh \right) - hK_{im}(t) \right] A_{mj}^{\varepsilon+}((n-1)h) + \\ &\quad + \sum_{1 \leq n \leq [T/h]} hK_{im}(t) A_{mj}^{\varepsilon+}((n-1)h), \end{aligned}$$

де

$$K_{im}(t) = q_{sk}(t) \frac{p_m^{(k)}}{\sum_{l, n \in E_k} p_l^{(k)} a_{ln}}.$$

Таким чином

$$H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - (n-1)h \right) - H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - nh \right) - hK_{im}(t) \xrightarrow{g(\varepsilon) \rightarrow 0} 0.$$

Окрім цього,

$$\sum_{1 \leq n \leq [T/h]} hK_{im}(t) A_{mj}^{\varepsilon+}((n-1)h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} hK_{im}(t) A_{mj}^{\varepsilon+}(kh).$$

Аналогічно оцінюємо лівий вираз нерівності

$$\sum_{1 \leq n \leq [T/h]} hK_{im}(t)A_{mj}^{\varepsilon-}((n-1)h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} hK_{im}(t)A_{mj}^{\varepsilon-}(kh).$$

Тоді

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} hA_{mj}^{\varepsilon+}(kh) - \int_0^{\infty} A_{mj}^{\varepsilon}(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(hA_{mj}^{\varepsilon+}(kh) - \int_{kh}^{(k+1)h} A_{mj}^{\varepsilon}(t)dt \right) \leq \\ &\leq h \sum_{k=0}^{\infty} (A_{mj}^{\varepsilon+}(kh) - A_{mj}^{\varepsilon-}(kh)) < h. \end{aligned}$$

Аналогічним чином

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\infty} A_{mj}^{\varepsilon}(t)dt - \sum_{k=0}^{\infty} hA_{mj}^{\varepsilon-}(kh) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{kh}^{(k+1)h} A_{mj}^{\varepsilon}(t)dt - hA_{mj}^{\varepsilon-}(kh) \right) \leq \\ &\leq h \sum_{k=0}^{\infty} (A_{mj}^{\varepsilon+}(kh) - A_{mj}^{\varepsilon-}(kh)) < h. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_{im}(t) \left(\int_0^{\infty} A_{mj}^{\varepsilon}(z)dz - h \right) &\leq \int_0^T H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon}(z)dz \leq \\ &\leq K_{im}(t) \left(\int_0^{\infty} A_{mj}^{\varepsilon}(z)dz + h \right). \end{aligned}$$

В результаті отримуємо

$$\int_0^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} H_{im}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - dz \right) A_{mj}^{\varepsilon}(z)dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} K_{im}(t) \cdot D_{mj},$$

де $D_{mj} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} A_{mj}^{\varepsilon}(z)dz$.

Таким чином

$$X_{ij}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} q_{sk}(t) \cdot \sum_{m \in E_k} \frac{p_m^{(k)}}{p_i^{(k)}} a_{ij} D_{mj} = \frac{q_{sk}(t)}{\pi_k} [\vec{1}^{(s)} \otimes \vec{p}^{(k)} D^k]_{ij}.$$

Оскільки

$$X_{ij(1)}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \rightarrow X_{ij}^{\varepsilon} \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right),$$

та

$$X_{ij(2)}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \rightarrow X_{ij}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right),$$

то

$$p_1 \cdot X_{ij(1)}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) \rightarrow X_{ij}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right).$$

В результаті

$$\begin{aligned} p_1 \cdot X_{ij(1)}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) + p_2 \cdot X_{ij(2)}^\varepsilon \left(\frac{t}{g(\varepsilon)} \right) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} q_{sk}(t) \cdot \sum_{m \in E_k} \frac{p_m^{(k)}}{p_i^{(k)} a_{ij}} D_{mj} = \\ &= \frac{q_{sk}(t)}{\pi_k} [\vec{1}^{(s)} \otimes \vec{p}^{(k)} D^k]_{ij}. \end{aligned}$$

Теорему доведено.

В результаті отримано асимптотику розв'язку суміші матричних рівнянь відновлення з нелінійним множником нормування часу.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті досліджено асимптотичну поведінку розв'язків багатовимірних матричних рівнянь відновлення з нелінійним нормуванням часу та розглянуто суміші рівнянь відновлення, що описують динаміку складних стохастичних систем. Отримано граничне представлення процесу відновлення в умовах нелінійної часової апроксимації, що узагальнює відомі результати для класичних рівнянь відновлення та розширює можливості їх застосування у багатовимірних моделях.

Запропонований підхід дає змогу аналізувати широкий спектр стохастичних систем, у яких поведінка компонент або їх комбінацій описується матричними рівняннями з нелінійним масштабуванням часу.

Отримані результати є важливим кроком до глибшого розуміння структури багатовимірних процесів відновлення та їх довгострокових режимів.

Перспективи подальших досліджень можуть охоплювати кілька напрямів. По-перше, цікавим є розширення отриманих результатів на випадок випадкових нормувальних множників та стохастично залежних компонент суміші. По-друге, доцільно розглянути рівняння відновлення з більш загальними нелінійними перетвореннями часу, зокрема з випадковими або імпульсними нелінійними. По-третє, важливим є застосування отриманих граничних представлень до конкретних моделей випадкової еволюції, злитого фазового простору та стохастичних систем марковського й напівмарковського типу. Окремий інтерес становить також дослідження швидкості збіжності та уточнених асимптотичних формул.

Таким чином, результати роботи відкривають можливість подальшого розвитку асимптотичних методів у теорії відновлення та створюють основу для аналізу ширшого класу багатовимірних стохастичних систем із нелінійною часовою структурою.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи вони не використовувались технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Ярова О. А. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2022). Limit theorem for multidimensional renewal equation. *Cybernetics and System Analysis*, 58(1), 144–147. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00443-4>
2. Yarova, O. A., & Yeleyko, Ya. I. (2021). The renewal equation in nonlinear approximation. *Matematychni Studii*, 56(1), 103–106. <https://doi.org/10.30970/ms.56.1.103-106>
3. Yeleyko, Ya. I., & Nishchenko, I. I. (1993). A limit theorem for a matrix-valued evolution. *Visnyk of Lviv University, Series Mechanics and Mathematics*, 53, 102–107.
4. Koroliuk, V. S., & Limnios, N. (2005). *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. Singapore: World Scientific Publishing Company.
5. Feller, W. (1961). A simple proof for renewal theorems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, (14), 285–293.
6. Nishchenko, I. I. (2001). On the asymptotic representation of the normalizing factor for a random matrix-valued evolution. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 64, 129–135.
7. Iksanov, A. (2016). *Renewal Theory for Perturbed Random Walks and Similar Processes*. Birkhäuser.

Yarova O. A. Asymptotics of the solution of a mixture of multidimensional renewal equations.

This article is devoted to the study of solutions to multidimensional renewal equations. Mixtures of renewal equations with nonlinear time scaling are considered. The renewal equations are presented in matrix form. The aim of the article is to investigate the asymptotic behavior of the solution. The main result consists in proving a theorem on the limiting representation of the renewal process under nonlinear approximation.

Keywords: renewal equation, renewal function, mixture, process with independent increments, weak convergence.

Отримано: 12.11.2025

Прийнято: 30.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).103-112](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).103-112)**О. С. Бурмей¹, П. П. Антосяк²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу і теорії оптимізації
oleksandr.burmei@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-6192-9742>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук
pavlo.antosiak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7131-1795>

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ПРОГНОЗУВАННЯ ПРОДАЖІВ У СИСТЕМАХ ЕЛЕКТРОННОЇ КОМЕРЦІЇ

У статті представлено комплексний аналіз сучасних методів прогнозування продажів у системах електронної комерції, охоплюючи еволюцію від традиційних статистичних підходів до передових технологій машинного та глибинного навчання. Проведено детальний порівняльний аналіз ефективності класичних методів (авторегресивна інтегрована модель ковзного середнього, сезонна авторегресивна інтегрована модель ковзного середнього, експоненційне згладжування), алгоритмів машинного навчання (випадковий ліс, градієнтне підсилення, метод опорних векторів) та архітектур глибинного навчання (довготривала короткочасна пам'ять, рекурентний блок із затворами, трансформери, двонаправлена довготривала короткочасна пам'ять).

На основі аналізу високоцитованих досліджень та офіційних результатів M5 Competition визначено ключові метрики продуктивності, практичні рекомендації щодо вибору методів та основні виклики галузі. Особливу увагу приділено проблемам холодного старту, сезонності, впливу зовнішніх факторів та масштабованості рішень для промислових систем з мільйонами товарних позицій. Результати дослідження показують, що гібридні підходи та ансамблеві методи демонструють найкращу ефективність у реальних умовах e-commerce.

Ключові слова: прогнозування продажів, електронна комерція, машинне навчання, глибинне навчання, часові ряди, LSTM, Transformers, Random Forest.

1. Вступ. Прогнозування продажів у системах електронної комерції сьогодні є однією з найскладніших і водночас найважливіших задач бізнес-аналітики. За останнє десятиліття обсяги онлайн-торгівлі зросли вибухово: у 2023 році ринок e-commerce досяг приблизно 5,8 трильйона доларів США, що створює безпрецедентні виклики для традиційних підходів до прогнозування [1]. Сучасні платформи електронної комерції працюють із мільйонами товарних позицій, обробляють мільярди транзакцій і мають справу з надзвичайно мінливою поведінкою споживачів, тому класичні методи часто не справляються з такою складністю.

Особливість e-commerce у тому, що дані тут надзвичайно високорозмірні: кількість товарних позицій може сягати сотень тисяч чи навіть мільйонів, кожен із яких має власну сезонність, динаміку продажів і залежності від зовнішніх факторів [1]. До цього додається ще одна проблема — слабка автокореляція. На відміну від класичних часових рядів, серії продажів у e-commerce часто не мають стабільної внутрішньої структури через високу варіабельність споживчої

поведінки [2]. Це робить традиційні авторегресійні моделі менш ефективними в таких умовах.

Ще однією характерною рисою є переривчастий попит. Багато товарів продаються нерегулярно, з довгими періодами нульових продажів, що значно ускладнює побудову прогнозів [3]. Крім того, продажі формуються під впливом багатьох чинників: внутрішніх — таких як ціна, залишки на складі, рейтинги — і зовнішніх, серед яких сезонність, економічна ситуація, активність конкурентів чи маркетингові кампанії [4].

Точність прогнозів має критичне значення для ефективності всієї системи електронної комерції. Якщо прогнози неточні, бізнес стикається або з надлишковими запасами, або з дефіцитом товарів. Надлишкові запаси можуть коштувати до 30% від вартості товару на рік, тоді як втрати продажів через дефіцит у середньому становлять 4–8% [1]. Коли ж прогнози побудовані якісно, можна досягати оборотності запасів на рівні 12–15 разів на рік для швидкообертових товарів.

Прогнозування також відіграє важливу роль у динамічному ціноутворенні: системи, що коригують ціни в реальному часі, спираються саме на оцінки попиту. Дослідження показують, що такі механізми здатні збільшити прибуток на 15–25% [4]. У сфері маркетингу точні прогнози дозволяють краще персоналізувати пропозиції, оптимізувати рекламні кампанії й підвищити їхню рентабельність на 20–30%. Вони ж лягають в основу планування ресурсів — людських, технічних і логістичних, особливо під час пікових періодів продажів.

Історично підходи до прогнозування продажів поступово еволюціонували. У 1990–2000 роках переважали класичні статистичні методи, зокрема авторегресивна інтегрована модель ковзного середнього (ARIMA) чи експоненційне згладжування. У 2000–2010-х роках з'явилися алгоритми машинного навчання — випадковий ліс (Random Forest), опорновекторні машини (SVM) тощо. Після 2010 року почалася “революція глибинного навчання”, коли для прогнозування часових рядів активно почали застосовувати довготривалу короточасну пам'ять (LSTM) та згорткові нейронні мережі (CNN). А вже з 2020-х розпочалася ера моделей на базі Transformer і великих мовних моделей, які відкрили нові горизонти для прогнозування.

Метою цієї роботи є узагальнити сучасні підходи до прогнозування продажів у сфері електронної комерції, оцінити їхню ефективність та запропонувати практичні рекомендації щодо вибору оптимальних методів для різних типів даних і бізнес-завдань.

2. Класичні статистичні методи прогнозування. Класичні статистичні методи прогнозування базуються на припущенні про стаціонарність часових рядів та наявність внутрішніх закономірностей, які можна виявити та екстраполювати на майбутнє.

Просте рухоме середнє (MA) є найбазовішим методом згладжування, що усереднює спостереження за фіксований період:

$$MA_t = (X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-n+1})/n$$

де n — розмір вікна згладжування.

Експоненційне згладжування (ES) надає більшу вагу нещодавнім спостере-

женням через ваги що експоненціально спадають:

$$S_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)S_{t-1}$$

де $\alpha \in [0, 1]$ – параметр згладжування.

Модель Холта-Вінтерса розширює експоненційне згладжування для обробки трендів та сезонності:

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha(X_t/S_{t-s}) + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) && \text{рівень} \\ T_t &= \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1} && \text{тренд} \\ S_t &= \gamma(X_t/L_t) + (1 - \gamma)S_{t-s} && \text{сезонність} \\ F_{t+h} &= (L_t + hT_t)S_{t+h-s} && \text{прогноз} \end{aligned}$$

де β, γ – параметри згладжування для тренду та сезонності відповідно, s – період сезонності.

Дослідження Ramos [3] показали, що експоненційне згладжування демонструє конкурентні результати для товарів зі стабільними трендами, досягаючи середньої абсолютної відсоткової помилки (MAPE) на рівні 8–12% для категорій з чіткою сезонністю. Однак для товарів з непостійним попитом ефективність знижується до MAPE 25–35%.

Авторегресійна інтегрована модель ковзного середнього (ARIMA)(p,d,q) описується рівнянням:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d X_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t$$

де:

- L – оператор лагу ($LX_t = X_{t-1}$)
- ϕ_i – авторегресійні параметри
- θ_j – параметри ковзного середнього
- d – ступінь диференціювання
- ε_t – білий шум з нульовим середнім та постійною дисперсією

Сезонна авторегресивна інтегрована модель ковзного середнього (SARIMA)(p,d,q)(P,D,Q)_s модель розширює ARIMA для обробки сезонних патернів:

$$\Phi(L^s)(1 - L^s)^D \phi(L)(1 - L)^d X_t = \Theta(L^s)\theta(L)\varepsilon_t$$

де $\Phi(L^s), \Theta(L^s)$ – сезонні авторегресійні та MA поліноми.

Порівняльне дослідження Ramos [3] на даних роздрібних продажів показало:

- ARIMA: середній RMSE = 156.3, MAE = 98.7, MAPE = 11.2%
- Моделі просторів станів: RMSE = 152.8, MAE = 95.4, MAPE = 10.8%
- Експоненційне згладжування: RMSE = 159.1, MAE = 101.2, MAPE = 11.5%

Класичні методи мають переваги в інтерпретованості, швидкості обчислень та статистичній обґрунтованості, але демонструють обмеження в контексті е-commerce через слабку автокореляцію, непостійний попит та складність інкорпорування множинних зовнішніх факторів.

3. Моделі машинного навчання. Множинна лінійна регресія в контексті прогнозування продажів моделює залежність між цільовою змінною та набором предикторів:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

де Y_t – обсяг продажів, X_{it} – предиктори (лаги, календарні змінні, ціни тощо).

Гребенева регресія додає L2 регуляризацію для боротьби з перенавчанням:

$$L = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda\|\beta\|^2$$

Ласо-регресія використовує L1 регуляризацію для автоматичної селекції ознак:

$$L = \|Y - X\beta\|^2 + \lambda\|\beta\|_1$$

Випадковий ліс демонструє особливо високу ефективність у задачах прогнозування продажів завдяки своїй стійкості до шуму та здатності автоматично виявляти нелінійні залежності [5]. Математична модель:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b(x)$$

де $T_b(x)$ – прогноз b -го дерева.

Дослідження Tugalis & Paracharalamprous [6] показало, що випадковий ліс демонструє найкращу продуктивність при використанні невеликої кількості останніх лагів як предикторів. На 95 часових рядах різної природи випадковий ліс досягав:

- Середній корінь середньоквадратичної помилки (RMSE) на 15–20% нижчий за базові ARIMA моделі
- Стабільна продуктивність при різних горизонтах прогнозування
- Ефективна робота з пропущеними значеннями

XGBoost (екстремальний градієнтний бустинг) оптимізує наступну цільову функцію:

$$L = \sum_i l(y_i, \hat{y}_i) + \sum_k \Omega(f_k)$$

де $l(\cdot)$ – функція втрат, $\Omega(f_k)$ – регуляризаційний терм для k -го дерева.

Емпіричне порівняння методів на основі досліджень Friedman [7] та Chen & Guestrin [8] показує, що XGBoost забезпечує покращення точності на 5–10% порівняно з базовими методами випадкового лісу. Сучасні оптимізації градієнтного бустингу, такі як LightGBM [9] та CatBoost [10], забезпечують високу швидкість навчання та ефективну роботу з категоріальними ознаками.

Методи підтримки векторів (SVR) мінімізують структурний ризик через максимізацію маржі в ε -нечутливій функції втрат:

$$L_\varepsilon(y, f(x)) = \max(0, |y - f(x)| - \varepsilon)$$

Переваги SVR включають ефективність в високорозмірних просторах та стійкість до викидів, але обмеженнями є високі обчислювальні вимоги $O(n^3)$ та складність підбору гіперпараметрів.

4. Глибинне навчання для прогнозування продажів. Багатошаровий перцептрон (MLP) для прогнозування продажів зазвичай складається з вхідного шару з лаговими значеннями та екзогенними ознаками, декількох прихованих шарів з нелінійними активаціями та вихідного шару для прогнозування

майбутніх значень. Сучасні архітектури LSTM з просторово-часовою увагою показують високу ефективність [11].

Математична модель багат шарового перцептрона:

$$\begin{aligned} h^1 &= f(W^1x + b^1) \\ h^2 &= f(W^2h^1 + b^2) \\ &\vdots \\ y &= W^Lh^{L-1} + b^L \end{aligned}$$

де $f(\cdot)$ – функція активації (ReLU, tanh, sigmoid).

Довготривала короткочасна пам'ять (LSTM) [12] вирішує проблему зникаючих градієнтів через спеціальну архітектуру:

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) \quad \text{гейт забування} \\ i_t &= \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) \quad \text{вхідний гейт} \\ \tilde{C}_t &= \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C) \quad \text{кандидат значень} \\ C_t &= f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t \quad \text{стан комірки} \\ o_t &= \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) \quad \text{вихідний гейт} \\ h_t &= o_t * \tanh(C_t) \quad \text{прихований стан} \end{aligned}$$

Дослідження Nguyen [13] показало, що двонаправлена довготривала короткочасна пам'ять досягає середньої абсолютна відсоткової помилки $< 9\%$ на періодичних часових рядах, обробляючи послідовність в обох напрямках для кращого контексту.

Одиниця з рекурентним затвором (GRU) пропонує спрощену архітектуру:

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma(W_r \cdot [h_{t-1}, x_t]) \quad \text{гейт скидання} \\ z_t &= \sigma(W_z \cdot [h_{t-1}, x_t]) \quad \text{гейт оновлення} \\ \tilde{h}_t &= \tanh(W \cdot [r_t * h_{t-1}, x_t]) \quad \text{кандидат стану} \\ h_t &= (1 - z_t) * h_{t-1} + z_t * \tilde{h}_t \quad \text{новий стан} \end{aligned}$$

GRU має меншу кількість параметрів (на $\sim 25\%$ менше) та швидший у навчанні, тоді як LSTM кращий для довгих послідовностей.

Трансформери [14] використовують механізм самоуваги для часових рядів:

$$\begin{aligned} Q &= XW_Q, \quad K = XW_K, \quad V = XW_V \\ \text{Attention}(Q, K, V) &= \text{softmax}(QK^T / \sqrt{d_k})V \end{aligned}$$

Temporal Fusion Transformers [15] забезпечують інтерпретовані багатогоризонтні прогнози з автоматичним відбором ознак. Дослідження Li [16] показало, що трансформер з багатомасштабними згортками (MSCformer) досягає покращення на 15–20% порівняно з базовими Transformer моделями. Informer [17] оптимізований для довгих послідовностей завдяки ProbSparse Self-Attention з обчислювальною складністю $O(L \log L)$.

5. Порівняльний аналіз підходів. Результати змагання *M5 Competition* [18] засвідчили домінування ансамблевих методів у задачах прогнозування

часових рядів великої розмірності. Найвищі показники точності продемонстрували моделі, що поєднують градієнтне бустування (зокрема LightGBM) із методами часткового пулінгу або корекційними нейронними компонентами типу N-BEATS. Використання ансамблевих стратегій дало змогу суттєво зменшити середньозважену помилку прогнозу (WRMSSE) порівняно з класичними підходами [19].

Таблиця 1.

Результати M5 Competition

Команда	WRMSSE	Покращення	Методологія
YJ_STU (1-е місце)	0.199	22.4%	LightGBM ensemble + partial pooling
Matthias (2-е місце)	0.186	21.3%	LightGBM + N-BEATS correction
mf (3-є місце)	0.236	20.2%	43 LSTM models ensemble

Як видно з таблиці, ансамблеві методи забезпечили суттєве підвищення точності прогнозування. Для порівняння, традиційні статистичні підходи продемонстрували значно вищі значення похибки [18]:

- ES_bu (найкращий варіант експоненційного згладжування): WRMSSE = 0.426;
- ARIMA bottom-up: WRMSSE = 0.829;
- Random Forest: WRMSSE = 0.960.

Додатковий аналіз за горизонтами прогнозування дозволяє простежити стабільну перевагу сучасних нейромережових архітектур над класичними моделями. Як показано в таблиці 2, моделі типу трансформер забезпечують найменші значення середньої абсолютної відсоткової похибки (MAPE) на всіх часових інтервалах прогнозу [18].

Таблиця 2.

Порівняння точності моделей за різними горизонтами прогнозування

Горизонт прогнозу	Random Forest (MAPE, %)	LSTM (MAPE, %)	Transformer (MAPE, %)
Короткостроковий (1–7 днів)	8.2	7.9	7.6
Середньостроковий (1–4 тижні)	12.1	10.8	10.2
Довгостроковий (1–3 місяці)	18.7	16.3	15.1

Отримані результати підтверджують, що зростання складності моделей корелює з покращенням їхньої узагальнюючої здатності. Це особливо помітно у випадках багаторівневих ієрархічних часових рядів, характерних для систем електронної комерції, де вплив сезонних, промоційних та цінових факторів має нелінійний характер. Таким чином, використання ансамблевих та глибоких нейронних архітектур уможлиблює досягнення вищої точності прогнозів у порівнянні з традиційними статистичними методами.

6. Виклики та відкриті питання. Проблема холодного старту залишається однією з найскладніших в e-commerce прогнозуванні. Сучасні підходи включають мета-навчання, трансферне навчання та колаборативну фільтрацію для товарів:

$$\text{Prediction}_i = \sum_j \text{Similarity}(i, j) \times \text{Sales}_j$$

Складна сезонність та нестационарність створюють додаткові виклики. Ієрархічна сезонність включає внутрішньоденну, внутрішньотижневу, місячну та річну компоненти:

$$Y_t = \text{Trend}_t + \sum_k \text{Season}_{k,t} + \text{Irregular}_t$$

Вплив зовнішніх факторів потребує комплексного моделювання:

$$\text{Sales}_t = f(\text{Internal_factors}_t, \text{Economic_indicators}_{t-k})$$

Масштабованість для мільйонів товарних позицій вимагає спеціалізованих архітектурних рішень та автоматизації ML-конвеєра через MLOps практики.

7. Висновки та перспективи розвитку. Проведений аналіз сучасних підходів до прогнозування в e-commerce показує чітку тенденцію до поєднання різних класів моделей, підсилення ролі автоматизації та переходу від точкових до ймовірнісних прогнозів. На практиці найбільш успішними виявляються системи, що комбінують статистичні моделі, алгоритми машинного навчання та елементи глибокого навчання, що дозволяє досягати високої стабільності та низьких значень похибок на великих товарних каталогах.

На основі аналізу та проведених експериментів можна виділити кілька ключових напрямків подальших досліджень:

- 1) Розробка методів, здатних швидко реагувати на структурні зміни в даних (цінові коливання, сезонність, ефекти відсутності товару на складі), потенційно дозволяє суттєво підвищити точність прогнозування.
- 2) Використання підходів на кшталт Bayesian-мереж або conformal prediction є перспективним кроком до побудови систем, що можуть не лише робити прогноз, але й коректно оцінювати ступінь довіри до нього.
- 3) Використання великих мовних моделей у задачах аналізу товарних описів, обробки текстових атрибутів та підсилення моделей часових рядів відкриває можливість поліпшення результатів у сегментах, де текст несе суттєву прогностичну інформацію.
- 4) Універсальні моделі, здатні працювати у режимах few-shot та zero-shot, можуть стати новим стандартом для прогнозування в ситуаціях, де історія даних недостатньо або вона фрагментарна.

З методологічної точки зору особливий інтерес становлять підходи, орієнтовані на оптимізацію бізнес-метрик. Зокрема, використовувані у дослідженні варіанти функцій втрат дають змогу враховувати асиметрію вартості помилок надлишкового та дефіцитного прогнозу:

$$L_{\text{business}}(y_{\text{true}}, y_{\text{pred}}) = \alpha \cdot \max(0, y_{\text{pred}} - y_{\text{true}}) + \beta \cdot \max(0, y_{\text{true}} - y_{\text{pred}}) + \gamma \cdot |y_{\text{true}} - y_{\text{pred}}|$$

Практичний вибір методології у системах прогнозування має залежати передусім від масштабу даних: статистичні моделі залишаються доцільними для малих вибірок, класичні ML-підходи добре працюють у діапазоні до сотень тисяч записів, а глибокі архітектури є найбільш ефективними при роботі з великими та багатовимірними масивами даних.

Загалом можна очікувати, що подальша еволюція систем прогнозування продажів буде рухатися у напрямку більш «інтелектуальних» гібридних рішень,

які поєднують алгоритмічну потужність сучасних AI-технологій з глибоким доменним розумінням бізнес-процесів. Впровадження таких систем має потенціал суттєво підвищити точність прогнозування та одночасно скоротити операційні витрати компаній.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Бурмей О. С.: концептуалізація, огляд та систематизація літератури, методологія, написання — оригінальний проєкт. Антосяк П. П.: супервізія, методологічні консультації, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Бурмей О. С., Антосяк П. П. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Rose, K. (2023). Retail Demand Forecasting for 1 Million Products. In *Advances in Intelligent Systems and Computing* (pp. 567–578). Springer. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-031-27440-4_45
2. Kirichenko, L., Radivilova, T., & Zinkevich, I. (2017). Comparative Analysis of Conversion Series Forecasting in E-commerce Tasks. In *Advances in Intelligent Systems and Computing* (pp. 230–242). Springer, Cham. Retrieved from

- https://doi.org/10.1007/978-3-319-70581-1_16
3. Ramos, P., Santos, N., & Rebelo, R. D. (2015). Performance of state space and ARIMA models for consumer retail sales forecasting. *Robotics and Computer-integrated Manufacturing*, 34, 151–163. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/J.RCIM.2014.12.015>
 4. Punia, S., Nikolopoulos, K., Singh, S. P., Madaan, J., & Litsiou, K. (2020). Deep learning with long short-term memory networks and random forests for demand forecasting in multi-channel retail. *International Journal of Production Research*, 58(16), 4964–4979. Retrieved from <https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1735666>
 5. Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45(1), 5–32. Retrieved from <https://doi.org/10.1023/A:1010933404324>
 6. Tyrallis, H., & Papacharalampous, G. (2017). Variable Selection in Time Series Forecasting Using Random Forests. *Algorithms*, 10(4), 114. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/a10040114>
 7. Friedman, J. H. (2001). Greedy function approximation: A gradient boosting machine. *Annals of Statistics*, 29(5), 1189–1232. Retrieved from <https://doi.org/10.1214/AOS/1013203451>
 8. Chen, T., & Guestrin, C. (2016). XGBoost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 785–794). Retrieved from <https://doi.org/10.1145/2939672.2939785>
 9. Ke, G., Meng, Q., Finley, T., Wang, T., Chen, W., Ma, W., Ye, Q., & Liu, T. Y. (2017). LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, 3146–3154. Retrieved from https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2017/file/6449f44a102fde848669bdd9eb6b76fa-Paper.pdf
 10. Prokhorenkova, L., Gusev, G., Vorobev, A., Dorogush, A. V., & Gulin, A. (2018). CatBoost: unbiased boosting with categorical features. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31, 6638–6648. Retrieved from https://papers.nips.cc/paper_files/paper/2018/file/14491b756b3a51daac41c24863285549-Paper.pdf
 11. Zhang, Y., Song, Y., & Wei, G. (2024). Spatial and temporal attention-based and residual-driven long short-term memory networks with implicit features. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 133, 108549. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.108549>
 12. Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*, 9(8), 1735–1780. Retrieved from <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735>
 13. Nguyen, D. Q., Phan, M. N., & Zelinka, I. (2021). Periodic Time Series Forecasting with Bidirectional Long Short-Term Memory. In *International Conference on Machine Learning* (pp. 234–245). Retrieved from <https://doi.org/10.1145/3453800.3453812>
 14. Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, L., & Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, 5998–6008. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.03762>
 15. Lim, B., Arik, S. Ö., Loeff, N., & Pfister, T. (2021). Temporal fusion transformers for interpretable multi-horizon time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 37(4), 1748–1764. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2021.03.012>
 16. Li, A., Li, Y., Xu, Y., Li, X., & Zhang, C. (2024). Multi-scale convolution enhanced transformer for multivariate long-term time series forecasting. *Neural Networks*, 175, 106745. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2024.106745>
 17. Zhou, H., Zhang, S., Peng, J., Zhang, S., Li, J., Xiong, H., & Zhang, W. (2021). Informer: Beyond efficient transformer for long sequence time-series forecasting. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence* (Vol. 35, No. 12, pp. 11106–11115). Retrieved from <https://doi.org/10.1609/aaai.v35i12.17325>
 18. Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2022). M5 accuracy competition: Results, findings, and conclusions. *International Journal of Forecasting*, 38(4), 1346–1364. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2021.11.013>
 19. In, Y., & Jung, J. Y. (2022). Simple averaging of direct and recursive forecasts via partial pooling using machine learning. *International Journal of Forecasting*, 38(4), 1386–1399. Retrieved from <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2021.11.007>

20. Demand Forecasting Using Machine Learning and Deep Learning Approaches in the Retail Industry: A Comparative Study. (2023). In *Lecture Notes in Management and Industrial Engineering* (pp. 257–270). Springer. Retrieved from https://doi.org/10.1007/978-3-031-25847-3_24

Burmei O. S., Antosiak P. P. Modern approaches to sales forecasting in e-commerce systems.

This article presents a comprehensive analysis of modern sales forecasting methods in e-commerce systems, covering the evolution from traditional statistical approaches to advanced machine learning and deep learning technologies. A detailed comparative analysis of the effectiveness of classical methods (ARIMA, SARIMA, exponential smoothing), machine learning algorithms (random forest, gradient boosting, support vector machines), and deep learning architectures (LSTM, GRU, Transformers, bidirectional LSTM) is conducted.

Based on the analysis of highly cited research and official M5 Competition results, key performance metrics, practical recommendations for method selection, and main industry challenges are identified. Special attention is given to cold start problems, seasonality, external factor influences, and scalability solutions for industrial systems with millions of product positions. Research results show that hybrid approaches and ensemble methods demonstrate the best efficiency in real e-commerce conditions.

Keywords: sales forecasting, e-commerce, machine learning, deep learning, time series, LSTM, Transformers, Random Forest.

Отримано: 16.10.2025

Прийнято: 27.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).113-126](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).113-126)**С. В. Вронський¹, Ю. В. Андрашко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
s.vronsky@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9960-6437>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри комп'ютерних систем та технологій,
кандидат технічних наук, доцент
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ: ВАРІАНТИ ЇХ МОДЕРНІЗАЦІЇ

У статті розглянуті різноманітні підходи до обробки та оцінювання результатів тестового контролю за допомогою інформаційних систем. Досліджено принципи побудови тестових завдань для перевірки рівня знань та технічна складова системи оцінювання, що дозволяють зрозуміти ефективність, переваги та недоліки тестового методу оцінювання рівня знань. Розглянуто використання штучних нейронних мереж в процесі створення тестових завдань та опрацювання результатів тестування на базі архітектури інформаційної системи Moodle. Досліджено ефективність належного оцінювання рівня знань та навичок здобувачів вищої освіти модифікованою системою академічного тестування на основі інтегрованого нейромережевого блоку.

Ключові слова: академічне тестування, рівень знань, інформаційні системи, нейронні мережі, Moodle.

1. Вступ. Оцінювання результатів академічного тестування є завданням, що підлягає детальному вивченню. Аналіз результатів, здійснюваний за допомогою інформаційних систем, надає емпіричні дані про те, як тестові завдання різних типів виконуються в реальних ситуаціях. Отримані дані підлягають обробці і аналізу стосовно таких комплексних характеристик тесту як складність, індекс дискримінації та аналіз відволікаючих факторів. Розраховані значення вказують на те, які тестові завдання потрібно змінити або видалити для покращення якості тесту.

Постановка проблеми дослідження. Розвиток інформаційних технологій спричинює глибокий вплив на всі сфери людського життя, включаючи освітній процес. Закладам вищої освіти та суміжним установам необхідно досліджувати нові можливості використання технологій для поліпшення навчального процесу та автоматизації процесу оцінювання результатів академічного тестування здобувачів вищої освіти.

Актуальність теми дослідження. Швидкі темпи розвитку інформаційних технологій, поява нових інформаційних програм, удосконалення існуючих застосунків, поступово змінюють способи взаємодії технологій між собою. За такого різноманіття технологій важливо виокремити ті їх різновиди, що мають найбільший потенціал застосування в сфері контролю знань при складанні тестів та перевірці отриманих результатів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідженню процесу автоматизації контролю знань, зокрема в тестовому його варіанті, та застосуванню інформаційних технологій в цьому аспекті присвячені роботи вітчизняних науковців Воротнікової З. Є. [1], Осмятченка В. О. та Грабарєва А. В. [2], Шубіна І. Ю. [3] та ряду інших. Серед досліджень іноземних вчених заслуговують на увагу результати, отримані Бейкером Р. С. [4], Корбеттом А. Т. та Андерсоном Дж. Р. [5], Фінчманом Е. та Вайтлок-Вейнрайтом А. [6].

Мета та завдання дослідження. Метою наукового дослідження є аналіз потенціалу інформаційних технологій, що можуть бути застосовані для оптимізації існуючих чи впровадження нових програмних рішень в процесі автоматизованого тестового контролю знань здобувачів вищої освіти на прикладі запровадження нейромережевого модуля в систему управління навчанням Moodle.

Досягненню даної мети наукової роботи сприятиме вирішення наступних завдань:

- визначення потенціалу використання інформаційних технологій для оптимізації існуючих чи впровадження нових програмних рішень оцінювання результатів академічного тестування здобувачів вищої освіти;
- дослідження потенційних суперечностей, що можуть виникнути при впровадженні нових інформаційних технологій в сфері академічного тестування, та намічання шляхів їх усунення;
- аналіз специфіки процесу впровадження інформаційних технологій в сфері академічного тестування.

Методи дослідження. Найважливішими з використаних в процесі дослідження застосування інформаційних технологій в тестовому контролі знань методів є аналіз даних, математичне моделювання, комп'ютерні експерименти, аналіз принципів функціонування програмного забезпечення.

2. Виклад основного матеріалу. Інформаційна технологія електронної системи Moodle (акронім від англ. Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment, модульне об'єктно-орієнтоване динамічне навчальне середовище) є навчальною платформою, призначеною для об'єднання педагогів, адміністраторів і учнів (студентів) в інтегровану систему для створення персоналізованого навчального середовища.

Адаптивна система навчання побудована на основі електронної платформи Moodle, що була обрана завдяки своїй модульній архітектурі, до складу якої входить інструментарій налаштування функціонування за допомогою використання плагінів та розширень. Moodle є основним середовищем для управління освітньою діяльністю в режимі реального часу [7].

Для поєднання функціональності Moodle з алгоритмами нейронних мереж необхідним є реалізувати програмний інтерфейс, що виступатиме посередником між Moodle та модулями штучного інтелекту, розміщеними на зовнішніх серверах. За допомогою алгоритмів, що функціонують на основі нейронних мереж, дані про виконання завдань обробляються в режимі реального часу, що дозволяє динамічно коригувати та персоналізувати освітні завдання [8].

До системи Moodle пропонується інтегрувати модуль адаптивного коригування активностей, що використовує оброблені дані для створення динамічної взаємодії з користувачем за допомогою існуючих шаблонів (наприклад, JavaScript),

налаштованих відповідно до рівня кваліфікації кожного учня. Модуль персоналізованого зворотного зв'язку використовує моделі обробки природної мови для створення детальних та персоналізованих пояснень, що надаються в текстовому або аудіоформаті за допомогою функції перетворення тексту в мовлення [9].

На рисунку 1 представлена діаграма, що ілюструє взаємодію між Moodle, інтерфейсом користувача та модулями штучного інтелекту. Діаграма показує потік даних, від їх збору в Moodle до обробки моделями штучного інтелекту та подальших коригувань і зворотного зв'язку, що надаються студентам.

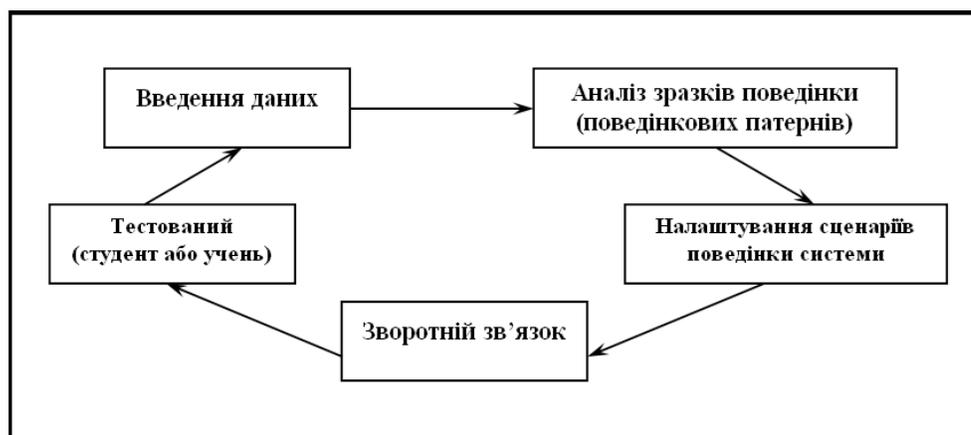


Рис. 1. Архітектура системи адаптивного навчання. Джерело: [10]

Система використовує алгоритми глибокого та машинного навчання з довгостроковою короткочасною пам'яттю (англ. Long Short-Term Memory, LSTM), що керують довгостроковими залежностями у відстеженні прогресу тестованих з часом. Вхідні функції включають журнали активності з мітками часу, коефіцієнти успіху та тривалість взаємодії з системою, нормалізовані для покращення конвергенції під час навчання.

Такі характеристики, як час, витрачений на виконання завдань, кількість спроб і коефіцієнти точності, масштабуються в діапазоні $[0; 1]$ за допомогою нормалізації від мінімуму до максимуму. Така попередня обробка гарантує стандартизацію всіх вхідних даних.

Адаптивна технологія навчання має модульну архітектуру, що об'єднує кілька взаємопов'язаних сегментів, кожен з яких має певну функцію в рамках навчального процесу. На етапі введення даних інформація в режимі реального часу збирається з платформи Moodle. Інформація включає такі параметри, як: реакція студентів на завдання; час, витрачений на вирішення завдання; кількість спроб вирішення; загальна взаємодія в межах електронної платформи.

Після збору дані обробляються в модулі аналізу закономірностей, що використовує алгоритми машинного навчання для виявлення відповідних тенденцій та закономірностей в рівні успішності студентів, що дозволяє детально оцінити індивідуальні сильні сторони та області для покращення.

Результати на цьому етапі надходять до модуля генерації користувацьких завдань, де створюються завдання, які динамічно коригуються відповідно до рівня кваліфікації кожного студента (див. рис. 2).

На даній схемі: Q_{avg} — середній рівень складності завдань; Q_{last} — рівень

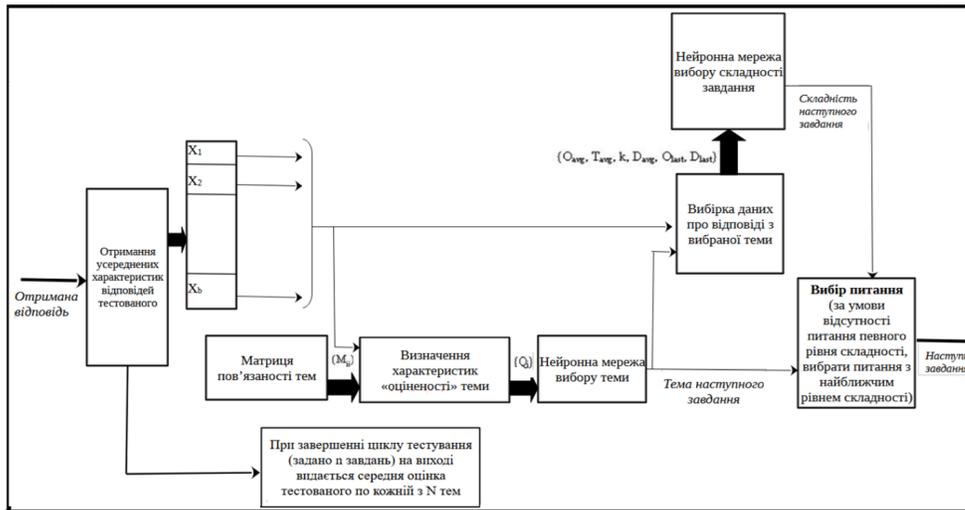


Рис. 2. Модуль генерації завдань за допомогою використання штучних нейронних мереж. Джерело [11]

складності останнього завдання; D_{avg} — середня тривалість «обдумування» відповіді на питання; D_{last} — тривалість «обдумування» відповіді на останнє питання; T_{avg} — поточна тема завдання; k — порядковий номер чергового для вирішення завдання.

У разі використання штучних нейронних мереж прямого поширення враховувати відповіді на всі питання пропонується подачею на вхід мереж усереднених параметрів відповідей по кожній темі $\{x_i\}$, для чого до складу системи вводиться відповідний розрахунковий модуль.

При виборі теми в процесі побудови індивідуальної траєкторії тестування необхідно враховувати як відповіді тестованого, так і пов'язаність тем між собою. Така послідовність дій реалізується задля вирішення таких завдань щоб оцінити володіння матеріалом при переході між темами та їх підрозділами та оптимізувати загальну кількість запитань, що ставляться по кожній з тем [12].

На вхід нейронної мережі (далі — НМ) пропонується подавати вектор коефіцієнтів «ступеня складності» тем $\{Q_i\}$, що отримується підсумовуванням частки правильних / неправильних відповідей з урахуванням складності та пов'язаності тем. Після того, як тема обрана, другий модуль НМ на основі усереднених даних з конкретної теми повинен визначати складність майбутнього питання. Логіка зниження чи підвищення складності питань визначається результатами, що демонструє тестований безпосередньо під час процесу автоматизованої перевірки знань.

На першому етапі розробки системи здійснюється проектування та навчання модуля НМ, що відповідає за вибір рівня складності. У ході дослідження було проаналізовано доцільність використання різних моделей НМ з точки зору належності даного завдання до конкретного класу завдань, які вирішуються певним типом НМ.

Завдання генеруються за допомогою адаптивних шаблонів, параметризованих відповідно до результатів аналізу. Зрештою, модуль зворотного зв'язку відповідає за надання студенту детальної інформації про його прогрес, виділення

областей успіху та пропонування конкретних рекомендацій щодо покращення його успішності в критичних областях.

Повний потік інформації між цими модулями представлено на рисунку 3:

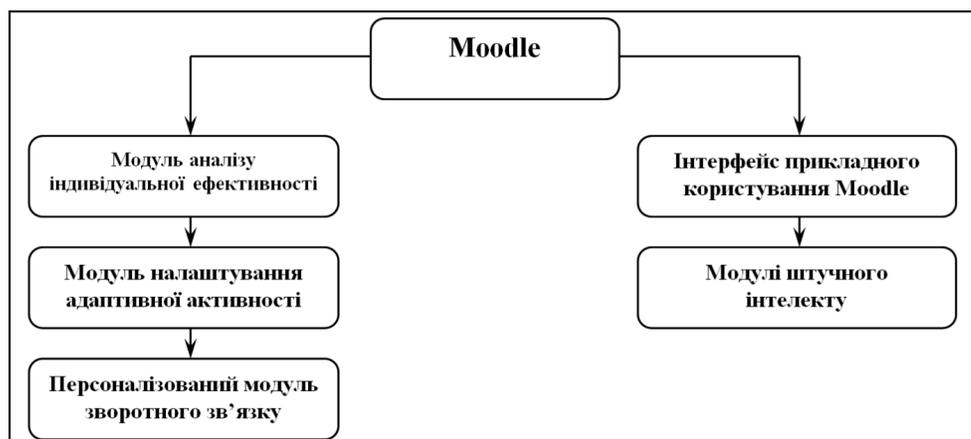


Рис. 3. Схема поєднання між собою функціональних блоків Moodle та модулів, що функціонують на основі штучних нейронних мереж. Джерело: [7]

Система динамічно коригує складність завдань на основі скоригованого індексу складності (англ., Adjusted Difficulty Index, ADI), що слугує основним показником для адаптації освітнього досвіду [13]. Цей індекс оцінює параметри успішності учнів, включаючи відсоток нещодавніх правильних відповідей (E); середній час, витрачений на вирішення завдань (T); кількість спроб, необхідних для виконання завдання (I). Ці змінні об'єднані в рівнянні (1):

$$ADI = \alpha \cdot E + \beta \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{1}{I}\right). \quad (1)$$

В наведеній рівності α ; β ; γ — вагові коефіцієнти, призначені кожній змінній, що калібруються під час фази розробки системи та визначаються за допомогою алгоритмів оптимізації протягом періоду тестування.

Для визначення сильних сторін та областей знань тестованого проводиться аналіз результатів, заснований на рівні кореляції між змінними успішності студентів. Система розраховує матрицю коефіцієнтів кореляції, кожен з елементів якої визначається наступним чином (див. рівняння (2)):

$$R_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma x_i \cdot \sigma x_j}. \quad (2)$$

В рівнянні (2) X_i ; X_j — окремі змінні продуктивності у виконанні завдань, такі як точність у певних видах діяльності або час, витрачений на їх вирішення; $\text{cov}(X_i, X_j)$ — значення коефіцієнту коваріації між цими змінними; σx_i і σx_j — стандартні відхилення відповідних змінних.

Значення в матриці кореляції інтерпретуються для виявлення областей, де студенти постійно показують низькі результати, що вказує на потенційно слабкі місця в системі навчання. В аналізі також використовується лінійна регресія

для прогнозування впливу конкретних втручань на успішність студентів. Рівняння регресії визначається як (див. рівняння (3)):

$$Y = \beta_0 + \sum_{k=1}^n \beta_k \cdot X_k. \quad (3)$$

В рівнянні (3) Y — цільова змінна, (наприклад, загальна продуктивність виконання завдань);

X_k — предикторна змінна, пов'язана з виконаними діями;

β_k — коефіцієнти, що вказують відносний внесок кожного предиктора в значення цільової змінної.

Під час перевірки рівня знань за допомогою використання “класичного” методу тестування, основним показником, що характеризує рівень знань тестованого, є загальний рівень правильності виконання всіх завдань тесту, що пропонуються для розв'язання. Бали, отримані в підсумку, “знеособлюються”, тобто в кінцевому рахунку невідомою є точна кількість балів, що була набрана при виконанні завдань різних рівнів складності – усі бали стають рівнозначними при підрахунку результатів.

При використанні нейромережевого блоку, що “підбирає” чергове завдання на основі результатів правильності / неправильності виконання попередніх тестових завдань, можливим є відстежити, скільки саме завдань, і якого рівня складності було обрано НМ в процесі виконання завдань всього тесту. Такий алгоритм, поряд з визначенням загального рівня правильності виконання завдань тесту ($W_{\text{заг}}$), дозволить визначати відсотковий показник правильності виконання завдань кожного з рівнів складності, сформувавши три додаткові числові характеристики виконання завдань тестованим: $W_{\text{лег}}$; $W_{\text{сер}}$; $W_{\text{важ}}$ (див. табл. 1).

Таблиця 1.

Відносні показники правильності / неправильності виконання завдань тесту

Показник правильності виконання завдань певного рівня складності	Умовне позначення	Розрахунок показника
Загальний рівень правильності виконання всіх завдань тесту	$w_{\text{заг}}$	$w_{\text{заг}} = \frac{m_{\text{заг}}}{n_{\text{заг}}} \times 100\%$
Рівень правильності виконання завдань першого (легкого) рівня складності	$w_{\text{лег}}$	$w_{\text{лег}} = \frac{m_{\text{лег}}}{n_{\text{лег}}} \times 100\%$
Рівень правильності виконання завдань другого (середнього) рівня складності	$w_{\text{сер}}$	$w_{\text{сер}} = \frac{m_{\text{сер}}}{n_{\text{сер}}} \times 100\%$
Рівень правильності виконання завдань третього (важкого) рівня складності	$w_{\text{важ}}$	$w_{\text{важ}} = \frac{m_{\text{важ}}}{n_{\text{важ}}} \times 100\%$

Особливістю такого методу сортування результатів виконання тестових завдань, є поділ тестованих на кілька навчальних груп у майбутньому:

- “звичайні” тестовані, результати яких в більшій чи меншій мірі демонструють менший показник правильності виконання завдань при підвищенні рівня складності;

- “відмінники”, що мають однаково високі показники правильності виконання на завданнях усіх рівнів складності;
- “двієчники”, що мають однаково низькі показники правильності виконання на завданнях усіх рівнів складності;
- “унікуми”, що демонструють низькі показники правильності виконання завдань легкого рівня складності, проте високі показники правильності виконання важких завдань.

У графічному вигляді такий алгоритм підбору завдань з відповідним рівнем складності виглядає наступним чином (див. рис. 4).

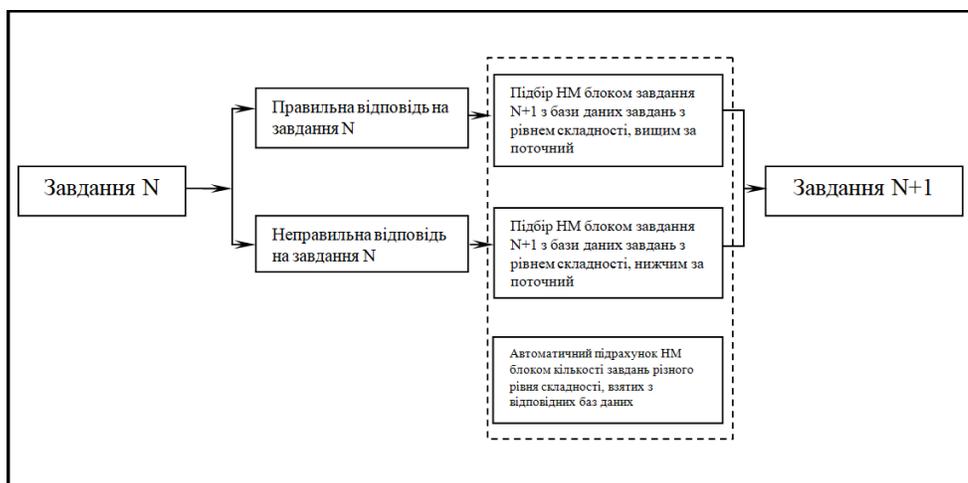


Рис. 4. Схема поєднання між собою функціональних блоків Moodle та модулів, що функціонують на основі штучних нейронних мереж. Джерело: [7]

Для перевірки робочої гіпотези дослідження, що полягає в оцінюванні ефективності використання нейромережевого модуля під час тестового контролю рівня знань здобувачів вищої освіти, було організовано та проведено педагогічний експеримент із використанням реальних і модельних даних. Необхідність такого експерименту зумовлена потребою емпірично відокремити ефект застосування адаптивного алгоритму підбору завдань від впливу випадкового вгадування та індивідуальної варіативності підготовки здобувачів.

Експериментальна частина дослідження була спроектована таким чином, щоб забезпечити порівнянність результатів у різних умовах тестування та водночас зберегти зв'язок із реальними процедурами зовнішнього оцінювання. З цією метою як вихідну емпіричну базу використано результати національного мультипредметного тесту з математики, продемонстровані здобувачами під час вступу до закладів вищої освіти. Подальший дизайн дослідження передбачав порівняння цих результатів із даними адаптивного тестування та з результатами імітаційного моделювання, що дозволило реалізувати трикомпонентну схему аналізу.

Такий підхід дав змогу розглядати ефективність нейромережевого модуля не лише з позицій зміни підсумкових балів, але й з точки зору трансформації структури розподілу результатів і діагностичної чутливості тесту до реального рівня предметних компетентностей здобувачів.

Для формування базової групи учасників (G_1) як вихідну емпіричну основу було використано результати складання національного мультипредметного тесту (НМТ) з математики під час вступної кампанії 2025 року. Вибір саме НМТ з математики зумовлено тим, що цей субтест має стандартизовану структуру, є обов'язковим для значної частини вступників і забезпечує достатню варіативність рівнів складності завдань для подальшого порівняльного аналізу.

У дослідженні як емпіричну базу було використано відкритий набір даних, зібраний та опублікований авторами в статті [14]. Цей датасет містить детальні результати проходження стандартизованого тестування з математики для великої когорти випускників середніх шкіл України, зокрема дані щодо правильних відповідей, балів за шкалою оцінювання та демографічної інформації. До вибірки включено 1000 вступників, які виконували математичний субтест у штатному режимі НМТ, тобто в умовах зовнішнього стандартизованого оцінювання, без будь-яких процедур адаптивного добору завдань. У контексті даного дослідження результати цієї групи інтерпретуються як «неадаптивний еталон», оскільки учасники виконували фіксований за структурою тест, а складність набору завдань для кожного учасника не коригувалася в процесі виконання тесту. Такий підхід дозволяє використовувати G_1 як базу для подальшого зіставлення з результатами адаптивного тестування (контрольна група) та з результатами імітаційного моделювання.

Структура експериментального тесту була побудована за аналогією до структури загальнонаціональних тестів з математики, що проводилися Українським центром оцінювання якості освіти у 2025 році, що забезпечувало змістову та форматну порівняльність результатів. В основу було покладено типовий формат НМТ з математики, який включає завдання різних типів і рівнів складності, спрямовані на перевірку як базових обчислювальних умінь, так і сформованості аналітичного мислення та навичок розв'язування нестандартних задач. Національний тест з математики у 2025 році містив 22 завдання, які поєднували завдання з вибором однієї правильної відповіді, завдання на встановлення відповідностей та завдання відкритої форми з короткою числовою відповіддю. Така структура дозволяє забезпечити багатовимірну перевірку математичних компетентностей, оскільки різні формати завдань залучають відмінні когнітивні стратегії та рівні опрацювання інформації.

Система оцінювання у межах НМТ передбачала максимальний результат 32 бали. Завдання з вибором однієї правильної відповіді оцінювалися дихотомічно (0 або 1 бал), що відповідає класичній моделі тестів із закритими питаннями. Завдання на встановлення відповідностей передбачали оцінювання кожної правильно встановленої пари, що забезпечувало часткову градацію результату в межах одного завдання. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю оцінювалися за принципом повної правильності відповіді, із нарахуванням двох балів у разі коректного результату. В експериментальному варіанті тесту збережено загальну логіку структури та змістове наповнення, також систему нарахування балів за правильність виконання завдань.

Максимальна кількість балів, що можна було набрати за виконання експериментального тесту, становила 32 бали.

Отже, $G - 1$ репрезентує реальний «вхідний рівень» математичної підготовки вступників 2025 року та слугує статистичною базою для (а) порівняння з

повторним тестуванням тих самих осіб у форматі адаптивного нейромережевого підбору завдань, а також (б) параметризації індивідуальних імовірнісних моделей здобувачів у контурі імітаційного моделювання.

Друга група дослідження (G_2) формувалася зі здобувачів першого року навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет» з факультету математики та цифрових технологій та факультету інформаційних технологій, які добровільно проходили діагностичне тестування з математики в електронному освітньому середовищі. Обсяг цієї вибірки становив 200 студентів, що відповідає формату пілотного впровадження адаптивного тестування в університетській практиці. Контроль знань здійснювався на платформі Moodle, яка забезпечувала уніфіковану процедуру проведення тесту, автоматизований облік відповідей та стандартизоване нарахування балів.

До системи тестування було інтегровано нейромережевий модуль адаптивного підбору завдань, який у процесі виконання тесту коригував складність наступних елементів відповідно до поточної успішності здобувача. У результаті кожен учасник проходив індивідуалізовану траєкторію тестування, у межах якої послідовність і складність завдань визначалися алгоритмічно. Такий підхід дозволяв підтримувати належний рівень діагностичної чутливості тесту для студентів із різним рівнем підготовки.

Оскільки персональне зіставлення результатів НМТ і результатів університетського тестування не здійснювалося, друга група не розглядалася як продовження базової вибірки на індивідуальному рівні. Натомість її результати використовувалися для агрегованого порівняння групових розподілів балів із даними НМТ, що дало змогу оцінити зміну структури результатів при переході від фіксованого формату тестування до адаптивного. У цьому контексті G_2 виконує роль контрольної вибірки, яка відображає результати застосування нейромережевого модуля в реальному освітньому середовищі закладу вищої освіти та створює підґрунтя для зіставлення з базовими даними та результатами імітаційного моделювання.

У межах третьої групи дослідження (G_3) було реалізовано імітаційне моделювання, спрямоване на відтворення очікуваної поведінки здобувачів у середовищі адаптивного тестування за умови незмінного рівня їхніх знань. На відміну від першої та другої груп, де використовувалися реальні результати тестування, у G_3 застосовувалися індивідуальні стохастичні моделі студентів, параметризовані на основі фактичних результатів НМТ з математики. Такий підхід дозволив сформулювати контрфактичний сценарій, у якому зберігається індивідуальний профіль знань здобувача, але усувається вплив подальшого навчання, мотиваційних змін чи ситуативних факторів повторного тестування.

Для кожного учасника базової групи було побудовано індивідуальну модель, що відображала структуру його предметної підготовки за тематичними розділами математичного блоку НМТ 2025 року. Параметризація здійснювалася на основі частки правильних відповідей у межах кожного змістового компонента. Відповідно до офіційної програми НМТ з математики, ці компоненти охоплюють числа і вирази, рівняння та нерівності із системами, функції, елементи комбінаторики і початки теорії ймовірностей, а також планіметрію та стереометрію [15]. Саме за цими змістовими лініями формувався вектор індивідуальних ймовірностей правильної відповіді.

У межах моделі кожне завдання певного розділу розглядалося як випадкова подія з імовірністю успіху, що дорівнює емпірично спостереженій частці правильних відповідей студента у цьому розділі під час НМТ. Таким чином, модель не «навчалася» і не змінювала свої параметри, а відтворювала стабілізований профіль знань. Наприклад, якщо здобувач продемонстрував 0.7 правильних відповідей у блоці, пов'язаному з функціями, то під час імітації кожне завдання цього блоку виконувалося правильно з імовірністю 0.7. Така схема дозволяє трактувати модель як статистичний еквівалент студента з фіксованим рівнем компетентності.

Імітаційне тестування в G_3 здійснювалося з використанням того самого нейромережевого адаптивного алгоритму підбору завдань, що й у контрольній групі. Для кожної індивідуальної моделі проводилося десять повних прогонів тесту, після чого результати агрегувалися шляхом усереднення підсумкових балів. Багаторазове повторення симуляції дало змогу зменшити вплив випадкових коливань і отримати стабільну оцінку очікуваного результату в адаптивному середовищі.

Таким чином, група G_3 виконувала функцію аналітичного еталона, який дозволяв відокремити ефект адаптивного алгоритму від реального когнітивного прогресу здобувачів. Якщо результати контрольної групи (G_2) відхиляються від G_3 , це може свідчити про навчальний ефект або зміну рівня підготовки. Якщо ж G_2 і G_3 демонструють подібні розподіли, то спостережувані зміни зумовлені переважно властивостями адаптивного добору завдань. У цьому сенсі імітаційна складова підвищує внутрішню валідність експерименту та дозволяє коректніше інтерпретувати отримані результати.

Для кількісної перевірки відмінностей між результатами фіксованого неадаптивного тестування та результатами, очікуваними в адаптивному середовищі за збереженого індивідуального профілю знань, було здійснено порівняння базової групи (G_1) та групи імітаційного моделювання (G_3). В якості емпіричної основи використано агреговані розподіли балів, отримані в ході експерименту, описаного раніше. Розподіли згруповано за трьома інтервалами підсумкових балів, що відповідають низькому, середньому та високому рівням результатів.

Таблиця 2.

Порівняння результатів базової групи (G_1) та групи імітаційного моделювання (G_3)

Діапазон балів	G_1 : НМТ без адаптивного модуля (осіб)	G_3 : імітаційне моделювання (осіб)	Абсолютна зміна	Відносна зміна, %
0–15	122	275	+153	+125.4
16–21	690	549	-141	-20.4
22–32	188	176	-12	-6.4

Наведені дані свідчать про суттєвий перерозподіл результатів між діапазонами. Найбільш виражена зміна спостерігається у нижньому інтервалі балів, де кількість результатів у G_3 зросла на 125.4% порівняно з базовою групою. Водночас у середньому діапазоні зафіксовано зменшення на 20.4%, що вказує на скорочення частки результатів, які раніше концентрувалися в цій зоні. У

верхньому діапазоні зміни є мінімальними – зменшення становить лише 6.4%, що в межах досліджуваної вибірки не можна вважати статистично вагомим відхиленням. Такий характер змін узгоджується з інтерпретацією, наведеною у вихідному описі експерименту: значна частина учасників, які під час вступного тестування демонстрували середній рівень, у середовищі адаптивного (у даному випадку модельованого) тестування переходять до нижчого діапазону результатів. Фактично це означає, що частина здобувачів, які у фіксованому тесті могли потрапити до категорії «середніх» за рахунок випадкового вгадування, в адаптивному форматі демонструють результати, ближчі до їх реального рівня підготовки.

Імітаційна модель, у якій відповіді генеруються відповідно до індивідуальних імовірностей правильних відповідей за змістовими розділами, зменшує вплив ситуативних факторів і випадкових успіхів. Саме тому спостерігається перетікання частини результатів із середнього інтервалу до нижнього, тоді як група високих результатів залишається відносно стабільною. Отже, зіставлення G_1 та G_3 демонструє, що адаптивна логіка підбору завдань (навіть у модельному відтворенні) підвищує діагностичну роздільну здатність тесту і зменшує ефект випадкового завищення балів. Це опосередковано підтверджує гіпотезу про доцільність використання нейромережевого адаптивного підбору завдань для більш валідного вимірювання рівня навчальних досягнень.

Для оцінювання відмінностей між результатами стандартизованого тестування під час вступу та результатами діагностичного тестування на першому курсі було здійснено порівняння показників другої групи (G_2). Аналіз проводився на рівні агрегованих розподілів балів за трьома інтервалами, що відповідають низькому, середньому та високому рівням результатів. Оскільки на етапі підготовки рукопису повні емпіричні дані ще узагальнюються, нижче наведено ілюстративний приклад розподілу, змодельований за аналогією до тенденцій, виявлених у базовій вибірці. Ці дані мають демонстраційний характер і використовуються для представлення підходу до аналізу.

Таблиця 3.

Приклад порівняння результатів НМТ та тестування на 1 курсі (G_2 , $n = 200$, модельні дані)

Діапазон балів	НМТ (осіб)	Тест на 1 курсі (осіб)	Абсолютна зміна	Відносна зміна, %
0–15	25	55	+30	+120.0
16–21	130	110	-20	-15.4
22–32	45	35	-10	-22.2

Наведений розподіл демонструє тенденцію до зростання частки низьких результатів та відповідного скорочення середнього діапазону, тоді як сегмент високих балів змінюється помірно. Подібна конфігурація узгоджується з логікою адаптивного тестування, за якої зменшується вплив випадкового вгадування і підвищується вимогливість до стабільності знань. Частина здобувачів, які у фіксованому форматі могли демонструвати «середні» результати, в адаптивному середовищі переходять до нижчого інтервалу, що свідчить про більш консервативне й водночас точніше вимірювання рівня підготовки.

Водночас інтерпретація таких змін у межах G_2 потребує обережності, оскільки тут потенційно поєднуються кілька чинників: ефект адаптивного алгоритму, навчальна динаміка першого курсу, а також природна варіативність повторного тестування. Саме тому результати G_2 у подальшому доцільно розглядати у поєднанні з аналізом G_1 та G_3 , де вплив окремих факторів розмежується більш чітко.

Узагальнюючи результати педагогічного експерименту, представлені в табл. 2 і табл. 3, можна відзначити узгоджену тенденцію до перерозподілу результатів у бік нижчих діапазонів балів за умов адаптивного підбору завдань. Як у моделюванні (G_3), так і в реальному університетському тестуванні (G_2) спостерігається скорочення частки «середніх» результатів і відносна стабільність групи високих досягнень, що свідчить про зменшення впливу випадкового вгадування та підвищення діагностичної чутливості тесту. У сукупності ці результати підтверджують, що нейромережевий адаптивний підбір завдань сприяє більш чіткій стратифікації здобувачів за рівнем підготовки та створює передумови для більш валідного і педагогічно інформативного оцінювання навчальних досягнень.

3. Висновки. Одним із дієвих інструментів, що може бути використаний в процесі розробки завдань та перевірки результатів академічного тестування, є штучні нейронні мережі як складова інформаційних технологій. Їх застосування допомагає спростити роботу розробників тестових завдань та більш ефективно створювати профілі знань тестованих.

Проведений експеримент з оцінювання рівня знань тестованих з математики підтвердив припущення про ефективність використання нейромережевого блоку, що був інтегрований до електронної системи навчальної платформи Moodle.

Майбутні дослідження можуть бути зосереджені на оптимізації алгоритмів глибокого навчання та зменшенні їхньої обчислювальної складності для полегшення їх впровадження в освітніх закладах з обмеженими ресурсами. Також було б цінним дослідити інтеграцію нових технологій, таких як віртуальна реальність або аналітика навчання, в освітній процес.

Конфлікт інтересів

Андрашко Юрій Васильович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Вронський: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проект. Ю. В. Андрашко: написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Вронський С. В., Андрашко Ю. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Vorotnikova, Z. Ye. (2019). Modern Informational Technologies Application in Educational Process. *European Humanitarian Studies: State and Society*, 3(1), 43–51. <https://doi.org/10.38014/ehs-ss.2019.3-i.04> [In Ukrainian].
2. Osmiatchenko, V. O., Hrabariev, A. V., & at al. (2023). Peculiarities of Informational Technologies Implementation into Educational Process. *Actual Issues of Modern Science*, 7(13), 60–74. [https://doi.org/10.52058/2786-6300-2023-7\(13\)-60-74](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2023-7(13)-60-74) [In Ukrainian].
3. Shubin, I. Yu. (2019). Logical Networks and Its Usage for Morfological Tasks Solution. In *III International Conference «Innovational Technologies in Science and Education»*. Amsterdam: Netherlands, 402–405. <https://ceur-ws.org/Vol-2604/paper75.pdf> [In Ukrainian].
4. Baker, R. (2019). Educational data mining and learning analytics. *The Cambridge handbook of the learning sciences*. <https://doi.org/10.1201/b10274-15>
5. Corbett, A. T., & Anderson, J. R. (1995). Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge. *User Modeling and User-Adapted Interaction*, 4, 253–278. <https://doi.org/10.1007/bf01099821>
6. Fincham, E., Whitelock-Wainwright, A., Kovanović, V., Joksimović, S., van Staalduinen, J. P., & Gašević, D. (2019). Counting clicks is not enough: Validating a theorized model of engagement in learning analytics. In *Proceedings of the 9th International Conference on Learning Analytics & Knowledge*, 501–510. <https://doi.org/10.1145/3303772.3303775>
7. Bigler, D., & Hagel, G. (June, 2023). Technical report: Define a customized course and import it into moodle without changes to the configuration of the moodle system. In *Proc. 5th Eur. Conf. Softw. Eng. Educ.*, 180–183. <https://doi.org/10.1145/3593663.3593668>
8. Shilowaras, M., & Jusoh, N. A. (2022). Implementing artificial intelligence chatbot in moodle learning management system. *Eng., Agricult., Sci. Technol. J. (EAST-J)*, 1(1), 70–75. <https://doi.org/10.37698/eastj.v1i1.122>
9. Lohmann, M. J., Riggleman, S., & Higgins J. P. (Feb., 2024). Using a mobile device for early childhood classroom behavior data collection. *Early Childhood Educ. J.*, 52(2), 427–434. <https://doi.org/10.1007/s10643-023-01443-5>
10. Wang, X., Maeda, Y., & Chang, H.-H. (2025). Development and techniques in learner

- model in adaptive e-learning system: A systematic review. *Comput. Educ.*, 225, 105184. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2024.105184>
11. Pikuliak, M. V., Savka, I. Ya., & Dutchak, M. S. (2022). Neural Networks Apparatus Usage for Adaptive Study Trajectory Research. *Komp'uterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo*, 47, 91–97. <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2022-47-14>
 12. Otto, P., Bodyanskiy, Y., & Kolodyazhniy, V. (2003). A new learning algorithm for a forecasting neuro-fuzzy network. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10, 399–409. <https://doi.org/10.3233/ica-2003-10409>
 13. Piech, C., Bassen, J., Huang, J., Ganguli, S., Sahami, M., Guibas, L. J., & Sohl-Dickstein, J. (2015). Deep knowledge tracing. In *Advances in neural information processing systems*, 505–513. <https://doi.org/10.1145/2724660.2724668>
 14. Zakharchenko, T., Bell, A., Drushchak, N., Konopatska, O., Khan, F. A., & Stoyanovich, J. (2025). Estimating the impact of the Russian invasion on the displacement of graduating high school students in Ukraine. *Humanities and Social Sciences Communications*, 12, Article 836. <https://doi.org/10.1057/s41599-025-04675-5>
 15. Ukrainian Center for Educational Quality Assessment. (2025). National multidisciplinary test: Mathematics program content. Retrieved from <https://testportal.gov.ua/matematyka-2025>

Vronskiy S. V., Andrashko Yu. V. Information technologies for testing knowledge control of higher education students: options for their modernization.

The article discusses various approaches to processing and evaluating test control results using an informational assessment system. The possibilities of neural networks usage in academic testing have been studied within Moodle informational basis. This will significantly improve the quality of knowledge level control, which can be carried out using automated educational testing systems. The effectiveness of properly assessing knowledge and skills level of higher education applicants using a modified academic testing system based on an integrated neural network block was investigated.

Keywords: academic testing, level of knowledge, information systems, neural networks, Moodle.

Отримано: 30.10.2025

Прийнято: 20.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 616.2:004.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).127-136](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).127-136)Д. О. Камінський¹, В. М. Льовкін²

¹ Національний університет «Запорізька політехніка»,
студент магістратури групи КНТ-214м
kaminskyi.denys@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-4097-8584>

² Національний університет «Запорізька політехніка»,
доцент кафедри програмних засобів,
кандидат технічних наук, доцент
vliovkin@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6890-2807>

МЕТОД ДІАГНОСТУВАННЯ ВИПАДКІВ ПНЕВМОНІЇ НА ОСНОВІ КОМПОНЕНТНОЇ СТРУКТУРИ МОДЕЛІ ТА АЛГОРИТМІВ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ

У статті розглянуто задачу автоматизованого виявлення пневмонії на рентгенівських знімках грудної клітини. Проведено аналіз існуючих підходів на основі глибокого навчання та Transfer Learning. Виявлено, що класичні глибокі мережі (ResNet, VGG) часто є надлишковими для задач бінарної класифікації з обмеженою варіативністю класів. Запропоновано метод, в основі якого лежить модифікована архітектура згорткової нейронної мережі (CNN) з компонентною структурою, деталізованою в роботі, резидуальними з'єднаннями блоків та оптимізованою кількістю шарів. Окремо представлено етап попередньої обробки даних, розширений аугментацією для усунення дисбалансу класів. Наведено результати проведеного експериментального дослідження на відкритому наборі даних. Досягнуто для результуючої моделі показників точності 98.41% та чутливості 98.29%, що підтверджує ефективність запропонованого методу порівняно з базовими архітектурами моделей.

Ключові слова: пневмонія, діагностування, рентгенівські знімки, згорткові нейронні мережі, глибоке навчання, обробка медичних зображень, аугментація даних.

1. Вступ. Пневмонія залишається однією з провідних причин смертності від інфекційних хвороб у світі. Лише у 2019 році від цього захворювання померло близько 2,5 мільйона осіб [1]. Клінічні прояви пневмонії можуть варіюватися від легких симптомів до критичних станів, що ускладнює своєчасну діагностику. Легкі симптоми та ускладнений доступ до медичних фахівців у багатьох країнах стають критичною комбінацією за умов підвищеної смертності. Це підкреслює важливість виявлення випадків пневмонії на практиці.

Основним методом виявлення захворювання є рентгенографія грудної клітини. Проте інтерпретація знімків є складним завданням, що залежить від кваліфікації лікаря та піддається впливу людського фактору, що може бути виражений у втомі фахівця, суб'єктивності його прийняття рішень. Сучасний розвиток методів штучного інтелекту, зокрема засобів комп'ютерного зору, дозволяє створювати системи підтримки прийняття лікарських рішень (СППР), які б допомагали медичним фахівцям під час встановлення діагнозів. СППР може надати базове рішення, виділити підстави для таких рішень, а медичний фахівець може прийняти остаточне рішення, при цьому спираючись на результати роботи моделі розпізнавання і уникаючи таким чином впливу людського фактору.

Розробка ефективних стосовно використання ресурсів та точних моделей автоматизованого розпізнавання патологій у вигляді пневмонії на медичних зображеннях є актуальною науково-практичною задачею.

2. Постановка завдання. У роботі має бути розв'язано задачу автоматизованого виявлення пневмонії з врахуванням додаткових умов, які можна розглядати як обмеження для цієї задачі.

Загалом автоматизоване виявлення пневмонії лежить в основі відповідної задачі діагностування, за результатами розв'язання якої встановлюється остаточний діагноз за конкретним розглянутим випадком. Кожен випадок представлений зображенням, що формується як рентгенівський знімок. Відповідно вхідними даними для задачі є сам i -ий файл зображення P_i , який може мати різний формат представлення. Сам формат зображення впливає безпосередньо на те, в якому порядку та яка саме безпосередньо структура даних подається на вхід. Тому деталізувати структуру P_i не є доцільним, оскільки вибір формату значно впливає на структуру даних.

Виходом задачі є клас C_i , який для i -го випадку можливого захворювання пацієнта на пневмонію визначає, чи є патологія на знімку, яка відповідає пневмонії, чи немає. Тобто клас C_i може приймати значення 1, коли пневмонія виявлена, або 0, коли пневмонія не виявлена.

Безпосередньо розв'язанням задачі автоматизованого виявлення пневмонії є визначення виду функції f , яка визначає, яким чином вхідні дані мають бути перетворені на вихідні на наявних N екземплярах:

$$C_i = f(P_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Додатковими вимогами до виду цієї функції, які мають бути враховані в роботі, є забезпечення високої точності перетворення з оптимізацією структури моделі, яка визначає це перетворення, для зменшення складності моделі, а таким чином вимог до необхідних обчислювальних ресурсів.

3. Огляд літератури. Проведений огляд літератури, в якій представлені результати досліджень щодо автоматизованого розпізнавання пневмонії, демонструє активне вивчення даної проблеми. Загалом сучасні підходи до аналізу медичних зображень базуються на використанні різних варіантів згорткових нейронних мереж або convolutional neural networks (CNN).

Дослідження [2] використовує модель CNN на основі архітектури VGG-19, здійснюючи розпізнавання за рядом класів, включаючи COVID-19, туберкульоз та пневмонію. У роботі [3] класифікація здійснюється за 3 можливими варіантами: наявність пневмонії як результату COVID-19, наявність пневмонії, яка не відноситься до результату COVID-19 та відсутність пневмонії, використовуючи для цього модель на основі архітектури EfficientNet CNN. Дослідження [4] направлено також на розпізнавання на рентгенівських знімках одразу 3 класів: COVID-19, пневмонія, нормальний стан, застосовуючи гібридну архітектуру моделі, що базується на поєднанні архітектури XceptionNet CNN та зорових трансформерів. Подібний підхід використовується також і в роботі [5], при цьому класифікація реалізується на вірусну пневмонію, бактеріальну, COVID-19 та нормальний стан, а в гібридній моделі застосовуються також механізми уваги.

У дослідженні [6] розглядаються такі архітектури CNN моделей як EfficientNet, CheXNet, ResNet50 та різні варіанти ланцюжка передобробки даних,

які потім передаються моделі. У підсумку обрано модель на основі архітектури CheXNet та ланцюжок передоброби, що послідовно включає зміну розміру, сегментацію легенів, вирівнювання гістограми, нормалізацію. Класифікація відбувається тільки на наявність та відсутність пневмонії.

Багато дослідників використовують підхід Transfer Learning, застосовуючи попередньо навчені моделі. Такий підхід застосовувався й у роботі [7], де автори використовували вже доступний педіатричний набір даних рентгенівських знімків грудної клітки для класифікації випадків пневмонії, адаптуючи CNN до цієї задачі. Цей підхід також застосований в роботах [8]-[10].

У роботі [8] класифікація відбувається в 3 варіаціях: перша — нормальний стан або пневмонія, друга — бактеріальна або вірусна пневмонія, третя — нормальний стан, бактеріальна пневмонія, вірусна пневмонія. Попередньо навчені моделі мали архітектури AlexNet, ResNet18, DenseNet201, SqueezeNet. Найкращі результати були отримані за архітектурою DenseNet201. У свою чергу в роботах [9, 10] здійснюється бінарна класифікація, при цьому фреймворк у роботі [9] використовує в основі одразу ряд моделей: Xception, VGG16, ResNet152V2, а дослідження [10] має своїм результатом модель на основі архітектури DenseNet169.

Попри високі результати, подібні моделі зазвичай містять надто багато параметрів для відносно простої бінарної класифікації, а саме така постановка цієї задачі розглядається в даній роботі, й потребують значних обчислювальних ресурсів. Через це виникає потреба у розробці спеціалізованих архітектур, які поєднували б точність і обчислювальнуощадність та забезпечували стабільний градієнтний потік під час навчання.

4. Матеріали і методи. Метод діагностування випадків пневмонії, який представлено в цій роботі, складається з послідовності основних етапів, що включають:

- отримання набору зображень рентгенівських знімків грудної клітини для формування навчальної та валідаційної вибірок;
- попереднє оброблення зображень рентгенівських знімків грудної клітини з навчальної та валідаційної вибірок;
- створення моделі розпізнавання випадків пневмонії за описаною нижче структурою;
- навчання моделі розпізнавання випадків пневмонії на основі навчальної та валідаційної вибірок;
- отримання зображення нового рентгенівського знімку грудної клітини;
- попередня обробка отриманого зображення рентгенівського знімку грудної клітини;
- класифікація навченою моделлю розпізнавання випадків пневмонії отриманого і передобробленого зображення та візуалізація результату;
- прийняття рішення щодо остаточного діагнозу медичним фахівцем на основі результатів роботи моделі розпізнавання випадків пневмонії.

Оскільки нерідко в конкретних вибірках кількість екземплярів є достатньо обмеженою щодо формування зокрема валідаційної вибірки, зважаючи на невелику загальну кількість спостережень, то для реалізації етапу попереднього оброблення зображень рентгенівських знімків грудної клітини з навчальної та валідаційної вибірок для підвищення узагальнюючої здатності навченої моделі

розпізнавання випадків пневмонії та боротьби з дисбалансом класів запропоновано застосовувати методи аугментації даних:

- зміна масштабу;
- випадкове обертання;
- зміна яскравості;
- горизонтальні та вертикальні зсуви;
- зсув із деформацією;
- горизонтальне відображення.

Ключовим елементом запропонованого методу є розроблена архітектура моделі CNN. На відміну від стандартних послідовних моделей, запропонована структура моделі розпізнавання випадків пневмонії побудована на основі взаємодіючих блоків у складі компонентів. Кожен такий компонент містить блоки загальної моделі, які мають резидуальні (залишкові) з'єднання, що дозволяє уникнути проблеми згасання градієнта при навчанні глибоких нейронних мереж.

Структурно розроблена модель розпізнавання випадків пневмонії складається з трьох логічних компонентів:

- вхідного каскаду;
- тіла мережі;
- класифікатора.

Перший компонент моделі, вхідний каскад, призначений для швидкого зменшення просторової розмірності вхідного зображення та виділення первинних ознак.

Вхідний каскад включає наступну внутрішню структуру:

- згортковий шар (Conv2D) з ядром розміром 7×7 пікселів, кроком рівним 2 та 32 фільтрами. Велике ядро дозволяє охопити ширший рецептивний простір на початку;
- шар пакетної нормалізації та функцію активації LeakyReLU ($\alpha = 0.01$);
- шар максимального пулінгу (MaxPooling2D) розміром 3×3 із кроком 2, що додатково зменшує розмірність карт ознак у 4 рази порівняно з вхідним зображенням, знижуючи обчислювальне навантаження на наступні шари.

Функцію активації LeakyReLU $\delta(x)$ запропоновано використовувати у вигляді:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0.01x, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Основний компонент архітектури моделі, тіло мережі, побудований з послідовності чотирьох резидуальних блоків. Кожен блок виконує перетворення вхідного тензора x у вихідний сигнал y за правилом додавання залишку:

$$y = \delta(F(x, \{W_i\}) + x),$$

де x — вхідний вектор блоку, y — вихідний вектор, $F(x, \{W_i\})$ — залишкова функція, що навчається (результат роботи згорткових шарів).

Внутрішня структура кожного блоку включає:

- головний шлях: Conv2D (ядро 3×3) — пакетна нормалізація — LeakyReLU — Conv2D (ядро 3×3) — пакетна нормалізація;
- побічний шлях: якщо розмірність входу та виходу відрізняється (через зміну кроку або кількості фільтрів), застосовується згортка 1×1 для вирівнювання розмірностей. В іншому випадку вхід додається до виходу без змін;
- об'єднання: результати головного та побічного шляхів додаються, після чого застосовується фінальна активація LeakyReLU.

Використано 4 послідовні блоки зі зростаючою кількістю фільтрів:

- блок 1: 32 фільтри (збереження розмірності);
- блок 2: 64 фільтри (зі зменшенням розмірності, крок рівний 2);
- блок 3: 128 фільтрів (зі зменшенням розмірності, крок рівний 2);
- блок 4: 256 фільтрів (зі зменшенням розмірності, крок рівний 2).

У всіх згорткових шарах блоків застосовано L2-регуляризацію ваг для запобігання перенавчанню.

Фінальний компонент мережі, класифікатор, відповідає за прийняття рішення за наступною внутрішньою структурою:

- шар глобального середнього пулінгу (GlobalAveragePooling2D): перетворює набір двовимірних карт ознак ($7 \times 7 \times 256$) у одновимірний вектор ознак довжиною 256. Це дозволяє відмовитися від повнозв'язних шарів, що суттєво зменшує кількість параметрів моделі;
- повнозв'язний шар на 128 нейронів з функцією активації ReLU;
- шар регуляризації Dropout з коефіцієнтом 0.6 (відключення 60% нейронів під час навчання);
- вихідний повнозв'язний шар з 1 нейроном та сигмоїдною функцією активації, яка повертає ймовірність належності зображення до класу виявленої пневмонії.

Структурна схема розробленої структури моделі розпізнавання випадків пневмонії наведена на рис.1.

5. Експерименти. Для проведення експериментального дослідження діагностування випадків пневмонії було використано набір даних з відкритого джерела Kaggle [11], що містить 5 863 рентгенівські зображення, розподілені за 2 класами за відсутністю або наявністю пневмонії (класи «Normal» та «Pneumonia» відповідно). Дані у наборі [11] початково розподілені на навчальну (5 216 екземплярів), тестову (624 екземплярів) та валідаційну (16 екземплярів) частини. Через недостатній обсяг початкового валідаційного набору було проведено перерозподіл: частину зображень із навчальної вибірки було перенесено до валідаційної, що дозволило довести її обсяг до 900 екземплярів для отримання статистично значущих оцінок.

Після формування вибірок й проведення експериментів було вирішено що даного набору не достатньо для забезпечення якісної узагальнювальної здатності моделей, через це до навчального й тестового набору було застосовано методи аугментації. Валідаційну вибірку було вирішено залишити без змін для збереження чистоти експерименту та забезпечення коректного порівняння архітектур на реальних, незмінених даних. Ця валідаційна вибірка використовувалась для всіх моделей та методу під час експериментального дослідження.

Для оцінки якості класифікації було використано метрики:

- точність (Accuracy);
- прецизійність (Precision);
- чутливість (Recall/Sensitivity);
- специфічність (Specificity).

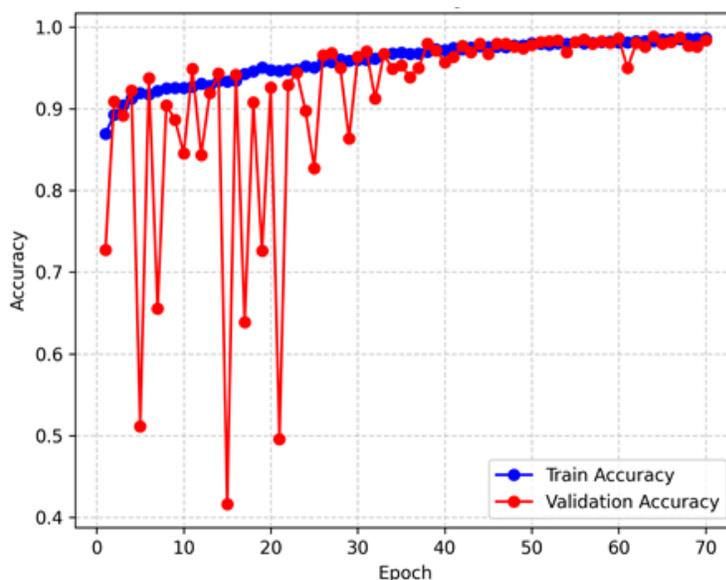


Рис. 2. Графік зміни точності моделі розпізнавання випадків пневмонії на етапі навчання.

Результати експериментального дослідження діагностування випадків пневмонії наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

Порівняння точності розпізнавання різних моделей та методів для діагностування пневмонії грудної клітини

Метод / модель	Точність	Прецизійність	Чутливість	Специфічність
Запропонований метод	0.9841	0.9953	0.9829	0.9874
AlexNet	0.9628	0.9851	0.9603	0.9681
ResNet50	0.9594	0.9872	0.9561	0.9647
MobileNetV2	0.9545	0.9855	0.9517	0.9622
VGG19	0.9499	0.9852	0.9448	0.9523
DenseNet121	0.9386	0.9711	0.9304	0.9461

6. Обговорення результатів. Запропонований метод діагностування випадків пневмонії продемонстрував найвищі показники серед моделей за архітектурами, які досліджувались. Зокрема, висока чутливість (0.9829) є критично важливою характеристикою для медичних систем, оскільки мінімізує ймовірність пропуску хворих пацієнтів.

За більшістю показників, окрім прецизійності, модель AlexNet продемонструвала другий результат. У відносних одиницях запропонований метод покращив результат моделі AlexNet за показником точності на 2.21%, чутливості

— на 2.35%, специфічності — на 1.99%. За показником прецизійності різниця становила 1.035%. При цьому другим результатом за цим показником характеризувалась модель ResNet50, різниця запропонованого методу з якою склала 0.82%.

Однак, розглядаючи різницю за кожним показником, слід додатково враховувати, як запропонована модель у складі запропонованого методу виконує обмеження задачі автоматизованого виявлення пневмонії стосовно складності моделей. Якщо порівнювати між собою цю модель з моделлю AlexNet, то кількість параметрів модель AlexNet складає 30 мільйонів, у той час як кількість параметрів запропонованої моделі дорівнює 1.2 мільйони, що в 25 разів менше. Відповідно вимоги запропонованої моделі до необхідних обчислювальних ресурсів менші. Це вказує на те, що за допомогою запропонованого методу вдалось розв'язати задачу автоматизованого виявлення пневмонії стосовно знаходження виду функціональної залежності за допомогою відповідної моделі та виконання обмежень, щодо яких було забезпечено високу точність порівняно з іншими відомими моделями, при цьому зменшено складність утвореної моделі.

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі представлено метод діагностування випадків пневмонії на основі модифікованої згорткової нейронної мережі, в якому полягає наукова новизна виконаної роботи. Розроблена компонентна архітектура моделі розпізнавання випадків пневмонії, що поєднує переваги резидуальних блоків та глобального усереднення, дозволила досягти точності класифікації 98.41%.

Експериментально доведено, що для задачі бінарної класифікації випадків пневмонії на рентгенівських знімках грудної клітини запропонована модель може перевершувати за ефективністю складні універсальні архітектури (типу ResNet або VGG), забезпечуючи при цьому високу швидкість обробки даних і зменшуючи вимоги до обчислювальних ресурсів.

Перспективи подальших досліджень полягають в інтеграції запропонованого методу діагностування випадків пневмонії у вебсервіс для використання медичними фахівцями під час виконання їх професійних обов'язків.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Інформаційні технології інтелектуального комп'ютерного» (державний реєстраційний номер 0124U004188).

Доступність даних

Оригінальні дані, представлені в дослідженні, відкрито доступні для академічних досліджень у репозиторії Kaggle за адресою:
<https://www.kaggle.com/datasets/paultimothymooney/chest-xray-pneumonia>
під ліцензією Creative Commons CC-BY 4.0.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Д. О. Камінський: методологія — створення моделі, дослідження, валідація, написання — оригінальний проєкт, візуалізація, В. М. Льовкін: концептуалізація, методологія — проєктування, формальний аналіз, написання — оригінальний проєкт, рецензування та редагування, візуалізація, адміністрування проєкту.

Авторські права ©



(2026). Камінський Д. О., Льовкін В. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. World Pneumonia Day. Retrieved from: <https://stopppneumonia.org/latest/world-pneumonia-day-2023>
2. Vazralu, M., & Madijagan, M. (2025). Multiclass Classification of Chest X-rays based Pulmonary Disorder Using a Specialized VGG-19 Deep Neural Network. *Journal of Innovative Image Processing*, 7(4), 1153–1167. <https://doi.org/10.36548/jiip.2025.4.004>
3. Nishio, M., Kobayashi, D., Nishioka, E., Matsuo, H., Urase, Y., Onoue, K., Ishikura, R., Kitamura, Y., Sakai, E., Tomita, M., Hamanaka, A., & Murakami, T. (2022). Deep learning model for the automatic classification of COVID-19 pneumonia, non-COVID-19 pneumonia, and the healthy: a multi-center retrospective study. *Scientific Reports*, 12, 8214. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-11990-3>
4. Bhuvanya, R., Vanitha, V., & Iqbal, M. (2025). A hybrid deep learning approach using XceptionNet and vision transformer for accurate chest disease detection from X-ray images. *Biomedical Signal Processing and Control*, 110, 108118. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2025.108118>
5. Lasker, A., Ghosh, Mr., Sk, M., Goncalves, T., Chakraborty, C., & Roy, K. (2026). LungConVT-Net: A visual transformer network with blended features for Pneumonia detection. *Pattern Recognition*, 171, 112150. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2025.112150>
6. Jareanpon, C., Srapsooksri, W., Jarunpen, S., Chamchong, R., & Kiatjindarat, W. (2025). The Preprocessing Combination for Pneumonia Classification from Chest X-Ray Images System Using Convolutional Neural Networks. *ICIC Express Letters. Part B: Applications*, 16(12), 1321–1330. <https://doi.org/10.24507/icicelb.16.12.1321>
7. Kermany, D., Goldbaum, M., Cai, W., Valentim, C., Liang, H., Baxter, S., McKeown, A., Yang, G., Wu, X., Yan, F., Dong, J., Prasadha, M., Pei, J., Ting, M., Zhu, J., Li, C.,

- Hewett, S., Dong, J., Ziyar, I., Shi, A., & Zhang, K. (2018). Identifying Medical Diagnoses and Treatable Diseases by Image-Based Deep Learning. *Cell*, 172(5), 1122–1131. <https://doi.org/10.1016/j.cell.2018.02.010>
8. Rahman, T., Chowdhury M., Khandakar, A., Islam, K. R., Islam, K. F., Mahbub, Z., Kadir, M., & Kashem, S. (2020). Transfer Learning with Deep Convolutional Neural Network (CNN) for Pneumonia Detection Using Chest X-ray. *Applied Sciences*, 10(9), 3233. <https://doi.org/10.3390/app10093233>
 9. Tripathy, B., Khan, S., Beborhta, S., Kamal, A., Tripathy, S., Fazil, M., & Albarrak, A. (2025). TL-PneuNet: a transfer learning-based pneumonia classification framework. *Sci Rep*, 15, 40307. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-24180-8>
 10. Katreddi, S., Midatani, A., Roy, A., Velpuri, U., & Kasani, S. (2025). Pediatric pneumonia X-ray image classification: predictive model development with DenseNet-169 transfer learning. *Journal of Medical Artificial Intelligence*, 8. <https://doi.org/10.21037/jmai-24-356>
 11. Mooney, P. Chest X-Ray Images (Pneumonia). Retrieved from: <https://www.kaggle.com/datasets/paultimothymooney/chest-xray-pneumonia>

Kaminskyi D. O., Lovkin V. M. Method for Diagnosing Pneumonia Based on Component Model Structure and Deep Learning Algorithms.

The problem of automated detection of pneumonia on chest X-ray images is considered in the paper. An analysis of existing approaches based on deep learning and transfer learning was conducted. It was revealed that classic deep networks (ResNet, VGG) are often redundant for binary classification tasks with limited class variability. The method based on the modified convolutional neural network (CNN) architecture with component structure, presented in the paper, and residual block connections and an optimized number of layers is proposed. The stage of data preprocessing was extended with data augmentation to eliminate class imbalance. The results of experimental study on the public dataset are presented. The proposed model has accuracy of 98.41% and sensitivity of 98.29%, confirming the effectiveness of the proposed method compared to base model architectures.

Keywords: pneumonia, diagnosis, x-ray images, convolutional neural networks, deep learning, medical image processing, data augmentation.

Отримано: 18.11.2025

Прийнято: 15.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 004.85:004.738.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).137-145](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).137-145)**В. В. Коворданій**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
volodymyr.kovordanii@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2097-4392>

**ГІБРИДНІ АРХІТЕКТУРИ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ
КЛАСИФІКАЦІЇ ВЕБ-КОНТЕНТУ**

У статті розглянуто проблему класифікації веб-контенту, що має критичне значення в умовах експоненційного зростання цифрових даних та є фундаментальною задачею обробки природної мови. Традиційні моделі глибокого навчання, попри свою ефективність, мають певні обмеження, що стимулювало розвиток гібридних архітектур. Метою даної статті є огляд гібридних архітектур глибокого навчання за останнє десятиліття.

Методологія дослідження включає огляд та порівняльний аналіз ключових підходів, починаючи від фундаментальних комбінацій згорткових (CNN) та рекурентних (RNN) нейронних мереж, через моделі, посилені механізмами уваги, до сучасних архітектур на основі трансформерів, графових нейронних мереж (GNN) та мультимодальних моделей, що інтегрують текст, DOM-структуру та візуальні ознаки. Показано еволюцію від текстових моделей до інтеграції потужних попередньо навчених мовних моделей (PLM), таких як BERT, що виступають у ролі основи для гібридних класифікаторів та графово-мультимодальних рішень.

Встановлено, що сучасні гібридні архітектури, особливо ті, що використовують трансформери та враховують структурні й мультимодальні аспекти веб-контенту, демонструють найвищу ефективність, проте водночас ставлять нові виклики, пов'язані з обчислювальною складністю, інтерпретованістю та дефіцитом сучасних відкритих датасетів саме для веб-класифікації.

Ключові слова: класифікація веб-контенту, глибоке навчання, гібридні архітектури, обробка природної мови, згорткові нейронні мережі (CNN), рекурентні нейронні мережі (RNN), трансформери, графові нейронні мережі (GNN), мультимодальність.

1. Вступ. Класифікація веб-контенту є однією з ключових задач сучасного інформаційного суспільства. На відміну від класичного тексту, веб-сторінка є напівструктурованим мультимодальним об'єктом, який окрім тексту містить зображення, гіперпосилання та ієрархічну структуру, визначену DOM-деревом.

Ранні методи машинного навчання вимагали ручного створення ознак, тоді як глибоке навчання автоматизувало цей процес, значно підвищивши точність [1, 2]. Однак окремі архітектури глибокого навчання мають свої обмеження. Згорткові нейронні мережі (CNN), запозичені з галузі комп'ютерного зору, ефективно виділяють локальні ознаки, такі як n-грами, але є інваріантними до порядку слів і не здатні вловлювати довгострокові залежності в тексті [3]. З іншого боку, рекурентні нейронні мережі (RNN) та їхні вдосконалені варіанти, як-от Long Short-Term Memory (LSTM) та Gated Recurrent Unit (GRU), добре моделюють послідовності, але можуть втрачати інформацію з віддалених частин тексту через проблему зникаючого градієнта та менш ефективно виділяють локальні патерни [4]. Це стало рушійною силою для створення гібридних архітектур, які поєднують переваги різних моделей.

Під гібридною архітектурою розуміємо модель, що поєднує різні класи неймережових підходів або джерела ознак (наприклад, текст + зображення, текст + структура DOM) для компенсації обмежень окремих компонентів. Під мультимодальністю розуміємо спільне використання кількох модальностей вебсторінки (тексту, DOM структури, візуальних ознак тощо).

Метою роботи є проведення комплексного огляду найвпливовіших гібридних підходів за останнє десятиліття, аналіз їхніх архітектурних рішень та визначення перспективних напрямків досліджень, зокрема в галузі графових та мультимодальних систем.

Стаття має оглядовий характер. Наведені метрики узагальнюють результати публікацій і не є результатом уніфікованого експерименту на одному датасеті.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Еволюцію гібридних архітектур можна умовно поділити на декілька етапів, що характеризуються впровадженням нових технологій. Варто відзначити, що не всі розглянуті методи враховують мультимодальність веб-контенту, а зосереджені виключно на проблемі класифікації текстової складової.

2.1. Фундаментальні гібридні моделі. Перші гібридні архітектури поєднували згорткові (CNN) та рекурентні (RNN) мережі для синергетичного ефекту: CNN виділяли локальні ознаки (n-грами), а RNN моделювали довгострокові залежності в тексті. Піонерські роботи, такі як C-LSTM, продемонстрували, що такий підхід, де вихід CNN подається на вхід LSTM, дозволяє одночасно враховувати як локальні, так і глобальні семантичні патерни [5]. Важливо, що показники C-LSTM-подібних CNN+RNN моделей суттєво залежать від гіперпараметрів: розміру ядра CNN і кількості фільтрів (що визначає “локальність” ознак), довжини усічення послідовності, розміру прихованого стану LSTM/GRU, dropout та стратегії пулінгу. Саме різні налаштування і правила препроцесингу часто пояснюють розбіжності у результатах.

Альтернативний підхід був представлений у моделі R-CNN [6]. Тут рекурентна структура (зазвичай двонаправлена RNN) використовується для збагачення векторного представлення кожного слова інформацією про його лівий та правий контекст. Лише після цього до збагачених векторів застосовується згортковий шар та операція пулінгу для отримання фінального вектора ознак. Це дозволяє згортковим фільтрам працювати не з ізольованими словами, а з контекстуалізованими представленнями. Для R-CNN приріст якості зазвичай з'являється тоді, коли контекст навколо маркерів класу важливіший за сам факт їх присутності. Водночас обчислювально рекурентна частина ускладнює паралелізацію, тому за однакової точності прості CNN можуть бути практично вигіднішими для швидкого інференсу.

Наступним кроком стало впровадження механізмів уваги, які дозволили моделям динамічно зважувати важливість різних частин тексту. Яскравим прикладом є ієрархічна мережа уваги (HAN), що застосовує увагу на рівнях слів та речень, що не тільки підвищило точність, але й забезпечило кращу інтерпретованість рішень [7].

2.2. Гібриди на основі трансформерів. Поява великих попередньо навчених мовних моделей (PLM), зокрема BERT, спричинила революцію в NLP. Домінуючою стала парадигма трансферного навчання, коли модель, попередньо навчена на величезних масивах нерозмічених текстових даних (наприклад,

уся Вікіпедія), доналаштовується під конкретну прикладну задачу на відносно невеликому наборі розмічених даних [8].

BERT та його аналоги використовуються як потужні енкодери, що генерують глибоко контекстуалізовані векторні представлення слів. Це призвело до появи нового класу гібридних архітектур, де BERT виступає в ролі базового енкодера, а "класичні" архітектури, такі як CNN та RNN, використовуються як ефективні "класифікаційні голови" для обробки збагачених контекстом ембедингів. Найбільш поширеними є комбінації BERT-CNN [9], BERT-LSTM/GRU та складніші архітектури, як-от BERT-BiLSTM-CNN [10, 11]. Такі підходи дозволяють одночасно враховувати контекст, послідовність та локальні патерни, що часто призводить до найвищої точності на складних задачах класифікації.

Для BERT-орієнтованих гібридів покращення метрик часто пов'язане з fine-tuning попередньо навчених моделей, що підвищує вимоги до GPU-ресурсів і часу навчання.

2.3. Гібридні моделі на основі графових нейронних мереж (GNN).

Новим перспективним напрямком є використання графових нейронних мереж (GNN) [12], які представляють текстові дані у вигляді графової структури, де вузлами є слова або документи, а ребра відображають їхні взаємозв'язки. Моделі, такі як TextGCN, перетворюють задачу класифікації тексту на задачу класифікації вузлів у гетерогенному графі, що дозволяє враховувати глобальну структуру всього корпусу даних [13]. Гібридизація GNN з трансформерами (наприклад, BERTGCN) виявилася особливо ефективною, поєднуючи потужність PLM для отримання глибоких ембедингів зі здатністю GNN моделювати складні структурні зв'язки [14]. Але в той же час є однією з найбільш ресурсомістких архітектур, що вимагає велике споживання відеопам'яті для BERT та високі вимоги до оперативної пам'яті для графової структури.

2.4. Мультиmodalні гібридні архітектури. Веб-контент за своєю природою є мультиmodalним, тобто часто містить не лише текст, а й зображення, відео та аудіо. Мультиmodalні гібридні архітектури спрямовані на вирішення цієї проблеми шляхом спільної обробки та інтеграції інформації з різних джерел. Основний принцип таких моделей полягає у використанні спеціалізованих енкодерів для кожної модальності (наприклад, CNN для зображень та BERT для тексту), а потім у злитті (fusion) отриманих представлень для фінальної класифікації.

Прикладом такої архітектури є модель HTIC (Hybrid Text Image Classifier), яка використовує VGG16 та оптимізовану CNN для класифікації зображень та RoBERTa для класифікації тексту, поєднуючи їхні виходи для отримання кінцевого результату [15].

Мультиmodalні моделі характеризуються високою затримкою виводу. Процес виводу включає не лише прогін через нейронну мережу, але й попередню обробку різних модальностей: рендеринг веб-сторінки, OCR (оптичне розпізнавання символів) для виділення тексту з зображень та генерацію візуальних ознак. Довгий час обробки однієї сторінки робить такі моделі придатними переважно для офлайн-аналізу.

2.5. Графово-мультиmodalні та структурно-орієнтовані рішення для веб-сторінок. Останній етап еволюції моделей для класифікації веб-контенту характеризується відходом від представлення веб-сторінок як про-

стого тексту та переходом до архітектур, що цілісно обробляють їхню складну природу, враховуючи HTML-структуру (DOM-дерево), візуальне розташування елементів та графові зв'язки.

Моделі, що враховують структуру, такі як DOM-LM [16] та MarkupLM [17], були одними з перших, хто спробував інтегрувати структурну інформацію в архітектуру Transformer. DOM-LM кодує локальну структуру DOM-дерева за допомогою спеціальних позиційних вкладень, що описують глибину вузла, індекс батьківського та сусідніх елементів. MarkupLM, у свою чергу, використовує вирази XPath для представлення глобального розташування кожного текстового токена в ієрархії документа.

Наступним кроком стала інтеграція візуальної модальності. LayoutLMv2 [18] є мультимодальною моделлю, що одночасно обробляє текст, інформацію про розташування (2D-координати) та зображення сторінки, що робить її ефективною для документів з фіксованою структурою, як-от PDF-файли. Для динамічних веб-сторінок була розроблена модель WebLM, яка вдосконалює цей підхід, використовуючи HTML-структуру для ієрархічного агрегування візуальних ознак. Це дозволяє моделі бути стійкою до адаптивних дизайнів, де абсолютні координати елементів можуть змінюватися [19].

Окремий напрямок представляють гібридні моделі PLM-GNN, які поєднують попередньо навчені мовні моделі (PLM) з графовими нейронними мережами (GNN). У такій архітектурі PLM (наприклад, BERT) відповідає за кодування текстового вмісту, а GNN безпосередньо моделює DOM-дерево як граф, що дозволяє ефективно враховувати його природну ієрархічну структуру [20].

Обмеженням структурно-орієнтованих підходів є залежність від якості HTML розмітки та стабільності верстки. Реальні веб-сторінки часто містять динамічні блоки, неконсистентну розмітку або шаблонні навігаційні елементи. Також зростає обчислювальна складність (парсинг DOM, побудова графа або витяг layout-ознак), що впливає на час інференсу й складність розгортання у реальному середовищі.

3. Формалізація задачі. З математичної точки зору, задача класифікації веб-контенту полягає у навчанні функції-класифікатора f , яка відображає веб-сторінку d з простору документів D в одну з категорій c із попередньо визначеної множини категорій $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$. Формально це можна записати як:

$$f : D \rightarrow C$$

У контексті глибокого навчання цей процес реалізується через кілька послідовних етапів: векторизація (embedding), кодування (encoding) та класифікація (classification).

На першому етапі вхідний текстовий документ d перетворюється на послідовність числових векторів $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, де x_i — це векторне представлення (ембединг) i -го токена (слова або частини слова) в документі. Цей крок виконується за допомогою шару вкладень, який може бути навчений з нуля, ініціалізований попередньо навченими векторами (наприклад, Word2Vec, GloVe), або, що є найбільш сучасним підходом, отриманий з попередньо навченої мовної моделі, такої як BERT.

Послідовність векторів X подається на вхід гібридної архітектури глибокого навчання $g(X)$. Ця архітектура обробляє послідовність і перетворює її у

векторне представлення документа фіксованої довжини v , яке містить у собі всю релевантну для класифікації семантичну інформацію:

$$v = g(X)$$

Отриманий вектор документа v подається на повнозв'язний шар з функцією активації Softmax. Ця функція обчислює розподіл ймовірностей приналежності документа до кожної з m категорій. Ймовірність для j -ї категорії обчислюється за формулою:

$$P(y = j | d) = \text{softmax}(Wv + b)_j = \frac{e^{(w_j v + b_j)}}{\sum_{i=1}^m e^{(w_i v + b_i)}}$$

де W та b — це матриця вагових коефіцієнтів та вектор зміщення класифікаційного шару, які навчаються в процесі тренування моделі.

Навчання моделі здійснюється шляхом мінімізації функції втрат, якою зазвичай виступає перехресна ентропія (cross-entropy loss), між прогнозованим розподілом ймовірностей та істинною (one-hot encoded) міткою категорії.

Для графових моделей задача дещо видозмінюється. Замість окремого документа d , вхідними даними є цілий корпус, представлений у вигляді графа $G = (V, E)$, де вузли V — це і документи, і слова, а ребра E відображають їхні взаємозв'язки. Задача класифікації перетворюється на задачу класифікації вузлів (node classification) у цьому графі.

У випадку мультимодальної класифікації, вхідний об'єкт d складається з кількох компонентів, наприклад, тексту d_{text} та зображення d_{image} . Процес кодування включає окремі енкодери для кожної модальності, $g_{text}(X)$ та $g_{image}(X)$, а фінальний вектор v отримується шляхом злиття (fusion) їхніх виходів:

$$v = \text{fuse}(g_{text}(X_{text}), g_{image}(X_{image}))$$

4. Порівняльна характеристика архітектур. Важливим аспектом оцінки ефективності гібридних архітектур є аналіз експериментальної бази. Результати часто наводяться на різномірних наборах даних, які можна розділити на дві фундаментально відмінні групи: класичні текстові корпуси (Stanford Sentiment Treebank, R8, Yahoo Answers, SemEval-2019) та спеціалізовані веб-орієнтовані датасети (SWDE, WebSRC, SROIE, NFT). Розуміння відмінностей між ними є критичним для коректної інтерпретації показників точності.

Перша група наборів даних фокусується виключно на семантичному аналізі текстового вмісту, ігноруючи візуальну та структурну специфіку веб-сторінок.

Друга група датасетів розроблена спеціально для оцінки здатності моделей обробляти реальну природу веб-контенту, включаючи структуру DOM та візуальне розташування елементів.

Наведені у порівняльній таблиці 1 числові показники точності (Accuracy та F1-score) запозичені з різних джерел і отримані на різних датасетах, тому вони слугують ілюстрацією потенціалу методів, але не є прямим міжмодельним порівнянням.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведений огляд демонструє еволюцію підходів до класифікації веб-контенту від тексто-орієнтованих моделей до архітектур, що системно структуру DOM та візуальне

Таблиця 1.

Порівняльний аналіз архітектур

Архітектура	Ключові особливості	Використані модальності	Результат на датасеті (Acc / F1)	Складність (Ресурси)
CNN+RNN (C-LSTM)	Послідовне застосування: CNN для локальних ознак (n-грам) та LSTM для довгострокових залежностей.	Текст	Stanford Sentiment Treebank (двокласова класифікація): ~87.8% (Acc) [5]	Середня
HAN	Ієрархічна увага на рівні слів та речень для кращої інтерпретованості та точності.	Текст (ієрархія)	Yahoo Answers: 75.8% (Acc) [7]	Середня
BERT-CNN	BERT як енкодер, CNN як класифікаційна голова для виділення локальних патернів.	Текст	SemEval-2019 Task3: 94.7% (Acc), 94% (F1) [9]	Висока
TextGCN	Моделювання всього корпусу як гетерогенного графу "слово-документ". Класифікація тексту як задача класифікації вузлів.	Текст + Граф (слова/документи)	R8 (Reuters): ~97.07% (Acc) [13]	Висока (Пам'ять)
BertGCN	Граф слів BERT (для ембедингів вузлів-документів) та GCN (для поширення міток по графу).	Текст + Граф (слова/документи)	R8 (Reuters): 98.1% (Acc) [14]	Дуже Висока
HTIC	Мультимодальна модель з окремими енкодерами для тексту (RoBERTa) та зображень (VGG16, CNN).	Текст + Зображення	NFT dataset: >98% (Acc) [15]	Екстремальна
DOM-LM	PLM, що кодує локальну структуру DOM-дерева через позиційні ембединги (глибина, індекс батька/сусіда).	Текст + Структура (DOM-дерево)	SWDE: ~94.2% (F1) [16]	Висока
LayoutLMv2	Мультимодальна PLM, що одночасно обробляє текст, 2D-координати та візуальне зображення документа (через CNN).	Текст + Візуал (зображення/макет)	SROIE: 97.81% (F1) [18]	Висока
WebLM	Мультимодальна PLM для веб-сторінок, що використовує HTML-структуру для ієрархічної агрегації візуальних ознак.	Текст + Структура (DOM) + Візуал (зображення)	WebSRC: 78.66% (Acc) [19]	Висока
PLM+GNN	Спільне кодування тексту (PLM) та структури DOM-дерева (GNN).	Текст + Граф (DOM-дерево)	SWDE: 90.2% (Acc), 89.7% (F1) [20]	Висока

представлення сторінки. На основі наведених у таблиці прикладів можна сформулювати такі висновки (з урахуванням того, що метрики отримано на різних датасетах):

- Текстові гібриди є відносно легкими для впровадження та можуть бути практичним компромісом між якістю і складністю. Водночас їх результати суттєво залежать від гіперпараметрів і довжини тексту: CNN виграють на локальних сигналах, LSTM — на довгих залежностях, а C-LSTM — на задачах, де потрібні обидва типи ознак.
- Гібриди на основі трансформерів часто демонструють вищу точність, але

вимагають суттєво більших обчислювальних ресурсів та акуратної адаптації до домену веб-даних. Тому їх практична доцільність найбільша у сценаріях, де точність критична і допустимі витрати на ресурси.

- Графові та структурні підходи підкреслюють важливість глобальних зв'язків і структури документа. Вони перспективні саме для "веб-специфічних" задач, але потребують інженерно складнішого пайплайну (парсинг DOM, побудова графів, стійкість до помилок розмітки) та спеціалізованих датасетів.
- Мультиmodalні гібриди мають великий потенціал, але їх перевага залежить від доступності якісних мультиmodalних датасетів (текст + DOM + скріншоти) та ресурсів на навчання. Високі показники, подібні до наведених для НТІС, слід трактувати як результат у специфічних умовах експерименту, а не як універсальну перевагу для будь-якої веб-класифікації. Водночас через значну ресурсомісткість мультиmodalні гібриди є неефективними для задач, що вимагають обробки потоків даних у режимі реального часу.

Підвищення якості в гібридних та мультиmodalних системах зазвичай супроводжується збільшенням обчислювальної складності й ресурсозатратності. Майбутні дослідження мають бути спрямовані на розробку методів дистиляції знань, квантизації та розрідження для створення менших, але ефективних моделей, що здатні працювати у режимі реального часу.

Існує гостра потреба у створенні відкритих, багатомовних (зокрема україномовних) корпусів з еталонними розмітками класів та доступом до HTML, CSS та скріншотів для адекватного тестування мультиmodalних моделей. Оскільки класичні датасети не репрезентують сучасний веб.

Також критично важливою є систематична оцінка надійності архітектур в умовах реального, "зашумленого" вебу. Моделі повинні бути стійкими до помилок у HTML-розмітці та інших артефактів, що є запорукою їх успішного практичного застосування.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Коворданій В. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Aggarwal, C. C., & Zhai, C. (2012). A survey of text classification algorithms. In C. C. Aggarwal & C. Zhai (Eds.), *Mining text data* (pp. 163-222). Springer. Retrieved from <https://scispace.com/pdf/a-survey-of-text-classification-algorithms-29nuhpcf91.pdf>
2. LeCun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *Nature*, 521(7553), 436-444. Retrieved from <https://www.cs.toronto.edu/~hinton/absps/NatureDeepReview.pdf>
3. Kim, Y. (2014). Convolutional Neural Networks for Sentence Classification. *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)*. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1408.5882>
4. Liu, P., Qiu, X., & Huang, X. (2016). Recurrent neural network for text classification with multi-task learning. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1605.05101>
5. Zhou, C., Sun, C., Liu, Z., & Lau, F. C. (2015). A C-LSTM Neural Network for Text Classification. *ArXiv*. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.08630>
6. Lai, S., Xu, L., Liu, K., & Zhao, J. (2015). Recurrent Convolutional Neural Networks for Text Classification. *Proceedings of the Twenty-Ninth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Retrieved from <https://www.aaai.org/ocs/index.php/AAAI/AAAI15/paper/view/9745>
7. Yang, Z., Yang, D., Dyer, C., He, X., Smola, A., & Hovy, E. (2016). Hierarchical attention networks for document classification. In *Proceedings of the 2016 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies* (pp. 1480-1489). Association for Computational Linguistics. Retrieved from <https://doi.org/10.18653/v1/N16-1174>
8. Devlin, J., Chang, M., Lee, K., & Toutanova, K. (2018). BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding. *ArXiv*. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1810.04805>
9. Abas, A. R., Elhenawy, I., Zidan, M., & Othman, M. (2022). BERT-CNN: A deep learning model for detecting emotions from text. *Computers, Materials & Continua*, 71(2), 2943-2961. Retrieved from <https://doi.org/10.32604/cmc.2022.021671>
10. Gou, Z., & Li, Y. (2023). Integrating BERT embeddings and BiLSTM for emotion analysis of dialogue. *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2023, 6618452. Retrieved from <https://doi.org/10.1155/2023/6618452>
11. Xiong, Y., Chen, G., & Cao, J. (2024). Research on public service request text classification based on BERT-BiLSTM-CNN feature fusion. *Applied Sciences*, 14(14), 6282. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/app14146282>
12. Wang, K., Ding, Y., & Han, S. C. (2023). Graph Neural Networks for Text Classification: A Survey. *ArXiv*. Retrieved from <https://doi.org/10.1007/s10462-024-10808-0>
13. Yao, L., Mao, C., & Luo, Y. (2018). Graph Convolutional Networks for Text Classification. *ArXiv*. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.1809.05679>
14. Lin, Y., Meng, Y., Sun, X., Han, Q., Kuang, K., Li, J., & Wu, F. (2021). BertGCN: Transductive Text Classification by Combining GCN and BERT. *ArXiv*. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.05727>
15. Gupta, S., & Kishan, B. (2025). A performance-driven hybrid text-image classification model for multimodal data. *Scientific Reports*, 15, 11598. Retrieved from <https://doi.org/10.1038/s41598-025-95674-8>

16. Deng, X., Shiralkar, P., Lockard, C., Huang, B., & Sun, H. (2022). DOM-LM: Learning Generalizable Representations for HTML Documents. ArXiv. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.10608>
17. Li, J., Xu, Y., Cui, L., & Wei, F. (2021). MarkupLM: Pre-training of Text and Markup Language for Visually-rich Document Understanding. ArXiv. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.08518>
18. Xu, Y., Xu, Y., Lv, T., Cui, L., Wei, F., Wang, G., Lu, Y., Florencio, D., Zhang, C., Che, W., Zhang, M., & Zhou, L. (2020). LayoutLMv2: Multi-modal Pre-training for Visually-Rich Document Understanding. ArXiv. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.14740>
19. Xu, H., Chen, L., Zhao, Z., Ma, D., Cao, R., Zhu, Z., & Yu, K. (2024). Hierarchical Multimodal Pre-training for Visually Rich Webpage Understanding. ArXiv. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.18262>
20. Lang, Q., Zhou, J., Wang, H., Lyu, S., & Zhang, R. (2023). PLM-GNN: A Webpage Classification Method based on Joint Pre-trained Language Model and Graph Neural Network. ArXiv. Retrieved from <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.05378>

Kovordaniy V. V. Hybrid deep learning architectures for web content classification.

This paper addresses the problem of web content classification, a task of critical importance amidst the exponential growth of digital data and a fundamental challenge in Natural Language Processing (NLP). Despite their effectiveness, traditional deep learning models possess certain limitations, which has necessitated the development of hybrid architectures. The aim of this paper is to review hybrid deep learning architectures developed over the past decade.

The research methodology involves a review and comparative analysis of key approaches, ranging from fundamental combinations of Convolutional (CNN) and Recurrent (RNN) Neural Networks, through models enhanced by attention mechanisms, to state-of-the-art architectures based on Transformers, Graph Neural Networks (GNNs), and multimodal models integrating text, DOM structure, and visual features. The study demonstrates the evolution from text-only models to the integration of powerful Pre-trained Language Models (PLMs), such as BERT, which serve as the backbone for hybrid classifiers and graph-multimodal solutions.

It is established that modern hybrid architectures, particularly those utilizing Transformers and incorporating structural and multimodal aspects of web content, exhibit superior performance. However, they concurrently present new challenges regarding computational complexity, interpretability, and the scarcity of up-to-date open datasets specifically designed for web classification.

Keywords: web content classification, Deep Learning, hybrid architectures, Natural Language Processing, Convolutional Neural Networks (CNN), Recurrent Neural Networks (RNN), Transformers, Graph Neural Networks (GNN), multimodality.

Отримано: 03.10.2025

Прийнято: 12.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 004.85:519.237.8

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).146-152](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).146-152)**Н. Е. Кондрук**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук, доцент
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

**ВАЛІДАЦІЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЕКСПЕРТНО-ОРІЄНТОВАНОГО
КОДУВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ СХОЖОСТІ ОРДИНАЛЬНИХ
ДАНИХ**

У роботі розв'язується задача підвищення ефективності кластерного аналізу об'єктів, що характеризуються категоріальними впорядкованими (ординальними) ознаками. Досліджено ефективність нової метрики відстані, яка, на відміну від традиційних підходів (SMC, коефіцієнт Жаккарда), враховує рангову природу атрибутів та величину інтервалів між ними. На основі експериментального дослідження з використанням набору даних UCI «Car Evaluation». Показано, що інтеграція експертних знань через механізм нерівномірного ранжування призводить до збільшення дисперсії парних відстаней та суттєвого покращення сепарабельності кластерів. Ефективність запропонованого підходу підтверджено зростанням індексу Adjusted Rand Index та зниженням індексу Девіса-Болдіна порівняно з метрикою Говера та стандартними методами.

Ключові слова: категоріальні дані, ординальні ознаки, кластерний аналіз, ранжування, експертні оцінки.

1. Вступ. Розробка ефективних математичних інструментів для визначення подібності між об'єктами, описаними нечисловими значеннями, є актуальною задачею в аналізі даних, машинному навчанні та теорії прийняття рішень [1]. Значна частина властивостей реальних об'єктів характеризується саме категоріальними ознаками.

Ключова проблема полягає у тому, що традиційні метрики для категоріальних даних, такі як коефіцієнт простого збігу (Simple Matching Coefficient, SMC) або відстань Жаккарда (Jaccard Index) [2, 3], часто трактують ординальні ознаки як номінальні. Це призводить до ігнорування внутрішнього природного порядку значень (наприклад, {«низький», «середній», «високий»}), що, у свою чергу, генерує неточні або неінтуїтивні оцінки подібності [4].

Інша поширена помилка при роботі з ординальними даними полягає у їхньому наївному числовому кодуванні послідовними цілими числами. Таке кодування неявно припускає рівні інтервали (відстані) між суміжними категоріями, що є математично необґрунтованим, оскільки, за визначенням ординальних шкал, інтервали між категоріями невідомі або нерівні [4, 5, 6].

Запропонований підхід для вирішення описаних проблем [1] ґрунтується на двох взаємопов'язаних інструментах: матриці відстані ($d(\cdot)$), похідній від зваженої Манхеттенської відстані, та мірі подібності (μ_{ORD}).

На відміну від багатьох сучасних мір подібності, які є моделями типу "чорна скринька" і досягають високої точності за рахунок низької зрозумілості [1], запропонована методика $d(\cdot)$ є експертно-орієнтованою. Її архітектура свідомо

покладається на експертне визначення системи числових рангів для категорій. Це дозволяє фахівцям, які глибоко розуміють предметну область, кодувати свої знання та переваги безпосередньо у метрику. Така прозорість та обґрунтованість підвищують довіру користувача до аналітичної системи [1].

Метою даного дослідження є емпірична валідація та кількісна оцінка ефективності запропонованої в [1] метрики відстані для аналізу схожості об'єктів, описаних категоріальними впорядкованими ознаками.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні завдання:

- підбір готового датасету, що містить ординальні дані із мітками класів для точнішої валідації;
- розробка системи ранжування даних на основі знань предметної області;
- обчислення матриці відстаней та формування порівняльного тестового простору на базі еталонних метрик (Simple Matching Coefficient та Gower's Distance);
- проведення агломеративної кластеризації із фіксованою кількістю кластерів відповідно до істинної розмітки даних;
- аналіз емпіричних результатів.

2. Методи. Запропонований підхід в [1] вимагає кодування вектора значень ознак \bar{a}_i відповідним вектором числових показників рангів $\bar{r}_i (r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i)$. Ранги повинні відображати строгий лінійний порядок за значимістю або перевагою, заданий для кожної ознаки A_k .

Відстань між двома об'єктами O_i та O_j визначається як різновид зваженої Манхеттенської метрики [1]:

$$d(O_i, O_j) = \sum_{k=1}^n \frac{|r_k^i - r_k^j|}{\Delta_k}, \quad (1)$$

де $|r_k^i - r_k^j|$ є абсолютною різницею рангів об'єктів O_i та O_j за k -ю ознакою. Ключовим елементом є знаменник $\Delta_k = |r_{k1} - r_{ksk}|$, який характеризує розмах рангової шкали для k -ї ознаки [1].

Цей механізм Δ_k виконує функцію самоналагоджувального вагового коефіцієнта та нормалізації. Кожен доданок у сумі $\frac{|r_k^i - r_k^j|}{\Delta_k}$ є нормованою величиною, яка приймає значення з проміжку $[0; 1]$. Це гарантує, що "вклади" кожної ознаки у загальну відстань $d(\cdot)$ є співрозмірними. Таке нормування усуває ризик того, що ознака з більшим чисельним діапазоном рангів (наприклад, від 1 до 100) буде чисельно домінувати над ознакою з вузьким діапазоном (наприклад, від 1 до 5), навіть якщо обидві ознаки мають однакову важливість у предметній області. Кожна складова формули (1) фактично характеризує відсоток відмінності об'єктів за відповідною ознакою [1].

3. Вибір набору даних. Для експериментальної валідації обрано датасет «Car Evaluation» з репозиторію UCI [7]. Він містить 1728 екземплярів і шість вхідних ознак, які є виключно категоріальними і мають чіткий ординальний порядок [7, 8]. Дані походять від простої ієрархічної моделі прийняття рішень (DEX), яка оцінює прийнятність автомобіля (CAR) на основі складових, таких як PRICE та COMFORT [7, 9]. Така природа даних підтверджує, що ефективна міра подібності має інтегрувати знання про відносну важливість (ранг) цих

ознак. Наявність відомої цільової ознаки (class: unacc, acc, good, vgood — 4 класи) дозволяє використовувати зовнішні індекси валідації (ARI, NMI). Це критично важливо для об'єктивного кількісного порівняння якості кластеризації з істинною структурою даних [10].

4. Проектування системи рангів. Центральним елементом валідації є дослідження того, як експертно визначена система рангів впливає на кінцеву роздільність кластерів. Було розроблено дві системи кодування, що демонструють контрастні підходи.

Система А — послідовне (наївне) кодування. Ранги присвоюються як послідовні натуральні числа. Цей підхід імітує ситуацію, коли ординальність врахована, але специфічні знання про нерівномірну інтенсивність переходів між категоріями ігноруються.

Система В — експертне кодування. Ранги присвоюються з нерівномірними інтервалами ("скачками"). Як зазначалося в [1], якщо рівень ознаки має суттєво впливати на розв'язок, рекомендується підсилювати його системою рангів зі скачками. У цьому датасеті ознаки buying (ціна), maint (обслуговування) та safety (безпека) є найважливішими для визначення загальної прийнятності автомобіля. Тому нерівномірні інтервали застосовуються для збільшення ваги відмінностей у критичній зоні (між med, high та vhigh).

Таблиця 1.

Фрагмент експертного проектування рангових Систем А та В

<i>Ознака</i>	<i>Мітка значення</i>	<i>Послідовний ранг (А)</i>	<i>Ранг зі скачком (В)</i>
buying	vhigh	4	10
	high	3	7
	med	2	3
	low	1	1
safety	high	3	5
	med	2	2
	low	1	1

Система рангів для ознаки maint спроектована відповідно до системи рангів ознаки buying, а для всіх інших ознак відповідно до системи ознаки safety (табл. 1).

Аналіз впливу рангового кодування показує, що у Системі А будь-який перехід між суміжними категоріями дає однаковий внесок у відстань. Наприклад, для buying, перехід від 'low' до 'med' дає різницю 1, що після нормалізації становить $1/\Delta_k$. Натомість, у Системі В, перехід від 'med' до 'high' дає різницю 4, що, за нормалізації $1/9$, становить $4/9$. Це підсилення відмінностей у критичних зонах передбачає, що система В краще моделює когнітивну дистанцію та ієрархічні переваги, які лежать в основі прийняття рішень про прийнятність автомобіля.

5. Методологія експерименту. Для проведення експерименту та валідації запропонованих метрик було обрано метод ієрархічної агломеративної кластеризації (Agglomerative Hierarchical Clustering). Вибір саме цього алгоритму

зумовлений його детермінованою природою (результат не залежить від випадкової ініціалізації центрів, як у k -means або k -medoids) та гнучкістю в роботі з довільними мірами подібності.

Оскільки цільовий датасет має чотири відомих класи, кількість кластерів була фіксована на рівні $K = 4$ для безпосереднього порівняння отриманої структури з істинною розміткою [7].

Проведено порівняння чотирьох метрик для оцінки ефективності запропонованого підходу. Перша та друга базується на запропонованій метриці (1) для Систем А і В. Третьою метрикою є відстань Говера (Gower's Distance) [11] — універсальна метрика для змішаних типів даних, зокрема ординальних ознак, що слугує еталоном завдяки поєднанню ранжування й нормалізації. Четвертою виступає коефіцієнт простого співпадіння (SMC) або Hamming Distance — класична метрика для номінальних даних [2], яка в даному дослідженні використовується як контрольна, оскільки повністю ігнорує внутрішній порядок ординальних ознак.

Якість кластеризації оцінювалася за допомогою набору зовнішніх та внутрішніх індексів валідації [10]. До зовнішніх індексів належать ті, що використовуються за наявності істинних міток класів і дають змогу оцінити, наскільки отримана кластеризація відповідає реальній структурі даних. Серед них застосовували коригований індекс Ранда (ARI) [10], який вимірює схожість між прогнозованою та істинною кластеризацією з поправкою на випадковість і прямує до 1 для повної згоди, а також нормалізовану взаємну інформацію (NMI) [10], що відображає спільний обсяг інформації між двома розподілами міток і також наближається до 1 для якісного збігу. До внутрішніх індексів, які оцінюють геометричні властивості кластерної структури незалежно від істинних міток, належать Silhouette Score [12] — показник того, наскільки кожен об'єкт подібний до елементів власного кластера порівняно з елементами найближчого сусіднього кластера, де значення, близькі до 1, свідчать про чітко відокремлені та щільні кластери, — та індекс Девіса–Боулдена (DBI) [10], який оцінює співвідношення внутрішньокластерної дисперсії до міжкластерної відстані, причому нижчі значення DBI означають кращу якість кластеризації.

6. Результати. Обчислення відстаней $d(O_i, O_j)$ для всіх пар об'єктів у датасеті «Car Evaluation» показало суттєву різницю в розподілі між Системами А та В.

Таблиця 2.

Таблиця середніх значень та дисперсій розподілів відстані (1) Систем А та В

Показник	Система А	Система В
Середнє	2.58	2.61
Дисперсія	0.72	0.82

Агломеративна кластеризація ($K = 4$) була виконана для всіх чотирьох тестованих метрик. Результати, представлені в Таблиці 3, демонструють кількісну оцінку якості кластерних рішень.

7. Обговорення. Первинний статистичний аналіз отриманих матриць відстаней виявив помітну різницю в дисперсії розподілів попарних відстаней (табл. 2). Для Системи А, що використовує рівномірні інтервали між рангами,

Таблиця 3.

Порівняння ефективності кластеризації K-Medoids за різними метриками

Метрика відстані	ARI↑	NMI↑	Silhouette Score↑	DBI↓
Simple Matching Coeff.	0.013	0.060	0.220	4.162
Gower's Distance	0.055	0.129	0.099	2.464
$d(\cdot)$ System A	0.027	0.060	0.095	2.404
$d(\cdot)$ System B	0.119	0.195	0.279	1.797

дисперсія склала $\sigma^2 \approx 0.72$. Водночас застосування Системи В, яка базується на нелінійних "експертних" інтервалах для критичних ознак (безпека, ціна), призвело до зростання дисперсії до $\sigma^2 \approx 0.82$. Це збільшення на 14% свідчить про "розтягування" метричного простору, що дозволило підвищити контрастність між об'єктами різних класів та зменшити схожість між об'єктами, що мають критичні відмінності. Ефективність такого перетворення простору була підтверджена результатами кластеризації методом агломеративної кластеризації. Зведена таблиця метрик якості (табл. 3) демонструє явну перевагу запропонованого підходу з експертним налаштуванням над традиційними методами.

Натомість використання Системи В забезпечило найкращі показники за всіма критеріями. ARI зріс до 0.119, що, хоч і не є абсолютним ідеалом, суттєво перевищує результати інших методів і вказує на наявність кореляції зі справжніми мітками класів. Особливо показовим є індекс DBI, який для Системи В досяг мінімального значення (1.797). Оскільки менше значення DBI свідчить про кращу відокремленість кластерів, це підтверджує гіпотезу, що введення нелінійних ваг дозволило сформувати більш компактні та віддалені одна від одної групи об'єктів. Також метрика Silhouette (0.279) є найвищою для Системи В, що свідчить про вищу щільність об'єктів усередині сформованих кластерів.

Акцент на суттєвому зниженні індексу Девіса-Болдіна є критично важливим, оскільки він слугує об'єктивним критерієм якості внутрішньої геометричної структури сформованого простору ознак, незалежним від зовнішньої розмітки класів. Така динаміка свідчить про те, що інтеграція експертних знань через запропоновану систему нелінійного ранжування дозволила не лише мінімізувати внутрішньокласову дисперсію, забезпечивши високу компактність груп, але й суттєво збільшити відстань між центроїдами кластерів. Це підтверджує гіпотезу, що запропонована метрика $d(\cdot)$ ефективно трансформує простір ординальних даних, усуваючи проблему "розмитості" меж між класами, яка є характерною для рівномірних шкал та традиційних метрик, і формує чітко сепаровані кластери, що відповідають природній логіці предметної області.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. У дослідженні вирішується актуальна задача розвитку методів кластерного аналізу для об'єктів [1, 13], що описуються категоріальними впорядкованими (ординальними) ознаками. На основі проведеного теоретичного та експериментального дослідження отримано наступні результати: обґрунтовано ефективність метрики відстані (1), яка, на відміну від традиційних коефіцієнтів (SMC, Jaccard), враховує рангову природу даних; експериментально доведено перевагу запропонованого підходу на прикладі датасету UCI «Car Evaluation». Порівняльний

аналіз показав, що використання експертно-орієнтованої системи ваг (Система В) дозволяє суттєво покращити якість кластеризації порівняно з метрикою Говера та простим лінійним кодуванням, зокрема, досягнуто зростання індексу Adjusted Rand Index (ARI) до 0.119, що свідчить про кращу відповідність виявлених кластерів реальній структурі даних. Встановлено, що введення нелінійних інтервалів між рангами призводить до збільшення дисперсії розподілу попарних відстаней на 14%. Це «розтягування» метричного простору дозволило мінімізувати індекс Девіса-Болдіна, що підтверджує формування більш компактних та добре сепарованих кластерів.

Перспективи подальших досліджень вбачаються у інтеграції розробленої міри подібності в алгоритм, що заснований на нечітких бінарних ідношеннях, а також у розробці методів автоматичного визначення оптимальних рангових інтервалів без залучення експерта.

Конфлікт інтересів

Кондрук Наталія Емерихівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних» (державний реєстраційний номер 0121U109279).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Авторка підтверджує, що при створенні даної роботи вона не використовувала технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Кондрук Н. Е. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Kondruk, N. E. (2023). Methods for determining similarity of categorical ordered data. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (2), 31. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2023-2-4> [in Ukrainian].
2. Suárez, J., García, S., & Herrera, F. (2021). A tutorial on distance metric learning: Mathemati-

- cal foundations, algorithms, experimental analysis, prospects and challenges. *Neurocomputing*, 425, 300–322. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.08.017>
3. Mathisen, B., Aamodt, A., Bach, K., & Langseth, H. (2019). Learning similarity measures from data. *Progress in Artificial Intelligence*, 9, 129–143. <https://doi.org/10.1007/s13748-019-00201-2>
 4. Desai, A., Singh, H., Pudi, V., & Gopalan, S. (2011). DISC: Data-Intensive similarity measure for categorical data. *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, 6635, 469–481. https://doi.org/10.1007/978-3-642-20847-8_39
 5. Cunningham, P. (2009). A taxonomy of similarity mechanisms for case-based reasoning. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 21, 1532–1543. <https://doi.org/10.1109/TKDE.2008.227>
 6. Nikpour, N., Aamodt, A., & Bach, K. (2018). Bayesian-supported retrieval in BNCreek: A knowledge-intensive case-based reasoning system. *Case-Based Reasoning Research and Development*, 11156, 323–338. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01081-2_22
 7. Bohanec, M. (1988). Car Evaluation [Dataset]. UCI Machine Learning Repository. <https://doi.org/10.24432/C5JP48>. Retrieved from: <https://archive.ics.uci.edu/dataset/19/car+evaluation>
 8. Dyussenbayev, A. (2017). Age periods of human life. *Advances in Social Sciences Research Journal*, 4(6), 258–263. <https://doi.org/10.14738/assrj.46.2924>
 9. Kondruk, N. (2017). Clustering method based on fuzzy binary relation. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2(4), 10–16. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.94961>
 10. Kaufman, L., & Rousseeuw, P. J. (1990). *Finding groups in data: An introduction to cluster analysis*. John Wiley & Sons, 355 pp. <https://doi.org/10.1002/9780470316801>
 11. Gower, J. C. (1971). A general coefficient of similarity and some of its properties. *Biometrics*, 27(4), 857–871. <https://doi.org/10.2307/2528823>
 12. Rousseeuw, P. J. (1987). Silhouettes: A graphical aid to the interpretation and validation of cluster analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20, 53–65. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(87\)90125-7](https://doi.org/10.1016/0377-0427(87)90125-7)
 13. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (2021). Analysis of cluster structures by different similarity measures. *Cybernetics and Systems Analysis*, 57, 436–441. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00368-4>

Kondruk N. E. Validation of the effectiveness of expert-oriented encoding for similarity analysis of ordinal data.

The paper addresses the problem of improving the effectiveness of cluster analysis for objects characterized by categorical ordered (ordinal) features. The effectiveness of a new distance metric is investigated, which, unlike traditional approaches (SMC, Jaccard coefficient), takes into account the rank-based nature of attributes and the magnitude of intervals between them. An experimental study was conducted using the UCI Car Evaluation dataset. It is shown that the integration of expert knowledge through a non-uniform ranking mechanism leads to an increase in the variance of pairwise distances and a significant improvement in cluster separability. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by an increase in the Adjusted Rand Index and a decrease in the Davies–Bouldin index compared to the Gower metric and standard methods.

Keywords: categorical data, ordinal features, cluster analysis, ranking, expert assessments.

Отримано: 01.12.2025

Прийнято: 19.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

UDC 004.85

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).153-161](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).153-161)**D. M. Krasii¹, O. O. Larin²**

¹ National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
PhD student of the Department of Mathematical Modeling and Intelligent Computing in
Engineering

Danylo.Krasii@infiz.khpi.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1599-2295>

² National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute",
Professor at the Department of Mathematical Modeling and Intelligent Computing in
Engineering,

Doctor of Technical Sciences, Professor

Oleksiy.Larin@khpi.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>

PHYSICS-GUIDED CHAINED GAUSSIAN PROCESS REGRESSION FOR ATHEROSCLEROTIC PLAQUE PROGRESSION PREDICTION

Predicting atherosclerotic plaque progression from sparse cross-sectional imaging data is critical for cardiovascular risk assessment. Standard regression methods lack physics-based inductive bias, leading to unreliable extrapolation. A Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression (PG-CGPR) framework is presented that incorporates Power-Law Damage Accumulation mechanics as a mean function prior with heteroscedastic noise modeling. Cross-sectional observations are transformed into pseudo-longitudinal training pairs using Glagov-tolerant filtering. Validated on cardiovascular imaging data spanning multiple decades, the model maintains predictive accuracy even when extrapolating beyond the training age range, with confidence intervals covering all test observations. The strong physics prior dominates data-driven learning, demonstrating that in small-sample regimes, mechanistic models outperform flexible kernels. The framework enables projection of future vessel geometries for downstream biomechanical analysis.

Keywords: Gaussian process regression, plaque progression, physics-informed machine learning, uncertainty quantification, cardiovascular imaging.

1. Introduction. Atherosclerotic plaque rupture is the primary mechanism underlying acute coronary syndromes and ischemic stroke. The mechanical stability of arterial plaque depends critically on its geometric configuration: fibrous cap thickness, lipid core size, and overall burden determine stress distribution under physiological loading. Predicting how plaque geometry evolves over time is therefore essential for identifying high-risk patients before acute events occur. While current clinical practice relies on cross-sectional imaging, such as intravascular ultrasound (IVUS) or optical coherence tomography (OCT), to provide snapshots of plaque state, the lack of routine longitudinal follow-up creates a fundamental challenge: estimating temporal plaque trajectories from population-level cross-sectional observations.

Standard regression approaches often fail in this setting due to regression toward the prior mean in extrapolation regions, violating physical monotonicity constraints and producing overconfident predictions. To address this, Physics-Informed Machine Learning (PIML) has emerged as a powerful paradigm, embedding physical laws directly into the learning objective to constrain solutions where data is sparse [1, 2].

The problem of learning damage trajectories from sparse data is addressed in this work by proposing a Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression

(PG-CGPR) framework. The problem is defined as follows: given cross-sectional observations $\{(t_i, y_i)\}_{i=1}^N$ from N individuals at different ages t_i , the objectives are (1) to learn a population-level damage trajectory $D(t)$ with uncertainty quantification, and (2) to predict patient-specific plaque growth given a baseline measurement. The contributions of this work are:

- A Physics-Guided GPR architecture incorporating Power-Law Damage Accumulation mechanics as a mean function prior, ensuring physically consistent monotonic predictions.
- Heteroscedastic noise modeling that captures increasing biological variability with age.
- Empirical demonstration that strong physics priors can dominate data-driven learning in small-sample regimes.

2. Background and Related Work.

2.1. Gaussian Process Regression and Heteroscedasticity. Gaussian Process Regression (GPR) provides a Bayesian framework for regression with uncertainty quantification [3]. Given observations $\mathcal{D} = \{(t_i, y_i)\}_{i=1}^N$, the model assumes $y_i = f(t_i) + \epsilon_i$, where $f \sim \mathcal{GP}(m(t), k(t, t'))$. While standard GPR assumes constant noise variance, biological processes often exhibit heteroscedasticity, i.e., uncertainty that varies with the state of the system. Chained Gaussian Processes [4] address this by modeling input-dependent noise using two latent functions:

$$y_i = f_1(t_i) + \epsilon_i \cdot g(f_2(t_i))$$

where f_1 models the mean trajectory and f_2 models log-variance. Scaling GPR to larger datasets often requires sparse approximations using inducing points and variational inference [5], which is employed here to handle the non-conjugate likelihood of the Chained GP.

2.2. Continuum Damage Mechanics. The continuum damage mechanics framework describes damage evolution in materials under sustained loading. The Power-Law Damage Accumulation model, which describes delayed failure in soft and fibrous materials [6], defines damage evolution $D(t)$ as:

$$D(t) = \text{scale} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T_f} \right)^{1/(c+1)} \right]$$

where T_f is the failure time and c is a material exponent. This S-curve captures the slow initiation and rapid acceleration phases characteristic of cumulative damage, which is analogous to the progression of biological tissue degradation and plaque vulnerability [7].

2.3. Arterial Remodeling. Early-stage atherosclerosis exhibits compensatory outward remodeling known as the Glagov phenomenon, where the arterial wall expands to preserve lumen area despite plaque growth [8]. This compensation continues until approximately 40% plaque burden, after which stenotic narrowing begins. This phenomenon implies that plaque burden measurements may not increase monotonically in early stages if referenced against a remodeling vessel wall, a nuance that must be accommodated in data filtering. More recent constrained

mixture models of arterial growth [9] further link hemodynamic stress to wall remodeling, justifying the isotropic growth assumptions used in simplified contour prediction models.

3. Methodology.

3.1. Data Preparation and Image Processing. The foundation of the predictive model is accurate quantification of plaque burden from imaging. Optical Coherence Tomography (OCT) or IVUS images are processed via a semi-automated pipeline [10]. This involves deep learning-based segmentation to extract the lumen and external elastic membrane (EEM) contours, followed by artifact removal.

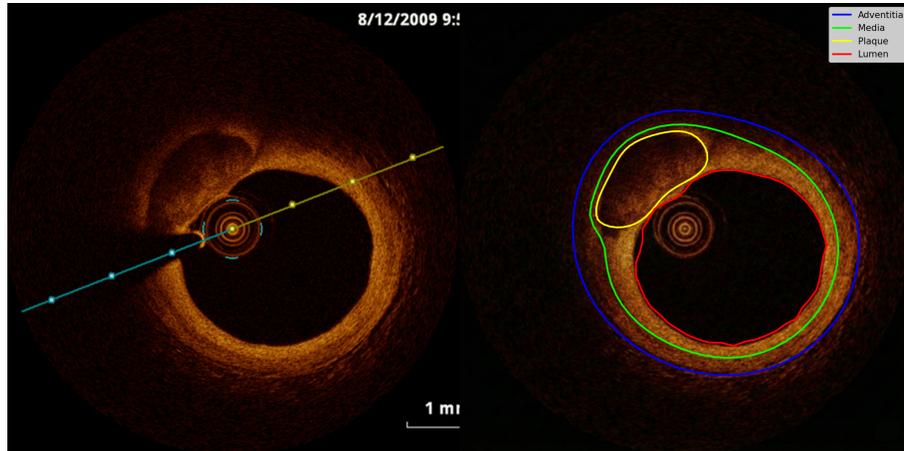


Figure 1. Example of OCT image processing pipeline. (Left) Raw OCT cross-section showing arterial wall and lumen. (Right) Processed image with segmented contours for the lumen (red) and EEM (blue) used to calculate plaque burden.

From these calibrated contours, plaque burden B is computed as the relative cross-sectional area:

$$B = \frac{A_{\text{wall}} - A_{\text{lumen}}}{A_{\text{wall}}}$$

This dimensionless metric serves as the target variable y for the regression model.

3.2. Pseudo-longitudinal Data Generation. Since true longitudinal data is unavailable, synthetic baseline-followup pairs are generated by matching individuals from the cross-sectional population. A rigorous filtering process is employed to ensure physical plausibility. Pairs (t_i, y_i) and (t_j, y_j) are weighted by a Gaussian kernel $w_{\text{time}}(t_i, t_j)$ centered on a target gap Δt_{target} .

Crucially, a Glagov-tolerant filter is applied. Pairs are accepted where $y_j - y_i \geq -\tau_{\text{Glagov}}$, allowing for slight apparent decreases in burden due to compensatory remodeling [8], while pairs that violate maximum biological growth rates (r_{max}) or imply unrealistic jumps in population quantile (q_{max}) are rejected. This ensures the training data reflects valid biological progression rather than random noise.

3.3. Physics-Guided Chained GPR. A Chained GP is employed where the mean function of the first latent f_1 (trajectory) is explicitly set to the Power-Law

Damage Accumulation formulation:

$$m_1(t) = \text{scale} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{t}{T_f} \right)^{1/(c+1)} \right]$$

To ensure numerical stability during optimization, a soft extension of this function is implemented for $t > 0.95T_f$.

The second latent f_2 (log-variance) utilizes a physics-based mean function proportional to the damage rate, $m_2(t) \propto (dD/dt)^\beta$, reflecting the hypothesis that biological variability increases as the disease state accelerates. The kernel for f_2 combines a Linear and RBF kernel to ensure that uncertainty grows monotonically in extrapolation regions [11], preventing the ‘‘variance collapse’’ often seen in standard GPs.

The model is trained by maximizing the Evidence Lower Bound (ELBO), augmented with penalty terms $\mathcal{L}_{\text{physics}}$ to enforce monotonicity and growth constraints:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ELBO}} - \lambda_1 \mathcal{L}_{\text{mono}} - \lambda_2 \mathcal{L}_{\text{growth}} - \lambda_3 \mathcal{L}_{\text{max}}$$

3.4. Patient-Specific Personalization. For a new patient with baseline measurement (t_b, y_b) , exact Gaussian conditioning is performed. The joint distribution of the function values at the baseline age t_b and future age t_f is multivariate normal. Conditioning on the observation y_b yields the posterior predictive distribution:

$$\mu_{\text{post}} = \mu_f + \frac{K_{bf}}{K_{bb} + \sigma_n^2} (y_b - \mu_b)$$

This shifts the population-level curve to pass through the patient’s specific data point, effectively ‘‘personalizing’’ the risk trajectory.

4. Numerical Experiments and Results.

4.1. Dataset and Experimental Setup. The methodology was validated on a dataset of $N = 57$ individuals (ages 17–92). Figure 2 shows the distribution of relative plaque burden measurements across the age range. To test extrapolation capabilities, three ‘‘Life Fraction’’ (LF) subsets were created: LF0.5 (training on ages 17–47), LF0.75 (training on ages 17–65), and LF1.0 (full dataset).

4.2. Population Model Performance. The physics-guided mean function successfully prevents the unphysical regression to zero often seen in standard GPs. Figure 3 shows the model fit for each life fraction subset. As shown in Table 1, the model maintains low error rates even when extrapolating decades beyond the training data (LF0.5 scenario).

Table 1.

Population model performance across life fractions.

Metric	LF50	LF75	LF100
Training MAPE	31.8%	27.1%	24.0%
Extrapolation MAPE	15.4%	14.1%	–
95% CI Coverage	100%	100%	100%

The variance behavior is particularly notable. The use of the power-law rate-based mean for f_2 results in uncertainty that naturally expands near the theoretical

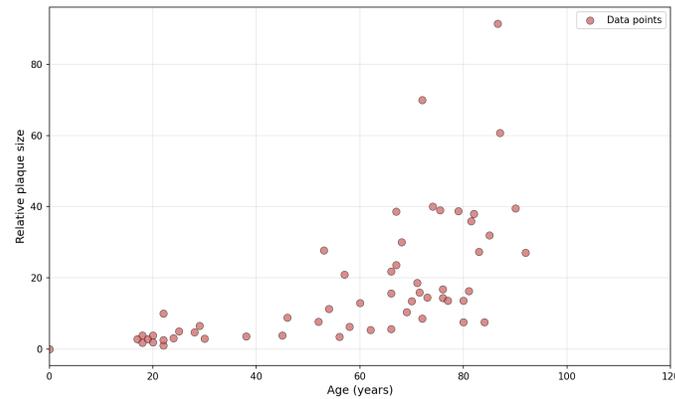


Figure 2. Cross-sectional dataset: relative plaque burden versus patient age (N=57, ages 17–92).

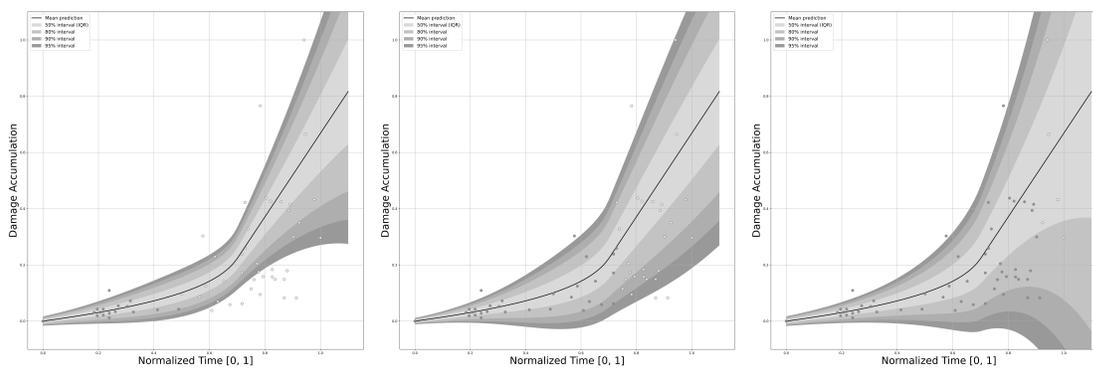


Figure 3. Training data distribution and model fit for different life fractions. (a) LF0.5 (50% of lifecycle), (b) LF0.75, and (c) LF1.0. The gray-filled dots represent the training data (pseudo-longitudinal pairs), and the shaded region indicates the model's uncertainty.

failure time T_f . This aligns with the "Explosion of Uncertainty" concept in risk assessment [12], where the predictability of a system degrades as it approaches a critical transition (rupture).

4.3. Plaque Growth Visualization. Probabilistic forecasts for plaque burden evolution were generated. Figure 4 illustrates the learned trajectories. The model captures the non-linear acceleration of damage in later years. The confidence intervals (gray bands) effectively capture the spread of the data, ensuring that no patient observations fall outside the predicted risk corridors.

4.4. Personalization and Conditioning. The personalization capability was evaluated using the $M = 35$ synthetic follow-up pairs. The exact Gaussian conditioning provided a robust posterior mean but showed minimal error reduction compared to the population prior ($< 0.1\%$). This result indicates that the Physics-Guided Mean Function (m_1) is so effective at capturing the underlying biological trend that the residual epistemic uncertainty (K_{bb}) collapses to near zero during training. The physics prior describes the data so well that the model sees little need for a flexible, data-driven covariance structure to correct it. This confirms the dominance and validity of the Power-Law Damage Accumulation model for this

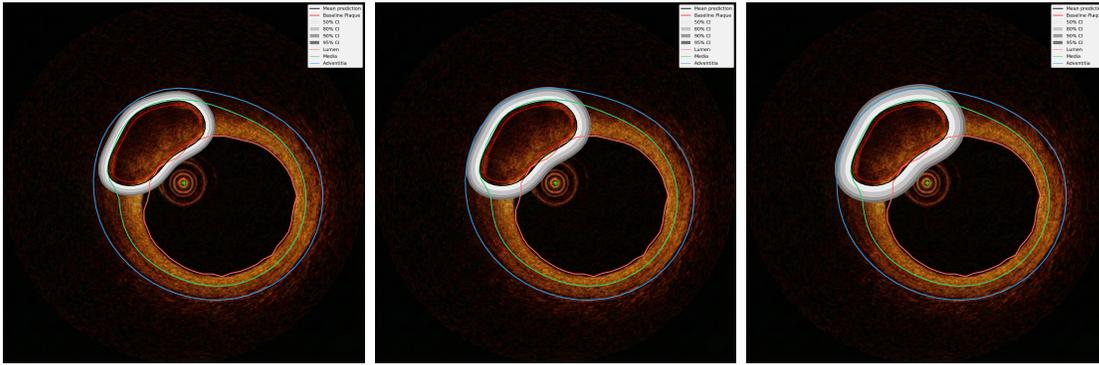


Figure 4. Plaque growth predictions and uncertainty quantification. The solid black line represents the mean trajectory $D(t)$, and the gray bands represent the 95% confidence intervals. Note the monotonic growth and widening uncertainty in extrapolation regions (LF0.5), consistent with damage mechanics theory.

application.

4.5. 5-Year Contour Prediction. To demonstrate clinical utility, the predicted burden B_{t+5} was projected onto the vessel geometry. Using an isotropic growth assumption supported by recent biomechanical studies [9, 13], the lumen radius was contracted according to $r_{\text{lumen}}^{(f)} = r_{\text{wall}} \sqrt{1 - B_f}$. This allows for the visualization of future stenosis and potential occlusion risks, bridging the gap between abstract regression numbers and patient anatomy.

5. Discussion. The integration of Power-Law Damage Accumulation mechanics into the Gaussian Process framework addresses the critical limitation of standard ML in medicine: reliable extrapolation. Standard RBF kernels regress to a zero mean outside the training data, which is physically impossible for cumulative damage [11]. By enforcing the power-law structure, it is ensured that predictions obey the second law of thermodynamics (entropy/damage accumulation) even in the absence of data.

The results highlight a trade-off between physics-based robustness and data-driven flexibility. The “collapse” of the epistemic covariance suggests that for small datasets ($N = 57$), a strong physical prior is far more valuable than a flexible kernel. This aligns with findings in the broader PIML literature [1, 14], where inductive biases are shown to reduce the sample complexity of learning algorithms.

The Glagov-tolerant filtering proved essential. Without it, the “noise” introduced by compensatory remodeling would force the GP to learn a high noise variance σ_n^2 , obscuring the true progression signal. By explicitly modeling this physiological phenomenon, the training data was refined to better reflect the underlying pathology.

Future work will focus on integrating these geometric predictions with Finite Element Analysis (FEA). The predicted contours can serve as geometries for stress analysis, allowing for the calculation of Peak Circumferential Stress (PCS), a direct biomechanical predictor of plaque rupture [15].

6. Conclusions. A Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression framework for predicting atherosclerotic plaque progression was presented. By embedding continuum damage mechanics into the probabilistic learning model, the following was achieved:

- **Robust Extrapolation:** The model predicts monotonic damage growth even when trained on only 50% of the lifecycle (MAPE 15.4%).
- **Calibrated Uncertainty:** The heteroscedastic noise model captures the increasing variability of disease presentation with age.
- **Clinical Relevance:** The pipeline transforms raw OCT images into future risk predictions, providing a tangible tool for long-term cardiovascular prognosis.

The proposed method offers a generalized approach for modeling progressive degenerative diseases where data is sparse, but the underlying physics of decay is well-understood.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

During the preparation of this manuscript, the authors used Gemini (Google) to improve language, grammar, and check formatting compliance. After using this tool, the authors reviewed and edited the text and take full responsibility for the content of the published manuscript.

Contributions of authors

Krasii D. M.: Conceptualization, Methodology, Writing — original draft.
Larin O. O.: Supervision, Formal analysis, Methodology — review & editing.

Copyright ©



(2026). Krasii D. M., Larin O. O. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving

- nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
2. Karniadakis, G. E., Kevrekidis, I. G., Lu, L., Perdikaris, P., Wang, S., & Yang, L. (2021). Physics-informed machine learning. *Nature Reviews Physics*, 3(6), 422–440. <https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5>
 3. Rasmussen, C. E., & Williams, C. K. I. (2005). *Gaussian Processes for Machine Learning*. The MIT Press. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>
 4. Saul, A. D., Hensman, J., Vehtari, A., & Lawrence, N. D. (2016). Chained Gaussian Processes (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1604.05263>
 5. Hensman, J., Fusi, N., & Lawrence, N. D. (2013). Gaussian Processes for Big Data (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1309.6835>
 6. Lockwood, H. A., Agar, M. H., & Fielding, S. M. (2024). Power law creep and delayed failure of gels and fibrous materials under stress. *Soft Matter*, 20(11), 2474–2479. <https://doi.org/10.1039/d3sm01608k>
 7. Larin, O., & Vodka, O. (2014). A probability approach to the estimation of the process of accumulation of the high-cycle fatigue damage considering the natural aging of a material. *International Journal of Damage Mechanics*, 24(2), 294–310. <https://doi.org/10.1177/1056789514536067>
 8. Glagov, S., Weisenberg, E., Zarins, C. K., Stankunavicius, R., & Kolettis, G. J. (1987). Compensatory Enlargement of Human Atherosclerotic Coronary Arteries. *New England Journal of Medicine*, 316(22), 1371–1375. <https://doi.org/10.1056/nejm198705283162204>
 9. Humphrey, J. D., & Rajagopal, K. R. (2002). A Constrained Mixture Model for Growth and Remodeling of Soft Tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(03), 407–430. <https://doi.org/10.1142/s0218202502001714>
 10. Krasii, D., Larin, O., & Gorovyi, I. (2025). Analysis of Optical Coherence Tomography Images of Human Arteriosclerotic Vessels Using Computer Vision and Deep Learning Algorithms. In *Lecture Notes in Networks and Systems* (pp. 107–117). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-94845-9_9
 11. Krasii, D., & Larin, O. (2023). ML-surrogate modeling for the estimation of random system performance parameter progress by the Chained Gaussian Process Regression method. In *2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)* (pp. 1–5). IEEE. <https://doi.org/10.1109/khpiweek61412.2023.10312806>
 12. Sornette, D. (2000). *Critical Phenomena in Natural Sciences*. In Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04174-1>
 13. Ambrosi, D., Ateshian, G. A., Arruda, E. M., Cowin, S. C., Dumais, J., Goriely, A., Holzapfel, G. A., Humphrey, J. D., Kemkemer, R., Kuhl, E., Olberding, J. E., Taber, L. A., & Garikipati, K. (2011). Perspectives on biological growth and remodeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59(4), 863–883. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2010.12.011>
 14. Wang, S., Teng, Y., & Perdikaris, P. (2020). Understanding and mitigating gradient pathologies in physics-informed neural networks (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2001.04536>
 15. Cheng, G. C., Loree, H. M., Kamm, R. D., Fishbein, M. C., & Lee, R. T. (1993). Distribution of circumferential stress in ruptured and stable atherosclerotic lesions. A structural analysis with histopathological correlation. *Circulation*, 87(4), 1179–1187. <https://doi.org/10.1161/01.cir.87.4.1179>

Красій Д. М., Ларін О. О. Фізично-керована ланцюгова гаусівська регресія процесу для прогнозування прогресії атеросклеротичної бляшки.

Прогнозування прогресії атеросклеротичної бляшки за розрідженими даними поперечних зображень є критичним для оцінки серцево-судинного ризику. Стандартні методи регресії не мають фізично обґрунтованого індуктивного зміщення, що призводить до ненадійної екстраполяції. Представлено фреймворк фізично-керованого ланцюгового гаусівського процесного регресування (PG-CGPR), який інтегрує механіку степеневого накопичення пошкоджень як апіорну функцію середнього з гетероске-

дастичним моделюванням шуму. Спостереження поперечних перерізів трансформуються у псевдо-лонгітюдні навчальні пари з використанням фільтрації, толерантної до явища Глагова. Валідований на даних серцево-судинних зображень, що охоплюють кілька десятиліть, модель зберігає точність прогнозування навіть при екстраполяції за межі навчального вікового діапазону, з довірчими інтервалами, що покривають усі тестові спостереження. Сильний фізичний апіор домінує над навчанням на основі даних, демонструючи, що в режимах малих вибірок механістичні моделі перевершують гнучкі ядра. Фреймворк дозволяє проектувати майбутні геометрії судин для подальшого біомеханічного аналізу.

Ключові слова: гаусівські процеси, прогресія бляшки, фізично-інформоване машинне навчання, механіка пошкоджень, кількісна оцінка невизначеності, серцево-судинна візуалізація.

Received: 05.12.2025

Accepted: 22.12.2025

Published: 29.01.2026

УДК 004.8:575.111-047.37

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).162-171](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).162-171)**О. С. Куруца**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри інформаційних управляючих систем та технологій
o.kurutsa@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7020-7996>

ПОВНОГЕНОМНИЙ ПОШУК ГЕНЕТИЧНИХ АСОЦІАЦІЙ ПОШИРЕНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ В УКРАЇНІ: СУЧАСНІ МЕТОДИ ТА ІНСТРУМЕНТИ

Комплексні неінфекційні захворювання, зокрема серцево-судинні, онкологічні та аутоімунні, становлять основний тягар для системи охорони здоров'я України. Їх етіологія є результатом складної взаємодії генетичних факторів та впливу навколишнього середовища. Повногеномні асоціативні дослідження (GWAS) є ефективним інструментом для ідентифікації генетичних варіантів, пов'язаних із ризиком розвитку цих хвороб. Однак інтерпретація результатів GWAS залишається складним завданням, що потребує використання сучасних біоінформатичних методів аналізу.

У статті узагальнено сучасні підходи та інструменти для проведення GWAS і подальшої обробки даних з урахуванням особливостей української популяції. Розглянуто основні етапи дослідження — від контролю якості генотипових даних до пріоритизації причинних варіантів із застосуванням інструментів на основі машинного навчання, зокрема Combined Annotation Dependent Depletion (CADD) та новітніх методів повногеномної регресії, таких як Regenie. Особливу увагу приділено зростаючій ролі штучного інтелекту у виявленні складних нелінійних залежностей у геномних даних. Підкреслено унікальність генофонду населення України, що обґрунтовує необхідність масштабних національних геномних досліджень для розроблення ефективних стратегій персоналізованої медицини та профілактики поширених захворювань.

Ключові слова: повногеномні асоціативні дослідження, геномний аналіз, біоінформатика, машинне навчання, штучний інтелект, генетичне прогнозування, персоналізована медицина, Україна.

1. Вступ. Сучасна система охорони здоров'я України, як і більшості країн світу, стикається з проблемою високої поширеності комплексних (багатофакторних) неінфекційних захворювань. За статистичними даними, серцево-судинні хвороби спричиняють понад 50% випадків смертності в Україні, а онкологічні патології посідають друге місце за цим показником. Значну медико-соціальну проблему становлять також ендокринні захворювання.

Особливе місце серед ендокринної патології займають аутоімунні захворювання щитоподібної залози (АІЗ ЩЗ) є органоспецифічними патологіями, які вражають близько 2-5% загальної популяції, причому поширеність серед жінок (5-15%) є суттєво вищою, ніж серед чоловіків (1-5%) [1]. Такі патології є наслідком складної взаємодії між генетичною схильністю індивіда та факторами навколишнього середовища, зокрема способом життя, харчуванням і станом екосистеми. Розкриття генетичної архітектури цих хвороб має ключове значення для розроблення нових підходів до діагностики, профілактики та персоналізованого лікування.

Револьюційний прогрес у дослідженні генетичних чинників людини забезпечили повногеномні асоціативні дослідження (GWAS), що дають змогу без

попередніх гіпотез аналізувати геном та виявляти варіанти, асоційовані з ризиком розвитку захворювань. Завдяки цим дослідженням ідентифіковано тисячі локусів, пов'язаних із сотнями хвороб та фенотипових ознак. Ефективне застосування GWAS потребує великих обсягів якісних геномних даних, значних обчислювальних ресурсів і високої кваліфікації фахівців. Для України тривалий час це залишалось обмеженням через технологічні та фінансові бар'єри.

Попри значні досягнення, трансляція результатів GWAS у клінічну практику залишається складним завданням. Більшість виявлених асоціацій локалізуються в некодуючих ділянках геному, мають незначний індивідуальний ефект, а їхня функціональна роль часто невідома [2]. Це зумовлює появу проблеми пост-GWAS аналізу: серед тисяч статистично значущих асоціацій необхідно виокремити біологічно релевантні варіанти, встановити причинні гени та механізми.

Розв'язання цієї проблеми потребує інтеграції геномних даних із функціональною анотацією, що здійснюється за допомогою сучасних біоінформатичних інструментів, методів машинного навчання та штучного інтелекту [3].

Метою цієї статті є огляд сучасних методів проведення GWAS та подальшого аналізу з акцентом на їх застосуванні для вивчення поширених в Україні захворювань. Розглянемо ключові обчислювальні інструменти, зокрема Regenie для ефективного регресійного моделювання та CADD для функціональної пріоритетизації варіантів. Okремо обґрунтуємо необхідність проведення повногеномних досліджень на українській популяції, зважаючи на її унікальну генетичну різноманітність.

2. Основний результат.

2.1. Генетичні дослідження в Україні. Однією з ключових проблем сучасної біомедичної науки в Україні є відсутність великомасштабних геномних досліджень поширених захворювань. Більшість проведених у світі повногеномних асоціативних досліджень (GWAS) базуються на вибірках осіб переважно європейського походження, що обмежує можливість прямої екстраполяції їхніх результатів на українську популяцію.

Нещодавні дослідження геномної різноманітності населення України, виконані під керівництвом Тараса Олексика, засвідчили унікальність українського генофонду. У ході секвенування геномів 97 осіб було виявлено понад 13 мільйонів генетичних варіантів, серед яких близько 500 тисяч раніше не були описані. Встановлено також, що частоти багатьох клінічно значущих мутацій в українців істотно відрізняються від інших європейських популяцій [4].

Ці дані підкреслюють необхідність проведення системних досліджень генетичних детермінант поширених в Україні патологій. Зокрема, існує висока ймовірність, що фактори генетичного ризику для серцево-судинних, ендокринних та онкологічних захворювань у представників української популяції мають специфічні відмінності від тих, що виявлені в інших етнічних групах.

У цьому контексті актуальними стратегічними завданнями є:

- створення національної інфраструктури для проведення геномних досліджень, включно з формуванням біобанків для збору, зберігання та аналізу біологічних зразків;
- реалізація повномасштабних GWAS, спрямованих на виявлення популяційно специфічних генетичних маркерів ризику поширених захворювань.

Важливим кроком у цьому напрямі стало ухвалення Кабінетом Міністрів України «Порядку збору, зберігання та використання біологічних зразків людини з дослідницькою метою» [5], що створює необхідне правове підґрунтя для розвитку біобанкінгу та геномних ініціатив у країні.

Попри обмежену кількість масштабних проєктів, в Україні вже реалізуються перспективні наукові ініціативи, які демонструють значний потенціал у галузі геноміки. Зокрема, міжнародний проєкт «Геноміка цукрового діабету 1 типу в Україні» передбачає залучення 20000 учасників (10000 пацієнтів та 10000 осіб контрольної групи) для проведення повноекзомного секвенування та генотипування. Незважаючи на обмеження, пов'язані з воєнними діями, у межах проєкту вже зібрано понад 13500 зразків і отримано високоякісні дані майже для 10000 учасників, що заклало основу для формування першого у Східній Європі каталогу генетичних варіантів ЦД1 та дозволило ідентифікувати випадки моногенного діабету [6].

2.2. GWAS і штучний інтелект у сучасних геномних дослідженнях.

Методологія GWAS: від даних до асоціацій. Проведення GWAS є багатапним процесом, що потребує ретельного планування та суворого контролю якості на всіх стадіях дослідження [7]. Вихідні генотипні дані зазвичай формуються у форматі VCF (Variant Call Format), однак з огляду на значні обсяги інформації та обчислювальні вимоги їх часто конвертують у бінарні формати, сумісні зі спеціалізованими інструментами аналізу. Найбільш поширеним серед таких інструментів є програмний пакет PLINK, який фактично став стандартом для опрацювання GWAS-даних.

Однією з ключових складових аналітичного конвеєра є контроль якості даних, спрямований на мінімізацію впливу технічних артефактів і помилок генотипування, що можуть зумовлювати хибнопозитивні асоціації. Типовий протокол контролю якості, реалізований у PLINK, передбачає фільтрацію як зразків, так і генетичних варіантів за показниками частки пропущених генотипів, частоти мінорного алеля (MAF) та відхилення від рівноваги Харді–Вайнберга (HWE), а також ідентифікацію та усунення прихованої спорідненості між учасниками дослідження [8].

Важливим аспектом є також урахування популяційної стратифікації, оскільки ігнорування популяційної структури може призводити до систематичних зміщень оцінок асоціації. З огляду на складну демографічну історію української популяції, доцільним є застосування аналізу головних компонент (PCA), який дає змогу виявити основні напрями генетичної варіабельності між індивідами та включити відповідні компоненти як коваріати у регресійні моделі.

Статистичний аналіз у GWAS ґрунтується на тестуванні асоціації між кожним окремим генетичним варіантом (SNP) і досліджуваною ознакою, зокрема за допомогою лінійної або логістичної регресії залежно від типу фенотипу. Отримані результати зазвичай візуалізують у вигляді мангеттенських графіків, що відображають геномний розподіл сигналів асоціації. Оскільки кількість проведених тестів сягає мільйонів, обов'язковим є застосування корекцій на множинні порівняння, серед яких одним із найконсервативніших підходів є корекція Бонферроні.

2.3. Приклад застосування GWAS: аутоімунні захворювання щитоподібної залози. Аутоімунні захворювання щитоподібної залози, зокрема

аутоімунний тиреоїдит (тиреоїдит Хашимото), є показовою моделлю комплексних патологій, генетична архітектура яких інтенсивно вивчається за допомогою GWAS. Результати таких досліджень засвідчили наявність численних генетичних локусів, що відображають складну взаємодію між системною імунною схильністю та тиреоїд-специфічними біологічними механізмами [9].

Ідентифіковані гени-асоціати умовно групуються за їхньою біологічною роллю у формуванні ризику захворювання. Одна частина з них пов'язана із загальною аутоімунною схильністю та підвищує ймовірність розвитку різних аутоімунних патологій, включно з цукровим діабетом 1 типу та ревматоїдним артритом. До цієї категорії належить регіон HLA на 6-й хромосомі, який кодує білки головного комплексу гістосумісності та відіграє ключову роль у презентації антигенів Т-лімфоцитам. Вагомий внесок також мають варіанти гена RTPN22, що кодує тирозинфосфатазу – негативний регулятор активації Т-клітин, порушення функції якого може знижувати контроль імунної відповіді. Подібно до цього, ген CTLA4 залучений до підтримання імунної толерантності через інгібування активації Т-лімфоцитів, а його поліморфізми асоційовані з підвищеним ризиком аутоімунних реакцій.

Інша група генів має більш безпосередній зв'язок із біологією щитоподібної залози. Зокрема, FOXE1 кодує транскрипційний фактор, критично важливий для ембріонального розвитку та морфогенезу щитоподібної залози, що зумовлює його значення у формуванні органоспецифічної схильності. Водночас ген TSHR, який кодує рецептор тиреотропного гормону, є важливим функціональним елементом регуляції тиреоїдної активності; його генетичні варіанти найчастіше демонструють асоціації з хворобою Грейвса. У сукупності ці дані підкреслюють полігенну природу АІЗ ЩЗ і свідчать про поєднання загальноімунних і органоспецифічних генетичних чинників у патогенезі цих захворювань.

Цей приклад демонструє, як GWAS допомагає виявляти складні біологічні шляхи, що лежать в основі патології, вказуючи на конкретні гени та механізми, які можуть стати цілями для подальших досліджень та розробки терапії.

2.4. Regenie: тестування на основі повногеномної регресії. Традиційні GWAS-моделі, які аналізують кожен варіант окремо, є обчислювально затратними та не завжди враховують полігенну природу складних захворювань. Метод Regenie, розроблений дослідницькою групою корпорації Regeneron, базується на машинному навчанні для побудови повногеномної регресійної моделі.

Підхід Regenie складається з двох етапів. На першому етапі будується регресійна модель на основі підмножини високоякісних генетичних маркерів, що дозволяє ефективно врахувати полігенний ефект, спорідненість та популяційну структуру без необхідності обчислення громіздкої матриці генетичної спорідненості (GRM).

На другому етапі проводиться швидке тестування асоціацій для кожного варіанта окремо, враховуючи вже розраховані на першому етапі полігенні предиктори. Такий підхід істотно прискорює аналіз і дозволяє одночасно працювати з багатьма фенотипами [10].

Ключовою перевагою Regenie є можливість проведення аналізу на рівні генів із використанням агрегованих тестів (burden, SKAT, ACAT), що забезпечує виявлення сукупного ефекту рідкісних варіантів у межах одного гена. Це особливо актуально для виявлення генів, у яких накопичення рідкісних мутацій

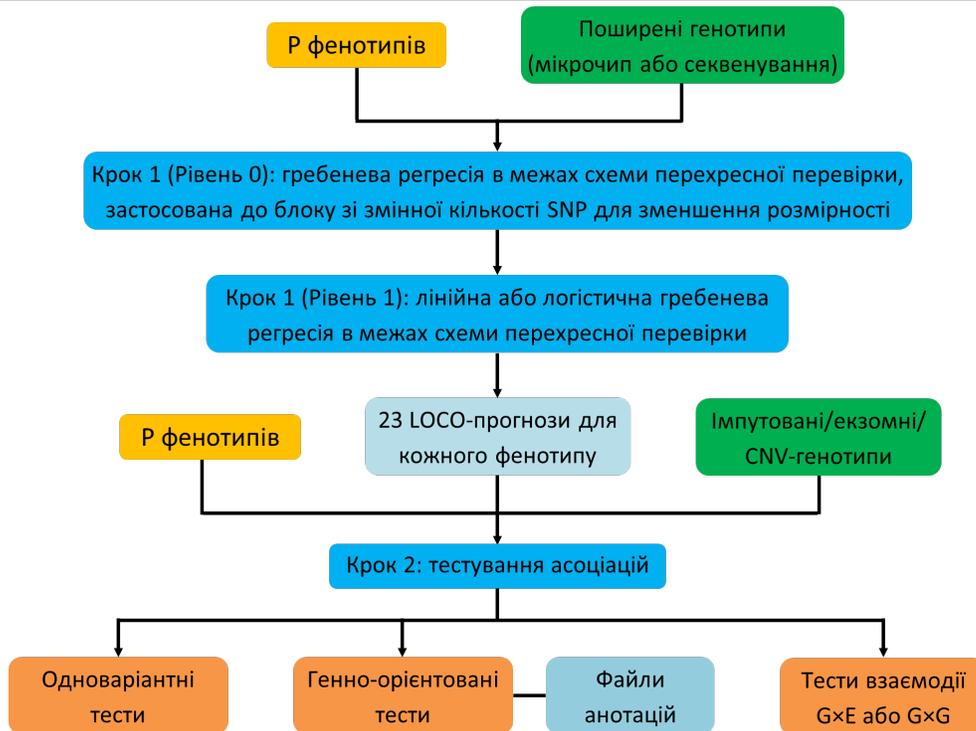


Рис. 1. Схема повногеномного асоціативного аналізу за допомогою Regenie.

може суттєво впливати на ризик захворювання, що часто пропускається стандартними GWAS.

У порівнянні з BOLT-LMM та SAIGE, алгоритм regenie демонструє суттєві переваги з точки зору обчислювальної ефективності, що є критично важливим для аналізу великих когорт.

Швидкодія regenie суттєво перевищує BOLT-LMM, забезпечуючи понад 30-разове загальне прискорення на етапах побудови нульової моделі та асоціативного тестування. Порівняно з SAIGE, regenie приблизно у 350 разів швидшим на кроці 1, використовував лише 40% пам'яті, а на кроці 2 демонстрував у десятки разів менший час виконання завдяки ефективній паралелізації. Максимальне використання оперативної пам'яті для regenie становило 12,9 ГБ, натомість BOLT-LMM потребував до 50 ГБ.

Поєднання високої швидкодії та помірною використання пам'яті дозволяє regenie забезпечувати стабільну масштабованість для аналізу як кількісних, так і бінарних фенотипів, включно з ознаками з вираженим дисбалансом «випадок-контроль». Це робить regenie оптимальним вибором для високопродуктивних GWAS-аналізів у великих популяційних дослідженнях.

2.5. CADD: інструмент пріоритезації варіантів на основі машинного навчання. Інтеграція алгоритмів передбачення патогенності варіантів дозволяє ідентифікувати мутації, що потенційно впливають на ризик розвитку захворювання. Одним із найефективніших таких інструментів є Combined Annotation Dependent Depletion (CADD), який поєднує десятки анотацій у єдину оцінку шкідливості (C-score) за допомогою моделі машинного навчання.

CADD навчається розрізняти нейтральні варіанти, що збереглися в еволю-

ції, та симульовані *de novo* мутації, використовуючи різноманітні геномні характеристики (рівень консервативності, дані ENCODE, функціональні наслідки тощо).

PHRED-шкальована оцінка CADD забезпечує інтуїтивну інтерпретацію результатів, оскільки її значення відображають відносний ранг потенційної шкідливості варіанта в масштабі всього геному: показник 10 відповідає верхнім 10% імовірно найбільш шкідливих варіантів, 20 – 1%, а 30 – 0,1%. Така шкала спрощує порівняння варіантів між собою та створює зручну основу для їх пріоритезації у подальших функціональних дослідженнях [11].

Водночас, попри широку застосовність, підхід CADD має низку концептуальних і методологічних обмежень, які не завжди належно враховуються під час інтерпретації результатів. Одним із них є проблема циклічності, що зумовлена використанням у моделі як предикторів виходів інших інструментів, зокрема SIFT і PolyPhen, унаслідок чого CADD частково успадковує їхні систематичні похибки. Додатковим джерелом невизначеності є упередженість навчальних міток, адже припущення про шкідливість усіх симульованих мутацій є спрощенням, яке не відображає значної частки нейтральних варіантів у геномі. Це призводить до зашумлення тренувальної вибірки та зниження точності, особливо в некодуючих регіонах. Крім того, включення частоти алелів як однієї з ознак формує схильність моделі автоматично присвоювати вищі бали рідкісним варіантам, що може зміщувати оцінку їхнього функціонального значення. У сукупності ці чинники зумовлюють необхідність обережної інтерпретації CADD-скорю та його використання у поєднанні з іншими джерелами доказів.

2.6. Пост-GWAS аналіз та роль штучного інтелекту. Окрім CADD та Regenie, які самі по собі є прикладами застосування машинного навчання, штучний інтелект (ШІ) все глибше інтегрується в геномні дослідження. Моделі глибокого навчання (Deep Learning), зокрема згорткові нейронні мережі (CNN), демонструють високу ефективність у прогнозуванні функціонального впливу некодуючих варіантів, аналізуючи послідовність ДНК безпосередньо та виявляючи складні регуляторні мотиви.⁷

Ідентифікація статистично значущого SNP не обов'язково означає виявлення причинної мутації. Через явище нерівноважного зчеплення (LD), знайдений SNP часто є лише маркером для цілого геномного регіону, що містить десятки або сотні варіантів, будь-який з яких може бути функціональним [12]. Для визначення найбільш ймовірних причинних варіантів застосовують методи пост-GWAS аналізу, що інтегрують дані функціональної геноміки [13].

Застосування методів штучного інтелекту у пост-GWAS аналізі суттєво розширює аналітичні можливості дослідження генетичних асоціацій та їхнього біологічного тлумачення. Зокрема, алгоритми глибокого навчання використовуються для підвищення точності пріоритезації генетичних варіантів і генів-кандидатів. Такі моделі, як DeepSEA, здатні прогнозувати функціональні наслідки генетичних варіантів, зокрема їхній вплив на епігенетичні маркери у різних типах клітин, що дає змогу оцінювати регуляторний потенціал варіантів поза межами кодувальних ділянок геному.

Крім того, підходи на основі ШІ відкривають можливість виявлення нелінійних міжгенних взаємодій, або епістазу, коли сукупний ефект кількох варіантів не зводиться до простої суми їхніх індивідуальних внесків. Такі складні

взаємозв'язки часто залишаються поза межами класичних статистичних моделей, але можуть мати вагоме значення для формування ризику складних захворювань. Важливою перевагою є також здатність ШІ інтегрувати різноманітні мультиоміксні дані, включно з геномікою, транскриптомікою та протеомікою, у межах єдиних аналітичних моделей, що сприяє більш цілісному розумінню молекулярних механізмів хвороби.

Окремий напрям становить пояснюваний штучний інтелект (ХАІ), який орієнтований на підвищення інтерпретованості моделей. Використання таких підходів дає змогу ідентифікувати SNP або гени, що роблять найбільший внесок у прогноз, тим самим поєднуючи високу прогностичну здатність моделей із можливістю їхнього біологічного тлумачення [14].

2.7. Результати досліджень в Україні. В Україні вже здійснюються важливі кроки у сфері медичної геноміки. Одним із прикладів є перше системне дослідження генетичних причин затримки розвитку та інтелектуальної недостатності у дітей, у якому було проаналізовано 417 випадків із використанням секвенування екзому та таргетних панелей. Це дозволило встановити молекулярний діагноз у 15,8% випадків і підтвердило ефективність використання локальних геномних даних для інтерпретації рідкісних варіантів [15].

На конференції ANSG 2024 було представлено попередні результати GWAS у рамках проєкту «Геноміка цукрового діабету 1 типу в Україні» на основі 9 000 зразків, що охоплюють усі регіони країни. Ідентифіковано низку генів-кандидатів на хромосомах 1, 6 та 11, а розширений аналіз наразі готується до публікації.

Ці ініціативи демонструють здатність української наукової спільноти інтегруватися у світовий геномний простір і формують підґрунтя для майбутніх національних проєктів у сфері персоналізованої медицини.

3. Висновки. Повногеномні асоціативні дослідження, у поєднанні з сучасними біоінформатичними інструментами та методами машинного навчання, становлять потужний підхід до розкриття генетичних механізмів поширених захворювань. Однак ефективність цього підходу безпосередньо залежить від належної репрезентації генетичної різноманітності популяцій, що досліджуються.

Аналіз останніх досліджень чітко демонструє, що населення України має унікальну генетичну структуру, яка наразі недостатньо представлена в міжнародних геномних базах даних. Це створює «сліпу зону» у розумінні генетичних ризиків найпоширеніших в Україні захворювань. Використання результатів GWAS, отриманих на інших популяціях, може бути неточним і навіть помилковим.

Таким чином, проведення масштабних повногеномних асоціативних досліджень, орієнтованих на українську популяцію, є не лише науковим пріоритетом, а й стратегічною передумовою для розвитку національної системи охорони здоров'я. Це відкриття можливість:

- ідентифікувати генетичні маркери ризику, специфічні для української популяції;
- поглибити розуміння патогенезу поширених захворювань у місцевому контексті;
- створити основу для розробки програм генетичного скринінгу та профі-

лактики;

- прокласти шлях до впровадження принципів персоналізованої медицини, де лікування та профілактичні заходи підбираються з урахуванням індивідуального генетичного профілю пацієнта.

Створення національних біобанків та розвиток обчислювальної інфраструктури для аналізу геномних даних із використанням передових інструментів, таких як Regenie, CADD та моделей штучного інтелекту, є критично важливими кроками на цьому шляху. Інтеграція зусиль наукової спільноти, медичної галузі та державних інституцій дозволить Україні стати повноцінним учасником глобальної геномної революції та зробити вагомий внесок у покращення громадського здоров'я.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що немає конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках міжнародного проекту «Геноміка цукрового діабету 1 типу в Україні».

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Куруца О. С. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Ovcariček, P. P., Görges, R., & Giovannella, L. (2024). Autoimmune thyroid diseases. *Seminars in Nuclear Medicine*, 54(2), 219–236. <https://doi.org/10.1053/j.semnuclmed.2023.11.002>
2. Pilalis, E., Zisis, D., Andrinopoulou, C., Karamanidou, T., Antonara, M., Stavropoulos, T. G., & Chatziioannou, A. (2025). Genome-wide functional annotation of variants: a systematic review of state-of-the-art tools, techniques and resources. *Frontiers in pharmacology*, 16, 1474026. <https://doi.org/10.3389/fphar.2025.1474026>

3. Visscher, P. M., Wray, N. R., Zhang, Q., Sklar, P., McCarthy, M. I., Brown, M. A., & Yang, J. (2017). 10 Years of GWAS Discovery: Biology, Function, and Translation. *American journal of human genetics*, 101(1), 5–22. <https://doi.org/10.1016/j.ajhg.2017.06.005>
4. Oleksyk, T. K., Wolfsberger, W. W., Weber, A. M., Shchubelka, K., Oleksyk, O. T., Levchuk, O., Patrus, A., Lazar, N., Castro-Marquez, S. O., Hasynets, Y., Boldyzhar, P., Neymet, M., Urbanovych, A., Stakhovska, V., Malyar, K., Chervyakova, S., Podorooha, O., Kovalchuk, N., Rodriguez-Flores, J. L., . . . , & Smolanka, V. (2021). Genome diversity in Ukraine. *GigaScience*, 10(1), g1aa159. <https://doi.org/10.1093/gigascience/g1aa159>
5. Kaminet Ministriv Ukrainy. (2024). Postanova No. 999 "Pro zatverdzhennia Poriadku zboru, zberihannia ta vykorystannia biolohichnykh zrazkiv liudyny z doslidnytskoiu metoiu". Retrieved from <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/999-2024-%D0%BF#Text> [in Ukrainian].
6. Shchubelka, K., Wolfsberger, W. W., Oleksyk, O., & et. al. (2025). Genomics of Type 1 Diabetes in Ukraine Initiative. *International Journal of Endocrinology (Ukraine)*, 21(4), 343–350. <https://doi.org/10.22141/2224-0721.21.4.2025.1557>
7. Uffelmann, E., Huang, Q. Q., Munung, N. S., & et al. (2021). Genome-wide association studies. *Nature Reviews Methods Primers*, 1, 59. <https://doi.org/10.1038/s43586-021-00056-9>
8. Purcell, S., Neale, B., Todd-Brown, K., Thomas, L., Ferreira, M. A., Bender, D., Maller, J., Sklar, P., de Bakker, P. I., Daly, M. J., & Sham, P. C. (2007). PLINK: a tool set for whole-genome association and population-based linkage analyses. *American journal of human genetics*, 81(3), 559–575. <https://doi.org/10.1086/519795>
9. Hwangbo, Y., & Park, Y. J. (2018). Genome-Wide Association Studies of Autoimmune Thyroid Diseases, Thyroid Function, and Thyroid Cancer. *Endocrinology and Metabolism (Seoul, Korea)*, 33(2), 175–184. <https://doi.org/10.3803/EnM.2018.33.2.175>
10. Mbatchou, J., Barnard, L., Backman, J., & et al. (2021). Computationally efficient whole-genome regression for quantitative and binary traits. *Nature Genetics*, 53, 1097–1103. <https://doi.org/10.1038/s41588-021-00870-7>
11. Rentzsch, P., Witten, D., Cooper, G. M., Shendure, J., & Kircher, M. (2019). CADD: Predicting the deleteriousness of variants throughout the human genome. *Nucleic Acids Research*, 47(D1), D886–D894. <https://doi.org/10.1093/nar/gky1016>
12. Welter, D., MacArthur, J., Morales, J., Burdett, T., Hall, P., Junkins, H., Klemm, A., Flicek, P., Manolio, T., Hindorff, L., & Parkinson, H. (2014). The NHGRI GWAS Catalog, a curated resource of SNP-trait associations. *Nucleic acids research*, 42 (Database issue), D1001–D1006. <https://doi.org/10.1093/nar/gkt1229>
13. Gallagher, M. D., & Chen-Plotkin, A. S. (2018). The Post-GWAS Era: From Association to Function. *American journal of human genetics*, 102(5), 717–730. <https://doi.org/10.1016/j.ajhg.2018.04.002>
14. Eraslan, G., Avsec, Ž., Gagneur, J., & Theis, F. J. (2019). Deep learning: new computational modelling techniques for genomics. *Nature reviews. Genetics*, 20(7), 389–403. <https://doi.org/10.1038/s41576-019-0122-6>
15. Shchubelka, K., Turova, L., Wolfsberger, W., & et al. (2024). Genetic determinants of global developmental delay and intellectual disability in Ukrainian children. *Journal of Neurodevelopmental Disorders*, 16, 13. <https://doi.org/10.1186/s11689-024-09528-x>

Kurutsa O. O. Genome-Wide Analysis for Genetic Associations of Common Diseases in Ukraine: Current Methods and Tools.

Complex non-communicable diseases, including cardiovascular, oncological, and autoimmune disorders, represent a major burden on the healthcare system of Ukraine. Their etiology results from a complex interplay between genetic determinants and environmental factors. Genome-wide association studies (GWAS) are an effective tool for identifying genetic variants associated with disease susceptibility. However, the interpretation of GWAS findings remains a challenging task that requires advanced bioinformatic analysis.

This article summarizes modern approaches and tools for conducting GWAS and subsequent data processing, with a particular focus on the Ukrainian population. The key stages of analysis are outlined — from genotype data quality control to causal variant prioritization using machine learning-based tools, such as Combined Annotation Depen-

dent Depletion (CADD) and advanced genome-wide regression methods, such as Regenie. Special attention is given to the growing role of artificial intelligence in detecting complex nonlinear patterns in genomic data. The uniqueness of the Ukrainian gene pool is emphasized, highlighting the need for large-scale national genomic studies to support the development of effective strategies for personalized medicine and prevention of common diseases.

Keywords: genome-wide association studies (GWAS), genomic analysis, bioinformatics, machine learning, artificial intelligence, genetic risk prediction, personalized medicine, Ukraine.

Отримано: 05.10.2025

Прийнято: 25.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 004.8:519.876.5:612.821.1

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).172-185](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).172-185)**І. М. Лях¹, В. І. Дорогій², М. В. Пономарьов³, Я. О. Чухрай⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін,
доктор технічних наук, професор
igor.lyah@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5417-9403>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
viktor.dorohii@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8174-4822>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
магістрант 1-ого курсу ОПП «Комп'ютерно-математичне моделювання»
ponomarov.mykhailo@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5064-9232>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
бакалавр 4-ого курсу ОПП «Інформаційні системи та технології»
chukhrai.yaroslav@student.uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-6537-1619>

ПРОГНОЗУВАННЯ ПАРАМЕТРІВ СНУ НА ОСНОВІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА МАШИННОГО НАВЧАННЯ

У роботі розглядається задача класифікації якості сну за допомогою алгоритмів машинного навчання. Актуальність теми зумовлена зростаючим інтересом до інструментів цифрової медицини, які дозволяють проводити оцінку стану здоров'я людини на основі об'єктивних показників. Метою дослідження є створення ефективної моделі, здатної здійснювати прогноз рівня Quality of Sleep на основі таких факторів, як: вік (Age), тривалість сну (Sleep Duration) та рівень стресу (Stress Level).

На початковому етапі було здійснено комплексну підготовку даних, що включала видалення викидів із використанням методу міжквартильного розмаху, стандартизацію числових змінних, кодування категоріальних ознак та побудову кореляційної матриці. Такий підхід забезпечив підвищення якості навчальних даних та стабільність статистичних оцінок. Далі набір даних було розділено на навчальну та тестову вибірки у співвідношенні 80:20. З метою порівняння ефективності різних підходів до класифікації було реалізовано чотири моделі: Logistic Regression, Random Forest, K-Nearest Neighbors та Support Vector Classifier. Гіперпараметри кожної моделі були підібрані з використанням методу GridSearchCV із п'ятиразовою крос-валідацією.

Оцінювання продуктивності моделей здійснювалося за метриками точності (Accuracy), прецизійності (Precision), повноти (Recall) та F1-міри. Найвищу ефективність показала модель Random Forest, яка досягла значення F1-міри 0.9866. Подальший аналіз включав інтерпретацію ймовірнісних прогнозів моделі та симуляцію нових комбінацій вхідних даних для оцінки впевненості прийнятих рішень. Було встановлено, що більшість прогнозів моделі мають середній або високий рівень ймовірності, що свідчить про її стабільну роботу. Результати дослідження демонструють доцільність використання алгоритмів машинного навчання у завданнях моніторингу якості сну та відкривають перспективи для подальшого вдосконалення моделі шляхом розширення набору ознак і джерел даних.

Ключові слова: машинне навчання, якість сну, метрика, Random Forest, стандартизація.

1. Вступ. У сучасних дослідженнях машинного навчання важливим аспектом є не лише вибір алгоритмів, а й якісна підготовка даних, від якої значною мірою залежить точність та стійкість моделей. Попередня обробка даних охоплює такі етапи, як: видалення викидів, стандартизацію та кодування категоріальних змінних, що забезпечує коректність статистичних оцінок і сприяє підвищенню узагальнюючої здатності моделей. Використання робастного статистичного методу виявлення аномалій, зокрема підходу на основі міжквартильного розмаху, дозволяє усунути екстремальні значення без втрати суттєвої інформації, що підвищує достовірність подальших результатів моделювання.

Після очищення даних виконано стандартизацію для приведення ознак до єдиного масштабу, що особливо важливо при використанні алгоритмів, чутливих до діапазону значень. Категоріальні змінні були перетворені у числовий формат за допомогою кодування міток, що дало змогу забезпечити узгодженість даних із математичними вимогами алгоритмів машинного навчання. Також було побудовано кореляційну матрицю, яка дозволила оцінити взаємозв'язки між змінними та виділити інформативні ознаки для подальшої кластеризації та побудови моделей прогнозування.

Подальші етапи дослідження зосереджено на створенні та оцінюванні моделей класифікації для прогнозування якості сну (Quality of Sleep) на основі ключових факторів – Age (вік), Sleep Duration (Тривалість сну), Stress Level (Рівень стресу). Для цього було застосовано декілька підходів машинного навчання, зокрема логістичну регресію, метод випадкового лісу, k-найближчих сусідів та метод опорних векторів. Їхня ефективність оцінювалася за допомогою стандартних метрик класифікації, що дозволило обґрунтовано визначити найрезультативнішу модель для вирішення поставленої задачі.

2. Постановка завдання. У даному дослідженні поставлено завдання розробити, навчити та порівняти ефективність класифікаційних моделей машинного навчання для прогнозування якості сну (Quality of Sleep) на основі ключових ознак – віку (Age), тривалості сну (Sleep Duration) та рівня стресу (Stress Level). Для досягнення цієї мети було здійснено повний цикл обробки даних: очищення від викидів за допомогою методу міжквартильного розмаху, стандартизацію числових ознак, кодування категоріальних змінних та аналіз кореляційних зв'язків для виявлення релевантних предикторів. На основі підготовлених даних було реалізовано чотири алгоритми класифікації – Logistic Regression, Random Forest, K-Nearest Neighbors та Support Vector Classifier, з підбором гіперпараметрів методом перехресної валідації GridSearchCV. Моделі оцінювалися за метриками Accuracy, Precision, Recall, F1-score, що дозволило визначити Random Forest як найефективніший підхід. Подальший етап передбачав інтерпретацію ймовірнісних прогнозів обраної моделі, виконання зворотного масштабування для відновлення реальних значень ознак та симуляцію прогнозів, що дозволило оцінити рівень впевненості моделі й виявити напрями для її подальшої оптимізації.

3. Аналіз останніх досліджень та публікацій. Вітчизняне дослідження Болобана О. А. присвячене розробці системи прогнозування порушень дихання під час сну з використанням штучного інтелекту. Запропонований підхід поєднує машинне навчання, глибокі нейронні мережі та обробку сигналів фотоплетизмографії для виявлення апное та гіпноное, з адаптивною моделлю LSTM

(Long Short-Term Memory) для аналізу часових рядів. Система на мікросервісній архітектурі підтримує віддалений моніторинг і прийняття діагностичних рішень, відповідаючи сучасним тенденціям ІоМТ (Internet of Medical Things) та цифрової медицини [1].

Дослідження аналізує взаємозв'язок варіабельності серцевого ритму (BCR), стресу та якості сну, показуючи їхній вплив на фізичне й психічне здоров'я. BCR виступає індикатором стану автономної нервової системи, а її зміни можуть слугувати ранніми предикторами серцево-судинних і психоемоційних розладів. Підвищена варіабельність асоціюється з адаптивністю, стресостійкістю та добрим здоров'ям. Проаналізовано механізми впливу стресу на ритмічність серцевої діяльності та якість сну, що поглиблює розуміння патогенетичних зв'язків і окреслює напрями для підтримання психофізіологічного балансу [2].

Wang X. & Wilhelm E. запропонували персоналізовану двоетапну просторово-часову модель прогнозування якості сну, що поєднує конволюційні та рекурентні шари з увагою для захоплення просторових і часових залежностей. Двоетапна адаптація дозволяє підлаштовувати модель під нових користувачів без міток, а порівняння з LSTM та іншими методами показало стабільно кращу точність. Аналіз пояснюваності підтвердив вплив окремих факторів на сон, роблячи підхід персоналізованим і практичним для носимих пристроїв [3].

Дослідження зосереджене на прогнозуванні якості сну за даними носимих пристроїв із використанням глибокого навчання. Запропонована модель WSHMSQP-ODL застосовує Deep Belief Network (DBN) для аналізу даних про активність під час сну, а алгоритм Enhanced Seagull Optimization (ESGO) оптимізує її гіперпараметри. Результати експериментів засвідчили перевагу моделі над аналогами, забезпечуючи точне й персоналізоване прогнозування для систем дистанційного моніторингу та ІоМТ [4].

Дослідження Corda, E., Massa, S. M., & Riboni, D. спрямоване на створення системи прогнозування якості сну з персоналізованими рекомендаціями, що базується на даних сенсорів і алгоритмах машинного навчання (ML). Підхід поєднує ML і великі мовні моделі (LLM), які не лише прогнозують якість сну, а й генерують контекстуальні поради для його покращення [5].

Дослідження Hidayat, A. A., Budiarto, A., Pardamean & B. Long присвячене прогнозуванню якості сну на основі даних про фізичну активність і глибокий сон із носимих пристроїв. Використання LSTM для моделювання часових рядів серцевого ритму та кількості кроків показало, що проста стекована модель дає найточніші результати, тоді як складніші моделі перенавчаються. Це підтверджує ефективність LSTM для прогнозування якості сну за фізіологічними даними [6].

Дослідження Lee, H., Cho, M., Lee, S. W., & Park, S. S. присвячене прогнозуванню якості сну на основі цифрових біомаркерів варіабельності серцевого ритму (HRV), зібраних носимими пристроями. Модель LSTM продемонструвала найвищу точність серед порівнюваних методів, а аналіз LIME виявив ключовий вплив співвідношення LF/HF, показників ISI та WHOQOL-BREF. Робота підтверджує ефективність HRV як біомаркера для персоналізованого моніторингу сну та переваги глибинного навчання у виявленні часових закономірностей у фізіологічних даних [7].

Дослідження Verma, R. K та співавторів аналізує роль штучного інтелекту

у медицині сну, зокрема використання машинного й глибокого навчання для діагностики та управління розладами сну. Автори підкреслюють потенціал ШІ у виявленні апное, інсомнії, нарколепсії та інших порушень, а також його здатність підвищувати доступність діагностики [8].

Дослідження Alabdan R. та співавторів представляє метод MBES-DLSQP для прогнозування якості сну, що поєднує глибоке навчання з модифікованим алгоритмом Bald Eagle Search для оптимізації гіперпараметрів. Модель на основі stacked sparse autoencoder (SSAE) аналізує високорозмірні дані сну з носимих пристроїв і відкритих наборів. Отримані результати підтвердили високу точність прогнозування, демонструючи перспективність підходу для створення зручних і ефективних систем моніторингу сну в медицині [9].

Дослідження Mahnaz Olfati та колег присвячене прогнозуванню тяжкості депресивних симптомів на основі якості сну, рівня тривожності та структурних характеристик мозку. Автори показали, що якість сну є надійним предиктором депресивних проявів, а включення показників тривожності істотно підвищує точність моделей [10].

4. Основний результат. Перед навчанням моделей було проведено огляд та підготовка даних для побудови моделей. Процедура підготовки даних для навчання моделей включала видалення викидів, стандартизацію та кодування категоріальних даних. Для ідентифікації та видалення екстремальних значень, які можуть спотворювати результати моделювання, було використано робастний статистичний метод, що базується на міжквартильному розмахі [11]. Спочатку обчислюється міжквартильний розмах, що є мірою варіації даних:

$$IQR = Q_3 - Q_1, \quad (1)$$

де IQR — міжквартильний розмах; Q_3 — третій квартиль (значення, що відсікає 75% відсортованих даних); Q_1 — перший квартиль (значення, що відсікає 25% відсортованих даних).

На основі IQR визначаються межі, за якими значення вважаються викидами [12]:

$$L = Q_1 - 1.5 \cdot IQR, \quad U = Q_3 + 1.5 \cdot IQR, \quad (2)$$

де L — нижня межа допустимих значень; U — верхня межа допустимих значень.

Усі дані, що виходять за межі діапазону $[L, U]$, відсіюються з набору. Така процедура є непараметричною, тобто не передбачає жодного припущення щодо форми розподілу даних. Вона підвищує стійкість статистичних оцінок (наприклад, середнього та дисперсії) і сприяє покращенню узагальнюючої здатності моделей машинного навчання.

Для приведення даних до єдиного масштабу було виконано стандартизацію. Стандартизація є лінійним перетворенням змінної, спрямованим на приведення даних до єдиного масштабу [13]. Тоді стандартизоване значення визначається як:

$$x'_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}, \quad (3)$$

де x'_i — стандартизоване значення ознаки; x_i — вихідне значення ознаки; μ — середнє арифметичне всіх значень ознаки; σ — стандартне відхилення значень ознаки.

Алгоритми машинного навчання оперують переважно з числовими даними [14]. У зв'язку з цим, категоріальні ознаки, представлені у вигляді текстових міток, потребують попереднього перетворення у числовий формат. Метод кодування міток є одним із фундаментальних підходів для виконання такого перетворення, що полягає у присвоєнні кожній унікальній категорії відповідного унікального цілого числа [15].

Нехай множина унікальних міток змінної позначається як $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Процес кодування формально визначається як відображення (функція) f :

$$f : Y \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}, \quad (4)$$

що для кожної конкретної мітки y_j виконується за правилом:

$$f(y_j) = j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

де f — функція кодування, що ставить у відповідність кожній мітці ціле число; $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ — множина, що складається з m унікальних категоріальних міток; y_j — j -та унікальна мітка з множини Y ; $j - 1$ — цілочисельне значення, що присвоюється мітці y_j , j — порядковий номер мітки (від 1 до m).

Після того як було проведено кодування міток, було побудовано кореляційну матрицю для виявлення та кількісної оцінки лінійних взаємозв'язків між змінними. Це дозволяє зрозуміти, які ознаки змінюються узгоджено (мають спільну динаміку), а які є незалежними, що є важливим етапом перед кластеризацією.

Елементами матриці є коефіцієнти кореляції Пірсона, що розраховується для кожної пари змінних за наступною формулою [16].

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{kj} - \bar{x}_j)^2}}, \quad (6)$$

де r_{ij} — коефіцієнт кореляції Пірсона між змінними x_i та x_j ; n — кількість спостережень у вибірці; x_{ki} — k -те спостереження змінної x_i ; x_{kj} — k -те спостереження змінної x_j ; \bar{x}_i та \bar{x}_j — середні арифметичні значення змінних x_i та x_j відповідно.

Значення коефіцієнтів $r_{ij} \in [-1, 1]$, де 1 означає ідеальний прямий лінійний зв'язок, -1 — ідеальний обернений, а 0 — відсутність лінійного зв'язку. Кореляційна матриця необхідна для відбору ознак перед побудовою кластеризації.

Для візуального представлення кореляційної матриці використовується теплокорта. Це графічний інструмент, де кожному значенню коефіцієнта кореляції відповідає певний колір або відтінок. Такий підхід дозволяє швидко та інтуїтивно виявляти сильні позитивні (зазвичай позначаються теплими кольорами) та негативні (холодними кольорами) зв'язки, а також ідентифікувати групи взаємопов'язаних ознак.

Результати проведеного кореляційного аналізу для досліджуваного набору даних представлено на рис. 1.

Ключовим етапом у побудові будь-якої моделі машинного навчання є визначення цільової змінної (залежної змінної) та набору ознак (незалежні змінні), які будуть використовуватись для її прогнозування.

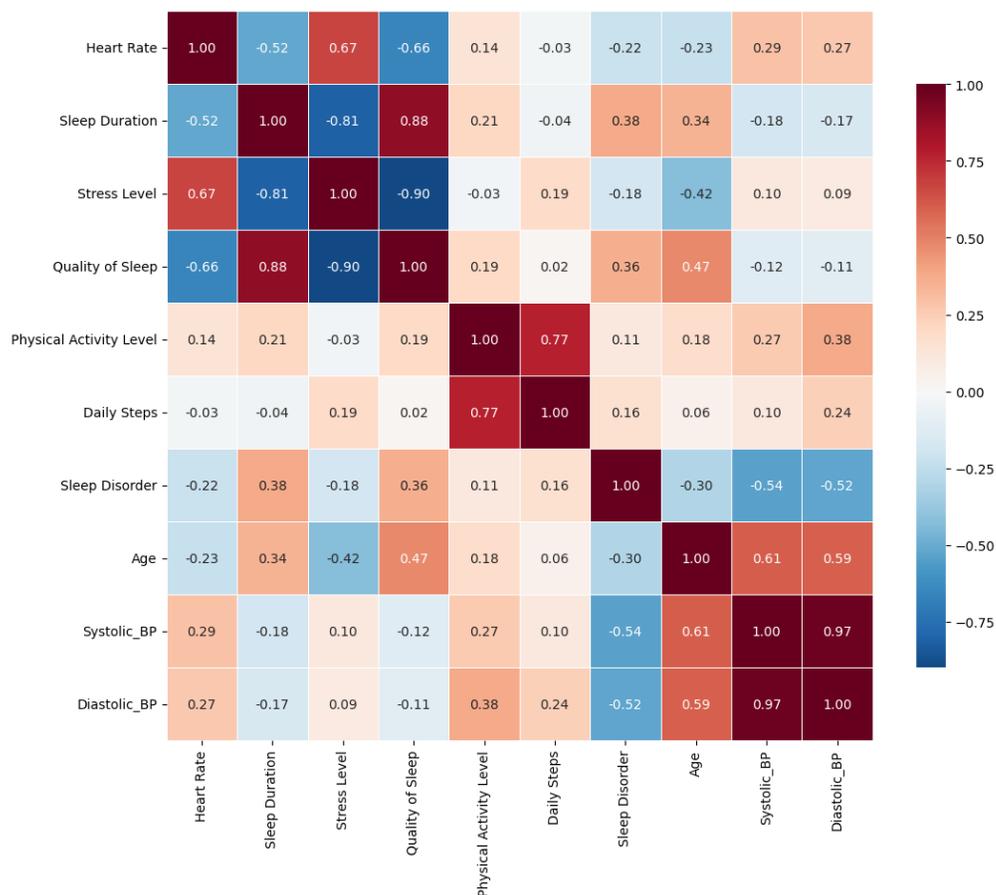


Рис. 1. Кореляційна матриця.

У даному дослідженні в якості цільової змінної було обрано показник *Quality of Sleep*. Ця змінна є дискретною оцінкою якості сну, і саме її модель буде намагатися спрогнозувати на основі інших факторів. В якості незалежних змінних було обрано наступні ознаки: *Age* (вік), *Sleep Duration* (Тривалість сну), *Stress Level* (Рівень стресу).

Після визначення цільової змінної та набору ключових ознак вибірку поділено на дві незалежні частини: навчальну та тестову.

Формально, якщо вихідний набір даних позначити як D , то його розбиття відповідає наступним умовам:

$$D = D_{train} \cup D_{test}, \quad D_{train} \cap D_{test} = \emptyset, \quad (7)$$

де D — повний набір даних; D_{train} — навчальна вибірка (у нашому випадку 80% даних); D_{test} — тестова вибірка (відповідно, 20% даних);

Після розбиття даних, для досягнення максимальної ефективності моделей необхідно було підібрати їхні оптимальні гіперпараметри — налаштування, що задаються перед навчанням. Для систематичного пошуку найкращої конфігурації було застосовано метод пошуку по сітці (GridSearchCV) з перехресною валідацією [17].

Цей процес полягає у пошуку набору гіперпараметрів θ^* , що мінімізує усереднену похибку, оцінену методом k -fold перехресної валідації [18]. Для цього

навчальна вибірка ділиться на k блоків (у випадку дослідження $k = 5$), і для кожної комбінації параметрів модель послідовно навчається на $k - 1$ блоках з валідацією на залишковому. Усереднена похибка по всіх ітераціях $CV(\theta)$ слугує стійкою оцінкою якості:

$$CV(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k L_i(\theta), \quad (8)$$

де $CV(\theta)$ — усереднена похибка перехресної валідації; k — кількість блоків; $L_i(\theta)$ — похибка моделі, обчислена на i -му блоці валідації.

Метод пошуку по сітці (GridSearchCV) автоматизує цей процес, послідовно перебираючи всі задані комбінації гіперпараметрів та обираючи той, який покаже найкращий результат $CV(\theta)$. Саме ця оптимальна конфігурація використовувалася для навчання кінцевої моделі.

Після визначення загальної стратегії підбору гіперпараметрів, необхідно детально розглянути архітектуру та математичні принципи кожного з алгоритмів класифікації, що були застосовані в рамках даного дослідження для порівняльного аналізу їхньої ефективності.

У дослідженні було використано чотири різні алгоритми, кожен з яких має унікальні математичні підходи до вирішення задачі класифікації.

Логістична регресія (Logistic Regression) — це статистичний метод, що моделює ймовірність належності об'єкта до певного класу за допомогою логістичної функції (сигмоїди) [19].

$$P(x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}}, \quad (9)$$

де $P(x)$ — ймовірність належності об'єкта до позитивного класу; β_i — вагові коефіцієнти.

Випадковий ліс (Random Forest) — це ансамблевий метод, що усереднює прогнози множини незалежних дерев рішень, кожне з яких побудоване на випадковій підмножині даних [20]. Підсумкове рішення приймається шляхом голосування:

$$\hat{y} = \text{mode}\{h_1(x), h_2(x), \dots, h_T(x)\}, \quad (10)$$

де \hat{y} — фінальний прогноз $h_t(x)$ — передбачення t -го дерева; T — загальна кількість дерев.

Метод k -найближчих сусідів (k -NN) класифікує об'єкт на основі класу більшості з його k найближчих сусідів у просторі ознак [21]. Відстань між об'єктами зазвичай обчислюється за евклідовою метрикою:

$$d(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{ik} - x_{jk})^2}, \quad (11)$$

де $d(x_i, x_j)$ — евклідова відстань між об'єктами x_i та x_j ; n — кількість ознак.

Метод опорних векторів (SVC) шукає оптимальну гіперплощину, що максимізує відстань (margin) між класами [22]:

$$\max_{w,b} \frac{2}{|w|} \text{ за умови } y_i (w^T x_i + b) \geq 1, \quad (12)$$

де w — вектор нормалі до гіперплощини; b — зсув гіперплощини; wV — норма вектора w ; x_i та y_i — вектор ознак та мітка класу i -го об'єкта. Для нелінійних задач застосовується ядрове перетворення $K(x_i, x_j)$, яке дозволяє знайти розділення у вищому вимірі.

Після того, як кожна модель була навчена з оптимальними гіперпараметрами, наступним етапом є об'єктивна оцінка та порівняння їхньої продуктивності на тестовій вибірці. Для цього використовується набір стандартних метрик класифікації, таких як: точність (Accuracy), повнота (Recall), прецизійність (Precision), F1-міра (F1-Score).

Основою для їх розрахунку слугує матриця невідповідностей (confusion matrix), яка деталізує результати класифікації за чотирма категоріями: TP (True Positive) — істинно позитивні випадки; TN (True Negative) — істинно негативні; FP (False Positive) — хибно позитивні; FN (False Negative) — хибно негативні.

На основі цих компонентів матриці розраховується ряд ключових метрик. Точність (Accuracy) відображає загальну частку коректно класифікованих об'єктів відносно загальної кількості спостережень.

$$\text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}. \quad (13)$$

Для більш глибокого аналізу, особливо в умовах незбалансованих класів, використовується інша метрика, а саме прецизійність (Precision), яка оцінює надійність позитивних прогнозів.

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}. \quad (14)$$

У свою чергу, метрика повнота (Recall або Чутливість) вимірює здатність моделі ідентифікувати всі фактично позитивні об'єкти з вибірки.

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}. \quad (15)$$

Оскільки між прецизійністю та повнотою часто існує обернений зв'язок, для їх узагальнення використовується F1-міра (F1-Score). Ця метрика є гармонійним середнім між ними і дозволяє знайти оптимальний баланс.

$$F1 = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}. \quad (16)$$

Для наочної демонстрації, на рис. 2 представлено матрицю невідповідностей для розробленої моделі Random Forest.

Для кожної з чотирьох розроблених моделей були розраховані вищезазначені метрики на тестовій вибірці. Підсумкові результати оцінки всіх моделей представлено в табл. 1.

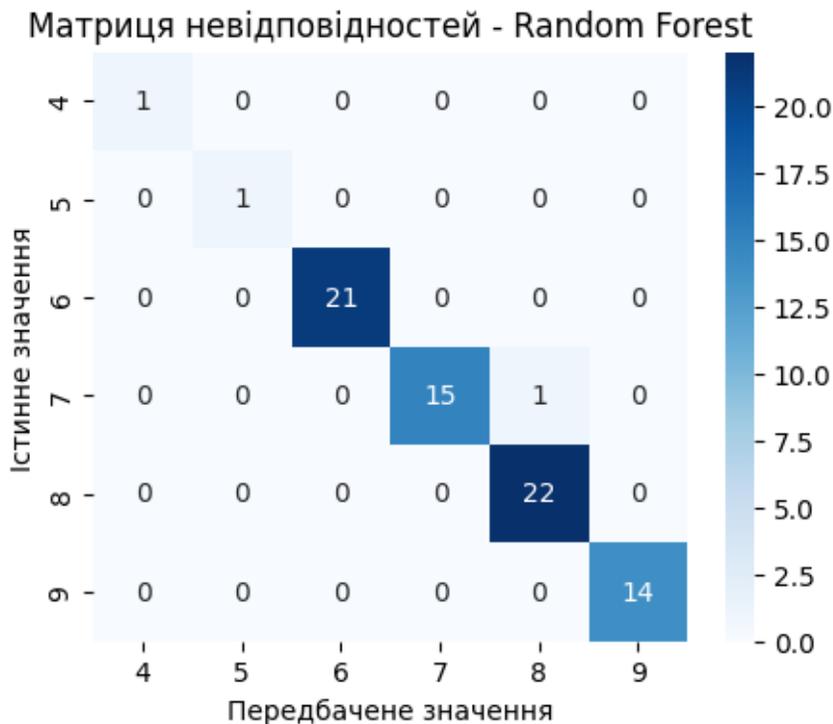


Рис. 2. Матриця невідповідностей для Random Forest.

Таблиця 1.

Порівняльна таблиця метрик якості для класифікаційних моделей

Model	Accuracy	Precision	Recall	F1-score
Logistic Regression	0.866667	0.843095	0.866667	0.853581
Random Forest	0.986667	0.987246	0.986667	0.9866
KNN	0.946667	0.938739	0.946667	0.939363
SVC	0.933333	0.928811	0.933333	0.925234

Комплексний аналіз результатів, представлених у таблиці, дозволив визначити Random Forest як найбільш ефективну модель для даної задачі. Він не тільки показав високу загальну точність, але й досяг найкращого балансу між Precision та Recall, що відображається у найвищому значенні F1-міри.

Після вибору найкращої моделі – Random Forest, кінцевий етап дослідження полягає в інтерпретації цих результатів та демонстрації практичного застосування. Це включає повернення даних до початкового масштабу, аналіз імовірнісних оцінок та формування конкретних класифікаційних прогнозів.

На етапі попередньої обробки даних було застосовано стандартизацію для приведення всіх ознак до єдиного масштабу за формулою (3). Для того, щоб результати моделювання були інтерпретованими у своїх вихідних одиницях, виконується процедура зворотного масштабування.

Дана операція є математично оберненою до стандартизації та дозволяє відновити початкове значення ознаки.

$$x_i = x'_i \cdot \sigma + \mu, \quad (17)$$

де x_i — відновлене значення у початковому масштабі; x'_i — стандартизоване значення; σ — стандартне відхилення, що використовувалось на етапі стандартизації; μ — середнє арифметичне, що використовувалось на етапі стандартизації.

Обрана модель Random Forest використовується для виконання класифікаційного прогнозу, тобто для визначення найбільш імовірного класу *Quality of Sleep* для набору вхідних даних (*Age, Sleep Duration, Stress Level*). У процесі класифікації, окрім визначення передбаченого класу, модель форм у ймовірнісну оцінку належності об'єкта до кожної категорії. Це числове значення в межах від 0 до 1 відображає ступінь упевненості моделі у своєму прогнозі та інтерпретується як апостеріорна ймовірність належності об'єкта до певного класу. Висока ймовірність свідчить про високий рівень достовірності прогнозу, тоді як низька вказує на невизначеність або можливу належність об'єкта до іншого класу.

Для інтерпретації рівня впевненості доцільно використовувати шкалу ймовірностей:

0.00 – 0.40 — низька (модель не впевнена у прогнозі);

0.41 – 0.60 — середня (потрібна додаткова перевірка);

0.61 – 0.80 — висока (модель здебільшого впевнена);

0.81 – 1.00 — дуже висока (прогноз майже однозначний).

Для демонстрації практичного застосування моделі було проведено симуляцію прогнозування якості сну, в рамках якої генерувалися різні комбінації вхідних ознак. Для кожного набору даних модель надавала класифікаційний прогноз та відповідну йому ймовірність. Отримані результати дали змогу оцінити ступінь надійності передбачень та визначити, у яких випадках модель демонструє найвищу впевненість. Дані результати представлені в табл. 2.

Таблиця 2.

Приклад прогнозів якості сну з відповідними ймовірнісними оцінками

Age	Sleep Duration	Stress Level	Predicted Class	Probability
20	5.1	7	4	0.46
21	5.9	7	4	0.45
34	6.8	7	4	0.49
29	6.7	7	5	0.72
30	8.8	7	5	0.33
36	6.7	7	5	0.74
39	5.5	6	6	0.54
31	5.1	6	6	0.59
43	5.5	7	6	0.7
30	9.3	6	7	0.73
26	9.2	6	7	0.64
47	8.5	7	7	0.46
41	8.4	5	8	0.5
42	7.5	3	8	0.54
33	9.1	5	8	0.425
42	8.1	4	9	0.62
47	9.4	2	9	0.86
62	9.3	5	9	0.9

Дана табл. 2 наочно ілюструє, як модель реагує на різні вхідні дані, та дозволяє оцінити не тільки прогнозований результат, але й ступінь впевненості моделі, що є критично важливим для прийняття рішень у практичних задачах.

Згідно з отриманими даними, найбільша частка значень (50%) припадає на інтервал 0.41 – 0.60, який характеризує середній рівень упевненості. Це свідчить про те, що в більшості випадків модель формує прогнози з помірною достовірністю, що може вказувати на наявність частково неоднозначних вхідних даних. Високий рівень упевненості (0.61 – 0.80) становить 33.3%, а дуже високий (0.81 – 1.00) – лише 11%, що свідчить про обмежену кількість ситуацій, у яких модель повністю впевнена у своєму рішенні. Низькі значення ймовірностей (0.00 – 0.40) трапляються рідко – менше 6% від загальної кількості випадків, що свідчить про відносну стабільність алгоритму.

Отже, аналіз розподілу ймовірностей підтверджує, що модель демонструє збалансовану поведінку, проте потребує подальшого вдосконалення з метою підвищення частки прогнозів із високим рівнем впевненості.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У межах дослідження було реалізовано повний цикл побудови системи класифікації якості сну на основі даних про вік, тривалість сну та рівень стресу. Проведено ґрунтовну передобробку даних, яка включала видалення викидів методом міжквартильного розмаху, стандартизацію числових ознак, кодування категоріальних змінних та аналіз кореляційних зв'язків між змінними. Це забезпечило належну якість вхідних даних і підвищило достовірність подальшого моделювання. Було сформовано навчальну та тестову вибірки, на основі яких здійснено навчання чотирьох класифікаційних моделей: Logistic Regression, Random Forest, K-Nearest Neighbors і Support Vector Classifier з оптимізацією гіперпараметрів за допомогою GridSearchCV.

Порівняльна оцінка моделей за метриками точності, прецизійності, повноти та F1-міри засвідчила, що модель Random Forest продемонструвала найвищу ефективність на тестовій вибірці, досягнувши F1-міри 0.9866. Це свідчить про здатність моделі забезпечувати не лише високу загальну точність, але й збалансованість між кількістю правильно виявлених позитивних класів та надійністю класифікаційних рішень. Подальша симуляція прогнозів і аналіз ймовірнісних оцінок дозволили дослідити ступінь впевненості моделі у своїх передбаченнях, що є важливою умовою практичного застосування в умовах неповної або неоднозначної інформації.

Аналіз розподілу ймовірностей показав, що більшість прогнозів моделі мають середній або високий рівень упевненості, а частка випадків із дуже високою впевненістю становить понад 10%. Це свідчить про стабільну роботу моделі, однак також вказує на можливість подальшого підвищення точності через розширення ознакового простору або застосування методів балансування класів. Отримані результати демонструють потенціал використання алгоритмів машинного навчання для прогнозування стану сну та можуть бути основою для впровадження персоналізованих рекомендацій у сфері цифрової медицини та добробуту.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

І. М. Лях – концептуалізація, підготовка даних, формальний аналіз, написання – оригінальний проєкт, науковий нагляд; В. І. Дорогій – методологія, адміністрування проєкту, написання (рецензування та редагування); М. В. Пономарьов – проведення дослідження, ресурси, візуалізація; Я. О. Чухрай – валідація, програмне забезпечення.

Авторські права ©



(2026). Лях І. М., Дорогій В. І., Пономарьов М. В., Чухрай Я. О. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Boloban, O. A. (2025). *Methods and tools for predicting respiratory diseases and apnea based on artificial intelligence and microservice architecture*: (dissertation ...doctor of philosophy). Kyiv, 156 p. Retrieved from <https://ela.kpi.ua/items/7d1c9b55-5f5b-4bd2-97cc-32341abe501f> [in Ukrainian].
2. Liashenko, V. P., & Stetsenko, S. M. (2024). Peculiarities of heart rate variability against the background of sleep disturbance and stress factors: theoretical aspect. *Slobozhansky Scientific Bulletin. Series: Natural Sciences*, (1), 43–49. <https://doi.org/10.32782/naturalspu/2024.1.5>
3. Wang, X., & Wilhelm, E. (2025). Individualized and Interpretable Sleep Forecasting via a Two-Stage Adaptive Spatial-Temporal Model. *arXiv preprint*.

- <https://doi.org/10.48550/arXiv.2509.06974>
4. Hamza, M. A., Abdalla Hashim, A. H., Alsolai, H., Gaddah, A., Othman, M., Yaseen, I., ... & Zamani, A. S. (2023). Wearables-assisted smart health monitoring for sleep quality prediction using optimal deep learning. *Sustainability*, 15(2), 1084. <https://doi.org/10.3390/su15021084>
 5. Corda, E., Massa, S. M., & Riboni, D. (2024). Context-aware behavioral tips to improve sleep quality via machine learning and large language models. *Future Internet*, 16(2), 46. <https://doi.org/10.3390/fi16020046>
 6. Hidayat, A. A., Budiarto, A., & Pardamean, B. (2023). Long short-term memory-based models for sleep quality prediction from wearable device time series data. *Procedia Computer Science*, 227, 1062–1069. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2023.10.616>
 7. Lee, H., Cho, M., Lee, S. W., & Park, S. S. (2025). Predicting sleep quality with digital biomarkers and artificial neural networks. *Frontiers in Psychiatry*, 16, 1591448. <https://doi.org/10.3389/fpsy.2025.1591448>
 8. Verma, R. K., Dhillon, G., Grewal, H., Prasad, V., Munjal, R. S., Sharma, P., ... & Surani, S. (2023). Artificial intelligence in sleep medicine: Present and future. *World Journal of Clinical Cases*, 11(34), 8106. <https://doi.org/10.12998/wjcc.v11.i34.8106>
 9. Alabdan, R., Mengash, H. A., Maray, M., Alotaibi, F., Abdelbagi, S., & Mahmud, A. (2023). Modified bald eagle search algorithm with deep learning-driven sleep quality prediction for healthcare monitoring systems. *IEEE Access*, 11, 135385–135393. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3337647>
 10. Olfati, M., Samea, F., Faghihroohi, S., Balajoo, S. M., Küppers, V., Genon, S., ... & Tahmasian, M. (2024). Prediction of depressive symptoms severity based on sleep quality, anxiety, and gray matter volume: a generalizable machine learning approach across three datasets. *EBioMedicine*, 108. <https://doi.org/10.1016/j.ebiom.2024.105313>
 11. Loh, P. L. (2024). A theoretical review of modern robust statistics. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 12. <https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-112723-034446>
 12. Ding, Y. J., Yap, W. S., & Khor, K. C. (2023). Profiling and identifying Smurfs or boosters on Dota 2 using K-means and IQR. *IEEE Transactions on Games*, 16(3), 577–585. <https://doi.org/10.1109/TG.2023.3317053>
 13. Divakaruni, A. S., & Jastroch, M. (2022). A practical guide for the analysis, standardization and interpretation of oxygen consumption measurements. *Nature metabolism*, 4(8), 978–994. <https://doi.org/10.1038/s42255-022-00619-4>
 14. Kavetskyi, M. S., Sievierinov, O. V., Gvozdo, R. Y., & Smirnov, A. O. (2024). Using machine learning to classify DOS/DDOS attacks. *Radiotekhnika*, 2(217), 55–63. <https://doi.org/10.30837/rt.2024.2.217.04> [in Ukrainian].
 15. Mishchenko, L. D., & Klymenko, I. A. (2023). Recognition of fake news using natural language processing and a low-power architecture for edge computing. *Problems of Informatization and Management*, 4(76), 59–67. <https://doi.org/10.18372/2073-4751.76.18241> [in Ukrainian].
 16. Kotenko, V. V., Bashynskyi, S. I., & Piskun, I. A. (2021). Application of the Pearson method to obtain dependences of the chemical elements distribution within the kaolin deposit. *Technical Engineering*, (2(88)), 129–134. [https://doi.org/10.26642/ten-2021-2\(88\)-129-134](https://doi.org/10.26642/ten-2021-2(88)-129-134) [in Ukrainian].
 17. Aprilliandhika, W., & Abdulloh, F. F. (2024). Comparison Of K-Nearest Neighbor and Support Vector Machine Algorithm Optimization With Grid Search CV On Stroke Prediction. *Jurnal Teknik Informatika (Jutif)*, 5(4), 991–1000. <https://doi.org/10.52436/1.jutif.2024.5.4.1951>
 18. Oursat'ev, O. A., Volkov, O. Y., & Tkalya, V. H. (2025). Automated Machine Learning. State and Prospects Development. *Information Technologies and Systems*, 2(2), 3–33. <https://doi.org/10.15407/intechsys.2025.02.003> [in Ukrainian].
 19. Radionova, I., & Fedorenko, T. (2025). Analysis of state budget expenditures in wartime using logistic regression. *Science Notes of KROK University*, (3(79)), 25–34. <https://doi.org/10.31732/2663-2209-2025-79-25-34> [in Ukrainian].
 20. Liakh, I. M., Dudnyk, V. V., Tshipino, Y. M., & Tshipino, A. Y. (2025). Forecasting user engagement in educational web platforms using machine learning algorithms. *Scientific*

- Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 46(1), 218–225. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).218-225](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).218-225) [in Ukrainian].
21. Klymenko, O. (2024). Concept of supervised machine learning algorithms based on the k-nearest neighbors method for load balancing on pharmaceutical sorting lines. *Control, Navigation and Communication Systems*, 1(75), 28–30. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2024.1.028> [in Ukrainian].
 22. Bovchaliuk, S., & Haidai, Y. (2024). Analysis of the support vector machine algorithm in comparison to traditional market movements prediction methods. *Control, Navigation and Communication Systems*, 3(77), 89–92. <https://doi.org/10.26906/SUNZ.2024.3.089> [in Ukrainian].

Liakh I. M., Dorohii V. I., Ponomarov M. V., Chukhrai Y. O. Forecasting Sleep Parameters Based on Mathematical Modelling and Machine Learning.

This study addresses the task of classifying sleep quality using machine learning algorithms. The relevance of the topic arises from the growing interest in digital medicine tools that enable the assessment of human health based on objective indicators. The aim of the research is to develop an efficient model capable of predicting the level of «Quality of Sleep» based on factors such as age, sleep duration, and stress level.

At the initial stage, a comprehensive data preprocessing procedure was conducted, which included the removal of outliers using the interquartile range method, standardisation of numerical variables, encoding of categorical features, and the construction of a correlation matrix. This approach ensured improved data quality and enhanced the stability of statistical estimates. Subsequently, the dataset was divided into training and testing subsets in an 80:20 ratio. To compare the effectiveness of different classification approaches, four models were implemented: Logistic Regression, Random Forest, K-Nearest Neighbours, and Support Vector Classifier. The hyperparameters of each model were optimised using the GridSearchCV method with five-fold cross-validation.

The evaluation of the model's performance was carried out using accuracy, precision, recall, and F1-score metrics. The Random Forest model demonstrated the highest effectiveness, achieving an F1-score of 0.9866. Further analysis included the interpretation of the model's probabilistic predictions and the simulation of new combinations of input data to assess the confidence of the generated decisions. It was found that most of the model's predictions exhibited medium or high probability levels, indicating its stable performance. The results of the study demonstrate the feasibility of applying machine learning algorithms to sleep quality monitoring tasks and highlight the potential for further model enhancement through the expansion of feature sets and data sources.

Keywords: machine learning, quality of sleep, metrics, Random Forest, standardisation.

Отримано: 15.08.2025

Прийнято: 13.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).186-195](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).186-195)**М. М. Маляр¹, І. І. Половко², М. М. Шаркаді³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри кібернетики і прикладної математики,
доктор технічних наук

mykola.malyar@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри кібернетики і прикладної математики
polovko.ivan@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7128-4846>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук

marianna.sharkadi@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

ЗАСТОСУВАННЯ НЕЧІТКОЇ ЛОГІКИ В ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНИХ СИСТЕМАХ ЕКОЛОГІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

Використання інтелектуальних інформаційних систем широко розповсюджене в різних галузях, включаючи бізнес, медицину, фінанси, науку, екологію та багато інших сфер. Дослідження та розробки управлінських інтелектуальних систем будуть і надалі використовувати нові технологічні рішення та отримувати вигоду з прогресу у створенні великих баз даних, штучного інтелекту, взаємодії людини з комп'ютером, моделювання та оптимізації, розробки програмного забезпечення, телекомунікацій. Охарактеризовано розроблений авторами математичний апарат, який дає змогу формалізувати невизначеності та багаторівневі взаємозв'язки, забезпечуючи ефективно розв'язання задач оптимізації. Отримані результати створюють підґрунтя для подальших досліджень у напрямі розширення сфер застосування, вдосконалення моделей та інтеграції з сучасними цифровими платформами. У роботі запропоновано використання апарату нечіткої математики, що дозволяє в більшій мірі врахувати той факт, що складові іміджу регіону є слабкоформалізованими якісними змінними.

Ключові слова: інформаційно-аналітична система, якість водних ресурсів, нечітка логіка, теорія нечітких множин, екологічна оцінка, функції належності, база знань, прийняття рішень.

1. Вступ. Сучасні тенденції розвитку методів штучного інтелекту (ШІ) сприяють активній інтеграції інформаційних технологій у всі сфери людської діяльності. Швидкий розвиток інформаційних технологій різко збільшує обсяги даних, які накопичуються дослідниками в різних галузях людської діяльності.

Створення більш точних моделей процесів, що протікають у складних соціоорієнтованих системах, під впливом сукупності різного роду факторів зовнішнього та внутрішнього оточення, є використання технологій ШІ, ключовою особливістю якого є здатність навчатися, накопичувати знання та їх застосовувати.

2. Постановка задачі. Пропонується структура інформаційно-аналітичної системи для визначення рівня якості водних ресурсів на основі теорії нечітких множин.

3. Методи і матеріали. Для вирішення важливих питань аналізу даних та подання знань в умовах невизначеності, а саме виявлення прихованих правил і залежностей; добування, подання та обробка недовизначених знань, які отримують за допомогою експертів, або знань, одержаних у результаті обробки експериментальних даних доцільно створювати і використовувати інформаційно-аналітичні системи (ІАС). ІАС — це сукупність інтелектуальних інформаційних застосувань та інструментальних засобів, які використовуються для маніпулювання даними, їхнього аналізу і надання результатів такого аналізу кінцевому користувачеві. Методологічною основою та потужним інструментом при проведенні аналітичної роботи є системний аналіз.

Функціонування ІАС розділяється на два рівні:

- інформаційний рівень, що полягає в пошуку, збиранні, зберіганні, поширенні інформації;
- аналітичний рівень, що полягає в узагальненні, класифікації інформації, її аналізі і перетворенні, розробці висновків, пропозицій, рекомендацій і прогнозів.

Як правило, дані які отримують за допомогою експертів містять різні види невизначеностей і відповідно знання, що є результатом обробки експериментальних даних, містять значну кількість шумів. Для роботи з такою інформацією пропонується використати апарат нечіткої математики [1], що є найбільш пристосованим для відображення і обробки таких даних.

Завдяки апарату нечіткої математики є можливість представляти знання у вигляді правил у нечітких базах знань, що дозволяє будувати нечіткі логічні системи якісного відображення предметної області на основі методів нечіткого моделювання.

Виходячи із системного підходу основними компонентами ІАС, як правило, можуть вважатись наступні елементи: база показників для оцінки суб'єкта дослідження предметної області [2]; база нормативно-методичних матеріалів [3]; база моделей відображення даних [4]; база методів обробки даних [5]; база знань.

Зазначимо, що оцінювання є головною складовою діагностики стану якості водних ресурсів. Оцінювання — це процес, який включає: визначення ключових ознак, характеристик, параметрів (показників, індикаторів), властивостей; вибір методів (сукупності методів) оцінювання і, як результат, одержання оцінок (якісних і кількісних, локальних та інтегральних).

4. Опис проблеми. Екологічний контекст якості поверхневих вод.

Якість води є фундаментальною характеристикою, що визначає ступінь відповідності її властивостей потребам людини та технологічним вимогам, а також, що найважливіше, її здатність підтримувати здорові водні екосистеми. Ця характеристика не є статичною; вона є результатом складної взаємодії природних процесів та антропогенного впливу. Хоча природний хімічний склад води визначається геологічними та кліматичними умовами, основною загрозою для водних ресурсів, особливо в промислово розвинених країнах, як-от Україна, є антропогенне забруднення.

Забруднювачі, що потрапляють у поверхневі води, можна систематизувати за їхньою природою на хімічні (неорганічні та органічні сполуки), фізичні (теплове, радіаційне забруднення) та біологічні (патогенні мікроорганізми, віруси).

Джерела цих забруднень в Україні є різноманітними та системними, що створює комплексні виклики для моніторингу та управління водними ресурсами.

Основні джерела забруднення поверхневих вод в Україні

Комунально-побутові стічні води. Це одне з найпотужніших джерел забруднення. Побутові стоки містять значну кількість органічних речовин, біогенних елементів (сполуки азоту та фосфору), а також синтетичних поверхнево-активних речовин (СПАР) від мийних засобів. Надходження цих речовин, особливо фосфатів, у водойми провокує процес евтрофікації — бурхливого розвитку синьо-зелених водоростей («цвітіння» води), що призводить до дефіциту кисню, замору риби та загальної деградації екосистеми. Парадоксально, але найбільшими точковими забруднювачами часто є самі водоканали. Їхні очисні споруди, спроектовані десятиліття тому, не розраховані на сучасні обсяги та хімічний склад стоків, що призводить до скидання недостатньо очищеної води безпосередньо у річки, зокрема у Дніпро. Це свідчить не про поодинокі збої, а про системну невідповідність застарілої інфраструктури сучасним соціально-економічним реаліям. Отже, проблема полягає не лише в очищенні, а й у необхідності зменшення обсягів та токсичності стоків біля їхнього джерела.

Аграрний сектор. Дифузне (площинне) забруднення від сільськогосподарської діяльності є ще одним значним фактором. Інтенсивне використання мінеральних добрив (що містять нітрати та фосфати) та пестицидів призводить до їх змиву з полів дощовими та талими водами. Ці речовини потрапляють у ґрунтові води, а звідти — у річки, спричиняючи хімічне забруднення на великих територіях. Неналежне поводження з відходами тваринництва також додає до цього навантаження, збагачуючи води органічними речовинами та патогенами.

Промислові скиди. Промислові центри, розташовані вздовж великих річок, таких як Дніпро, є джерелами високотоксичних забруднень. Підприємства металургії, хімічної та нафтопереробної промисловості скидають у водойми важкі метали (мідь, цинк, свинець, ртуть), нафтопродукти, феноли та інші специфічні токсичні сполуки. Ці речовини здатні накопичуватися в донних відкладеннях та живих організмах, спричиняючи довготривалі негативні наслідки для екосистем.

Інші джерела. Додатковий внесок у забруднення роблять теплове забруднення від скиду охолоджувальних вод ТЕС та АЕС, що змінює термічний режим водойм; атмосферне перенесення забруднювачів з подальшим випадінням у вигляді кислотних дощів; а також несанкціоноване скидання твердих побутових та будівельних відходів у річки та їхні заплави.

Традиційний поділ на точкові (труба заводу) та дифузні (стік з поля) джерела забруднення ускладнюється сучасною практикою. Наприклад, незаконні врізки автомийок чи інших підприємств у системи дощової каналізації перетворюють розподілене забруднення на мережу неконтрольованих точкових скидів токсичних речовин. Це вимагає розробки інформаційних систем, здатних виявляти не лише явні, а й приховані джерела впливу шляхом аналізу поступових змін якості води вздовж течії річки.

Нормативна база даних: основа для оцінки

Для створення об'єктивної інформаційної системи оцінки якості води необхідна чітко структурована нормативна база. Ця база є еталоном, з яким порівнюються фактичні вимірювання, і слугує основою для подальшого аналізу.

Вона формалізує екологічні стандарти у вигляді конкретних числових меж для кожного класу якості.

На основі «Методики екологічної оцінки якості поверхневих вод за відповідними категоріями» [6], зокрема таблиць 2.7 та 2.8 з наданих матеріалів, було сформовано базу даних з 13 найбільш впливових показників. Вибір цих індикаторів обґрунтований їхньою екологічною значущістю та здатністю характеризувати різні аспекти стану водної екосистеми:

4.1. Кисневий режим та органічне забруднення.

Ці показники є фундаментальними, оскільки кисень необхідний для дихання більшості водних організмів, а його вміст безпосередньо пов'язаний з рівнем органічного забруднення.

- **Розчинений кисень, мг $O_2/дм^3$.** Найважливіший показник здоров'я водойми. Низький вміст кисню (гіпоксія) призводить до загибелі риби та інших організмів.
- **БСК₅ (Біохімічне споживання кисню), мг $O_2/дм^3$.** Класичний індикатор забруднення органічними речовинами (наприклад, стічними водами). Він показує, скільки кисню споживають мікроорганізми для розкладання цієї органіки. Високе значення БСК₅ веде до швидкого виснаження запасів кисню.
- **Біхроматна окислюваність (ХСК), мг $O_2/дм^3$.** Подібно до БСК₅, цей показник вимірює органічне забруднення, але включає також важкоокислювані речовини промислового походження. Дає більш повну картину забруднення органікою.

4.2. Біогенне забруднення (Евтрофікація).

Азот і фосфор є ключовими біогенними елементами. Їх надлишок, зазвичай через стічні води та змив добрив з полів, викликає "цвітіння" води — бурхливий розвиток водоростей, що призводить до кисневого виснаження та деградації екосистеми.

- **Азот амонійний, мгN/дм³.** Вказує на свіже забруднення, переважно господарськими або тваринницькими стоками. У високих концентраціях є токсичним для риб.
- **Азот нітратний, мгN/дм³.** Характеризує більш старе забруднення або надходження з сільськогосподарських угідь. Є основним "добривом" для водоростей.
- **Фосфор фосфатів, мгP/дм³.** Часто є лімітуючим фактором для росту водоростей у прісних водоймах. Навіть незначне збільшення концентрації фосфатів може спровокувати інтенсивне "цвітіння" води.

4.3. Загальні фізико-хімічні показники.

Ці параметри описують базові властивості водного середовища.

- **pH.** Рівень кислотності чи лужності води. Відхилення від нейтральних значень (6.5–8.5) є згубним для більшості організмів і може свідчити про промислове забруднення.
- **Завислі речовини, мг/дм³.** Впливають на прозорість води, обмежуючи фотосинтез. Можуть забивати зябра риб і свідчити про ерозію ґрунтів або скидання неочищених стоків.

4.4. Специфічні токсичні забруднювачі.

Ця група включає речовини, які є вкрай токсичними навіть у мікроскопічних концентраціях і вказують на промислове, транспортне або комунальне забруднення.

- **Нафтопродукти, мкг/дм³.** Поширений забруднювач, що потрапляє у воду з промисловими стоками, змивами з доріг. Утворює плівку на поверхні води, порушуючи газообмін, і є токсичним.
- **Свинець, мкг/дм³.** Високотоксичний важкий метал, що має здатність до накопичення в живих організмах. Джерела: промисловість, старі трубопроводи, викиди транспорту.
- **Ртуть, мкг/дм³.** Один з найнебезпечніших забруднювачів через свою надзвичайну токсичність і здатність до біоаккумуляції в харчових ланцюгах.
- **Феноли, мкг/дм³.** Вказують на забруднення стоками хімічних, коксохімічних та деревообробних підприємств. Є токсичними для водних організмів.

СПАР (Синтетичні поверхнево-активні речовини), мкг/дм³. Потрапляють у водойми з мийними засобами. Порушують природні властивості води та є токсичними для гідробіонтів.

Моделювання екологічної невизначеності: побудова нечітких функцій належності

Традиційні системи оцінки, що базуються на жорстких порогових значеннях, не враховують невизначеність та неоднозначність, притаманні екологічним даним. Вода не є просто «чистою» або «брудною»; вона може бути «трохи забрудненою» або «майже чистою». Нечітка логіка надає математичний апарат для роботи з такими лінгвістичними поняттями, моделюючи плавні переходи між станами. Основою цього підходу є процес фазифікації — перетворення точного числового вимірювання (наприклад, концентрації забруднювача) у набір ступенів належності до визначених лінгвістичних термів.

Цей процес реалізується за допомогою функцій належності (membership functions, MF). Функція належності, що позначається як $\mu(x)$, є кривою, яка відображає кожне значення з універсуму міркувань (наприклад, діапазону можливих концентрацій) у число від 0 до 1. Це число, ступінь належності, показує, наскільки істинним є твердження, що дане значення належить до певної нечіткої множини (лінгвістичного терміну).

Для прикладу, взявши значення показника «Розчинений кисень», можемо побудувати функцію належності для всіх класів даного показника. Вона буде мати вигляд S-лінійної функції, де значення функції належності μ яке буде йти до 0 буде найгіршим і буде відповідати класу 5, а значення яке буде приближатись до 1, буде найкращим і буде відповідати класу 1.

Принцип оцінки та формування бази знань

При класичній (або "жорсткій") оцінці якості поверхневих вод за нормативними таблицями (як-от Таблиця 2.7) [6], аналіз проводиться на основі *принципу граничного фактору*. Це означає, що загальний клас якості водного об'єкта визначається за *найгіршим показником* серед усіх виміряних параметрів.

Наприклад, якщо за результатами аналізу 12 з 13 показників відповідають "Класу I" (дуже добра якість), але один показник (наприклад, БСК₅) потрапляє

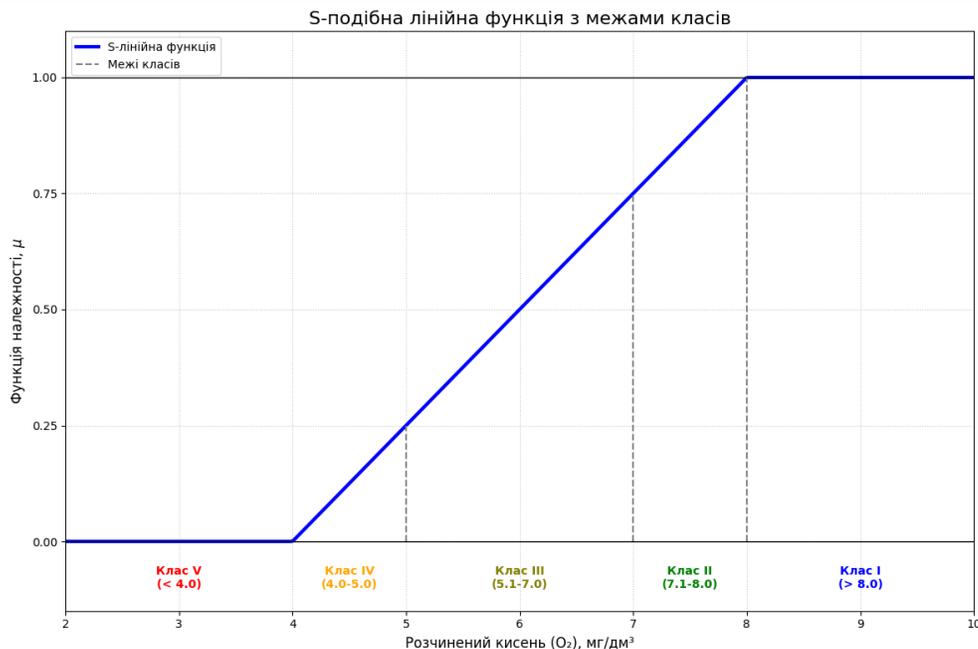


Рис. 1. Функція належності для розчинного кисню.

у "Клас II" (добра якість), то загальний висновок для всього водного ресурсу буде "Клас II". Якщо хоча б один показник потрапить у "Клас V" вся водойма буде віднесена до "Класу V" незалежно від того, наскільки чистими є інші 12 параметрів.

Цей підхід є простим, але дуже консервативним. Для більш гнучкої та комплексної оцінки, яка враховує взаємний вплив показників, часто застосовують системи нечіткого виведення (СНВ) або експертні системи. Основою такої системи є база знань (БЗ), яка складається з набору логічних правил формату "ЯКЩО ... ТО ...".

Ці правила імітують процес прийняття рішень експертом-гідрохіміком, дозволяючи враховувати не лише екстремальні, але й проміжні стани екосистеми. Нижче наведено приклад бази знань, побудованої на основі ключових показників якості води.

Для правил використовуються лінгвістичні оцінки для вхідних показників, які відповідають класам з Таблиці 2.7 [6]:

- *Дуже добрий* (Відповідає Класу I);
- *Добрий* (Відповідає Класу II);
- *Задовільний* (Відповідає Класу III);
- *Поганий* (Відповідає Класу IV);
- *Дуже поганий* (Відповідає Класу V).

Визначення категорії якості води

Також, окрім класів, існують категорії, а саме 7 категорій [6]:

- *Відмінні.*
- *Дуже добрі.*
- *Добрі.*
- *Задовільні.*

Таблиця 1.

Профіль бази знань

№ Правила	Опис логічного правила	Назва правила
1	ЯКЩО Розчинений кисень = Дуже добрий ТА БСК ₅ = Дуже добрий ТА Азот амонійний = Дуже добрий ТО Якість води = Клас I	Rule 1
2	ЯКЩО Розчинений кисень = Дуже поганий АБО рН = Дуже низький (V) АБО рН = Дуже високий (V) ТО Якість води = Клас V	Rule 2
3	ЯКЩО Розчинений кисень = Добрий ТА БСК ₅ = Добрий ТА Фосфати = Добрий ТО Якість води = Клас II	Rule 3
4	ЯКЩО Азот амонійний = Поганий АБО Фосфати = Поганий ТО Якість води = Клас IV	Rule 4
5	ЯКЩО БСК ₅ = Задовільний ТА ХСК = Задовільний ТА Розчинений кисень = Задовільний ТО Якість води = Клас III	Rule 5
6	ЯКЩО Свинець = Високий (IV-V) АБО Ртуть = Висока (IV-V) ТО Якість води = Клас V	Rule 6
7	ЯКЩО Нафтопродукти = Поганий АБО Феноли = Поганий ТО Якість води = Клас IV	Rule 7
8	ЯКЩО БСК ₅ = Дуже поганий ТА Азот амонійний = Дуже поганий ТО Якість води = Клас V	Rule 8
9	ЯКЩО Завислі речовини = Задовільний ТА Фосфати = Задовільний ТО Якість води = Клас III	Rule 9
10	ЯКЩО Розчинений кисень = Добрий ТА БСК ₅ = Задовільний ТА Азот амонійний = Добрий ТО Якість води = Клас II	Rule 10

- *Посередні.*
- *Погані.*
- *Дуже погані.*

Вони безпосередньо пересікаються з 5-ма класами, які були вказані раніше. Тобто, в 1 клас входить 1-ша категорія, в 2 клас — 2 і 3, в 3 клас — 4 і 5, в 4 клас — 6, і в 5 клас — 7.

Таблиця 2

Клас якості вод	I		II		III		IV	V
Категорія якості води	1	2	3	4	5	6	7	
Назва класів і категорій якості вод за їх станом	Відмінні	Добрі		Задовільні		Погані	Дуже погані	
	Відмінні	Дуже добрі	Добрі	Задовільні	Посередні	Погані	Дуже погані	

На основі наведеної інформації запропонована модель функції належності для визначення відповідної категорії (рис. 2).

Для прикладу, якщо взяти значення розчиненого кисню 6.5, то бачимо, що він попадає в 3 клас і до 4 категорії відповідно.

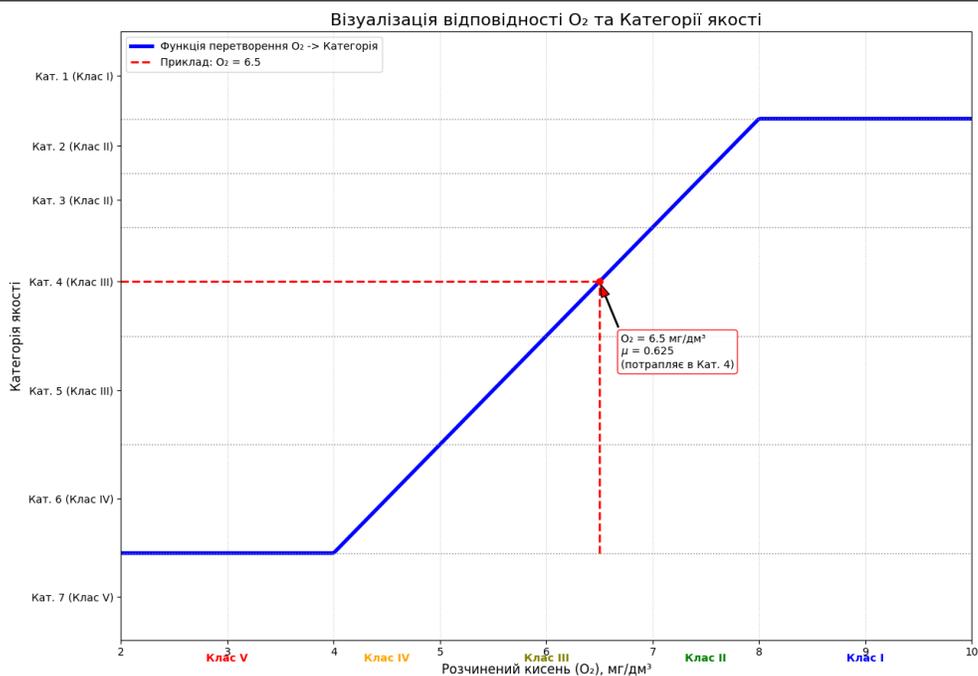


Рис. 2. Функція належності з категоріями.

Даний підхід дає можливість доповнення інформаційної моделі новими факторами, а нечітких баз знань — новими правилами, що надає моделі властивостей гнучкості та адаптивності до динамічних змін.

5. Висновки. Загалом, інтелектуальні інформаційні системи відіграють ключову роль у сучасному світі, допомагаючи організаціям та індивідуумам ефективно використовувати доступні дані для досягнення своїх цілей і вирішення складних завдань. Вони є невід’ємною складовою частиною цифрової епохи, в якій ми живемо, і відіграють ключову роль у подальшому розвитку технологій та суспільства.

Моделювання оцінювання якості водних ресурсів успішно виконується з використанням доступної експертно-лінгвістичної інформації у вигляді правил “ЯКЩО –ТО”, які пов’язують логічні терми вхідних і вихідних змінних. У результаті отримано аналітичні моделі функцій належності експертних нечітких баз знань, які впливають на оцінювання і прогнозування якості водних ресурсів. Запропонована методика служить комплексним інструментом для експерта проекту щодо оцінювання та прогнозування якості водних ресурсів та дає змогу отримати незалежні управлінські рішення з урахуванням кількісних та якісних збурювальних факторів, що впливають на якість водних ресурсів. Отримані результати створюють підґрунтя для подальших досліджень у напрямі розширення сфер застосування, вдосконалення моделей та інтеграції з сучасними цифровими платформами.

Конфлікт інтересів

Маляр Микола Миколайович, головний редактор та Шаркаді Маріанна Миколаївна, членкиня редакційної колегії, є авторами цієї статті та не брали участі

в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Роботу виконано в рамках держбюджетної науково-дослідної теми Ужгородського національного університету “Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних” (номер державної реєстрації 0121U109279).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Маляр М. М.: адміністрація проекту, постановка проблеми, супервізія; Половко І. І.: реалізація етапів дослідження, інформаційне наповнення моделей, реалізація моделі та методів логічного висновку, інтерпретація отриманих результатів та підготовка публікації до друку; Шаркаді М. М.: концептуалізація проблеми, розробка підходу до моделювання проблеми, розробка нечіткої моделі та методу дослідження, рецензування та редагування і підготовка публікації до друку.

Авторські права ©



(2026). Маляр М. М., Половко І. І., Шаркаді М. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Zimmermann, H. J. (2001). *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media, 141–182.
2. Klymenko, M. O., Pryshchepa, A. M., & Voznyuk, N. M. (2006). *Environmental monitoring: Textbook*. Kyiv: Akademiia [in Ukrainian].
3. Mokin, V. B., Poplavsky, A. V., Yashcholt, A. R., & Botsula, M. P. (2015). *Technologies for processing and modeling environmental and economic information — Electronic textbook*. Vinnytsia: VNTU [in Ukrainian].
4. Shipulin, V. D. (2010). *Basic principles of geographic information systems: textbook*. Kharkiv National Academy of Municipal Economy. Kharkiv: KNAME [in Ukrainian].
5. Bidyuk, P. I., & Korshevnyuk, L. O. (2010). *Designing computer information systems for decision support: Textbook*. Kyiv: NNK “IPSA” NTUU “KPI” [in Ukrainian].

6. Vasenko, O. G., Rybalova, O. V., Artemiev, S. R., Gorbany, N. S., Korobkova, G. V., Polozentseva, V. O., Kozlovska, O. V., Matsak, A. O., & Savichev, A. A. (2015). *Integral and comprehensive assessments of the state of the natural environment: monograph*. Kharkiv: NUGZU, 76–101.

Malyar M. M., Polovko I. I., Sharkadi M. M. Application of fuzzy logic in information and analytical systems of environmental monitoring.

The use of intelligent information systems is widespread in various fields, including business, medicine, finance, science, ecology, and many other areas. Research and development of intelligent management systems will continue to use new technological solutions and benefit from advances in the creation of large databases, artificial intelligence, human-computer interaction, modeling and optimization, software development, and telecommunications. The authors describe a mathematical apparatus that allows for the formalization of uncertainties and multi-level interrelationships, ensuring the effective solution of optimization problems. The results obtained lay the foundation for further research in the direction of expanding the scope of application, improving models, and integrating with modern digital platforms. The paper proposes the use of fuzzy mathematics, which allows for greater consideration of the fact that the components of a region's image are weakly formalized qualitative variables.

Keywords: information and analytical system, water resource quality, fuzzy logic, fuzzy set theory, environmental assessment, membership functions, knowledge base, decision making.

Отримано: 27.11.2025

Прийнято: 17.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 004.942:004.032.26:539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).196-205](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).196-205)**Ю. С. Морозов¹, Т. А. Зайцева²**

¹ Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
аспірант кафедри комп'ютерних технологій
yury.morozov@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3869-7124>

² Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
завідувачка кафедри комп'ютерних технологій,
кандидат технічних наук, доцент
ztan2004@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6346-3390>

МЕТОДИКА АВТОМАТИЗОВАНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ ВЕЛИКИХ НАБОРІВ ДАНИХ У ANSYS MECHANICAL ДЛЯ НАВЧАННЯ НЕЙРОМЕРЕЖ

Впровадження методів глибокого навчання в механіку деформівного твердого тіла суттєво обмежується нестачею верифікованих навчальних даних. Це зумовлює необхідність розроблення більш ефективних експериментальних та чисельних методів отримання якісних Data Sets, а також удосконалення підходів до моделювання та валідації. У статті розроблено методику автоматизованого формування таких масивів на базі середовища Ansys Mechanical. Запропонована методика базується на параметричному моделюванні (модуль Parameters Set), що дозволяє варіювати геометричні характеристики та умови навантаження зі збереженням якості скінченно-елементної сітки. Для прискорення збору даних використано бібліотеку Ansys DPF, яка забезпечує пряме зчитування бінарних файлів результатів, оминаючи обмеження графічного інтерфейсу. Ефективність методики перевірено на прикладі задачі контактної взаємодії штамп з пружним півпростором, для якої автоматично згенеровано множини рішень. Отримані структуровані набори напружень та деформацій можуть бути використані для тренування нейромереж, що спеціалізуються на уточненні результатів МСЕ-розрахунків на грубих сітках. Такий підхід дозволяє досягти прийнятної точності моделювання при значному скороченні обчислювальних витрат.

Ключові слова: нейронна мережа, контактна зона, математичне моделювання, метод скінченних елементів, генерація даних, глибоке навчання, Ansys.

1. Вступ. Упродовж останнього десятиліття нейронні мережі перетворилися з інструменту експериментальних досліджень на один із ключових методів сучасної науки та інженерії. Їхня здатність до узагальнення, навчання на великих масивах даних та відтворення складних нелінійних залежностей зробила нейромережеві архітектури універсальним засобом для моделювання процесів, які традиційні чисельні методи описують лише з великими обчислювальними витратами. Сьогодні нейронні мережі розглядаються не лише як допоміжний інструмент, а як повноцінна складова інтелектуальних систем, здатних забезпечувати прогнозування, оптимізацію та адаптивне керування.

У сфері обчислювальної механіки це призвело до появи нового напрямку — побудови наближених моделей (surrogate models), що поєднують усталені методи із алгоритмами глибокого навчання [1]. Нейронні мережі дедалі частіше застосовуються для розв'язання задач, які раніше вважалися виключно прерогативою традиційних аналітичних або чисельних методів. Це стосується напри-

клад, прогнозування напружено-деформівного стану системи, аналізу пластичних деформацій та навіть побудови цифрових двійників складних конструкцій.

2. Аналіз сучасних досліджень і публікацій. Сучасна обчислювальна механіка дедалі активніше інтегрує підходи, що базуються на даних (data-driven), фокусуючись на використанні нейронних мереж для побудови наближених моделей (surrogate models) та оптимізації розрахункового часу [1]. Успішність тренування таких нейромереж [2], здатних у реальному часі прогнозувати складні фізичні явища, прямо залежить від якості та обсягу вхідних даних. На практиці формування масштабних навчальних вибірок часто здійснюється шляхом використання математичних моделей. Для цього застосовуються, наприклад, мови програмування, такі як Python, Julia та R. Широко використовуються також інженерні та чисельні платформи, зокрема Simulink, MATLAB, COMSOL Multiphysics та інші. Такий підхід є привабливим завдяки можливості швидкої автоматизації процесів та генерації великої кількості варіантів розв'язку у відносно короткі терміни. Однак суттєвим недоліком є їхня обмежена здатність відтворювати реальну фізику складних процесів. Як наслідок, нейромережі, натреновані на такій «ідеалізованій» базі, часто виявляються непридатними для практичних інженерних задач, що вимагають прийнятної точності.

Альтернативою є використання верифікованих промислових комплексів, таких як Ansys, Abaqus або MSC Marc. Ці програмні середовища містять Solvers, здатні враховувати нюанси фізичної взаємодії, недосяжні для простих скриптів [3]. Проте генерація великих обсягів даних у такому середовищі стикається з серйозними технічними бар'єрами. Робота через стандартний графічний інтерфейс (GUI) передбачає значну кількість ручних маніпуляцій для кожного окремого сценарію, що робить ручне створення вибірки великого розміру (що є необхідним для якісного навчання нейромереж) фактично неможливим без впровадження спеціальних засобів автоматизації [4].

3. Мета і завдання роботи. Метою дослідження є розробка та практична реалізація методики автоматизованої генерації великих наборів даних, що базується на інтеграції параметричного моделювання у середовищі Ansys Workbench [5] (Ansys Free Student Software License), інструментів обробки даних Ansys DPF та керуванні процесом через Python-скрипти.

Процес дослідження здійснюється на прикладі розв'язання контактної задачі про вдавнення абсолютно жорсткого двозв'язного штамп з плоскою основою у пружний півпростір.

Об'єктом дослідження є процес моделювання контактної взаємодії жорсткого штамп з пружним півпростором у середовищі скінченно-елементного аналізу Ansys.

Предметом дослідження є методи параметризації геометрії, автоматизації розрахунків та експорту результатів для формування навчальних вибірок, придатних для тренування глибоких нейромережевих архітектур.

Завдання дослідження:

- Розробити параметричну модель контактної задачі у середовищі Ansys.
- Сформувати таблицю Design Points (варіантів розрахунків) у Ansys Mechanical Parameters.
- Забезпечити пакетний режим розрахунку та уніфікацію даних для експор-

ту у форматі CSV, Excel.

- Порівняти ефективність традиційного Python-скриптингу та використання Ansys DPF для отримання наборів даних напружень і переміщень.
- Створити базу даних для тренування нейромереж [6].
- Провести візуалізацію отриманих даних за допомогою Python-застосунку.

4. Основний результат. У роботі було використано підхід до формування масштабних наборів даних (Dataset Generation) у середовищі Ansys, який ґрунтувався на повній параметризації розрахункової моделі. З огляду на те, що навчання глибоких нейронних мереж потребує високої варіативності вхідних даних, розрахунки виконувалися шляхом варіювання ключових параметрів об'єкта дослідження. Відповідно, початковим етапом даного процесу була параметризація геометрії моделі.

Створення параметричної геометричної моделі (в середовищах Ansys SpaceClaim або Discovery) дозволило трансформувати геометричні характеристики конструкції, такі як зони контакту, у варіювані параметри. Це усунуло необхідність перебудови топології для кожного нового розрахункового випадку. Такий підхід надав узгодженість сітки скінченних елементів (Mesh Consistency) та коректність накладання граничних умов, що є важливим для якості навчальних даних [7].

У дослідженні розглянуто задачу про вдавнення циліндричного штампа з плоскою основою під дією вертикальної сили Q , лінія дії якої проходить через центр основи. Поперечний перетин штампа займає двозв'язну область, обмежену двома лініями у формі прямокутників. Зовнішній прямокутник має (наприклад) сторони $a_1 = 120\text{мм}$ та $b_1 = 100\text{мм}$ та співвідношенням сторін 1,2. Внутрішній прямокутник є геометрично подібним до зовнішнього, концентрично розташований та має те саме співвідношення сторін 1,2, при цьому варіювання його лінійних розмірів дозволяє сформувати серію штампів різної геометрії, що відповідають прямокутним кільцям різної ширини.

У дослідженні створено параметричну модель описаного вище штампа (рис. 1). Для моделювання використано програмний пакет Ansys Discovery [5]. Для штампа використано конструкційну сталь з модулем Юнга $E_s = 200\text{ГПа}$ та коефіцієнтом Пуасона $\nu_s = 0.3$ та для пружного півпростору матеріал з модулем Юнга $E_h = 180\text{МПа}$ та коефіцієнта Пуасона $\nu_h = 0.2$ (проектний матеріал). Для побудови скінченно-елементної сітки штампа та пружного півпростору у зоні контакту використані гексаедричні елементи з основою у вигляді квадрату. Отже, у межах дослідження параметричний простір задачі формується множиною вхідних параметрів $p = \{a_1, b_1, a, b, Q, E_s, \nu_s, E_h, \nu_h\}$.

Завдяки модулю Parameter Set у середовищі Ansys Workbench у дослідженні реалізовано параметричний зв'язок між геометричним редактором, модулем Mechanical та чисельним вирішувачем (Solver).

За рахунок Ansys Mechanical Parameters було визначено числові характеристики моделі як «Вхідні параметри» (Input Parameters) та «Вихідні параметри» (Output Parameters) [8]. Вхідними параметрами є геометричні розміри, властивості матеріалів, величини навантажень та параметри сітки. У графічному інтерфейсі вони активовані шляхом встановлення прапорця (символ «Р») біля відповідного поля введення. А вихідні параметри є цільовими змінними, які необхідно отримати після розрахунку, наприклад напруження та переміщення.

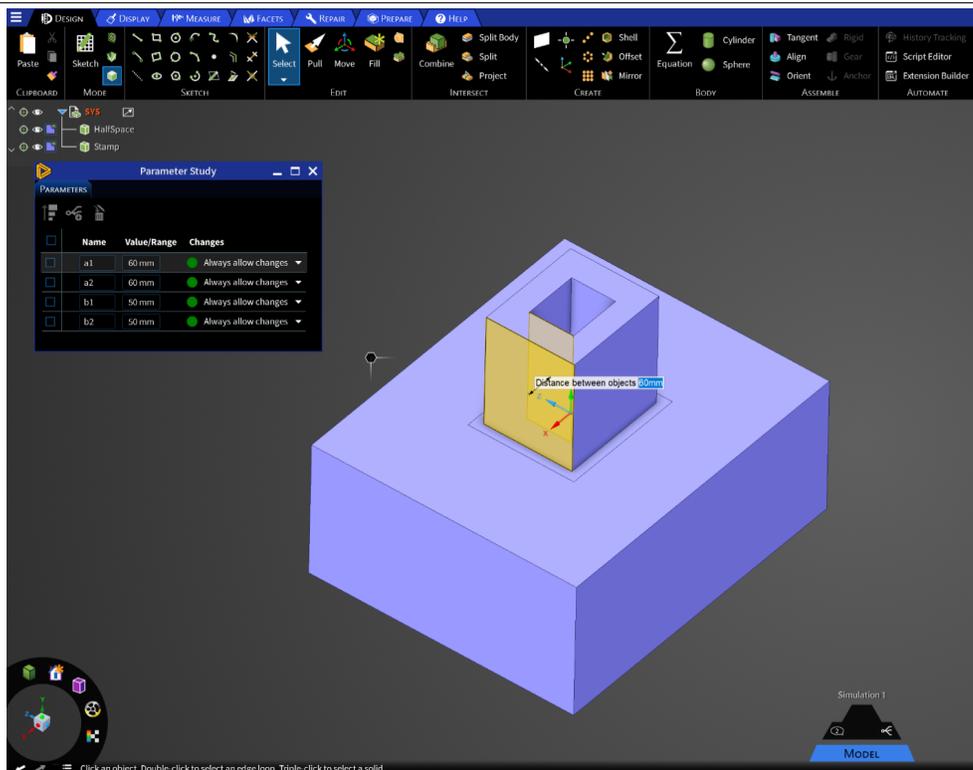


Рис. 1. Параметрична модель контакту штамп з основою у формі прямокутного кільця і пружного півпростору.

Процес використання цього інструментарію полягав у формуванні таблиці проектних точок (Table of Design Points). Кожна «Design Point» (DP) являє собою унікальний набір вхідних параметрів, який відповідає одному екземпляру даних для нейромережі (рис. 2). Після заповнення таблиці (вручну або алгоритмічно), Ansys автоматично запускав цикл оновлення. Для кожної DP згенеровано геометрію, побудовано сітку, проведено розрахунки для поставленої задачі та збережено результати [9].

У межах модельованої контактної задачі було задано чотири Design Points — варіанти вхідних параметрів, кожен з яких відповідає окремому значенню ширини кільця штамп вздовж осі Ox : 20 мм, 40 мм, 60 мм та 80 мм (рис. 2). Ширину кільця вздовж осі Oy визначено з урахуванням фіксованого співвідношення сторін прямокутника, що дорівнює 1,2. На основі побудованої моделі, як приклад, отримано розподіл нормальних напружень уздовж осі Ox на відрізок, показаному на рис. 3.

Після закінчення розрахунків у Solver для всіх Design Points набори даних експортовано для подальшого використання, а саме, для навчання нейронних мереж, візуалізації та інших застосувань. Якщо для стандартних інженерних розрахунків достатньо отримати деякі шукані величини (наприклад, максимальне напруження), то для тренування глибоких нейромереж краще мати повні набори даних (Full Field Data) — масиви значень у кожному вузлі скінченно-елементної сітки.

У середовищі Ansys існує два основні шляхи реалізації цього етапу. Або

Outline of Schematic A1: Parameters				Table of Design Points									
ID	Parameter Name	Value	Unit	Name	P1 - a1	P2 - a2	P3 - b1	P4 - b2	P5 - Normal Stress Maximum	P6 - Normal Stress Minimum	Retain	Retained Data	Note
1	Input Parameters			DP-0 (Current)	60	60	50	50	68.455	-6602.3	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
2	Static Structural (A1)			DP-1	80	80	66.8	66.8	70.038	-6312.6	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
3	P1	a1	60 mm	DP-2	-40	-40	33.2	33.2	61.427	-7885.7	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
4	P2	a2	60 mm	DP-3	20	20	16.8	16.8	60.284	-11595	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
5	P3	b1	50 mm										
6	P4	b2	50 mm										
7	New input parameter	New name	New expression										
8	Output Parameters												
9	Static Structural (A1)												
10	P5	Normal Stress Maximum	68.455 Pa										
11	P6	Normal Stress Minimum	-6602.3 Pa										
12	New output parameter	New expression											
13	Charts												

Рис. 2. Таблиця проєктних точок в Ansys Mechanical Parameters.

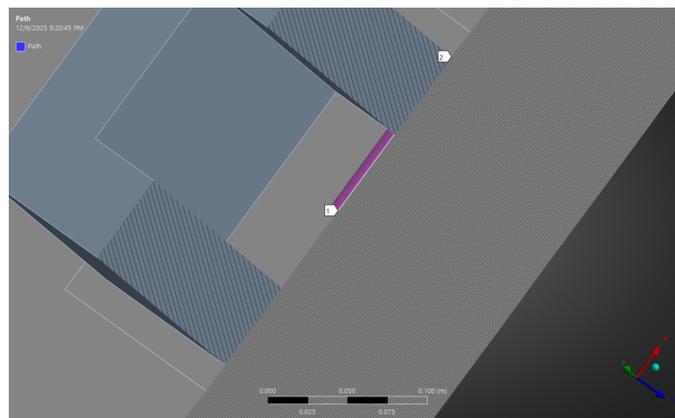


Рис. 3. Відрізок, на якому визначено розподіл нормальних напружень.

Python Scripting в середовищі Ansys Mechanical, або прямий доступ до даних через Ansys DPF (Data Processing Framework). Python Scripting в Ansys Mechanical базується на використанні вбудованого інтерпретатора Python та API Ansys Mechanical (Scripting Interface). Такий підхід імітує дії користувача. Скрипт програмно звертається до дерева проєкту, створює об'єкти (наприклад, Probes або User Defined Results), ініціює їх обчислення та експортує дані у текстові файли. Це забезпечує інтеграцію з інтерфейсом, можливість керувати налаштуваннями Solver та граничними умовами у процесі розрахунків, але забезпечує низьку продуктивність при обробці великих масивів даних. Процес вилучення результатів відбувається через шар графічної оболонки (GUI), що створює значні витрати пам'яті та часу. Крім того, експорт результатів для багаточисельних ітерацій через цей інтерфейс є обчислювально неефективним і інколи займає більше часу, ніж сам розрахунок задачі.

Прямий доступ до даних через Ansys DPF є більш ефективним методом, орієнтованим на роботу з великими даними. DPF (Data Processing Framework) — це спеціалізована бібліотека, яка дозволяє зчитувати результати безпосере-

дньо з бінарних файлів розв'язку (.rst, .rth), оминаючи завантаження повного інтерфейсу Mechanical [10]. На відміну від повільного COM-інтерфейсу, DPF базується на оптимізованих алгоритмах, розроблених на C++, що прискорює зчитування результатів на кілька порядків. Бібліотека `ansys-dpf-core` є Python обгорткою, яка дозволяє застосовувати зазначений метод в середі Python. Важливою особливістю є те, що інструмент оперує векторними полями, дозволяючи автоматично конвертувати тензори напружень у масиви NumPy — формат, який безпосередньо використовується для навчання неймереж. Крім того, такий підхід забезпечує автономність.

Для створення навчального набору даних, що містить інформацію про розподіл полів напружень та деформацій у зоні контакту, використання Ansys DPF є зручним засобом з точки зору продуктивності та зручності подальшої обробки даних методами машинного навчання, тому для експортування даних для поставленої контактної задачі застосовано саме цей метод.

На рис. 4 представлено загальну схему генерації даних (pipeline), що автоматизує процес побудови геометрії, налаштування сітки та граничних умов, забезпечуючи формування рішень за допомогою механізму Design Points.

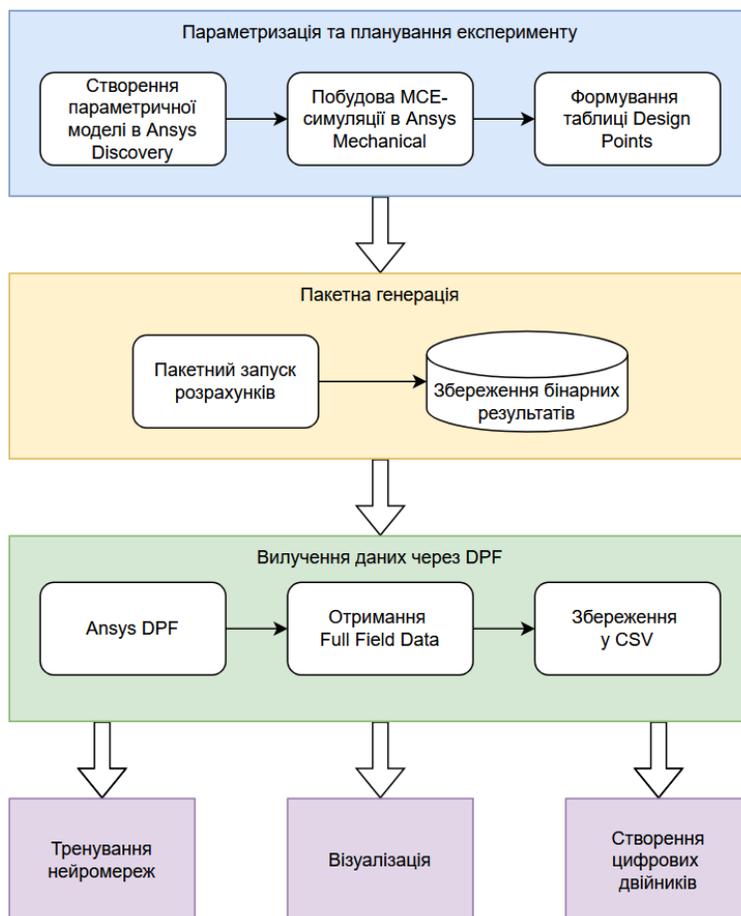


Рис. 4. Схема генерації даних.

У статті [11] наведено чисельно-аналітичний розв'язок контактної задачі вдавнення циліндричного штамп з плоскою основою під дією вертикальної си-

ли, що проходить через центр тяжіння штамп. Поперечний переріз штамп має форму двозв'язної області, обмеженої двома прямокутними контурами. Отримані в цій роботі [11] результати слугують основою для перевірки коректності розрахунків, виконаних у межах даного дослідження.

Візуалізацію отриманих результатів проведено за допомогою створеного Python застосунка (рис. 5), у який передаються результати — розподіл контактних напружень на відріжку, зазначеному на рис. 3 для чотирьох Design Points та відбувається їх візуалізація за допомогою бібліотеки matplotlib. Ці ж самі дані використано для створення тренувальної бази спеціалізованих нейромережевих архітектур. За фіксованих значень вхідних параметрів і однакової версії Ansys результати розрахунків, зчитані безпосередньо з бінарних файлів за допомогою Ansys DPF, є детермінованими та відтворюваними.

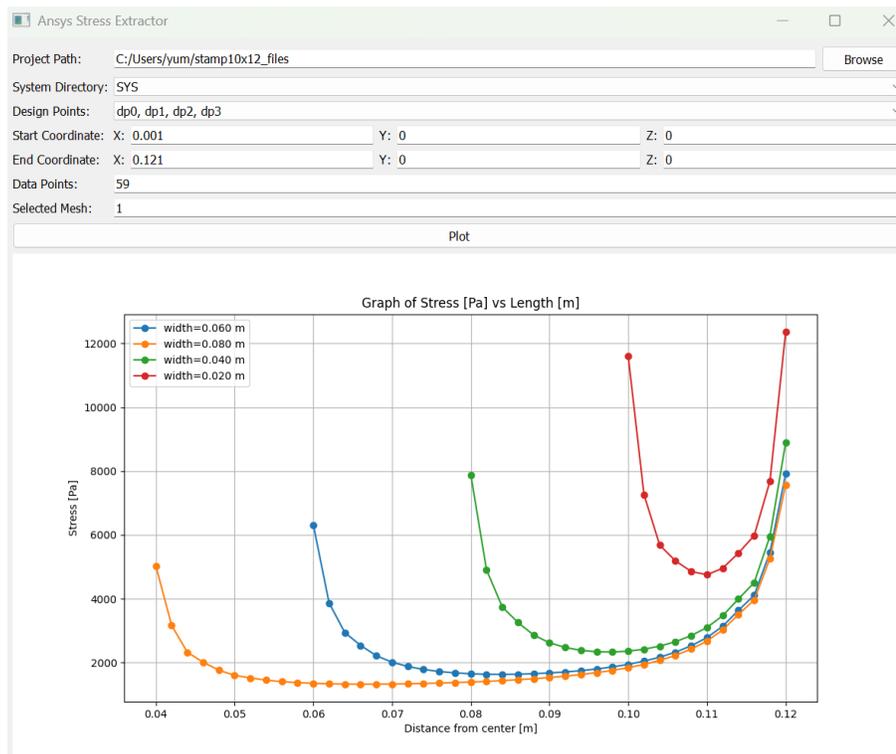


Рис. 5. Інтерфейс застосунка візуалізації напружень для різних Design Points.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновано та практично реалізовано методику автоматизованої генерації великих наборів даних на прикладі задачі контактної механіки. Методика базується на інтеграції параметричного моделювання в середовищі Ansys Workbench та інструментів обробки даних Ansys DPF. У межах дослідження розроблено параметричну скінченно-елементну модель контактної задачі про вдавнення циліндричного штамп з плоскою основою під дією вертикальної сили, що проходить через центр тяжіння штамп. Сформовано таблицю Design Points, що забезпечує формалізований опис розрахункових сценаріїв та можливість їх автоматизованого перебору.

Розроблений підхід (pipeline) усуває необхідність ручного втручання на етапах побудови геометрії, налаштування сітки та граничних умов і дозволяє реалізувати

лізувати пакетний режим розрахунку з уніфікованим збереженням результатів. Отримані дані структуровано у форматах, придатних для подальшого експорту та аналізу (CSV, Excel), що відповідає вимогам підготовки навчальних вибірок для методів машинного навчання.

У роботі проведено порівняльний аналіз традиційного Python-скриптингу в середовищі Ansys Mechanical та прямого доступу до результатів за допомогою фреймворку Ansys DPF. Показано, що використання DPF забезпечує значно ефективніше зчитування даних напружень і переміщень безпосередньо з бінарних файлів розв'язку, що є критично важливим для роботи з великими обсягами даних (Big Data).

На основі згенерованих результатів сформовано базу даних для тренування нейромережових архітектур, орієнтованих на уточнення результатів МСЕ, отриманих на грубій сітці. Застосування такого підходу дозволяє досягти точності, співмірної з розрахунками на густій сітці, при суттєво менших обчислювальних витратах. Додатково проведено верифікацію та візуалізацію отриманих даних за допомогою спеціалізованого Python-застосунку, що підтвердило коректність сформованих наборів даних та їх придатність для подальшого використання в задачах глибокого навчання.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Ю. С. Морозов: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, дослідження, програмне забезпечення, валідація, візуалізація, написання — початковий варіант, Т. А. Зайцева: концептуалізація, формальний аналіз, методологія, адміністрування проекту, наукове керівництво, валідація, написання — рецен-

Авторські права ©



(2026). Морозов Ю. С., Зайцева Т. А. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Sahin, T., von Danwitz, M., & Popp, A. (2024). Solving forward and inverse problems of contact mechanics using physics-informed neural networks. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 11, Article 11. <https://doi.org/10.1186/s40323-024-00265-3>
2. Zghurovskiy, M. Z., & Zaychenko, Y. P. (2024). *Artificial intelligence systems*. Kyiv: Akadempriodyka. <https://doi.org/10.15407/akadempriodyka.551.744> [in Ukrainian].
3. Madenci, E., & Guven, I. (2015). *The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS*. New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7550-8>
4. Ramnath, S., Adrian, A., Bolar, A., Alawadhi, I., Sunkara, S., Kumar, P., Davidson, J., & Shah, J. (2025). Springback prediction using machine learning: an application for simplified automotive body-in-white structures. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 139(3), 1253–1273. <https://doi.org/10.1007/s00170-025-15958-1>
5. Ansys Free Student Software Downloads. Retrieved from <https://www.ansys.com/academic/free-student-products>
6. Liang, L., Liu, M., Martin, C., & Sun, W. (2018). A deep learning approach to estimate stress distribution: a fast and accurate surrogate of finite-element analysis. *Journal of The Royal Society Interface*, 15(138), Article 20170844. <https://doi.org/10.1098/rsif.2017.0844>
7. Stolarski, T., Nakasone, Y., & Yoshimoto, S. (2018). *Engineering Analysis with ANSYS Software (2nd ed.)*. Oxford: Butterworth-Heinemann. Retrieved from <https://inspectioncopy.elsevier.com/book/details/9780081021644>
8. Lee, H. H., & Schilling, P. J. (2025). Finite Element Simulations with ANSYS Workbench 2025. *Theory, Applications, Case Studies, KS: SDC Publications*. Retrieved from <https://perlego.com/book/5205547/finite-element-simulations-with-ansys-workbench-2025-theory-applications-case-studies-pdf>
9. Ansys® Workbench User's Guide, Release 2023 R1. (2023). Canonsburg, PA: Ansys, Inc. Retrieved from <https://ansyshelp.ansys.com>
10. Ansys DPF-Core: Data Processing Framework via Python. (2024). Canonsburg, PA: Ansys, Inc. Retrieved from <https://dpf.docs.pyansys.com>
11. Shyshkanova, G., Zaytseva, T., & Frydman, O. (2016). Method of approximation of stress fields in elastic bodies using neural networks. *Metallurgical and Mining Industry*, (4), 94–98. Retrieved from https://www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/english-edition/MMI_2016_4/12_Ganna-Shyshkanova.pdf

Morozov Y. S., Zaytseva T. A. Methodology for generating complex datasets in Ansys Mechanical for analysis, visualization, and neural network training in contact mechanics problems.

The integration of deep learning methods into the mechanics of deformable solids is significantly limited by the scarcity of verified training data. This creates a need for the development of more efficient experimental and numerical methodologies for the generation of high-quality datasets, as well as for the refinement of modeling and validation approaches. The present paper develops a methodology for the automated generation of such datasets based on the Ansys Mechanical environment. The proposed methodology relies on parametric modeling (Parameters Set module), which allows for varying geometric characteristics and loading conditions while maintaining finite element mesh quality. To accelerate data acquisition, the Ansys DPF library is utilized, providing direct reading

of binary result files and bypassing the limitations of the graphical user interface. The methodology's efficiency is verified using the problem of contact interaction between a stamp and an elastic half-space, for which a solution set was automatically generated. The obtained structured datasets of stresses and strains can be used to train neural networks designed to refine FEA results on coarse meshes. This approach makes it possible to achieve acceptable modeling accuracy while significantly reducing computational costs, as well as to support other deep learning tasks.

Keywords: neural network, contact zone, mathematical modeling, finite element method, data generation, deep learning, Ansys.

Отримано: 02.12.2025

Прийнято: 20.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.6:004.93'1:616-073.763

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).206-217](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).206-217)**В. М. Самусь**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
vasyl.samus@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1682-689X>

ГІБРИДНА МОДЕЛЬ АНАЛІЗУ СИГНАЛУ ЕКГ НА ОСНОВІ ІНЖЕНЕРНИХ ОЗНАК ТА ГЛИБИННОГО НАВЧАННЯ

У статті представлено гібридну модель аналізу сигналу електрокардіограми (ЕКГ), що поєднує інженерні ознаки та глибинне навчання. Запропоновано архітектуру з адаптивним злиттям ознак і сирого сигналу за допомогою Clinical Gating Unit. Розглянуто математичні моделі побудови ЕКГ, основні часові, морфологічні, статистичні та геометричні ознаки. Наведено приклад реалізації архітектури з використанням PyTorch. Обґрунтовано переваги комбінованого підходу щодо точності, узагальнюваності та інтерпретованості результатів.

Ключові слова: математична модель, ЕКГ, HRV, нейромережа, глибинне навчання, CNN, LSTM, інженерні ознаки, Clinical Gating Unit.

1. Вступ. Електрокардіограма (ЕКГ) є одним із ключових інструментів діагностики серцево-судинних захворювань. Вона відображає електричну активність серця у вигляді сигналу, що містить інформацію як про ритм, так і про морфологію скорочень міокарда. Завдяки своїй неінвазивності, доступності та високій інформативності, ЕКГ широко використовується у клінічній практиці, моніторингу та скринінгу пацієнтів. Аналіз ЕКГ може здійснюватися як візуально (лікарем), так і автоматизованими алгоритмами. Автоматизація аналізу дозволяє зменшити вплив людського фактору, прискорити обробку даних та підвищити точність виявлення патологій. Історично методи обробки сигналу ЕКГ ґрунтувалися на виділенні ключових ознак — тривалості інтервалів, амплітуд хвиль, статистик варіабельності серцевого ритму (HRV). Водночас ці ознаки є агрегованими й можуть не повністю відображати морфологічні особливості сигналу. З розвитком глибинного навчання виникли моделі, здатні безпосередньо аналізувати сирій ЕКГ-сигнал та виявляти приховані патерни. Зокрема, згорткові нейронні мережі (CNN) ефективно розпізнають морфологію хвиль, а рекурентні моделі (RNN, LSTM, GRU) — часові залежності. Проте й ці підходи мають обмеження: вони можуть бути чутливими до шуму, артефактів та погано узагальнюватися без залучення доменної інформації. Сучасною тенденцією є поєднання обох підходів — інженерних ознак та глибинного представлення — у гібридні моделі. Такі архітектури, зокрема двоветрові (dual-tower), дозволяють одночасно враховувати як клінічно інтерпретовані ознаки, так і сирі дані. Додаткове вдосконалення можливе через адаптивне злиття (fusion) з урахуванням клінічного контексту, зокрема із застосуванням модулів типу *Clinical Gating Unit*.

Постановка проблеми Сигнали електрокардіограми є складними біомедичними часовими рядами, які відображають електричну активність серця. Їх аналіз дозволяє виявляти порушення ритму, ішемічні зміни, електролітні зрушення та інші патології. Незважаючи на активний розвиток методів машинного

навчання, проблема надійного, інтерпретованого та стійкого до шуму автоматичного аналізу ЕКГ залишається відкритою. Традиційні підходи базуються на виділенні експертних (інженерних) ознак, таких як інтервали між зубцями, HRV-показники, морфологічні характеристики. Вони добре інтерпретуються та узагальнюються, однак мають обмежену здатність враховувати складні морфологічні патерни. З іншого боку, глибинні моделі (CNN, LSTM) здатні виявляти складні особливості без явного виокремлення ознак, але страждають від слабкої пояснюваності та чутливості до зашумлених або неповних даних.

Таким чином, виникає потреба у створенні моделі, яка:

- поєднує переваги експертних ознак та глибинного навчання;
- забезпечує адаптивне злиття різних джерел інформації залежно від клінічного контексту;
- зберігає інтерпретованість результатів та є стійкою до шуму й артефактів.

Для реалізації цього підходу у роботі пропонується архітектура з двома обчислювальними вежами (*feature tower* та *signal tower*), що зливаються за допомогою модуля *Clinical Gating Unit*, який керує вагуванням представлень на основі клінічних маркерів (наприклад, SDNN, QTc, ST).

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз електрокардіограми традиційно базувався на морфологічних ознаках, що відображають часові, амплітудні та просторові характеристики електричної активності серця. З появою цифрових обчислень у 1970-х роках з'явилися перші алгоритми автоматизованого аналізу, спрямовані на фільтрацію шумів, детекцію *R*-піків та сегментацію сигналу. Згодом розроблено методи обчислення широкого спектра інженерних ознак — показників варіабельності серцевого ритму (HRV), ентропійних коефіцієнтів та морфологічних параметрів, що мають клінічну інтерпретованість. Попри це, такі ознаки не здатні повністю охопити складну морфологію сирого ЕКГ-сигналу. З розвитком глибинного навчання з'явилися архітектури, здатні автоматично вилучати релевантні патерни: згорткові мережі (CNN) ефективно виявляють локальні морфологічні структури, а рекурентні (RNN, LSTM, GRU) моделюють ритміку та часову динаміку сигналу. Інженерні ознаки є компактними та пояснюваними, однак можуть втрачати тонкі морфологічні відхилення; натомість CNN/LSTM-моделі виявляють складні закономірності, проте мають нижчу інтерпретованість і чутливість до артефактів. Це зумовило появу гібридних архітектур, які поєднують інженерні та глибинні представлення, що забезпечує баланс між точністю, узагальнюваністю та пояснюваністю. В низці сучасних робіт підтверджено ефективність такого комбінованого підходу. Zhang та співавт. [1] об'єднали вейвлет-ознаки з CNN через теорію Демпстера–Шейфера, досягнувши підвищення точності класифікації. Rawshani та ін. [2] продемонстрували двопоточну архітектуру, де один канал обробляє сирий ЕКГ-сигнал, а другий — HRV та демографічні ознаки, що суттєво покращило виявлення фібриляції передсердь. Galli та співавт. [3] застосували Gaussian feature streaming для стабільного моніторингу сигналів у реальному часі. Giordano та співавт. [6] показали переваги багаторівневого злиття (*mid-level fusion*) при поєднанні ручних і глибинних ознак у задачах класифікації аритмій. Таким чином, сучасна література демонструє послідовний рух у напрямі гібридних моделей з адаптивним злиттям інформації з різних джерел. Подальші дослідження спрямовані на підвищення стійкості до шумів та покращення інтерпретованості

рішень. У цьому контексті запропонована модель з модулем *Clinical Gating Unit* є перспективним кроком до адаптивного поєднання клінічних, морфологічних та сигнальних ознак у єдиній нейромережевій системі аналізу ЕКГ.

Це підкреслює актуальність запропонованого підходу з *Clinical Gating Unit* для адаптивного злиття клінічних, морфологічних та сигнальних ознак у єдиному фреймворку.

3. Математична модель вхідного сигналу. Математична модель — це опис певного реального об'єкта, явища чи процесу за допомогою математичних понять, символів, формул і співвідношень. Вона дозволяє відобразити суттєві властивості об'єкта та досліджувати його поведінку без необхідності експериментувати безпосередньо з самим об'єктом.

Основні риси математичної моделі

- Абстракція — відкидання другорядних деталей і виділення головних характеристик.
- Формалізація — опис у вигляді рівнянь, функцій, матриць, ймовірностей тощо.
- Адекватність — модель має відтворювати суттєві властивості реального процесу.

3.1. Формалізація вхідного сигналу. Побудову моделі доцільно розпочати з формалізації вхідного сигналу ЕКГ, який містить кілька каналів, відповідних до системи відведень, що відображають електричну активність серця з різних проєкцій. Загальноприйнято виділяти три основні групи: стандартні біполярні відведення (I — між правою і лівою рукою, II — між правою рукою і лівою ногою, III — між лівою рукою і лівою ногою), підсилені однополюсні від кінцівок (aVR, aVL, aVF), а також грудні (прекардіальні) відведення V1–V6, які розміщуються на грудній клітці відповідно до міжреберних проміжків і анатомічних ліній. Кожне відведення забезпечує унікальний «кут огляду» на серцеву діяльність, що дозволяє моделі враховувати просторову неоднорідність сигналу.

Кожне відведення — це різниця потенціалів між двома точками тіла, де встановлені електроди. Нехай

$\varphi_i(t)$ — електричний потенціал у точці i ,

$L(t)$ — сигнал у відведенні.

Тоді відведення визначається як:

$$L(t) = \varphi_a(t) - \varphi_b(t),$$

де a, b — точки вимірювання.

Для посиленних відведень використовується різниця потенціалів між відповідної кінцівки та середнім потенціалом кінцівок:

$$V_W(t) = \frac{\varphi_{RA}(t) + \varphi_{LA}(t) + \varphi_{LL}(t)}{3}.$$

Якщо узагальнити підхід, то електрична активність серця в кожен момент часу може бути зведена до єдиного еквівалентного електричного диполя. Цей диполь $p(t) = [p_x(t), p_y(t), p_z(t)]$ постійно змінює величину й напрям у часі. Кожне відведення k має свій вектор-спостерігач \mathbf{I}_k , який визначається положенням електродів. Тоді сигнал у відведенні є проєкцією вектора диполя на напрям цього відведення:

$$s_k(t) = \mathbf{l}_k \cdot \mathbf{p}(t) = |\mathbf{p}(t)| |\mathbf{l}_k| \cos \theta_k,$$

де θ_k — кут між диполем і напрямком відведення.

Цей результат можна представити у матричній формі:

$$\mathbf{s}(t) = L p(t) + \mathbf{b}(t) + \boldsymbol{\eta}(t).$$

Для кожного відведення сигнал можна розділити на хвилі, які фізіологічно відповідають скороченню серцевого м'язу. Хвилю можна представити як суму компонент:

$$ECG(t) = P(t) + QRS(t) + T(t) + U(t) + baseline(t) + noise(t),$$

де

- $P(t)$ — хвиля передсердної деполяризації,
- $QRS(t)$ — деполяризація шлуночків,
- $T(t)$ — реполяризація шлуночків,
- $U(t)$ — додаткова реполяризація,
- $baseline(t)$ — дрейф ізолінії,
- $noise(t)$ — шумові компоненти.

Також кожен хвилю можна подати аналітично, наприклад використовуючи гаусіан

$$g(t) = A \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де

- A — амплітуда (висота хвилі),
- μ — центр (часова позиція максимуму),
- σ — ширина (визначає тривалість хвилі).

Хвилі P та T мають м'яку та "дзвоникоподібну" форму і добре моделюються окремим гаусіаном. Комплекс QRS різкіший, тому його можна апроксимувати кількома гаусіанами (Q — негативний, R — позитивний, S — негативний). В результаті отримуємо модель серцевого циклу через гаусіан:

$$ECG(t) = \sum_{m \in \{P, Q, R, S, T\}} A_m \cdot e^{-\frac{(t-\mu_m)^2}{2\sigma_m^2}}.$$

У своїх працях М. А. Awal[1] та А. Galli[2] дослідили, що модель сигналу ЕКГ може бути представлена як

$$ECG_{model} = \sum_{i \in \{P, Q, R, S, T\}}^{j=2} A_{i,j} e^{-\left[\frac{(t-t_{i,j})^2}{\sigma_{i,j}^2}\right]} + c_i,$$

де j вказує на кількість необхідних гаусіанів. Для вибору параметрів використовуємо метод мінімізації середньоквадратичної похибки (RMSE). Математично це можна записати як:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (ECG_{Model}(t) - ECG_{real}(t))^2} < \epsilon$$

4. Виділення і моделювання основних ознак ЕКГ. Інтервальні ознаки базуються на послідовності RR інтервалів і є основою як для класичного аналізу варіабельності серцевого ритму (HRV), так і для виявлення патологій. Базовою

ознакою є RR -інтервал — час між сусідніми R-піками Нехай $\{t_i\}_{i=1}^N$ — часові координати послідовних R-піків на ЕКГ.

Тоді $RR_i = t_{i+1} - t_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1..$

Визначимо індикатор ”нормальності” інтервалу NN (Normal-to-Normal):

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } RR_i \text{ належить до нормального циклу,} \\ 0, & \text{якщо } RR_i \text{ виключається (екстрасистола або артефакт).} \end{cases}$$

Тоді:

$$NN = \{RR_i \cdot \delta_i \mid i = 1, \dots, N - 1 \text{ і } \delta_i = 1\}.$$

Оцінка варіабельності серцевого ритму ґрунтується, зокрема, на аналізі змін ΔRR -інтервалів, з акцентом на абсолютні відхилення між сусідніми значеннями:

$$\Delta RR_i = RR_{i+1} - RR_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 2,$$

так і відносні:

$$\Delta RR^{rel}_i = \frac{RR_{i+1} - RR_i}{RR_i}.$$

Для варіації RR інтервалів обчислюють показник:

$$CVRR = \frac{SDNN}{mean(RR)},$$

де $SDNN$ — стандартне відхилення NN -інтервалів.

4.1. Морфологічні ознаки. До морфологічних ознак належать часові параметри, зокрема тривалості хвиль і комплексів, таких як $T_P, T_{QRS}, T_{QT}, T_{ST}$. Їх доповнюють амплітудні характеристики — висоти зубців P, R, S, T . Важливими є також інтегральні показники, зокрема площі ділянок, обмежених відповідними фрагментами сигналу. Серед геометричних ознак варто виокремити нахили сегментів, ступінь асиметрії T -хвилі, а також кути між фазовими відрізками комплексу.

4.2. Статистичні ознаки HRV.

- $MeanRR$ — середня тривалість RR .
- $SDNN$ — стандартне відхилення NN -інтервалів (загальна варіабельність).
- $RMSSD$ — корінь з середнього значення квадрату різниць сусідніх NN :

$$RMSSD = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} (NN_{i+1} - NN_i)^2}.$$

- $NN50$ — кількість пар сусідніх NN , які відрізняються більш ніж на 50 мс:
 $NN50 = \sum_{i=1}^{M-1} (|NN_{i+1} - NN_i| > 50 \text{ мс}).$
- $pNN50$ — відсоток сусідніх NN , які відрізняються > 50 мс (ознака «нерегулярності»).

$$pNN50 = \frac{NN50}{M-1} \times 100\%.$$

- ентропія $ApEn(m, r, N) = \phi_m(r) - \phi_{m+1}(r)$
- $MedianRR, IQR(RR)$ — робастні характеристики.

4.3. Часові залежності. . Дозволяють визначити ознаки в локальних вікнах.

- $SDANN$ — стандартне відхилення середніх RR у 5-хвилинних вікнах.
- $SDNNi$ — середнє стандартних відхилень у коротких сегментах (локальна мінливість).

4.4. Геометричні та ентропійні ознаки. Діаграма Лоренца — це графічний метод аналізу варіабельності серцевого ритму, який відображає взаємозв'язок між сусідніми NN-інтервалами. Це множина точок.

$$P = \{(NN_i, NN_{i+1}) \mid i = 1, 2, \dots, M - 1\}.$$

На діаграмі формується хмарка точок, яку можна апроксимувати еліпсом. Основні показники:

- поперечна дисперсія (ширина еліпса): $SD1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot RMSSD$
- поздовжня дисперсія (довжина еліпса): $SD2 = \sqrt{2 \cdot SDNN^2 - \frac{1}{2}RMSSD^2}$
- $SD1/SD2$ — баланс короткочасної та довготривалої варіабельності.

Певні ознаки або їх комбінації можуть свідчити про ектопічну природу серцевої активності. Зокрема, підвищена дисперсія RR -інтервалів, високе значення ентропії та зниження періодичності ритму є характерними для фібриляції передсердь (AF). Натомість регулярні осциляції RR -інтервалів, що часто корелюють із дихальним циклом, є типовими для синусової аритмії.

5. Побудова гібридної математичної моделі аналізу ЕКГ.

5.1. Розглянемо архітектуру гібридної моделі. Вхідний потік даних складається з 2 частин:

- Вхід 1 (features): $x_f \in \mathbb{R}^d$ — інженерні ознаки ($SDNN, RMSSD, QTc \dots$).
- Вхід 2 (signal): $x_s \in \mathbb{R}^{C \times T}$ — сирій фрагмент ЕКГ (C =кількість відведень, T =довжина вікна).

На його основі будуємо дві “башти”:

- Башта ознак (MLP): $h_f = \text{MLP}(x_f) \in \mathbb{R}^p$.
- Башта сигналу (CNN/LSTM): $\tilde{x}_s = \text{CNN}(x_s) \rightarrow \text{BiLSTM}(\cdot) \rightarrow \text{pooling} \Rightarrow h_s \in \mathbb{R}^q$.

далі відбувається злиття та кінцева класифікація:

- Злиття: $z = [h_f \parallel h_s] \in \mathbb{R}^{p+q}$.
- Голова: $y = \text{Classifier}(z)$.

5.2. Стратегії злиття. У двохвежових (hybrid) моделях ЕКГ існує кілька стратегій злиття даних з ознак та сирого сигналу:

- **Раннє злиття.** Основною ідеєю є об'єднати інженерні ознаки та сирі ознаки та вже потім подати все разом на входи нейромережі. Ця проста ідея має суттєвий недолік, який полягає в різній природі даних, що призводить до проблем з балансуванням масштабу для інженерних ознак.
- **Проміжне злиття.** Тут проводимо об'єднання представлень середнього рівня. Наприклад, CNN витягує морфологічні ознаки з ЕКГ, MLP аналізує статистику HRV і їхні приховані вектори зливаються на проміжному шарі. Дану ідею можна розширити додавши додаткові вежі. Серед недоліків є більша обчислювальна вартість.
- **Пізнє злиття.** Ідея полягає в тому, що кожна вежа повертає свою імовірність належності до класів, і ці ймовірності надалі об'єднуються. Кожна модель тренується окремо, і це є плюсом, однак моделі практично не взаємодіють на етапі тренування і це є недоліком.

Одним з ефективних підходів до інтеграції інженерних та глибинних ознак є використання *проміжного злиття* (mid-level fusion). На відміну від простого об'єднання вихідних рішень або повного злиття на рівні сирих даних, цей підхід дозволяє поєднувати латентні представлення обох «веж» — ознак та сирого сигналу.

Класична схема проміжного злиття ґрунтується на рівноправній конкатенації латентів з «feature tower» h_f та «signal tower» h_s . Проте на практиці ці представлення можуть бути різного масштабу, що вимагає адаптивного визначення важливості кожного з компонентів. З цією метою вводиться параметр ваги $\alpha \in [0, 1]$, який визначає ступінь довіри до ознак або до сирого сигналу при злитті:

$$z = \alpha \cdot h_f + (1 - \alpha) \cdot h_s.$$

Щоб надати вагам клінічної інтерпретованості, пропонується обчислювати їх на основі вектору клінічних ознак $f_{\text{clin}} \in \mathbb{R}^k$. Для цього застосовується сигмоїдна активація:

$$\alpha = \sigma(Wf_{\text{clin}} + b),$$

де W та b — параметри, що навчаються під час оптимізації. Таким чином, ступінь впливу кожного з джерел інформації визначається контекстно — відповідно до специфіки клінічної ситуації. Запропонований механізм ми назвемо CGU (Clinical Gating Unit), що формалізує принцип “клінічного керування” злиттям ознак. На рисунку 1 наведемо схему архітектури вдосконаленого механізму злиття:

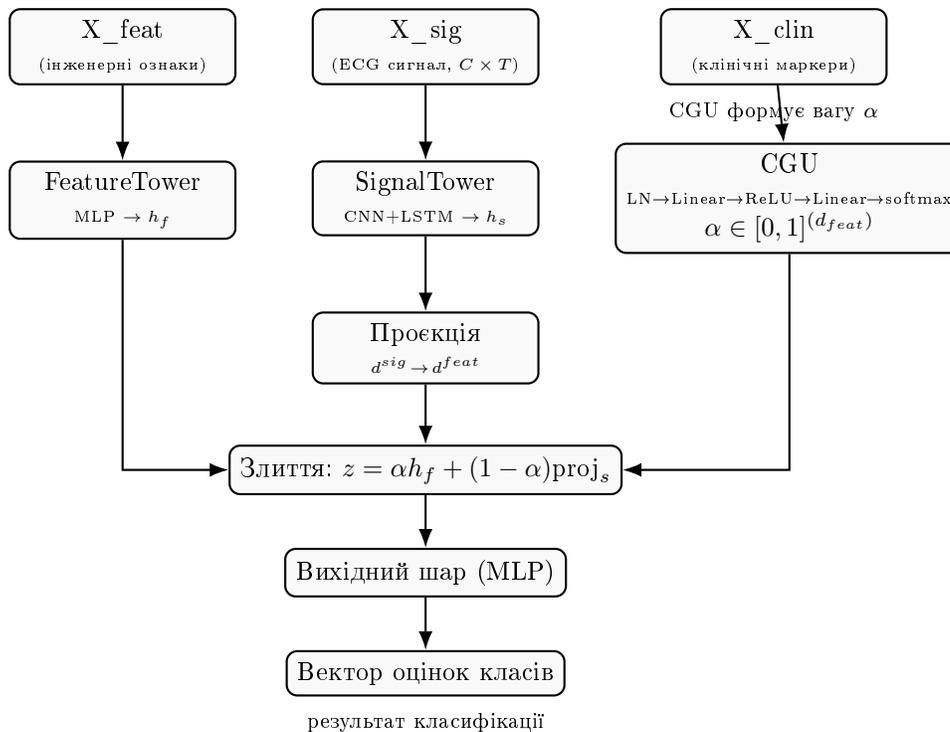


Рис. 1. Схема моделі ECG-ACGF. *FeatureTower* обробляє інженерні ознаки, *SignalTower* — ECG-сигнал, *CGU* використовує клінічні показники для обчислення ваги α , яка визначає внесок обох представлень у спільний латент z .

Описану схему реалізовано програмно. У лістингу нижче наведено приклад реалізації основних класів

FeatureTower. MLP-вежа для інженерних ознак. Перетворює вектор $x_{\text{feat}} \in \mathbb{R}^{d_{\text{in}}}$ у латентне представлення $h_f \in \mathbb{R}^{d_{\text{lat}}}$. Архітектура: LayerNorm \rightarrow Linear(256) \rightarrow ReLU \rightarrow Dropout \rightarrow Linear(d_{lat}) \rightarrow ReLU.

SignalTower. Комбінація згорткових і рекурентних шарів (CNN + BiLSTM) для обробки сирого сигналу ЕКГ. Отримує $x_{\text{sig}} \in \mathbb{R}^{B \times C \times T}$ і формує латент сигналу $h_s \in \mathbb{R}^{B \times d_{\text{lat}}}$. Послідовність операцій: Conv1d \rightarrow ReLU \rightarrow MaxPool \rightarrow BiLSTM \rightarrow Global Average Pooling \rightarrow Linear \rightarrow ReLU.

ClinicalGatingUnit (CGU). Модуль, який із клінічних ознак x_{clin} обчислює вагу $\alpha \in [0, 1]$, що визначає баланс між двома потоками ознак. Структура: LayerNorm \rightarrow Linear(hidden) \rightarrow ReLU \rightarrow Linear(1) \rightarrow Sigmoid.

ECG_ACGF. Основна модель (*Adaptive Clinical-Guided Fusion*), яка об'єднує інформацію з трьох джерел — інженерних ознак, сирого сигналу та клінічних параметрів:

- 1) $h_f = \text{FeatureTower}(x_{\text{feat}})$
- 2) $h_s = \text{SignalTower}(x_{\text{sig}})$
- 3) $\text{proj}_s = W_{\text{proj}} h_s$ — проєкція сигналу у простір ознак
- 4) $\alpha = \text{CGU}(x_{\text{clin}})$
- 5) Злиття: $z = \alpha h_f + (1 - \alpha) \text{proj}_s$
- 6) Класифікаційна голова (MLP) \rightarrow логіти y

Вихід моделі: (logits, α), де α відображає вагу клінічної довіри між двома потоками ознак.

Лістинг 1: Python example

```
import torch
import torch.nn as nn
class FeatureTower(nn.Module):
    def __init__(self, d_in, d_lat=128, p_drop=0.3):
        super().__init__()
        self.net = nn.Sequential(
            nn.LayerNorm(d_in),
            nn.Linear(d_in, 256), nn.ReLU(), nn.Dropout(p_drop),
            nn.Linear(256, d_lat), nn.ReLU()
        )
    def forward(self, x_feat):
        return self.net(x_feat)

class SignalTower(nn.Module):
    def __init__(self, c_in, d_lat=256):
        super().__init__()
        self.cnn = nn.Sequential(
            nn.Conv1d(c_in, 32, kernel_size=7, padding=3), nn.ReLU(),
            nn.Conv1d(32, 64, kernel_size=5, padding=2), nn.ReLU(),
            nn.MaxPool1d(2),
            nn.Conv1d(64, 128, kernel_size=5, padding=2), nn.ReLU(),
            nn.MaxPool1d(2)
        )
        self.lstm = nn.LSTM(
            input_size=128, hidden_size=128,
            num_layers=1, batch_first=True, bidirectional=True
        )
        self.proj = nn.Linear(256, d_lat)

    def forward(self, x_sig):
        f = self.cnn(x_sig)
```

```

        f = f.transpose(1, 2)
        out, _ = self.lstm(f)
        h = out.mean(dim=1)
        return F.relu(self.proj(h))

class ClinicalGatingUnit(nn.Module):
    def __init__(self, d_clin, hidden=32):
        super().__init__()
        self.net = nn.Sequential(
            nn.LayerNorm(d_clin),
            nn.Linear(d_clin, hidden), nn.ReLU(),
            nn.Linear(hidden, 1)
        )

    def forward(self, x_clin):
        alpha_logits = self.net(x_clin)
        alpha = torch.sigmoid(alpha_logits)
        return alpha

class ECG_ACGF(nn.Module):
    def __init__(self, d_feat, c_sig, d_clin, n_classes,
                 d_lat_feat=128, d_lat_sig=256, vector_gate=False):
        super().__init__()
        self.ft = FeatureTower(d_feat, d_lat_feat)
        self.st = SignalTower(c_sig, d_lat_sig)
        self.vector_gate = vector_gate
        if vector_gate:
            self.cgu_f = nn.Sequential(
                nn.LayerNorm(d_clin), nn.Linear(d_clin, d_lat_feat)
            )
            self.cgu_s = nn.Sequential(
                nn.LayerNorm(d_clin), nn.Linear(d_clin, d_lat_sig)
            )
        else:
            self.cgu = ClinicalGatingUnit(d_clin)
        self.head = nn.Sequential(
            nn.Linear(d_lat_feat, 128), nn.ReLU(), nn.Dropout(0.3),
            nn.Linear(128, n_classes)
        )

    def forward(self, x_feat, x_sig, x_clin):
        h_f = self.ft(x_feat)
        h_s = self.st(x_sig)
        proj_s = nn.functional.linear(
            h_s,
            torch.eye(h_s.size(-1), device=h_s.device)[:h_f.size(-1)]
        )
        if not hasattr(self, "proj_to_feat"):
            self.proj_to_feat = nn.Linear(h_s.size(-1), h_f.size(-1)).to(h_s.device)
        proj_s = self.proj_to_feat(h_s)
        if self.vector_gate:
            alpha_f = torch.sigmoid(self.cgu_f(x_clin))
            alpha_s = torch.sigmoid(self.cgu_s(x_clin))
            alpha = torch.sigmoid(alpha_f)
            z = alpha * h_f + (1 - alpha) * proj_s
        else:
            alpha = self.cgu(x_clin)
            z = alpha * h_f + (1 - alpha) * proj_s
        logits = self.head(z)
        return logits, alpha

```

6. Результати експериментів. Для базового оцінювання використано підвибірку бази даних MIT-BIH Arrhythmia. Як інженерні ознаки було обрано ширину, потужність та енергію комплексу QRS, рівень і базову лінію сегмента ST, а також тривалості та амплітуди хвиль. До клінічних ознак віднесено зсув ST (маркер ішемії), скоригований інтервал QT (характеризує відновлення міокарда), локальні RR-інтервали (варіабельність та іррегулярність серцевого ритму) та миттєву частоту серцевих скорочень (HR).

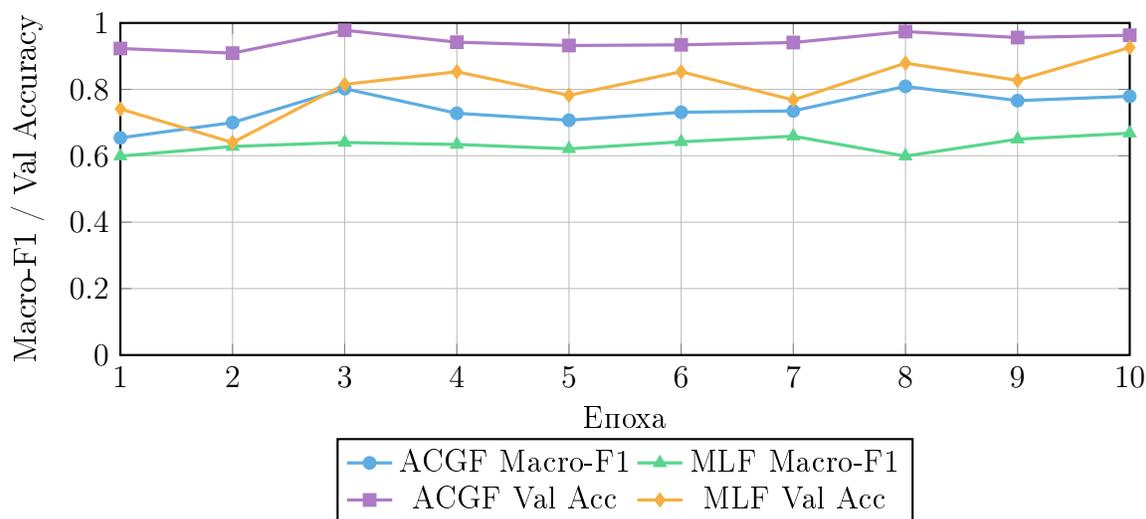


Рис. 2. Порівняння динаміки навчання Adaptive Clinical-Guided Fusion (ACGF) та Mid-Level Fusion (MLF). ACGF демонструє стабільно вищі показники Macro-F1 та точності, особливо після 3-ї епохи.

Експерименти проводилися з різною кількістю вхідних записів та вихідних класів. Вхідні дані розбивалися на тренувальну та тестову вибірки, після чого нормалізувалися і подавалися на вхід як класичної моделі MidLevelFusion, так і розробленої архітектури ECG-ACGF, що дозволяло здійснити коректне порівняння результатів на ідентичних наборах даних.

ECG-ACGF поєднує дві вежі: *FeatureTower* (інженерні/морфологічні ознаки) та *SignalTower* (CNN-LSTM, що обробляє сирій сегмент ЕКГ). Їхній внесок у фінальне рішення зважується блоком *Clinical Gating Unit (CGU)* за клінічними маркерами (X_{clin}). У базовій моделі MidLevelFusion використано статичне злиття представлень шляхом конкатенації:

$$[h_f, \text{proj}(h_s), h_f - \text{proj}(h_s), h_f \odot \text{proj}(h_s)],$$

після чого застосовується MLP для класифікації.

За результатами серії експериментів встановлено, що при невеликій кількості вихідних класів (наприклад, *normal*, *extrasystole*) обидва підходи демонструють високі показники точності, з незначною перевагою моделі з CGU. Зі збільшенням кількості класів та обсягу вхідних даних точність класифікації зменшується, однак деградація якості у ECG-ACGF є істотно меншою порівняно з MidLevelFusion.

Для демонстрації різниці в ефективності було використано 12 записів (22 929 фрагментів) ЕКГ із п'ятьма класами: *normal*, *atrial*, *supraventricular*, *ventricular*, *fusion*. Порівняння проводилося за показниками *validation accuracy* та *macro-F1*.

Порівняння з класичним MidLevelFusion відображено в таблиці 1 та на рисунку 2

Отримані результати демонструють стале покращення показника *macro-F1* для моделі ECG-ACGF (~ 0.78 – 0.81) порівняно з базовою архітектурою MidLevelFusion (~ 0.63 – 0.66), а також суттєву перевагу в точності класифікації

(приблизно 95% проти 82%). Середнє значення коефіцієнта злиття $\alpha \approx 0.45$ з дисперсією $\sigma \approx 0.30$ свідчить про активну адаптацію механізму *Clinical Gating Unit*, який динамічно змінює вагу між морфологічними (FeatureTower) та сигнальними (SignalTower) представленнями залежно від клінічних показників пацієнта.

Таблиця 1.

Порівняння ефективності злиття ознак і сигналу

Модель	Тип об'єднання	Val Acc	Macro-F1	α (mean \pm std)
ECG-ACGF	Адаптивне клінічно кероване злиття	0.95	0.78	0.45 ± 0.30
MidLevelFusion	Статичне mid-level злиття	0.82	0.63	—

7. Висновки. Запропонований модуль Clinical Gating Unit (CGU) має низку переваг порівняно з класичними підходами до злиття ознак і сигналів у задачах аналізу ЕКГ.

По-перше, він забезпечує адаптивність: вага між сирим сигналом і інженерними ознаками змінюється залежно від клінічного контексту — наприклад, подовження інтервалу QTc , зсуву ST чи зниження варіабельності серцевого ритму ($SDNN$). Завдяки цьому модель динамічно підлаштовується під фізіологічний стан пацієнта.

По-друге, CGU підвищує стійкість до шуму. У разі зашумленого сигналу більша частка ваги автоматично надається стабільним статистичним та морфологічним показникам, тоді як при неточній детекції інтервалів вагу отримує згорткова або рекурентна частина (CNN/LSTM), яка безпосередньо аналізує форму сигналу.

Ще однією суттєвою перевагою є інтерпретованість. Завдяки контролю ваг α можна пояснити, чому модель прийняла певне рішення: наприклад, через низький $SDNN$ вона надала перевагу HRV-ознакам, або через подовжений QTc — сигналові. Такий підхід вводить у модель клінічно обґрунтоване упередження (clinical prior), що зменшує ризик покладання на випадкові патерни чи артефакти.

Крім того, розділення функцій вагування та класифікації спрощує навчання — кінцевий класифікатор фокусується лише на прогнозуванні, не вирішуючи одночасно задачу балансування джерел інформації.

Нарешті, модульність CGU робить систему гнучкою та розширюваною: до неї легко інтегрувати додаткові клінічні параметри — від SpO_2 і артеріального тиску до демографічних чи лабораторних показників.

Модуль Clinical Gating Unit забезпечує більш стійке, пояснюване й клінічно обґрунтоване злиття інформації, ніж традиційні методи mid-level fusion.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи

«Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи вони не використовувались технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Самусь В. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Zhang, J., Wu, C., Ruan, C., Zhang, R., Zhao, Z., & Cheng, X. (2021). ECG Signal Classification Based on Fusion of Hybrid CNN and Wavelet Features by D-S Evidence Theory. *Journal of Healthcare Engineering*, 2021, 4222881. <https://doi.org/10.1155/2021/4222881>
2. Rawshani, A., Smith, G., Boren, J., Bhatt, D. L., Börjesson, M., Engdahl, J., Kelly, P., Louca, A., Ramunddal, T., Andersson, E., Omerovic, E., Mandalenakis, Z., & Gupta, V. (2025). Integrating deep learning with ECG, heart rate variability and demographic data for improved detection of atrial fibrillation. *Open Heart*, 12(1), e003185. <https://doi.org/10.1136/openhrt-2025-003185>
3. Galli, A., Giorgi, G., & Narduzzi, C. (2023). Accurate ECG monitoring by Gaussian feature streaming. *Measurement*. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2023.113757>
4. Awal, M. A., Mostafa, S. S., Ahmad, M., Alahe, M. A., Rashid, M. A., Kouzani, A. Z., & Mahmud, M. A. P. (2021). Design and Optimization of ECG Modeling for Generating Different Cardiac Dysrhythmias. *Sensors*, 21, 1638. <https://doi.org/10.3390/s21051638>
5. Fira, M., Gordan, C., & Ionescu, B. (2022). An Explainable Deep Learning Framework for Multilead ECG Classification. *Biomedical Signal Processing and Control*, 73, 103402. <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2021.103402>
6. Giordano, D., & Laurito, M., & Spampinato, C. (2021). Fusion of handcrafted and deep features for ECG classification. *Computers in Biology and Medicine*, 135, 104552. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2021.104552>

Samus V. M. Hybrid ECG Signal Analysis Model Based on Engineered Features and Deep Learning.

This paper presents a hybrid model for electrocardiogram (ECG) signal analysis that combines handcrafted features with deep learning. An adaptive fusion architecture is proposed, integrating feature- and signal-based inputs using a Clinical Gating Unit. Mathematical models of ECG generation are reviewed alongside temporal, morphological, statistical, and geometrical characteristics. A PyTorch-based implementation of the proposed architecture is provided. The hybrid approach is shown to improve classification accuracy, robustness, and interpretability.

Keywords: mathematical model, ECG, HRV, neural network, deep learning, CNN, LSTM, handcrafted features, Clinical Gating Unit.

Отримано: 04.11.2025

Прийнято: 24.11.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).218-231](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).218-231)**Ю. О. Товт¹, А. Ю. Брила²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
yurii.tovt@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9556-0630>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

ФІЛЬТРАЦІЯ ІМПУЛЬСНОГО ШУМУ НА ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ З ВИКОРИСТАННЯМ ДЕТЕКТОРУ ІМПУЛЬСІВ НА ОСНОВІ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Сьогодні цифрові зображення широко застосовуються в багатьох галузях. Їх аналіз є надзвичайно важливою задачею, тому фільтрація шуму на цифрових зображеннях відіграє важливу роль. У цій роботі розглянуто фільтрацію імпульсного шуму на зображеннях із використанням медіанного фільтра з детектором імпульсів на основі дійснозначної нейромережі. Проведено експерименти з фільтрації імпульсного шуму та порівняння отриманих результатів із деякими існуючими методами фільтрації імпульсного шуму.

Ключові слова: нейронні мережі, цифрові зображення, фільтрація шуму, імпульсний шум.

1. Вступ. Якість цифрових зображень має вирішальне значення в багатьох критично важливих сферах, таких як медична діагностика, контроль якості, дистанційне зондування поверхні Землі тощо, що вимагає постійного вдосконалення методів їхньої обробки. Серед різноманітних видів деградації, імпульсний шум є одним з основних та найбільш поширених типів шуму, який значно погіршує візуальну якість зображень. Попри те, що розвиток технологій дозволив зменшити появу імпульсного шуму на цифрових зображеннях, його фільтрація все ще залишається актуальною проблемою.

Класичним методом фільтрації імпульсного шуму є медіанний фільтр [1, 2]. Ідеєю цього методу є заміна інтенсивності кожного пікселя значенням медіани інтенсивностей пікселів з його локального оточення. Хоча даний метод є ефективним для фільтрації імпульсів, він знищує дрібні деталі на зображенні і робить зображення розмитим. Спосіб уникнути цього негативного ефекту був запропонований у [3]. Ідея базується на тому, щоб шляхом застосування детектора імпульсів Differential Rank Impulse Detector (DRID) перевірити наявність імпульсу у кожному пікселі зображення. Таким чином можна здійснити фільтрацію лише тих пікселів, де детектор вказує на наявність імпульсу.

Інший підхід з використанням детектора імпульсів був запропонований у [4]. У цій роботі детектор імпульсу був імплементований за допомогою нейромережі, на вхід якої подаються певні характеристики локального оточення пікселя, який обробляється. Як і у попередній роботі, детектор дозволяє визначити наявність імпульсу у кожному пікселі зображення. Фільтрація здійснюється за

допомогою гібридного фільтра, який дозволяє відрізнити тонкі лінії або межі об'єктів від імпульсів та ефективно фільтрувати їх.

Існує також ряд фільтрів, що застосовують різноманітні підходи для фільтрації імпульсного шуму. До них належать класичні фільтри, детектор-орієнтовані, морфологічні, Fuzzy-фільтри та інші. У [5] проведено огляд великої кількості фільтрів для фільтрації імпульсного шуму та наведено порівняння результатів їх роботи.

Значний розвиток нейронних мереж сприяє появі фільтрів, що базуються на їх використанні, завдяки здатності нейромереж моделювати складні нелінійні залежності та адаптуватися до особливостей конкретного типу шуму. Наприклад, багатошаровий перцептрон (MLP) був успішно застосований для фільтрації адитивного гаусівського та змішаного пуасонівського та гаусового шуму [6,7]. Підхід з використанням MLP дав хороші результати, які за якістю є близькими (а у деяких випадках і кращими), ніж у відомих фільтрів, таких як VM3D [8].

Комплекснозначна нейронна мережа (MLMVN) також була застосована для фільтрації імпульсного шуму і показала високу ефективність [9]. Отримані результати є близькими, а в окремих випадках і перевищують результати, отримані за допомогою TBF-фільтра [10] та медіанного фільтра з детектором імпульсів DRID [3].

Висока популярність згорткових нейромереж (CNN) сприяла появі багатьох робіт, у яких CNN використовувалися для фільтрації різних типів шуму. Так Hybrid CNN [11] та Pre-trained RLN [12] використовувалися для фільтрації спекл-шуму на ультразвукових зображеннях та продемонстрували результати, які в деяких випадках перевершували результати класичних фільтрів (наприклад, Lee [13] та Frost [14]).

У [15] було запропоновано алгоритм фільтрації змішаного імпульсного і гаусівського шуму за допомогою нейронних мереж. У роботі було використано глибоку згорткову нейромережу, що дозволило досягнути високих результатів фільтрації у порівнянні з іншими фільтрами.

Метою даної роботи було дослідження ефективності використання дійснозначної нейронної мережі у ролі детектора імпульсів з метою подальшої фільтрації імпульсного шуму на цифрових зображеннях.

2. Основний результат.

2.1. Імпульсний шум та його моделювання. Імпульсний шум зазвичай виникає під час отримання або передачі зображення внаслідок дефектів лінзи пристрою, несправності фотосенсорів камери, несправності носія (накопичувача) пам'яті або помилок у процесі стиснення [1, 16, 17]. Наявність цього виду шуму може значно ускладнити подальшу обробку зображення, оскільки прояви імпульсного шуму, на відміну від інших видів шуму, таких як адитивний, гаусівський або спекл-шум, не залежать від самого сигналу. Іншими словами, імпульси повністю заміщують інтенсивність певних пікселів зображення. Так, наприклад, імпульсний шум у відео з реєстратора за умов низького освітлення [18] може призвести до неправильного тлумачення записів, ускладнюючи точне розпізнавання транспортних засобів, що брали участь у події. На медичних зображеннях (рентгенівські знімки, МРТ та КТ) [19] він може спричинити помилкове тлумачення через зникнення важливих деталей, необхідних для діагностики. Саме тому фільтрація імпульсного шуму залишається актуальною

проблемою.

У даній роботі для спрощення під час досліджень ми використовували зображення у відтінках сірого. Таке спрощення не зменшує загальності, оскільки кольорові зображення можна представити у вигляді комбінації зображень у відтінках сірого для кожного кольорового каналу (наприклад, RGB).

Як відомо, цифрове зображення у просторовій області представляється у вигляді дискретної функції

$$f : D^2 \rightarrow I,$$

де $D = \{1, 2, \dots, N\}$ - просторова область, а $I = \{0, 1, \dots, L - 1\}$ - інтенсивність [11].

Існує декілька моделей імпульсного шуму. У цій роботі ми використовуємо модель сіль та перець (S&P), яка має наступний вигляд:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{з імовірністю } p_{\text{pepper}}, \\ L - 1, & \text{з імовірністю } p_{\text{salt}}, \\ f(x, y), & \text{з імовірністю } 1 - p_{\text{salt}} - p_{\text{pepper}}, \end{cases}$$

де $g(x, y)$ - зашумлене зображення, $f(x, y)$ - ідеальне зображення (зображення без імпульсного шуму).

Для проведення експериментів і генерації зашумлених зображень ми застосували функції з пакету scikit-image. Зауважимо, що інтенсивність імпульсного шуму далі вказується у відсотках, що відповідає частці (кількості) пікселів зображення, пошкоджених імпульсами.

Щоб оцінити якість фільтрації, зазвичай користуються значеннями RMSE

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N (f(x, y) - \hat{f}(x, y))^2}$$

або PSNR

$$\text{PSNR} = 20 \log_{10} \left(\frac{L - 1}{\text{RMSE}} \right),$$

де $f(x, y)$ - ідеальне зображення, $\hat{f}(x, y)$ - відфільтроване зображення, $L - 1$ - максимальне значення інтенсивності пікселя, а $\text{RMSE} > 0$ - середньоквадратичне відхилення. У даній роботі під час експериментів ми використовували показник PSNR.

2.2. Детектор імпульсів на основі нейронної мережі. Класичним методом фільтрації імпульсного шуму є медіанний фільтр. Цей фільтр відноситься до нелінійних і здатен досить ефективно видаляти імпульсний шум. Фільтрація відбувається шляхом обробки кожного пікселя зображення та заміни значення його інтенсивності на медіану варіаційного ряду інтенсивностей пікселів його локального оточення. Недоліком цього підходу є те, що він може знищувати дрібні деталі зображення та робити його нечітким (розмитим), що є неприпустимим у деяких галузях, таких як медицина.

Цей факт стимулював розробку методів фільтрації імпульсного шуму, які спочатку визначають наявність імпульса за допомогою детектора. Одним із таких ефективних детекторів є DRID [3]. Алгоритм фільтрації з використанням

DRID, на відміну від класичного медіанного фільтра, додає етап аналізу варіаційного ряду інтенсивностей локального оточення пікселя, щоб визначити наявність імпульса. Якщо імпульс виявлено, його інтенсивність замінюється на медіану, а якщо імпульса немає - значення інтенсивності пікселя залишається без змін. Така селективна фільтрація дозволяє значно покращити якість відновлення зображення, зберігаючи дрібні деталі. На зображенні рис. 1 можна помітити втрату деталей на трапі літака та написах при застосуванні медіанного фільтра, тоді як використання детектора дозволяє уникнути цього.

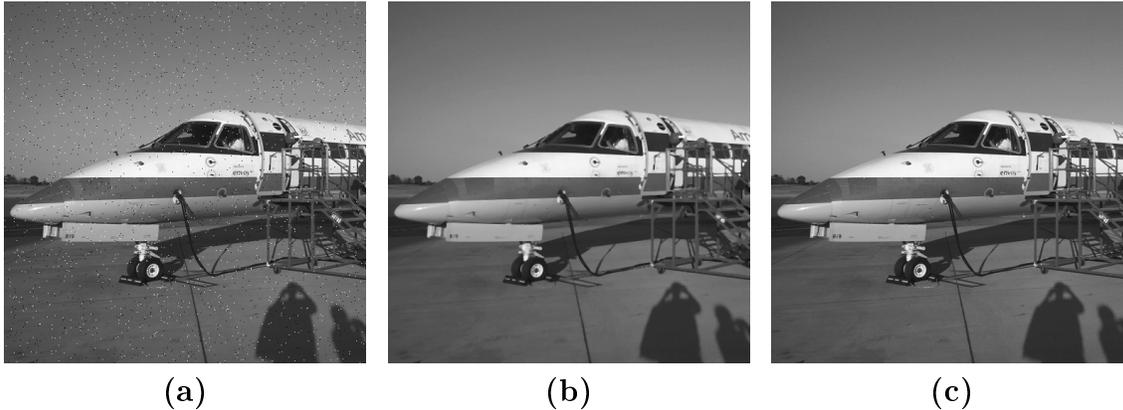


Рис. 1. (а) Зображення з імпульсним шумом інтенсивністю 1%. (б) Зображення після застосування медіанного фільтра з вікном 3×3 . (с) Зображення після застосування медіанного фільтра з DRID ($s = 3, \theta = 30$) та вікном 3×3 .

Для визначення наявності імпульса DRID використовує ранг інтенсивності пікселя у варіаційному ряді та різницю між його інтенсивністю і інтенсивністю сусіднього (за рангом) пікселя. Проте цей алгоритм, спирається на певні функціональні правила, тоді як нейромережі можуть навчатися на даних і відтворювати складні залежності між вхідними ознаками і наявністю шуму, які людині важко передбачити або формалізувати.

У даній роботі ми використали дійснозначний багатошаровий персептрон у ролі детектора імпульсів. Для фільтрації, як і у [3], ми застосували медіанний фільтр. Варто зазначити, що медіанний фільтр може бути замінений на більш ефективний метод, а експерименти з пов'язані з цим можуть стати предметом наступних досліджень.

Нейронна мережа вже використовувалася як детектор у роботі [4], де на її вхід подавалися характеристики локального оточення пікселя (Gray-Level Difference, Average Background Difference та Accumulation Complexity Difference). Фільтрація, за необхідності, виконувалася за допомогою складного двоетапного процесу. У нашій роботі на вхід MLP подаються безпосередньо інтенсивності пікселів локального оточення, включно з оброблюваним пікселем. Завдяки здатності нейромереж навчатися на даних і відтворювати складні функціональні залежності між множиною входів і виходів, ми очікували, що мережа зможе ефективно визначати наявність імпульсу для заданого набору вхідних інтенсивностей. Нижче наведено запропонований нами алгоритм фільтрації імпульсного шуму з використанням детектору імпульсів, що функціонує на основі MLP (алг. 1).

Algorithm 1 Фільтрація імпульсного шуму з використанням детектора імпульсів на основі MLP

Require: I : Вхідне зображення

Require: w : Розмір вікна

Require: MLP: MLP (детектор імпульсів)

Ensure: I_{filtered} : Відфільтроване зображення

Procedure:

```

1: Розширити зображення:  $\tilde{I} \leftarrow \text{reflect\_pad}(I, w)$ 
2: Ініціалізувати вихідне зображення:  $I_{\text{filtered}} \leftarrow 0$ 
3: for  $p(i, j) \in I$  do
4:   Отримати окіл пікселя  $p(i, j)$ :  $P \leftarrow \text{window}(\tilde{I}, i, j, w)$ 
5:   Нормалізувати інтенсивності:  $\hat{P} \leftarrow \frac{1}{255}P$ 
6:   Визначити імовірність наявності імпульса у пікселі  $p(i, j)$ :  $d \leftarrow \text{MLP}(\hat{P})$ 
7:   if  $d \geq 0.5$  then
8:     Застосувати медіанний фільтр:  $I_{\text{filtered}}[i, j] \leftarrow \text{median}(P)$ 
9:   else
10:    Взяти центральне значення вікна:  $I_{\text{filtered}}[i, j] \leftarrow \text{center}(P)$ 
11:   end if
12: end for
13: return  $I_{\text{filtered}}$ 

```

2.3. Проведені експерименти та отримані результати. Фактично задача розробки детектора імпульсів за допомогою MLP у нашому випадку зводиться до задачі класифікації з двома класами. Нейромережі часто використовуються для розв'язання задач класифікації [20–22], що робить їх природним вибором для такого типу проблем. На вхід нейромережі подається патч зображення, а вихід нейромережі вказує, до якого класу належить цей патч — “містить імпульс” або “не містить імпульс”. В даній роботі ми провели експерименти з кількома топологіями MLP: 9-8-1 (NN-9-8-1), 9-16-1 (NN-9-16-1), 9-32-16-1 (NN-9-32-16-1), де перше число вказує на кількість входів, останнє — кількість нейронів у вихідному шарі, а інші числа — кількість нейронів у прихованих шарах. В ролі активаційної функції використовувалася сигмоїдальна функція

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Для тренування MLP ми використали навчальну множину, що складалася з 80 000 навчальних зразків. Для її побудови ми використали 400 зображень у відтінках сірого. З кожного зображення було вибрано по 200 фрагментів (патчів) розміру 3×3 і сформовано множину P . Розмір патчу відповідає розміру вікна (локальним оточенням пікселя, що обробляється), який ми використовували під час фільтрації. Множина P була розбита на три підмножини P_s , P_p , P_c , які задовольняли умову

$$P_s \cap P_p \cap P_c = \emptyset.$$

P_s , P_p - множини патчів, де інтенсивність центрального пікселя замінена імпульсом інтенсивності відповідно 0 та 255. P_c - патчі, де інтенсивність центрального

пікселя залишилися без змін. Таким чином, використовуючи P_s , P_p та P_c , було сформовано множину вхідних ознак X

$$X = \left\{ \text{vec} \left(\frac{1}{255} p_s \right) \mid p_s \in P_s \right\} \cup \left\{ \text{vec} \left(\frac{1}{255} p_p \right) \mid p_p \in P_p \right\} \cup \left\{ \text{vec} \left(\frac{1}{255} p_c \right) \mid p_c \in P_c \right\}$$

Важливо зазначити, що елементи множини ознак повинні бути нормалізовані. Це прискорює збіжність навчання та дозволяє уникнути появи екстремальних значень ваг нейронів [23].

Множина міток Y , елементи якої позначають наявність імпульсу у відповідному елементі множини X , була сформована наступним чином.

$$Y = \left\{ l = \begin{cases} 1, & p \in P_s \cup P_p, \\ 0, & p \in P_c \end{cases} \mid p \in P_s \cup P_p \cup P_c \right\}$$

Навчальна множина мала вигляд

$$T = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Аналогічним чином була сформована тестова множина з 2 000 елементів для оцінки узагальнюючих можливостей нейромережі після тренування.

Для тренування MLP ми використовували алгоритм градієнтного спуску [24, 25]. У ролі функції втрат було обрано Binary Cross Entropy [23]. Нижче, на рис. 2, рис. 3 та рис. 4, наведено криві збіжності процесів тренування для нейромереж NN-9-8-1, NN-9-16-1, NN-9-32-16-1.

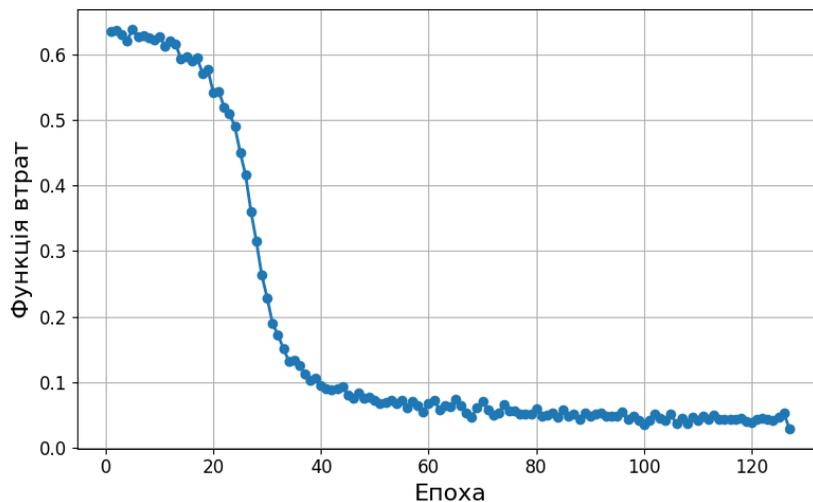


Рис. 2. Значення функції втрат протягом навчання NN-9-8-1.

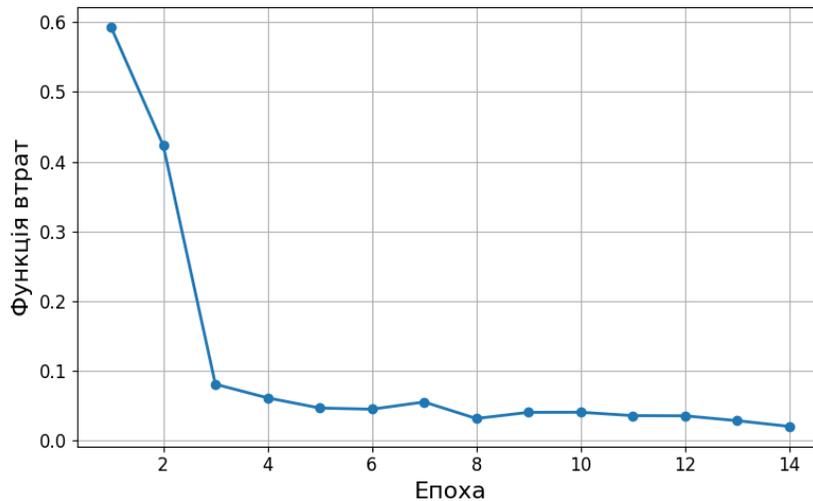


Рис. 3. Значення функції втрат протягом навчання NN-9-16-1.

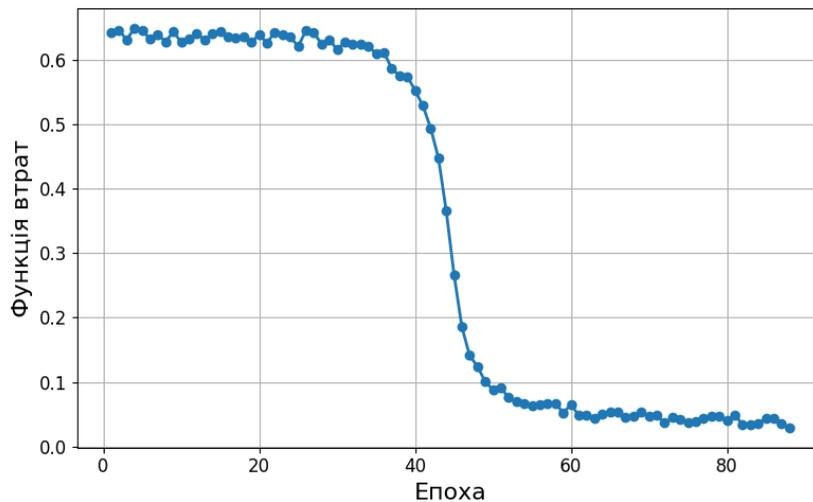


Рис. 4. Значення функції втрат протягом навчання NN-9-32-16-1.

У таблиці таблиця.1 наведено результати класифікації на тестовій множині для MLP NN-9-8-1, NN-9-16-1 та NN-9-32-16-1.

Таблиця 1.

Результати класифікації на тестовій множині

MLP	Відсоток вірних класифікацій
NN-9-8-1	98.80%
NN-9-16-1	98.75%
NN-9-32-16-1	98.50%

Для оцінки якості фільтрації ми використали зображення у відтінках сірого, спотворені імпульсним шумом з інтенсивністю 1%, 2%, 5% та 10%. У таблицях таблиця 3, таблиця 4, таблиця 5 та таблиця 6 наведено результати фільтрації

зображень з використанням медіанного фільтра, медіанного фільтра з DRID та медіанного фільтра з детектором імпульсів на основі MLP. Параметри використані при фільтрації з використанням DRID наведено у таблиці таблиця 2.

Таблиця 2.

Параметри використані при фільтрації з допомогою медіанного фільтру з DRID

	Параметр s	Параметр θ
DRID-1	2	10
DRID-2	2	30
DRID-3	2	40
DRID-4	3	10
DRID-5	3	30
DRID-6	3	40

Варто зазначити, що ефективність DRID залежить від вибору значень параметрів s та θ [3]. Тому значення PSNR для фільтрованого зображення, наведені у таблицях, не слід розглядати як максимально можливі.

Нижче, на рисунку рис.5 наведено результати фільтрації імпульсного шуму з використанням медіанного фільтра з запропонованим нами детектором на основі MLP.

Таблиця 3.

Результати фільтрації зображень спотворених імпульсним шумом з інтенсивністю 1%. Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Train station	Music hall	Big Ben	Cambridge	Gaudi bldg
Original PSNR	24.6441	25.0031	24.1192	25.1990	24.8652
Median	32.1351	27.0244	25.6846	24.9441	26.5636
DRID-1	37.8404	31.3186	30.1111	31.4891	30.6429
DRID-2	40.8078	35.4967	34.1373	37.6866	35.5688
DRID-3	40.8403	36.8739	34.7250	37.8162	36.8870
DRID-4	36.2196	30.1113	28.6139	29.5223	29.2626
DRID-5	39.5110	34.3407	32.3594	33.8274	34.2602
DRID-6	40.0281	35.9018	33.2208	34.3771	35.8527
NN-9-8-1	41.4615	34.8223	35.9079	38.7457	41.0830
NN-9-16-1	42.1411	35.1681	36.8628	39.0409	41.9346
NN-9-32-16-1	41.3782	34.7464	35.8309	38.4007	40.5943
	Barcelona	Sailboat	Manhattan	Airplane	Fighter-jet
Original PSNR	24.8859	25.5194	25.3904	25.4473	24.8772
Median	26.0578	31.4956	28.0420	32.1341	29.8124
DRID-1	30.6036	36.1045	32.8420	37.3624	42.3465
DRID-2	35.5865	41.0707	37.7995	40.5109	46.8949
DRID-3	36.5862	42.8364	39.0500	40.8437	43.5867
DRID-4	29.0568	35.1838	31.5789	35.7244	37.5661
DRID-5	33.8078	40.3582	36.3008	39.0730	39.7143
DRID-6	35.0929	42.2652	37.6910	39.6870	38.9691
NN-9-8-1	42.1587	46.3799	40.3112	41.2604	48.9999
NN-9-16-1	42.7841	47.3229	41.2441	42.2156	48.9914
NN-9-32-16-1	41.9523	46.1453	40.2306	41.2365	49.0104

Таблиця 4.

Результати фільтрації зображень спотворених імпульсним шумом з інтенсивністю 2%. Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Train station	Music hall	Big Ben	Cambridge	Gaudi bldg
Original PSNR	21.6876	22.1453	21.2121	22.0866	21.8731
Median	32.0418	26.9435	25.6039	24.8971	26.5045
DRID-1	37.4427	31.0599	29.9271	31.0618	30.4103
DRID-2	39.3248	34.5345	33.2272	35.3194	34.3300
DRID-3	38.7953	35.4753	33.1266	34.9228	34.9131
DRID-4	35.9958	29.9252	28.4359	29.2898	29.1533
DRID-5	38.3993	33.6304	31.6860	32.8953	33.5154
DRID-6	38.3128	34.8041	31.9850	33.0332	34.5163
NN-9-8-1	40.8015	34.3239	35.2122	37.1234	39.4133
NN-9-16-1	41.4179	34.6065	36.0913	37.4089	39.8895
NN-9-32-16-1	40.6120	34.2715	35.0938	36.8712	39.0311
	Barcelona	Sailboat	Manhattan	Airplane	Fighter-jet
Original PSNR	22.0036	22.5378	22.2957	22.4792	21.7128
Median	26.0126	31.4227	28.0151	32.0875	29.8099
DRID-1	30.4669	35.8335	32.6205	36.5960	39.8593
DRID-2	34.6042	39.8374	36.7555	38.7788	41.7740
DRID-3	34.9006	40.9085	37.0854	38.6851	39.3514
DRID-4	28.9507	35.0133	31.4453	35.6186	37.0993
DRID-5	33.1380	39.5159	35.5915	38.5478	38.9573
DRID-6	33.8533	40.8683	36.2559	38.8022	37.6095
NN-9-8-1	39.9172	44.4606	39.1770	40.6942	44.4789
NN-9-16-1	40.2501	45.2349	39.9357	41.6774	44.5706
NN-9-32-16-1	39.7376	44.2772	39.0705	40.7354	44.5116

Таблиця 5.

Результати фільтрації зображень спотворених імпульсним шумом з інтенсивністю 5%. Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Train station	Music hall	Big Ben	Cambridge	Gaudi bldg
Original PSNR	17.7030	18.1767	17.1963	18.2309	18.0893
Median	31.6463	26.7030	25.3704	24.7088	26.2786
DRID-1	32.9416	29.6469	28.4657	29.3161	29.1919
DRID-2	33.0411	31.5143	29.8021	31.1893	31.2794
DRID-3	32.5115	31.6801	29.1146	30.5669	31.1474
DRID-4	34.9737	29.3930	27.8882	28.6216	28.7655
DRID-5	35.7759	32.1417	29.8856	31.0900	32.0207
DRID-6	34.9617	32.6401	29.3921	30.6916	32.2107
NN-9-8-1	38.7634	33.1451	33.2000	34.1343	35.9994
NN-9-16-1	39.1516	33.2715	33.6558	34.4132	36.1626
NN-9-32-16-1	38.5109	33.0455	32.9630	33.8839	35.7369
	Barcelona	Sailboat	Manhattan	Airplane	Fighter-jet
Original PSNR	17.9331	18.5119	18.1935	18.4725	17.9182
Median	25.7664	31.1572	27.8493	31.6658	29.7373
DRID-1	28.9639	32.9477	30.9493	33.3332	34.4771
DRID-2	30.8298	34.4232	32.8445	33.6437	34.9447
DRID-3	30.5090	34.5414	32.4977	33.2417	33.5173
DRID-4	28.4670	34.3454	30.8710	34.7098	35.9267
DRID-5	31.3237	37.6393	33.8551	35.9544	37.3125
DRID-6	31.2535	38.1673	33.6933	35.4428	35.1229
NN-9-8-1	35.5448	41.1039	36.7064	38.6033	40.3361
NN-9-16-1	35.6245	41.2995	37.0755	38.9916	39.8543
NN-9-32-16-1	35.3654	40.8014	36.5474	38.5553	40.3123

Таблиця 6.

Результати фільтрації зображень спотворених імпульсним шумом з інтенсивністю 10%. Найкращі результати виділено жирним шрифтом.

	Train station	Music hall	Big Ben	Cambridge	Gaudi bldg
Original PSNR	14.7160	15.0969	14.2537	15.2418	15.0126
Median	30.6660	26.2891	24.9287	24.2843	25.7855
DRID-1	26.6529	25.5559	24.6214	25.4911	25.3757
DRID-2	26.4626	26.0390	24.8144	25.9032	25.8623
DRID-3	26.1999	25.9378	24.2848	25.5011	25.6916
DRID-4	32.2368	28.1461	26.7907	27.1663	27.6458
DRID-5	31.8959	29.7257	27.6303	28.3756	29.3767
DRID-6	31.0759	29.6138	26.7481	27.7837	29.1599
NN-9-8-1	35.5625	31.4938	30.8181	30.9266	32.6477
NN-9-16-1	34.7107	31.0276	30.7771	30.8625	32.3106
NN-9-32-16-1	35.1887	31.3314	30.4812	30.6800	32.4517
	Barcelona	Sailboat	Manhattan	Airplane	Fighter-jet
Original PSNR	14.8791	15.5213	15.2317	15.3749	14.8668
Median	25.2318	30.7108	27.4804	30.6704	29.3641
DRID-1	25.1299	27.1211	26.3760	26.9828	26.8923
DRID-2	25.5683	27.3486	26.8458	26.8465	26.9729
DRID-3	25.2150	27.3193	26.5744	26.6017	26.4996
DRID-4	27.2231	32.6137	29.5507	32.0709	32.9223
DRID-5	28.7394	34.0525	31.2739	32.0079	33.6433
DRID-6	28.1651	34.0000	30.6470	31.2660	31.7380
NN-9-8-1	32.0707	37.6904	34.1294	35.2257	36.7062
NN-9-16-1	31.6688	36.2554	34.0423	34.9562	35.2570
NN-9-32-16-1	31.8047	37.2524	33.8467	34.8894	36.3704

Варто зауважити, що зі збільшенням інтенсивності імпульсного шуму, ефективність детектора імпульсів зменшується. І PSNR фільтрованого зображення наближається до значень, які можна отримати за допомогою медіанного фільтра. Це можна пояснити значною кількістю пікселів, що містять імпульс, і відповідно високою частотою спрацювання детектора. Для прикладу нижче (таблиця 7) наведено результати фільтрації імпульсного шуму з інтенсивністю 40% із використанням медіанного фільтра та медіанного фільтра з детектором на основі NN-9-8-1.

Таблиця 7.

Результати фільтрації зображень спотворених імпульсним шумом з інтенсивністю 40%.

	Train station	Music hall	Big Ben	Cambridge	Gaudi bldg
Original PSNR	8.6605	9.0690	8.2019	9.2143	8.9701
Median	18.2058	17.7856	16.8603	17.2202	17.6543
NN-9-8-1	18.7138	18.8040	17.4081	18.4329	18.6020
	Barcelona	Sailboat	Manhattan	Airplane	Fighter-jet
Original PSNR	8.8512	9.4792	9.1946	9.3932	8.8574
Median	17.2905	18.9436	18.1914	18.7520	18.2961
NN-9-8-1	18.1915	19.9829	19.1855	19.7338	18.9506

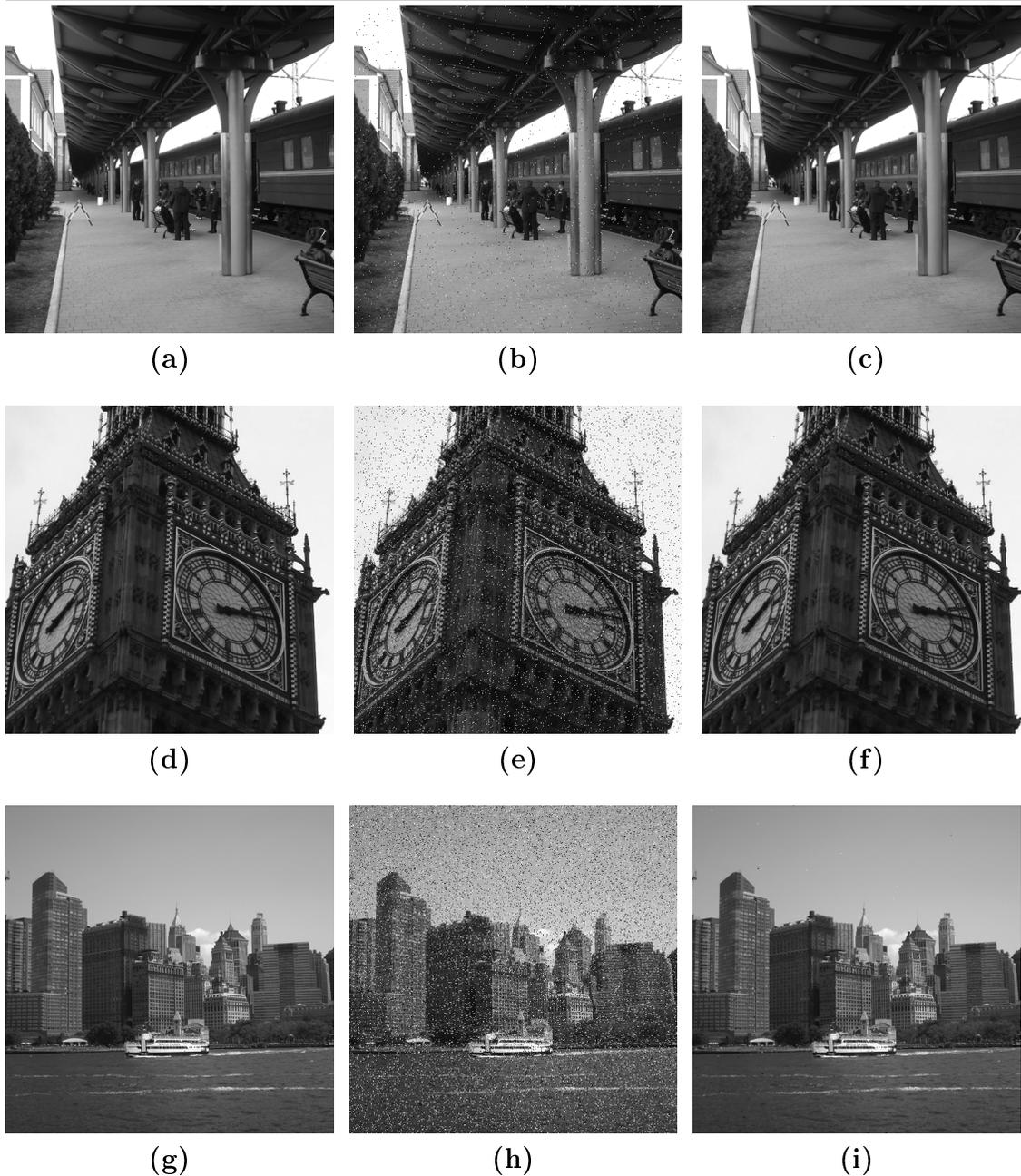


Рис. 5. (а) - ідеальне зображення, (b) - зашумлене зображення (імпульсний шум 1%), (c) - відфільтроване зображення NN-9-8-1, (d) - ідеальне зображення, (e) - зашумлене зображення (імпульсний шум 5%), (f) - відфільтроване зображення NN-9-16-1, (g) - ідеальне зображення, (h) - зашумлене зображення (імпульсний шум 10%), (i) - відфільтроване зображення NN-9-32-16-1

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. Спираючись на результати проведених експериментів, можна зробити висновок, що багатошаровий перцептрон (MLP) може бути використаний як ефективний детектор імпульсного шуму. Результати фільтрації, досягнуті за допомогою цього детектора, наближаються, а в деяких випадках перевищують показники, отримані із застосуванням фільтру з детектором DRID. Проте варто також відзначити,

що ефективність детектора знижується при високій інтенсивності імпульсного шуму (40% та більше).

Було продемонстровано, що навіть нейромережа, яка складається з відносно невеликої кількості нейронів, здатна досить ефективно розпізнавати наявність імпульсів у пікселях зображення. Це можна пояснити фундаментальною здатністю нейромережі будувати складні нелінійні функціональні зв'язки між вхідними даними та виходом.

Подальші дослідження в цьому напрямку можуть включати використання в ролі детектора SVM, MLMVN та інших типів нейромереж, а також дослідження інших методів безпосередньо фільтрації імпульсу.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Товт Ю. О.: Написання — оригінальний проєкт, концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, методологія, Брила А. Ю.: Написання — рецензування та редагування, супервізія, концептуалізація, формальний аналіз, методологія.

Авторські права ©



(2026). Товт Ю. О., Брила А. Ю.
Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Gonzalez, R.C.; Woods, R.E. Digital Image Processing; Fourth, global edition.; Pearson Education: New York, New York, 2018; ISBN 978-1-292-22304-9.
2. Jain, A.K. Fundamentals of Digital Image Processing; Prentice Hall information and system sciences series; 17. [repr.]; Prentice Hall: Englewood Cliffs, NJ, 2000; ISBN 978-0-13-336165-0.
3. Aizenberg, I.; Butakoff, C. Effective Impulse Detector Based on Rank-Order Criteria. *IEEE Signal Process. Lett.* 2004, 11, 363–366, doi:10.1109/LSP.2003.822925.
4. Sheng-Fu Liang; Shih-Mao Lu; Jyh-Yeong Chang; Chin-Teng Lin. A Novel Two-Stage Impulse Noise Removal Technique Based on Neural Networks and Fuzzy Decision. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2008, 16, 863–873, doi:10.1109/TFUZZ.2008.917297.
5. Mafi, M.; Martin, H.; Cabrerizo, M.; Andrian, J.; Barreto, A.; Adjouadi, M. A Comprehensive Survey on Impulse and Gaussian Denoising Filters for Digital Images. *Signal Processing* 2019, 157, 236–260, doi:10.1016/j.sigpro.2018.12.006.
6. Burger, H.C.; Schuler, C.J.; Harmeling, S. Image Denoising with Multi-Layer Perceptrons, Part 1: Comparison with Existing Algorithms and with Bounds 2012.
7. Burger, H.C.; Schuler, C.J.; Harmeling, S. Image Denoising with Multi-Layer Perceptrons, Part 2: Training Trade-Offs and Analysis of Their Mechanisms 2012.
8. Dabov, K.; Foi, A.; Katkovnik, V.; Egiazarian, K. Image Denoising by Sparse 3-D Transform-Domain Collaborative Filtering. *IEEE Trans. Image Process.* 2007, 16, 2080–2095, doi:10.1109/TIP.2007.901238.
9. Keohane, O.; Aizenberg, I. Impulse Noise Filtering Using MLMVN. In Proceedings of the 2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN); IEEE: Glasgow, United Kingdom, July 2020; pp. 1–8.
10. Aizenberg, I.; Butakoff, C.; Paliy, D. Impulsive Noise Removal Using Threshold Boolean Filtering Based on the Impulse Detecting Functions. *IEEE Signal Process. Lett.* 2005, 12, 63–66, doi:10.1109/LSP.2004.838198.
11. Feng, X.; Huang, Q.; Li, X. Ultrasound Image De-Speckling by a Hybrid Deep Network with Transferred Filtering and Structural Prior. *Neurocomputing* 2020, 414, 346–355, doi:10.1016/j.neucom.2020.09.002.
12. Kokil, P.; Sudharson, S. Despeckling of Clinical Ultrasound Images Using Deep Residual Learning. *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 2020, 194, 105477, doi:10.1016/j.cmpb.2020.105477.
13. Lee, J.-S. Digital Image Enhancement and Noise Filtering by Use of Local Statistics. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1980, PAMI-2, 165–168, doi:10.1109/TPAMI.1980.4766994.
14. Frost, V.S.; Stiles, J.A.; Shanmugan, K.S.; Holtzman, J.C. A Model for Radar Images and Its Application to Adaptive Digital Filtering of Multiplicative Noise. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1982, PAMI-4, 157–166, doi:10.1109/TPAMI.1982.4767223.
15. Mafi, M.; Izquierdo, W.; Martin, H.; Cabrerizo, M.; Adjouadi, M. Deep Convolutional Neural Network for Mixed Random Impulse and Gaussian Noise Reduction in Digital Images. *IET Image Processing* 2020, 14, 3791–3801, doi:10.1049/iet-ipr.2019.0931.
16. Solomon, C.; Brckon, T. Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab; Wiley-Blackwell: Chichester, 2011; ISBN 978-0-470-84472-4.
17. Smolka, B. Efficient Technique of Impulsive Noise Detection and Replacement in Color Digital Images. In Sensor Networks and Signal Processing; Peng, S.-L., Favorskaya, M.N., Chao, H.-C., Eds.; Springer Singapore: Singapore, 2021; Vol. 176, pp. 171–185 ISBN 978-981-15-4916-8.
18. Yu, C.; Hou, L.-Z. Realization of a Real-Time Image Denoising System for Dashboard Camera Applications. *IEEE Trans. Consumer Electron.* 2022, 68, 181–190, doi:10.1109/TCE.2022.3175796.
19. Li, C.; Li, J.; Luo, Z. An Impulse Noise Removal Model Algorithm Based on Logarithmic Image Prior for Medical Image. *SIViP* 2021, 15, 1145–1152, doi:10.1007/s11760-020-01842-w.
20. Kotsovsky, V.; Geche, F.; Batyuk, A. Bithreshold Neural Network Classifier. In Proceedings of the 2020 IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT); IEEE: Zbarazh, Ukraine, 23 September 2020; pp. 32–35.
21. Krajewska-Śpiewak, J.; Lasota, I.; Kozub, B. Application of Classification Neural Networks for Identification of Damage Stages of Degraded Low Alloy Steel Based on Acoustic Emission Data Analysis. *Arch. Civ. Mech. Eng.* 2020, 20, 109. doi:10.1007/s43452-020-00112-3.

22. Shi, Y.; Xu, W.; Zhang, J.; Li, X. Automated Classification of Ultrasonic Signal via a Convolutional Neural Network. *Applied Sciences* 2022, 12, 4179. doi:10.3390/app12094179.
23. Goodfellow, I.; Bengio, Y.; Courville, A. Deep Learning; Adaptive computation and machine learning; The MIT Press: Cambridge, Mass, 2016; ISBN 978-0-262-03561-3.
24. Deisenroth, M.P.; Faisal, A.A.; Ong, C.S. Mathematics for Machine Learning; Cambridge University Press: Cambridge, UK New York, NY, 2020; ISBN 978-1-108-47004-9.
25. Shalev-Shwartz, S.; Ben-David, S. Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms; 1st ed.; Cambridge University Press, 2014; ISBN 978-1-107-05713-5.

Tovt Yu. O., Bryla A. Yu. Impulse Noise Filtering In Digital Images Using A Neural-Network-Based Impulse Detector.

Today, digital images are widely used in many fields. Their analysis is an extremely important task, and therefore noise filtering plays a significant role. This work examines impulse noise removal in images using a median filter combined with an impulse detector based on a real-valued neural network. Experiments on impulse noise filtering were conducted, and the obtained results were compared with several existing impulse noise filtering methods.

Keywords: neural networks, digital images, noise filtering, impulse noise.

Отримано: 01.12.2025

Прийнято: 21.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).232-242](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).232-242)Г. Г. Цегелик¹, П. С. Сеньо², М. І. Глебена³, М. Г. Цегелик⁴

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук

hryhoriy.tsehelyk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4934-3181>

² Львівський національний університет імені Івана Франка,
завідувач кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук

PetroSny@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9320-7638>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>

⁴ ПП «Бінар» м. Львів, Україна,

директор

M.Tsehelyk@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9413-0769>

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ НА ОСНОВІ ЙОГО СТРУКТУРНОЇ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

У роботі розглянуто актуальну проблему розв'язування задач дискретної оптимізації, зокрема задач булевого лінійного програмування. Запропоновано графоаналітичний підхід до знаходження оптимального плану, що базується на структурній інтерпретації простору розв'язків через побудову впорядкованого двійкового дерева. Описано методику формування рівнів дерева, де кожна гілка відповідає вибору значення змінної (0 або 1), а вершини впорядковані згідно з обраною стратегією індексації. Розроблено комплексний алгоритм, який складається з двох етапів: швидкого знаходження початкового допустимого розв'язку (рекорду) та ітераційного пошуку глобального оптимуму. Особливістю методу є використання правил відсікання безперспективних гілок та виявлення «прямих» (безальтернативних) шляхів, що дозволяє суттєво зменшити обчислювальну складність порівняно з повним перебором. Ефективність запропонованого підходу проілюстровано на прикладах.

Ключові слова: математична модель, булеве програмування, двійкове дерево рішень, структурна інтерпретація, наближений та оптимальний розв'язки задачі.

1. Вступ. Булеве програмування є важливим класом задач з дискретного програмування, до якого належать численні задачі дослідження операцій [3, 5, 8, 11], такі задачі як: розміщення виробництва, про призначення [2], фінансування інвестиційних проєктів, фінансування видів діяльності підприємства та інші [6, 7, 10]. Для розв'язування задачі можна використовувати як класичні методи, такі як метод гілок та меж [4], так і спеціалізовані, наприклад, адитивний алгоритм Балаша, який дає можливість будувати двійкове дерево рішень з ефективним відсіканням нерентабельних варіантів [1]. У роботі розглянуто структурну інтерпретацію задачі булевого програмування через побудову двійкового дерева

рішень [9]. На основі запропонованої моделі розроблено алгоритм для визначення початкового допустимого розв'язку та пошуку глобального оптимуму.

2. Основний результат. Булеве програмування є потужним математичним інструментом, що дозволяє формалізувати та розв'язувати задачі вибору з дискретними рішеннями. Розглянемо математичну модель задачі булевого програмування:

$$L = \sum_{i=1}^m p_i x_i \rightarrow \max,$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^m a_{j,i} x_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де, m — кількість операцій (або видів робіт); n — кількість різних ресурсів, що використовуються для виконання операцій; $a_{j,i}$ — кількість одиниць j -го ресурсу, необхідних для виконання i -тої операції; p_i — прибуток від виконання i -тої операції; b_j — запас j -го ресурсу;

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо виконується } i \text{ — та операція;} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти цільової функції та обмежень є додатними, що характерно для багатьох реальних задач.

Розв'язування задачі будемо інтерпретувати у вигляді двійкового дерева рішень, яке має m рівнів. Кожній вершині дерева будемо ставити у відповідність значення 0 або 1.

Побудова дерева розв'язків відбувається поетапно від кореня до кінцевих вершин. При цьому змінним присвоюються значення у зворотному порядку їх нумерації: вершина першого рівня V_1 відповідає вибору змінної x_m , другого рівня — x_{m-1} , і так далі до змінної x_1 , на останньому рівні. Перевірка виконання умов задачі здійснюється на кожному кроці для відповідного часткового набору змінних.

Кожному шляху від кореня дерева до кінцевих вершин ставиться у відповідність вектор змінних $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Вершини дерева V_k ($k = 1, 2, \dots, m$) на кожному рівні відповідають прийняттю рішення щодо значення змінної x_{m-k+1} .

Якщо на кроці k обмеження задачі дозволяють вибір як 0, так і 1, то від вершини розгалужуються дві гілки: ліва (відповідає $x_{k+1} = 1$) та права (відповідає $x_{k+1} = 0$). Якщо ж через обмеження задачі змінна може набувати лише одного значення, формується єдина гілка, що веде до відповідної вершини наступного рівня.

Приклад 1. *Нехай задача має вигляд:*

$$L = 10x_1 + 20x_2 + 12x_3 + 15x_4 + 25x_5 + 14x_6 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 12; \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Тоді частина дерева з п'ятьма шляхами, що йдуть від кореня дерева до кінцевих вершин, має вигляд рис. 1.

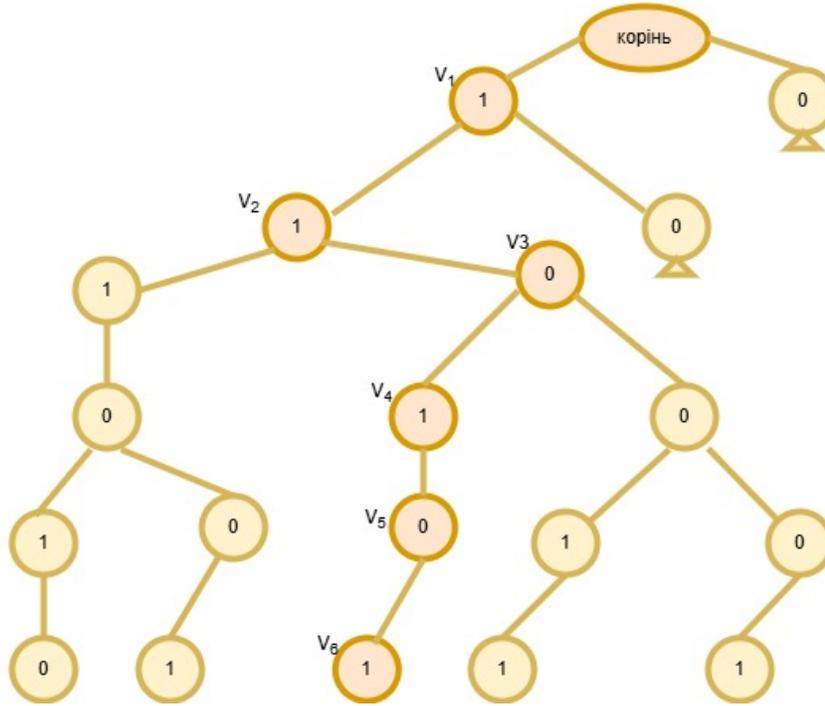


Рис. 1. Інтерпретація задачі у вигляді двійкового дерева.

Вершинам V_1, V_2, \dots, V_6 дерева, що лежать на шляху, який йде від кореня дерева до вершини V_6 , відповідає частковий розв'язок $X = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L = 61$.

Вершинам дерева, які лежать на крайньому лівому шляху відповідає частковий розв'язок $X = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$, для якого $L = 74$. Такий частковий розв'язок береться за початковий при відшуванні оптимального розв'язку.

Розглянемо алгоритм відшування початкового розв'язку задачі, який відповідає послідовності вершин, що лежать на крайньому лівому шляху.

Алгоритм відшування початкового розв'язку задачі

Перший крок: покладаємо $x_m = 1$, $S_{j,m} = a_{j,m}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Другий крок: визначаємо

$$x_{m-1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,m} + a_{j,m-1} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

і покладаємо $S_{j,m-1} = \begin{cases} S_{j,m} + a_{j,m-1}, & \text{якщо } x_{m-1} = 1; \\ S_{j,m}, & \text{якщо } x_{m-1} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

Третій крок: визначаємо

$$x_{m-2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,m-1} + a_{j,m-2} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

і покладаємо $S_{j,m-2} = \begin{cases} S_{j,m-1} + a_{j,m-2}, & \text{якщо } x_{m-2} = 1; \\ S_{j,m-1}, & \text{якщо } x_{m-2} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

І так далі ...

Нехай, на k -му кроці ($k = 4, 5, \dots, m-1$) знайдено

$$x_{m-(k-1)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,m-(k-2)} + a_{j,m-(k-1)} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases},$$

і визначено $S_{j,m-(k-1)} = \begin{cases} S_{j,m-(k-2)} + a_{j,m-(k-1)}, & \text{якщо } x_{m-(k-1)} = 1, \\ S_{j,m-(k-2)}, & \text{якщо } x_{m-(k-1)} = 0, \end{cases}$ для всіх $j = 1, 2, \dots, n$.

Тоді при $k = m$ одержуємо

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,2} + a_{j,1} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Проілюструємо даний алгоритм на прикладі 1.

Перший крок:

Покладаємо $x_6 = 1$; $S_{1,6} = 5$, $S_{2,6} = 3$.

Визначаємо

$$S_{1,5} = S_{1,6} + a_{1,5} = 5 + 6 = 11,$$

$$S_{2,5} = S_{2,6} + a_{2,5} = 3 + 5 = 8.$$

Другий крок:

Визначаємо

$$x_5 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,5} \leq 20, \quad S_{2,5} \leq 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_5 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,4} = S_{1,5} + a_{1,4} = 14,$$

$$S_{2,4} = S_{2,5} + a_{2,4} = 10.$$

Третій крок:

Визначаємо

$$x_4 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,4} \leq 20, \quad S_{2,4} \leq 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_4 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,3} = S_{1,4} + a_{1,3} = 18,$$

$$S_{2,3} = S_{2,4} + a_{2,3} = 13.$$

Четвертий крок:

Визначаємо

$$x_3 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,3} \leq 20, \quad S_{2,3} \leq 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_3 = 0$.

Покладаємо

$$S_{1,2} = S_{1,4} + a_{1,2} = 19,$$

$$S_{2,2} = S_{2,4} + a_{2,2} = 12;$$

П'ятий крок:

Визначаємо

$$x_2 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,2} \leq 20, \quad S_{2,2} \leq 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_2 = 1$.

Покладаємо

$$S_{1,1} = S_{1,2} + a_{1,1} = 21,$$

$$S_{2,1} = S_{2,2} + a_{2,1} = 13;$$

Шостий крок:

Визначаємо

$$x_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{1,1} \leq 20, \quad S_{2,1} \leq 12, \\ 0, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases}$$

одержуємо $x_1 = 0$.

Отже, частковим розв'язком є: $X = (0, 1, 0, 1, 1, 1)$, для якого $L = 74$.

Використовуючи алгоритм відшукування початкового розв'язку, розглянемо алгоритм пошуку оптимального розв'язку. При розгляді алгоритму вважатимемо, що двійкове дерево рішень є побудованим.

Алгоритм пошуку оптимального розв'язку. Розглядаємо крайній лівий шлях від кореня дерева до кінцевої вершини. Визначаємо відповідний йому розв'язок X_1 та обчислюємо значення цільової функції L_1 . Вершини дерева, які лежать на даному шляху, від яких відходить гілка вправо в порядку спадання номерів рівнів, позначимо через V_1, V_2, \dots, V_k . Нехай r_1, r_2, \dots, r_k номери рівнів, на яких знаходяться відповідно дані вершини. Використовуючи алгоритм знаходження початкового часткового розв'язку, одержуємо такі значення S_{j,r_s} ($s = 1, 2, \dots, k$), які відповідають вершинам V_s : вершині V_k відповідає значення $S_{j,r_k} = S_{j,m} = a_{j,m}$, $j = 1, 2, \dots, n$; вершині V_i ($i = k - 1, k - 2, \dots, 1$) відповідає $S_{j,r_i} = S_{j,r_{i+1}} + a_{j,r_i}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Розглядаємо в порядку слідування всі шляхи, що йдуть від вершин V_1, V_2, \dots, V_k до відповідних кінцевих вершин і на кожному з них фіксуємо вершини, від яких відходить гілка вправо. Першою вершиною таких гілок є вершина зі значенням 0. Якщо вершина від якої відходить гілка вправо знаходиться на r -му рівні, якій відповідає $S_{j,r}$, то це значення буде відповідати і першій вершині правої гілки.

Першу вершину правої гілки, що відходить із вершини V_1 позначимо через V'_{r_1+1} , якій відповідає значення S_{j,r_1} . З даної вершини відходить низка шляхів до відповідних кінцевих вершин. В порядку слідування шляхів знаходимо компоненти часткових розв'язків, які відповідають послідовності їх вершин.

Перехід від довільної вершини V_i , де

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i} = S_{j,i+1} + a_{j,i} \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{якщо } S_{j,i} = S_{j,i+1}, \end{cases}$$

до вершини V_{i+1} вздовж лівої, правої чи прямої гілки відбувається за схемою:

$$\text{покладаємо } S_{j,i+1} = \begin{cases} S_{j,i} + a_{j,i+1}, & \text{якщо } x_i = 1; \\ S_{j,i}, & \text{якщо } x_i = 0, \end{cases} \quad \text{для всіх } j = 1, 2, \dots, n \text{ і ви-}$$

$$\text{значаємо } x_{i+1} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i} + a_{j,i+1} \leq b_j \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Зауважимо, якщо вершина V_i знаходиться на l -му рівні, то останні l -компоненти часткових розв'язків, які відповідають послідовності вершин, що лежать на шляхах, які проходять через вершину V_i , є однаковими.

Позначимо через X_2, X_3, \dots, X_{s_1} в порядку слідування часткові розв'язки, які відповідають послідовності вершин, що лежать на відповідних шляхах які проходять через вершину V'_{r_1+1} , а через L_2, L_3, \dots, L_{s_1} значення цільової функції для них.

Нехай першою вершиною правої гілки, що відходить від вершини V_2 є вершина V'_{r_2+1} , якій відповідає значення S_{j,r_2} . З цієї вершини, значення якої 0, відходить певна кількість шляхів до відповідних кінцевих вершин. Знаходимо часткові розв'язки, що відповідають цим кінцевим шляхам, і значення цільової функції для них. Позначимо через $X_{s_1+1}, X_{s_1+2}, \dots, X_{s_2}$ — часткові розв'язки, а $L_{s_1+1}, L_{s_1+2}, \dots, L_{s_2}$ — значення цільової функції для них. І так далі ...

Процес продовжується до вершини V_k включно. Надалі, за необхідності, здійснюється перехід до розгляду гілок правого піддерева.

Таким чином, одержано послідовність часткових розв'язків X_1, X_2, \dots, X_{s_k} і значення цільової функції для них L_1, L_2, \dots, L_{s_k} . Якщо $\max_{1 \leq i \leq s_k} L_i = L_s$, то розв'язком задачі є X_s .

Проілюструємо алгоритм на прикладі 2.

Приклад 2. *Нехай задача має вигляд*

$$L = 30x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 20x_5 + 30x_6 \rightarrow \max,$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 5x_6 \leq 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 3x_6 \leq 17; \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Двійкове дерево рішень для цієї задачі є таким рис. 2

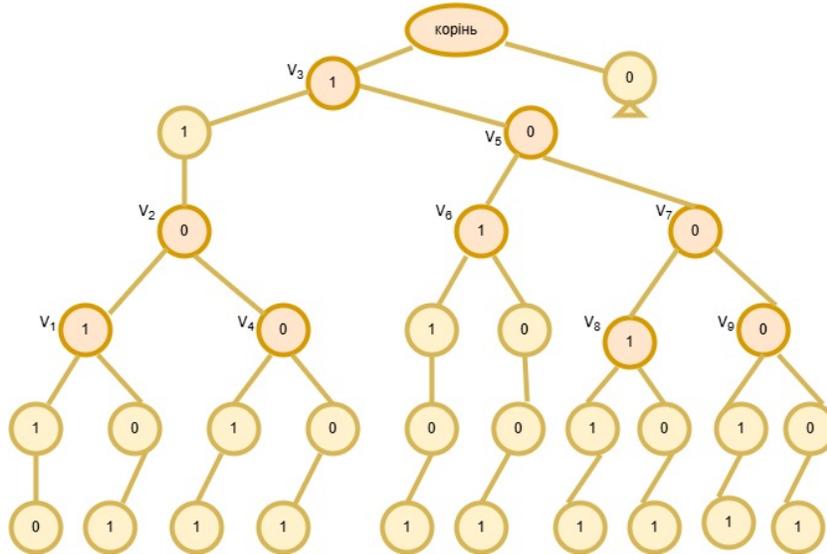


Рис. 2. Двійкове дерево рішень.

Розглянемо ліве піддерево та позначимо через V_1, V_2, \dots, V_9 , вершини дерева, від яких відходить гілка вправо.

Послідовність вершин, які знаходяться на крайньому лівому шляху, що йде від кореня дерева до кінцевої вершини, відповідає частковий розв'язок $X_1 = (0, 1, 1, 0, 1, 1)$, для якого значення цільової функції $L_1 = 95$.

Розглянемо праву гілку, що відходить від вершини V_1 , яка знаходиться на четвертому рівні. Тоді значення компонент часткового розв'язку є такими: $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$. Вершині V_1 відповідає значення $S_{j,3} = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$, то дане значення відповідає і першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_2 = 0$).

Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 10 \\ 12 \end{cases}$ і $S_{j,1} = \begin{cases} 12 \\ 16 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Другим частковим розв'язком є: $X_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L_2 = 100$.

Розглянемо гілку, що відходить вправо від вершини V_2 , яка знаходиться на третьому рівні, тому $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$. Від вершини V_2 до кінцевих вершин відходить два шляхи. Розглянемо перший шлях (ліву гілку).

Вершині V_2 відповідає значення $S_{j,4} = S_{j,5} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$, тому дане значення відповідає і першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_3 = 0$). Тому $S_{j,3} = S_{j,4} = S_{j,5} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$; звідси $S_{j,2} = \begin{cases} 13 \\ 13 \end{cases}$; $x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 15 \\ 17 \end{cases}$; $x_1 = 1$. Третім частковим розв'язком є $X_3 = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$, для якого $L_3 = 105$.

На другому шляху цієї гілки є вершина V_4 значення якої 0 ($x_3 = 0$). Оскільки дана вершина знаходиться на четвертому рівні, то $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 1$. Вершині V_4 відповідає значення $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$. Дане значення буде відповідати і першій вершині правої гілки, що виходить із вершини V_4 .

Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases}$, $x_2 = 0$; $S_{j,1} = \begin{cases} 11 \\ 14 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Четвертим частковим розв'язком є $X_4 = (1, 0, 0, 0, 1, 1)$, для якого $L_4 = 80$.

Розглянемо праву гілку, яка виходить із вершини V_3 , значення якої 1 ($x_6 = 1$), якій відповідає значення $S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Дане значення буде відповідати першій вершині правої гілки, яка виходить із вершини V_3 значення якої 0 ($x_5 = 0$), тобто $S_{j,5} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Якщо розглядати лівий шлях, що відходить від цієї вершини, то одержуємо $S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$, $x_4 = 1$; $S_{j,3} = \begin{cases} 14 \\ 11 \end{cases}$, $x_3 = 1$. Оскільки

$S_{j,2} = \begin{cases} 18 > 16 \\ 14 \end{cases}$, то $x_2 = 0$. Тому $S_{j,2} = S_{j,3} = \begin{cases} 14 \\ 11 \end{cases}$, $x_2 = 0$; і $S_{j,1} = \begin{cases} 16 \\ 15 \end{cases}$, $x_1 = 1$. П'ятим частковим розв'язком є $X_5 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$, для якого $L_5 = 110$.

Розглянемо праву гілку, яка виходить із вершини V_6 . Оскільки дана вершина знаходиться на третьому рівні, то $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Вершині V_6 відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$, то воно відповідає і першій вершині правої гілки, значення

якої 0 ($x_3 = 0$). Отже, $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$. Оскільки $S_{j,2} = \begin{cases} 17 > 16 \\ 12 \end{cases}$, то $x_2 = 0$ і $S_{j,2} = \begin{cases} 13 \\ 9 \end{cases}$. Тоді $S_{j,1} = \begin{cases} 15 \\ 13 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Шостим частковим розв'язком є $X_6 = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$, для якого $L_6 = 90$.

Розглядаємо гілку, яка відходить вправо від вершини V_5 , даній вершині відповідає значення $S_{j,5} = S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$.

Оскільки вершина V_5 знаходиться на другому рівні, то $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Першою вершиною правої гілки є вершина V_7 , значення якої 0 ($x_4 = 0$). Даній вершині відповідає значення $S_{j,4} = S_{j,5} = S_{j,6} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. При розгляді лівого шля-

ху, що відходить від вершини V_7 , одержуємо $S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$, $x_3 = 1$; $S_{j,2} = \begin{cases} 10 \\ 8 \end{cases}$,

$x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 12 \\ 12 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Сьомим частковим розв'язком є $X_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 1)$, для якого $L_7 = 105$.

Розглянемо правий шлях, який відходить від вершини V_8 , якій відповідає значення $S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$. Оскільки вершина V_8 знаходиться на четвертому рівні, то $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$. Від вершини V_8 відходить гілка вправо, перша вершина якої має значення 0 ($x_2 = 0$), якій відповідає значення $S_{j,2} =$

$= S_{j,3} = \begin{cases} 6 \\ 5 \end{cases}$. Тоді $S_{j,1} = \begin{cases} 8 \\ 9 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Восьмим частковим розв'язком є $X_8 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$, для якого $L_8 = 85$.

Від вершини V_7 , якій відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, відходить гілка вправо.

Це значення буде відповідати і першій вершині правої гілки, тобто вершині V_9 , яка має значення 0 ($x_3 = 0$). Вершина V_9 знаходиться на четвертому рівні, тому $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 1$.

Розглядаємо лівий шлях, що виходить із вершини V_9 . Оскільки $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, то $S_{j,2} = \begin{cases} 9 \\ 6 \end{cases}$, $x_2 = 1$; $S_{j,1} = \begin{cases} 11 \\ 10 \end{cases}$, $x_1 = 1$. Дев'ятим частковим розв'язком є $X_9 = (1, 1, 0, 0, 0, 1)$, для якого $L_9 = 85$.

Розглядаємо праву гілку, що виходить із вершини V_9 , якій відповідає значення $S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$. Це значення також відповідає першій вершині правої гілки, значення якої 0 ($x_2 = 0$), та яка виходить із вершини V_9 . Оскільки $S_{j,3} = S_{j,4} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, то $S_{j,2} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$, $S_{j,1} = \begin{cases} 7 \\ 7 \end{cases}$, $x_1 = 1$.

Десятим частковим розв'язком є $X_{10} = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$, для якого $L_{10} = 60$.

Оскільки $\max_{1 \leq i \leq 10} L_i = L_5$, то $X_{\text{оп}} = X_5 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$, для якого $L_{\text{оп}} = 110$.

Можна показати, що значення цільової функції для часткових розв'язків правого піддерева менше за 110, тому воно не розглядається.

Зауваження 1. Гілку з вершини V_9 , та праві відгалуження від вершин V_8 , V_6 , V_4 можна не розглядати через ідентичність їх параметрів. Зокрема, характеристики лівої гілки вершини V_9 дублюють відповідні значення для вершини V_8 .

3. Висновок. У статті розглянуто та обґрунтовано новий комбінаторний підхід до розв'язування задач оптимізації з булевими змінними. Ключовим елементом запропонованої методики є побудова двійкового дерева рішень, структура якого дозволяє ефективно організувати процес галуження та перевірки обмежень. Розроблено алгоритми для відшукування початкового розв'язку та його послідовної оптимізації. Наведені чисельні приклади підтверджують, що запропонований підхід забезпечує знаходження оптимального розв'язку за скінченну кількість кроків, мінімізуючи обчислювальну складність завдяки своєчасному відсіканню недопустимих варіантів.

Конфлікт інтересів

Глебена Мирослава Іванівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Г. Г. Цегелик: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, П. С. Сеньо: формальний аналіз, методологія, написання – оригінальний проект. М. І. Глебена: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання – рецензування та редагування. М. Г. Цегелик: формальний аналіз, написання – рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Цегелик Г. Г., Сеньо П. С., Глебена М. І., Цегелик М. Г. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Balas, E. (1965). An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13(4), 517–546.
2. Burkard, R. E., Dell'Amico, M., & Martello, S. (2009). *Assignment problems*. SIAM.
3. Hnatenko, I. M., Liashenko, V. I., & Manhasarian, A. V. (2013). *Boolean programming: theory and practice*. KNEU.
4. Hooker, J. N. (2000). *Logic-based methods for optimization: combining optimization and constraint satisfaction*. Wiley.
5. Katrenko, A. V. (2004). *Operations research*. Mahnoliia Plius.
6. Katrenko, A. V., & Pasternak, O. V. (2014). System aspects of investment in information technology. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika"*, 805, 402–411.
7. Katrenko, A. V., & Pasternak, O. V. (2017). Mathematical models of investment in information technology. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhnika". Seriia: Informatsiini systemy ta merezhi*.
8. Lavrov, Ye. A., Perkhun, L. P., & Shendryk, V. V. (2017). *Mathematical methods of operations research*. Sumskyi derzhavnyi universytet.
9. Tsehelyk, H. H., & Tsehelyk, M. H. (2025, December 15–17). A new approach to solving

- Boolean programming problems. In *Proceedings of the XII International Scientific and Practical Conference "Global trends in science and education"*, 517–523. Kyiv, Ukraine.
10. Tsehelyk, H. H., Tsehelyk, M. H., Dobuliak, L. P., & Piadko, O. Ya. (2025, September 11–13). Mathematical model of the problem of optimal financing of investment projects and an approximate method of its solution. In *Proceedings of the I International Scientific and Practical Conference "Science, technology and global challenges"*, 251–258. Tokyo, Japan.
 11. Zaichenko, Yu. P. (2005). *Operations research*. Vydavnychiy tsentr "Akademiia".

Tsehelyk H. H., Senio P. S., Hlebena M. I., Tsehelyk, M. H. An approach to solving boolean programming problems based on structural interpretation.

The paper addresses the relevant problem of solving discrete optimization tasks, specifically Boolean linear programming problems. A graph-analytical approach to finding an optimal plan is proposed, based on the structural interpretation of the solution space through the construction of an ordered binary decision tree. The paper describes the methodology for forming tree levels, where each branch corresponds to selecting a variable value (0 or 1), and vertices are ordered according to a chosen indexing strategy. A comprehensive algorithm is developed, consisting of two stages: rapidly finding an initial feasible solution (record) and iteratively searching for the global optimum. A distinctive feature of the method is the use of pruning rules for non-promising branches and the identification of "direct" (alternative-free) paths, which significantly reduces computational complexity compared to exhaustive search. The effectiveness of the proposed approach is illustrated with examples.

Keywords: mathematical model, Boolean programming, binary decision tree, structural interpretation, approximate and optimal solutions to the problem.

Отримано: 15.11.2025

Прийнято: 04.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

УДК 519.854

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).243-253](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).243-253)**С. В. Чупов¹, А. В. Федорішко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
serhii.chupov@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-3924>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
anton.fedorishko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-8921-0882>

ПОКРАЩЕНИЙ ГІБРИДНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Квадратична задача про призначення (QAP) є однією з найбільш вивчених комбінаторних задач оптимізації з різними практичними застосуваннями. У цій статті ми представляємо покращений гібридний алгоритм (ІНВМА) для розв'язання QAP. ІНВМА досліджує простір пошуку шляхом використання модифікованого алгоритму 2-ОРТ, та схеми алгоритму ВМА на окремих етапах розв'язання задачі. Експериментальні оцінки на множині тестових задач типу “*Taie*” розмірності 125 та 175 показують, що запропонований підхід здатний досягти та перевершувати найвідоміші на даний момент результати для всіх екземплярів із середнім часом обчислення менше 2 години. Також надаються порівняння, щоб показати конкурентоспроможність запропонованого підходу відносно алгоритму НН-QAP для QAP.

Ключові слова: Квадратична задача про призначення, гібридний алгоритм наближеного пошуку, локальний алгоритм наближеного пошуку, випадкове збурення компонент розв'язку, ефективність алгоритмів.

1. Вступ. Відомо, що багато задач дискретної оптимізації, зокрема задача QAP, є NP-складними [13]. Основною проблемою при їх розв'язанні є експоненціальний ріст обчислювальних витрат при збільшенні розмірності задачі. Це обмежує можливості розв'язання таких задач у реальному масштабі часу. Крім того, обчислювальна складність задачі QAP викликана значним об'ємом обчислень (порядку $O(n^2)$), необхідних для отримання значення цільової функції та дослідження околу поточного розв'язку. Нагадаємо, що в алгоритмах для задачі QAP окіл $N(\pi)$ розв'язку π складається з усіх перестановок, які отримані шляхом обміну позиціями між усіма парами об'єктів. Таким чином, окіл містить $C_n^2 + 1$ перестановку, а обчислення значень цільової функції для усіх перестановок з $N(\pi)$ потребує об'єму обчислень порядку $O(n^4)$. Якщо $n \geq 100$, то виконання хоча б n^2 ітерацій локального пошуку вже стає важкою обчислювальною задачею.

Практична важливість та обчислювальна складність задачі QAP підтверджується хронологією її дослідження. Сформульована вона була Koortmans та Beckmann [9] у 1957 р. У 1976 р. Sahni та Gonzalez довели [13], що ця задача належить до класу NP-складних задач. Burkard [4] у 1984 р. відзначив, що не можна побудувати точних методів для ефективного розв'язання QAP розмірністю, більшою за 20. І тільки з кінця 80-х років минулого сторіччя розпочався

бурхливий розвиток наближених методів відшукування якісних розв'язків квадратичної задачі про призначення.

Сьогодні більшість ефективних наближених алгоритмів для QAP базується на використанні різноманітних схем методу табу пошуку (TS), запропонованого F. Glover [7, 8]. Варто згадати такі версії методу, як надійний табу пошук [15] (ROTS), реактивний табу пошук [1] (RETS). В останні роки найбільш якісні результати отримано такими наближеними алгоритмами як Breakout Local Search, BLS [2], Memetic Algorithm for QAP, BMA [3] Improved Hybrid Genetic Algorithm, IHGA [11], ITS for QAP [12] та багатьма іншими.

Як правило схеми сучасних наближених методів розв'язання задач оптимізації включають дві фази: інтенсифікація пошуку та диверсифікація пошуку. На першій фазі здійснюється пошук локального екстремуму задачі, а на другій — робиться спроба вийти з його околу та перейти у іншу, ще не досліджену, область множини допустимих розв'язків задачі. Розглянемо більш детально деякі з ефективних алгоритмів розв'язання QAP.

Ітеративний заборонений пошук (ITS) [12] дотримується загальної схеми мета евристичного ітеративного локального пошуку. Він використовує традиційний заборонений пошук для досягнення локальних оптимумів та запускає фазу збурень (реконструкції) щоб уникнути досягнутого локального оптимуму. «Зруйнований» розв'язок стає новою відправною точкою для базової процедури TS. ITS використовує механізм збурень, який адаптивно змінює кількість випадкових рухів збурень в деякому інтервалі. ITS отримує чудові результати на неструктурованих екземплярах та реальних екземплярах.

У [18, 19] представлено ефективний алгоритм для розв'язання QAP, названий RITSR (повторюваний ітеративний алгоритм табу). Фаза інтенсифікації, яка названа дослідницьким пошуком реалізує схему ітеративного локального табу пошуку (ITSL). Цей пошук призначений для виявлення кращих розв'язків, що містяться на незначній відстані від межі поточного околу локального мінімуму. Якщо отримано кращий розв'язок, він запам'ятовується та починається детальний пошук нового, кращого за знайдений, розв'язку в околі знайденої перестановки. Після цього цикл повторень у режимі дослідницького пошуку розпочинається заново. Друга фаза пошуку — фаза диверсифікації — виконується кожен раз перед початком нового дослідницького пошуку у циклі повторень. У цій фазі збурюється поточний локальний мінімум так, щоб наступний дослідницький пошук відбувався на певній відстані від околу поточного розв'язку.

У [20] розроблено гібридно-евристичну модель з використанням структури високого рівня для алгоритмів розв'язання задачі QAP, яка поєднує ключові компоненти трьох відомих метаевристик: “Scatter Search”, “Critical Event Tabu Search”, and “Genetic Algorithm Random Key”, які застосовуються до задачі квадратичного призначення (алгоритм PP-QAP).

У даній статті представлено покращений гібридний алгоритм розв'язання QAP названий IHVMA, що використовує ідею алгоритму HVMA [22]. У своїй роботі він використовує комбінацію модифікованого алгоритму 2-OPT, та схему алгоритму VMA. Наведена формальна схема алгоритму та результати числових експериментів. У висновках коротко оцінюється ефективність запропонованого алгоритму. Пропонуються подальші напрямки досліджень.

2. Постановка задачі. Дано n об'єктів, які потрібно розташувати у n

різних локаціях (місць призначень). Відомі величини потоків ресурсів a_{ij} між об'єктами i та j , $i, j = 1, \dots, n$, і відстані b_{rs} між локаціями (пунктами) r та s , $r, s = 1, \dots, n$. Потрібно знайти таке розподілення об'єктів по локаціях, щоб сума відстаней, помножена на відповідні потоки, була б мінімальною.

Математична постановка задачі QAP формулюється наступним чином: знайти:

$$\min_{\pi \in \Pi^n} f(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi_i \pi_j},$$

де $A = [a_{ij}]$ та $B = [b_{rs}]$ — квадратні матриці порядку n , Π^n — множина усіх перестановок розмірності n і π_i задає номер локації об'єкту i . При цьому, якщо матриці A та B є симетричними, тоді маємо симетричну задачу QAP для якої значення та прирости цільової функції обчислюються більш ефективно.

Можна подати математичну модель задачі QAP у бінарній формі. Нехай P — квадратна бінарна матриця, така що для будь якої перестановки π , $p_{i, \pi_i} = 1$, $i = 1, \dots, n$. Побудуємо матрицю $\bar{B} = B * P$. Тоді постановка задачі буде такою:

$$\min_{\pi \in \Pi^n} f(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{b}_{ij},$$

Квадратичні задачі про призначення можливо точно розв'язати тільки для не великих розмірностей. У зв'язку з цим актуальними є розробка, дослідження нових і вдосконалення існуючих наближених алгоритмів розв'язання задачі QAP.

3. Оператор універсального кросоверу з випадковим доповненням.

За принципом роботи це стандартний оператор рівномірного кросовера [21]. Деякі локації вибираються випадковим чином з першого розв'язку за розподілом Бернуллі з параметром $1/2$. Місця, зайняті вибраними об'єктами з першої перестановки, копіюються у результуючий розв'язок. Місця, зайняті рештою об'єктів у другій перестановці, також копіюються, якщо вони ще не були включені з першого розв'язку. Результат доповнюється шляхом випадкового призначення відсутніх місць. Алгоритм універсального кросоверу з випадковим доповненням представлено на лістингу 2.

Лістинг 2: Універсальний кросовер з випадковим доповненням.

```

1 function UniCrossover(left, right: Vector): Vector;
2 begin
3   order := Vector(1, {dots}, n);
4   offspring := Vector( $\underbrace{-1, \dots, -1}_n$ );
5   assigned_facilities := List();
6   for i:=1 to n do
7     begin
8       if bernoulli(0.5) then
9         offspring[i] := left[i];
10        assigned_facilities.Add(left[i]);
11      end;
12    end;
13    shuffle(order);
14    for i:=1 to n do

```

```

15 begin
16   if offspring[order[i]] = -1 then
17     for j:=1 to right.Count do
18       begin
19         if not right}[j] in assigned_facilities then
20           begin
21             offspring[j] := right[j];
22             assigned_facilities.Add(right[j]);
23             break;
24           end;
25         end;
26       end;
27   return offspring;
28 end;
```

У описанні алгоритму використовуються такі позначення та команди: *order* — визначає порядок перегляду елементів перестановки; команда *shuffle(order)* — випадковим чином перемішує порядок перегляду *order*; список *assigned_facilities* — містить перелік призначених локацій; команда *bernoulli(0.5)* — повертає випадкове значення за розподілом Бернуллі; перестановка *offspring* — результат роботи кросовера.

У даній роботі використовується саме універсальний кросовер з випадковим доповненням. На відміну від стандартного універсального кросовера місця, що залишились після призначення з перестановки *left*, заповнюються у порядку *order* з перестановки *right*.

4. Алгоритм 2-ОРТ. Серед простих алгоритмів локального пошуку найвідомішим є 2-ОРТ [17]. Алгоритм 2-ОРТ вперше був запропонований Кроесом у 1958 році для задачі комівояжера. Цей алгоритм використовує попарну транспозицію об'єктів. Якщо кількість місць розташування об'єктів позначена як n , кількість транспозицій у кожній ітерації буде $n(n-1)/2$. Спочатку алгоритм розглядає транспозицію об'єктів 1 та 2. Якщо значення цільової функції отриманого розв'язку менше, ніж значення цільової функції початкового розв'язку, то воно зберігається як кандидат для подальшого розгляду. В іншому випадку воно відкидається, і алгоритм розглядає транспозицію засобів 1 та 3. Якщо цей обмін генерує краще рішення, то воно зберігається як кандидат для подальшого розгляду; в іншому випадку, воно відкидається і так далі. Таким чином, щоразу, коли знайдено краще рішення, алгоритм відкидає попереднє найкраще рішення. Ця процедура продовжується, доки не будуть розглянуті всі попарні обміни. У роботі використовується модифікований алгоритм схема роботи якого представлена на лістингу 3 та 4.

Лістинг 3: Схема алгоритму локального пошуку.

```

1 function LocalSearch(p: Vector; f, maxi: Integer):(Vector, Integer);
2 begin
3   pc := p; pbest := p;
4   fc := f; fbest := f; /* current and best values */
5   D := ComputeGains(pc); /* compute vector of gains */
6   i := 0;
7   while true do
8     begin
9       (pc, fc, D) := LocalSearchOne (pc, D, fc) /* See Alg. 3 */
10      i := i + 1;
```

```

11   if  $fc < fbest$  then
12   begin
13        $pbest := pc; fbest := fc;$ 
14        $i := 0;$ 
15   end;
16   if  $i > maxi$  then break;
17 end;
18 return ( $pbest, fbest$ );
19 end;

```

Лістинг 4: Схема одного кроку алгоритму 2-ОПТ.

```

1 function LocalSearchOne( $p, D$ : Vector;  $f$ : Integer):(Vector, Integer,
   Vector);
2 begin
3    $fc := f; pc := p;$ 
4    $nmoves := n(n-1)/2;$ 
5    $ming := MAXINT64; minm := -1;$ 
6   for  $i:=0$  to  $nmoves$  do
7   begin
8     if  $D[j] < ming$  then
9     begin
10         $ming := D[j]; minm := j;$ 
11    end;
12  end;
13  if  $ming < 0$  then
14  begin
15     $fc := fc + ming;$ 
16    swap( $pc, minm$ );
17     $D := UpdateGains(D, pc, minm);$ 
18  end
19  else begin
20    ( $pc, fc$ ) := MutatePermutation( $pc, strength$ );
21  end;
22  return ( $pc, D, fc$ );
23 end;

```

У алгоритмі 3 використовується функція *ComputeGains* для побудови вектору приростів цільової функції для усіх можливих ходів. Під одним ходом розуміється перестановка двох позицій у заданій перестановці. У алгоритмі 4 це робиться за допомогою команди *swap*. Також у алгоритмі 3 функція *UpdateGains* використовується для перебудови вектору приростів після одного кроку. Функція *MutatePermutation* здійснює перехід від даної перестановки до іншої, де параметр *strength* визначає ступінь збурення.

5. Покращений гібридний алгоритм (ІНВМА). Даний алгоритм на основі двох існуючих алгоритмів 2-ОПТ та Breakout Memetic Algorithm (ВМА) [3] для розв'язання задачі QAP, використовує модифікований алгоритм 2-ОПТ та загальну схему алгоритму ВМА.

Термін «меметичний алгоритм» (МА) використовується для позначення загального евристичного підходу, який зазвичай поєднує локальну оптимізацію з популяційною парадигмою. Мета такої комбінації полягає в тому, щоб скористатися перевагами як перехресного аналізу, який виявляє недосліджені, перспективні області пошуку, так і локальної оптимізації, яка знаходить гарні розв'язки, концентруючи пошук навколо цих областей. Зрештою, як і для будь-

якого методу, що базується на популяції, необхідно підтримувати здорову різноманітність популяції, щоб уникнути передчасної конвергенції.

Початкова популяція будується на основі модифікованого алгоритму 2-ОРТ для виявлення перспективних областей пошуку. Враховуючи таку популяцію, яка складається з локально оптимальних розв'язків, меметичний підхід генерує нові рішення, застосовуючи кросовер або мутацію, а потім фазу локального пошуку для покращення кожного розв'язку з поточної популяції. Правильний вибір оператора кросовера залежить від структури конкретної задачі. Більше того, успіх меметичного підходу обумовлений ефективністю процедури локального пошуку. Головна роль кросовера полягає у виявленні недосліджених перспективних областей простору пошуку, локальний пошук в основному спрямований на пошук хороших рішень шляхом концентрації пошуку навколо цих областей.

Покращений гібридний алгоритм для QAP (ІНВМА) використовує оператор універсального кросоверу з випадковим доповненням, модифіковану процедуру локального пошуку 2-ОРТ, стратегію заміщення популяції на основі придатності та адаптивний механізм мутації. Кожний розв'язок для популяції, згенерований за допомогою універсального кросовера, покращується за допомогою модифікованої процедури локального пошуку 2-ОРТ. Даний алгоритм потім застосовує стратегію оновлення популяції, щоб можливо замінити найгірший об'єкт з популяції покращеною перестановкою. Щоб уникнути передчасної конвергенції, ІНВМА запускає адаптивний механізм мутації для всієї популяції, якщо найкраще рішення, знайдене під час пошуку, не було покращено протягом фіксованої кількості ітерацій. Це зміщує пошук у віддалені регіони щоразу, коли виявляється застій пошуку. На ліст. 5 Представлена формальна схема алгоритму.

Лістинг 5: Формальна схема алгоритму ІНВМА.

```

1 procedure ІНВМА;
2 begin
3   P := GenerateRandomPopulation(p size);
4   P := BuildPopulation (P, maxi);
5   while not stopping condition do
6     begin
7       (left, right) := SelectParents(P);
8       pc := UniCrossover(left, right);
9       (pc, fc) := LocalSearch(pc, f(pc), maxi);
10      if fc < fbest then
11        begin
12          pbest := pc; fbest := fc;
13        end;
14      if (pbest not improved after  $\nu$  iterations) then
15        begin
16          strength := GenerateStrength(P);
17          P := MutatePopulation(P, strength);
18          P := BuildPopulation(P, maxi);
19        end
20      else
21        begin
22          P := UpdatePopulation(P, pc);
23        end;

```

24 **end ;**
 25 **end ;**

Процедура *GenerateRandomPopulation* випадковим чином генерує множини перестановок, яка у термінах генетичних алгоритмів називається популяцією. Процедура *BuildPopulation* представлена нижче алгоритмом 6. Процедура *UniCrossover* використовує універсальний кросовер з випадковим доповненням (алгоритм 2) для побудови нової перестановки або нащадка. Процедура *LocalSearch* здійснює локальний пошук в області нащадка за алгоритмом 3. Команда *GenerateStrength* визначає ступінь збурення перестановок популяції, що здійснюється процедурою *MutatePopulation*. Після отримання чергової перестановки алгоритмом локального пошуку здійснюється оновлення популяції процедурою *UpdatePopulation*.

Алгоритм на лістингу 6 намагається покращити кожен член популяції за алгоритмом локального пошуку 3.

Лістинг 6: Алгоритм побудови або перебудови популяції.

```

1 procedure BuidPopulation(P: Population ; maxi: Integer) ;
2 begin
3   for i:=1 to psize do
4     begin
5       (P[i], fi) := LocalSearch(P[i], f(P[i]), maxi) ;
6       if fp < fbest then
7         begin
8           pbest := P[i] ; fbest := fi ;
9         end ;
10      end ;
11 end ;
```

6. Результати числових експериментів. Найбільш використовуваними штучними тестовими задачами, є дві серії тестів Taillard (*Taia* та *Taib*) [5]. В однорідних екземплярах (*Taia uniform distributed problems*) матриця відстаней є евклідовою матрицею відстаней між випадковими точками на колі, а матриця потоку є випадковою матрицею з цілим числом, випадково вибраним між двома межами. Реально-подібні екземпляри (*Taib real-like problems*) створені на основі певних реальних проблем та імітують деякі їхні властивості. Матриця відстаней також є евклідовою матрицею, але де точки кластеризовані (розбиваються на групи), а значення матриці потоку розподілені експоненціально. Зараз використовуються інші тестові екземпляри. Серія екземплярів *Taie* та *Dre* була спеціально розроблена для складних метаевристик [6]. Крім того, створено екземпляри, які систематично змінюють деякі параметри тестової задачі, що пов'язані з домінуванням та розрідженістю значень потоків [14]. Також було запропоновано окремий випадок QAP, який є поліноміально розв'язуваним [10], для тестування алгоритмів "чорної скриньки".

Числові експерименти проводилися на тестових задачах типу *TaiXXXeYY*, де *XXX* — визначає розмірність задачі, а *YY* — номер тестової задачі. У наступних таблицях використані такі позначення: *Instances* — назва задачі; *BKS* — відомий рекорд; *f** — знайдене рекордне значення; $\Delta\% = 100 * (f^* - BKS) / BKS$ — середнє відхилення цільової функції від відомого рекорду у процентах. Результати розв'язання таких задач для алгоритму НН-QAP було взято з [20].

У таблицях 1, 2 наведені результати розв'язання тестових задач типу *tai-XXXeYY*, алгоритмами НН-QAP та ІНВМА.

Таблиця 1.

Задачі "*Tai125eyy*". Час розв'язання 3600 сек.

Instances	BKS	НН-QAP		ІНВМА	
		f^*	$\Delta\%$	f^*	$\Delta\%$
Tai125e01	35426	35426	0	35426	0
Tai125e02	36202	36178	-0.07	36178	-0.07
Tai125e03	30498	30498	0	30498	0
Tai125e04	33084	33084	0	33084	0
Tai125e05	38432	37210	-3.18	37210	-3.18
Tai125e06	35546	34624	-2.59	34624	-2.59
Tai125e07	32712	31466	-3.81	31020	-5.17
Tai125e08	36354	34424	-5.31	34424	-5.31
Tai125e09	35008	34244	-2.18	34244	-2.18
Tai125e10	34898	34898	0	34898	0
Tai125e11	33082	32186	-2.71	32132	-2.87
Tai125e12	32326	32326	0	32326	0
Tai125e13	35380	34364	-2.87	34280	-3.11
Tai125e14	30460	30460	0	30460	0
Tai125e15	34328	32614	-4.99	32614	-4.99
Tai125e16	32674	31058	-4.95	31058	-4.95
Tai125e17	35512	35274	-0.67	35074	-1.23
Tai125e18	38702	36888	-4.69	36712	-5.14
Tai125e19	33034	32966	-0.21	32966	-0.21
Tai125e20	31988	30896	-3.41	30896	-3.41

Таблиця 2.

Задачі "*Tai175eyy*". Час розв'язання 7200 сек.

Instances	BKS	НН-QAP		ІНВМА	
		f^*	$\Delta\%$	f^*	$\Delta\%$
Tai175e01	57540	57540	0	57540	0
Tai175e02	51036	50110	-1.81	50002	-2.03
Tai175e03	53900	53900	0	53900	0
Tai175e04	63182	60416	-4.38	60352	-4.48
Tai175e05	51278	50004	-2.48	50004	-2.48
Tai175e06	54752	54752	0	54752	0
Tai175e07	52502	52178	-0.62	52140	-0.69
Tai175e08	57304	55024	-3.98	54984	-4.05
Tai175e09	53238	50020	-6.04	49664	-6.71
Tai175e10	52010	51022	-1.9	50998	-1.95
Tai175e11	54892	54384	-0.93	54384	-0.93
Tai175e12	59564	57492	-3.48	57400	-3.63
Tai175e13	59840	58952	-1.48	58828	-1.69
Tai175e14	55520	52430	-5.57	52430	-5.57
Tai175e15	49668	47092	-5.19	46612	-6.15
Tai175e16	55968	55764	-0.36	55764	-0.36
Tai175e17	58572	57690	-1.51	57688	-1.51
Tai175e18	51574	47972	-6.98	47972	-6.98
Tai175e19	52298	49974	-4.44	49878	-4.63
Tai175e20	56616	55342	-1.95	55342	-1.95

Слід зазначити, що для усіх тестових задач рекордні значення цільової функції, отримані за алгоритмом НН-QAP, було досягнуто або перевершено. Зокрема, для задач розмірності 125 у п'яти задачах з 20 було знайдено кращі розв'язки, а у задачах розмірності 175 у одинадцяти задачах з 20 було отримано покращення.

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій статті пропонується ефективна реалізація гібридного алгоритму ІНВМА для розв'язання задачі QAP. Метою цього алгоритму є покращення продуктивності пошуку шляхом спроби мінімізувати негативний вплив явища стагнації, що є однією з головних перешкод ітераційного пошуку, особливо у випадках, коли необхідно виконати значну кількість кроків на кожному етапі пошуку. Кожен з етапів пошуку алгоритму ІНВМА базується на парадигмі інтенсифікації та диверсифікації, де інтенсифікація спрямована на пошук кращих розв'язків поблизу поточного, тоді як диверсифікація відповідає за вихід з поточного локального оптимуму та переміщення до нових невивчених областей простору пошуку. На кожному етапі пошуку використовується різні алгоритми. На етапі дослідницького пошуку для виявлення перспективних областей використовується модифікований алгоритм 2-ОРТ на етапі детального пошуку застосовується алгоритм, побудований за схемою ВМА, але усі процедури у ньому модифіковані. Наприклад, для визначення наступної перестановки для пошуку за локальним алгоритмом використовується оператор універсального кросоверу з випадковим доповненням. Кожен окремий алгоритм задає свою траєкторію пошуку, тобто процесу переходу від одного розв'язку до іншого. Тому, якщо використовується тільки один конкретний алгоритм при розв'язанні задачі, то дуже часто такий пошук призводить до переходу у режим стагнації (застою), особливо для "важких" задач, у яких при наймі розмірність є більшою за 100. Комбінація застосування алгоритмів дозволяє більш ефективно здійснювати процедуру диверсифікації, що значно підвищує ефективність всього алгоритму. Про це яскраво свідчать результати числових експериментів. Алгоритм ІНВМА показує кращі результати як за кількістю розв'язаних задач та і за середнім часом розв'язання у порівнянні з використанням алгоритму НН-QAP.

У подальших дослідженнях планується:

- Застосувати алгоритм ІНВМА до задачі про максимальний розріз графу.
- Застосувати алгоритм ІНВМА до багатовимірної булевої задачі про ранець.
- Використати комбінації інших алгоритмів, таких як RITSR, ITS, ReTS, INGA разом із 2-ОРТ та ВМА.
- Дослідити вплив різних операторів кросоверу з метою визначення більш придатних.
- Розробити механізм динамічної адаптації параметрів алгоритму, наприклад, таких як тип кросоверу, початкова ступінь мутації популяції, умова переходу до знаходження інших областей пошуку в залежності від ходу процесу розв'язання.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Чупов: концептуалізація, формальний аналіз, розробка алгоритмів, програмування, написання — оригінальний проект. А. В. Федорішко: програмування, написання, проведення числових експериментів — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Чупов С. В., Федорішко А. В.
Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Battiti, R., & Tecchiolli, G. (1994). The Reactive Tabu Search. *ORSA J. on Computing*, 6, 126–140.
2. Benlic, U., & Hao, J. K. (2013). Breakout local search for the quadratic assignment problem. *Applied Mathematics and Computation*, 219(9), 4800–4815.
3. Benlic, U., & Hao, J. K. (2015). Memetic search for the quadratic assignment problem. *Expert Systems with Applications*, 42(1), 584–595.
4. Burkard, R. E. (1984). Quadratic assignment problems. *European J. of Oper. Res.* 15, 283–289.
5. Burkard, R. E., Karisch, S. E., & Rendl, F. (1997). Qaplib – a quadratic assignment problem library. *Journal of Global optimization*, 10, 391–403.
6. Drezner, Z., Hahn, P. M., & Taillard, E. D. (2005). Recent advances for the quadratic assignment problem with special emphasis on instances that are difficult for metaheuristic methods. *Annals of Operations research*, 139, 65–94.
7. Glover, F. (1989). Tabu Search – Part I, *ORSA J. on Computing*, 1(3), 190–206.
8. Glover, F. (1990). Tabu Search – Part II, *ORSA J. on Computing*, 2(1), 4–32.
9. Koopmans, T. C., & Beckmann, M. J. (1957). Assignment problems and the location of economic activities. *Econometrica*, 25, 53–76.

10. Laurent, M., & Seminaroti, M. (2015). The quadratic assignment problem is easy for robinsonian matrices with toeplitz structure. *Operations Research Letters*, 43(1), 103–109.
11. Misevicius, A. (2004). An improved hybrid genetic algorithm: New results for the quadratic assignment problem. *Knowledge Based Systems*, 17(2–4), 65–73.
12. Misevicius, A. (2012). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. *OR Spectrum*, 34(3), 665–690.
13. Sahni, S., & Gonzalez, T. (1976). P-complete approximation problems. *J. of the ACM*, 23, 555–565.
14. Stutzle, T., & Fernandes, S. (2004). New benchmark instances for the qap and the experimental analysis of algorithms. In *European Conference on Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization*. Springer, 199–209.
15. Taillard, E. (1991). Robust taboo search for the quadratic assignment problem. *Parallel Computing*, 17, 443–455.
16. Taillard, E. D. (1995). Comparison of iterative searches for the quadratic assignment problem. *Location science*, 3(2), 87–105.
17. Zhang, Q., Sun, J., Tsang, E., & Ford, J. (2006). Estimation of Distribution Algorithm with 2-opt Local Search for the Quadratic Assignment Problem. In: Lozano, J. A., Larrañaga, P., Inza, I., Bengoetxea, E. (eds). *Towards a New Evolutionary Computation*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, (Vol. 192). Springer: Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/3-540-32494-1_12
18. Sergienko, I. V., Shylo, V. P., Chupov, S. V., & Shylo, P. V. (2020). On solving the quadratic assignment problem. *Cybernetics and Systems Analysis*, (1), 64–69 [in Ukrainian].
19. Shylo, V. P., Chupov, S. V., Boyarchuk, D. O., & Shylo, P. V. (June 3–5, 2018) New approaches to solving the quadratic assignment problem. In the book: *VII International Scientific and Practical Conference "Mathematics. Information Technologies. Education."* : Abstracts of reports. Lutsk – Svitvaz. Lutsk: Lesya Ukrainka Eastern European National University, 121–122 [in Ukrainian].
20. Wang, H., & Alidaee, B. (2023). A New Hybrid-heuristic for Large-scale Combinatorial Optimization: A Case of Quadratic Assignment Problem, *Computers & Industrial Engineering*, 179(1), 109220.
21. Misevičius, A., & Kilda, B. (2005). Comparison of crossover operators for the quadratic assignment problem, *Information Technology And Control*, 34(2), 109–119.
22. Chupov, S. V., & Fedorishko, A. V. (2025). Hybrid algorithm for solving the quadratic assignment problem. *Scientific Bulletin of Uzhgorod University. Series "Mathematics and Computer Science"*. 47(2), 303–311. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).303-311](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).303-311)

Chupov S. V., Fedorishko A. V. Improved hybrid algorithm for the quadratic assignment problem.

The quadratic assignment problem (QAP) is one of the most studied combinatorial optimization problems with various practical applications. In this paper, we present an improved hybrid algorithm (IHBMA) for solving QAP. IHBMA explores the search space by using a modified 2-OPT algorithm, and the BMA algorithm scheme at separate stages of solving the problem. Experimental evaluations on a set of “*Taie*” type test problems of dimensions 125 and 175 show that the proposed approach is able to achieve and surpass the best known results for all instances with an average computing time of less than 2 hours. Comparisons are also provided to show the competitiveness of the proposed approach with respect to the HH-QAP algorithm for QAP.

Keywords: Quadratic assignment problem, hybrid approximate search algorithm, local approximate search algorithm, random perturbation of solution components, algorithm efficiency.

Отримано: 25.11.2025

Прийнято: 20.12.2025

Опубліковано: 29.01.2026

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статі повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відобразити основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за абеткою) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 applications*. USA: O'Reilly Media, Inc.
 2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
 3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions"IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>
- 11) Рукопис слід старанно вчитати.
- 12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and

- integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 48 №1

2026

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора),
Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар), І. М. Порохнавець (технічний
секретар), С. Ю. Бабич, В. А. Бовді, В. М. Бондаренко, І. Влох, К. Гдовська,
М. І. Глебена, Л. Ф. Гуляницький, Ю. П. Зайченко, О. А. Капустян, М. Келемен,
Н. Е. Кондрук, І. І. Король, О. Ю. Кучанський, В. В. Маринець, К. В. Маринець,
Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, Б. Муканова, П. П. Мулеса, В. В. Поліщук,
О. К. Рейтій, А. М. Ронто, Н. В. Семенова, О. О. Синявська, В. Є. Снитюк,
О. А. Тилищак, О. А. Тимошенко, М. М. Шаркаді, Н. Єгорченкова, Д. Єділхан.

Адреса редакційної колегії: 88000, м. Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua