

НАУКОВИЙ ВІСНИК

Ужгородського університету

ISSN 2616-7700 (print)
2708-9568 (online)



серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 49 № 2

2026

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

НАУКОВИЙ ВІСНИК УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 49 № 2

Ужгород 2026

УДК 51+001

Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / редкол.: М. М. Маляр (гол. ред.) та інші. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2026. Т. 49, № 2. 328 с.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2)).

Рекомендовано до друку: Редакційно-видавничою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 4 від 23 квітня 2026 р.), Вченою радою ДВНЗ "УжНУ" (протокол № 7 від 30 квітня 2026 р.)

Журнал включено в Перелік наукових фахових видань України (наказ МОН України №409 від 17.03.2020р.) Категорія: «Б». Спеціальності: 111 – Математика, 113 – Прикладна математика, 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз та 126 – Інформаційні системи та технології.

Індексується в Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Реєстрація суб’єкта у сфері друкованих медіа: Рішення Національної ради України з питань телебачення і радіомовлення № 2178 від 27.06.2024 року Ідентифікатор медіа R30-04771

Засновник і видавець — ДВНЗ «Ужгородський національний університет».

Виходить два рази на рік.

Збірник наукових праць видається з 1994 року.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Адреса редакційної колегії: Україна, 88000 Ужгород, вул. Університетська, 14, ФМЦТ. Тел. (факс): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© М. М. Маляр,
Ю. В. Андрашко, упорядкування, 2026

© Ужгородський національний університет,
2026

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE

STATE UNIVERSITY
«UZHHOROD NATIONAL UNIVERSITY»

SCIENTIFIC BULLETIN OF UZHHOROD UNIVERSITY

Series of
MATHEMATICS AND INFORMATICS

Volume 49 No 2

Uzhhorod 2026

UDC 51+001

Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics / Edit.: M. Malyar (Chief edit.) and others. Uzhhorod: Publishing center of UzhNU «Hoverla», 2026. Vol. 49, No 2. 328 p.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\)](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2)).

Recommended for publication at the meeting of the Editorial and Publishing Board of Uzhhorod National University (protocol No 4 of April 23, 2026) and at the meeting of the Scientific Council of Uzhhorod National University (protocol No 7 of April 30, 2026)

The journal is included in the List of Scientific Professional Species of Ukraine (Order of the MES Of Ukraine No 409 by November 15, 2020). Category: "B". Specialty: 111 – Mathematics, 113 – Applied Mathematics, 122 – Computer Science, 124 – System Analysis, 126 – Information Systems and Technologies.

Indexed in the Index Copernicus. ICV 2024: 74.86.

Registration of an entity in the field of print media: Decision of the National Council of Ukraine on Television and Radio Broadcasting No. 2178 dated June 27, 2024 Media Identifier R30-04771

Founder and Publisher: State University "Uzhhorod National University".

Published twice a year.

The collection of scientific articles has been published since 1994.

ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online)

Address of publishing house: FMDT, Universytetska str. 14, Uzhhorod, 88000, Ukraine, tel. (fax): +380 (312) 642725, e-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua.

© M. M. Malyar,
Yu. V. Andrashko, ordering, 2026

© Uzhhorod National University,
2026

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Головний редактор — Маляр М. М., д.т.н., проф., декан факультету математики та цифрових технологій, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

Члени редакційної колегії:

- **Андрашко Ю. В.** — к.т.н., доц., доц. кафедри системного аналізу та теорії оптимізації, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. (Відповідальний секретар).
<https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>
- **Бабич С. Ю.** — д.т.н., проф., провідний науковий співробітник, Інститут механіки ім. С. П. Тимошенко НАН, Україна. <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>
- **Винокурова О. А.** — доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, ТОВ «САМСУНГ РНД ІНСТИТУТ УКРАЇНА», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-9414-2477>
- **Бондаренко В. М.** — д.ф.-м.н., проф., провідний науковий співробітник відділу алгебри, Інститут математики НАН України, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>
- **Влох І.** — д.м.н., професор, проректор, Жешувська політехніка ім. Ігнація Лукасевича, Жешув, Польща. <https://orcid.org/0000-0002-9969-0827>
- **Гдовська К.** — доктор філ. в галузі управління, доц. кафедри стратегічного управління, Університет науки і технологій AGH у Кракові, Краків, Польща.
<https://orcid.org/0000-0002-7964-3724>
- **Глебена М. І.** — к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедри системного аналізу та теорії оптимізації, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>
- **Гуляницький Л. Ф.** — д.т.н., старший науковий співробітник, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, член-кориспонтент НАН України, Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>
- **Єгорченкова Н.** — д.т.н., доц., факультет менеджменту, Університет Коменського в Братиславі, Словаччина. <https://orcid.org/0000-0001-5970-0958>
- **Єділхан Д.** — доктор філ. в галузі штуч. інт., проф., директор науково-дослідного центру «Smart City», Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан.
<https://orcid.org/0000-0002-6343-5277>
- **Зайченко Ю. П.** — д.т.н., проф., зав. відділенням другої вищої та післядипломної освіти ІПСА, Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-9662-3269>
- **Капустян О. А.** — д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, зав. кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>
- **Келемен М.** — доктор філ., доц. кафедри зв'язків з громадськістю та ділових протоколів, Технічний університет у Кошицях, Кошице, Словаччина.
<https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>
- **Кондрук Н. Е.** — к.т.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>
- **Король І. І.** — д.ф.-м.н., проф., проректор з науково-педагогічної роботи, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. <https://orcid.org/0000-0001-7826-0249>
- **Маринець В. В.** — д.ф.-м.н., проф., проф. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>
- **Маринець К. В.** — к.ф.-м.н., доц., доц. UD1 інституту прикладної математики, Технічний університет Делфта, Делфт, Нідерланди. <https://orcid.org/0000-0002-0043-6336>

- **Млавець Ю. Ю.** — к.ф.-м.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>
- **Моклячук М. П.** — д.ф.-м.н., проф., Інститут математичної статистики, Бічвуд, Огайо, США. <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>
- **Муканова Б.** — доктор наук з мех. та мат., проф., проф. школи штучного інтелекту та науки про дані, Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан.
<https://orcid.org/0000-0002-0823-6451>
- **Мулеса П. П.** — д.пед.н., доц., зав. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>
- **Повідайчик М. М.** — доктор педагогічних наук, доцент, проф. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-1554-2067>
- **Поліщук В. В.** — д.т.н., проф., проф. кафедри програмного забезпечення систем, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>
- **Рейтій О. К.** — к.ф.-м.н., доц., зав. кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-6727-5418>
- **Семенова Н. В.** — д.ф.-м.н., старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу методів дискретної оптимізації математичного моделювання та аналізу складних систем, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-5808-1155>
- **Синявська О. О.** — к.ф.-м.н., доц., доц. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>
- **Сливка-Тилищак Г. І.** — д.ф.-м.н., проф., зав. кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна. (Заст. головн. редактора). <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>
- **Снитюк В. Є.** — д.т.н., проф., декан факультету інформаційних технологій, Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-9954-8767>
- **Тилищак О. А.** — д.ф.-м.н., доц., проф. кафедри математики та інформатики, Закарпатський угорський університет ім. Ференца Ракоці II, Україна.
<https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>
- **Тимошенко О. А.** — к.ф.-м.н., доц., постдокторальний науковий співробітник, кафедра математики, Ослоський університет, Осло, Норвегія.
<https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>
- **Шаркаді М. М.** — к.ekon.н., доц., доц. кафедри кібернетики і прикладної математики, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

Технічний секретар — Порохнавець І. М., аспірант кафедри алгебри та диференціальних рівнянь, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна.
<https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

EDITORIAL TEAM

Editor-in-Chief — Mykola Malyar, Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Mathematics and Digital Technologies, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2544-1959>

Members of the Editorial Board:

- **Yurii Andrashko** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Systems Analysis and Optimization Theory, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. (Executive Secretary). <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>
- **Stepan Babych** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Leading Researcher, S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>
- **Vitalii Bondarenko** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher of the Department of Algebra, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-5064-9452>
- **Olena Vynokurova** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Lead Researcher, LLC «SAMSUNG R&D INSTITUTE UKRAINE», Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-9414-2477>
- **Iwona Włoch** — Doctor of Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector, Rzeszow University of Technology, Rzeszow, Poland. <https://orcid.org/0000-0002-9969-0827>
- **Katarzyna Gdowska** — PhD in Management, Associate Professor, Department of Strategic Management and Economicst, AGH University of Krakow, Krakow, Poland. <https://orcid.org/0000-0002-7964-3724>
- **Myroslava Hlebena** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Systems Analysis and Optimization Theory, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>
- **Leonid Hulyanitskyi** — Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1379-4132>
- **Nataliia Yehorchenkova** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Department of environmental management and spatial planning, Comenius University, Bratislava, Slovakia. <https://orcid.org/0000-0001-5970-0958>
- **Didar Yedilkhan** — PhD in Artificial Intelligence, Professor, "Smart City" Research and Innovation Center Director, Astana IT University, Astana, Republic of Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-6343-5277>
- **Yurii Zaichenko** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Second Higher and Postgraduate Education, Institute for Applied System Analysis, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-9662-3269>
- **Olena Kapustian** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Head of the Department of Systems Analysis and Decision-Making Theory, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2629-0750>
- **Martin Kelemen** — PhD, Associate Professor, Department of Public Relations and Business Protocol, Technical University of Košice, Slovakia. <https://orcid.org/0000-0003-1015-1112>
- **Nataliia Kondruk** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>
- **Ihor Korol** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Vice-Rector for Scientific and Pedagogical Work, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-7826-0249>
- **Vasyl Marynets** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2455-2833>

- **Kateryna Marynets** — PhD in Physical and Mathematical Sciences, Assistant professor at Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands. <https://orcid.org/0000-0002-0043-6336>
- **Yurii Mlavets** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>
- **Mykhailo Mokliachuk** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, USA. <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>
- **Balgaisha Mukanova** — Doctor of Science in Mechanics and Mathematics, Professor, School of Artificial Intelligence and Data Science, Astana IT University, Astana, Republic of Kazakhstan. <https://orcid.org/0000-0002-0823-6451>
- **Pavlo Mulesa** — Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>
- **Mykhailo Povidaichyk** — Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-1554-2067>
- **Volodymyr Polishchuk** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Software Systems, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>
- **Oleksandr Reitii** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-6727-5418>
- **Nataliia Semenova** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Leading research fellow of the department of discrete optimization methods for mathematical modeling and analysis of complex systems, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-5808-1155>
- **Olga Siniavska** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Probability Theory and Mathematical Analysis, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>
- **Ganna Slyvka-Tylyshchak** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Probability Theory and Mathematical Analysis, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. (Deputy Editor-in-Chief). <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>
- **Vitalii Snytiuk** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Dean of the Faculty of Information Technology, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-9954-8767>
- **Oleksandr Tylyshchak** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Ferenc Rakoczi II Transcarpathian Hungarian University, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>
- **Olena Tymoshenko** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Postdoctoral Research Fellow, Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norway. <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>
- **Mariana Sharkadi** — Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Department of Cybernetics and Applied Mathematics, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

Technical Secretary — Ivan Porokhnavets, PhD student, Department of Algebra and Differential Equations, State Higher Educational Institution "Uzhhorod National University", Ukraine. <https://orcid.org/0000-0003-3949-9155>

ЗМІСТ

Розділ 1: Математика і статистика

1. *Борисюк Я. Є.* Компартментна модель SVEAHR поширення COVID-19 з урахуванням вакцинації та госпіталізації 14
2. *Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Юрченко Н. В.* Дослідження характеристичних рівнянь для просторових динамічних задач. Загальний початковий напружений стан. Стисливі тіла 24
3. *Єршов С. В., Симонов Є. Д.* Інформаційно-топологічний підхід до виявлення аномалій у динамічних системах 31
4. *Зубарук О. В.* Алгебри Ауслендера некомутативних неідемпотентних напівгруп третього порядку без нульового елемента 40
5. *Капустян О. В., Краснєєва А. О., Жук Т. Ю.* Стійкість типу ISS для глобального атрактора параболічного включення відносно збурення крайових умов 45
6. *Лагода О. А., Селіванов В. В., Чайковський А. В.* Граничні теореми для розв'язків абстрактних стохастичних різницеєвих рівнянь 54
7. *Ломага М. М., Глебена О. В., Герич М. С., Чубирка В. В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона для функцій комплексної змінної . . . 60
8. *Масютка О. Ю., Моклячук М. П.* Задача оцінювання векторних однорідних випадкових полів 66
9. *Мельник А. О., Розора І. В.* Побудова довірчих інтервалів для імпульсної перехідної функції 74
10. *Млавець Ю. Ю., Плугатор О. О., Тимошенко О. А.* Декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі 82
11. *Романюк В. В.* Однокульова безшумна дуель із квадратичною точністю на рівномірній сітці: розв'язки в чистих стратегіях існують, коли дуелянт має не більше восьми моментів часу для пострілу 91
12. *Сливка-Тилищак Г. І., Тилищак О. А., Синявська О. О., Тегза А. М.* Динаміка та кореляція показників НМТ в Закарпатській області: регіональний вимір та порівняльний аспект 100
13. *Топилко П. І., Данжанич А. О.* Математичне моделювання просторово-часового розподілу сонячного енергетичного потенціалу урбанізованих територій 108
14. *Усар І. Я., Макушенко І. А., Лукович О. В.* Стаціонарний розподіл для процесів міграції спеціального типу 117
15. *Царевський О. О.* Секторіальні блок-діагональні оператори в еволюційних рівняннях другого порядку 126
16. *Ярова О. А.* Суміш мультиплікативних рівнянь регресії 134

Розділ 2: Інформатика, комп'ютерні науки та прикладна математика

1. *Білак Ю. Ю.* Інформаційна технологія спектрального аналізу та параметричного синтезу багатопарових тонких плівок на основі сценарного моделювання 139
2. *Бойко Н. І., Свінцило Д. В.* Нейромережевий прогноз Bitcoin: адаптація до волатильності 146
3. *Бурмей О. С., Антосяк П. П.* Роль конструювання ознак у прогнозуванні роздрібного попиту: від статистичних базових моделей до нейронних ансамблів 155

4. Веретонкін О. С. Модель оптимального керування технічним боргом у процесах розробки програмного забезпечення	161
5. Гнатієнко Г. М., Гнатієнко О. Г. Схема розподіленого обчислення розв'язків у задачах колективного ранжування з використанням генетичного алгоритму	165
6. Гомбош Т., Мулеса П. Патерни обробки поточкових подій для масштабування інтерактивних навчальних середовищ: порівняльний аналіз Redis Pub/Sub, Redis Streams та Apache Kafka	173
7. Жовтані Р. Я., Чорній А. М., Яворський П. В., Зимоля О. М., Цініньо Ю. М. Адаптивна логістична система на основі IoT з периферійним інтелектом та захищеним шаром взаємної сумісності	181
8. Кондрук Н. Е., Турпак О. В. Робастна модифікація методу аналізу ієрархій в умовах інтервальної невизначеності експертних даних	190
9. Кубицький В. О., Божок А. В. Міждоменне узагальнення багаторівневих CNN-представлень зображень для задач оцінки подібності	197
10. Кудак В. І., Воцєпинець А. С. Порівняльний аналіз MLP та DFSN для прогнозування затриманих конверсій	205
11. Кудряшова А. В., Білецький Ю. О., Кляп М. М., Шумило Н. Я. Визначення факторів зручності користування інтерфейсами	212
12. Лях І. М., Дитко Т. В. Моделювання та прогнозування когнітивного стану здобувачів освіти у віртуальному навчальному середовищі на основі мультимодальних даних	219
13. Матей А. А. Нечітка модель розпізнавання штучно створеного контенту соціальними класами в контексті інформаційної безпеки держави	230
14. Моренець В. І. Pipeline-підхід до автоматизованого збору та попередньої обробки відкритих даних	238
15. Мошко С. В., Кучанський О. Ю. Attention-VAE: Несупервізоване раннє виявлення сепсису через оцінку аномалій на основі реконструкції вітальних показників відділення інтенсивної терапії	245
16. Пеняк Б. О., Любінський Б. Б. Адаптивний гібридний механізм консенсусу для блокчейн-орієнтованого електронного урядування: підхід на основі машинного навчання	255
17. Поліщук В. В., Сегляник В. І. Нечітка модель оцінювання цифрової безпечної грамотності населення з урахуванням соціальних профілів	262
18. Сміленко М. Ю. Порівняльна оцінка сучасних методів багаторакурсної 3D-реконструкції сцен за RGB-зображеннями: точність, повнота та ресурсоемність	269
19. Товт Ю. О., Брига А. Ю. Фільтрація імпульсного шуму з випадковими значеннями на цифрових зображеннях з використанням детектору імпульсів на основі нейронної мережі	276
20. Цап В. Б. Проблема масштабування криптографічних алгоритмів для штучного інтелекту	283
21. Цегелик Г. Г., Глебена М. І., Цегелик М. Г. Наближений метод розв'язування задачі булевого програмування. Ознака оптимальності наближеного розв'язку	292

22. Чупов С. В., Кузка О. І., Дуран В. М. Симуляція відпалу для квадратичної задачі про призначення на основі лексикографічно впорядкованих перестановок	300
23. Шаркаді М. М. Інтелектуальна гібридна модель підтримки безпекоорієнтованого управління соціо-еколого-економічними системами в умовах невизначеності	308
24. Шкіря С. В., Андрашко Ю. В. Мультимодальна нейромережева модель верифікації на основі злиття ознак візуального контексту та просторових атрибутів	317

CONTENTS

Chapter 1: Mathematics and Statistics

1. <i>Borysyuk Y. Ye.</i> A Compartmental SVEAIHR Model of COVID-19 Transmission with Vaccination and Hospitalization	14
2. <i>Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Yurchenko N. V.</i> Investigation of characteristic equations for three-dimensional dynamic problems. General initial stressed state. Compressible bodies	24
3. <i>Yershov S. V., Symonov Y. D.</i> Information-topological approach to anomalies detection in dynamic systems	31
4. <i>Zubaruk O. V.</i> The Auslander algebras of non-commutative non-idempotent semi-groups of third order without zero element	40
5. <i>Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y.</i> Stability of ISS type for global attractor of parabolic inclusion with respect to boundary disturbances	45
6. <i>Lahoda O. A., Selivanov V. V., Chaikovs'kyi A. V.</i> Limit Theorems for Solutions of Abstract Stochastic Difference Equations	54
7. <i>Lomaha M. M., Hlebena O. V., Herych M. S., Chubyrka V. V.</i> The apparatus of nonclassical majorants and Newton diagrams for functions of a complex variable	60
8. <i>Masyutka O. Yu., Moklyachuk M. P.</i> On estimation problem for multidimensional homogeneous random fields	66
9. <i>Melnyk A. O., Rozora I. V.</i> Confidence intervals for impulse response function ...	74
10. <i>Mravets Yu. Yu., Pluhator O. O., Tymoshenko O. A.</i> Decomposition of insurance surplus in a stochastic model	82
11. <i>Romanuke V. V.</i> Quadratic-accuracy one-bullet silent duel on the uniform lattice: pure strategy solutions exist when the duelist has at most eight time moments	91
12. <i>Slyuka-Tylyshchak- G. I., Tylyshchak A. A., Syniavska O. O., Tegza A. M.</i> Dynamics and correlation of NMT indicators in the Zakarpattia region: regional dimension and comparative aspect	100
13. <i>Topylko P. I., Dankanych A. O.</i> Mathematical modeling of the spatio-temporal distribution of solar energy potential in urbanized areas	108
14. <i>Usar I. Ya., Makushenko I. A., Lukovich O. V.</i> On stationary distribution for migration processes of a special type	117
15. <i>Tsarevskiyi O. O.</i> Sectorial block-diagonal operators in second order evolution problems	126
16. <i>Yarova O. A.</i> Mixture of multiplicative regression equations	134

Chapter 2: Informatics, Computer Science and Applied Mathematics

1. <i>Bilak Y. Y.</i> Information technology for spectral analysis and parametric synthesis of multilayer thin films based on scenario modeling	139
2. <i>Boyko N. I., Svinchylo D. V.</i> Neural Price Forecasting for Bitcoin: Adapting to Volatility	146
3. <i>Burmei O. S., Antosiak P. P.</i> The role of feature engineering in retail demand forecasting: from statistical baselines to neural ensembles	155
4. <i>Veretonkin O. S.</i> Optimal Control Model of Technical Debt in Software Development Processes	161
5. <i>Hnatiienko H. M., Hnatiienko O. H.</i> Distributed Computation of Compromise Solutions in Collective Ranking Problems Using a Genetic Algorithm	165

6. <i>Hombosh T., Mulesa P.</i> Stream Event Processing Patterns for Scaling Interactive Learning Environments: A Comparative Analysis of Redis Pub/Sub, Redis Streams, and Apache Kafka	173
7. <i>Zhovtani R. Ya., Chorniy A. M., Yavorskyi P. V., Zymomrya O. M., Tsipino Yu. M.</i> Adaptive IoT-based Logistics System with Edge Intelligence and Secure Interoperability Layer.....	181
8. <i>Kondruk N. E., Tyrpak O. V.</i> Robust Modification of the Analytic Hierarchy Process under Interval Uncertainty of Expert Data.....	190
9. <i>Kubytskyi V. O., Bozhok A. V.</i> Cross-domain generalization of multi-level CNN image representations for similarity tasks.....	197
10. <i>Kudak V. I., Voshchepynets A. S.</i> A Comparative Analysis of MLP and DFSN for Predicting Delayed Conversions	205
11. <i>Kudriashova A. V., Biletskyi Yu. O., Kliap M. M., Shumylo N. Ya.</i> Identifying Interface Usability Factors.....	212
12. <i>Liakh I. M., Dytko T. V.</i> Modeling and predicting the cognitive state of learners in a virtual learning environment based on multimodal data.....	219
13. <i>Matei A. A.</i> A fuzzy model of recognition of artificially created content by social classes in the context of state information security	230
14. <i>Morenets V. I.</i> Pipeline-based approach to automated collection and preprocessing of open data	238
15. <i>Moshko S. V., Kuchanskyi O. Y.</i> Attention-VAE: Unsupervised early sepsis detection via reconstruction-based anomaly scoring of intensive care unit vital signs	245
16. <i>Peniak B. O., Liubinskyj B. B.</i> Adaptive hybrid consensus mechanism for blockchain-based e-governance: a machine learning approach.....	255
17. <i>Polishchuk V., Sehlianyk V.</i> A fuzzy model for assessing digital cybersecurity literacy of the population considering social profiles.....	262
18. <i>Smilenko M. Yu.</i> Comparative Evaluation of Modern Multi-View 3D Scene Reconstruction Methods from RGB Images: Accuracy, Completeness, and Resource Efficiency	269
19. <i>Tovt Yu. O., Bryla A. Yu.</i> Filtering Random-Valued Impulse Noise in Digital Images Using a Neural Network-Based Impulse Detector.....	276
20. <i>Tsap V. B.</i> The problem of scaling cryptographic algorithms for artificial intelligence.....	283
21. <i>Tsehelyk H. H., Hlebena M. I., Tsehelyk M. H.</i> An approximate method for solving a boolean programming problem. An optimality criterion for the approximate solution	292
22. <i>Chupov S. V., Kuzka O. I., Duran V. M.</i> Annealing Simulation for A Quadratic Assignment Problem Based on Lexicographically Ordered Permutations	300
23. <i>Sharkadi M. M.</i> Intelligent hybrid model for supporting security-oriented management of socio-ecological-economic systems under conditions of uncertainty ...	308
24. <i>Shkiria S. V., Andrashko Yu. V.</i> Multimodal neural network model for verification based on the fusion of visual context features and spatial attributes.....	317

УДК 519.63 : 519.87

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).14-23](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).14-23)**Я. Є. Борисюк**

Львівський національний університет ім. І. Франка,

асистент кафедри прикладної математики

yaryna.borysyuk@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0322-0637>**КОМПАРТМЕНТНА МОДЕЛЬ SVEAIHR ПОШИРЕННЯ
COVID-19 З УРАХУВАННЯМ ВАКЦИНАЦІЇ ТА
ГОСПІТАЛІЗАЦІЇ**

У роботі побудовано та досліджено компартментну математичну модель поширення COVID-19 типу SVEAIHR з урахуванням вакцинації, безсимптомних носіїв та госпіталізації пацієнтів. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, що описує динаміку для семи груп населення. Доведено додатність та обмеженість розв'язків і визначено інваріантну область. За допомогою методу матриці наступного покоління знайдено базове репродукційне число та досліджено локальну стійкість безінфекційного стану. Встановлено достатню умову існування ендемічної рівноваги. Чисельні експерименти ілюструють характерну динаміку компартментів моделі та підтверджують її придатність для якісного аналізу поширення інфекції.

Ключові слова: математичне моделювання епідемій, COVID-19, компартментна модель, базове репродукційне число, ендемічна рівновага, стійкість рівноваги.

1. Вступ. Основи математичної епідеміології були закладені в класичних компартментних моделях типу SIR та їх узагальненнях, ключовим параметром таких моделей є базове репродукційне число R_0 [1]. У зв'язку з пандемією COVID-19 значну кількість досліджень присвячено побудові та аналізу модифікацій SEIR-подібних моделей, які враховують особливості передачі інфекції та протиендемічні заходи [2–4]. Зокрема, у роботі [5] проаналізовано вплив соціального дистанціювання і карантину на динаміку епідемії. Суттєвий науковий інтерес становлять розширені компартментні моделі з урахуванням вакцинації, госпіталізації та інших механізмів контролю інфекції [6–9]. Наприклад, у роботі [8] запропоновано модель SVEIHR, яка дозволяє досліджувати вплив вакцинації на динаміку інфекції, тоді як у [9] проаналізовано вплив кампанії вакцинації та можливе співіснування різних варіантів вірусу. Урахування госпіталізованих пацієнтів є важливим для опису тяжких форм захворювання та аналізу навантаження на систему охорони здоров'я [4, 8–10]. Сучасні моделі також включають безсимптомні випадки інфекції та карантинні заходи. Зокрема, у роботі [11] запропоновано модель SQEAIHR, що описує безсимптомних інфікованих та ізольовані групи осіб.

Метою роботи є побудова та математичний аналіз компартментної моделі поширення COVID-19 типу SVEAIHR з урахуванням вакцинації, безсимптомних носіїв та госпіталізації пацієнтів.

2. Компартментна модель поширення епідемії SVEAIHR. Компартментні моделі широко використовуються для дослідження динаміки епідемій [9, 12–13]. У цій роботі розглянуто та детально досліджено модель типу SVEAIHR, попередню версію якої нами було запропоновано у [14]. Порівняно з моделлю SVEIHR [8], у запропонованому підході явно виділено компартмент

безсимптомно інфікованих осіб, що дає змогу аналізувати їхній окремий внесок у формування нових випадків зараження. На відміну від моделей типу SEQA1NR або SQA1R [10, 11], акцент зроблено не на карантинних чи ізоляційних механізмах, а на поєднаному впливі вакцинації, безсимптомного перебігу хвороби та госпіталізації. Крім того, враховано нелінійну швидкість лікування госпіталізованих пацієнтів, що дозволяє якісно описати зниження ефективності лікування за зростання навантаження на лікарні.

Для побудови рівнянь математичної моделі загальну популяцію поділено на сім взаємовиключних компартментів (груп): $S(t)$ — сприйнятливі (неімунізовані) особи; $V(t)$ — вакциновані особи з частковим імунітетом, який вони можуть втратити з часом; $E(t)$ — інфіковані у латентному періоді, ще не є заразними; $A(t)$ — безсимптомно інфіковані, які поширюють вірус; $I(t)$ — симптоматично інфіковані, особи з видимими ознаками хвороби, вже є заразні; $H(t)$ — госпіталізовані, особи з важкими формами хвороби, що потребують лікування у стаціонарі; $R(t)$ — одужалі, особи, які видужали після хвороби. Загальна чисельність населення у момент часу t (час вимірюється у днях) визначається як

$$N(t) = S(t) + V(t) + E(t) + A(t) + I(t) + H(t) + R(t).$$

Діаграма поширення епідемії зображена на рис. 1, а відповідна математична модель у виді системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь наведена нижче:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \Lambda - (\beta_1 I + \beta_2 A) S/N - (\omega + \mu) S + \kappa R + \theta V, \\ \dot{V} &= \omega S - (1 - \psi) (\beta_1 I + \beta_2 A) V/N - (\theta + \mu) V, \\ \dot{E} &= (\beta_1 I + \beta_2 A) S/N + (1 - \psi) (\beta_1 I + \beta_2 A) V/N - (\delta + \mu) E, \\ \dot{A} &= q\delta E - (\mu + \rho_2) A, \\ \dot{I} &= (1 - q)\delta E - (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) I, \\ \dot{H} &= \delta_1 I - \left(\frac{\sigma_0}{1 + bH} + d_H + \mu + \xi \right) H, \\ \dot{R} &= \rho_1 I + \rho_2 A + \frac{\sigma_0}{1 + bH} H - (\kappa + \mu) R\end{aligned}\tag{1}$$

з початковими умовами:

$$S(0) > 0, \quad V(0) \geq 0, \quad E(0) \geq 0, \quad A(0) \geq 0, \quad I(0) \geq 0, \quad H(0) \geq 0, \quad R(0) \geq 0. \tag{2}$$

Параметр Λ визначає швидкість надходження нових сприйнятливих осіб, а μ — природний рівень смертності. Сприйнятливі особи заражаються після контакту із зараженими людьми (симптоматичними та безсимптомними) із швидкостями β_1, β_2 відповідно. Швидкість вакцинації здорових осіб задається параметром ω , θ — швидкість втрати імунітету, отриманого від вакцини. У моделі враховано обмежену ефективність вакцини, оскільки вакцинація не забезпечує повного захисту від інфекції [7]. Таким чином, параметр ψ позначає рівень ефективності вакцини ($\psi = 1$ для ідеальної вакцини, $\psi < 1$ для недосконалої, $0 \leq \psi \leq 1$). Природна втрата імунітету серед одужалих осіб визначається параметром κ (швидкість втрати імунітету). Швидкість переходу з латентного

стану після близького контакту з безсимптомними або симптоматичними інфікованими позначається параметром δ . Частки осіб з $E(t)$, що переходять до компартменту безсимптомних $A(t)$ та симптоматично інфікованих $I(t)$, рівні q та $1 - q$ відповідно. Тобто, особи, які не мають симптомів, потрапляють до класу $A(t)$ зі швидкістю $q\delta$, тоді як особи з явними ознаками хвороби потрапляють до компартменту симптоматично інфікованих $I(t)$ зі швидкістю $(1 - q)\delta$. Швидкість одужання безсимптомно інфікованих пацієнтів та симптоматично інфікованих визначається параметрами ρ_2 та ρ_1 відповідно, а рівень смертності в класі $I(t)$ задається параметром d . Вважаємо, що в категорію $A(t)$ потрапляють лише ті, хто не мав жодних симптомів, не отримував жодних ускладнень під час хвороби та був виявлений лише під час тестування.

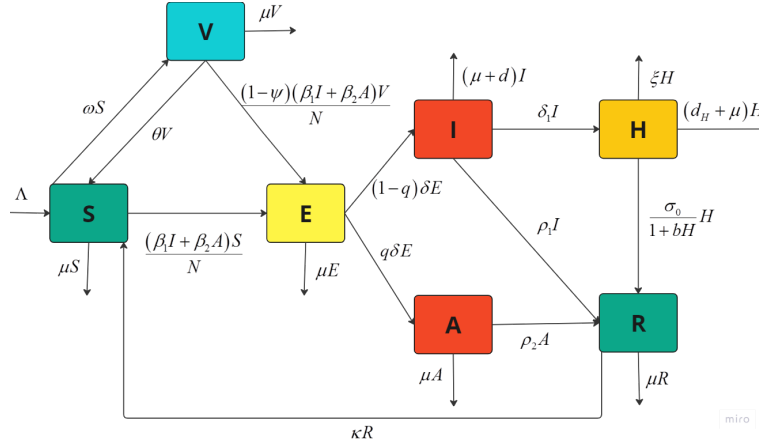


Рис. 1. Схема поширення захворювання для моделі SVEAIHR.

Особи з компартменту $I(t)$ переходять до госпіталізованого відділення $H(t)$ з швидкістю δ_1 , рівень смертності серед госпіталізованих позначається через d_H . Параметр ξ характеризує швидкість вибуття госпіталізованих пацієнтів із системи спостереження без фіксації повного одужання, зокрема внаслідок переведення на амбулаторне лікування або втрати подальшого спостереження. Подальший перебіг захворювання для таких осіб у межах моделі не деталізується. Щоб врахувати ефект затримки лікування, вибираємо швидкість лікування у виді $\sigma(H) = \sigma_0/(1 + bH)$, де σ_0 — базова швидкість виліковування, коли кількість госпіталізованих є малою ($H \rightarrow 0$), $b \geq 0$ — насичувальний параметр, що відображає, як швидко ефективність лікування зменшується із зростанням кількості пацієнтів [10]. Пацієнти, які одужують, додаються до класу $R(t)$.

Враховуючи біологічний зміст системи (1), надалі вважаємо, що всі параметри моделі $\Lambda, \beta_1, \beta_2, \omega, \mu, \kappa, \theta, \delta, b, d_H, \xi, \delta_1, \sigma_0, \rho_2, d, \rho_1$ є невід'ємними, причому $\mu > 0$. Крім того, ψ та q задовольняють обмеження

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad 0 < q < 1. \quad (3)$$

3. Невід'ємність та обмеженість розв'язків.

Теорема 1. Усі розв'язки $\{S(t), V(t), E(t), A(t), I(t), H(t), R(t)\}$ системи рівнянь (1) з початковими умовами (2) є невід'ємними та обмеженими для всіх $t \geq 0$. Крім того, замкнута допустима область Ω , визначена як:

$$\Omega = \{(S, V, E, A, I, H, R) \in \mathbb{R}_+^7 : S + V + E + A + I + H + R \leq \Lambda/\mu\}$$

є додатно інваріантною для системи (1)–(2).

Доведення. Із першого рівняння системи (1) маємо:

$$\begin{aligned} dS(t)/dt &= \Lambda - (\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) S(t)/N(t) - (\omega + \mu) S(t) + \kappa R(t) + \theta V(t) \geq \\ &\geq -((\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) / N(t) + \omega + \mu) S(t). \end{aligned}$$

Позначимо $\chi(t) = (\beta_1 I(t) + \beta_2 A(t)) / N(t) + \omega + \mu \geq 0$, тоді одержуємо диференціальну нерівність $dS(t)/dt \geq -\chi(t)S(t)$. Звідси, після інтегрування та з врахуванням початкових умов:

$$S(t) \geq S(0) \exp \left(- \int_0^t \chi(z) dz \right) > 0.$$

Отже, $S(t) > 0$ для всіх $t \geq 0$. Провівши аналогічні дії для всіх інших змінних моделі ($V(t)$, $E(t)$, $A(t)$, $I(t)$, $H(t)$, $R(t)$) доводимо, що $V(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, $A(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $H(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$ для будь-якого $t \geq 0$. Таким чином усі розв'язки системи (1) з початковими умовами (2) є невід'ємними у будь-який момент часу $t \geq 0$.

Додавши всі рівняння системи (1), одержуємо

$$dN(t)/dt = \Lambda - \mu N(t) - dI(t) - (d_H + \xi)H(t) \leq \Lambda - \mu N(t),$$

оскільки $I(t) \geq 0$ та $H(t) \geq 0$. Звідси, після інтегрування $N(t) \leq \Lambda/\mu + (N(0) - \Lambda/\mu)e^{-\mu t}$, $t \geq 0$. Оскільки експоненційна функція $e^{-\mu t}$ прямує до 0 при $t \rightarrow \infty$, то $N(t)$ обмежена зверху. Крім того, якщо $N(0) \leq \Lambda/\mu$, то з отриманої оцінки випливає, що $N(t) \leq \Lambda/\mu$ для всіх $t \geq 0$. Теорему доведено.

Отже, модель (1)–(2) є біологічно і математично коректно визначеною у допустимій інваріантній множині Ω .

4. Базове репродукційне число. Поклавши в (1) $E(t) = I(t) = A(t) = 0$ одержуємо точку безінфекційної рівноваги $E_0 = (S^0, V^0, E^0, A^0, I^0, H^0, R^0)$.

$$E_0 = (\Lambda(\theta + \mu) / (\mu(\theta + \mu + \omega)), \omega\Lambda / (\mu(\theta + \mu + \omega)), 0, 0, 0, 0, 0).$$

Оцінимо базове репродукційне число R_0 для системи (1) за допомогою методу матриці наступного покоління [1], який базується на формуванні двох матриць: F — відображає швидкість появи нових інфікованих осіб, V — описує швидкість виходу з інфекційного стану (через перехід між станами, одужання чи смерть). Зосередимося лише на змінних, які відповідають за динаміку інфекції (E , A , I). Прогресування від E до I та A не вважаються новими випадками зараження. Зауважимо, що госпіталізований компартмент H не включається до матриці нового покоління, оскільки індивіди з цього класу не беруть участі у процесі передачі інфекції і, відповідно, не генерують нових випадків зараження. Використовуючи підхід, описаний в [1], та ввівши позначення $a = S^0/(S^0 + V^0) + (1 - \psi)V^0/(S^0 + V^0)$, $N^0 = S^0 + V^0 = \Lambda/\mu$, одержимо:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 a & \beta_1 a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \delta + \mu & 0 & 0 \\ -q\delta & \mu + \rho_2 & 0 \\ -(1-q)\delta & 0 & \mu + d + \rho_1 + \delta_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Визначимо R_0 як спектральний радіус матриці FV^{-1} :

$$R_0 = \frac{\delta}{(\delta + \mu)} \frac{S^0 + (1 - \psi)V^0}{N^0} K = \frac{\delta}{(\delta + \mu)} \frac{\theta + \mu + (1 - \psi)\omega}{\theta + \mu + \omega} K, \quad (5)$$

де

$$K = (1 - q) \beta_1 / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) + q \beta_2 / (\mu + \rho_2) > 0. \quad (6)$$

Формула (4) допускає природну епідеміологічну інтерпретацію. Зокрема, множник $\delta/(\delta + \mu)$ описує імовірність досягнення інфекційної стадії, а множник $(1 - \psi)$ відображає вплив вакцинації. Внесок симптоматично та безсимптомно інфікованих описується відповідно першим і другим доданками у виразі для R_0 .

Зазначимо, що система (1) задовольняє стандартні умови A1–A5, сформульовані у [1], необхідні для коректного застосування методу матриці нового покоління та подальшого дослідження стійкості точки рівноваги E_0 .

5. Локальна стійкість безінфекційної рівноваги E_0 .

Теорема 2. *Безінфекційна рівновага E_0 системи (1) є асимптотично стійкою, якщо $R_0 < 1$, і нестійкою, якщо $R_0 > 1$.*

Доведення. З формул (3) матриця V є невиродженою M -матрицею, а матриця F є невід'ємною, отже за Теоремою 2 зі статті [1] всі власні значення матриці $(F - V)$ мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли $\rho(FV^{-1}) < 1$. У цьому випадку всі власні значення якобіана $J(E_0)$ мають від'ємні дійсні частини, і точка E_0 є локально асимптотично стійкою. Якщо $\rho(FV^{-1}) > 1$, то якобіан має принаймні одне власне значення з додатною дійсною частиною, і точка нестійка. Теорему доведено.

6. Ендемічна рівновага. Ендемічною рівновагою системи (1) називається стаціонарний розв'язок із додатними значеннями E^* , A^* , I^* . З рівнянь моделі послідовно одержуємо, що змінні A^* , I^* , H^* та R^* можуть бути однозначно виражені через E^* . Отже, при $E^* > 0$ та за умов (3):

$$A^* = q\delta E^* / (\mu + \rho_2) = A^*(E^*) > 0,$$

$$I^* = (1 - q) \delta E^* / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) = I^*(E^*) > 0.$$

Враховуючи позначення K у (5), запишемо $\beta_1 I^* + \beta_2 A^* = \delta K E^* > 0$.

Для визначення R^* та H^* розглянемо окремо два варіанти поведінки системи: при $b = 0$ та $b > 0$. При $b = 0$:

$$H^* = \delta_1 I^*(E^*) / (\sigma_0 + d_H + \mu + \xi) = H^*(E^*) > 0,$$

$$R^* = (\rho_1 I^*(E^*) + \rho_2 A^*(E^*) + \sigma_0 H^*(E^*)) / (\kappa + \mu) = R^*(E^*) > 0.$$

Для знаходження H^* , якщо $b > 0$, одержуємо квадратне рівняння

$$b(d_H + \mu + \xi) H^{*2} + (\sigma_0 + (d_H + \mu + \xi) - bCE^*) H^* - CE^* = 0,$$

де $C = (\delta_1 (1 - q) \delta) / (\mu + d + \rho_1 + \delta_1) > 0$ за умов (3). Оскільки вільний член $-CE^* < 0$, тобто корені мають різні знаки, то існує рівно один біологічно допустимий додатний корінь $H^* = H^*(E^*) > 0$. Для $R^* = R^*(E^*)$:

$$R^* = \left(\rho_1 I^*(E^*) + \rho_2 A^*(E^*) + \frac{\sigma_0}{1 + bH^*(E^*)} H^*(E^*) \right) / (\kappa + \mu) = R^*(E^*) > 0.$$

Із стаціонарних рівнянь для вакцинованих та сприйнятливих осіб одержуємо відповідно вирази для V^* і S^* :

$$V^* = \frac{\omega S^*}{(\theta + \mu) + (1 - \psi)\delta K E^*/N^*}, \quad S^* = \frac{\Lambda + \kappa R^* + \theta V^*}{(\omega + \mu) + \delta K E^*/N^*}.$$

$$V^* = \frac{\omega(\Lambda + \kappa R^*(E^*))}{\mu(\theta + \omega + \mu) + \delta K E^*/N^* [(\theta + \mu) + (1 - \psi)(\omega + \mu)] + (1 - \psi)(\delta K E^*/N^*)^2} = \\ = V^*(E^*) > 0, \quad N^* = N^*(E^*).$$

Отже, усі компоненти ендемічної рівноваги однозначно визначаються через одну змінну E^* . Підстановка цих виразів у стаціонарне рівняння для E^* приводить до одного нелінійного алгебраїчного рівняння відносно E^* , додатні розв'язки якого визначають ендемічні рівноваги системи:

$$F(E^*) = 0, \quad \text{при } E^* > 0,$$

де $F(E^*) = \delta K/N^*(E^*) (S^*(E^*) + (1 - \psi) V^*(E^*)) - (\delta + \mu)$.

Теорема 3. Існування ендемічної рівноваги. *Якщо $R_0 > 1$, то система (1) при виконанні умови (3) має принаймні одну ендемічну рівновагу.*

Доведення. Кількість ендемічних рівноваг збігається з кількістю додатних коренів рівняння $F(E) = 0$, де

$$F(E) = \delta K/N^*(E) (S^*(E) + (1 - \psi) V^*(E)) - (\delta + \mu).$$

Оскільки всі компоненти рівноваги однозначно визначаються через E , то кожному додатному розв'язку рівняння $F(E) = 0$ відповідає рівно одна ендемічна рівновага. Функції $S^*(E)$ та $V^*(E)$ визначені для всіх $E > 0$ і є додатними за умов (3). Крім того, із явних формул для $A^*(E)$, $I^*(E)$, $R^*(E)$ та з рівняння для $H^*(E)$ випливає, що ці функції мають неперервне продовження в точці $E = 0$. Отже, $F(E)$ є неперервною на відрізку $[0, +\infty)$.

При $E = 0$ з формул для $A^*(E)$, $I^*(E)$, $H^*(E)$, $R^*(E)$ одержуємо $A^*(0) = I^*(0) = H^*(0) = R^*(0) = 0$. У цьому випадку з рівнянь стаціонарних станів для S та V випливає, що $S^*(0) = S^0$, $V^*(0) = V^0$, де безінфекційна рівновага $E_0 = (S^0, V^0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Крім того, $N^*(0) = N^0 = S^0 + V^0 = \Lambda/\mu$. Таким чином $F(0) = \delta K/N^0 (S^0 + (1 - \psi) V^0) - (\delta + \mu)$. З формули (4) для базового репродукційного числа R_0 одержуємо

$$F(0) = (\delta + \mu)(R_0 - 1).$$

Звідси випливає: якщо $R_0 < 1$, то $F(0) < 0$; якщо $R_0 = 1$, то $F(0) = 0$; якщо $R_0 > 1$, то $F(0) > 0$.

Проаналізуємо поведінку функції $F(E)$ при $E \rightarrow \infty$. Оскільки

$$N^*(E) = S^*(E) + V^*(E) + E + A^*(E) + I^*(E) + H^*(E) + R^*(E) \geq E,$$

то $N^*(E) \rightarrow \infty$, при $E \rightarrow \infty$. З формул для $S^*(E)$ та $V^*(E)$ випливає, що $\lim_{E \rightarrow +\infty} S^*(E) = 0$, $\lim_{E \rightarrow +\infty} V^*(E) = 0$, отже $\lim_{E \rightarrow +\infty} (S^*(E) + (1 - \psi) V^*(E)) = 0$. Тобто при великих значеннях E функція $F(E)$ є від'ємною: $\lim_{E \rightarrow +\infty} F(E) = -(\delta + \mu) < 0$.

При $R_0 > 1$ маємо $F(0) > 0$ та $\lim_{E \rightarrow +\infty} F(E) = -(\delta + \mu) < 0$. Оскільки функція $F(E)$ є неперервною, за теоремою Больцано-Коші існує принаймні один додатний розв'язок рівняння $F(E) = 0$. Таким чином система (1) має принаймні одну ендемічну рівновагу E^* при $R_0 > 1$. Теорему доведено.

7. Комп'ютерне моделювання. У розділі наведено результати чисельного розв'язання задачі Коші для моделі SVEAIHR при фіксованих параметрах і початкових умовах. Початкові умови для системи (1) та більшість значень параметрів моделі було взято з роботи [13], де вони використовувалися для опису епідемічної ситуації COVID-19 в Пакистані. Зауважимо, що параметри, пов'язані з госпіталізованим компартментом $H(t)$, були введені на основі припущень, оскільки відповідні величини не наведені у вихідному джерелі. Чисельні розрахунки проводилися на скінченному часовому інтервалі $t \in [0, T]$, де T відповідає тривалості досліджуваного періоду.

На рис. 2 зображено часову еволюцію змінних моделі. Чисельні результати демонструють типовий для епідемічних моделей перебіг: початкове зростання кількості інфікованих, досягнення пікового значення та подальше зменшення з переходом системи до квазістаціонарного режиму.

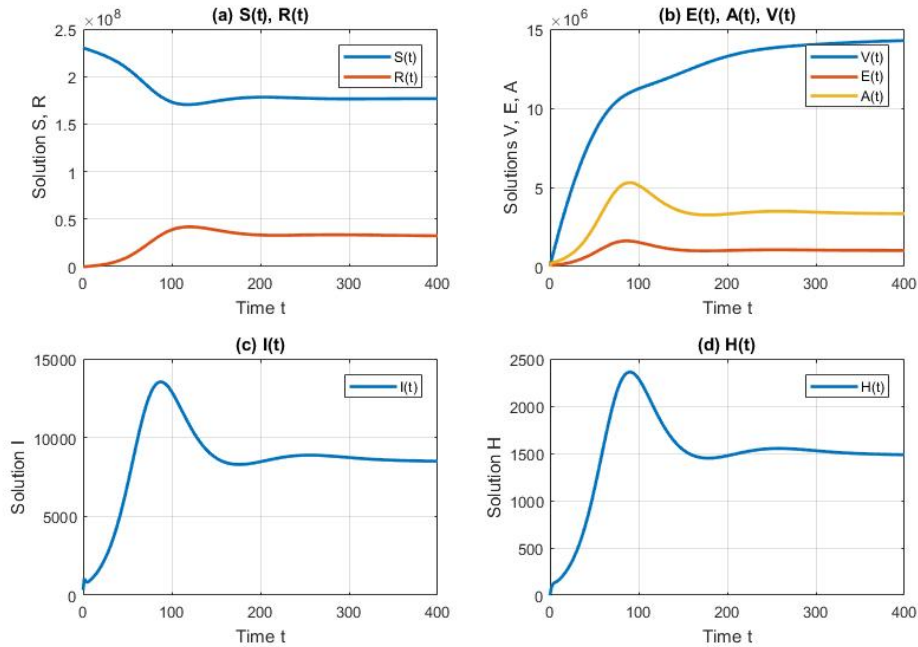


Рис. 2. Часова динаміка компартментів моделі SVEAIHR.

Значення початкових умов: $S(0) = 230255033$, $V(0) = 0$, $E(0) = 300000$, $A(0) = 2000$, $I(0) = 334$, $H(0) = 0$, $R(0) = 0$, $t \in [0, 400]$, $N(0) = 230557367$. Параметри (1): $\Lambda = \mu N(0)$, $\beta_1 = 0.8983$, $\beta_2 = 0.3827$, $\omega = 0.001$, $q = 0.9931$, $\psi = 0.6$, $\mu = 1/(67.7 \cdot 365)$, $\kappa = 0.03129$, $\theta = 0.01$, $\delta = 0.9982$, $\rho_2 = 0.3028$, $d = 0.6784$, $\rho_1 = 0.07926$, $\delta_1 = 0.07$, $\sigma_0 = 0.1$, $b = 0.1$, $d_H = 0.3$, $\xi = 0.1$.

Для аналізу чутливості розв'язків до зміни окремих параметрів було проведено параметричне моделювання. З огляду на обмежений обсяг статті, на рис. 3 наведено залежність динаміки компартментів $E(t)$, $I(t)$ лише від значень пара-

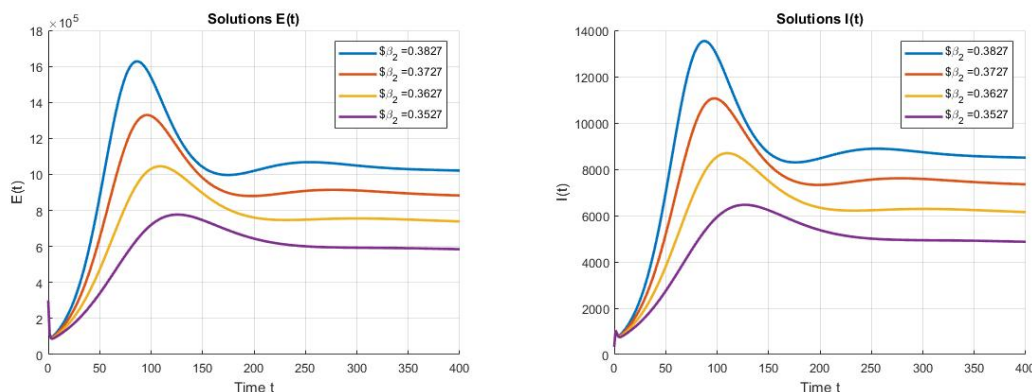


Рис. 3. Вплив параметра β_2 на динаміку компартментів $E(t)$, $I(t)$.

метра β_2 (інтенсивність передачі інфекції від безсимптомно інфікованих осіб). Зі зменшенням параметра β_2 спостерігається суттєве зниження пікових значень $E(t)$ та зміщення максимуму в часі. Аналогічна тенденція спостерігається і для компартментів $A(t)$ та $I(t)$, що підтверджує важливу роль безсимптомних носіїв у поширенні інфекції.

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. Для компартментної моделі SVEAHR поширення COVID-19 доведено додатність та обмеженість розв'язків системи, що підтверджує біологічну коректність моделі в допустимій інваріантній області. За допомогою методу матриці наступного покоління отримано аналітичний вираз для базового репродукційного числа R_0 , який дає змогу оцінити вплив вакцинації, передачі інфекції від симптоматичних і безсимптомних осіб, а також переходів між інфекційними компартментами на динаміку епідемічного процесу.

Показано, що безінфекційна рівновага є локально асимптотично стійкою за умови $R_0 < 1$ і нестійкою при $R_0 > 1$, що узгоджується з класичною епідеміологічною інтерпретацією порогового параметра. Аналіз ендемічної рівноваги показав, що при $R_0 > 1$ система допускає ендемічний режим, який відповідає довготривалому збереженню інфекції в популяції.

Чисельні експерименти підтвердили узгодженість якісної поведінки моделі з типовими епідемічними сценаріями та продемонстрували вплив окремих параметрів на інтенсивність епідемічного процесу. Зокрема, зменшення інтенсивності передачі інфекції від безсимптомно інфікованих осіб приводить до зниження пікових значень латентно та симптоматично інфікованих, що підкреслює епідеміологічну значущість своєчасного виявлення безсимптомних носіїв і контролю їхніх контактів.

Подальша робота передбачає поглиблене дослідження ендемічних рівноваг моделі, зокрема аналіз їхньої стійкості та можливих біфуркаційних режимів. Наступним важливим етапом є оцінювання параметрів моделі на основі реальних статистичних даних для України. Окремим перспективним напрямом є формулювання та розв'язання задачі оптимального керування епідемічним процесом.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Борисюк Я. Є. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Van den Driessche, P., & Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, 180, 29–48. Retrieved from <https://watmough.ext.unb.ca/papers/mgroup.pdf>
2. Aldila, D., Khoshnaw, S. H. A., Safitri, E., Anwar, Y. R., Bakry, A. R. Q., Sami-adj, B. M., Anugerah, D. A., Alfarizi, G. H., Ayulani, I. D., & Salim, S. N. (2020). A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
3. Unlu, E., Leger, H., Motornyi, O., Rukubayihunga, A., Ishacian, T., & Chouiten, M. (2020). Epidemic analysis of COVID-19 outbreak and counter-measures in France. *medRxiv*. Retrieved from <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:218057187>
4. Saha, P., & Ghosh, U. (2021). Global dynamics and control strategies of an epidemic model having logistic growth, non-monotone incidence with the impact of limited hospital beds. *Nonlinear Dynamics*, 105, 971–996. <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06607-9>
5. Ghosh, J. K., Biswas, S. K., Sarkar, S., & Ghosh, U. (2022). Mathematical modelling of COVID-19: A case study of Italy. *Mathematics and Computers in Simulation*, 194, 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.11.008>
6. Cai, L., Li, Z., & Song, X. (2018). Global analysis of an epidemic model with vaccination. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 57, 605–628. <https://doi.org/10.1007/s12190-017-1124-1>
7. Acuña-Zegarra, M. A., Díaz-Infante, S., Baca-Carrasco, D., & Olmos-Liceaga, D. (2021). COVID-19 optimal vaccination policies: A modeling study on efficacy, natural and vaccine-induced immunity responses. *Mathematical Biosciences*, 337, 108614. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2021.108614>
8. Paul, J. N., Mbalawata, I. S., Mirau, S. S., & Masandawa, L. (2023) Mathematical modeling of vaccination as a control measure of stress to fight COVID-19 infections. *Chaos, Solitons and*

- Fractals*, 166, 112920. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112920>
9. Parolini, N., Dedè, L., Ardenghi, G., & Quarteroni, A. (2022). Modelling the COVID-19 epidemic and the vaccination campaign in Italy by the SUIHTER model. *Infectious Disease Modelling*, 7, 45–63. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2022.03.002>
 10. Saha, P., Biswas, S. K., Biswas, M. H. A., & Ghosh, U. (2023). An SEQAIHR model to study COVID-19 transmission and optimal control strategies in Hong Kong, 2022. *Nonlinear Dynamics*, 111, 6873–6893. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-08181-0>
 11. Wang, C., Jin, Y., Zhou, L., Hou, W., Liu, D., Wang, J., & Wang, X. (2024). SQEAIHR: An improved infectious disease dynamics model. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 31, 28. <https://doi.org/10.1007/s44198-024-00188-y>
 12. Hnytko, Y., Borysyuk, Y., & Shcherbatyy, M. (2025). Client-server toolkit for compartmental modeling and optimal control. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Computer Science*, 35, 48–64. <https://doi.org/10.30970/vam.2025.35.13622> [in Ukrainian].
 13. Sun, T.-C., DarAssi, M. H., Alfwzan, W. F., Khan, M. A., Alshahrani, A. S., Alqahtani, S. S., & Muhammad, T. (2023). Mathematical modeling of COVID-19 with vaccination using fractional derivative: A case study. *Fractal and Fractional*, 7(3), 234. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7030234>
 14. Borysyuk, Y. E., & Shcherbatyy, M. V. (September 30, 2025 – October 1, 2025). Optimal control for the mathematical model of COVID-19 spread SVEAIHR. In *XL International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2025)*. (p. 36). Bielsko-Biala: Poland. Retrieved from https://pdmu.knu.ua/PDMU_2025/PDMU-2025.pdf

Borysyuk Y. Ye. A Compartmental SVEAIHR Model of COVID-19 Transmission with Vaccination and Hospitalization.

In this paper, a compartmental mathematical model of COVID-19 transmission of the SVEAIHR type is formulated and analyzed, taking into account vaccination, asymptomatic carriers, and hospitalization of patients. A system of nonlinear differential equations describing the dynamics of seven population groups is derived. The positivity and boundedness of solutions are proven, and an invariant region for the solutions of the model is established. Using the next-generation matrix method, the basic reproduction number is obtained and the local stability of the disease-free equilibrium is investigated. A sufficient condition for the existence of an endemic equilibrium is established. Numerical simulations illustrate the characteristic temporal dynamics of the compartments and confirm the suitability of the model for qualitative analysis of infection spread.

Keywords: epidemic mathematical modeling, COVID-19, compartmental model, basic reproduction number, endemic equilibrium, equilibrium stability.

Отримано: 07.04.2026

Прийнято: 21.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 539.3

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).24-30](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).24-30)**Ю. П. Глухов¹, С. Ю. Бабич², Н. В. Юрченко³**

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
старший науковий співробітник,
кандидат фізико-математичних наук
gluchov.uriy@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6328-5993>

² Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України,
провідний науковий співробітник,
доктор технічних наук, професор
babich_sy@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2642-9115>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук
nataliia.yurchenko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2825-8180>

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ. ЗАГАЛЬНИЙ ПОЧАТКОВИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН. СТИСЛИВІ ТІЛА

Досліджено вплив початкових напружень і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають рівнянням руху стисливих елементів шаруватого півпростору. Розглянуто випадок загального початкового напруженого стану. Проведено оцінку коренів характеристичних рівнянь. Чисельні дослідження наведені для стисливого матеріалу з пружним потенціалом гармонічного типу. Проілюстровано вплив початкових напружень і швидкості руху навантаження на дискримінант характеристичного рівняння.

Ключові слова: багатошаровий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, характеристичне рівняння.

1. Вступ. При дослідженні динамічної поведінки багатошарових пружних основ під дією рухомого навантаження широке застосування знаходять методи, що базуються на інтегральному перетворенні Фур'є за просторовими координатами. У рамках таких підходів розв'язок задачі зводиться до побудови зображень переміщень і напружень, які в трансформованій області виражаються через комбінації експоненціальних функцій. Ключовим етапом при цьому є визначення коренів характеристичних рівнянь, що відповідають трансформованим системам звичайних диференціальних рівнянь для кожного шару. Саме від значень цих коренів залежить подальша побудова оригіналів розв'язку за допомогою оберненого перетворення Фур'є.

У цій праці розглянута просторова усталена задача про збурення двошарового стисливого півпростору з початковими напруженнями рухомим поверхневим навантаженням. Постановка просторової задачі для багатошарового стисливого півпростору розглянута у праці [1]. Дослідження були проведені в рамках лінеаризованої теорії пружності тіл з початковими напруженнями [2–4].

2. Аналітичні дослідження характеристичних рівнянь. У випадку загального початкового напруженого стану

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; \quad S_{11}^{0\{s\}} \neq S_{22}^{0\{s\}} \neq S_{33}^{0\{s\}} \quad (1.1)$$

рух багатопарового об'єкта в загальному випадку описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними шостого порядку. У рухомій системі координат ці рівняння мають вигляд [1]

$$\left(\sum_{m,n,p=0}^{m+n+p=3} \tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}} \frac{\partial^6}{\partial y_1^{2m} \partial y_2^{2n} \partial y_3^{2p}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (1.2)$$

В просторі зображень ці рівняння представлені формулами

$$\left(B_1^{\{s\}} \frac{d^6}{dy_3^6} - B_2^{\{s\}} \frac{d^4}{dy_3^4} + B_3^{\{s\}} \frac{d^2}{dy_3^2} - B_4^{\{s\}} \right) \Phi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = \overline{1,3}; \quad s = \overline{1, N+1}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \tilde{A}_{0,0,3}^{\{s\}}; \quad B_2 = k_1^2 \tilde{A}_{1,0,2}^{\{s\}} + k_2^2 \tilde{A}_{0,1,2}^{\{s\}}; \quad B_3 = k_1^4 \tilde{A}_{2,0,1}^{\{s\}} + k_2^4 \tilde{A}_{0,2,1}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^2 \tilde{A}_{1,1,1}^{\{s\}}; \\ B_4 &= k_1^6 \tilde{A}_{3,0,0}^{\{s\}} + k_2^6 \tilde{A}_{0,3,0}^{\{s\}} + k_1^4 k_2^2 \tilde{A}_{2,1,0}^{\{s\}} + k_1^2 k_2^4 \tilde{A}_{1,2,0}^{\{s\}}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де k_1, k_2 — параметри подвійного перетворення Фур'є; коефіцієнти $\tilde{A}_{m,n,p}^{\{s\}}$ у виразах (1.2) і (1.4) є функціями параметрів, що характеризують навантаження і матеріал елементів шаруватого середовища.

Характеристичні рівняння мають вигляд

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}. \quad (1.5)$$

У випадку стисливих тіл коефіцієнти рівняння (1.5) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} a_0^{\{s\}} &= c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}; \quad a_1^{\{s\}} = -k_1^2 \left[c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\ &\quad \left. - c_{32}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi \left(c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} \right) \right] - k_2^2 \left[c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + \right. \\ &\quad \left. + c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} \right) - c_{31}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} \right]; \quad a_2^{\{s\}} = k_1^4 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} \right) - d_{13}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_2^4 \left\{ c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - \right. \\ &\quad \left. - c_{21}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - v^2 \sin^2 \phi \left[c_{32}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - d_{23}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_1^2 k_2^2 \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) - c_{11}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - c_{22}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - c_{33}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} + 2d_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} + \right. \\ &\quad \left. + v^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) \right]; \quad a_3^{\{s\}} = -k_1^6 \left[c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\ &\quad \left. - v^2 \cos^2 \phi \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + v^4 \cos^4 \phi \left(c_{11}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2} \right) \right] - \\ &\quad - k_2^6 \left[v^4 \sin^4 \phi \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) - v^2 \sin^2 \phi \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right] - k_1^4 k_2^2 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{13}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - \right. \\ &\quad \left. - v^2 \cos^2 \phi \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - d_{12}^{\{s\}2} \right] \right\} - \\ &\quad - k_1^2 k_2^4 \left[c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - c_{23}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - v^6 \cos^2 \phi \sin^4 \phi \right], \end{aligned} \quad (1.6)$$

де

$$\tilde{\rho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{iji}^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} a_{ij}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{ijj}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{jji}^{\{s\}}. \quad (1.7)$$

Значення функцій $\eta^{\{s\}}$ визначають вигляд рівнянь руху елементів шаруватого півпростору і відповідно вибір форми розв'язку рівнянь, що розглядаються.

Так як рівняння (1.5) є бікубічними алгебраїчними рівняннями, то їх розв'язок можна отримати класичним способом. Приведемо рівняння (1.5) заміною

$$\eta^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}2} - \frac{a_1^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}}} \quad (1.8)$$

до вигляду

$$\mu^{\{s\}6} + p^{\{s\}} \mu^{\{s\}2} + q^{\{s\}} = 0, \quad (1.9)$$

де

$$p^{\{s\}} = -\frac{a_1^{\{s\}2}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_2^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}; \quad q^{\{s\}} = \frac{2a_1^{\{s\}3}}{27a_0^{\{s\}3}} - \frac{a_1^{\{s\}} a_2^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_3^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}. \quad (1.10)$$

В випадку, якщо дискримінант $\Delta^{\{s\}} = \frac{q^{\{s\}2}}{4} + \frac{p^{\{s\}3}}{27} = 0$, рівняння (1.9) при $p^{\{s\}} \neq 0$, $q^{\{s\}} \neq 0$ мають один простий і один двократний корінь

$$\mu_1^{\{s\}2} = \frac{3q^{\{s\}}}{p^{\{s\}}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{3q^{\{s\}}}{2p^{\{s\}}}. \quad (1.11)$$

Якщо $\Delta^{\{s\}} \neq 0$, то рівняння (1.9) мають три різних кореня. Якщо $\Delta^{\{s\}} > 0$, то рівняння (1.9) мають один дійсний корінь і два комплексних

$$\mu_1^{\{s\}2} = u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}}{2} \pm i \frac{(u_0^{\{s\}} - v_0^{\{s\}})\sqrt{3}}{2}. \quad (1.12)$$

Тут

$$u_0^{\{s\}} = \sqrt[3]{-\frac{q^{\{s\}}}{2} + \sqrt{\Delta^{\{s\}}}}; \quad v_0^{\{s\}} = -\frac{p^{\{s\}}}{3u_0^{\{s\}}}. \quad (1.13)$$

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ всі три корені рівнянь (1.9) будуть дійсними і різними

$$\begin{aligned} \mu_1^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}}}{3}; & \mu_2^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 2\pi}{3}; \\ \mu_3^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тут

$$\left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| = \left| \sqrt{-\frac{p^{\{s\}}}{3}} \right|; \quad \cos \phi^{\{s\}} = -\frac{q^{\{s\}}}{2r^{\{s\}}}. \quad (1.15)$$

Таким чином, при $\Delta^{\{s\}} = 0$ у випадку, коли $p^{\{s\}} \neq 0$ і $q^{\{s\}} \neq 0$ і мають різні знаки, рівняння (1.6) має два дійсних двократних кореня та два чисто уявних. Якщо $p^{\{s\}} \neq 0$ і $q^{\{s\}} \neq 0$ і мають однакові знаки, то рівняння (1.5) має два дійсних кореня і два двократних чисто уявних.

При $\Delta^{\{s\}} > 0$, якщо $\mu_1^{\{s\}2} > 0$, рівняння (1.5) має два дійсних корня і чотири комплексних, якщо $\mu_1^{\{s\}2} < 0$ — шість комплексних. При $\Delta^{\{s\}} < 0$ рівняння (1.5)

має шість різних коренів. Дійсні корені будуть відповідати додатнім значенням коренів рівняння (1.9).

2. Чисельний аналіз коренів характеристичних рівнянь. Оскільки вирази (1.6) для коефіцієнтів рівнянь (1.5) — досить громіздкі вирази, аналітичне дослідження коренів характеристичного рівняння видається складним. Чисельні дослідження було проведено для стисливого матеріалу з гармонійним потенціалом

$$\Phi^{\{s\}} = \frac{1}{2} \lambda^{\{s\}} s_1^{\{s\}2} + \mu^{\{s\}} s_2^{\{s\}}, \quad (2.1)$$

де $\lambda^{\{s\}}$, $\mu^{\{s\}}$ - константи Ляме. Величини $s_1^{\{s\}}$ і $s_2^{\{s\}}$ являють собою перший і другий інваріанти тензора деформацій лінійної теорії пружності, віднесені до головних осей

$$s_1^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1) + (\lambda_2^{\{s\}} - 1) + (\lambda_3^{\{s\}} - 1); \quad (2.2)$$

$$s_2^{\{s\}} = (\lambda_1^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_2^{\{s\}} - 1)^2 + (\lambda_3^{\{s\}} - 1)^2. \quad (2.3)$$

Для теорії скінченних (великих) початкових деформацій і першого варіанта малих початкових деформацій вирази для визначення складових тензора $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ за умови (1.1) мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{3333}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_3^{\{s\}}(\lambda^{\{s\}} + 2\mu^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_3^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1133}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3311}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{2233}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3322}^{\{s\}} = \frac{\lambda^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}} - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; & \tilde{\omega}_{1313}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3131}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}}\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_2^{\{s\}}}; \\ \tilde{\omega}_{2323}^{\{s\}} &= \tilde{\omega}_{3232}^{\{s\}} = \frac{\lambda_3^{\{s\}}\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}}}; & \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_1^{\{s\}}[(2\mu^{\{s\}} + \lambda^{\{s\}})(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - 1) + \lambda^{\{s\}}(\lambda_3^{\{s\}} - 2)]}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} &= \frac{\lambda_2^{\{s\}}2\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}}}{\lambda_1^{\{s\}2}}; & \tilde{\omega}_{3113}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_1^{\{s\}} + (\lambda_3^{\{s\}} - 1)(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})] + \lambda^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{1331}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(\lambda_1^{\{s\}} - 1)] - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} - \lambda_3^{\{s\}})}{\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{2332}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[\lambda_3^{\{s\}} + (\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})(\lambda_2^{\{s\}} - 1)] - \lambda^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)(\lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}} - \lambda_2^{\{s\}})}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}; \\ \tilde{\omega}_{3223}^{\{s\}} &= \frac{2\mu^{\{s\}}[(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})\lambda_3^{\{s\}} - \lambda_1^{\{s\}}] + \lambda^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}} + \lambda_3^{\{s\}} - 3)}{\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}(\lambda_1^{\{s\}} + \lambda_2^{\{s\}})}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Врахуємо, що $\lambda^{\{s\}} = \frac{2\mu^{\{s\}}\nu^{\{s\}}}{1-2\nu^{\{s\}}}$, де ν — коефіцієнт Пуассона, і пронормуємо всі величини за величиною $\mu^{\{s\}}/\rho^{\{s\}}$. Чисельні розрахунки проводилися для $\nu = 0, 3$. Початкові подовження змінювалися в діапазоні від 0,8 до 1,2. Метою дослідження було оцінювання можливих значень коренів рівняння (1.5) та вплив початкових деформацій і швидкості руху поверхневого навантаження на значення коренів характеристичного рівняння (1.5) і відповідно на вибір розв'язку досліджуваної задачі.

Поверхня, що відповідає функції $\Delta^{\{s\}}$, за фіксованих значень параметрів $\lambda_i^{\{s\}}$ ($i = 1, 2, 3$), v і ϕ має вигляд, показаний на рис. 1. Причому форма поверхні не змінюється в діапазоні $0.8 \leq \lambda_i^{\{s\}} \leq 1.2$, $0 \leq v^2 \leq c_{11}^{\{s\}2}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Аналіз чисельних значень $\Delta^{\{s\}}$ дає змогу стверджувати, що дискримінант рівняння (1.5) набуває в зазначеній області досліджуваних параметрів невід'ємних значень ($\Delta^{\{s\}} \geq 0$).

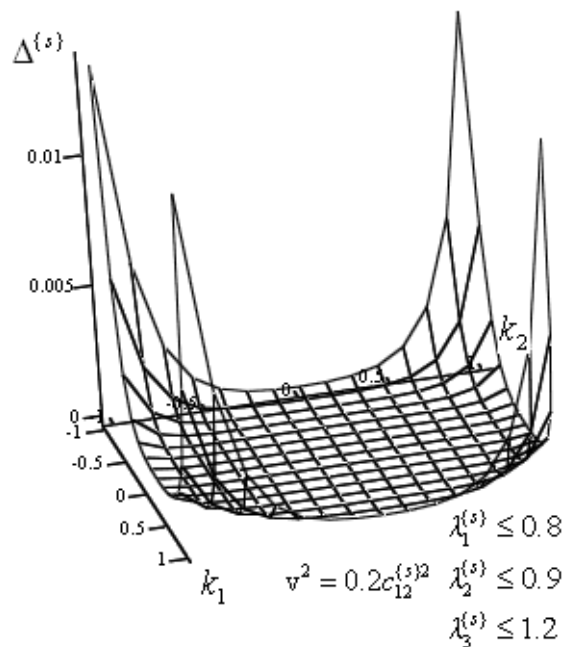


Рис. 1. Поверхня функції $\Delta^{\{s\}}$.

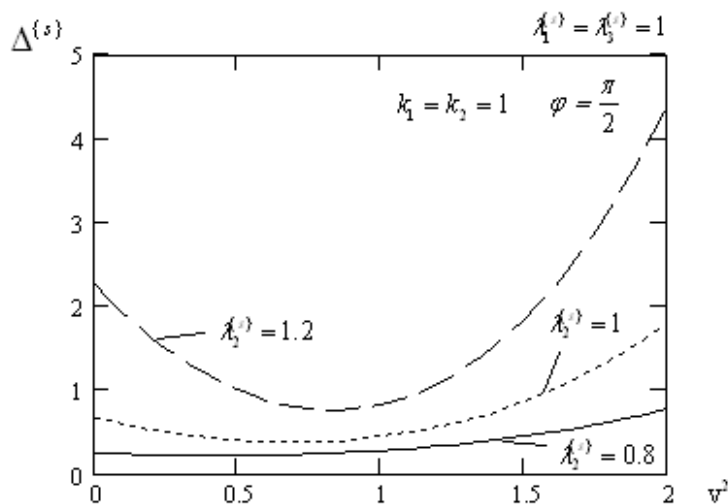


Рис. 2. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта $\Delta^{\{s\}}$ ($\phi = \pi/2$).

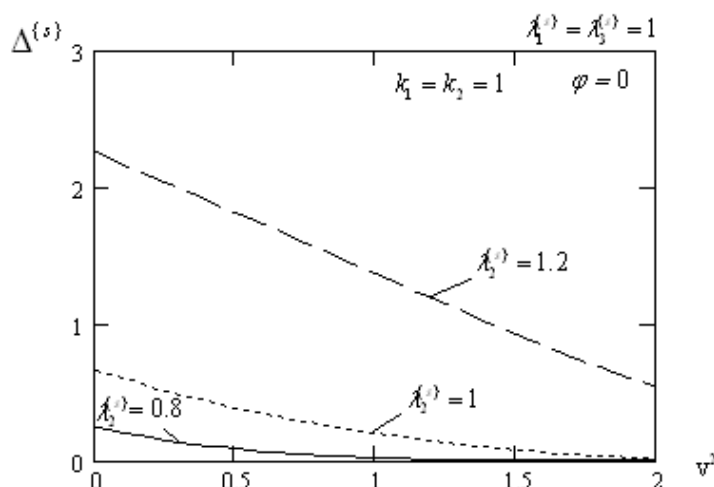


Рис. 3. Вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта $\Delta^{\{s\}}$ ($\phi = 0$).

На рис. 2 і 3 проілюстровано вплив швидкості та траєкторії руху навантаження на значення дискримінанта рівняння (1.9). Як видно з рисунків, початкові напруження, швидкість руху навантаження та напрямок його руху суттєво впливають на значення функції $\Delta^{\{s\}}$.

Очевидно, що за певної швидкості навантаження вплив початкових напружень зменшується. Від напрямку руху навантаження залежить розташування області найменшого впливу початкових напружень.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій статті дано оцінку можливих значень коренів характеристичних рівнянь. Для стисливого матеріалу із пружним потенціалом гармонічного типу проведені чисельні розрахунки. Результати, отримані у цій роботі, можуть бути використані під час дослідження напружено деформованого стану елементів багатошарового попередньо напруженого півпростору за дії рухомого навантаження.

Конфлікт інтересів

Бабич Степан Юрійович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Ю. П. Глухов: концептуалізація, методологія, дослідження, написання — оригінальний проект. С. Ю. Бабич: валідація, формальний аналіз, методологія. Н. В. Юрченко: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Глухов Ю. П., Бабич С. Ю., Юрченко Н. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Glukhov, Yu. P. (2010). Dynamics of a layered pre-stressed half-space under a moving load. *Dopovidi NAN Ukrainy*, (2), 53–58. Retrieved from <https://nasplib.isofts.kiev.ua/handle/123456789/19593>
2. Guz, A. N. (2004). *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*. Kiev: “A.S.K”.
3. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses: in 2 parts. Ch. 1. General questions. Waves in infinite bodies and surface waves*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
4. Guz, A. N. (2016). *Elastic waves in bodies with initial (final) stresses: in 2 parts. Ch. 2. Waves in partially bounded bodies*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.

Gluchov Yu. P., Babich S. Yu., Yurchenko N. V. Investigation of characteristic equations for three-dimensional dynamic problems. General initial stressed state. Compressible bodies.

The influence of initial stresses and the velocity of a moving surface load on the values of the roots of the characteristic equations corresponding to the equations of motion of compressible elements of a layered half-space is investigated. The case of a general initial stressed state is considered. An evaluation of the roots of the characteristic equations is performed. Numerical studies are presented for a compressible material with a harmonic-type elastic potential. The influence of initial stresses and the load velocity on the discriminant of the characteristic equation is illustrated.

Keywords: multilayer half-space, initial (residual) stresses, moving load, characteristic equation.

Отримано: 05.04.2026

Прийнято: 20.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.85:515.1:519.71

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).31-39](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).31-39)С. В. Єршов¹, Є. Д. Симонов²

¹ Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України,
завідувач відділу методів та технологічних засобів побудови інтелектуальних програмних
систем, старший науковий співробітник,
доктор фізико-математичних наук
sershv@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9895-777X>

² Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України,
молодший науковий співробітник відділу методів та технологічних засобів побудови
інтелектуальних програмних систем
e.simonov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2581-2001>

ІНФОРМАЦІЙНО-ТОПОЛОГІЧНИЙ ПІДХІД ДО ВІЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ У ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

У роботі запропоновано інформаційно-топологічний підхід до виявлення аномалій у динамічних системах на основі реконструкції фазового простору, аналізу локальної топологічної структури та РН-керованого квантування. Метод поєднує геометричні та інформаційні характеристики динаміки шляхом побудови індукованого дискретного процесу станів системи. Введено ентропійні та топологічні функціонали, що характеризують структуру еволюції системи, та отримано оцінку зміщення швидкості ентропії, яка пов'язує інформаційну похибку з геометричною похибкою квантування та зміною розподілу локальних топологічних типів. Показано, що контроль цих величин забезпечує стабільність ентропійної характеристики. Експериментальні результати підтверджують ефективність запропонованого підходу для стабільної детекції аномалій у динамічних процесах.

Ключові слова: динамічні системи, реконструкція фазового простору, виявлення аномалій, топологічний аналіз даних, ентропія, персистентна гомологія.

1. Вступ. Виявлення аномалій у динамічних системах є важливою задачею аналізу складних процесів у технічних, природних та інформаційних системах. Значна частина сучасних методів ґрунтується на статистичному або машинному аналізі часових рядів, проте такі підходи не завжди враховують геометричну та топологічну структуру динаміки системи. У багатьох випадках аномальні режими проявляються не лише через зміну статистичних характеристик, але й через порушення структури еволюції у фазовому просторі. У зв'язку з цим актуальним є поєднання інформаційних характеристик динаміки з методами топологічного аналізу даних. Метою роботи є розроблення інформаційно-топологічного підходу до виявлення аномалій у динамічних системах на основі реконструкції фазового простору, РН-керованого квантування та аналізу ентропійних характеристик індукованого процесу.

2. Формалізація моделі представлення динамічної системи. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де Ω — простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ — σ -алгебра підмножин Ω , а $\mathbb{P}$ — ймовірнісна міра на $(\Omega, \mathcal{F})$. На цьому просторі визначимо дискретний у часі стохастичний процес $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, $x_t \in \mathbb{R}^d$ який інтерпретується як послідовність спостережуваних станів багатовимірної динамічної системи. Кожен вектор $x_t = \left(x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(d)}\right)^\top$ описує стан системи у момент часу

t . Нехай $\mathcal{F}_{-\infty}^t = \sigma(x_s : s \leq t)$ — σ -алгебра минулого, а $\mathcal{F}_{t+k}^\infty = \sigma(x_s : s \geq t+k)$ — σ -алгебра спостережень, то коефіцієнти β -міксингу можна визначити як:

$$\beta(k) = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[\sup_{A \in \mathcal{F}_{t+k}^\infty} |\mathbb{P}(A | \mathcal{F}_{-\infty}^t) - \mathbb{P}(A)| \right]. \quad (1)$$

Якщо $\beta(k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то це вказує на асимптотичне згасання статистичної залежності між достатньо віддаленими у часі фрагментами траєкторії.

Нехай $L \in \mathbb{N}$ — довжина вікна. Для кожного моменту часу t , такого що $1 \leq t \leq T - L + 1$, визначається фрагмент траєкторії

$$X_t^{(L)} = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+L-1}) \in (\mathbb{R}^d)^L. \quad (2)$$

Послідовність $\{X_t^{(L)}\}_{t=1}^{T-L+1}$ задає ковзне представлення траєкторії $\{x_t\}_{t=1}^T$ та описує її локальні часові сегменти.

Відображення $\Phi_{m,\tau} : (\mathbb{R}^d)^m \rightarrow \mathbb{R}^{dm}$ визначає послідовність векторів $y_t = (x_t, x_{t-\tau}, \dots, x_{t-(m-1)\tau})$, $y_t \in \mathbb{R}^{dm}$, визначених для $t = (m-1)\tau + n$, $n = 1, \dots, T$. Відповідно, послідовність $\{y_t\}_{t=(m-1)\tau+1}^T$ розглядається як реконструйована траєкторія системи [1–3]. Для кожного індексу $u = (m-1)\tau + 1, \dots, T - L + 1$ визначимо підмножину $W_u = \{y_u, y_{u+1}, \dots, y_{u+L-1}\} \subset \mathbb{R}^{dm}$, що відповідає фрагменту реконструйованої траєкторії довжини L і описує локальну еволюцію системи у фазовому просторі, а сімейство множин $\{W_u\}$ утворює розбиття траєкторії на локальні фрагменти. Нехай $N_k(y) \subset Y \setminus \{y\}$ — множина k -найближчих сусідів точки y у евклідовій метриці. Відповідний локальний окіл визначається як:

$$B_r(y) = \{y\} \cup N_k(y), \quad (3)$$

де r — відстань до k -го сусіда.

Для кожного параметра масштабу $\varepsilon > 0$ вводиться комплекс $VR_\varepsilon(B_r(y))$ у якому симплекс $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$ включається тоді і лише тоді, коли $\|v_i - v_j\| \leq \varepsilon, \forall i, j$. Зміна параметра ε породжує фільтрацію симпліціальних комплексів $VR_{\varepsilon_1}(B_r(y)) \subset VR_{\varepsilon_2}(B_r(y)) \subset \dots$ на якій обчислюються групи гомологій $H_q(VR_\varepsilon(B_r(y)))$ [4], а для подальшого аналізу використовуються відповідні числа Бетті $\beta(y) = \text{rank } H_q(B_r(y))$, відповідно, кожній точці y ставиться у відповідність вектор локального топологічного типу $\beta(y) = (\beta_0(y), \beta_1(y))$. Обчислення цього вектора для всіх точок множини Y визначає дискретну множину топологічних конфігурацій $\{\beta(y_t)\}$, а отримані топологічні типи використовуються для побудови процедури квантування фазового простору [5], та отримання реконструйованої траєкторії $Y = \{y_t\}_{t=(m-1)\tau+1}^T \subset \mathbb{R}^{dm}$, що утворює дискретну вибірку точок фазового простору та апроксимує геометрію еволюції системи.

Нехай задано натуральне число K . Квантування визначається як розбиття:

$$Q = \{C_1, \dots, C_K\}, \quad Y = \bigcup_{i=1}^K C_i, \quad C_i \subset Y, \quad C_i \cap C_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j. \quad (4)$$

Кожному класу C_i ставиться у відповідність точка $c_i \in \mathbb{R}^{dm}$, яка інтерпретується як центр відповідного класу C_i . З цим розбиттям пов'язується відображення квантування $\varphi_Q : \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \{1, \dots, K\}$, $\varphi_Q(y) = \{i, y \in C_i\}$. У класичній

постановці векторного квантування ця умова формалізується через мінімізацію середньоквадратичної похибки апроксимації [6]:

$$E(Q) = \sum_{y \in Y} \|y - c_{\varphi_Q(y)}\|^2. \quad (5)$$

Вводиться емпіричний розподіл топологічних типів:

$$p^{\text{bef}}(\beta) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} \mathbf{1}_{\{\beta(y)=\beta\}}, \quad (6)$$

та розподіл топологічних конфігурацій:

$$p^{\text{aft}}(\beta) = \frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} \mathbf{1}_{\{\beta(c_{\varphi_Q(y)})=\beta\}}. \quad (7)$$

Для кількісної оцінки зміни розподілу топологічних типів використовується дивергенція Кульбака–Лейблера:

$$\Omega(Q) = D_{KL}(p^{\text{bef}} \| p^{\text{aft}}(\beta)). \quad (8)$$

З урахуванням (8) вводиться функціонал якості квантування:

$$J(Q) = \sum_{y \in Y} \|y - c_{\varphi_Q(y)}\|^2 + \lambda \Omega(Q), \quad (9)$$

де $\lambda > 0$ — параметр, що визначає баланс між точністю апроксимації та збереженням топологічної структури реконструйованого простору.

Враховуючи (9), оптимальне квантування визначається як розв’язок:

$$Q^* = \arg \min_Q J(Q). \quad (10)$$

Для реконструйованої траєкторії визначається дискретний процес $s_t = \varphi_Q(y)$, та послідовність $\{s_t\}_{t=(m-1)\tau+1}^T$, що описує еволюцію системи.

Таким чином, побудовано формальну схему переходу від багатовимірного процесу спостережень $\{x_t\} \in \mathbb{R}^d$ до індукованого дискретного процесу $\{s_t\}$.

3. Контроль топологічної структури. Для кількісної оцінки відхилення між розподілами використовується нерівність:

$$\|p^{\text{bef}} - p^{\text{aft}}(\beta)\|_1 \leq \sqrt{2\Omega(Q)}. \quad (11)$$

Таким чином, функціонал $\Omega(Q)$, що контролює відхилення між розподілами локальних топологічних типів у метриці повної варіації:

$$\Omega(Q) \rightarrow 0 \Rightarrow \|p^{\text{bef}} - p^{\text{aft}}(\beta)\|_1 \rightarrow 0. \quad (12)$$

Умова (12) означає, що при малому значенні $\Omega(Q)$ статистична структура локальних топологічних конфігурацій реконструйованого фазового простору зберігається після квантування [7].

Для кожної точки $y \in Y$ введемо похибку квантування:

$$e_Q = \|y - c_{\varphi_Q(y)}\|, e_Q^{\max} := \sup_{y \in Y} e_Q(y). \quad (13)$$

З урахуванням (8), можна зробити висновок, що виконуються умови:

$$\frac{1}{|Y|} \sum_{y \in Y} (e_Q(y))^2 \leq \frac{J(Q)}{|Y|}, \quad e_Q^{\max} \leq \left(\sum_{y \in Y} (e_Q(y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq J(Q)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Для локального околу $B_r(y) \subset Y$ (3) визначимо множину центрів класів як $B_r^Q(y) := \{c_{\varphi_Q(y)} : z \in B_r(y)\}$, тоді має місце оцінка:

$$d_H(B_r(y), B_r^Q(y)) \leq e_Q^{\max}. \quad (15)$$

Для кожного $z \in B_r(y)$ існує точка $c_{\varphi_Q(y)} \in B_r^Q(y)$, така що:

$$\|z - c_{\varphi_Q(y)}\| = e_Q(z) \leq e_Q^{\max}, \quad (16)$$

та, відповідно, кожен елемент множини $B_r^Q(y)$ є образом деякого $z \in B_r(y)$.

Нехай $D_q(B_r(y))$ та $D_q(B_r^Q(y))$ — q -вимірні діаграми персистентності, побудовані для відповідних локальних множин. Тоді виконується умова:

$$d_B(D_q(B_r(y)), D_q(B_r^Q(y))) \leq d_H(B_r(y), B_r^Q(y)). \quad (17)$$

Відповідно,

$$d_B(D_q(B_r(y)), D_q(B_r^Q(y))) \leq e_Q^{\max} \leq J(Q)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Умови (15)–(16) надають прямий контроль зміни локальної топології.

4. Оцінка похибки ентропійної характеристики індукованого процесу. Нехай існує границя

$$H_Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(s_1, \dots, s_n) = H(s_0 | s_{-\infty}^{-1}), \quad (19)$$

та вводиться еталонне відображення $\varphi^* : \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \{1, \dots, K\}$, яке задає топологічно узгоджене представлення реконструйованої динаміки процесу $\sigma_t = \varphi^*(y_t)$, та має швидкість ентропії

$$H^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = H(\sigma_0 | \sigma_{-\infty}^{-1}). \quad (20)$$

Похибка характеристики індукованого процесу визначається величиною

$$\Delta H(Q) = |H_Q - H^*|. \quad (21)$$

Для будь-якого $m \geq 1$, та за умов (19) і (20):

$$|r_m(Q)| + |r_m^*| \leq C_\beta \beta(m), \quad C_\beta > 0, \quad (22)$$

тоді

$$\Delta H(Q) \leq |H(s_0|s_{-m}^{-1}) - H(\sigma_0|\sigma_{-m}^{-1})| + C_\beta \beta(m). \quad (23)$$

Якщо ймовірності всіх допустимих блоків еталонного процесу обмежені низу деякою константою $\pi_m > 0$, то:

$$\begin{aligned} |H(s_0|s_{-m}^{-1}) - H(\sigma_0|\sigma_{-m}^{-1})| &\leq L_m \left\| P_Q^{(m)} - P_*^{(m)} \right\|_1, \\ L_m &= 1 + |\log \pi_m| + |\log \pi_{m-1}|, \end{aligned} \quad (24)$$

де $P_Q^{(m)}, P_*^{(m)}$ — блокові розподіли довжини $m+1$.

Позначимо ймовірність помилки перекодування $\eta(Q) := P(s_0 \neq \sigma_0)$, тоді:

$$\begin{aligned} \left\| P_Q^{(m)} - P_*^{(m)} \right\|_1 &\leq 2(m+1)\eta(Q), \eta(Q) \leq \\ &\leq A_1 \|p^{\text{bef}} - p^{\text{aft}}(\beta)\|_1 + A_2 \text{dist}(Q), \quad A_1, A_2 > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Використовуючи (11), отримаємо

$$\eta(Q) \leq A_1 \sqrt{2\Omega(Q)} + A_2 \text{dist}(Q). \quad (26)$$

Підставляючи (24) у (24), отримуємо

$$|H(s_0|s_{-m}^{-1}) - H(\sigma_0|\sigma_{-m}^{-1})| \leq 2(m+1)L_m \left(A_1 \sqrt{2\Omega(Q)} + A_2 \text{dist}(Q) \right). \quad (27)$$

Разом з (23) це дає оцінку похибки швидкості ентропії

$$\Delta H(Q) \leq C_1 \sqrt{2\Omega(Q)} + C_2 \text{dist}(Q) + C_\beta \beta(m), \quad C_1, C_2 > 0. \quad (28)$$

За умови $\beta(m) = o(\sqrt{\Omega(Q)} + \text{dist}(Q))$, отримуємо асимптотичну оцінку

$$\Delta H(Q) \leq \tilde{C}_1 \sqrt{\Omega(Q)} + \tilde{C}_2 \text{dist}(Q). \quad (29)$$

Відповідно, контроль регуляризатора і похибки стабілізує ентропію.

5. Детекція аномалій. Нехай задано ковзне вікно $W_u = \{y_u, \dots, y_{u+L-1}\}$ та фрагмент індукованого процесу $S_u^L = \{s_u, \dots, s_{u+L-1}\}$. Визначимо статистики:

$$H(u) = \hat{H}(S_u^L), \quad H_{\text{loc}}(u) := - \sum_{\beta} \hat{p}_u(\beta) \log \hat{p}_u(\beta), \quad (30)$$

де $\hat{p}_u(\beta)$ — емпіричний розподіл топологічних типів (10).

Для сусідніх вікон введемо змінні характеристики:

$$\Delta H(u) = H(u+1) - H(u), \quad \Delta H_{\text{loc}}(u) = H_{\text{loc}}(u+1) - H_{\text{loc}}(u). \quad (31)$$

Відповідно, аномальний режим відповідає умові:

$$|\Delta H(u)| \gg 0, \quad |\Delta H_{\text{loc}}(u)| \approx 0. \quad (32)$$

Нехай $H^*(u)$ — швидкість ентропії, тоді для кожного вікна маємо:

$$\begin{aligned} |\Delta H(u) - \Delta H^*(u)| &\leq C_1 \left(\sqrt{\Omega_{u+1}(Q)} + \sqrt{\Omega_u(Q)} \right) + \\ &+ C_2 (\text{dist}_{u+1} + \text{dist}_u)(Q) + r_{u+1} + r_u. \end{aligned} \quad (33)$$

Звідси отримуємо

$$|\Delta H_{\text{loc}}(u) - \Delta H_{\text{loc}}^*(u)| \leq L_{u+1} \sqrt{2\Omega_{u+1}(Q)} + L_u \sqrt{2\Omega_u(Q)}. \quad (34)$$

З огляду на метод із розділів 1–4, аномалії визначають як суттєві зміни інформаційної динаміки, відповідно:

$$A(u) = \frac{|\Delta H(u)|}{\varepsilon_H + \sqrt{\Omega_u(Q)} + \text{dist}_u(Q)} \mathbf{1}_{\{|\Delta H_{\text{loc}}(u)| \leq \varepsilon_{\text{loc}}\}}, \quad (35)$$

$$\sup_u \Omega_u(Q) \rightarrow 0, \quad \sup_u \text{dist}_u(Q) \rightarrow 0.$$

Статистика (35) узгоджується з еталонним представленням динаміки і забезпечує стабільну детекцію аномалій у режимах функціонування систем.

6. Тестування моделі. Для перевірки стабільності ентропійної характеристики індукованого процесу проведено порівняльний експеримент між стандартним квантуванням k-means та РН-керованим квантуванням.

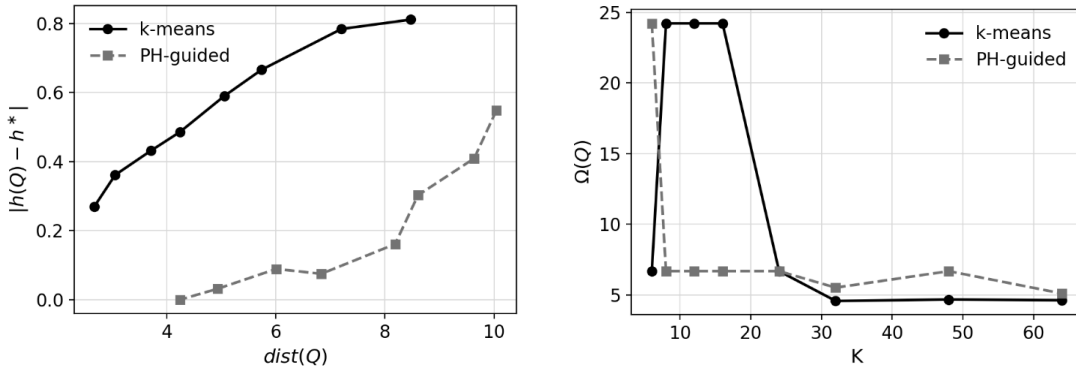


Рис. 1. Оцінка зміщення при різних схемах квантування.

Результати наведені на рисунку 1, де лівий графік демонструє, що для k-means зміщення швидкості ентропії зростає від $\approx 0,27$ до $>0,8$ зі збільшенням $\text{dist}(Q)$, тоді як РН-кероване квантування забезпечує значно менші значення ($\approx 0,16$) у широкому діапазоні похибок, що вказує на вищу стабільність. Правий графік демонструє залежність $\Omega(Q)$ від K , де при малих K стандартний метод має суттєве топологічне спотворення (≈ 24) проти ≈ 7 для РН-підходу. Зі зростанням K обидва методи покращуються, але РН-квантування досягає стабільності раніше та з меншою варіативністю. Отже, топологічна регуляризація одночасно зменшує ентропійне зміщення та топологічне спотворення.

На рисунку 2 показано, що k-means концентрує центри у щільних зонах траєкторій, спричиняючи нерівномірне покриття атрактора. Натомість РН-кероване квантування забезпечує більш рівномірне розміщення вздовж глобальної структури, що точніше відтворює динаміку. Це узгоджується з кількісними результатами.

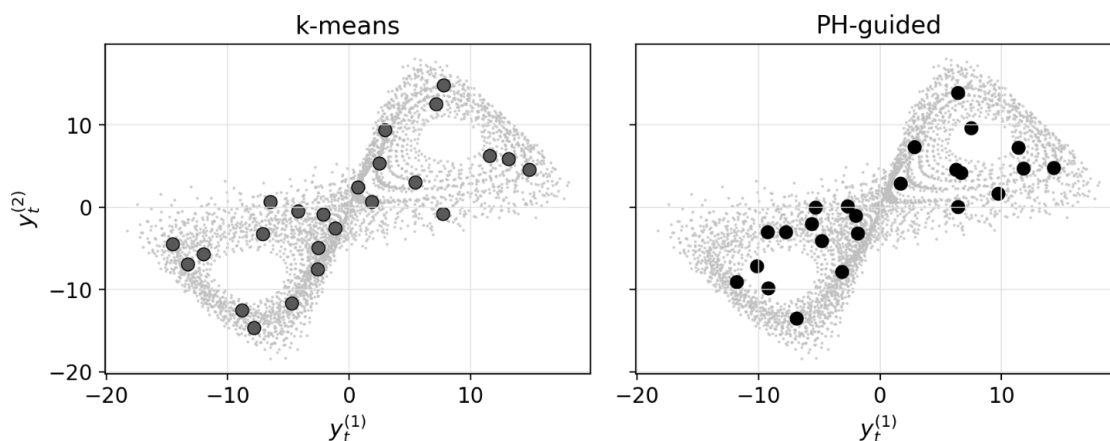
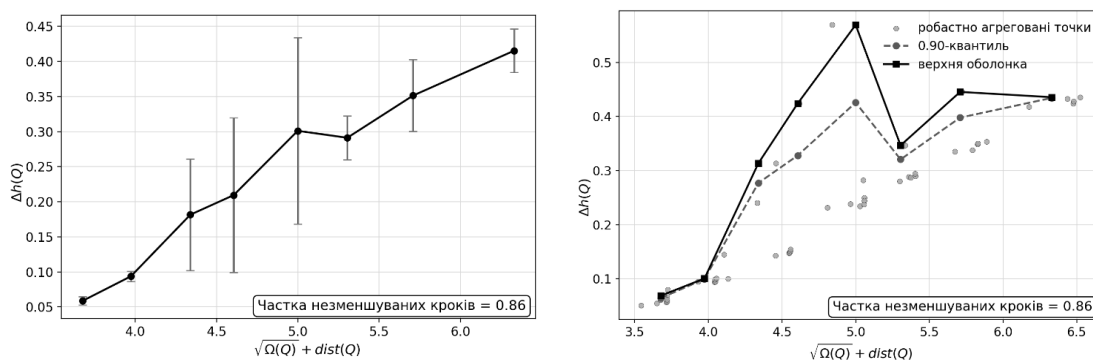


Рис. 2. Порівняння просторового розміщення центрів квантування.

Рис. 3. Емпірична перевірка монотонної структури оцінки $\Delta H(Q)$.

Емпіричні результати валідації (рис. 3) моделі підтверджують монотонне зростання зміщення ентропійної швидкості $\Delta H(Q)$ зі збільшенням інтегральної похибки квантування $\sqrt{\Omega(Q)} + \text{dist}(Q)$, із високою узгодженістю для непараметричної моделі $R_{iso}^2 = 0.830$. Лінійна апроксимація демонструє слабку якість $R^2 = 0.602$ і вказує на домінування геометричної складової $\text{dist}(Q)$ у формуванні зміщення. Зростання як середніх, так і граничних значень $\Delta H(Q)$ свідчить про прямий вплив похибки квантування на стабільність системи, що обґрунтовує використання цього показника як індикатора аномалій.

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновано інформаційно-топологічний підхід до виявлення аномалій, що поєднує реконструкцію фазового простору, локальний топологічний аналіз і РН-кероване квантування. Показано, що контроль $\text{dist}(Q)$ та $\Omega(Q)$ стабілізує ентропійну характеристику та обмежує структурні спотворення; отримано оцінку зміщення, яка пов'язує $\Delta H(Q)$ із сумарною похибкою. Експерименти підтверджують зменшення ентропійного зміщення та підвищення надійності детекції аномальних режимів.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Єршов: наукове керівництво, формування концепції та методології підходу, аналіз результатів і редагування рукопису. Є. Д. Симонов: огляд літератури, формалізація моделей, розробка ПЗ (РН-кероване квантування), проведення експериментів, візуалізація та підготовка тексту.

Авторські права ©



(2026). Єршов С. В., Симонов Є. Д.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Symonov, D. (2021). Algorithm for determining the optimal flow in Supply Chains, considering multi-criteria conditions and stochastic processes. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, (2), 109–116. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.15>
2. Hanifa, R. A., Thobirin, A., & Surono, S. (2025). Comparative study of unsupervised anomaly detection methods on imbalanced time series data. *Jurnal Ilmiah Kursor*, 13(2), 56–63. <https://doi.org/10.21107/kursor.v13i2.431>
3. Hussain Shah, W., Rafia Fatima, S., Huerta-Cuellar, G., García-López, J. H., Mata Ramirez, C. G., & Jaimes-Reátegui, R. (2025). Topological data analysis approach to time series and shape analysis of dynamical system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 35(6). <https://doi.org/10.1063/5.0268340>
4. Uray, M., Giunti, B., Kerber, M., & Huber, S. (2024). Topological Data Analysis in smart manufacturing: State of the art and future directions. *Journal of Manufacturing Systems*, 76,

- 75–91. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2024.07.006>
5. Islambekov, U., Pathirana, H., Khormali, O., Akçora, C., & Smirnova, E. (2024). A topological approach for capturing high-order interactions in graph data with applications to anomaly detection in time-varying cryptocurrency transaction graphs. *Foundations of Data Science*, 6(4), 492–513. <https://doi.org/10.3934/fods.2024024>
 6. Palagin, O., & Symonov, D. (2023). Cybernetic model of rational world order under the paradigm of directed evolution. *International Scientific Technical Journal "Problems of Control and Informatics"* 67(6). <https://doi.org/10.34229/1028-0979-2022-6-5>
 7. Ekle, O. A., & Eberle, W. (2024). Anomaly Detection in Dynamic Graphs: A Comprehensive Survey. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*. <https://doi.org/10.1145/3669906>

Yershov S. V., Symonov Y. D. Information-topological approach to anomalies detection in dynamic systems.

The paper proposes an information-topological approach to anomaly detection in dynamical systems based on phase space reconstruction, local topological structure analysis, and PH-guided quantization. The method combines geometric and informational characteristics of dynamics by constructing an induced discrete process of system states. Entropy and topological functionals are introduced that characterize the structure of system evolution, and an estimate of the entropy rate shift is obtained, which connects the information error with the geometric quantization error and the change in the distribution of local topological types. It is shown that controlling these quantities ensures the stability of the entropy characteristic. Experimental results confirm the effectiveness of the proposed approach for stable anomaly detection in dynamical processes.

Keywords: dynamical systems, phase space reconstruction, anomaly detection, topological data analysis, entropy, persistent homology.

Отримано: 23.03.2026

Прийнято: 08.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 512.53+512.64

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).40-44](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).40-44)**О. В. Зубарук**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вчитель математики Українського фізико-математичного ліцею,
кандидат фізико-математичних наук

sambrinka@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3620-4262>

АЛГЕБРИ АУСЛЕНДЕРА НЕКОМУТАТИВНИХ НЕІДЕМПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ НУЛЬОВОГО ЕЛЕМЕНТА

У сучасній теорії зображень важливу роль відіграють дослідження не лише самих зображень різних об'єктів над полями, а і їхніх категорій зображень. Однією з форм опису таких категорій є обчислення алгебр ендоморфізмів прямої суми представників класів еквівалентності нерозкладних зображень. Такі алгебри називаються алгебрами Ауслендера. Вказаний опис особливо ефективний у випадках об'єктів скінченного зображувального типу. Раніше автором (разом з В. М. Бондаренком в деяких випадках) описано алгебри Ауслендера для комутативних напівгруп та некомутативних ідемпотентних напівгруп третього порядку. Ця робота завершує аналогічні дослідження у некомутативному випадку.

Ключові слова: матричне зображення, неідемпотентна напівгрупа, скінченний зображувальний тип, канонічна форма, алгебра Ауслендера.

1. Вступ. Стаття присвячена матричним зображенням напівгруп третього порядку. Такі напівгрупи описані в термінах таблиць Келі ще в середині минулого століття Т. Тамурою (1953 р.) та, за допомогою комп'ютерної програми, Г. Е. Форсайтом (1955 р.). Проте мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для напівгруп третього порядку було вказано порівняно недавно (див. [1] разом з посиланнями). Це дало можливість вперше описати матричні зображення цих напівгруп над довільним полем [2]. З використанням цього результату в особистих статтях автора та сумісних статтях з В. М. Бондаренком описано алгебри Ауслендера (як одну з форм опису категорій зображень) для всіх комутативних та більшості некомутативних напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип. Ця робота завершує такі дослідження для некомутативних напівгруп.

2. Постановка завдання. Тематика цієї статті пов'язана з використанням методів Київської школи з теорії матричних задач для дослідження матричних зображень скінченних напівгруп. Більш конкретно, мова йде про опис категорій зображень для напівгруп малого порядку скінченного зображувального типу. У цій статті така задача поставлена для некомутативних неідемпотентних напівгруп третього порядку без нульового елемента.

3. Огляд літератури. У статті [2] вказано канонічні форми матричних зображень напівгруп третього порядку, що мають скінченний зображувальний тип, тобто зі скінченим числом класів еквівалентності нерозкладних зображень. Це стало можливим у зв'язку з тим, що раніше цими ж авторами для таких напівгруп були вказані мінімальні системи твірних і відповідні системи визначальних співвідношень (див. [1] разом з посиланнями). Детальний огляд

літератури щодо подальших результатів з цієї тематики наведено в статті [3], опублікованій в цьому році; у ньому, зокрема, вказані статті про опис матричних алгебр Ауслендера над довільним полем.

Ця стаття присвячена опису алгебр Ауслендера некомутиативних неідемпотентних напівгруп третього порядку без нульового елемента.

4. Формулювання основних результатів.

4.1. Основні означення. Будемо використовувати добре відомі означення із [3, 4.1]. Нагадаємо основні із них. З формальних міркувань всі напівгрупи вважаються скінченними.

Матричним зображенням напівгрупи S розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K називається довільний гомоморфізм $T : x \rightarrow T(x)$ із S в напівгрупу $M_n(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ з елементами із поля K . Природно вважати, що у випадку, коли напівгрупа S має одиничний (відповідно нульовий) елемент, одиничному (відповідно нульовому) елементу відповідає одинична (відповідно нульова) матриця.

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(x) = CT'(x)C^{-1}$ для всіх $x \in S$.

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$(T \oplus T')(x) := T(x) \oplus T'(x) = \left(\begin{array}{c|c} T(x) & 0 \\ \hline 0 & T'(x) \end{array} \right)$$

для довільного $x \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох ненульових зображень, і *нерозкладним* в іншому разі (нульове матричне зображення — це зображення розмірності 0).

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють категорію $\text{Rep}_K(S)$, об'єктами якої є всі зображення, а множина морфізмів $\text{Hom}(T, T')$ з об'єкту T розмірності n в об'єкт T' розмірності t складається із всіх матриць Y розміру $n \times t$ таких, що $T(x)Y = YT'(x)$ для довільного $x \in S$.

Нехай S — напівгрупа скінченного зображувального типу. Зафіксуємо представники $T_1, \dots, T_s$ в класах еквівалентності нерозкладних зображень. *Алгеброю Ауслендера $\text{Aus}_K(S)$ напівгрупи S над полем K* називається алгебра

$$\text{End}(T_1 \oplus \dots \oplus T_s) := \text{Hom}(T_1 \oplus \dots \oplus T_s, T_1 \oplus \dots \oplus T_s)$$

ендоморфізмів прямої суми представників $T_1, \dots, T_s$.

Щоб підкреслити, що розглядаються саме матричні зображення напівгруп, алгебру Ауслендера будемо також називати матричною алгеброю Ауслендера.

4.2. Основні теореми. Згідно з результатами роботи [2] некомутиативні неідемпотентні напівгрупи третього порядку без нульового елемента, що мають скінченний зображувальний тип, вичерпуються, з точністю до ізоморфізму, напівгрупою під номером 14 з твірними b, c і співвідношеннями $b^3 = b^2$, $c^2 = c$, $bc = b^2$, $cb = c$, яку позначатимемо через S , та дуальною до неї напівгрупою S^{op} (тобто такою, в якій множення елементів здійснюється в оберненому порядку).

Наступні теореми описують алгебри Ауслендера вказаних напівгруп над довільним полем K .

Теорема 1. *Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S)$ напівгрупи S над полем K складається з усіх матриць вигляду*

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{21} & x_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & x_{57} & 0 & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{22} & x_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{86} & x_{87} & x_{11} & x_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{96} & x_{97} & 0 & x_{99} \end{pmatrix},$$

де x_{ij} — елементи поля K .

Теорема 2. Матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S^{op})$ складається з усіх матриць, транспонованих до матриць із теореми 1.

Легко бачити, що обидві алгебри Ауслендера мають розмірність 20. Якщо позначити через e_{ij} , де $1 \leq i, j \leq 9$, матрицю, в якій на місці (i, j) стоїть одиничний елемент, а на всіх інших місцях — нульовий, то із теорем випливає, що (в обох випадках) за базисні елементи можна взяти наступні:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e_{11} + e_{88}, \lambda_2 = e_{21} + e_{48}, \lambda_3 = e_{22} + e_{44} + e_{66}, \lambda_4 = e_{31}, \lambda_5 = e_{32}, \lambda_6 = e_{33}, \\ \lambda_7 &= e_{45} + e_{67}, \lambda_8 = e_{46}, \lambda_9 = e_{47}, \lambda_{10} = e_{49}, \lambda_{11} = e_{55} + e_{77}, \lambda_{12} = e_{56}, \lambda_{13} = e_{57}, \\ \lambda_{14} &= e_{59}, \lambda_{15} = e_{86}, \lambda_{16} = e_{87}, \lambda_{17} = e_{89}, \lambda_{18} = e_{96}, \lambda_{19} = e_{97}, \lambda_{20} = e_{99}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $e_{ij}e_{sk} = e_{ik}$, якщо $j = s$, і $e_{ij}e_{sk} = 0$, якщо $j \neq s$, легко виписати таблиці множення для обох алгебр Ауслендера.

5. Доведення теорем 1 і 2. Обчислимо спочатку матричну алгебру Ауслендера напівгрупи S .

Розглянемо матричне зображення напівгрупи S , яке є канонічним з одиничними клітинами порядку 1 (див. теорему 2 [2]) і яке згідно з означенням канонічної форми переставно подібне прямій сумі представників всіх класів еквівалентності нерозкладних зображень:

$$B_0 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$C_{11} = B_{11}$, а решта блоків матриць B_{ij} і C_{ij} нульові.

За означенням (матрична) алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S)$ — це алгебра всіх матриць $X = (x_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 9$ таких, що $B_0X = XB_0$ і $C_0X = XC_0$. Матрицю X будемо розглядати як блокову матрицю $X = (X_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, блоки X_{ij} якої мають такі ж розміри, як відповідні розміри матриць B_0 і C_0 .

Розглянемо спочатку рівність $B_0X = XB_0$. Оскільки матриця B_0 є (з точністю до однакової перестановки рядків та стовпців) прямою сумою клітин

Жордана порядків 1 та 2, то легко обчислити або показати, скориставшись добре відомими результатами (див., напр., [4]), що $X_{12} = 0$, $X_{13} = 0$, $X_{21} = 0$, $X_{31} = 0$,

$$X_{22} = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}, \quad X_{23} = \begin{pmatrix} x_{48} & x_{49} \\ x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{86} & x_{87} \\ 0 & 0 & x_{96} & x_{97} \end{pmatrix}.$$

Тоді рівність $C_0 X = X C_0$ еквівалентна рівностям $C_{21} X_{11} = X_{22} C_{21} + X_{23} C_{31}$ і $C_{31} X_{11} = X_{32} C_{21} + X_{33} C_{31}$ або, в розгорнутому вигляді,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} \\ x_{54} & x_{55} & x_{56} & x_{57} \\ 0 & 0 & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{48} & x_{49} \\ x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{86} & x_{87} \\ 0 & 0 & x_{96} & x_{97} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{88} & x_{89} \\ x_{98} & x_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{48} & 0 & 0 \\ x_{58} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{88} & 0 & 0 \\ x_{98} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_{21} = x_{48}$, $x_{22} = x_{44}$, $x_{23} = x_{54} = x_{58} = 0$ та $x_{11} = x_{88}$, $x_{12} = x_{13} = x_{98} = 0$.

Теорема 1 доведена.

Оскільки матриці $T'(x)$, транспоновані до матриць $T(x)$ зображення T , задають зображення дуальної напівгрупи (бо $[T(x)T(y)]' = T'(y)T'(x)$), то матрична алгебра Ауслендера $\mathcal{A}_K(S_1^{op})$ задається матрицею, транспонованою до матриці, вказаній у теоремі 1. І, отже, теорема 2 впливає із теореми 1.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вивчаються матричні зображення над полем некомутованих ідемпотентних напівгруп порядку три скінченного зображувального типу. Для таких напівгруп описано алгебри Ауслендера над довільним полем в абстрактному та матричному виглядах.

Отримані результати та відповідний метод досліджень знайдуть застосування при вивченні зображень інших напівгруп.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Зубарук О. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2015). On characteristic properties of semigroups. *Algebra Discrete Math.*, 20(1), 32–39.
2. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ya. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 32(1), 36–49. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1\(32\).36-49](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2018.1(32).36-49) [in Ukrainian].
3. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2026). Describing the Auslander algebras of non-commutative idempotent semigroups of third order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 48(1), 13–20. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).13-20](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).13-20). [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2024). Σ -functions of the categories of matrix representations of nilpotent semigroups. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 282(5), 601–615. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07205-x>.

Zubaruk O. V. The Auslander algebras of non-commutative non-idempotent semigroups of third order without zero element.

In modern representation theory an important role is played investigation not only of the representations of various algebraic objects over fields, but also of their categories of representations. One form of describing such categories is to calculate the algebras of endomorphisms of the direct sum of representatives of the equivalence classes of indecomposable representations. Such algebras are called the Auslander algebras. The indicated description is especially effective in cases of objects of the finite representation type. Earlier the author (together with V. M. Bondarenko in some cases) have described the Auslander algebras for commutative and non-commutative idempotent semigroups of the third order. This work finished analogous studies for non-commutative semigroups.

Keywords: matrix representation, non-idempotent semigroup, finite representation type, canonical form, Auslander algebra.

Отримано: 01.04.2026

Прийнято: 17.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).45-53](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).45-53)**О. В. Капустян¹, А. О. Краснеєва², Т. Ю. Жук³**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь,
доктор фізико-математичних наук, професор

kapustyan@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9373-6812>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
krasneyeva@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8058-1823>

³ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірантка кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь
zhuktetiana6@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8015-0038>

СТІЙКІСТЬ ТИПУ ISS ДЛЯ ГЛОБАЛЬНОГО АТРАКТОРА ПАРАБОЛІЧНОГО ВКЛЮЧЕННЯ ВІДНОСНО ЗБУРЕННЯ КРАЙОВИХ УМОВ

Досліджується якісна поведінка розв'язків нескінченновимірного еволюційного включення параболічного типу з ліпшицевою багатозначною правою частиною за наявності неавтономних збурень $d(t)$ на границі просторової області. У незбуреному випадку ($d \equiv 0$) така задача у фазовому просторі L^2 породжує багатозначну дисипативну напівгрупу, що має нетривіальну компактну рівномірно-притягуючу множину - глобальний аттрактор. Досліджується стійкість такого аттрактору щодо збурень $d(t)$ шляхом одержання робастної оцінки типу ISS, яка характеризує відхилення траєкторій збуреної системи від аттрактора. Дані дослідження є продовженням результатів роботи [1], де була встановлена асимптотична оцінка типу AG. Зараз за рахунок умови Ліпшиця одержується більш точна оцінка типу ISS.

Ключові слова: стійкість, параболічні включення, глобальний аттрактор, збурення, крайові умови.

1. Вступ. Важливу роль при вивченні якісної поведінки траєкторій нескінченновимірних динамічних систем відіграє поняття глобального аттрактору - компактної інваріантної рівномірно притягуючої підмножини фазового простору [2]. В системах, для яких природною є неєдиність розв'язку початкової задачі, вивчають глобальний аттрактор відповідної багатозначної напівгрупи (multi-valued semiflow) [3–7]. Зокрема, в роботах [4, 5] було доведено існування глобального аттрактору у фазовому просторі L^2 для параболічного включення, а також досліджено його залежність від параметру. Вичерпну відповідь на питання про залежність глобально притягуючих множин динамічних систем від збурень можна одержати в рамках теорії стійкості від входу до стану ISS [8–11]. Для глобальних аттракторів відповідні результати були одержані в [12–14], що дозволило одержувати оцінки типу ISS

$$\|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \beta(\|y_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty})$$

та AG

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|y(t, y_0, d)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty})$$

для широких класів еволюційних процесів з аттрактором Θ , що описуються вектором стану $y(t, y_0, d)$ зі збуреннями правої частини $d(t)$. Стійкість аттрактору відносно збурень в крайових умовах вивчалась в [1, 15]. Зокрема, для параболічного включення з напівнеперервною зверху правою частиною в [1] була одержана оцінка типу AG методами теорії рівномірних аттракторів багатозначних неавтономних систем. В даній роботі для ліпшицевої правої частини ми одержуємо більш точну оцінку ISS , використовуючи метод функцій Ляпунова і результати роботи [14]

2. Постановка задачі. Розглянемо наступну початково-крайову задачу відносно невідомої функції $y = y(t, x)$, $(t, x) \in Q = (0, +\infty) \times (0, l)$

$$\begin{cases} \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \in f(y(t, x)) + h(t, x), \\ y|_{x=0} = d_1(t), \quad y|_{x=l} = d_2(t), \\ y|_{t=0} = y_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де y_0 належать фазовому простору $X = L^2(0, l)$, норму в якому будемо позначати $\|\cdot\|$, збурення $d := \{h, d_1, d_2\}$ належать простору $L^\infty(0, +\infty; X) \times L^\infty(0, +\infty) \times L^\infty(0, +\infty)$, многозначне відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ є опуклозначним, компактнозначним і ліпшицевим, тобто

$$\exists L > 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R} \quad \text{dist}(f(u), f(v)) \leq L |u - v|, \quad (2)$$

де

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sup_{\xi_1 \in A_1} \inf_{\xi_2 \in A_2} |\xi_1 - \xi_2|.$$

Відомо [4], що за додаткової умови дисипативності

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \in f(s) \quad \xi \cdot s \leq \lambda s^2 + C, \quad (3)$$

де $C > 0$, $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{l^2})$, слабкі розв'язки (див. Означення 1) незбуреної задачі (1) ($d \equiv 0$) породжують багатозначну напівгрупу $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow 2^X$, для якої існує глобальний аттрактор $\Theta \subset X$.

Метою даної роботи є доведення робастної оцінки

$$\forall t \geq 0 \quad \|y_d(t, y_0)\|_{\Theta} \leq \beta(\|y_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (4)$$

де y_d - розв'язок (1), $\|y\|_{\Theta} = \text{dist}(y, \Theta)$, $\|\cdot\|_{\infty}$ - норма в L^∞ , $\beta \in KL$, $\gamma \in K$,

$$K = \{\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma - \text{неперервна, зростаюча}\},$$

$$KL = \{\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \text{неперервна, } \beta(\cdot, t) \in K, \quad \beta(s, \cdot) \text{ спадає до } 0\}.$$

3. Основний результат. Розв'язність (1) на $Q_T = (0, T) \times (0, l)$ будемо розуміти в сенсі наступного означення

Означення 1. Функція $y = y(t, x)$ є розв'язком (1) на $(0, T)$ якщо $y = v + \omega$, де $\omega = \omega(t, x)$ - розв'язок

$$\begin{cases} \frac{\delta \omega(t, x)}{\delta t} - \frac{\delta^2 \omega(t, x)}{\delta x^2} = 0, \\ \omega|_{x=0} = d_1(t), \omega|_{x=l} = d_2(t), \\ \omega|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$v = v(t, x)$ - розв'язок

$$\begin{cases} \frac{\delta v(t, x)}{\delta t} - \frac{\delta^2 v(t, x)}{\delta x^2} \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) + h(t, x), \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \quad (6)$$

Відомо [16], що якщо d_1, d_2 обмежені, абсолютно неперервні, $d_1(0) = d_2(0) = 0$, і $d_1, d_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, то задача (5) має єдиний розв'язок, причому

$$\|\omega\|_\infty \leq \max\{\|d_1\|_\infty, \|d_2\|_\infty\} \quad (7)$$

Оскільки ліпшицеве многозначне відображення є напівнеперервним зверху, то справедлива наступна

Лема 1. [1] Для всіх $T > 0$, $y_0 \in X$, $h \in L^\infty(0, T; X)$, $\omega \in L^\infty(Q_T)$ задача (6) має розв'язок на $(0, T)$, і кожен розв'язок (6) задовольняє для всіх $0 \leq \tau < t \leq T$ оцінки

$$\|v(t)\|^2 \leq \|v(\tau)\|^2 e^{-\delta(t-\tau)} + C_1(1 + \int_\tau^t \|h(s)\|^2 e^{-\delta(t-s)} ds), \quad (8)$$

$$\|v(t)\|^2 + \alpha \int_\tau^t \|v(s)\|_{H_0^1}^2 ds \leq \|v(\tau)\|^2 + C_2 \int_\tau^t (1 + \|h(s)\|^2) ds, \quad (9)$$

де додані константи δ , C_1 , α , C_2 залежать лише від $\|\omega\|_\infty$.

Лема 1 означає, що задача (6) є розв'язною на $[0, \infty)$.

Зауваження 1. Розв'язок (6) ми розуміємо в слабкому сенсі, тобто $v \in L^2(0, T; H_0^1(0, l))$, $v|_{t=0} = y_0$, і існує функція $g \in L^2(Q_T)$ така, що $\forall \eta \in C_0^\infty(0, l)$, $\forall \theta \in C_0^\infty(0, T)$

$$-\int_0^T (v(t), \eta) \theta_t dt + \int_0^T (v_x(t), \eta_x) \theta dt = \int_0^T (g(t) + h(t), \eta) \theta dt, \quad (10)$$

$$g(t, x) \in f(v(t, x) + \omega(t, x)) \text{ м. с. на } Q_T. \quad (11)$$

В силу (10) $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, l))$, отже функція $[0, T] \ni t \rightarrow v(t) \in X$ є абсолютно неперервною і умова $v|_{t=0} = y_0$ має сенс.

Покладемо для кожних $\omega \in L^\infty(Q)$, $h \in L^\infty(0, +\infty; X)$, $\tau \geq 0$, $y_\tau \in X$

$$V_{\{\omega, h\}}(t, \tau, y_\tau) = \{y(t) \mid y(\cdot) - \text{розв'язок (6) на } [\tau, +\infty)\} \quad (12)$$

з початковим даним $y(\tau) = y_\tau$ та правою частиною $f(v + \omega) + h$.

Тоді $V_{\{0,0\}}(t, 0, y_0) = V(t, y_0)$ - це багатозначна напівгрупа, породжена незбуреною задачею (1) і виконуються умови:

$$\begin{aligned} V_{\{\omega, h\}}(\tau, \tau, y_\tau) &= y_\tau, \forall \tau \geq 0, \forall y_\tau \in X \\ V_{\{\omega, h\}}(t, s, V_{\{\omega, h\}}(s, \tau, y_\tau)) &= V_{\{\omega, h\}}(t, \tau, y_\tau), \forall t \geq s \geq \tau \\ V_{\{\omega, h\}}(t + p, \tau + p, y_\tau) &= V_{\{\omega(\cdot + p), h(\cdot + p)\}}(t, \tau, y_\tau). \end{aligned}$$

Таким чином $V_{\{\omega, h\}}$ є сім'єю багатозначних процесів. Крім того для $d = \{h, d_1, d_2\}$ формула

$$S_d(t, y_0) = V_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0) + \omega(t), \quad (13)$$

де ω – розв'язок (5), охоплює всі розв'язки (1) в сенсі Означення 1.

Основним інструментом для виводу ISS оцінки (4) буде слугувати наступний результат.

Лема 2. [14] *Нехай є сім'я багатозначних напівпроцесів $\{V_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$, Σ - трансляційно -інваріантна, $0 \in \Sigma$, і нехай багатозначна напівгрупа V_0 має стійкий глобальний аттрактор Θ .*

Нехай існує неперервна функція $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, така, що $\forall r > 0, \forall t \geq 0$

$$\|y_1^0\| \leq r, \|y_2^0\| \leq r \Rightarrow \text{dist}(V_0(t, 0, y_1), V_0(t, 0, y_2)) \leq e^{c(r) \cdot t} \|y_1 - y_2\|. \quad (14)$$

Також нехай існують $\alpha \in K$ і неперервна $\eta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такі, що $\forall r > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\eta(r, t)}{t} < \infty$ і для $\forall t \in [0, 1]$

$$\|\sigma\|_\infty \leq r, \|y\|_\infty \leq r \Rightarrow \text{dist}(V_\sigma(t, 0, y), V_0(t, 0, y)) \leq \eta(r, t) \cdot \alpha(\|\sigma\|_\infty) \quad (15)$$

Крім того, нехай $\forall r > 0$ множина

$$\bigcup_{t \geq 0} \bigcup_{\|\sigma\|_\infty \leq r} \bigcup_{\|y\| \leq r} V_\sigma(t, 0, y) \quad (16)$$

є обмеженою.

Тоді $\{V_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ має локальну властивість ISS відносно Θ , тобто $\exists r > 0, \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K$ такі, що $\|y\|_\Theta \leq r, \|\sigma\|_\infty \leq r \Rightarrow \forall t \geq 0$

$$\|V_\sigma(t, 0, y)\|_\Theta \leq \beta(\|y\|_\Theta, t) + \gamma(\|\sigma\|_\infty). \quad (17)$$

Основним результатом роботи є наступна теорема щодо якісної поведінки траєкторій в просторі $X = L^2(0, l)$

Теорема 1. *Нехай для задачі (1) багатозначне відображення f задовольняє умови (2) і (3), а збурення $d = \{h, d_1, d_2\}$ задовольняє: $h \in L^\infty((0, \infty), X)$, $d_1, d_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, d_1, d_2 - абсолютно неперервні, $d_1(0) = d_2(0) = 0$, $\dot{d}_1, \dot{d}_2 \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Нехай Θ - глобальний аттрактор незбуреної задачі (1). Тоді $\exists r > 0, \exists \beta \in KL, \exists \gamma \in K$ такі, що для розв'язку $y_d = y_d(t, y_0)$ задачі (1) в сенсі Означення 1 справедливо: $\|d\|_\infty \leq r, \|y_0\| \leq r \Rightarrow \forall t \geq 0$

$$\|y_d(t, y)\|_\Theta \leq \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty). \quad (18)$$

Доведення. Нехай $d = \{h, d_1, d_2\}$ - збурення, $\sigma = \{\omega, h\}$, де ω - розв'язок (5) з крайовими умовами d_1, d_2 . Якщо ми доведемо оцінку (17), то в силу (13) для $y_d(t, y_0) \in S_d(t, y_0)$

$$\begin{aligned} \|y_d(t, y_0)\|_{\Theta} &= \inf_{\xi \in \Theta} \|y_d(t, y_0) - \xi\| \leq \text{dist}(S_d(t, y_0), \Theta) = \\ &= \sup_{z \in S_d(t, y_0)} \inf_{\xi \in \Theta} \|z - \xi\| = \sup_{z = \varphi + \omega(t), \varphi \in V_{\sigma}(t, 0, y_0)} \inf_{\xi \in \Theta} \|z - \xi\| \leq \\ &\leq \sup_{\varphi \in V_{\sigma}(t, 0, y_0)} \inf_{\xi \in \Theta} \|\varphi - \xi\| + \|\omega(t)\| \leq \|V_{\sigma}(t, 0, y_0)\|_{\Theta} + \sqrt{l} \cdot \|\omega\|_{\infty} \end{aligned}$$

Таким чином, якщо ми доведемо (17) з функціями $\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$, то (18) буде виконано з функціями $\beta = \tilde{\beta}, \gamma = \tilde{\gamma}(s) + \sqrt{l} \cdot s$.

Перевіримо виконання умов (14)-(16) з Лема 2. Для перевірки (14) розглянемо задачу (6) з $\omega \equiv 0, h \equiv 0$ і початковим даним $y_0^{(1)}$. Нехай v_1 - будь-який розв'язок цієї задачі (тобто $v_1(t) \in V_{\{0,0\}}(t, 0, y_0^{(1)}), t \geq 0$).

Тоді $v_1 = v_1(t, x)$ задовольняє (10), (11) з деякою функцією $g_1 \in L_{loc}^2(Q), g_1(t, x) \in f(v_1(t, x))$.

Оскільки $f: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ опуклозначна компактнозначна і ліпшицева, то $\forall s \in \mathbb{R}$

$$f(s) = [\bar{f}(s), \underline{f}(s)],$$

де $\bar{f}, \underline{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - ліпшицеві функції з константою Ліпшиця L . Тоді $g_1(t, x) = \alpha(t, x)\underline{f}(v_1(t, x)) + (1 - \alpha(t, x))\bar{f}(v_1(t, x)), \alpha(t, x) \in (0, 1)$.

Покладемо $g(t, x, v) = \alpha(t, x)\underline{f}(v) + (1 - \alpha(t, x))\bar{f}(v)$ і нехай $v_2 = v_2(t, x)$ - слабкий розв'язок початково-крайової задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = g(t, x, v(t, x)), \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0^{(2)}(x). \end{cases} \quad (19)$$

Оскільки $\alpha(t, x)$ - вимірна і обмежена, то $g(t, x, v)$ - функція типу Каратеодорі, отже існування розв'язку (19) випливає із [17]. Тоді v_2 задовольняє (10) (11) з $g_2(t, x) = g(t, x, v_2(t, x))$.

Отже $v_2(t) \in V_{\{0,0\}}(t, 0, y_0^{(2)})$ і для різниці $v_1 - v_2$ маємо: для м. в. $t > 0$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \|v_1(t) - v_2(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \\ &\leq \|g_1(t) - g_2(t)\| \cdot \|v_1(t) - v_2(t)\| \leq \left[\int_0^l |\alpha(t, x)L(v_1(t, x) - v_2(t, x)) + \right. \\ &\left. + (1 - \alpha(t, x))L(v_1(t) - v_2(t))|^2 dx \|v_1(t) - v_2(t)\| \leq L \|v_1(t) - v_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

Звідси в силу абсолютної непервності $t \rightarrow v(t)$ в X і Лема Гронуола одержуємо, що $\forall t \geq 0$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \leq \|y_0^{(1)} - y_0^{(2)}\|^2 e^{2Lt}.$$

Звідси виводимо (14) з $c(r) = L$.

Перевіримо (15). Нехай для заданих $\omega \in L^\infty(Q)$, $h \in L^\infty(0, \infty; X)$ функція $v_1 = v_1(t, x)$ - будь-який розв'язок задачі (6) (тобто $v_1(t) \in V_{\{\omega, h\}}(t, 0, y_0)$, $t \geq 0$). Тоді $v_1(t, x)$ задовольняє (10), (11) з деякою функцією $g_1 \in L^2_{loc}(Q)$,

$$g_1(t, x) \in f(v_1(t, x) + \omega(t, x)) + h(t, x) \text{ для м.в. } (t, x) \in Q.$$

Отже, з деякою вимірною $\alpha(t, x) \in (0, 1)$ виконується

$$g_1(t, x) = \alpha(t, x)\underline{f}(v_1(t, x) + \omega(t, x)) + (1 - \alpha(t, x))\bar{f}(v_1(t, x) + \omega(t, x)) + h(t, x).$$

Покладемо $g(t, x, v) = \alpha(t, x)\underline{f}(v(t, x)) + (1 - \alpha(t, x))\bar{f}(v(t, x))$ і нехай $v_2 = v_2(t, x)$ - розв'язок задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v(t, x)}{\partial x^2} = g(t, x, v(t, x)), \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = y_0(x). \end{cases} \quad (20)$$

Тоді v_2 задовольняє (10), (11) з $\omega \equiv 0, h \equiv 0, g_2(t, x) = g(t, x, v_2(t, x))$. Отже $v_2(t) \in V_{\{0, 0\}}(t, 0, y_0)$ і для різниці $v_1 - v_2$ маємо :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + \|v_1(t) - v_2(t)\|_{H_0^1}^2 \leq \\ & \leq \int_0^l (L(v_1(t, x) + \omega(t, x) - v_2(t, x)) + |h(t, x)|) |v_1(t, x) - v_2(t, x)| dx \leq \\ & \leq L \|v_1(t) - v_2(t)\|^2 + L \|\omega\|_\infty \sqrt{l} \|v_1(t) - v_2(t)\| + \|h(t)\| \|v_1(t) - v_2(t)\|. \end{aligned}$$

Тоді для всіх $t \in [0, 1]$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \leq 2L \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|^2 ds + 2t(L \|\omega\|_\infty \sqrt{l} + \|h\|_\infty) \max_{s \in [0, 1]} \|v_1(s) - v_2(s)\|.$$

Тоді з нерівності Гронуола одержуємо: $\forall t \in [0, 1]$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\|^2 \leq 2t(L \|\omega\|_\infty \sqrt{l} + \|h\|_\infty) \max_{s \in [0, t]} \|v_1(s) - v_2(s)\| e^{2Lt}.$$

Отже $\forall t \in [0, 1]$

$$\|v_1(t) - v_2(t)\| \leq 2(L \|\omega\|_\infty \sqrt{l} + \|h\|_\infty) t e^{2Lt},$$

звідки одержуємо (15) з $\eta(r, t) = 2 \max\{L \sqrt{l}, 1\} t e^{2Lt}$, $\alpha(p) = p$. Оцінка (16) є прямим наслідком оцінки (8). Теорему доведено.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі досліджено якісну поведінку розв'язків нескінченновимірної еволюційної задачі включення параболічного типу з ліпшицевою багатозначною правою частиною за наявності неавтономних збурень $d(t)$ на границі просторової області.

У незбуреному випадку ($d \equiv 0$) така задача у фазовому просторі L^2 породжує багатозначну дисипативну напівгрупу, що має нетривіальну компактну рівномірно-притягуючу множину - глобальний атрактор. Розвиваючи результати роботи [1], в якій була встановлена асимптотична оцінка типу AG, в даній роботі за рахунок умови Ліпшиця на багатозначну праву частину отримано більш точну робастну оцінку типу ISS, що характеризує відхилення траєкторій збуреної системи від атрактора незбуреної задачі. Запропонована методологія може бути в подальшому використана для оцінки відхилення траєкторій від атракторів для широких класів еволюційних задач, зокрема параболических систем, які характеризуються наявністю неавтономних збурень на границі просторової області.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Робота виконана за підтримки Національного фонду досліджень України, проект № 2023.03/0074 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння з багатозначною та стохастичною динамікою".

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Капустян О. В.: концептуалізація, супервізія, Краснеєва А. О.: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт, Жук Т. Ю.: курація даних, аналіз джерел, редагування.

Авторські права ©



(2026). Капустян О. В., Краснеєва А. О., Жук Т. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Kapustyan, O. V., Krasnieieva, A. O., & Zhuk, T. Y. (2025). Stability of the parabolic inclusion attractor with respect to external and boundary perturbations. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 47(2), 52–64. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47\(2\).52-64](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.47(2).52-64) [in Ukrainian].
2. Robinson, J. C. (2001). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*. Cambridge University Press.
3. Ball, J. M. (1997). Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier–Stokes equations. *Nonlinear Science*, 7, 475–502. <https://doi.org/10.1007/s003329900037>
4. Melnik, V. S., & Valero, J. (1998). On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions. *Set-Valued Analysis*, 6, 83–111. <https://doi.org/10.1023/A:1008608431399>
5. Kapustyan, O. V., & Valero, J. (2000). Attractors of Differential Inclusions and Their Approximation. *Ukrainian Mathematical Journal*, 52, 1118–1123. <https://doi.org/10.1023/A:1005237902620> [in Ukrainian].
6. Valero, J. (2001). Attractors of Parabolic Equations Without Uniqueness. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 13, 711–744. <https://doi.org/10.1023/A:1016642525800>
7. Kapustyan, O. V., Kasyanov, P. O., & Valero, J. (2014). Structure and regularity of the global attractor of a reaction–diffusion equation with non-smooth nonlinear term. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 34(10), 4155–4182. <https://doi.org/10.1023/A:1016642525800>
8. Sontag, E. D., & Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems Control Letters*, 24(5), 351–359. [https://doi.org/10.1016/0167-6911\(94\)00050-6](https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)00050-6)
9. Dashkovskiy, S., & Mironchenko, A. (2013). Input-to-state stability of infinite-dimensional control systems. *Math. Con. Sign. Syst.*, 25, 1–35. <https://doi.org/10.1007/s00498-012-0090-2>
10. Karafyllis, I., & Krstic, M. (2019). *Input-to-state stability for PDEs*. USA: Springer. <https://doi.org/10.1007/s003329900037>
11. Mironchenko, A., & Prieur, Ch. (2020). Input-to-state stability of infinite-dimensional systems: Recent results and open questions. *SIAM Review*, 62, 529–614. <https://doi.org/10.1137/19M1291248>
12. Schmid, J., Kapustyan, O., & Dashkovskiy, S. (2022). Asymptotic gain results for global attractors of semilinear systems. *Mathematical Control and Related Fields*, 12(3), 763–788. <https://doi.org/10.3934/mcrf.2021044>
13. Dashkovskiy, S., & Kapustyan, O. (2022). Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equation. *Evolution Equations and Control Theory*, 11(5), 1565–1577. <https://doi.org/10.3934/eect.2021054>
14. Kapustyan, O. V., Sobchuk, V. V., & Yusypiv, T. V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*, 30(2), 1–13. <https://doi.org/10.15421/142208>
15. Kapustyan, O., & Krasnieieva, A. (2025). Stability of global attractor for the reaction-diffusion equation with respect to disturbances at the boundary of the domain. *Journal of Math. Sci.*, 25–33. <https://doi.org/10.31861/bmj2025.01.02>
16. Evans, L. C. (1997). *Partial differential equations*. AMS.
17. Denkowski, Z., & Mortola, S. (1993). Asymptotic behaviour of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *JOTA*, 78(2), 365–391. <https://doi.org/10.1007/BF00939675>

Kapustyan O. V., Krasnieieva A. O., Zhuk T. Y. Stability of ISS type for global attractor of parabolic inclusion with respect to boundary disturbances.

Abstract We study the qualitative behavior of solutions to an infinite-dimensional evolutionary inclusion of parabolic type with a Lipschitz multivalued right-hand side in the presence of non-autonomous disturbances $d(t)$ at the boundary of the spatial domain. In the unperturbed case ($d \equiv 0$), such a problem generates a multivalued dissipative semigroup in the phase space L^2 , which possesses a nontrivial compact uniformly attracting set — the global attractor. The stability of this attractor with respect to disturbances $d(t)$ is

investigated by deriving a robust ISS-type estimate characterizing the deviation of trajectories of the perturbed system from the attractor. The present study continues the results of work (1), where an asymptotic AG-type estimate was established. Here, by exploiting the Lipschitz condition, a more precise ISS-type estimate is obtained.

Keywords: stability, parabolic inclusions, global attractor, disturbances, boundary conditions.

Отримано: 29.03.2026

Прийнято: 15.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).54-59](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).54-59)**О. А. Лагода¹, В. В. Селіванов², А. В. Чайковський³**

¹ Київський національний університет України,
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського",
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
lahoda.oksana@l111.kpi.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4515-1753>

² Київський національний університет України,
"Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського",
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
selivanov.v.v-om51f@edu.kpi.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8414-5675>

³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук, професор
chaikovskiyav@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3357-8744>

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для розв'язків абстрактного стохастичного рівняння в некритичному випадку встановлено зв'язок граничної поведінки сум елементів розв'язку рівняння з сумами елементів вхідної послідовності. Отримано низку граничних результатів для поведінки сум компонент розв'язку за умови відомої граничної поведінки компонент вхідної послідовності.

Ключові слова: стохастичне різницеве рівняння, випадковий процес, банахів простір, граничні теореми, посилений закон великих чисел, закон повторного логарифма.

1. Вступ. В роботі розглядається випадок стохастичного різницевого рівняння з двома операторними коефіцієнтами у випадку, коли виконуються умови існування та єдиності обмеженого розв'язку [1]. Мета роботи полягає в узагальненні результату Ковалю [2] та отриманні посиленого закону великих чисел та закону повторного логарифма для характеристики граничної поведінки сум розв'язків відповідного стохастичного різницевого рівняння. Подібні питання досліджувалися при більш жорстких обмеженнях в [3], [4]. В статті [2] було розглянуто рівняння з одним, проте змінним операторним коефіцієнтом.

2. Основний результат. Нехай B – комплексний банахів простір, $\|\cdot\|$ – норма в B і $L(B)$ – простір всіх лінійних обмежених операторів, що діють з B в B , O – нульовий оператор, I – одиничний оператор в $L(B)$.

Розглянемо стохастичне різницеве рівняння

$$X_n = A_1 X_{n-1} + A_2 X_{n-2} + Y_n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

з початковими умовами X_0 та X_{-1} , які є деякими випадковими величинами зі значеннями в B , та послідовністю $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$, елементи якої також є випадковими величинами зі значеннями в B .

Використаємо умови, за яких для довільної обмеженої за нормою послідовності $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ та довільних початкових умов $\{X_0, X_{-1}\} \subset B$ розв'язок $\{X_n : n \geq 1\} \subset B$ рівняння (1) буде обмеженим за нормою. Необхідною та достатньою умовою такої обмеженості розв'язку є умова [1]

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1, \quad \exists (z^2 I - A_1 z - A_2)^{-1} \in L(B). \quad (2)$$

Ця ж умова виявляється корисною і для оцінки розв'язків у недетермінованому випадку.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) послідовність $\{c_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}_+$ незростаюча і збігається до нуля;
- 2) послідовність $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ обмежена за нормою майже напевно;
- 3) $\sup_n c_n \left\| \sum_{k=1}^n Y_k \right\| < \infty$ майже напевно;
- 4) справджується умова (2).

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^n X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i \right\| = 0$$

майже напевно.

Доведення. Введемо позначення:

$$Z_n = \begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} Y_n \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

де матричний оператор визначений в B^2 з нормою

$$\|(X_1, X_2)\| = \sqrt{\|X_1\|^2 + \|X_2\|^2}.$$

Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$Z_n = AZ_{n-1} + V_n, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

Доведемо, що спектр оператора A задовольняє умову

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}. \quad (4)$$

За означенням потрібно довести, що для $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| \geq 1$ рівняння

$$(A - \lambda I)X = Y$$

для довільного $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in B^2$ має єдиний розв'язок $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in B^2$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} (A_1 - \lambda I)X_1 + A_2 X_2 = Y_1; \\ X_1 - \lambda X_2 = Y_2, \end{cases}$$

з урахуванням умови (2) отримаємо єдиний розв'язок

$$\begin{cases} X_1 = \lambda(A_2 + \lambda A_1 - \lambda^2 I)^{-1}(Y_1 + \lambda Y_2 - A_1 Y_2) + Y_2; \\ X_2 = (A_2 + \lambda A_1 - \lambda^2 I)^{-1}(Y_1 + \lambda Y_2 - A_1 Y_2) \end{cases}$$

і таким чином умова (4) доведена.

З умови (4) випливає, що спектральний радіус оператора A r менший за 1 і тому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad \|A^n\| \leq (r + \varepsilon)^n.$$

Звідси отримаємо, що знайдеться таке q , $0 < q < 1$, що

$$\exists L > 0 : \quad \forall n \geq 1 \quad \|A^n\| \leq Lq^n. \quad (5)$$

Скористаємося міркуваннями, які були використані при доведенні теореми 1 [2]. З рівняння (3) отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n Z_k &= AZ_0 + A \sum_{k=1}^{n-1} Z_k + \sum_{k=1}^n V_k = AZ_0 + A \sum_{k=1}^n Z_k - A(A^n Z_0 + A^{n-1} V_1 + A^{n-2} V_2 + \dots + \\ &+ AV_{n-1} + V_n) + \sum_{k=1}^n V_k = AZ_0 + A \sum_{k=1}^n Z_k - A^{n+1} Z_0 - \sum_{i=1}^n A^{n+1-i} V_i + \sum_{k=1}^n V_k. \end{aligned}$$

Позначимо

$$U_n = c_n \sum_{k=1}^n Z_k, \quad W_n = c_n \sum_{k=1}^n V_k.$$

Тоді рівняння (3) набуде вигляду

$$U_n = (I - A)^{-1} W_n + R_n, \quad n \geq 1, \quad (6)$$

де

$$R_n = (I - A)^{-1} \left(c_n (I - A^n) AZ_0 - c_n \sum_{i=1}^n c_i^{-1} A^{n+1-i} c_i V_i \right).$$

Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n\| = 0 \quad \text{м.н.} \quad (7)$$

З умови 2) теореми 1 випливає, що

$$\exists M > 0 : \|V_n\| < M \quad \text{м.н.} \quad (8)$$

Тоді з (5) і (8) випливає, що норму R_n можна оцінити наступним чином:

$$\|R_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \left(2Lc_n \|Z_0\| + ML \sum_{i=1}^n q^{n-i+1} c_i \right), \quad n \geq 1 \quad \text{м.н.}$$

За теоремою Тьопліца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n q^{n-i+1} c_i = 0,$$

і тим самим рівність (7) доведена.

Знайдемо $(I - A)^{-1}$, розв'язавши систему

$$(I - A) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

Ввівши позначення $D = (I - A_1 - A_2)^{-1}$, будемо мати

$$\begin{cases} X_1 = D(A_2 Y_2 + Y_1); \\ X_2 = D Y_1 + (D A_2 + I) Y_2. \end{cases}$$

Тому

$$(I - A)^{-1} W_n = (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} c_n \sum_{k=1}^n Y_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D c_n \sum_{k=1}^n Y_k \\ D c_n \sum_{k=1}^n Y_k \end{pmatrix}.$$

Звідки

$$\left\| c_n \sum_{k=1}^n X_k - D c_n \sum_{k=1}^n Y_k \right\| = \|(U_n)_1 - ((I - A)^{-1} W_n)_1\| \leq$$

$$\leq \|U_n - (I - A)^{-1} W_n\| = \|R_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{м.н.}$$

Теорема 2. Нехай $\{Y_n : n \geq 1\}$ – нескінченна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з B , визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Нехай $\mathbb{E} Y_i = \mu$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, та виконуються умови теореми 1.

Тоді для $c_n = \frac{1}{n}$ та $\{X_n : n \geq 1\} \subset B$ – розв'язку стохастичного різницевого рівняння (1) справджується, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = (I - A_1 - A_2)^{-1} \mu$$

майже напевно.

Доведення.

Згідно до посиленого закону великих чисел

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{м.н.}$$

Застосуємо теорему 1 у випадку, коли $c_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \mu \right\| &\leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - (I - A_1 - A_2)^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \right\| + \\ &+ \left\| (I - A_1 - A_2)^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \mu \right) \right\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

Теорема 3. Нехай B – дійсний сепарабельний гільбертів простір. Якщо $\{Y_n : n \geq 1\} \subset B$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $\mathbb{E}Y_n = 0$, $\mathbb{E}\|Y_n\|^2 < \infty$; T – оператор коваріації та виконується умова (2), то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \sqrt{\|(I - A_1 - A_2)^{-1}T(I - A_1^* - A_2^*)^{-1}\|}$$

майже напевно.

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\mathbb{E}(I - A_1 - A_2)^{-1}Y_n = (I - A_1 - A_2)^{-1}\mathbb{E}Y_n = 0.$$

Застосуємо теорему 1 та закон повторного логарифма [5] для $c_n = \frac{1}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$, $n \geq 3$. Будемо мати

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \left\| (I - A_1 - A_2)^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i \right\| = \\ &= \sqrt{\mathbb{E} \|(I - A_1 - A_2)^{-1}Y_1\|^2} = \sqrt{\mathbb{E}((I - A_1 - A_2)^{-1}Y_1, (I - A_1 - A_2)^{-1}Y_1)} = \\ &= \sqrt{\text{cov}((I - A_1 - A_2)^{-1}Y_1, (I - A_1 - A_2)^{-1}Y_1)}. \end{aligned}$$

Використовуючи властивість коваріації дії оператора на вектор [6], отримаємо

$$\begin{aligned} &\sqrt{(I - A_1 - A_2)^{-1} \text{cov}(Y_1, Y_1) ((I - A_1 - A_2)^{-1})^*} = \\ &= \sqrt{(I - A_1 - A_2)^{-1}T(I - A_1^* - A_2^*)^{-1}}. \end{aligned}$$

3. Висновки. Для розв'язків абстрактного стохастичного різницевого рівняння в некритичному випадку встановлено зв'язок граничної поведінки сум елементів розв'язку рівняння з сумами елементів вхідної послідовності. Отримано низку граничних результатів для поведінки сум компонент розв'язку за умови відомої граничної поведінки для компонент вхідної послідовності.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Лагода О. А.: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування. Селіванов В. В.: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт. Чайковський А. В.: концептуалізація, супервізія, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Лагода О. А., Селіванов В. В., Чайковський А. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Gorodnii, M. F., & Lagoda, O. A. (2000). On bounded solutions of some classes of two-parameter difference equations in a Banach space. *Ukr. Math. J.*, 52, 1834–1840. <https://doi.org/10.1023/A:1010447624673>
2. Koval, V., & Schwabe, R. (1998). Limit theorems for solutions of stochastic difference equations in Banach spaces with applications. *Random Oper. and Stoch. Equ.*, 6(2), 149–158. <https://doi.org/10.1515/rose.1998.6.2.149>
3. Bosq, D. (1993). Propriétés asymptotiques des processus autorégressifs Banachiques. Applications. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 316(7), 607–610.
4. Chen, H. F., & Guo, L. (1988). Laws of iterated logarithm for state variables with applications. *Acta Math. Sin. New Ser.*, 4(4), 343–355. <https://doi.org/10.1007/BF02560638>
5. Ledoux, M., & Talagrand, M. (1988). Characterization of the law of the iterated logarithm in Banach spaces. *Ann. Probab.*, 16(3), 1242–1264. <https://doi.org/10.1214/aop/1176991688>
6. Ledoux, M., & Talagrand, M. (1991). *Probability in Banach Spaces*. New York, NY: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20212-4>

Lahoda O. A., Selivanov V. V., Chaikovs'kyi A. V. Limit Theorems for Solutions of Abstract Stochastic Difference Equations .

For solutions of an abstract stochastic equation in the non-critical case, a connection has been established between the limiting behavior of the sums of the equation's solution elements and the sums of the input sequence elements. A series of limiting results has been obtained for the behavior of the sums of the solution components, provided that the limiting behavior of the input sequence components is known.

Keywords: stochastic difference equation, random process, Banach space, limit theorems, strong law of large numbers, law of the iterated logarithm.

Отримано: 30.03.2026

Прийнято: 15.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).60-65](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).60-65)**М. М. Ломага¹, О. В. Глебена², М. С. Герич³, В. В. Чубирка⁴**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
старший викладач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
mariia.lomaha@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8813-0464>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри загальної педагогіки та педагогіки вищої школи
oleksandr.hlebenai@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2962-920X>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
miroslava.gerich@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9634-5254>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
viktor.chubyrka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7556-6118>

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МАЖОРАНТ І ДІАГРАМ НЬЮТОНА ДЛЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

У статті розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для неперервних функцій комплексної змінної, заданих на замкненій опуклій області. Запропоновано геометричний підхід до дослідження модуля комплексної функції шляхом переходу до тривимірного простору та побудови опуклої оболонки відповідної множини точок. Введено поняття діаграми Ньютона та мажоранти Ньютона для комплексної функції, досліджено їх властивості, а також визначено числові характеристики у вигляді нахилів і відхилень. Обґрунтовано можливість використання запропонованого апарату для побудови чисельних алгоритмів знаходження екстремальних значень функції. Окреслено перспективи практичного застосування у чисельному аналізі, оптимізації та комп'ютерному моделюванні.

Ключові слова: комплексна функція, діаграма Ньютона, мажоранта Ньютона, чисельний аналіз, опукла оболонка, оптимізація.

1. Вступ. У сучасному чисельному аналізі та прикладній математиці важливу роль відіграють методи дослідження функцій, заданих таблично або у вигляді дискретних значень. У таких випадках класичні аналітичні методи часто є непридатними або малоефективними, що зумовлює необхідність розробки альтернативних підходів до оцінювання поведінки функцій.

Відомий апарат мажорант і діаграм Ньютона [1] довів свою ефективність для функцій однієї дійсної змінної [2, 3]. У [4] отримано оцінки точності наближення функцій некласичною мажорантою Ньютона. Однак розширення цього підходу на випадок функцій комплексної змінної потребує врахування специфіки комплексної площини та особливостей модуля функції.

У даній роботі розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона для неперервних функцій комплексної змінної. Запропонований підхід базується на геометричній інтерпретації значень функції та дозволяє

отримати ефективні оцінки, що можуть бути використані при побудові чисельних алгоритмів.

2. Побудова апарату неklasичних мажорант і діаграм Ньютона для однозначних неперервних функцій комплексної змінної. Розглянемо однозначну неперервну функцію комплексної змінної

$$f(u) = f(x + iy), (x, y) \in D,$$

де D замкнута опукла множина комплексної площини, а $|f(u)| \leq M$, де M — деяка стала.

Нехай $(x_k, y_j) \in D$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$, тоді через $u_{kj} = x_k + iy_j$ позначимо точку комплексної площини C .

Через ξ_{kj} позначимо значення модуля комплексної функції $w = f(u)$ у точці $u_{kj} = x_k + iy_j$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$ із множини D , тобто

$$\xi_{kj} = \xi(x_k, y_j) = |f(u_{kj})| = \sqrt{[\varphi(x_k, y_j)]^2 + [\psi(x_k, y_j)]^2},$$

$$(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m).$$

Точка $(x_k, y_j, \xi_{kj}) \in R^3$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$ є точкою на поверхні модуля комплексної функції $w = f(u)$.

Означення 1. Точки $P_{kj}(x_k, y_j - \ln \xi_{kj})$ з координатами

$$x = x_k, \quad y = y_j, \quad z = -\ln \xi_{kj}$$

у просторі xuz назвемо **точкою зображення** значення комплексної функції $w = f(u)$ у точці $u_{kj} = x_k + iy_j$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$.

Припустимо, що точки зображення P_{kj} значень комплексної функції $w = f(u)$ у точках $u_{kj} = x_k + iy_j$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$ побудовані. З кожної точки P_{kj} проведемо півпрямую в додатному напрямі осі Oz , перпендикулярно до площини xu . Множину цих півпрямих позначимо через S , а її опуклу оболонку — через $C(S)$. Для кожної точки $(x, y) \in D$, де $D = \{x_0 \leq x \leq x_n, y_0 \leq y \leq y_m\}$, визначимо точку $B(x, y, \kappa(x, y))$, де $\kappa(x, y) = \inf_{(x, y, z) \in C(S)} z$.

Множина точок $B(x, y, \kappa(x, y))$, де $(x, y) \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f , яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою, і її рівняння має вигляд:

$$z = \kappa(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Означення 2. Поверхня δ_f , визначена на D , називається **діаграмою Ньютона** комплексної функції $w = f(u)$ на D .

Діаграма Ньютона δ_f функції $\xi(x, y)$ (комплексної функції $w = f(u)$) має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_{kj} значення комплексної функції $w = f(u)$ в точці $u_{kj} = x_k + iy_j$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$;
- кожна точка зображення P_{kj} знаходиться на δ_f або розміщена вище за неї;

– кожній точці $(x_k, y_j) \in D$ відповідає $B_{kj}(x_k, y_j, \kappa_{kj})$ – точка діаграми Ньютона δ_f , де $\kappa_{kj} = \kappa(x_k, y_j)$.

Позначимо $M_f(x, y) = \exp(-\kappa(x, y))$, $(x, y) \in D$.

Тоді для кожної точки $(x_k, y_j) \in D$, $(k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m)$ виконується нерівність

$$|f(u_{kj})| = \xi(x_k, y_j) = \xi_{kj} \leq M_f(x_k, y_j).$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln \xi_{kj} \geq \kappa(x_k, y_j),$$

або

$$\xi_{kj} \leq \exp(-\kappa(x_k, y_j)) = M_f(x_k, y_j).$$

Означення 3. Функція $z = M_f(x, y)$, визначена на D , називається **мажорантою Ньютона** комплексної функції $w = f(u)$ на D .

При побудові діаграми Ньютона будемо припускати, що в усіх вузлах розглядуваної сітки значення модуля функції є додатними, тобто $\xi_{kj} = |f(u_{kj})| > 0$. Ця умова забезпечує коректність логарифмічного перетворення, яке використовується для переходу до просторового зображення значень функції. У такому випадку точки $P_{kj}(x_k, y_j - \ln \xi_{kj})$ є коректно визначеними, а побудована на їх основі нижня межа опуклої оболонки відповідної множини вертикальних півпрямих задає функцію $\kappa(x, y)$ через яку визначається мажоранта Ньютона $M_f(x, y) = \exp(-\kappa(x, y))$.

Таким чином, побудований апарат застосовується до модуля комплексної функції та забезпечує його геометрично інтерпретовану верхню оцінку.

Нехай $M_f(x_k, y_j) = T_{kj}$ ($k = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$).

Означення 4. Величини

$$R_{kj}(x) = \left(\frac{T_{k-1,j}}{T_{kj}} \right)^{\frac{1}{x_k - x_{k-1}}} \quad (k = 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m; R_{0j} = 0),$$

і

$$R_{kj}(y) = \left(\frac{T_{k,j-1}}{T_{kj}} \right)^{\frac{1}{y_j - y_{j-1}}} \quad (j = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n; R_{k0} = 0),$$

називаються (k, j) -ми **числовими нахилами мажоранти Ньютона** $M_f(x, y)$ відповідно в напрямку осей абсцис і ординат, а величини

$$D_{kj}(x) = \frac{R_{k+1,j}(x)}{R_{kj}(x)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m; D_{0j} = D_{nj} = \infty),$$

і

$$D_{kj}(y) = \frac{R_{k,j+1}(y)}{R_{kj}(y)} \quad (j = 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n; D_{k0} = D_{km} = \infty),$$

називаються (k, j) -ми **відхиленнями мажоранти Ньютона** $M_f(x, y)$ відповідно в напрямку осей Ox і Oy .

Із опуклості вниз діаграми Ньютона δ_f випливають такі нерівності:

$$R_{kj}(x) \leq R_{k+1,j}(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m),$$

$$R_{kj}(y) \leq R_{k,j+1}(y) \quad (j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n),$$

$$D_{kj}(x) \geq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m),$$

$$D_{kj}(y) \geq 1 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, n).$$

Враховуючи, що неперервна функція комплексної змінної $f(u) = f(x + iy)$ досягає свого найбільшого й найменшого за модулем значення в замкненій області D , то для побудови алгоритмів знаходження цих значень можемо скористатись властивостями числових нахилів та відхилень мажоранти Ньютона комплексної функції $w = f(u)$ на D .

Запропонований апарат неklasичних мажорант і діаграм Ньютона може бути ефективно використаний у задачах чисельного аналізу функцій комплексної змінної, зокрема при дослідженні їх модуля на дискретних множинах.

У межах чисельного аналізу даний підхід дозволяє здійснювати пошук екстремальних значень модуля функції, заданої таблично, без необхідності відновлення її аналітичного вигляду. Це є принципово важливим у випадках, коли функція отримана як результат експерименту або чисельного моделювання.

У задачах оптимізації використання мажоранти Ньютона дає змогу будувати верхні оцінки функції та, відповідно, звужувати область пошуку екстремумів. Такий підхід дозволяє зменшити обчислювальні витрати за рахунок відсікання підобластей, у яких досягнення екстремуму є неможливим.

У комп'ютерному моделюванні запропонований метод може застосовуватись для аналізу поведінки функцій, заданих на сітках, зокрема для дослідження їх глобальних характеристик та виявлення областей з найбільшими значеннями модуля.

3. Висновки. У роботі запропоновано узагальнення апарату мажорант і діаграм Ньютона на випадок функцій комплексної змінної. Основою підходу є геометрична інтерпретація значень функції через побудову опуклої оболонки у тривимірному просторі. Введено поняття діаграми Ньютона та мажоранти Ньютона для комплексної функції, досліджено їх основні властивості та встановлено зв'язок між геометричними характеристиками і поведінкою функції.

Отримані результати мають як теоретичне, так і прикладне значення. Вони можуть бути використані у чисельному аналізі для дослідження функцій, заданих на дискретних множинах, у задачах оптимізації для звуження області пошуку екстремумів, а також у комп'ютерному моделюванні для аналізу складних функціональних залежностей. Запропонований підхід також створює основу для побудови адаптивних чисельних алгоритмів, у яких геометричні характеристики мажоранти можуть використовуватися для локалізації екстремальних значень функції та звуження області їх пошуку, що розширює можливості практичного застосування розробленого апарату.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою конкретних чисельних алгоритмів на основі запропонованого апарату, дослідженням їх обчислювальної ефективності, а також узагальненням підходу на багатовимірні випадки та більш загальні класи функцій.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

М. М. Ломага: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. О. В. Глебена: формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування. М. С. Герич: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. В. В. Чубирка: формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Ломага М. М., Глебена О. В., Герич М. С., Чубирка В. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Tsehelyk, H. H. (2013). *The apparatus of non-classical majorants and Newton diagrams of tabular functions and its use in numerical analysis*. Ivan Franko National University of Lviv [in Ukrainian].
2. Hlebena, M. I. (2012). *Mathematical models and numerical methods of majorant type for the analysis of discrete optimization processes*. (Extended abstract of candidate's thesis). Ivano-Frankivsk [in Ukrainian].
3. Hlebena, M. I. (2014). Obchysliuvalna stiikist interpoliatsiinoho metodu mazhorantnoho typu rozviazuvannia zadachi Koshi dlia system zvychainykh dyferentsialnykh rivnian. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 26(2), 25–28 [in

Ukrainian].

4. Hlebena, M. I., Hrypynska, N. V., & Tsehelyk, H. H. (2012). Pro tochnist aproksymatsii funktsii dvokh diisnykh zminnykh neklasychnoiu mazhorantoiu Niutona. *Visnyk of the Lviv University. Series Applied Mathematics and Informatics*, 18, 70–75.

Lomaha M. M., Hlebena O. V., Herych M. S., Chubyrka V. V. The apparatus of nonclassical majorants and Newton diagrams for functions of a complex variable.

This paper presents the construction of the framework of nonclassical majorants and Newton diagrams for continuous functions of a complex variable defined on a closed convex domain. A geometric approach to the analysis of the modulus of a complex function is proposed, based on embedding the problem into three-dimensional space and constructing the convex hull of a corresponding set of points. The concepts of the Newton diagram and the Newton majorant for a complex function are introduced, and their fundamental properties are investigated. Numerical characteristics, including slopes and deviations, are defined and analyzed. The applicability of the proposed framework to the development of numerical algorithms for determining extremal values of a function is demonstrated. Potential applications in numerical analysis, optimization, and computer modeling are also discussed.

Keywords: complex function, Newton diagram, Newton majorant, numerical analysis, convex hull, optimization.

Отримано: 31.03.2026

Прийнято: 18.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).66-73](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).66-73)**O. Yu. Masyutka¹, M. P. Moklyachuk²**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Associate Professor of the Department of Mathematics and Theoretical Radiophysics,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
omasutka@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7301-8813>

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Professor of the Department of Probability Theory, Statistics and Actuarial Mathematics ,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
moklyachuk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6173-0280>

ON ESTIMATION PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS

The problem of the mean-square optimal estimation of the linear functionals which depend on the unknown values of a multidimensional homogeneous random field from observations of the field with noise is considered. Formulas for calculating the mean-square error and the spectral characteristic of the optimal linear estimate of the functionals are derived under the condition of spectral certainty, where the spectral densities of the fields are exactly known.

Keywords: multidimensional homogeneous random field, optimal estimate, mean square error, spectral density, spectral characteristic.

1. Introduction. Traditional methods of solution of the linear extrapolation, interpolation and filtering problems for stationary stochastic processes and homogeneous random fields are developed under the condition that spectral densities of processes and fields are known exactly (see, for example, selected works of A. N. Kolmogorov [7], survey by T. Kailath [5], books by Yu. A. Rozanov [13], E. J. Hannan [4], A. Malyarenko [8], V. S. Mandrekar and D. A. Redett [9], N. Wiener [15], M. I. Yadrenko [16], A. M. Yaglom [17, 18]).

The basic assumption of most of the methods of estimation of the unobserved values of stochastic processes and random fields is that the spectral densities of the considered stochastic processes and random fields are exactly known. However, in practice, these methods are not applicable since the complete information on the spectral densities is impossible in most cases. In order to solve the problem parametric or nonparametric estimates of the unknown spectral densities are found. Then, one of traditional estimation methods is applied, provided that the selected densities are the true ones. This procedure can result in significant increasing of the value of error as K. S. Vastola and H. V. Poor [14] have demonstrated with the help of some examples. To avoid this effect one can search the estimates which are optimal for all densities from a certain class of admissible spectral densities. These estimates are called minimax since they minimize the maximum value of the error. The paper by Ulf Grenander [3] should be marked as the first one where this approach to extrapolation problem for stationary processes was proposed. Several models of spectral uncertainty and minimax-robust methods of data processing can be found in the survey paper by S. A. Kassam and H. V. Poor [6]. In the paper by J. Franke [1]

the minimax extrapolation problem for stationary sequences is investigated with the help of convex optimization methods. This approach makes it possible to find equations that determine the least favorable spectral densities for various classes of densities. In the book by M. Moklyachuk and A. Masyutka a minimax technique of the estimation for vector-valued stationary stochastic processes is proposed [10]. Estimation problems for random fields was considered in the paper by M. Moklyachuk and N. Shchestyuk [12]. In the book by M. P. Moklyachuk, O. Yu. Masyutka, I. I. Golichenko [11] the minimax approach is applied to investigate the estimation problems for functionals which depend on the unknown values of stationary random fields on a sphere.

In this paper we deal with the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functionals

$$A_K \vec{\xi} = \iint_K \vec{a}(s, t)^\top \vec{\xi}(s, t) ds dt,$$

which depend on the unknown values of a multidimensional homogeneous random field $\vec{\xi}(s, t) = \{\xi_k(s, t)\}_{k=1}^N$ from observations of the field $\vec{\xi}(s, t) + \vec{\eta}(s, t)$ at points $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, where $\vec{\eta}(s, t) = \{\eta_k(s, t)\}_{k=1}^N$ is an uncorrelated with $\vec{\xi}(s, t)$ multidimensional homogeneous random field. Formulas for calculating the spectral characteristic and the mean square error of the optimal linear estimate of the functionals are derived under the condition that spectral densities of the fields are exactly known.

2. Mean-square optimal method of solution of the estimation problem for homogeneous random fields.

Let $\vec{\xi}(s, t) = \{\xi_k(s, t)\}_{k=1}^N$ and $\vec{\eta}(s, t) = \{\eta_k(s, t)\}_{k=1}^N$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, be uncorrelated multidimensional homogeneous random fields with zero first moments $E\vec{\xi}(s, t) = \vec{0}$, $E\vec{\eta}(s, t) = \vec{0}$ and let the correlation functions

$$R_\xi(u, v) = E\vec{\xi}(s+u, t+v)(\vec{\xi}(s, t))^*, \quad R_\eta(u, v) = E\vec{\eta}(s+u, t+v)(\vec{\eta}(s, t))^*$$

of the random fields $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$ admit the spectral decomposition [9]

$$R_\xi(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u\lambda+v\mu)} F(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \quad R_\eta(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u\lambda+v\mu)} G(\lambda, \mu) d\lambda d\mu,$$

where $F(\lambda, \mu) = \{f_{ij}(\lambda, \mu)\}_{i,j=1}^N$ and $G(\lambda, \mu) = \{g_{ij}(\lambda, \mu)\}_{i,j=1}^N$ are spectral density matrices of the fields $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$, respectively.

Suppose that the spectral densities of fields satisfy the minimality condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma(\lambda, \mu))^\top (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} \overline{\gamma(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu < \infty, \quad (1)$$

$$\gamma(\lambda, \mu) = \iint_K \vec{\alpha}(s, t) e^{i(s\lambda+t\mu)} ds dt.$$

Under this condition the error-free estimation is impossible [13].

The fields $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$ admit the spectral decomposition [9]

$$\vec{\xi}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} Z_{\xi}(d\lambda, d\mu), \quad \vec{\eta}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s\lambda + t\mu)} Z_{\eta}(d\lambda, d\mu), \quad (2)$$

where $Z_{\xi}(d\lambda, d\mu)$ and $Z_{\eta}(d\lambda, d\mu)$ are vector-valued orthogonal stochastic measures of the fields $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$.

Consider the problem of the mean-square optimal linear estimation of the functional

$$A_K \vec{\xi} = \iint_K \vec{a}(s, t)^{\top} \vec{\xi}(s, t) ds dt,$$

which depend on the unknown values of the field $\vec{\xi}(s, t)$ from observations of the field $\vec{\xi}(s, t) + \vec{\eta}(s, t)$ at points $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$.

Making use of spectral decomposition (2) of stationary field $\vec{\xi}(s, t)$ we can write the functional $A_K \vec{\xi}$ in the following form

$$A_K \vec{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_K(\lambda, \mu))^{\top} Z_{\xi}(d\lambda, d\mu), \quad A_K(\lambda, \mu) = \iint_K \vec{a}(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt.$$

Denote by $\hat{A}_K \vec{\xi}$ the optimal linear estimate of the functional $A_K \vec{\xi}$ from observations of the field $\vec{\xi}(s, t) + \vec{\eta}(s, t)$ at points $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ and by $\Delta(F, G) = E \left| A_K \vec{\xi} - \hat{A}_K \vec{\xi} \right|^2$ the mean-square error of the estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$. Since spectral densities of stationary fields $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$ are known, we can use the method of orthogonal projections in Hilbert spaces [7] to find the estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$.

Consider $\xi_k(s, t)$ and $\eta_k(s, t)$ as elements of the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generated by random variables ξ with 0 mathematical expectations, $E\xi = 0$, finite variations, $E|\xi|^2 < \infty$, and the inner product $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$. Denote by $H^{K-}(\xi + \eta)$ the closed linear subspace generated by elements $\{\xi_k(s, t) + \eta_k(s, t) : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K\}$ in the Hilbert space $H = L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denote by $L_2(F + G)$ the Hilbert space of functions $\vec{a}(\lambda, \mu)$ such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\vec{a}(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu)) \overline{\vec{a}(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu < \infty,$$

and denote by $L_2^{K-}(F + G)$ the subspace of the space $L_2(F + G)$ generated by the functions

$$\{e^{i(s\lambda + t\mu)} \delta_k, \delta_k = \{\delta_{kl}\}_{l=1}^N, (s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K\}.$$

The mean-square optimal linear estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$ of the functional $A_K \vec{\xi}$ can be represented in the form

$$\hat{A}_K \vec{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (h(\lambda, \mu))^{\top} (Z_{\xi}(d\lambda, d\mu) + Z_{\eta}(d\lambda, d\mu)),$$

where $h(\lambda, \mu) \in L_2^{K-}(F + G)$ is the spectral characteristic of the estimate.

The mean-square error $\Delta(h; F, G)$ of the estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$ is given by the formula

$$\Delta(h; F, G) = E \left| A_K \vec{\xi} - \hat{A}_K \vec{\xi} \right|^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_K(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) \overline{A_K(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (h(\lambda, \mu))^{\top} G(\lambda, \mu) \overline{h(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu.
\end{aligned}$$

According to the Hilbert space projection method proposed by A. N. Kolmogorov [7], the optimal estimation of the functional $A_K \vec{\xi}$ is a projection of the element $A_K \vec{\xi}$ of the space H on the space $H^{K-}(\xi + \eta)$. It can be found from the following conditions:

- 1) $\hat{A}_K \vec{\xi} \in H^{K-}(\xi + \eta)$,
- 2) $A_K \vec{\xi} - \hat{A}_K \vec{\xi} \perp H^{K-}(\xi + \eta)$.

It follows from the second condition that the spectral characteristic $h(\lambda, \mu)$ of the optimal linear estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$ for any $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ satisfies equations

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (A_K(\lambda, \mu) - h(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (h(\lambda, \mu))^{\top} G(\lambda, \mu) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu = 0.
\end{aligned}$$

The last relation is equivalent to equations

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) - (h(\lambda, \mu))^{\top} \times \\
&\quad \times (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

for any $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$. Define the function

$$(C_K(\lambda, \mu))^{\top} = (A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) - (h(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))$$

and its Fourier transformation

$$\vec{c}(s, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_K(\lambda, \mu) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

It follows from the condition (3) that the function $\vec{c}(s, t)$ is nonzero only on the set K . Hence,

$$C_K(\lambda, \mu) = \iint_K \vec{c}(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt,$$

and the spectral characteristic of the estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$ is of the form

$$\begin{aligned}
(h(\lambda, \mu))^{\top} &= (A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} - \\
&\quad - (C_K(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

It follows from the first condition, $\hat{A}_K \vec{\xi} \in H^{K-}(\xi + \eta)$, which determine the optimal linear estimate of the functional $A_K \vec{\xi}$, that the following relation holds true for any $(s, t) \in K$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1}) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((C_K(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1}) e^{-i(s\lambda + t\mu)} d\lambda d\mu. \quad (5)$$

Let us define operators

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_K \mathbf{a})(s, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_K (\vec{a}(u, v))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} \times \\ &\quad \times e^{i(\lambda(u-s) + \mu(v-t))} du dv d\lambda d\mu, \\ (\mathbf{R}_K \mathbf{a})(s, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_K (\vec{a}(u, v))^{\top} F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} \times \\ &\quad \times e^{i(\lambda(u-s) + \mu(v-t))} du dv d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

The relation (5) can be rewritten in the form

$$(\mathbf{R}_K \mathbf{a})(s, t) = (\mathbf{B}_K \mathbf{c})(s, t), \quad (s, t) \in K. \quad (6)$$

Suppose that the operator $\mathbf{B}_K$ is invertible. Then the function $\vec{c}(s, t)$ can be calculated by the formula

$$\vec{c}(s, t) = (\mathbf{B}_K^{-1} \mathbf{R}_K \mathbf{a})(s, t), \quad (s, t) \in K.$$

The mean-square error of the estimate $\hat{A}_K \vec{\xi}$ can be calculated by the formula

$$\begin{aligned} \Delta(F, G) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} G(\lambda, \mu) + (C_K(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} \times \\ &\quad \times F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} G(\lambda, \mu) + (C_K(\lambda, \mu))^{\top})^* d\lambda d\mu + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) - (C_K(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} G(\lambda, \mu) \times \\ &\quad \times (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} ((A_K(\lambda, \mu))^{\top} F(\lambda, \mu) - (C_K(\lambda, \mu))^{\top})^* d\lambda d\mu. \end{aligned} \quad (7)$$

Let us summarize results and present them in the form of a theorem.

Theorem 1. *Let $\vec{\xi}(s, t)$ and $\vec{\eta}(s, t)$ be uncorrelated multidimensional homogeneous random fields with spectral density matrices $F(\lambda, \mu)$ and $G(\lambda, \mu)$ which satisfy the minimality condition (1). The spectral characteristics $h(\lambda, \mu)$ and the mean-square error $\Delta(F, G)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_K \vec{\xi}$ which depends on the unknown values of the field $\vec{\xi}(s, t)$ based on observations of the field $\vec{\xi}(s, t) + \vec{\eta}(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ can be calculated by formulas (4), (7).*

Corollary 1. *Consider the estimation problem in the case where $K = \mathbb{R} \times [0, T]$. The spectral characteristics $h_T(F, G)$ of the optimal linear estimate of the functional*

$$A_T \vec{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \vec{a}(s, t)^{\top} \vec{\xi}(s, t) ds dt,$$

which depends on the unknown values of the field $\vec{\xi}(s, t)$ based on observations of the field $\vec{\xi}(s, t) + \vec{\eta}(s, t)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ can be calculated by formula (4) where

$$A_K(\lambda, \mu) = A_T(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \vec{a}(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt = \int_0^T \vec{a}(\lambda, t) e^{it\mu} dt,$$

$$C_K(\lambda, \mu) = C_T(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \vec{c}(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt = \int_0^T \vec{c}(\lambda, t) e^{it\mu} dt,$$

and $\vec{c}(\lambda, t)$ is determined by relation

$$\vec{c}(\lambda, t) = (\mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{R}_T \mathbf{a})(\lambda, t), \quad (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_T \mathbf{a})(\lambda, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (\vec{a}(\lambda, u))^{\top} (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} e^{i\mu(u-t)} d\mu du, \\ (\mathbf{R}_T \mathbf{a})(\lambda, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (\vec{a}(\lambda, u))^{\top} F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} e^{i\mu(u-t)} d\mu du. \end{aligned}$$

The mean-square error $\Delta_T(F, G)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_T \vec{\xi}$ can be calculated by formula

$$\Delta_T(F, G) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle (\mathbf{R}_T \mathbf{a})(\lambda, t), (\mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{R}_T \mathbf{a})(\lambda, t) \rangle + \langle (\mathbf{Q}_T \mathbf{a})(\lambda, t), \vec{a}(\lambda, t) \rangle d\lambda, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_T \mathbf{a})(\lambda, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (\vec{a}(\lambda, u))^{\top} F(\lambda, \mu) (F(\lambda, \mu) + G(\lambda, \mu))^{-1} \times \\ &\quad \times G(\lambda, \mu) e^{i\mu(u-t)} d\mu du, \end{aligned}$$

and $\langle a, b \rangle$ is the inner product.

Corollary 2. Let $\vec{\xi}(s, t)$ be a multidimensional stationary stochastic field with the spectral density matrix $F(\lambda, \mu)$, which satisfies the minimality condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu))^{-1} \overline{\gamma(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu < \infty, \quad (10)$$

$$\gamma(\lambda, \mu) = \iint_K \vec{\alpha}(s, t) e^{i(s\lambda + t\mu)} ds dt.$$

The spectral characteristic $h_T(F)$ and the mean-square error $\Delta_T(F)$ of the optimal linear estimate of the functional $A_T \vec{\xi}$ which depends on the unknown values of the field $\vec{\xi}(s, t)$ based on observations of the field $\vec{\xi}(s, t)$ at points $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, $K = \mathbb{R} \times [0, T]$, can be calculated by formulas

$$(h_T(F))^{\top} = (A_T(\lambda, \mu))^{\top} - (C_T(\lambda, \mu))^{\top} (F(\lambda, \mu))^{-1}, \quad (11)$$

$$\Delta_T(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle (\mathbf{B}_T^{-1} \mathbf{a})(\lambda, t), \vec{a}(\lambda, t) \rangle d\lambda, \quad (12)$$

where

$$(\mathbf{B}_T \mathbf{a})(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T (\vec{a}(\lambda, u))^{\top} (F(\lambda, \mu))^{-1} e^{i\mu(u-t)} d\mu du.$$

3. Conclusions and prospects for further research. In this article we propose methods of the mean-square optimal linear estimation of the functionals which depend on the unknown values of the multidimensional homogeneous random field based on observed data of the field with noise. Under condition of spectral certainty where the spectral densities of the fields are exactly known we derive formulas for calculating the spectral characteristics and the mean-square errors of the estimates of the functionals. Analogous results are derived for the case of observations of the field without noise. The results of the minimax approach to estimation problem will be published in the next part of the article.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Contributions of authors

Mikhail Moklyachuk - methodology, derivation of the main results and preparation of the paper; Oleksandr Masyutka - derivation of the main results and preparation of the paper.

Copyright ©



(2026). Masyutka O. Yu., Moklyachuk M. P. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Franke, J. Minimax robust prediction of discrete time series. (1985). *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.*, 68, 337–364. <https://doi.org/10.1007/BF00532645>.
2. Gikhman, I. I., Skorokhod, A. V. (2004). *The theory of stochastic processes*. Berlin: Springer.
3. Grenander, U. A prediction problem in game theory. (1957). *Ark. Mat.*, 3, 371–379.

- <https://doi.org/10.1007/BF02589429>.
4. Hannan, E. J. (1970). *Multiple time series*. New York: John Wiley & Sons.
 5. Kailath, T. A view of three decades of linear filtering theory. (1974). *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 20(2), 146–181. <https://doi.org/10.1109/TIT.1974.1055174>.
 6. Kassam, S. A., Poor, H. V. Robust techniques for signal processing: A survey. (1985). *Proc. IEEE*, 73(3), 433–481. <https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13167>.
 7. Kolmogorov, A. N. (1992). *Selected works by A. N. Kolmogorov. Vol. II: Probability theory and mathematical statistics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
 8. Malyarenko, A. (2013). *Invariant random fields on spaces with a group action. Probability and Its Applications*. Berlin: Springer.
 9. Mandrekar, V. S., Redett, D. A. (2018). *Weakly stationary random fields, invariant subspaces and applications*. Boca Raton, FL: CRC Press.
 10. Moklyachuk, M., Masyutka, O. (2012). *Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes*. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing.
 11. Moklyachuk, M. P., Masyutka, O. Yu., Golichenko, I. I. (2018). *Estimates of periodically correlated isotropic random fields*. New York: Nova Science Publishers.
 12. Moklyachuk, M., Shchestyuk, N. Robust estimates of functionals of homogeneous random fields. (2003). *Theory Stoch. Process*, 9(25), 101–113.
 13. Rozanov, Yu. A. (1967). *Stationary stochastic processes*. San Francisco-Cambridge-London-Amsterdam: Holden-Day.
 14. Vastola, K. S., Poor, H. V. An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering. (1983). *Automatica*, 28, 289–293. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(83\)90105-X](https://doi.org/10.1016/0005-1098(83)90105-X).
 15. Wiener, N. (1966). *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series. With engineering applications*. Cambridge: The M. I. T. Press.
 16. Yadrenko, M. I. (1983). *Spectral theory of random fields*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.
 17. Yaglom, A. M. Second-order homogeneous random fields. (1961). *Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, 4(2), 593–622.
 18. Yaglom, A. M. (1987). *Correlation theory of stationary and related random functions*. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag.

Масютка О. Ю., Моклячук М. П. Задача оцінювання векторних однорідних випадкових полів.

Розглядається задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів, що залежать від невідомих значень векторного однорідного випадкового поля за спостереженнями поля з шумом. Виведено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики оптимальної лінійної оцінки функціоналів за умови спектральної визначеності, де спектральні щільності полів точно відомі.

Ключові слова: векторне однорідне випадкове поле, оптимальна оцінка, середньоквадратична похибка, спектральна щільність, спектральна характеристика.

Recived: 18.03.2026

Accepted: 05.04.2026

Published: 30.04.2026

УДК 519.216

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).74-81](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).74-81)**А. О. Мельник¹, І. В. Розора²**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
аспірантка кафедри прикладної статистики

anastasiia.melnyk@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3167-4353>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського,
завідувач кафедри прикладної статистики,
професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук, професор

irozora@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8733-7559>**ПОБУДОВА ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ
ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ**

У статті досліджується побудова рівномірних довірчих інтервалів для імпульсної перехідної функції (ІПФ) неперервних лінійних стаціонарних систем. Оцінкою виступає вибіркова взаємна корелограма між стохастичним входним сигналом (гауссівським процесом у вигляді зрізаного тригонометричного ряду) та відгуком системи. Доведено, що центрована похибка оцінювання є квадратично-гауссівським процесом. Це дозволило отримати явну неасимптотичну оцінку ймовірності великих відхилень її рівномірної норми та сформулювати теорему про побудову довірчої смуги. Теорема підтверджена результатами імітаційного моделювання, де безпосередньо побудовано оцінку ІПФ та обчислено ширину довірчого інтервалу для різних рівнів значущості.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, випадкові процеси, крос-корелограма, довірчі інтервали, швидкість збіжності.

1. Вступ. Проблема визначення характеристик стохастичних лінійних систем, зокрема імпульсної перехідної функції (ІПФ) для моделей типу SISO (з одним входом та одним виходом), є предметом активних досліджень. Сфера застосування таких систем є надзвичайно широкою: від автоматичного керування та обробки сигналів до економетрики [1–4].

Розвиток методів, що базуються на вибірковій взаємній корелограмі між входним стохастичним сигналом та відгуком системи, представлено в роботах Будигіна та його співавторів [5–7]. Козаченко Ю.В. та Розора І.В. [8–11] досліджували інтегральні крос-корелограмні оцінки за допомогою теорії квадратично-гауссівських процесів, встановлюючи критерії для різних функціональних просторів. Зокрема, властивості крос-корелограмної оцінки та перевірка гіпотез у просторах L_p досліджувались у нашій попередній роботі [12].

У даній статті розглядається неперервна в часі лінійна система з дійсно-значною імпульсною перехідною функцією, визначеною на обмеженій області $[0, \Lambda]$. Входний сигнал моделюється як стаціонарний центрований гауссівський процес у вигляді зрізаного тригонометричного ряду. Метою роботи є отримання неасимптотичної оцінки ймовірності великих відхилень похибки крос-корелограмної оцінки у просторі неперервних функцій $C([0, \Lambda])$ з використанням просторів квадратично-гауссівських випадкових величин. Отримані результати є теоретичним підґрунтям для розрахунку ширини смуги та побудови

надійних рівномірних довірчих інтервалів для невідомої функції на всій області визначення.

2. Оцінка та її загальні властивості. Розглядається неперервна в часі лінійна стаціонарна система SISO, поведінка якої однозначно характеризується невідомою дійснозначною імпульсною перехідною функцією (ІПФ) $H(\tau) \in L_2([0, \Lambda])$. Зв'язок між вхідним сигналом $X(t)$ та вихідним $Y(t)$ описується інтегралом згортки:

$$Y(t) = \int_0^\Lambda H(\tau)X(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

який розуміється як інтеграл Рімана в середньому квадратичному [18].

Вхідний сигнал $X_N(t)$ моделюється як дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський процес у вигляді зрізаного ряду за ортонормованим базисом $\{\varphi_k(t), \psi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ простору $L_2([0, \Lambda])$ [13, 14]:

$$X_N(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^N \eta_k \psi_k(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де N – складність моделі, а ξ_k, η_k – незалежні стандартні гауссівські випадкові величини. Коваріаційна функція цього процесу має вигляд $r_N(t - s) = \sum_{k=1}^N (\varphi_k(t)\varphi_k(s) + \psi_k(t)\psi_k(s))$.

Оцінкою ІПФ слугує вибіркова інтегральна крос-корелограма [20] $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y_N(t)X_N(t - \tau)dt$, де $T > 0$ – час усереднення. Оскільки $H \in L_2([0, \Lambda])$, її можна розкласти в ряд Фур'є з відповідними коефіцієнтами a_k, b_k [19]:

$$H(t) = a_0\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^\infty (a_k\varphi_k(t) + b_k\psi_k(t)). \quad (3)$$

Математичне сподівання оцінки дорівнює $E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \sum_{k=1}^N (a_k\varphi_k(\tau) + b_k\psi_k(\tau))$, що вказує на її зміщеність. Зсув відносно центрованої ІПФ $H^*(\tau)$ є залишком ряду:

$$H^*(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \sum_{k=N+1}^\infty (a_k\varphi_k(\tau) + b_k\psi_k(\tau)), \quad (4)$$

який прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$, що гарантує асимптотичну незміщеність.

Дисперсія оцінки має складний інтегральний вигляд:

$$\begin{aligned} \text{Var}\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) = & \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \left[\int_0^\Lambda \int_0^\Lambda H(v)H(u)r_N(t-s+u-v)dudv \cdot r_N(t-s+u-v) \right. \\ & \left. + \int_0^\Lambda H(v)H(r_N(t-s+\tau-v))dv \cdot \int_0^\Lambda H(u)r_N(s-t+\tau-u)du \right] dt ds. \end{aligned} \quad (5)$$

При $T \rightarrow \infty$ та $N \rightarrow \infty$ дисперсія і зсув прямують до нуля, отже, $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ є спроможною оцінкою для $H(\tau)$.

3. Оцінювання на основі тригонометричного базису. Розглянемо випадок, коли вхідний сигнал моделюється за допомогою тригонометричного ортонормованого базису в

$$L_2([0, \Lambda]) : \varphi_k(t) = \sqrt{2/\Lambda} \cos(2k\pi t/\Lambda), \quad \psi_k(t) = \sqrt{2/\Lambda} \sin(2k\pi t/\Lambda)$$

для $k \geq 1$. Тоді процес $X_N(u)$ подається як скінченний тригонометричний ряд:

$$X_N(u) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sum_{k=1}^N \left(\xi_k \cos \left(\frac{2k\pi u}{\Lambda} \right) + \eta_k \sin \left(\frac{2k\pi u}{\Lambda} \right) \right), \quad (6)$$

а його коваріаційна функція має вигляд $r_N(t-s) = \frac{2}{\Lambda} \sum_{k=1}^N \cos \left(\frac{2k\pi(t-s)}{\Lambda} \right)$.

Для виведення явних швидкостей збіжності зсуву та дисперсії накладемо на невідому ІПФ $H(\tau)$ наступні умови регулярності:

Умова 1. Функція $H(\tau)$ є двічі неперервно диференційовною на $[0, \Lambda]$, причому інтеграли $I_0 = \int_0^\Lambda |H(\tau)| d\tau$, $I_1 = (\int_0^\Lambda |H'(\tau)|^2 d\tau)^{1/2}$ та $I_2 = \int_0^\Lambda |H''(\tau)| d\tau$ є скінченними.

Умова 2. Виконується умова періодичності на кінцях інтервалу: $H(0) = H(\Lambda)$.

За цих умов отримуємо явні верхні межі. Зсув оцінки (залишок ряду Фур'є) обмежується так:

$$|H^*(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| \leq \frac{\Lambda(d + I_2)}{2\pi^2 N}, \quad (7)$$

де $d = |H'(0)| + |H'(\Lambda)|$. Як бачимо, зсув зменшується зі швидкістю $O(1/N)$.

Дисперсія оцінки $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ має таку оцінку зверху:

$$\text{Var} \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) \leq \frac{\Lambda^3(\Lambda + 2)I_1^2}{\pi^4 T^2} \left(2 - \frac{1}{N} \right)^2. \quad (8)$$

Цей результат демонструє, що дисперсія зменшується зі швидкістю $O(1/T^2)$, що гарантує швидке покращення точності зі збільшенням часу усереднення T .

4. Квадратично-гауссівські стохастичні процеси. Статистичний аналіз оцінки суттєво спирається на теорію квадратично-гауссівських (КГ) процесів. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – ймовірнісний простір, а $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$ – сім'я сумісно гауссівських центрованих випадкових величин.

Означення 1. [21] Випадкова величина η називається квадратично-гауссівською, якщо вона належить простору $SG_\Xi(\Omega)$ і може бути подана як центрована квадратична форма: $\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E\bar{\xi}^T A \bar{\xi}$, де $\bar{\xi}$ – вектор величин з Ξ , A – дійснозначна матриця.

Означення 2. [21] Стохастичний процес $\xi(t)$ називається КГ процесом, якщо для кожного $t \in T$ відповідна випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_\Xi(\Omega)$.

Ключовим інструментом для побудови нашого статистичного критерію є неасимптотична нерівність для ймовірності великих відхилень супремуму неперервного КГ процесу.

Теорема 1. Нехай T – компактний параметричний простір, а $\xi(t)$ – вибірково неперервний з ймовірністю 1 КГ процес. Позначимо $\sigma_0 = \sup_{t \in T} (E\xi^2(t))^{1/2}$. За умови виконання певних умов регулярності (зокрема, збіжності ентропійного інтеграла), існує таке x_0 , що для всіх $x \geq x_0$ виконується нерівність:

$$P \left\{ \sup_{t \in T} |\xi(t)| > x \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{x\sqrt{2}}{\sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_0} \right\}. \quad (9)$$

Ця потужна теорема надає явну межу для хвоста розподілу супремуму процесу. Вона дозволяє безпосередньо контролювати похибку через максимальне середньоквадратичне відхилення σ_0 , яке у нашій задачі залежить від параметрів N та T .

5. Швидкість збіжності оцінки у просторі неперервних функцій. Розглянемо процес центрованої похибки оцінювання

$$\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau) = \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau).$$

Лема 1. *Стохастичний процес $\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ є квадратично-гауссівським.*

Доведення. Оцінка $\hat{H}(\tau)$ визначається як інтеграл від добутку двох гауссівських процесів $Y_N(t)$ та $X_N(t - \tau)$. Цей інтеграл можна подати як границю інтегральних сум у середньому квадратичному. Оскільки кожен доданок у цих сумах є квадратичною формою від базових гауссівських величин, а простір КГ величин є замкненим відносно збіжності в середньому квадратичному, процес $\hat{Z}(\tau)$ також належить до цього простору.

Повну похибку оцінювання можна розкласти на детермінований зсув та стохастичну похибку $\hat{Z}(\tau)$. Використовуючи нерівність трикутника для рівномірної норми $\|f\|_C = \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |f(\tau)|$, маємо:

$$\sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H^*(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| \leq \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H^*(\tau) - E\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| + \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau)|. \quad (10)$$

Нехай $h_{N,\Lambda}^*$ – рівномірна межа для зсуву (з розділу 3), а σ_0 – рівномірна межа для стандартного відхилення процесу $\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau)$. Застосовуючи Теорему 1 до $\hat{Z}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ у просторі $C([0, \Lambda])$, отримуємо головний результат.

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються Умови 1 та 2. Тоді, для достатньо великих ε (зокрема $\varepsilon \geq t_{N,T,\Lambda}$, де $t_{N,T,\Lambda}$ – порогове значення), виконується нерівність:*

$$P \left\{ \sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H^*(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| > \varepsilon \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon - \Lambda h_{N,\Lambda}^*)\sqrt{2}}{\sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon - \Lambda h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2}\sigma_0} \right\}. \quad (11)$$

6. Побудова довірчих інтервалів. Нерівність для ймовірності великих відхилень, встановлена у попередній теоремі, надає необхідний теоретичний інструмент для переходу від оцінювання до статистичних висновків. У цьому розділі ми використовуємо цей результат для побудови рівномірних довірчих інтервалів, які забезпечують кількісну міру невизначеності для всієї оціненої імпульсної перехідної функції (ІПФ).

Структуру ймовірнісної нерівності можна використати, щоб зробити статистичний висновок про невідому справжню ІПФ $H(\tau)$. Це набуває форми довірчого інтервалу – випадкової функціональної смуги, яка містить усю справжню функцію із заданою високою ймовірністю.

Позначимо праву частину нерівності з Теорема 2 як $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) = 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon - \Lambda h_{N,\Lambda}^*)\sqrt{2}}{\sigma_0}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon - \Lambda h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2}\sigma_0} \right\}. \quad (12)$$

Наступна теорема формалізує побудову довірчої множини.

Теорема 3. Нехай $\alpha \in (0, 1)$ – заданий рівень значущості. Припустимо, що ε_α є розв’язком рівняння:

$$g(\varepsilon_\alpha) = \alpha. \quad (13)$$

Якщо виконується умова $\varepsilon_\alpha \geq t_{N,T,\Lambda}$, то з імовірністю не менше $1 - \alpha$ (надійність $\gamma = 1 - \alpha$) справжня імпульсна перехідна функція $H(\tau)$ задовольняє умову:

$$\sup_{\tau \in [0, \Lambda]} |H(\tau) - \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)| \leq \varepsilon_\alpha. \quad (14)$$

Відповідно, $(1 - \alpha)100\%$ -вим рівномірним довірчим інтервалом для невідомої функції $H(\tau)$ є множина функцій, обмежена випадковими функціями:

$$\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) - \varepsilon_\alpha < H(\tau) < \hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau) + \varepsilon_\alpha, \quad \forall \tau \in [0, \Lambda]. \quad (15)$$

Ця теорема визначає довірчу множину для функції $H(\tau)$ на всій функціональній області $[0, \Lambda]$. Отриманий інтервал забезпечує кількісне зведення невідомості, пов’язаної з нашою процедурою оцінювання, і дозволяє гарантувати, що справжня функція не вийде за вказані межі із заданим рівнем надійності.

7. Імітаційне моделювання. Для ілюстрації теоретичних результатів та перевірки розробленої методології на практиці було проведено чисельний аналіз. Розглянуто систему з $\Lambda = 10$ та справжньою ІПФ у вигляді загасаючої синусоїди $H(\tau) = e^{-\tau} \sin(\pi\tau/\Lambda)$, яка моделює типову коливальну систему із загасанням і повністю задовольняє Умови 1 та 2. Відповідні структурні константи обчислюються як: $I_0 \approx 0.2860$, $I_1 \approx 0.1571$, $I_2 \approx 0.4046$, $d \approx 0.3142$.

У ході експерименту було згенеровано траєкторії стохастичного вхідного процесу $X_N(t)$ та відгуку системи $Y_N(t)$. На основі цих даних безпосередньо побудовано оцінку $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$, після чого чисельно розв’язано рівняння $g(\varepsilon_\alpha) = \alpha$ для знаходження радіуса довірчої смуги ε_α .

У табл. 1 наведено обчислені значення ε_α для фіксованих точок зрізання $N = 100$ та $N = 1000$ при різних значеннях часу спостереження T та рівнях значущості α .

Таблиця 1.

Обчислені значення ε_α для $N = 100$ та $N = 1000$ при різних обсягах вибірки T

Час T	$N = 100$			$N = 1000$		
	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
150	0.1707	0.1959	0.2532	0.1386	0.1639	0.2214
250	0.1170	0.1321	0.1665	0.0846	0.0998	0.1343
350	0.0940	0.1048	0.1293	0.0615	0.0723	0.0970
500	0.0767	0.0843	0.1014	0.0441	0.0517	0.0690

Аналіз результатів таблиці підтверджує, що побудована оцінка $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ успішно знаходиться в межах довірчої смуги $H(\tau) \pm \varepsilon_\alpha$ із заданим рівнем надійності. Можна помітити чітку тенденцію: зменшення рівня значущості α (підвищення надійності) очікувано розширює довірчий інтервал. Водночас, збільшення часу усереднення T є найбільш впливовим фактором для звуження смуги. Перехід від $N = 100$ до складнішої моделі вхідного сигналу з $N = 1000$ також

дає відчутне зменшення ε_α , особливо при великих обсягах вибірки, що підтверджує теоретично виведений порядок спадання зсуву $O(1/N)$.

Окремо слід звернути увагу на вплив параметра зрізання N з точки зору обчислювальної складності. Хоча збільшення N мінімізує детермінований зсув оцінки (оскільки залишок ряду Фур'є швидше прямує до нуля), воно також призводить до зростання частоти коливань базисних функцій у змодельованому вхідному сигналі $X_N(t)$. На практиці це вимагає суттєвого зменшення кроку дискретизації при чисельному інтегруванні для коректного обчислення $\hat{H}_{N,T,\Lambda}(\tau)$ без втрати інформації за теоремою Котельникова (Найквіста-Шеннона). Це, у свою чергу, пропорційно збільшує обчислювальні витрати. Тому вибір оптимального співвідношення між часом спостереження T та кількістю базисних функцій N є важливою задачею планування експерименту, яка має розв'язуватися з урахуванням наявних обчислювальних ресурсів та суворих вимог до точності ε_α .

8. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті розроблено методологію побудови рівномірних довірчих інтервалів для імпульсної перехідної функції неперервних лінійних стаціонарних систем. На основі інтегральної крос-корелограми та теорії квадратично-гауссівських процесів отримано явні межі для зсуву та дисперсії оцінки. Ключовим результатом є доведення того, що центрована похибка оцінювання є квадратично-гауссівським процесом, що дозволило вивести неасимптотичну межу для рівномірної норми похибки та побудувати надійний довірчий інтервал.

Імітаційне моделювання підтвердило теоретичні висновки, наочно продемонструвавши залежність точності від часу спостереження та складності вхідного сигналу.

Подальші дослідження методів ідентифікації стохастичних систем на основі імпульсної перехідної функції доцільно спрямувати на аналіз дискретно спостережуваних процесів, складніші архітектури систем (МІМО) та розширення на класи негауссівських вхідних сигналів.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Для Розори І. В. та Мельник А. О. дослідження було проведено з частковою фінансовою підтримкою за МОН проектом “Розроблення методів моделювання, аналізу та оптимізації виробничих систем із використанням стохастичних моделей і систем керування запасами”.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Розора І. В.: концептуалізація, методологія, супервізія, написання — рецензування та редагування.

Мельник А. О.: формальний аналіз, написання — оригінальний проєкт.

Авторські права ©



(2026). Мельник А. О., Розора І. В.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Barigozzi, M., Lippi, M., & Luciani, M. (2021). Large-dimensional Dynamic Factor Models: Estimation of Impulse-Response Functions with I(1) cointegrated factors. *Journal of Econometrics*, 221(2), 455–482. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2020.05.004>
2. Hannan, E., & Deistler, M. (1988). *The Statistical Theory of Linear Systems*. New York: Wiley.
3. Lütkepohl, H. (2010). Impulse Response Function. In *Macroeconometrics and Time Series Analysis* (pp. 145–150). Palgrave Macmillan UK. https://doi.org/10.1057/9780230280830_16
4. Soderstrom, T., & Stoica, P. (1989). *System Identification*. London: Prentice-Hall.
5. Blazhievskaya, I., & Zaiats, V. (2021). On cross-correlogram IRF's estimators of two-output systems in spaces of continuous functions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(24), 6024–6048. <https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1738490>
6. Buldygin, V., & Li, F. (1997). On Asymptotic Normality of Estimators of Unit Impulse Responses of Linear Systems. I. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 54, 17–24.
7. Buldygin, V., & Li, F. (1997). On Asymptotic Normality of Estimators of Unit Impulse Responses of Linear Systems. II. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 55, 29–36.
8. Rozora, I., & Kozachenko, Yu. (2016). A Criterion for Testing Hypothesis about Impulse Response Function. *Statistics, Optimization & Information Computing*, 4(3). <https://doi.org/10.19139/soic.v4i3.222>
9. Kozachenko, Yu., & Rozora, I. (2016). Cross-correlogram Estimators of Impulse Response Functions. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 93, 79–91. <https://doi.org/10.1090/tpms/995>
10. Rozora, I. (2018). Statistical Hypothesis Testing for the Shape of Impulse Response Function. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 47(6), 1459–1474. <https://doi.org/10.1080/03610926.2017.1321125>
11. Rozora, I. (2020). On the Convergence Rate for the Estimation of Impulse Response Function in the Space $L_p(T)$. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, (4), 36–41. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2018/4.5>
12. Rozora, I., & Melnyk, A. (2025). Statistical Estimation and Hypothesis Testing on Impulse Response Function. *Austrian Journal of Statistics*, 54(1), 200–213.
13. Ianevych, T., Rozora, I., & Pashko, A. (2022). On One Way of Modeling a Stochastic Process with Given Accuracy and Reliability. *Monte Carlo Methods and Applications*, 28(2), 135–147. <https://doi.org/10.1515/mcma-2022-2110>
14. Kozachenko, Yu., Pashko, A., & Rozora, I. (2007). *Simulation of Stochastic Processes and Fields*. Kyiv: Zadruga.
15. Kozachenko, Yu., Pogorilyak, O., Rozora, I., & Tegza, A. (2016). Introduction. In *Si-*

- mulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability* (pp. ix–xi). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/b978-1-78548-217-5.50011-8>
16. Rozora, I., Ianevych, T., Pashko, A., & Zatula, D. (2023). Simulation of Stochastic Processes with Given Reliability and Accuracy. In *Stochastic Processes: Fundamentals and Emerging Applications* (pp. 415–452). Nova Science Publishers. <https://doi.org/10.52305/kegg1336>
 17. Vasylyk, O., Rozora, I., Ianevych, T., & Lovytska, I. (2021). On Some Method on Model Construction for Strictly sub-Gaussian Generalized Fractional Brownian Motion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, (2), 18–25. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.3>
 18. Gikhman, I., & Skorokhod, A. (1996). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications Inc. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61921-2_1
 19. Beals, R. (2004). *Analysis: An Introduction*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511755163>
 20. Kozachenko, Yu., & Rozora, I. (2023). On Statistical Properties of the Estimator of Impulse Response Function. In *Stochastic Processes, Statistical Methods, and Engineering Mathematics* (pp. 563–585). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17820-7_25
 21. Buldygin, V., & Kozachenko, Yu. (2000). *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes* (Vol. 188). American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/mmono/188>

Melnyk A. O., Rozora I. V. Confidence intervals for impulse response function.

The paper investigates the construction of uniform confidence intervals for the impulse response function (IRF) of continuous time-invariant linear systems. The estimator is a sample cross-correlogram between a stochastic input signal (a Gaussian process represented as a truncated trigonometric series) and the system's response. It is proved that the centered estimation error is a square-Gaussian process. This allowed obtaining an explicit non-asymptotic bound for the large deviation probability of its uniform norm and formulating a theorem on confidence band construction. The theoretical results are validated via a simulation study, which directly constructs the IRF estimate and calculates the confidence interval width for given significance levels.

Keywords: impulse response function, stochastic processes, cross-correlogram, confidence interval, rate of convergence.

Отримано: 18.03.2026

Прийнято: 02.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).82-90](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).82-90)**Ю. Ю. Млавець¹, О. О. Плугатор², О. А. Тимошенко³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат фізико-математичних наук
yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1480-9017>

² Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
магістр фізико-математичного факультету
pluhatorolesya2003@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7375-2742>

³ Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
Університет Осло (Норвегія),
доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
кандидат фізико-математичних наук
otymoshenkokpi@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1885-7275>

ДЕКОМПОЗИЦІЯ СТРАХОВОГО НАДЛИШКУ В СТОХАСТИЧНІЙ МОДЕЛІ

У статті досліджується декомпозиція страхового надлишку в стохастичній моделі страхування життя. Запропоновано підхід на основі ISU, який дає змогу подати надлишок як суму компонент, що відповідають окремим факторам ризику. У межах ризик-нейтрального підходу отримано аналітичні формули для внесків фінансового та біометричного ризиків і показано адитивність, узгодженість та економічну інтерпретацію побудованої декомпозиції. Підхід може бути використаний для аналізу динаміки страхового надлишку та оцінювання впливу окремих факторів ризику.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння, страхування життя, страховий надлишок, декомпозиція ризику, ISU-декомпозиція, формула Іто.

1. Вступ. Прибутки та збитки страхового портфеля між звітними датами формуються під впливом різних факторів ризику. Їх аналіз (*P&L attribution*) полягає у декомпозиції фінансового результату для кількісного визначення внеску окремих джерел ризику та є важливим для управління ризиками і виконання регуляторних вимог.

Міжнародні стандарти IFRS 17 [9] та нормативи ЄС [10] передбачають детальний аналіз змін власних коштів страховика, що потребує математично обґрунтованих і стійких методів декомпозиції [4, 5].

У літературі запропоновано різні підходи, зокрема метод “один за раз” (*One-at-a-time*, OAT), варіаційну декомпозицію та методи послідовного оновлення [4], а також декомпозицію динамічних ризиків [1]. Проте жоден із них не забезпечує одночасно адитивність, нормалізацію, інваріантність і стабільність [3].

Важливими є методи послідовного оновлення (*Sequential Updating*, SU) та нескінченно малого послідовного оновлення (*Infinitesimal Sequential Updating*, ISU): SU забезпечує адитивність, але залежить від порядку [4], тоді як ISU, запропонований у [2], є інваріантним і узгодженим. Перехід до неперервного часу

дозволяє враховувати повні траєкторії факторів [6], а ISU виникає як границя SU [2, 5]. У цій роботі дисконтований надлишок подано як суму адитивних компонент на основі формули Іто.

У страхуванні життя надлишок можна розглядати як стохастичний процес, що відображає відхилення фактичного досвіду від очікуваного [7]. Це створює основу для декомпозиції ризику з урахуванням фінансових і біометричних факторів.

Робота складається зі вступу, чотирьох основних розділів та висновків. У другому розділі вводиться модель надлишку, у третьому — SU та ISU-декомпозиція, у четвертому — модельні припущення, у п'ятому — аналітичні формули внесків ризиків; у висновках окреслено подальші дослідження.

2. Процес страхового надлишку. Нехай задано повний фільтрований імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, який задовольняє звичайні умови (правоконтинуальність та повнота). Усі процеси далі вважаються $\mathbb{F}$ -адаптованими та càdlàg, якщо не зазначено інше.

Розглянемо проміжок $[0, T]$, де $T < \infty$. Позначимо через $C = \{C(t)\}_{t \in [0, T]}$ процес кумулятивного грошового потоку страховика, який є процесом скінченної варіації майже напевно, тобто $\mathcal{V}_0^T(C(\cdot, \omega)) < \infty$ для майже всіх $\omega \in \Omega$, де $\mathcal{V}_0^T(C(\cdot, \omega))$ позначає повну варіацію функції на інтервалі $[0, T]$. Зокрема, інтеграли відносно C розуміються у сенсі Лебега–Стілтєса.

Нехай $\kappa = \{\kappa(t)\}_{t \in [0, T]}$ — строго додатний $\mathbb{F}$ -семімартигнал, такий що $\kappa(0) = 1$ і $\frac{1}{\kappa}$ також є семімартиггалом. Процес κ інтерпретується як фактор накопичення (numéraire). Для $s, t \in [0, T]$ визначимо випадковий фактор перерахунку $D(t, s) := \frac{\kappa(t)}{\kappa(s)}$. Він задає вартість у момент t одиниці грошового потоку, здійсненого у момент s , у вибраному numéraire κ . Зокрема, при $s \geq t$ величина $D(t, s)$ використовується для дисконтування майбутніх потоків до моменту t , а при $s \leq t$ — для накопичення минулих потоків до моменту t . За допомогою процесів C та κ визначимо базові об'єкти моделі, а саме процес активів, процес зобов'язань та процес страхового надлишку.

Активи. Процес активів визначається як

$$A(t) := - \int_0^t D(t, s) dC(s), \quad t \in [0, T].$$

Інтеграл є коректно визначеним як стохастичний інтеграл Лебега–Стілтєса.

Зобов'язання. Припустимо, що грошові потоки є інтегровними, тобто

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \kappa(s)^{-1} |dC(s)| \right] < \infty.$$

Тоді процес (ризик-нейтральної) вартості зобов'язань визначається як

$$L(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T D(t, s) dC(s) \mid \mathcal{F}_t \right], \quad (1)$$

де $\mathbb{Q}$ — еквівалентна мартигальна міра, за якої $\kappa^{-1}A$ є мартиггалом.

Надлишок. Процес страхового надлишку визначається стандартно:

$$S(t) := A(t) - L(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Дисконтований надлишок. Визначимо дисконтований процес

$$\tilde{S}(t) := \frac{S(t)}{\kappa(t)}, \quad t \in [0, T].$$

Тоді за стандартними аргументами ризик-нейтрального оцінювання для $0 \leq t \leq u \leq T$ маємо, що $S \in \mathbb{Q}$ -мартингалом. Тому існує $\mathcal{F}_t$ -вимірний процес $V = \{V(t)\}_{t \in [0, T]}$ такий, що $S(t) = \kappa(t) V(t)$, $t \in [0, T]$, де $V(t) := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}(T) \mid \mathcal{F}_t]$. Оскільки V є мартингалом, подальшу декомпозицію виконуємо саме для цього процесу.

Надалі припускаємо, що вся випадковість моделі задається скінченним набором базових стохастичних факторів $Z = (Z^1, \dots, Z^m)$, які породжують фільтрацію $\mathbb{F}$, тобто $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s^1, \dots, Z_s^m : s \leq t) \vee \mathcal{N}$. Припускаючи, що $V(t)$ залежить лише від траєкторій Z на $[0, t]$, шукаємо процеси $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ такі, що

$$V(t) = V(0) + \sum_{i=1}^m \Delta_i(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

де $\Delta_i(t)$ інтерпретується як внесок i -го фактора ризику. Відповідно,

$$S(t) = \kappa(t)V(0) + \kappa(t) \sum_{i=1}^m \Delta_i(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Саме представлення (4) є основою подальшої побудови SU- та ISU-декомпозицій.

3. Принцип декомпозиції SU та ISU. Нехай $Z = (Z^1, \dots, Z^m)$ є вектором стохастичних факторів ризику, а через $Z^{(t)} := (Z_{\cdot \wedge t}^1, \dots, Z_{\cdot \wedge t}^m)$ позначимо процес факторів, зупинений у момент часу t . Процес переоцінки задається співвідношенням $V(t) = \Psi(Z^{(t)})$, $t \geq 0$, де $\Psi : \mathcal{D}([0, T]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ є вимірним функціоналом відносно σ -алгебри на просторі траєкторій.

Для виділення внесків окремих факторів введемо функцію

$$H(t_1, \dots, t_m) := \Psi(Z_{\cdot \wedge t_1}^1, \dots, Z_{\cdot \wedge t_m}^m), \quad t_1, \dots, t_m \geq 0,$$

яку будемо називати поверхнею переоцінки. Зокрема, $V(t) = H(t, \dots, t)$, $t \geq 0$. Інтерпретаційно, значення $H(t_1, \dots, t_m)$ відповідає ситуації, коли інформація про j -й фактор ризику доступна до моменту t_j , тоді як інші фактори фіксовані на відповідних рівнях.

Нехай $\tau = \{0 = r_0 < r_1 < \dots\}$ — розбиття інтервалу $[0, \infty)$. Для фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r_k^t := r_k \wedge t$.

Означення 1 (Декомпозиція послідовного оновлення, SU). *Нехай задано порядок факторів $1, \dots, m$. Для розбиття τ та фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r_k^t = r_k \wedge t$. Для $i = 1, \dots, m$ визначимо*

$$\Delta_i^\tau(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \left[H(r_{k+1}^t, \dots, r_{k+1}^t, r_{k+1}^t, r_k^t, \dots, r_k^t) - H(r_{k+1}^t, \dots, r_{k+1}^t, r_k^t, r_k^t, \dots, r_k^t) \right],$$

де в обох значеннях функції H перші $i-1$ координат дорівнюють r_{k+1}^t , останні $m-i$ координат дорівнюють r_k^t , а i -та координата змінюється з r_k^t на r_{k+1}^t .

Сімейство процесів $\Delta_1^\tau, \dots, \Delta_m^\tau$ називається SU-декомпозицією процесу $V(t)$ для заданого порядку факторів.

На кожному кроці змінюється лише один фактор, тому $\Delta_i^\tau(t)$ інтерпретується як його внесок. Декомпозиція залежить від порядку факторів (загалом $m!$ варіантів), тобто не є інваріантною. Для усунення цього розглядається граничний перехід при подібненні розбиття.

Означення 2 (Нескінченно мала декомпозиція послідовного оновлення, ISU). Нехай $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність розбиттів інтервалу $[0, \infty)$ така, що $|\tau^n| := \sup_k (r_{k+1}^n - r_k^n) \rightarrow 0$. Якщо для кожного $i = 1, \dots, m$ та $t \geq 0$ існує границя $\Delta_i(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_i^{\tau^n}(t)$, де збіжність розуміється за ймовірністю, то процеси $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ називаються ISU-декомпозицією процесу $V(t)$.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. Нехай $\{\tau^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність розбиттів інтервалу $[0, \infty)$, для якої $|\tau^n| \rightarrow 0$, і нехай відповідна ISU-декомпозиція процесу $V(t)$ існує. Тоді для всіх $t \geq 0$ виконується (3). Крім того, якщо для деякого $i \in \{1, \dots, m\}$ процес Z^i є сталим на інтервалі $(a, b] \subset [0, \infty)$, то процес Δ_i також є сталим на цьому інтервалі.

Доведення. Адитивність. Для кожного розбиття $\tau^n = \{0 = r_0^n < r_1^n < \dots\}$ та фіксованого $t \geq 0$ покладемо $r_k^{n,t} = r_k^n \wedge t$. За означенням SU-декомпозиції маємо $\Delta_i^{\tau^n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_{k+1}^{n,t}, r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}) - H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}, r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}) \right]$, де в першому значенні функції H перші i координат дорівнюють $r_{k+1}^{n,t}$, а останні $m - i$ координат дорівнюють $r_k^{n,t}$; у другому значенні перші $i - 1$ координат дорівнюють $r_{k+1}^{n,t}$, а координати з i -ї до m -ї дорівнюють $r_k^{n,t}$.

Тоді для кожного k сума за всіма факторами є телескопічною:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_{k+1}^{n,t}, r_{k+1}^{n,t}, r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}) - H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_{k+1}^{n,t}, r_k^{n,t}, r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}) \right] \\ = H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_{k+1}^{n,t}) - H(r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}). \end{aligned}$$

Отже, $\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[H(r_{k+1}^{n,t}, \dots, r_{k+1}^{n,t}) - H(r_k^{n,t}, \dots, r_k^{n,t}) \right]$. Оскільки $r_0^{n,t} = 0$, а для достатньо великих k маємо $r_k^{n,t} = t$, остання сума також є телескопічною. Тому $\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = H(t, \dots, t) - H(0, \dots, 0)$. З означення поверхні переоцінки маємо $H(t, \dots, t) = V(t)$, $H(0, \dots, 0) = V(0)$. Отже, для кожного n маємо $\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) = V(t) - V(0)$. Оскільки кількість факторів m є скінченною, то

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i^{\tau^n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sum_{i=1}^m \Delta_i(t).$$

Переходячи до границі одержуємо (3).

Нормалізація. Нехай для деякого $i \in \{1, \dots, m\}$ процес Z^i є сталим на інтервалі $(a, b] \subset [0, \infty)$. Покажемо, що тоді процес Δ_i також є сталим на цьому інтервалі. Візьмемо довільні $a < s < t \leq b$. Оскільки Z^i не змінюється на $(s, t]$, то оновлення i -го фактора на будь-якому підінтервалі, що лежить у $(s, t]$, не змінює значення поверхні переоцінки. Тому для кожного розбиття τ^n приріст відповідної SU-компоненти на $(s, t]$ дорівнює нулю. Переходячи до границі за ймовірністю при $n \rightarrow \infty$, маємо $\Delta_i(t) - \Delta_i(s) = 0$. Отже, $\Delta_i(t) = \Delta_i(s)$. Оскільки $s, t \in (a, b]$ були довільними, процес Δ_i є сталим на інтервалі $(a, b]$.

Таким чином, ISU-декомпозиція задає узгоджений розклад процесу переоцінки та дозволяє ідентифікувати внески окремих факторів ризику в динаміку страхового надлишку. Інваріантність щодо порядку оновлення потребує окремого аналізу і досліджується за додаткових припущень.

4. Модельні припущення для застосувань. Розглянемо портфель із $n \in \mathbb{N}$ незалежних страхових контрактів, що укладаються в момент часу 0 та діють до моменту $T > 0$. Нехай p_j — одноразова страхова премія для j -го договору. Стан j -го застрахованого описується процесом підрахунку $N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\eta_j \leq t\}}$, $t \geq 0$, де η_j — випадковий момент смерті. Відповідний індикатор виживання має вигляд $I_j(t) = 1 - N_j(t) = \mathbf{1}_{\{\eta_j > t\}}$.

Припускаємо, що для кожного j інтенсивність смертності $\lambda_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ є детермінованою локально інтегрованою функцією, і процес

$$M_j^{\mathbb{P}}(t) := N_j(t) - \int_0^t \lambda_j(s) I_j(s) ds$$

є $\mathbb{P}$ -мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$. Тоді функція виживання має вигляд

$$\mathbb{P}(\eta_j > t) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_j(u) du \right),$$

а для $t \geq s$ виконується

$$\mathbb{P}(\eta_j > t \mid \eta_j > s) = \exp \left(- \int_s^t \lambda_j(u) du \right). \quad (5)$$

Лема 1. Нехай $T > t$. Тоді

$$\mathbb{E}[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t] = \exp \left(- \int_t^T \lambda_j(u) du \right) I_j(t). \quad (6)$$

Доведення. Оскільки $I_j(T) = \mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}}$, маємо $I_j(T) = I_j(t) \mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}}$, бо на події $\{\eta_j \leq t\}$ обидві частини дорівнюють нулю, а на події $\{\eta_j > t\}$ маємо $I_j(t) = 1$. Тому $\mathbb{E}[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[I_j(t) \mathbf{1}_{\{\eta_j > T\}} \mid \mathcal{F}_t]$. Оскільки $I_j(t) \in \mathcal{F}_t$ -вимірним, дістаємо $\mathbb{E}[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t] = I_j(t) \mathbb{P}(\eta_j > T \mid \mathcal{F}_t)$. За (5) маємо

$$\mathbb{P}(\eta_j > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\eta_j > T \mid \eta_j > t) = \exp \left(- \int_t^T \lambda_j(u) du \right).$$

Отже, $\mathbb{E}[I_j(T) \mid \mathcal{F}_t] = \exp \left(- \int_t^T \lambda_j(u) du \right) I_j(t)$, що і треба було довести.

Отримані вище результати дозволяють обчислювати умовні математичні сподівання виплат, що залежать від моменту смерті. Зокрема, для задач ризик-нейтрального оцінювання необхідно знаходити умовні сподівання дисконтованих виплат вигляду $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{I_j(T)}{\kappa(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]$. Тому далі специфікуємо фінансову модель, яка описує динаміку фактора накопичення в ризик-нейтральній мірі $\mathbb{Q}$.

Нехай у ризик-нейтральній мірі $\mathbb{Q}$ ціна активу підпорядковується моделі Блека–Шоулза, а саме описується геометричним броунівським рухом (детальніше, наприклад, див. [8])

$$dX(t) = rX(t) dt + \sigma X(t) dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (7)$$

де r — безризикова ставка, $\sigma > 0$ — волатильність.

Відповідний фактор накопичення $\kappa(t) = X(t)$ має вигляд

$$\kappa(t) = \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W^{\mathbb{Q}}(t) \right), \quad \kappa(0) = 1. \quad (8)$$

Припускаємо, що процеси $\{W^{\mathbb{Q}}, N_1, \dots, N_n\}$ є незалежними під мірою $\mathbb{Q}$.

Зауваження 1. Процес $W^{\mathbb{Q}} = \{W^{\mathbb{Q}}(t), t \geq 0\}$ є вінерівським процесом відносно ризик-нейтральної міри $\mathbb{Q}$. Він пов'язаний із вінерівським процесом $W = \{W(t), t \geq 0\}$ у вихідній ймовірнісній мірі за теоремою Гірсанова (див. [8])

$$dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW(t) + \theta(t) dt,$$

де $\theta(t)$ — процес зміни міри. У випадку моделі Блека–Шоулза (див. [8]) маємо $\theta(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}$, звідки $dW^{\mathbb{Q}}(t) = dW(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$. Таким чином, під мірою $\mathbb{Q}$ динаміка ціни активу набуває вигляду (7).

Для кожного j визначимо компенсатор

$$C_j^{\mathbb{Q}}(t) = \int_0^t \lambda_j^{\mathbb{Q}}(s) I_j(s-) ds. \quad (9)$$

Лема 2. Процес $M_j^{\mathbb{Q}}(t) := N_j(t) - C_j^{\mathbb{Q}}(t)$ є $\mathbb{Q}$ -мартингалом відносно фільтрації $\mathbb{F}$.

Доведення. За припущенням про інтенсивність $\lambda_j^{\mathbb{Q}}$ процес $C_j^{\mathbb{Q}}$ є компенсатором процесу N_j . Згідно із загальною теорією процесів підрахунку, різниця між процесом підрахунку та його компенсатором є мартингалом, тобто $M_j^{\mathbb{Q}}$ є $\mathbb{Q}$ -мартингалом.

5. ISU-декомпозиція для ризик-нейтрального оцінювання. Розглянемо портфель договорів страхування на дожиття (pure endowment), що укладаються в момент часу $t = 0$ та діють до моменту T . Нехай b_j — виплата у разі дожиття j -го застрахованого до моменту T .

Стохастичний грошовий потік для такого контракту має вигляд

$$dC_j(t) = I_j(t) b_j \delta_T(dt),$$

де $I_j(t)$ — індикатор дожиття, а δ_T — міра Дірака в точці T .

Введемо випадкову величину дисконтованого фінансового результату портфеля $\Xi = \sum_j p_j - \sum_j \frac{b_j I_j(T)}{\kappa(T)}$. Нехай базис ризику має вигляд $Z = (Z^1, Z^2) = (\Phi, N)$, де Φ — фінансовий фактор, а $N = (N_j)$ — процеси смертності.

Процес переоцінки визначається як

$$V(t) = \Psi(Z^t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Xi \mid \sigma(Z^t)]. \quad (10)$$

Введемо поверхню переоцінки

$$H(t_1, t_2) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Xi \mid \sigma(\Phi^{t_1}, N^{t_2})]. \quad (11)$$

Наступна теорема описує аналітичні формули для внесків фінансового фактора та фактора смертності, що дозволяє чітко розділити вплив ринкових коливань та демографічних змін на страховий надлишок.

Теорема 2. Нехай $Z = (\Phi, N)$ — базис ризику, де $N = (N_1, \dots, N_n)$. Нехай процес переоцінки V і поверхня переоцінки H визначаються формулами (10) та (11) відповідно. Нехай фактор накопичення κ має вигляд (8), а компенсатор процесу N_j задано в (9). Припустимо, що процеси $\{W^\mathbb{Q}, N_1, \dots, N_n\}$ є незалежними під мірою $\mathbb{Q}$.

Тоді ISU-декомпозиція процесу V існує і має вигляд

$$D_1^{\text{ISU}}(Z; t) = \sum_{j=1}^n b_j \int_{(0, t \wedge T]} I_j(s) v_j(s) Y(s) \sigma dW_s^\mathbb{Q}, \quad (12)$$

$$D_2^{\text{ISU}}(Z; t) = \sum_{j=1}^n b_j \int_{(0, t \wedge T]} v_j(s) Y(s) d(N_j - C_j^\mathbb{Q})(s), \quad (13)$$

майже напевно для всіх $t \in (0, T]$, де

$$v_j(s) = \exp\left(-\int_s^T \lambda_j^\mathbb{Q}(u) du\right), \quad Y(s) = \frac{e^{-(T-s)(r-\sigma^2)}}{\kappa(s)}.$$

При цьому $V(t) = V(0) + D_1^{\text{ISU}}(Z; t) + D_2^{\text{ISU}}(Z; t)$, $t \in (0, T]$. Отже, пара процесів $(D_1^{\text{ISU}}(Z; \cdot), D_2^{\text{ISU}}(Z; \cdot))$ утворює ISU-декомпозицію процесу V .

Доведення. Розглянемо один контракт і покладемо $\Xi = p - b \frac{I(T)}{\kappa(T)}$. Для розбиття $\tau_n = \{t_k\}$ маємо

$$H(t_{k+1}, t_k) = p - b \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{I(T)}{\kappa(T)} \middle| \sigma(\Phi^{t_{k+1}}, N^{t_k}) \right].$$

За незалежністю Φ і N

$$\mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{I(T)}{\kappa(T)} \middle| \sigma(\Phi^{t_{k+1}}, N^{t_k}) \right] = I(t_k) v(t_k) \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[\frac{1}{\kappa(T)} \middle| \Phi^{t_{k+1}} \right],$$

звідки $H(t_{k+1}, t_k) = p - b Y(t_{k+1}) v(t_k) I(t_k)$.

Фінансова складова.

$$H(t_{k+1}, t_k) - H(t_k, t_k) = -b v(t_k) I(t_k) (Y(t_{k+1}) - Y(t_k)).$$

За формулою Іто $dY(s) = -\sigma Y(s) dW_s^\mathbb{Q}$, тому

$$D_1^{\text{ISU}}(Z; t) = b \int_{(0, t \wedge T]} I(s) v(s) Y(s) \sigma dW_s^\mathbb{Q}.$$

Смертнісна складова.

$$H(t_{k+1}, t_{k+1}) - H(t_{k+1}, t_k) = -b Y(t_{k+1}) (v(t_{k+1}) I(t_{k+1}) - v(t_k) I(t_k)).$$

Оскільки $d(vI)(s) = -v(s) d\tilde{N}(s)$, то

$$D_2^{\text{ISU}}(Z; t) = b \int_{(0, t \wedge T]} Y(s) v(s) d\tilde{N}(s).$$

Переходячи до границі при $|\tau_n| \rightarrow 0$, отримуємо твердження для одного контракту. Лінійність дозволяє узагальнити результат на портфель.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі розглянуто декомпозицію страхового надлишку в стохастичній моделі страхування життя з урахуванням фінансових і біометричних ризиків. На основі підходів SU та ISU побудовано адитивне й узгоджене представлення внесків окремих факторів ризику. Отримано явні формули для фінансової та біометричної складових у вигляді стохастичних інтегралів. Запропонований підхід може бути узагальнений на складніші страхові продукти, зокрема багатостанові моделі та моделі зі стохастичною смертністю.

Конфлікт інтересів

Млавець Юрій Юрійович та Тимошенко Олена Анатоліївна, члени редакційної колегії, є авторами цієї статті та не брали участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Млавець Ю. Ю.: методологія, супервізія, написання — рецензування та редагування. Пługатор О. О.: формальний аналіз, методологія, математичні викладки, теоретичний аналіз, написання — оригінальний проєкт. Тимошенко О. А.: концептуалізація, методологія, наукове керівництво, доведення основних результатів, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Млавець Ю. Ю., Пługатор О. О., Тимошенко О. А. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Schilling, K., Bauer, D., Christiansen, M. C., & Kling, A. (2020). Decomposing Dynamic Risks into Risk Components. *Management Science*, 66(12), 5738–5756. <https://doi.org/10.1287/mnsc.2019.3522>
2. Jetses, J., & Christiansen, M. C. (2022). A General Surplus Decomposition Principle in Life Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2022(10), 901–925. <https://doi.org/10.1080/03461238.2022.2049636>
3. Christiansen, M. C. (2023). On the Decomposition of an Insurer's Profits and Losses. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2023(1), 51–70. <https://doi.org/10.1080/03461238.2022.2079996>
4. Biewen, M. (2014). A General Decomposition Formula with Interaction Effects. *Applied Economics Letters*, 21(9), 636–642. <https://doi.org/10.1080/13504851.2013.879280>
5. Junike, G., Stier, H., & Christiansen, M. C. (2022). Limiting Sequential Decompositions and Applications in Finance. *arXiv:2212.06733*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2212.06733>
6. Junike, G., Stier, H., & Christiansen, M. C. (2025). Profit and Loss Decomposition in Continuous Time and Approximations. *Finance and Stochastics*, 29, 1075–1107. <https://doi.org/10.1007/s00780-025-00571-7>
7. Haçariz, O., Kleinow, T., & Macdonald, A. S. (2024). On Technical Bases and Surplus in Life Insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2024(9), 881–909. <https://doi.org/10.1080/03461238.2024.2363183>
8. Øksendal, B. (2013). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6th ed. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>
9. International Accounting Standards Board. (2017). *IFRS 17 Insurance Contracts*. Retrieved from <https://www.ifrs.org/issued-standards/list-of-standards/ifrs-17-insurance-contracts>
10. European Union. (2015). *Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the Taking-up and Pursuit of the Business of Insurance and Reinsurance (Solvency II)*. Retrieved from <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex%3A32009L0138>

Mlavets Yu. Yu., Pluhator O. O., Tymoshenko O. A. Decomposition of insurance surplus in a stochastic model.

The paper studies the decomposition of insurance surplus in a stochastic life insurance model. An ISU-based approach is proposed to represent the surplus as a sum of components associated with individual risk factors. Within a risk-neutral framework, analytical formulas for financial and biometric risk contributions are derived, and the additivity, consistency, and economic interpretation of the decomposition are established. The approach can be used to analyze surplus dynamics and to quantify the impact of individual risk factors.

Keywords: stochastic differential equations, life insurance, insurer's surplus, risk decomposition, ISU decomposition, Itô formula, financial risk.

Отримано: 05.03.2026

Прийнято: 25.03.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 519.833

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).91-99](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).91-99)**V. V. Romanuke**

Vinnitsia Institute of Trade and Economics of State University of Trade and Economics,

Professor of the Department of Innovative Economics and Digital Technologies,

Doctor of Technical Sciences, Professor

romanukevadimv@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9638-9572>**QUADRATIC-ACCURACY ONE-BULLET SILENT DUEL ON THE
UNIFORM LATTICE: PURE STRATEGY SOLUTIONS EXIST
WHEN THE DUELIST HAS AT MOST EIGHT TIME MOMENTS**

The one-bullet silent duel defined on the uniform lattice is considered, in which each of the two duelists shoots with quadratic accuracy. The duel is a symmetric matrix game whose optimal value is 0, and each of the duelists has the same optimal behavior, whether it is in pure or mixed strategies. The task is to determine optimal time moments for the duelist to shoot depending on the number of the duel time moments. It is proved that an optimal time moment in the duel exists only if the duelist has three to eight time moments to shoot, except for seven time moments, and the optimal time moment is single. The quadratic-accuracy duelist's optimal time moment is the duel end moment in the 3×3 and 4×4 duels, is the penultimate time moment in the 5×5 and 6×6 duels, and is the time moment preceding the penultimate time moment in the 8×8 duel. Compared to the linear-accuracy duel, which does not have an optimal time moment for six time moments and for no fewer than eight time moments, the quadratic-accuracy duel provides the duelist with a single one-step ("instant") solution for six and eight time moments instead of seven ones. Another difference is that the quadratic-accuracy duelist's optimal time moment gravitates more towards the duel end moment, unlike it is the duel span middle in the linear-accuracy duel.

Keywords: one-bullet silent duel, uniform lattice, quadratic accuracy, matrix game, optimal time moment.

1. One-bullet silent duels. One-bullet silent duels are a large part of timing games that model competitive interactions between two equal participants (competitors, players, or duelists), where the general purpose is to take one timely action (to shoot the single bullet) [1]. The timeliness means shooting earlier than the other duelist, but shooting later grants a better benefit [2]. The duel time span is usually divided into equidistant intervals whose endpoints are the time moments at which the duelist is allowed to (legitimately) shoot [3]. Thus, if there are N successive time moments of possible shooting, then they are represented as a set [4]

$$T_N = \{t_q\}_{q=1}^N = \left\{ \frac{q-1}{N-1} \right\}_{q=1}^N \subset [0; 1] \quad \text{for } N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}. \quad (1)$$

With (1), the respective one-bullet silent duel is a finite zero-sum game [5, 6]

$$\langle X_N, Y_N, \mathbf{U}_N \rangle = \left\langle \{x_i\}_{i=1}^N, \{y_j\}_{j=1}^N, \mathbf{U}_N \right\rangle \quad (2)$$

of timing with the duelists' pure strategy sets

$$X_N = \{x_i\}_{i=1}^N = \left\{ \frac{i-1}{N-1} \right\}_{i=1}^N = T_N \subset [0; 1] \quad (3)$$

and

$$Y_N = \{y_j\}_{j=1}^N = \left\{ \frac{j-1}{N-1} \right\}_{j=1}^N = T_N \subset [0; 1] \quad (4)$$

by a skew-symmetric payoff matrix

$$\mathbf{U}_N = [u_{ij}]_{N \times N} = [-u_{ji}]_{N \times N} = -\mathbf{U}_N^T. \quad (5)$$

Hence, duel (2) is defined on uniform lattice

$$\begin{aligned} X_N \times Y_N &= \{x_i\}_{i=1}^N \times \{y_j\}_{j=1}^N = \\ &= \left\{ \frac{i-1}{N-1} \right\}_{i=1}^N \times \left\{ \frac{j-1}{N-1} \right\}_{j=1}^N \subset [0; 1] \times [0; 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

The skew-symmetry of payoff matrix (5) reflects the equality of the duelists, by which the optimal game value is 0, and each of the duelists has the same optimal behavior (whether it is in pure or mixed strategies) [2, 7]. Inasmuch as one-bullet silent duels model hardly repeatable environments, the common task is to determine optimal time moments (pure strategies) for the duelist [6, 8, 9]. If there are no optimal time moments at the duelist, i. e. duel (2) is not solved in pure strategies (but, certainly, is solved in mixed strategies), the respective duel configuration (like the number of time moments of possible shooting, the accuracy function of the duelist) must be rectified to obtain an optimal time moment [10]. This is practically always done to comply with non-repeatability of the modeled environment [5, 11, 12].

2. Optimal time moments in linear-accuracy duel. Article [13] determined that linear-accuracy one-bullet silent duel (2) on uniform lattice (6), where

$$u_{ij} = x_i - y_j + x_i y_j \operatorname{sign}(y_j - x_i) \quad \text{for } i = \overline{1, N} \text{ and } j = \overline{1, N}, \quad (7)$$

is solved in pure strategies only when $N \in \{3, 4, 5, 7\}$. In the 3×3 linear-accuracy duel, where

$$T_3 = \{t_1, t_2, t_3\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \quad (8)$$

the duelist has two optimal moments, which are $t_2 = \frac{1}{2}$ and $t_3 = 1$. In the 4×4 linear-accuracy duel, where

$$T_4 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\} = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}, \quad (9)$$

only third moment $t_3 = \frac{2}{3}$ is optimal. In the 5×5 linear-accuracy duel, where

$$T_5 = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\}, \quad (10)$$

only third moment $t_3 = \frac{1}{2}$ is optimal as well. The biggest linear-accuracy duel having a pure strategy solution is the 7×7 one, where

$$T_7 = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\} = \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1 \right\} \quad (11)$$

and only fourth moment $t_4 = \frac{1}{2}$ is optimal. Therefore, the duelist in duel (2) on uniform lattice (6) by (3) — (5), (7), if it is solved in pure strategies, mostly has to shoot at the middle of the duel span. The only exception is the 4×4 duel, which does not have the middle of the duel span in set (9). The generalization of the linear-accuracy duel on uniform lattice (6) was studied in [14], where manipulations with the linear-accuracy proportionality factor allow to have an optimal time moment (although such manipulations are not always realizable in practice). Now, the task is to determine optimal time moments for quadratic-accuracy one-bullet silent duel (2) on uniform lattice (6) by (3) — (5), where

$$u_{ij} = x_i^2 - y_j^2 + x_i^2 y_j^2 \operatorname{sign}(y_j - x_i) \quad \text{for } i = \overline{1, N} \text{ and } j = \overline{1, N}. \quad (12)$$

The quadratic accuracy is more plausible than the linear one. Besides, compared to the linear accuracy, as $t_q^2 < t_q$ for $t_q \in (0; 1)$, the quadratic accuracy implies that the duelist is relatively worse at shooting.

3. When an optimal time moment exists. Duel (2) is a symmetric matrix game, in which the existence of a pure strategy solution is equivalent to a pure strategy saddle point in payoff matrix (5). Owing to the skew-symmetry of matrix (5), whose main diagonal is of N zeros and optimal game value is 0, any saddle point of matrix (5) is a zero entry in a nonnegative row and a nonpositive column. Thus, if row i^* of matrix (5) by $i^* \in \{\overline{1, N}\}$ is nonnegative, then row i^* contains a saddle point on the main diagonal [5, 6]. A symmetric reasoning is true for columns: if column i^* of matrix (5) by $i^* \in \{\overline{1, N}\}$ is nonpositive, then column i^* contains a saddle point on the main diagonal [1, 2]. This saddle point corresponds to an optimal pure strategy or an optimal time moment t_{i^*} of the duelist in an optimal pure strategy situation

$$\{x_{i^*}, y_{i^*}\} = \{t_{i^*}, t_{i^*}\}. \quad (13)$$

If row i^* contains only positive entries, except for the main diagonal entry $u_{i^*i^*} = 0$, all the other $N-1$ rows of column i^* contain negative entries, and thus row i^* contains a single saddle point corresponding to the single optimal pure strategy situation (13) or the single optimal time moment t_{i^*} in this duel. If two time moments t_{i^*} and t_{j^*} are optimal by $i^* \in \{\overline{1, N}\}$, $j^* \in \{\overline{1, N}\}$, and $i^* \neq j^*$, then there are at least four optimal pure strategy situations: situation (13) and situations

$$\{x_{i^*}, y_{j^*}\} = \{t_{i^*}, t_{j^*}\},$$

$$\{x_{j^*}, y_{i^*}\} = \{t_{j^*}, t_{i^*}\},$$

$$\{x_{j^*}, y_{j^*}\} = \{t_{j^*}, t_{j^*}\}.$$

Obviously, time moment t_{i^*} is not optimal if row i^* contains a negative entry or column i^* contains the positive entry. Therefore, it is conventionally possible to conclude on optimal time moment existence by studying nonnegative rows or nonpositive columns of payoff matrix (5). In particular, inasmuch as

$$u_{1j} = -y_j^2 < 0 \quad \forall j = \overline{2, N}$$

then the first row of matrix (5) is not an optimal strategy of the first duelist, and thus the starting moment $t_1 = 0$ is never optimal in this duel, whichever the number of time moments is.

4. The most trivial duel.

Theorem 1. *In the most trivial one-bullet silent duel (2)*

$$\langle X_3, Y_3, \mathbf{U}_3 \rangle = \left\langle \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}, \mathbf{U}_3 \right\rangle \quad (14)$$

by (3) — (5), (12) for $N = 3$ and (8), the duelist has the single optimal time moment $t_3 = 1$.

Proof. Upon plugging elements of set (8) into (12) for $N = 3$, the respective payoff matrix (5) is

$$\mathbf{U}_3 = [u_{ij}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

The third row of matrix (15) is positive, except for the main diagonal entry $u_{33} = 0$, so time moment $t_3 = 1$ is the single optimal one.

5. Optimal time moment in bigger duels. Now, we are about to consider 4×4 and bigger duels. The following assertion includes also the result of Theorem 1.

Theorem 2. *In duel (2) by (3) — (5), (12), the duelist has an optimal time moment if the number of moments to shoot is between three and eight, except for seven time moments (11). The optimal time moment is the single one: $t_3 = 1$ is the single optimal time moment in the 3×3 duel, $t_4 = 1$ is the single optimal time moment in the 4×4 duel, $t_4 = \frac{3}{4}$ is the single optimal time moment in the 5×5 duel, $t_5 = \frac{4}{5}$ is the single optimal time moment in the 6×6 duel, and $t_6 = \frac{5}{7}$ is the single optimal time moment in the 8×8 duel.*

Proof. Owing to Theorem 1, time moment $t_3 = 1$ is the single optimal one in the duel with three time moments. For duels with greater number of time moments, suppose that time moment

$$t_n = \frac{n-1}{N-1} \text{ for some } n \in \{2, \overline{N-1}\} \text{ by } N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\} \quad (16)$$

is optimal in an $N \times N$ duel. Then inequalities

$$u_{nj} = x_n^2 - y_j^2 - x_n^2 y_j^2 \geq 0 \quad \forall y_j < x_n \text{ by } j = \overline{1, n-1} \quad (17)$$

and

$$u_{nj} = x_n^2 - y_j^2 + x_n^2 y_j^2 \geq 0 \quad \forall y_j > x_n \text{ by } j = \overline{n+1, N} \quad (18)$$

must hold. From inequality (17) it follows that

$$\frac{x_n^2}{1+x_n^2} \geq y_j^2 \quad \forall y_j < x_n \text{ by } j = \overline{1, n-1}. \quad (19)$$

As

$$y_j \leq \frac{n-2}{N-1} < \frac{n-1}{N-1} = x_n$$

then inequality (19) is transformed into

$$\left(\frac{n-1}{N-1} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n-1}{N-1} \right)^2} \geq \left(\frac{n-2}{N-1} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
(n-1)^2 \cdot \frac{1}{\frac{(N-1)^2 + (n-1)^2}{(N-1)^2}} &\geq (n-2)^2, \\
\frac{(n-1)^2 (N-1)^2}{(N-1)^2 + (n-1)^2} &\geq (n-2)^2, \\
(n-1)^2 (N-1)^2 &\geq (n-2)^2 (N-1)^2 + (n-2)^2 (n-1)^2, \\
(N-1)^2 [(n-1)^2 - (n-2)^2] &\geq (n-2)^2 (n-1)^2, \\
(N-1)^2 (2n-3) &\geq (n-2)^2 (n-1)^2, \\
(N-1)^2 &\geq \frac{(n-2)^2 (n-1)^2}{2n-3}.
\end{aligned} \tag{20}$$

From inequality (18) it follows that

$$1 \geq \frac{y_j^2 - x_n^2}{x_n^2 y_j^2} = \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{y_j^2} \quad \forall y_j > x_n. \tag{21}$$

As

$$1 \geq y_j > \frac{n-1}{N-1} = x_n \quad \text{for } n \in \{\overline{2, N-1}\}$$

then inequality (21) is transformed into

$$2 \geq \frac{1}{x_n^2} = \frac{(N-1)^2}{(n-1)^2},$$

whence

$$2 \cdot (n-1)^2 \geq (N-1)^2. \tag{22}$$

Therefore, time moment (16) is optimal if inequalities (20) and (22) are true. This is equivalent to that membership

$$(N-1)^2 \in \left[\frac{(n-2)^2 (n-1)^2}{2n-3}; 2 \cdot (n-1)^2 \right] \tag{23}$$

is true for time moment (16). The closed interval in (23) is nonempty when its right endpoint is not less than its left endpoint:

$$\begin{aligned}
2 \cdot (n-1)^2 - \frac{(n-2)^2 (n-1)^2}{2n-3} &= (n-1)^2 \left(2 - \frac{(n-2)^2}{2n-3} \right) = \\
&= (n-1)^2 \left(\frac{4n-6 - (n^2 - 4n + 4)}{2n-3} \right) = \\
&= (n-1)^2 \left(\frac{-n^2 + 8n - 10}{2n-3} \right) \geq 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Inequality (24) is true when

$$-n^2 + 8n - 10 \geq 0,$$

i.e. when

$$n \in \left[4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}\right]. \quad (25)$$

So, time moment (16) can be optimal only for those integer n that satisfy (25), where

$$1.55 < 4 - \sqrt{6} < 1.56$$

and

$$6.44 < 4 + \sqrt{6} < 6.45,$$

i.e. there are only five possible cases of integer n :

$$n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (26)$$

Hence, the interval in (23) is nonempty if (26) is true.

For $n = 2$ the interval in (23) is $[0; 2]$ and membership (23) becomes equivalent to double inequality

$$0 \leq (N - 1)^2 \leq 2,$$

whence

$$0 \leq N \leq \sqrt{2} + 1 < 3,$$

so the case of $n = 2$ is impossible. For $n = 3$ the interval in (23) is $\left[\frac{4}{3}; 8\right]$ and membership (23) becomes equivalent to double inequality

$$\frac{4}{3} \leq (N - 1)^2 \leq 8,$$

whence

$$\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \leq N \leq 2\sqrt{2} + 1 < 4,$$

so the case of $n = 3$ is impossible as well. For $n = 4$ the interval in (23) is $\left[\frac{36}{5}; 18\right]$ and membership (23) becomes equivalent to double inequality

$$\frac{36}{5} \leq (N - 1)^2 \leq 18,$$

whence

$$3 < \frac{6}{\sqrt{5}} + 1 \leq N \leq 3\sqrt{2} + 1 < 6$$

by

$$\{4, 5\} \subset \left[\frac{6}{\sqrt{5}} + 1; 3\sqrt{2} + 1\right],$$

so the case of $n = 4$ is possible for both $N = 4$ and $N = 5$. This means that in the 4×4 duel time moment $t_4 = 1$ is the single optimal one, whereas, without considering the duel end moment, in the 5×5 duel time moment $t_4 = \frac{3}{4}$ is the single optimal one.

For $n = 5$ the interval in (23) is $\left[\frac{144}{7}; 32\right]$ and membership (23) becomes equivalent to double inequality

$$\frac{144}{7} \leq (N - 1)^2 \leq 32,$$

whence

$$5 < \frac{12}{\sqrt{7}} + 1 \leq N \leq 4\sqrt{2} + 1 < 7,$$

by

$$5 \in \left[\frac{12}{\sqrt{7}} + 1; 4\sqrt{2} + 1 \right],$$

so the case of $n = 5$ is possible for $N = 6$. This means that, without considering the duel end moment, in the 6×6 duel time moment $t_5 = \frac{4}{5}$ is the single optimal one.

For $n = 6$ the interval in (23) is $\left[\frac{400}{9}; 50 \right]$ and membership (23) becomes equivalent to double inequality

$$\frac{400}{9} \leq (N - 1)^2 \leq 50,$$

whence

$$7 < \frac{23}{3} \leq N \leq 5\sqrt{2} + 1 < 9,$$

by

$$8 \in \left[\frac{23}{3}; 5\sqrt{2} + 1 \right],$$

so the case of $n = 6$ is possible for $N = 8$. This means that, without considering the duel end moment, in the 8×8 duel time moment $t_6 = \frac{5}{7}$ is the single optimal one.

If duel end moment $t_N = 1$ is optimal, then inequality

$$u_{Nj} = 1 - 2y_j^2 \geq 0 \quad \forall y_j < 1 \quad \text{by } j = \overline{1, N-1} \quad (27)$$

must hold. Inequality (27) is rewritten as

$$y_j^2 = \frac{(j-1)^2}{(N-1)^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall y_j < 1 \quad \text{by } j = \overline{1, N-1} \quad (28)$$

and inequality (28) is equivalent to inequality

$$y_{N-1}^2 = \frac{(N-2)^2}{(N-1)^2} \leq \frac{1}{2},$$

whence

$$\begin{aligned} 2 \cdot (N-2)^2 &\leq (N-1)^2, \\ 2N^2 - 8N + 8 &\leq N^2 - 2N + 1, \\ N^2 - 6N + 7 &\leq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Inequality (29) holds by

$$N \in \left[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2} \right],$$

i.e. when double inequality

$$1 < 3 - \sqrt{2} \leq N \leq 3 + \sqrt{2} < 5$$

holds, where

$$\{2, 3, 4\} \subset \left[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2} \right].$$

The cases of the duel end moment in the 3×3 and 4×4 duels have been already proved above. In bigger duels the end time moment cannot be optimal. This finalizes the proof.

6. Conclusion. An optimal time moment in quadratic-accuracy one-bullet silent duel (2) on the uniform lattice (6) by (3) — (5), (12) exists only if the duelist has three to eight time moments to shoot, except for seven time moments, and the optimal time moment is single. Compared to the linear-accuracy duel, which does not have an optimal time moment for six time moments and for no fewer than eight time moments, the quadratic-accuracy duel provides the duelist with a single one-step (“instant”) solution for six and eight time moments instead of seven ones. Another difference is that the quadratic-accuracy duelist’s optimal time moment gravitates more towards the duel end moment, unlike it is the duel span middle in the linear-accuracy duel. Thus, the quadratic-accuracy duelist’s optimal time moment is the duel end moment in the 3×3 and 4×4 duels, is the penultimate time moment in the 5×5 and 6×6 duels, and is the time moment preceding the penultimate time moment in the 8×8 duel.

Conflict of Interest

The author declares that he has no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The author confirms that he did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Copyright ©



(2026). Romanuke V. V. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Barron, E. N. (2013). *Game theory : an introduction (2nd ed.)*. Hoboken, New Jersey, USA: Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118547168>
2. Epstein, R. A. (2013). *The theory of gambling and statistical logic (2nd ed.)*. Burlington, Massachusetts, USA: Academic Press. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-20160-7>
3. Karlin, S. (1959). *The Theory of Infinite Games. Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. London — Paris: Pergamon. <https://doi.org/10.1016/C2013-0-07982-0>
4. Radzik, T. (1996). Results and Problems in Games of Timing. Statistics, Probability and Game

- Theory. *Lecture Notes — Monograph Series*, 30, 269–292.
5. Fudenberg, D., Tirole, J. (1991). *Game Theory*. Cambridge, MA, USA: MIT Press. Retrieved from <https://mitpress.mit.edu/9780262061414/game-theory/>
 6. Romanuke, V. V. (2010). *Theory of Antagonistic Games*. Lviv, Ukraine: New World — 2000.
 7. Aliprantis, C., Chakrabarti, C. (2000). *Games and Decision Making*. Oxford, UK: Oxford University Press.
 8. Matsumoto, A., Szidarovszky, F. (2025). *Game Theory and Its Applications*. Springer Singapore. Retrieved from <https://link.springer.com/book/9789819605897>
 9. Teraoka, Y. (1979). A two-person game of timing with random arrival time of the object. *Mathematica Japonica*, 24, 427–438.
 10. Teraoka, Y. (1986). Silent-noisy marksmanship contest with random termination. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 49, 477–487. <https://doi.org/10.1007/BF00941074>
 11. Steg, J.-H. (2022). On identifying subgame-perfect equilibrium outcomes for timing games. *Games and Economic Behavior*, 135, 74–78. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2022.05.012>
 12. Sūdžiūtė, D. (1983). General properties of Nash equilibria in duels. *Lithuanian Mathematical Journal*, 23, 398–409. <https://doi.org/10.1007/BF00973573>
 13. Romanuke, V. V. (2011). Discrete noiseless duel with a skewsymmetric payoff function on the unit square for models of socioeconomic competitive processes with a finite number of pure strategies. *Cybernetics and Systems Analysis*, 47(5), 818–826. <https://doi.org/10.1007/s10559-011-9361-z>
 14. Romanuke, V. V. (2025). Pure strategy solutions of the silent duel on the uniform lattice with identical linear accuracy functions. *Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics*, 34, 120–137.

Романюк В. В. Однокульова безшумна дуель із квадратичною точністю на рівномірній сітці: розв’язки в чистих стратегіях існують, коли дуелянт має не більше восьми моментів часу для пострілу.

Розглядається однокульова безшумна дуель, задана на рівномірній сітці часу, у якій кожен із двох дуелянтів здійснює постріл із квадратичною точністю. Дуель є симетричною матричною грою з нульовим значенням, причому обидва дуелянти мають однакову оптимальну поведінку як у чистих, так і в змішаних стратегіях. Завдання полягає у визначенні оптимальних моментів часу для здійснення пострілу залежно від кількості моментів часу в дуелі. Доведено, що оптимальний момент часу в дуелі існує лише тоді, коли дуелянт має від трьох до восьми моментів часу для пострілу, за винятком випадку семи моментів, причому оптимальний момент є єдиним. Для дуелі з квадратичною точністю оптимальним є кінцевий момент у дуелях 3×3 і 4×4 , передостанній момент — у дуелях 5×5 і 6×6 , а момент, що передує передостанньому, — у дуелі 8×8 . Порівняно з дуеллю з лінійною точністю, у якій оптимальний момент відсутній при шести та при не менше ніж восьми моментах часу, дуель із квадратичною точністю забезпечує дуелянтові єдине однокрокове (“миттєве”) розв’язання для шести та восьми моментів замість семи. Ще одна відмінність полягає в тому, що оптимальний момент дуелянта з квадратичною точністю тяжіє ближче до завершення дуелі, тоді як у дуелі з лінійною точністю він розташований у середині інтервалу дуелі.

Ключові слова: однокульова безшумна дуель, рівномірна сітка, квадратична точність, матрична гра, оптимальний момент часу.

Recived: 14.03.2026

Accepted: 31.03.2026

Published: 30.04.2026

Г. І. Сливка-Тилищак¹, О. А. Тилищак², О. О. Синявська³,
А. М. Тегза⁴

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
доктор фізико-математичних наук
anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7129-0530>

² Закарпатський угорський університет імені Ференца Ракоці II,
професор кафедри математики та інформатики,
доктор фізико-математичних наук
alxtrlk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7828-3416>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2711-3940>

⁴ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико-математичних наук
antonina.tegza@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5310-4311>

ДИНАМІКА ТА КОРЕЛЯЦІЯ ПОКАЗНИКІВ НМТ В ЗАКАРПАТСЬКІЙ ОБЛАСТІ: РЕГІОНАЛЬНИЙ ВИМІР ТА ПОРІВНЯЛЬНИЙ АСПЕКТ

У статті проведено статистичний аналіз результатів Національного мультипредметного тесту (НМТ) 2025 року в Закарпатській області у порівнянні з загальноукраїнськими показниками та динамікою 2022–2024 років. Використовуючи авторські Python-скрипти для обробки великих масивів деперсоніфікованих даних, досліджено середні значення балів, середньоквадратичне відхилення та коефіцієнти кореляції Пірсона між різними навчальними дисциплінами. Особливу увагу приділено виявленню міжпредметних зв'язків та когнітивних кластерів. Встановлено, що Закарпатський регіон характеризується вищою варіативністю результатів та специфічними аномаліями у кореляції природничо-математичного циклу. Результати дослідження можуть бути використані для оптимізації регіональних освітніх програм та впровадження STEM-технологій.

Ключові слова: статистичний аналіз, коефіцієнт кореляції, програмування, Python, міжпредметні зв'язки, освітня статистика, когнітивні кластери.

1. Вступ. Обробка великих масивів даних (Big Data) у соціальних та освітніх дослідженнях потребує застосування надійних методів математичної статистики для виявлення прихованих закономірностей. Національний мультипредметний тест (НМТ) генерує значні обсяги первинної інформації, яка є репрезентативною вибіркою для стохастичного аналізу. Особливий науковий інтерес становить дослідження структури взаємозв'язків між випадковими величинами — тестовими балами з різних дисциплін — та оцінка їхньої стійкості в розрізі регіональної вибірки (Закарпатська область). Традиційно аналіз результатів

тестування обмежується дескриптивною статистикою: розрахунком математичного сподівання та моди. Проте для математичного моделювання освітнього простору необхідним є застосування кореляційного аналізу, що дозволяє визначити тісноту лінійного зв'язку через коефіцієнт кореляції Пірсона та оцінити розсіювання даних через дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

Метою роботи є математична обробка результатів НМТ-2025 за допомогою мови програмування Python, побудова кореляційних матриць для різних предметних пар та порівняльний аналіз статистичних параметрів Закарпатського регіону відносно генеральної сукупності (загальноукраїнських даних).

2. Основний результат. Інформаційною базою дослідження стали знеособлені дані, отримані з «Порталу відкритих даних» Українського центру оцінювання якості освіти (УЦОЯО) [1]. Для обробки великих масивів даних (файли формату .csv) було застосовано мову програмування Python. Якщо кількість учнів, які писали НМТ з певного предмету менше 10, то дані не наводимо, бо вони не мають практичного значення при порівнянні.

Таблиця 1.

Результати НМТ 2025 в Україні

Предмет	Кількість	Середня оцінка	σ
Українська мова	288514	146.3	15.8
Історія України	289129	141.6	14.4
Математика	255232	132.3	20.8
Фізика	7202	134.3	21.1
Хімія	2455	138.7	21.5
Біологія	57328	147.5	12.8
Географія	65915	142.0	10.5
Англійська мова	106323	147.1	19.6
Французька мова	258	148.6	17.7
Німецька мова	3087	155.2	17.7
Іспанська мова	129	151.2	25.6
Українська література	42024	137.4	20.3

Для отримання цих результатів використано скрипт

Лістинг 1: Отримання простих статистичних характеристик знеособлених даних НМТ-2025.

```

1 from math import sqrt
2 file=open("0data2025File.csv","r",encoding="utf8")
3 def clr(s):
4     if s=="null":
5         return 0
6     else:
7         s=s.split(",")[0]
8         return int(s)
9 i=0;y=[];Data=[]
10 for x in file: # Читаємо дані про оцінки за предметами
11     if i!=0:
12         y=x.split(';')
13         L=[y[20],y[25],y[30],y[35],y[40],y[45],y[50],y[54],y[58],y[62],
            y[66],y[70]]

```

```

14     M=[clr(s) for s in L]
15     Data.append(M)
16     i+=1
17 file.close()
18 for i in range(12): # Рахуємо статистичні параметри оцінок за предметами
19     k=0;x=0;y=0;Sub=[]
20     for L in Data:
21         if L[i]>0:
22             k+=1
23             x+=L[i]
24             Sub.append(L[i])
25     for e in Sub:
26         y+=(e-x/k)*(e-x/k)
27     print(f"{i:2}: {k:6} M={x/k:6.1f} sigma={sqrt(y/k):4.1f} ")

```

Таблиця 2.

Результати НМТ 2025 на Закарпатті

Предмет	Кількість	Середня оцінка	σ
Українська мова	7064	144.0	16.9
Історія України	7122	139.7	14.8
Математика	6098	130.1	20.8
Фізика	94	132.9	21.5
Хімія	53	138.0	23.8
Біологія	1866	146.7	14.2
Географія	1432	140.7	11.2
Англійська мова	2425	145.4	19.7
Німецька мова	35	149.8	18.2
Українська література	1087	136.1	20.7

За результатами обробки даних 2025 року встановлено, що показники Закарпатської області дещо відрізняються від загальноукраїнських, переважно в бік зниження середньої оцінки та зростання варіативності (Таблиці 1, 2). Аналіз даних свідчить, що найбільше падіння середнього бала в Закарпатті спостерігається з німецької мови (-5,4 бала). Збільшення середньоквадратичного відхилення (σ) майже за всіма предметами (найбільше з хімії — на 2,3) вказує на вищу неоднорідність рівня підготовки закарпатських абітурієнтів порівняно з загальнодержавною вибіркою. При аналізі обов'язкового блоку дисциплін — математики, української мови та історії України — виявлено специфічне зміщення математичного сподівання. Зокрема, для Закарпатського регіону характерне систематичне відхилення середнього бала ($\bar{x}$) у бік зменшення: на 2,3 бала для української мови та на 2,2 бала для математики відносно загальнодержавних показників. Середньоквадратичне відхилення (σ) з української мови в регіоні становить 16,9, що перевищує загальноукраїнський показник (15,8). Водночас для математики показник σ залишається ідентичним загальнодержавному (20,8), що свідчить про універсальність характеру розподілу знань у області незалежно від регіонального чинника.

В силу відмінності складності завдань з року в рік за рівнем середньої оцінки важко робити обґрунтовані висновки, однак більш об'єктивним показником є

середньо квадратичне відхилення. За динамікою цих показників НМТ минулих років можна простежити за поданими таблицями (Таблиці 3–5).

Таблиця 3.

Таблиця оцінок НМТ 2024 на Закарпатті

Предмет	Кількість	Середня оцінка	σ
Українська мова	6649	145.8	17.7
Історія України	6671	142.0	15.3
Математика	5627	130.9	21.2
Фізика	81	132.5	22.5
Хімія	84	139.0	20.8
Біологія	1589	144.8	16.5
Географія	1183	140.9	10.1
Англійська мова	2606	146.3	19.7
Французька мова	4	146.5	28.0
Німецька мова	40	140.9	19.7
Українська література	981	137.4	18.0

Таблиця 4.

Таблиця оцінок НМТ 2023 на Закарпатті

Предмет	Кількість	Середня оцінка	σ
Українська мова	6986	146.3	17.3
Історія України	3757	140.5	14.5
Математика	6566	132.5	19.9
Фізика	82	139.9	12.4
Хімія	72	138.3	19.9
Біологія	1160	146.4	17.5
Англійська мова	1856	151.1	20.0
Французька мова	5	145.8	14.8
Німецька мова	26	146.0	19.6

Таблиця 5.

Таблиця оцінок НМТ 2022 на Закарпатті

Предмет	Кількість	Середня оцінка	σ
Українська мова	5306	152.4	19.1
Історія України	5302	149.6	16.2
Математика	5303	145.1	18.6

Дослідження результатів минулих років у Закарпатській області дозволяє простежити динаміку стабільності знань. У 2022 році середні бали були достатньо високими (українська мова — 152,4; математика — 145,1), що пояснюється специфікою спрощеного тестування в перший рік повномасштабного вторгнення. У наступні роки (2023–2025) спостерігається стабілізація показників: українська мова на рівні 145–146 балів, математика на рівні 130–132 балів.

Важливою сумісною ознакою для двох предметів є коефіцієнт кореляції Пірсона $-1 \leq r \leq 1$, що вказує на близькість до лінійного зв'язку між оцінками. Обчислені коефіцієнти кореляції Пірсона r_{xy} вказують на відсутність від'ємної

кореляції між будь-якими оцінками x , y різних предметів. Найвищу щільність лінійного зв'язку в Закарпатті зафіксовано в парі «Українська мова — Хімія» ($r = 0,7898$), що значно перевищує загальноукраїнський тренд ($r = 0,6510$). Це свідчить про те, що в регіоні учні, які мають високі результати з природничих наук, зазвичай демонструють пропорційно високі результати з державної мови. З іншого боку, зафіксовано нетипове послаблення кореляції між математикою та фізикою ($r = 0,5689$ проти $0,7371$ по Україні). Це може вказувати на зміну профілю абітурієнтів, які обирають фізику, або на специфічні умови підготовки до цієї дисципліни в поточному році.

Таблиця 6.

Таблиця коефіцієнтів кореляції оцінок НМТ 2025 в Україні

Предмет	Укр. мова	Історія	Математика
Українська мова	1.0000		
Історія України	0.6346	1.0000	
Математика	0.6149	0.5533	1.0000
Фізика	0.6541	0.6148	0.7371
Хімія	0.6510	0.6130	0.6914
Біологія	0.6468	0.6185	0.5953
Географія	0.5077	0.5435	0.4962
Англійська мова	0.5599	0.5080	0.5072
Французька мова	0.4884	0.4514	0.4137
Німецька мова	0.5348	0.4240	0.4857
Іспанська мова	0.4625	0.4299	0.3708
Українська література	0.6839	0.6875	0.5209

Таблиця 7.

Таблиця коефіцієнтів кореляції оцінок НМТ 2025 на Закарпатті

Предмет	Укр. мова	Історія	Математика
Українська мова	1,0000		
Історія України	0,6400 (+0,0054)	1,0000	
Математика	0,5980 (-0,0169)	0,5462 (-0,0071)	1,0000
Фізика	0,5465 (-0,1076)	0,4356 (-0,1792)	0,5689 (-0,1682)
Хімія	0,7898 (+0,1388)	0,6719 (+0,0589)	0,7664 (+0,0750)
Біологія	0,6655 (+0,0187)	0,6469 (+0,0284)	0,6493 (+0,0540)
Географія	0,5191 (+0,0114)	0,5714 (+0,0279)	0,5143 (+0,0181)
Англійська мова	0,4952 (-0,0647)	0,4677 (-0,0403)	0,5007 (-0,0065)
Німецька мова	0,3917 (-0,1432)	0,2748 (-0,1492)	0,5190 (+0,0333)
Укр. література	0,7018 (+0,0179)	0,6903 (+0,0028)	0,5253 (+0,0044)

Статистичний аналіз дозволяє стверджувати, що попри зовнішні виклики, структура кореляційних зв'язків у гуманітарному кластері («Українська література — Історія України», $r \approx 0,70$) залишається найбільш стійкою, що підтверджує цілісність гуманітарної підготовки.

3. Висновки. Проведене дослідження дозволяє сформулювати наступні висновки:

Таблиця 8.

Таблиця коефіцієнтів кореляції оцінок НМТ 2024 на Закарпатті

Предмет	Укр. мова	Історія	Математика
Українська мова	1.0000		
Історія України	0.6272	1.0000	
Математика	0.6188	0.5726	1.0000
Фізика	0.5704	0.5971	0.7392
Хімія	0.5940	0.6317	0.7276
Біологія	0.6543	0.6663	0.6295
Географія	0.4434	0.5100	0.4913
Англійська мова	0.5243	0.5171	0.4915
Німецька мова	0.5520	0.5699	0.7009
Українська література	0.6587	0.5858	0.4808

Таблиця 9.

Таблиця коефіцієнтів кореляції оцінок НМТ 2023 на Закарпатті

Предмет	Укр. мова	Історія	Математика
Українська мова	1.0000		
Історія України	0.6861	1.0000	
Математика	0.6509	0.5777	1.0000
Фізика	0.5704		0.6933
Хімія	0.8113		0.7047
Біологія	0.7586		0.7085
Англійська мова	0.5446		0.5167
Німецька мова	0.6794		0.5517

Таблиця 10.

Таблиця коефіцієнтів кореляції оцінок НМТ 2023 на Закарпатті

Предмет	Укр. мова	Історія	Математика
Українська мова	1.0000		
Історія України	0.7049	1.0000	
Математика	0.6952	0.6279	1.0000

- 1) Результати НМТ-2025 у Закарпатській області демонструють тенденцію до незначного зниження середніх балів порівняно із загальноукраїнськими показниками (в середньому на 1,5–2,5 бала) при одночасному зростанні неоднорідності результатів.
- 2) Відсутність від’ємних коефіцієнтів кореляції в усіх досліджених масивах даних доводить, що поглиблене вивчення будь-якого предмета не створює негативного впливу на інші дисципліни, а навпаки — сприяє загальному інтелектуальному розвитку абітурієнта.
- 3) Статистично підтверджено, що вивчення хімії та математики, а також української літератури та історії України суттєво доповнюють одне одного, що відображається у високих коефіцієнтах кореляції ($r > 0,68$, виділено в таблицях).

- 4) Закарпатська область у 2025 році продемонструвала унікальне зростання взаємозв'язку між хімією та українською мовою, водночас зафіксовано нетипове послаблення зв'язку між фізикою та математикою.

Одержані результати мають практичне значення для вдосконалення навчальних програм у закладах середньої освіти регіону та можуть бути використані при плануванні профорієнтаційної роботи.

Конфлікт інтересів

Автори Г. І. Сливка-Тилищак та О. А. Тилищак є члени редакційної колегії та не брали участь в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежними редакторами. Інші автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Базу дослідження становлять деперсоніфіковані дані, оприлюднені на офіційному порталі відкритих даних Українського центру оцінювання якості освіти (УЦОЯО) за адресою: <https://zno.testportal.com.ua/opendata>. Зазначені матеріали доступні для вільного академічного та наукового використання на умовах відкритої ліцензії, що передбачає обов'язкове посилання на першоджерело.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Автори внесли рівний вклад у дослідження та оформлення.

Авторські права ©



(2026). Сливка-Тилищак Г. І., Тилищак О. А., Синявська О. О., Тегза А. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Natsionalnyi multytest (NMT): ofitsiini materialy ta rezultaty. Ukrainskyi tsentr otsiniuvannia yakosti osvity. Retrieved from <https://testportal.gov.ua>

2. Vidkryti dani UTsOIaO: rezultaty ZNO ta NMT. Portal vidkrytykh danykh. Retrieved from <https://zno.testportal.com.ua/opendata>
3. Lauwens, B., & Downey, A. B. (2024). *Think Python: How to Think Like a Computer Scientist* (3rd ed.). O'Reilly Media / Green Tea Press. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10845347>. Retrieved from <https://allendowney.github.io/ThinkPython>

Slyvka-Tylyshchak- G. I., Tylyshchak A. A., Syniavska O. O., Tegza A. M.
Dynamics and correlation of NMT indicators in the Zakarpattia region: regional dimension and comparative aspect.

The article presents a statistical analysis of the 2025 National Multi-Subject Test (NMT) results in the Zakarpattia region in comparison with nationwide indicators and the dynamics of 2022–2024. Utilizing proprietary Python scripts for processing large-scale depersonalized datasets, the study examines mean scores, standard deviations, and Pearson correlation coefficients across various academic disciplines. Particular emphasis is placed on identifying interdisciplinary connections and cognitive clusters. It was established that the Zakarpattia region is characterized by higher variability of results and specific anomalies in the correlation within the natural sciences and mathematics cycle. The research findings can be utilized to optimize regional educational programs and implement STEM technologies.

Keywords: statistical analysis, correlation coefficient, programming, Python, interdisciplinary connections, educational statistics, cognitive clusters.

Отримано: 15.03.2026

Прийнято: 30.03.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 519.87:620.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).108-116](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).108-116)**P. I. Topylko¹, A. O. Dankanych²**

¹ Lviv Polytechnic National University,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics,
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
petro.i.topylko@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8634-0588>

² Lviv Polytechnic National University,
PhD Student of the Department of Applied Mathematics
artur.o.dankanych@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-0444-8335>

MATHEMATICAL MODELING OF THE SPATIO-TEMPORAL DISTRIBUTION OF SOLAR ENERGY POTENTIAL IN URBANIZED AREAS

The paper develops a mathematical model of the spatio-temporal distribution of solar energy potential in urbanized areas. Solar radiation is represented as a spatio-temporal function that combines an analytical description of solar irradiance with a corrective component accounting for spatial and temporal heterogeneity of the environment. The energy potential is formulated as an integral characteristic over the area of the territory and a given time interval, taking into account the temperature dependence of photovoltaic conversion efficiency. A numerical implementation of the model is proposed, and computational experiments are carried out using synthetic input data. It is shown that spatial heterogeneity of solar radiation can reduce the integrated energy potential by 14–29% compared to the homogeneous case, while accounting for the temperature factor leads to an additional reduction of 5–6%. The obtained results confirm the relevance of a spatio-temporal approach to the assessment of solar energy potential in urbanized areas.

Keywords: mathematical modeling, solar energy, spatio-temporal distribution, solar radiation, urbanized areas.

1. Introduction. Solar energy is a key component in the transition toward sustainable energy systems, particularly in urbanized areas where energy demand is concentrated and solar radiation exhibits complex spatial and temporal variability. However, the assessment of solar energy potential in such environments remains challenging due to the heterogeneity of building structures, surface properties, and meteorological conditions.

Conventional approaches to solar irradiance assessment are often based on averaged characteristics or treat radiation as a purely temporal function, which limits their applicability for detailed analysis and forecasting in urban contexts. In contrast, representing solar radiation as a spatio-temporal function of spatial coordinates and time enables the use of multivariable analysis, integral methods, and numerical modeling to obtain both local and aggregated estimates of energy potential.

Despite significant progress in applied solar energy research, a unified mathematical framework that integrates analytical representations of solar irradiance with spatio-temporal data remains insufficiently developed. This gap restricts systematic analysis and comparison of solar energy resources across different territories.

This work presents a mathematical model for the spatio-temporal distribution of solar energy in urban areas, using methods from mathematical analysis, multi-variable functions, integral calculus, and numerical modeling. The approach treats solar energy potential as a spatio-temporal variable, offering a more informative framework than traditional models. The main innovation is a unified mathematical representation for assessing and optimizing photovoltaic systems in urban environments.

2. Analysis of Recent Studies and Publications. The assessment of solar energy potential has been widely studied in applied mathematics, energy engineering, and atmospheric physics. Classical approaches describe solar radiation using analytical models based on solar geometry, geographic location, and seasonal variability [1, 2], enabling its representation as a continuous function of time and location.

In recent years, research has increasingly relied on reanalysis and satellite-based data, which provide spatio-temporal discretization of solar radiation and allow it to be treated as a spatio-temporal field [3, 4]. This is particularly important for analyzing large and heterogeneous territories.

Urban environments represent a specific challenge due to pronounced spatial heterogeneity of solar irradiance caused by building geometry and surface properties. Studies [5, 6] show that this limits the applicability of classical averaged models and requires spatially explicit approaches.

Another important aspect is the dependence of photovoltaic conversion efficiency on temperature. This relationship has been studied in [7–9], where semi-empirical models linking efficiency to operating temperature have been proposed.

Despite extensive research, there is still no unified mathematical framework that integrates analytical models of solar irradiance with spatio-temporal data and enables the representation of solar energy potential as an integral spatio-temporal quantity. This gap motivates the development of hybrid models combining analytical formulations with observational data.

3. Problem Statement and Mathematical Model. Let us consider an urbanized territory, which in the mathematical sense is represented as a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ corresponding to the horizontal projection of the area under study. The time interval of interest is denoted by $t \in [t_0, t_1]$, where t_0 and t_1 correspond to the beginning and the end of the observation period. Solar radiation incident on a unit surface area is treated as a spatio-temporal function $S = S(x, y, t)$, where $(x, y) \in \Omega$ are spatial coordinates and t denotes time. The function $S(x, y, t)$ characterizes the instantaneous density of the solar energy flux and may be specified analytically or reconstructed from spatio-temporal observational data.

Within the hybrid approach, solar radiation is represented as the product of analytical and corrective components:

$$S(x, y, t) = S_0(t, \varphi)\Phi(x, y, t), \quad (1)$$

where $S_0(t, \varphi)$ is the theoretical (astronomical) component of solar irradiance depending on time t and geographical latitude φ , and $\Phi(x, y, t)$ is a dimensionless corrective function accounting for atmospheric conditions, spatial heterogeneity, and specific features of the urban environment. The function $\Phi(x, y, t)$ satisfies the constraint $0 \leq \Phi(x, y, t) \leq 1$ and may be reconstructed using satellite or reanalysis

data without an explicit analytical specification. In the latter case, $\Phi(x, y, t)$ can be defined as a normalized correction factor, for example, $\Phi(x, y, t) = \frac{S_{\text{obs}}(x, y, t)}{S_0(t, \varphi)}$, where $S_{\text{obs}}(x, y, t)$ denotes an observed or modeled solar radiation field. Such normalization ensures the dimensionless nature of Φ and preserves the physical interpretation of S_0 as an upper bound corresponding to ideal clear-sky conditions. Such a formulation allows solar radiation to be treated as a formalized spatio-temporal field without being tied to a specific data source.

The solar energy potential of the studied territory Ω at time t is defined as the integral of solar radiation weighted by the energy conversion efficiency:

$$E(t) = \int_{\Omega} S(x, y, t) \eta(x, y, t) dx dy. \quad (2)$$

Here $\eta(x, y, t)$ denotes the local photovoltaic conversion efficiency, which may depend on temperature and operating conditions.

To analyze the cumulative energy potential over the time interval $[t_0, t_1]$, the following integral characteristic is introduced:

$$E_{\text{tot}} = \int_{t_0}^{t_1} E(t) dt. \quad (3)$$

The efficiency of photovoltaic converters strongly depends on the operating surface temperature. Within the model, a linear approximation of the temperature dependence of efficiency is adopted:

$$\eta(T) = \eta_{\text{ref}} [1 - \beta (T - T_{\text{ref}})], \quad (4)$$

where η_{ref} is the efficiency at the reference temperature T_{ref} , β is the temperature coefficient, and T is the temperature of the photovoltaic module surface.

In numerical experiments, temperature is defined parametrically as, $T = f(S(x, y, t))$, allowing thermal effects on conversion efficiency to be incorporated without an explicit heat transfer model. Alternatively, temperature may be treated as an external input from observational or modeled data without altering the formulation. The linear temperature dependence (4) is assumed valid within typical operating ranges of photovoltaic modules; outside this range, it should be considered an approximation requiring more complex nonlinear models.

The study aims to construct and analyze a spatio-temporal integral model of solar energy potential defined by (2)–(4) and to investigate its behavior under variations of spatial and temporal parameters. The model provides a basis for further analytical and numerical studies and enables comparative analysis across territories and time periods.

4. Analysis of the Properties of the Mathematical Model. Let us investigate the main properties of the proposed spatio-temporal model of solar energy potential, in particular its integral characteristics, temporal variability, and behavior under parameter variations.

We consider the mean value of the solar energy potential per unit area of the territory Ω at time t , defined as

$$\hat{E}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} S(x, y, t) \eta(x, y, t) dx dy, \quad (5)$$

where $|\Omega|$ denotes the area of the domain Ω .

The quantity $\hat{E}(t)$ characterizes the averaged energy potential of the territory and allows comparison of different urbanized areas regardless of their size. Considering the representation of solar radiation in the form (1), we obtain

$$\hat{E}(t) = \frac{S_0(t, \varphi)}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Phi(x, y, t) \eta(x, y, t) dx dy. \quad (6)$$

Thus, the spatio-temporal variability of the averaged energy potential is determined by the product of the theoretical component of solar irradiance and an integral factor that accumulates the effects of spatial heterogeneity and conversion efficiency.

Considering the bounds $0 \leq \Phi(x, y, t) \leq 1$ and $0 \leq \eta(x, y, t) \leq \eta_{\max}$, where $\eta_{\max}$ is the maximum conversion efficiency, the following estimate holds for the averaged energy potential:

$$0 \leq \hat{E}(t) \leq S_0(t, \varphi) \eta_{\max}. \quad (7)$$

The limiting case $\Phi(x, y, t) \equiv 1$ and $\eta(x, y, t) \equiv \eta_{\max}$ corresponds to an idealized homogeneous territory without atmospheric or spatial losses, for which the model reduces to the classical analytical estimate of solar energy potential. Hence, the proposed model can be regarded as a generalization of well-known simplified approaches.

The dependence of $\hat{E}(t)$ on time is determined, on the one hand, by the seasonal periodicity of the theoretical irradiance $S_0(t, \varphi)$, and on the other hand, by the temporal variability of the corrective function $\Phi(x, y, t)$. Assuming sufficient temporal smoothness of the functions Φ and η , the time derivative of the averaged potential takes the form

$$\frac{d\hat{E}(t)}{dt} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (S(x, y, t) \eta(x, y, t)) dx dy. \quad (8)$$

This expression makes it possible to analyze the rate of change of the solar energy potential and to study the influence of diurnal and seasonal variations in solar irradiance.

To analyze the cumulative energy potential of the territory over the time interval $[t_0, t_1]$, we introduce the integral characteristic

$$\hat{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} S(x, y, t) \eta(x, y, t) dx dy dt. \quad (9)$$

The quantity $\hat{E}_{\text{tot}}$ is convenient for comparing the energy resources of different territories over the same time period and can be used as a generalized indicator of solar energy potential.

The proposed model separates fundamental astronomical factors from urban spatio-temporal heterogeneity, allowing independent analysis and flexibility with various data sources.

5. Numerical Implementation of the Model. For the practical application of the proposed model and for obtaining quantitative estimates of solar energy potential, we consider its discretization in space and time.

Let the domain Ω be approximated by a regular grid with spatial steps Δx and Δy . Denote by Ω_h the set of grid nodes belonging to Ω , and introduce the indexing (x_i, y_j) , where $i = 1, \dots, N_x$ and $j = 1, \dots, N_y$. The elementary area of a grid cell is defined as

$$\Delta A = \Delta x \Delta y. \quad (10)$$

Then the spatial integral in formula (2) is approximated by a quadrature sum:

$$E(t) \approx E_h(t) = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} S(x_i, y_j, t) \eta(x_i, y_j, t) \Delta A. \quad (11)$$

In the case of irregular discretization or when a territorial mask is applied, weighting coefficients $w_{ij} \in [0, 1]$ may be used to represent the fraction of the grid cell area belonging to Ω . In this case,

$$E_h(t) = \sum_{(i,j) \in \Omega_h} w_{ij} S(x_i, y_j, t) \eta(x_i, y_j, t) \Delta A. \quad (12)$$

Let the time interval $[t_0, t_1]$ be divided into N_t steps with time step Δt :

$$t_k = t_0 + k \Delta t, k = 0, 1, \dots, N_t. \quad (13)$$

Then the integral in (3) is approximated by temporal quadrature, for example, using the rectangle method:

$$E_{\text{tot}} \approx E_{\text{tot}}^{(h)} = \sum_{k=0}^{N_t-1} E_h(t_k) \Delta t. \quad (14)$$

If higher accuracy is required, the trapezoidal rule may be employed:

$$E_{\text{tot}}^{(h)} = \sum_{k=0}^{N_t-1} \frac{E_h(t_k) + E_h(t_{k+1})}{2} \Delta t. \quad (15)$$

According to (1), solar radiation at grid nodes is computed as

$$S(x_i, y_j, t_k) = S_0(t_k, \varphi) \Phi(x_i, y_j, t_k). \quad (16)$$

Here $S_0(t_k, \varphi)$ is the analytical component determined for a given latitude φ and discrete time instants t_k . The corrective function $\Phi(x_i, y_j, t_k)$ is specified in the form of discrete values obtained from spatio-temporal observational data (e.g., satellite or reanalysis data) or constructed as a parameterized function followed by calibration.

The local efficiency $\eta(x_i, y_j, t_k)$ is determined based on the temperature model (4). In discrete form, it is given by

$$\eta(x_i, y_j, t_k) = \eta_{\text{ref}} [1 - \beta (T(x_i, y_j, t_k) - T_{\text{ref}})]. \quad (17)$$

The temperature field $T(x_i, y_j, t_k)$ may be specified either as a function of $S(x_i, y_j, t_k)$ (parameterized dependence) or as an input field obtained from observational or modeling data. In the general case, this does not change the structure of the numerical implementation of formulas (11)–(15), but only affects the procedure for constructing η . In the present numerical experiments, the temperature field T is defined in

degrees Celsius (C°) and specified in a synthetic parametric form as a function of solar radiation, $T = f(S)$, in order to isolate and analyze the influence of thermal effects within the proposed modeling framework. The use of synthetic temperature data ensures full control over model parameters and avoids dependence on external datasets, while preserving the generality of the formulation. The proposed numerical scheme, however, remains directly applicable when realistic temperature fields obtained from observations or atmospheric models are used as input.

The numerical computation of the integral energy potential can be formulated as the following algorithm. Specify the domain Ω , grid Ω_h , weights w_{ij} , and spatial steps Δx , Δy . Specify the temporal grid $\{t_k\}_{k=0}^{N_t}$ with time step Δt . For each t_k , compute the analytical component $S_0(t_k, \varphi)$. Construct $\Phi(x_i, y_j, t_k)$ and compute $S(x_i, y_j, t_k)$ using (16). Construct the temperature field $T(x_i, y_j, t_k)$ and compute $\eta(x_i, y_j, t_k)$ using (17). Compute $E_h(t_k)$ using (11) or (12). Compute the integral characteristic $E_{\text{tot}}^{(h)}$ using (14) or (15).

The accuracy of the approximation is determined by the discretization steps Δx , Δy , and Δt , as well as by the choice of quadrature schemes. Reducing Δx and Δy improves the accuracy of spatial integral approximation, while the use of the trapezoidal rule in time (15) reduces integration error for time-dependent processes.

6. Results of Numerical Modeling. To demonstrate the performance of the model (2)–(4) and to assess the impact of spatio-temporal heterogeneity of solar radiation, numerical experiments were carried out using synthetic input data. The domain $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ and the time interval $t \in [0, 24]$ h were considered. The analytical component of solar irradiance was specified as $S_0(t) = 1000 \sin\left(\frac{\pi t}{24}\right)$, and the full radiation field was defined by the hybrid relation $S(x, y, t) = S_0(t)\Phi(x, y, t)$. Photovoltaic efficiency was modeled using a temperature-dependent relation $\eta(T) = \eta_{\text{ref}} [1 - \beta (T - T_{\text{ref}})]$, with parameters $\eta_{\text{ref}} = 0.2$, $\beta = 0.004 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $T_{\text{ref}} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. The temperature field was parameterized as $T = T_{\text{ref}} + \gamma S$, with $\gamma = 0.02 \text{ }^\circ\text{C m}^2/\text{W}$. Spatial discretization was performed on a 300×300 grid, while temporal discretization used $N_t = 480$ steps with $\Delta t = 0.05h$.

Table 1.

Results of numerical modeling

Scenario	$\tilde{E}_{\text{tot}}$ (Wh/m^2 over 24 h)	$\max \tilde{E}(t)$ (W/m^2)	$\text{mean} \tilde{E}(t)$ (W/m^2)
S1: $\Phi \equiv 1$	2863.78	183.999	119.324
S2: gradient $\alpha = 0.3$	2457.25	158.319	102.386
S2: gradient $\alpha = 0.6$	2039.21	131.679	84.967
S3: oscillating gradient $\alpha = 0.3$	2804.21	183.999	116.842
S3: oscillating gradient $\alpha = 0.6$	2744.20	183.999	114.342

Table 1 presents integral and temporal characteristics of the averaged energy potential $E(t)$ for three scenarios of the corrective function Φ : a homogeneous field $\Phi \equiv 1$ (S1), a spatial gradient $\Phi(x, y, t) = 1 - \alpha \frac{x}{L}$ (S2), and an oscillating gradient $\Phi(x, y, t) = 1 - \alpha \frac{x}{L} \cos\left(\frac{2\pi t}{24}\right)$ (S3). The results show that introducing a spatial gradient leads to a significant reduction in daily energy yield: for $\alpha = 0.3$,

$E_{\text{tot}} = 2457.25 \text{ Wh/m}^2$, and for $\alpha = 0.6$, $E_{\text{tot}} = 2039.21 \text{ Wh/m}^2$, compared to $E_{\text{tot}} = 2863.78 \text{ Wh/m}^2$ in the homogeneous case (S1). Thus, even a simple form of spatial heterogeneity can reduce the integrated energy potential by 14–29% relative to the homogeneous model.

For the oscillating gradient scenario, the reduction in the integrated potential is less pronounced ($E_{\text{tot}} = 2804.21 \text{ Wh/m}^2$ for $\alpha = 0.3$ and $E_{\text{tot}} = 2744.20 \text{ Wh/m}^2$ for $\alpha = 0.6$), while the peak values $\max E(t)$ coincide with those of the homogeneous case. This behavior is explained by the presence of time instants when $\cos(2\pi t/24) = 0$, causing the field Φ to become close to homogeneous.

Additionally, the effect of the temperature correction in the efficiency model was analyzed. For the homogeneous scenario S1, accounting for $\eta(T)$ reduces the daily energy from 3055.78 Wh/m^2 (constant efficiency $\eta = \eta_{\text{ref}}$) to 2863.78 Wh/m^2 , corresponding to a reduction of 6.28%. Similarly, for the gradient scenario S2 with $\alpha = 0.3$, the reduction amounts to 5.40%. These results confirm the importance of incorporating the temperature factor even in simplified modeling frameworks.

7. Conclusions and future research directions. A mathematical model of the spatio-temporal distribution of solar energy potential in urbanized areas has been developed. Solar radiation is represented as a spatio-temporal field combining an analytical component with a corrective term that accounts for environmental heterogeneity, reducing the assessment of energy potential to a well-defined integral formulation. The model generalizes classical homogeneous approaches and enables the evaluation of both local and integral energy characteristics. The results demonstrate that spatial heterogeneity significantly affects energy estimates: introducing a spatial gradient reduces daily solar energy potential by 14–29%, while spatio-temporal variability primarily decreases mean energy flux without significantly affecting peak values. Additionally, accounting for temperature-dependent photovoltaic efficiency leads to a further reduction of integrated potential by approximately 5–6%. These findings confirm that the proposed model provides a flexible and consistent framework for analyzing solar energy potential in urban environments and for comparing different spatial and operational scenarios. Future research will focus on extending the model toward a more realistic representation of urban systems. This includes incorporating surface orientation and tilt, modeling shading effects and building geometry, integrating real spatio-temporal observational data for calibration, and applying optimization methods for photovoltaic system placement.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The study was conducted without financial support.

Data availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Author contributions

Topylko P.: Supervision, Conceptualization, Validation, Construction of Examples, Writing — review & editing, Dankanych A.: Methodology, Formal analysis, Mathematical modeling, Writing — original draft.

Copyright ©



(2026). Topylko P. I., Dankanych A. O.
This work is licensed under a Creative
Commons Attribution 4.0 International
License.

References

1. Duffie, J. A., & Beckman, W. A. (2013). *Solar Engineering of Thermal Processes (4th ed.)*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118671603>
2. Iqbal, M. (1983). *An Introduction to Solar Radiation*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-373750-2.X5001-0>
3. Hersbach, H., & et al. (2020). The ERA5 global reanalysis. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 146, 1999–2049. <https://doi.org/10.1002/qj.3803>
4. Schmetz, J., & et al. (2002). An introduction to Meteosat Second Generation. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 83(7), 977–992. Retrieved from https://www-cdn.eumetsat.int/files/2020-04/pdf_sci_bams0702_intro-msg.pdf
5. Freitas, S., Catita, C., Redweik, P., & Brito, M. C. (2015). Modelling solar potential in the urban environment. *Applied Energy*, 154, 101–111. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2014.08.060>
6. Robinson, D., & Stone, A. (2004). Solar radiation modelling in the urban context. *Solar Energy*, 77(3), 295–309. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2004.05.010>
7. Ross, R. G. (1976). Interface design considerations for terrestrial solar cell modules. *Proceedings of the IEEE*, 64(2), 260–269.
8. Faïman, D. (2008). Assessing the outdoor operating temperature of photovoltaic modules. *Progress in Photovoltaics*, 16, 307–315. <https://doi.org/10.1002/pip.813>
9. Skoplaki, E., & Palyvos, J. A. (2009). On the temperature dependence of photovoltaic module electrical performance. *Solar Energy*, 83, 614–624. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2008.10.008>
10. Liu, B. Y. H., & Jordan, R. C. (1960). The interrelationship and characteristic distribution of direct, diffuse and total solar radiation. *Solar Energy*, 4(3), 1–19. [https://doi.org/10.1016/0038-092X\(60\)90062-1](https://doi.org/10.1016/0038-092X(60)90062-1)

Топилко П. І., Данканич А. О. Математичне моделювання просторово-часового розподілу сонячного енергетичного потенціалу урбанізованих територій.

У статті розроблено математичну модель просторово-часового розподілу сонячного енергетичного потенціалу урбанізованих територій. Сонячну радіацію подано у вигляді просторово-часової функції, що поєднує аналітичний опис інсоляції та коригувальну складову, яка враховує просторову й часову неоднорідність середовища. Енергетичний потенціал формалізовано як інтегральну характеристику за площею території та часовим інтервалом з урахуванням температурної залежності ефективності фотоелектричного перетворення. Запропоновано чисельну реалізацію моделі та виконано обчислювальні експерименти на синтетичних вхідних даних. Показано, що просторові неоднорідності сонячної радіації можуть зменшувати інтегральний енергетичний потенціал на 14–29% порівняно з однорідним випадком, а врахування температурного чинника призводить до додаткового зниження на 5–6%. Отримані результати підтверджують доцільність просторово-часового підходу до оцінки сонячного енергетичного потенціалу урбанізованих територій.

Ключові слова: математичне моделювання, сонячна енергетика, просторово-часовий розподіл, сонячна радіація, урбанізовані території.

Recived: 27.02.2026

Accepted: 15.03.2026

Published: 30.04.2026

УДК 519.21

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).117-125](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).117-125)**І. Я. Усар¹, І. А. Макушенко², О. В. Лукович³**

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
молодший науковий співробітник кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
usar69@ukr.net, iryna.usar@knu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-5505>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
асистент кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук
igormakushenko@knu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4313-4936>

³ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
провідний інженер кафедри прикладної статистики
lukolga@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1207-3888>

СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ ДЛЯ ПРОЦЕСІВ МІГРАЦІЇ СПЕЦІАЛЬНОГО ТИПУ

В даній статті вводиться клас двовимірних процесів міграції, за допомогою якого можна моделювати процес обслуговування для різних систем з повторними викликами. Спосіб надходження і обслуговування вимог обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Головна мета роботи — пошук замкнених формул для стаціонарних імовірностей через параметри моделі процесу обслуговування.

Ключові слова: процес міграції, ланцюги Маркова, стаціонарний розподіл, системи з повторними викликами, потік імовірностей.

1. Вступ. Важливим розділом теорії масового обслуговування являється теорія систем з повторними викликами. Ці системи детально розглянуті в роботах [1, 2]. Вони використовуються в проектуванні комп'ютерних мереж, при дослідженні стохастичних мереж обробки інформації та сучасних систем зв'язку, при описанні процесу посадки повітряних суден та ін. [1–4].

В системах з повторними викликами вимога, яка надійшла у систему і застала всі обслуговуючі прилади зайнятими, через деякий випадковий проміжок часу знову повторює спробу потрапити на обслуговування. Вважається, що вимога повторює спроби до тих пір, поки не надійде на обслуговування.

Системи з повторними викликами відрізняються стратегіями первинних та вторинних викликів та кількістю приладів. Багатовимірність моделей цих систем дозволяє проводити детальний аналіз їх інтегральних характеристик, розв'язувати оптимізаційні задачі [5, 6]. З ускладненням моделей з'являються нові математичні проблеми — це пошук методів розрахунку для характеристик системи в умовах стаціонарного режиму функціонування.

2. Основний результат. Основну модель, яка розглядається в роботі, визначимо як двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$, $t \geq 0$ в обмеженій множині станів $S = \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, N\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in S$, $\alpha \neq \beta$ для $Q(t)$ задамо системою співвідношень:

при $\alpha = (i, j)$ та $i \neq m$

$$q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j), \\ \mu_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i-1, j), \\ \nu_{ij}, & \text{якщо } \beta = (i+1, j-1), \end{cases}$$

при $\alpha = (m, j)$

$$q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \mu_{mj}, & \text{якщо } \beta = (m-1, j), \\ \lambda_{mj}, & \text{якщо } \beta = (m, j+1). \end{cases}$$

За домовленістю інтенсивності тих переходів, які виводять за обмежену область S дорівнюють нулю $\mu_{0j} = \nu_{i0} = \nu_{mj} = \lambda_{mN} = 0$.

Процеси міграції типу $Q(t)$ моделюють роботу марковських систем з обмеженим числом джерел повторних викликів. Так при $\lambda_{ij} = \lambda_{mj} = \lambda$, $\mu_{ij} = i\mu$, $\nu_{ij} = j\nu$ отримаємо класичну модель $M/M/m/N$ системи з повторними викликами [1], для якої m — число обслуговуючих приладів, N — максимально можливе число джерел повторних викликів. Відповідним вибором інтенсивностей ν_{ij} можна отримати систему з повторними викликами та лінійною інтенсивністю для повторних спроб зайняти вільний прилад [4].

Перейдемо до аналізу стаціонарного режиму процесу $Q(t)$, $t \geq 0$. Ми маємо на меті отримати для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i, j) \in S$ подання, яке зручно використовувати як для їх обчислення, так і для вивчення їх аналітичних властивостей.

Для того, щоб сформулювати основний результат, для $j = 0, 1, \dots, N-1$ введемо позначення: $A(j)$ — тридіагональна матриця вигляду

$$A(j) = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-2}^{(-)} & a_{m-2}^{(0)} & a_{m-2}^{(+)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1}^{(-)} & a_{m-1}^{(0)} \end{pmatrix};$$

$$a_i^{(0)} = \lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1;$$

$$a_i^{(+)} = -\lambda_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, m-2;$$

$$a_i^{(-)} = -\mu_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$B(j) = \begin{pmatrix} 0 & \nu_{0j+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{1j+1} & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_{m-2j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad C(j) = \frac{\mu_{mj}}{\lambda_{mj}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{0j+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{1j+1} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{m-2j+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_{m-1j+1} \end{pmatrix}.$$

Через $A(N)$ будемо позначимо трикутну матрицю

$$A(N) = \begin{pmatrix} \mu_{1N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -(\nu_{1N} + \lambda_{1N}) & \mu_{2N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\nu_{1N} & -(\nu_{2N} + \lambda_{2N}) & \mu_{3N} & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ -\nu_{1N} & -\nu_{2N} & -\nu_{3N} & \dots & -(\nu_{m-2N} + \lambda_{m-2N}) & \mu_{m-1N} \end{pmatrix}.$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'(j) = (\pi_{0j}, \pi_{1j}, \dots, \pi_{m-1j}), \quad Q(j) = \frac{\pi(j)}{\pi_{0N}},$$

$$\nu'(j) = (\nu_{0j}, \nu_{1j}, \dots, \nu_{m-1j}), \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

$\bar{1}(m-1) - (m-1)$ — вимірний вектор, що складається з одиниць, $e_i(m-1) - (m-1)$ — вимірний вектор, i -та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\bar{1}$, e_i будемо позначати такі ж вектори розмірності m .

Теорема 1. Якщо для $Q(t)$ існує стаціонарний режим і матриці $A(j)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ мають обернену, то стаціонарні імовірності π_{ij} , $(i, j) \in S$ можна подати у вигляді

$$\pi'(N) = S_Q^{-1} Q'(N), \quad \pi_{mN} = S_Q^{-1} \frac{1}{\mu_{mN}} Q'(N) (\nu(N) + \lambda_{m-1N} e_m), \quad (1)$$

$$\pi'(j) = S_Q^{-1} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j), \quad (2)$$

$$\pi_{mj} = S_Q^{-1} \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \nu(j+1), \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

де

$$S_Q = Q'(N) \left\{ \bar{1} + \frac{1}{\mu_{mN}} (\nu(N) + \lambda_{m-1N} e_m) + \sum_{j=0}^{N-1} T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \times \right. \\ \left. \times \left[T(j) \bar{1} + \frac{1}{\lambda_{mj}} \nu(j+1) \right] \right\}, \quad (4)$$

$$Q(N) = \left(A^{-1}(N) (\nu_{0N} \bar{1}(m-1) + \lambda_{0N} e_1(m-1)) \right), \quad (5)$$

$$T(j) = [B(j) + C(j)] A^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Доведення. Для кожного $k = 0, 1, \dots, m-1$ розіб'ємо S на дві підмножини $E_k = \{(0, N), (1, N), \dots, (k, N)\}$ та $\bar{E}_k = S \setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірності через замкнений контур у стаціонарному режимі [7: 49], будемо мати

$$\nu_{0N} \pi_{0N} + \nu_{1N} \pi_{1N} + \dots + \nu_{k-1N} \pi_{k-1N} + (\nu_{kN} + \lambda_{kN}) \pi_{kN} = \mu_{k+1N} \pi_{k+1N}, \quad (6)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Для $Q_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{0N}}$, $(i, j) \in S$ перші $(m-1)$ рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{cases} \mu_{1N} Q_{1N} = \nu_{0N} + \lambda_{0N} \\ -(\nu_{1N} + \lambda_{1N}) Q_{1N} + \mu_{2N} Q_{2N} = \nu_{0N} \\ -\nu_{1N} Q_{1N} - (\nu_{2N} + \lambda_{2N}) Q_{2N} + \mu_{3N} Q_{3N} = \nu_{0N} \\ \dots \\ -\nu_{1N} Q_{1N} - \dots - (\nu_{m-2N} + \lambda_{m-2N}) Q_{m-2N} + \mu_{m-1N} Q_{m-1N} = \nu_{0N} \end{cases} \quad (7)$$

Відносно $Q_{1N}, \dots, Q_{m-1N}$ розв'язком (7) буде

$$\begin{pmatrix} Q_{1N} \\ \dots \\ Q_{m-1N} \end{pmatrix} = A^{-1}(N)(\nu_{0N}\bar{1}(m-1) + \lambda_{0N}e_1(m-1)).$$

Таким чином (5) доведено.

З (6) при $k = m - 1$ знаходимо

$$Q_{mN} = \frac{1}{\mu_{mN}} Q'(N)(\nu(N) + \lambda_{m-1N}e_m). \quad (8)$$

Узагальнимо співвідношення (8) на випадок $j = N - 1, \dots, 1, 0$. Розіб'ємо S на дві підмножини $S_j = \{(\alpha, \beta) \in S : \beta \leq j\}$ і $\bar{S}_j = S \setminus S_j$. Знову використовуючи рівність потоків імовірності через замкнений контур, маємо

$$\lambda_{mj}Q_{mj} = \nu_{0j+1}Q_{0j+1} + \dots + \nu_{m-1j+1}Q_{m-1j+1}$$

або

$$Q_{mj} = \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(j+1) \nu(j+1), \quad j = N-1, \dots, 0. \quad (9)$$

Розглянемо тепер $m \times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i, j) з області $S^1 = \{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, N-1\}$. Відповідні рівняння для Q_{ij} , $(i, j) \in S^1$ мають вигляд

$$(\lambda_{0j} + \nu_{0j})Q_{0j} = \mu_{1j}Q_{1j}, \quad i = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij})Q_{ij} &= \nu_{i-1j+1}Q_{i-1j+1} + \lambda_{i-1j}Q_{i-1j} + \mu_{i+1j}Q_{i+1j}, \\ i &= 1, 2, \dots, m-2. \end{aligned} \quad (11)$$

При $i = m - 1$ з урахуванням (9)

$$\begin{aligned} (\lambda_{m-1j} + \mu_{m-1j} + \nu_{m-1j})Q_{m-1j} &= \nu_{m-2j+1}Q_{m-2j+1} + \\ &+ \lambda_{m-2j}Q_{m-2j} + \frac{\mu_{mj}}{\lambda_{mj}}Q'(j+1)\nu(j+1). \end{aligned} \quad (12)$$

Систему (10)–(12) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$Q'(j)A(j) = Q'(j+1)[B(j) + C(j)],$$

або

$$\begin{aligned} Q'(j) &= Q'(j+1)[B(j) + C(j)]A^{-1}(j) = Q'(j+1)T(j), \\ j &= N-1, \dots, 1, 0, \end{aligned} \quad (13)$$

оскільки за умовою $A^{-1}(j)$ існує.

Розв'язком рекурентного співвідношення (13) буде послідовність векторів

$$Q'(j) = Q'(N)T(N-1) \times \dots \times T(j), \quad j = N-1, \dots, 1, 0. \quad (14)$$

Підставляючи праву частину (14) в (9), маємо

$$Q_{mj} = \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \nu(j+1), \quad j = N-1, \dots, 1, 0. \quad (15)$$

Тепер умова нормування для стаціонарних імовірностей π_{ij} , $(i, j) \in S$ дозволяє знайти

$$\pi_{0N} = \left\{ Q'(N) \bar{1} + \sum_{j=0}^{N-1} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j) \bar{1} + \frac{1}{\mu_{mN}} Q'(N) (\nu(N) + \lambda_{m-1N} e_m) + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda_{mj}} Q'(N) T(N-1) \times \dots \times T(j+1) \nu(j+1) \right\}^{-1}. \quad (16)$$

Співвідношення (1)–(4) є безпосереднім наслідком (8), (14)–(16).

Теорему доведено.

Застосуємо отриманий результат до системи $M/M/m/N$ з повторними викликами. У даному випадку залежність локальних характеристик від точки $(i, j) \in S$ фазового простору має простий явний вигляд і можна провести більш детальний аналіз.

Для $M/M/m/N$ — системи з повторними викликами

$$B(j) = (j+1) \nu B, \quad C(j) = (j+1) \nu \rho^{-1} C,$$

де $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ — завантаженням системи первинними викликами,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $A(j)$ можна подати у вигляді

$$A(j) = \Delta(j)[I - P(j)], \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

де $\Delta(j) = \|(\lambda + \alpha\mu + j\nu)\delta_{\alpha\beta}\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$ — діагональна матриця, $P(j) = \|p_{\alpha\beta}(j)\|_{\alpha,\beta=0}^{m-1}$,

$$p_{\alpha\beta}(j) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha\mu + j\nu}, & \beta = \alpha + 1, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \\ \frac{\alpha\mu}{\lambda + \alpha\mu + j\nu}, & \beta = \alpha - 1, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

підстохастична матриця ($p_{\alpha\beta}(j) \geq 0$ і для будь-якого $\alpha : \sum_{\beta=0}^{m-1} p_{\alpha\beta}(j) \leq 1$).

Оскільки для

$$j = 0, 1, \dots, N-1 \quad \sum_{\beta=0}^{m-1} p_{m-1\beta}(j) = \frac{(m-1)\mu}{\lambda + (m-1)\mu + j\nu} < 1,$$

і матриця $P(j)$ є нерозкладною, то її спектральний радіус строго менше 1. Звідси випливає, що матриця $A(j)$ має обернену матрицю

$$A^{-1}(j) = [I - P(j)]^{-1} \Delta^{-1}(j) = [I + P(j) + P^2(j) + \dots] \Delta^{-1}(j).$$

Таким чином, умови теореми 1 виконуються і ми маємо наступний результат.

Наслідок 1. *Стационарні імовірності $M/M/t/N$ – системи з повторними викликами можуть бути подані у вигляді (1)–(4), де матриця*

$$T(j) = (j+1)\nu [B + \rho^{-1}C][I - P(j)]^{-1} \Delta^{-1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Очевидно, формули (1)–(4) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. У випадку одного обслуговуючого приладу ($t = 1$) векторно-матричне подання стаціонарних імовірностей значно спрощується.

Наслідок 2. *Стационарні імовірності для $M/M/1/N$ – системи з повторними викликами мають вигляд*

$$\pi(0, k) = S_Q^{-1} \prod_{j=0}^{k-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right), \quad (17)$$

$$\pi(1, k) = S_Q^{-1} \rho \left(1 + k \frac{\nu}{\lambda} \right) \prod_{j=0}^{k-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (18)$$

де

$$S_Q = \sum_{m=0}^N \left[1 + \rho \left(1 + m \frac{\nu}{\mu} \right) \right] \prod_{j=0}^{m-1} \left(\rho \frac{j + \lambda/\nu}{j+1} \right).$$

Перейдемо тепер до розрахунків стаціонарного розподілу для конкретної системи. Для спрощення вважаємо, що інтенсивність обслуговування $\mu = 1$, що не обмежує загальності.

Як приклад, розглянемо систему $M/M/1/20$. Нехай $\nu = 0.1$, $\lambda = 1.1$.

Наведемо числові значення стаціонарного розподілу та їх графіки.

0.00734806,	0.0177823,	0.0264239,	0.0310369,	0.031622,	0.0292629,	0.0252561,
0.0206734,	0.0162316,	0.0123223,	0.00909825,	0.00656287,	0.00464089,	0.00322603,
0.00220929,	0.00149327,	0.000997633,	0.000659625,	0.000432092,	0.000280672,	0.00018093.

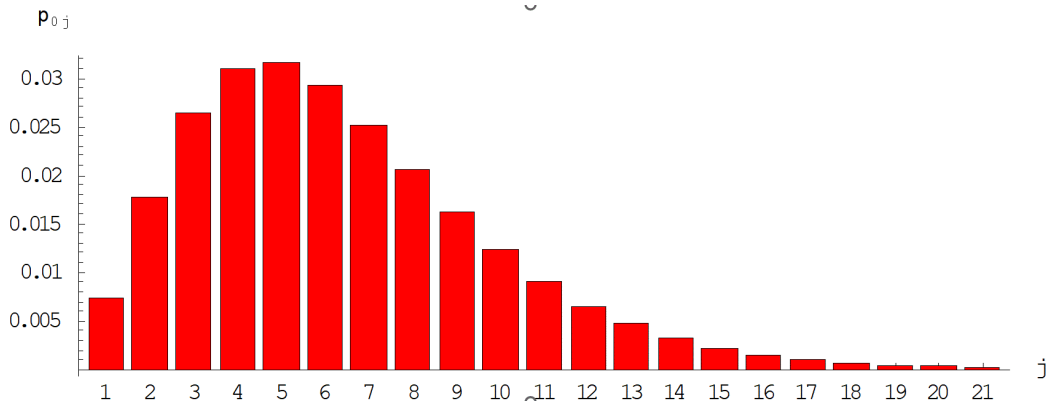
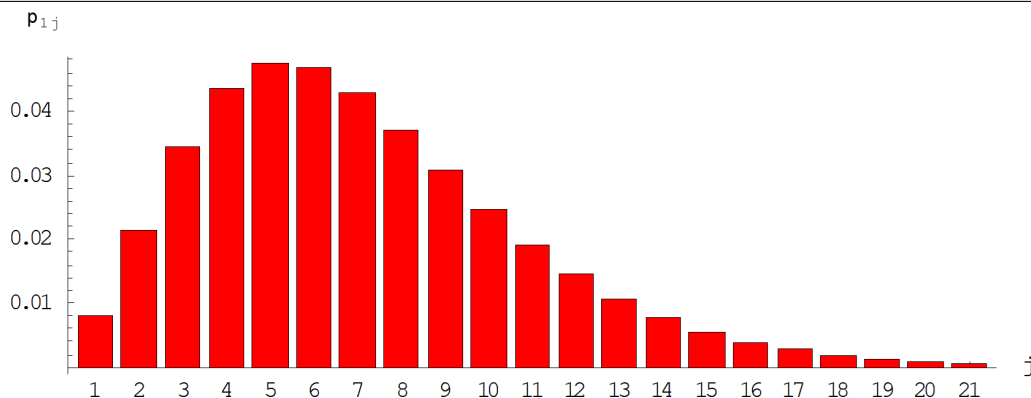


Рис. 1. Стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}(20)$.

0.00808286,	0.0213388,	0.034351,	0.0434516,	0.047433,	0.0468206,	0.0429354,
0.0372121,	0.0308401,	0.0246446,	0.0191063,	0.0144383,	0.010674,	0.00774247,
0.00552322,	0.00388249,	0.00269361,	0.00184695,	0.00125307,	0.000842016,	0.00056087.

Рис. 2. Стаціонарні ймовірності $\pi_{1j}(20)$.

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі для моделювання процесу обслуговування систем з повторними викликами вводиться клас двовимірних процесів міграції. Тип системи обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. Для обчислення стаціонарних ймовірностей отримані явні формули в векторно-матричному вигляді. Вони є зручними для їх обчислення та розв'язку оптимізаційних задач. На завершення зауважимо, що прості формули, подібні (17), (18) можуть бути отримані для інших типів міграцій, що визначаються вибором залежності локальних характеристик від фазової точки області S .

В подальшому дослідженні можна розглянути системи з необмеженим числом повторних викликів і з'ясувати умови існування стаціонарного розподілу.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження частково здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Розроблення методів моделювання, аналізу та оптимізації виробничих систем із використанням стохастичних моделей і систем керування запасами» (державний реєстраційний номер 0126U002699).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

І. Я. Усар: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз. І. А. Макушенко: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проект. О. В. Лукович: курація даних, методологія, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Усар І. Я., Макушенко І. А., Лукович О. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Falin, G. I., & Templeton, J. G. C. (1997). *Retrial Queues*. Chapman and Hall: London. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-2977-8>
2. Artalego, J. R., & Gomez-Corral A. (2008). *Retrial Queueing Systems*. Springer: Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9>
3. Falin, G. I., & Gómez-Corral, A. (2000). On a bivariate Markov process arising in the theory of single-server retrial queues. *Statistica Neerlandica*, 54, 67–78. <https://doi.org/10.1111/1467-9574.00126>
4. Anisimov, V. V., & Artalego, J. R. (2001). Analysis of Markov Multi-server Retrial Queues with Negative Arrivals. *Queueing Systems*, 39, 157–182. <https://doi.org/10.1023/a:1012796517394>
5. Lebedev, E., & Usar, I. (2013). Retrial queueing systems with variable arrival rate. *Cybernetics and Systems Analysis*, 49(3), 457–464. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9529-9>
6. Makushenko, I., Usar, I., Livinska, H., & Sharapov, M. (2023). Optimal threshold strategies for retrial systems with a queue. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 427, 115–136. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2023.115136>
7. Walrand, J. (1988). *An Introduction to Queueing Networks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs: NJ.

Usar I. Ya., Makushenko I. A., Lukovich O. V. On stationary distribution for migration processes of a special type.

An important branch of queueing theory is the theory of systems with retrial queueing. They are used in the design of computer networks, in the analysis of stochastic information processing networks and modern communication systems, as well as in modeling the process of aircraft landing, etc.

In retrial queueing systems, a request that arrives at the system and finds all servers busy does not join a finite-capacity queue, as in queueing systems with waiting, and does not leave the system permanently, as in loss systems. When all service devices are occupied, this request makes another attempt to access service. It is assumed that the request continues retrying until it is eventually admitted to service.

Retrial systems differ in the strategies of primary and secondary calls, as well as in the number of servers. The multidimensional nature of the models makes it possible to carry out a systematic analysis of stochastic networks and to investigate their integral performance

characteristics. As the models become more complex, new mathematical problems arise, in particular, the development of methods for evaluating system performance measures under stationary operating conditions.

In this paper, a class of two-dimensional migration processes is introduced, which can be used to model the service process for various retrial systems. The arrival and service mechanisms of requests are determined by the controlling parameters of the migration. The main objective of the paper is to derive closed-form expressions for the stationary probabilities in terms of the parameters of the service process model.

Keywords: migration process, Markov chains, stationary distribution, retrial queues, probability flow.

Отримано: 29.03.2026

Прийнято: 14.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 517.9

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).126-133](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).126-133)**О. О. Царевський**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,

аспірант кафедри математичного аналізу

oles.tsarevskiy@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6982-5625>**СЕКТОРІАЛЬНІ БЛОК-ДІАГОНАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ В
ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯННЯХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

У роботі розглянуто операторне сімейство $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}, t \geq 0$, що виникає при дослідженні стійкої компоненти розв'язків абстрактної задачі Коші другого порядку $x''(t) = Ax(t)$ у банахових просторах. Припускається, що оператор A є секторіальним блок-діагональним оператором на ℓ_p -сумі скінченновимірних просторів. Для функції $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$ одержано оцінку похідних через формулу Фаа ді Бруно і поліноми Белла. Це дозволяє встановити поблочну та глобальну оцінку. Показано, що в нескінченновимірному випадку глобальна експоненціальна стійкість може порушуватись. Також виділено достатні умови, за яких має місце оцінка типу $\|e^{-t\sqrt{A}}\| \leq Me^{-\alpha t}$.

Ключові слова: секторіальний оператор, блок-діагональний оператор, експоненціальна стійкість, формула Фаа ді Бруно, поліноми Белла.

1. Вступ. Розглянемо абстрактну задачу Коші другого порядку

$$x''(t) = Ax(t), \quad t \geq 0,$$

де A — лінійний оператор у банаховому просторі X . При дослідженні спадної, тобто стійкої, компоненти розв'язку виникає операторне сімейство $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}, t \geq 0$. Секторіальні оператори та пов'язане з ними голоморфне функціональне числення залишаються важливою частиною сучасного функціонального аналізу, оскільки дають змогу будувати операторні функції, придатні для спектрального аналізу та еволюційних задач у банахових просторах [5]. Застосування секторіальних і близьких до них операторів продовжують активно вивчатися і в сучасних моделях для операторно-диференціальних та інтегродиференціальних рівнянь у банахових просторах [6, 7]. Окремий інтерес становлять також абстрактні задачі другого порядку, де питання коректної розв'язності та поведінки розв'язків розглядаються в різних функціонально-аналітичних постановках [8]. Класичні монографії [1–3] залишаються базовими для цього напрямку, однак сучасні праці показують, що тематика секторіальних операторів та еволюційних рівнянь зберігає актуальність.

Саме секторіальність оператора A є природним припущенням для нашої задачі. Вона забезпечує включення спектра в сектор, який не перетинає від'ємну дійсну піввісь, а тому функція $z \mapsto \sqrt{z}$ може бути задана аналітично на області, що містить $\sigma(A)$ [1, 2]. Для кожного спектрального параметра λ_k корінь $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$ надалі обирається так, щоб його дійсна частина була додатною, тобто $\Re \mu_k > 0$. Саме ця умова додатності відповідає стійкій компоненті розв'язку і приводить до спадання множника $e^{-t\mu_k}$.

У цій роботі розглядається блок-діагональний оператор на ℓ_p -сумі скінченновимірних просторів. Такий спеціальний, але конструктивний клас операторів

дає змогу отримати явні оцінки для норми $\|e^{-t\sqrt{A}}\|$, які безпосередньо відображають внесок спектральних параметрів і жорданової структури окремих блоків. На відміну від більш загальних абстрактних підходів, у блок-діагональному випадку можна простежити, як локальні оцінки на жорданових клітинах переходять у глобальні оцінки для всього оператора. Далі ми оцінюємо похідні функції $e^{-t\sqrt{z}}$ за допомогою формули Фаа ді Бруно і поліномів Белла [4], одержуємо поблочні та глобальні оцінки, будуюмо нескінченновимірний контрприклад і формулюємо достатні умови глобальної стійкості.

2. Постановка задачі. Нехай

$$X = \left(\bigoplus_{k \geq 1} X_k \right)_{\ell_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

де $X_k \cong \mathbb{C}^{m_k}$ — скінченновимірні простори. Розглядатимемо оператор $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots)$ на просторі X . Припускаємо, що кожен блок A_k подібний до жорданової матриці $A_k = V_k J_k V_k^{-1}$, де $J_k = \lambda_k I + N_k$, $N_k^{m_k} = 0$ при $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Далі всюди використовуємо головну гілку кореня, тобто $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$, $\text{Re } \mu_k > 0$. Для оператора подібності покладемо

$$\kappa_p(V_k) = \|V_k\|_p \|V_k^{-1}\|_p.$$

Для аналітичної в околі спектра функції f маємо поблочне представлення

$$f(A) = \text{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots), \quad \|f(A)\|_{X \rightarrow X} = \sup_{k \geq 1} \|f(A_k)\|_{X_k \rightarrow X_k}. \quad (1)$$

Тому для $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$ задача зводиться до оцінок на окремих жорданових блоках. Далі ми будемо систематично використовувати тейлорівський розклад на блоці

$$f(J_k) = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} N_k^j. \quad (2)$$

3. Структура похідних функції $e^{-t\sqrt{z}}$. Покладемо

$$f(z) = e^{-t\sqrt{z}} = h(g(z)), \quad h(u) = e^{-tu}, \quad g(z) = \sqrt{z}.$$

У означенні g використовується головна гілка кореня, така, для якої $\text{Re } \sqrt{z} > 0$ при $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Опишемо структуру похідних $f^{(j)}$.

Лема 1. Для кожного $j \geq 1$ існують невід'ємні коефіцієнти $a_{j,s}$, $s = j, \dots, 2j-1$, такі, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\mu = \sqrt{\lambda}$ і $t \geq 0$ виконується оцінка

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t \text{Re } \mu} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s} t^{2j-s} |\mu|^{-s}. \quad (3)$$

Тобто для кожного j існує поліном $P_j(t, |\mu|^{-1})$ з невід'ємними коефіцієнтами та степенями t від 1 до j , для якого

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t \text{Re } \mu} P_j(t, |\mu|^{-1}). \quad (4)$$

Доведення. За формулою Фаа ді Бруно [4, Ch. III] маємо

$$f^{(j)}(\lambda) = \sum_{m=1}^j h^{(m)}(g(\lambda)) B_{j,m}(g'(\lambda), g''(\lambda), \dots, g^{(j-m+1)}(\lambda)), \quad (5)$$

де $B_{j,m}$ — часткові поліноми Белла [4]. Для функції h маємо $h^{(m)}(u) = (-t)^m e^{-tu}$, а для $g(z) = \sqrt{z}$ при $r \geq 1$

$$g^{(r)}(\lambda) = \frac{(-1)^{r-1}(2r-3)!!}{2^r} \lambda^{\frac{1}{2}-r}.$$

Позначимо $\mu = \sqrt{\lambda}$. Тоді

$$|h^{(m)}(g(\lambda))| = t^m e^{-t \operatorname{Re} \mu}, \quad |g^{(r)}(\lambda)| = \frac{(2r-3)!!}{2^r |\mu|^{2r-1}}.$$

Розпишемо (5) у вигляді:

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t \operatorname{Re} \mu} \sum_{m=1}^j t^m \sum_{\substack{k_1+\dots+k_{j-m+1}=m \\ k_1+2k_2+\dots+(j-m+1)k_{j-m+1}=j}} \prod_{r=1}^{j-m+1} \left(\frac{|g^{(r)}(\lambda)|}{r!} \right)^{k_r}. \quad (6)$$

Кожний доданок у (6) має вигляд

$$c_{j,m,(k_r)} t^m |\mu|^{-(2j-m)} e^{-t \operatorname{Re} \mu},$$

де $c_{j,m,(k_r)} \geq 0$ залежить лише від комбінаторних коефіцієнтів поліномів Белла та чисел $(2r-3)!!/(2^r r!)$. Якщо покласти $s = 2j - m$, то при $m = 1, \dots, j$ одержуємо $s = j, \dots, 2j-1$. Після групування всіх доданків з однаковими степенями t та $|\mu|^{-1}$ дістаємо оцінку

$$\frac{|f^{(j)}(\lambda)|}{j!} \leq e^{-t \operatorname{Re} \mu} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s} t^{2j-s} |\mu|^{-s},$$

де $a_{j,s} \geq 0$. Це і є формула (3). Позначивши праву частину через

$$e^{-t \operatorname{Re} \mu} P_j(t, |\mu|^{-1}),$$

одержуємо (4).

Для перших похідних одержуємо явні оцінки

$$\frac{|f(\lambda)|}{0!} = e^{-t \operatorname{Re} \mu}, \quad \frac{|f'(\lambda)|}{1!} \leq \frac{t}{2|\mu|} e^{-t \operatorname{Re} \mu}, \quad \frac{|f''(\lambda)|}{2!} \leq \left(\frac{t^2}{8|\mu|^2} + \frac{t}{8|\mu|^3} \right) e^{-t \operatorname{Re} \mu}$$

Отже, початок полінома Q_{m_k-1} має вигляд

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = 1 + \frac{t}{2|\mu_k|} + \left(\frac{t^2}{8|\mu_k|^2} + \frac{t}{8|\mu_k|^3} \right) + \dots,$$

де ряд обривається на степені $j = m_k - 1$.

4. Оцінка на жордановому блоці. З тейлорівського розкладу (2) та леми 1 випливає наступний результат.

Теорема 1. Нехай $J_k = \lambda_k I + N_k$, де $N_k^{m_k} = 0$. Тоді для кожного $t \geq 0$

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}),$$

де

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1})$$

є поліномом з невід'ємними коефіцієнтами.

Доведення. З формули (2) маємо

$$e^{-t\sqrt{J_k}} = \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_k)}{j!} N_k^j.$$

Перейдемо до операторної норми в $X_k \cong \mathbb{C}^{m_k}$. За нерівністю трикутника

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{|f^{(j)}(\lambda_k)|}{j!} \|N_k^j\|_p.$$

Для стандартної жорданової нільпотентної клітини N_k оператор N_k^j є усіченим зсувом на j позицій. У базисі, в якому J_k має жорданову форму, матриця N_k^j містить одиниці лише на j -тій наддіагоналі, а всі інші елементи дорівнюють нулю, тому $\|N_k^j\|_p \leq 1$ для всіх $j = 0, \dots, m_k - 1$. Отже,

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{|f^{(j)}(\lambda_k)|}{j!}.$$

Для $j = 0$ маємо $|f(\lambda_k)| = e^{-t \operatorname{Re} \mu_k}$. Для $j \geq 1$ застосовуємо лему 1, тобто

$$\left\| e^{-t\sqrt{J_k}} \right\|_p \leq e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1}).$$

Залишається покласти

$$Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) = \sum_{j=0}^{m_k-1} P_j(t, |\mu_k|^{-1}).$$

Оскільки кожен поліном P_j має невід'ємні коефіцієнти, те саме виконується і для Q_{m_k-1} .

5. Глобальна оцінка в скінченновимірному випадку. Поєднуючи (1), подібність $A_k = V_k J_k V_k^{-1}$ та теорему 1, отримуємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq \sup_{k \geq 1} \left[\kappa_p(V_k) e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) \right]. \quad (7)$$

Якщо кількість блоків скінченна, то (7) одразу дає експоненціальну стійкість.

Припущення 1. Нехай $\alpha = \inf_{k \geq 1} \operatorname{Re} \mu_k > 0$. Тоді для всіх $t \geq 0$ виконується оцінка

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq \sup_{k \geq 1} \left[\kappa_p(V_k) \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{s \geq j} a_{j,s} \frac{\left(\frac{j}{\operatorname{Re} \mu_k} \right)^j e^{-j}}{|\mu_k|^s} \right] e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

де для $j = 0$ відповідний внесок розуміється як 1.

Доведення. Із (7) та (3) маємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq \sup_{k \geq 1} \left[\kappa_p(V_k) e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{s \geq j} a_{j,s} t^{2j-s} |\mu_k|^{-s} \right].$$

Оскільки $s \geq j$, то $2j - s \leq j$. Тому для кожного доданка

$$t^{2j-s} e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \leq t^j e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \leq \left(\frac{j}{\operatorname{Re} \mu_k} \right)^j e^{-j}.$$

За означенням α маємо $e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \leq e^{-\alpha t}$, підставимо у нерівність, отримаємо (8).

Наслідок 1. Нехай оператор A має скінченну кількість блоків. Тоді існують константи $M > 0$ та $\alpha > 0$ такі, що

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_p \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Доведення. Покладемо $\alpha = \min_k \operatorname{Re} \mu_k > 0$. Оскільки число блоків скінченне, а кожен поліном Q_{m_k-1} має скінченну кількість членів, з елементарної оцінки

$$t^q e^{-\alpha t} \leq \left(\frac{q}{\alpha} \right)^q e^{-q}, \quad q \geq 0,$$

випливає, що кожен множник $Q_{m_k-1}(t; |\mu_k|^{-1}) e^{-t \operatorname{Re} \mu_k}$ зверху обмежується константою, помноженою на $e^{-\alpha t}$. Після взяття максимуму по скінченній кількості блоків дістаємо (9).

6. Нескінченновимірний випадок і контрприклад. У нескінченновимірному випадку оцінка (7) сама по собі ще не гарантує глобальної експоненціальної стійкості. На відміну від скінченновимірного випадку, для нескінченної прямої суми блоків принциповим стає рівномірний контроль величин, що входять до цієї оцінки; подібна залежність є типовою для операторно-диференціальних задач у банахових просторах [3, 7]. Тому, якщо поліномні множники, розміри жорданових клітин або числа обумовленості зростають від блока до блока, супремум у правій частині (7) може бути нескінченним.

Побудуємо контрприклад, який показує, що локальні поблочні оцінки не забезпечують глобальної оцінки без додаткових рівномірних припущень. Нехай N_n — нільпотентна жорданова клітина розміру n в $\mathbb{C}^n$, а $k_n > 0$ — числова послідовність, що зростає. Покладемо $B_n = k_n N_n$, $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ в просторі $\ell_p(\mathbb{C}^n)$. Для кожного фіксованого n оператор B_n є нільпотентним, тому

$$e^{tB_n} = I + tB_n + \frac{t^2}{2!} B_n^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} B_n^{n-1}.$$

Якщо вибрати послідовність $k_n \rightarrow \infty$ і вектор $x = \bigoplus_{n \geq 1} x^{(n)} \in \ell_p$ так, щоб норми $\|x^{(n)}\|$ спадали недостатньо швидко порівняно зі зростанням k_n , то для нескінченно багатьох індексів n внесок блока $e^{tB_n} x^{(n)}$ стає великим уже при малих $t > 0$. Унаслідок цього може трапитися, що $e^{tB} x \notin \ell_p$ поза деяким обмеженим інтервалом значень t . Отже, сама по собі керованість кожного окремого блока ще не дає єдиних глобальних констант M та α для всього оператора.

7. Умови експоненціальної стійкості в нескінченновимірному випадку. Щоб усунути описані вище перешкоди, введемо природні рівномірні умови:

$$\inf_{k \geq 1} \operatorname{Re} \mu_k > 0, \inf_{k \geq 1} |\mu_k| > 0, \sup_{k \geq 1} m_k < \infty, \sup_{k \geq 1} \kappa_p(V_k) < \infty. \quad (10)$$

Крім того, припустимо, що для фіксованого $\alpha \in (0, \inf_{k \geq 1} \operatorname{Re} \mu_k)$ існує константа $C_Q > 0$ така, що для всіх $k \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{m_k-1} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)} C_{j,s}(\alpha) |\mu_k|^{-s} \leq C_Q, C_{j,s}(\alpha) = \left(\frac{2j-s}{\alpha} \right)^{2j-s} e^{-(2j-s)}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (10) та наведене вище припущення з константою C_Q . Тоді існують константи $M > 0$ та $\alpha > 0$ такі, що*

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

Доведення. За теоремою 1 та формулою (7) для кожного $t \geq 0$ маємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq \sup_{k \geq 1} \left[\kappa_p(V_k) e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \left(1 + \sum_{j=1}^{m_k-1} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)} t^{2j-s} |\mu_k|^{-s} \right) \right].$$

Оскільки $\alpha < \inf_{k \geq 1} \operatorname{Re} \mu_k$, то для всіх k і $t \geq 0$ маємо $e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \leq e^{-\alpha t}$. Тому

$$a_{j,s}^{(k)} t^{2j-s} |\mu_k|^{-s} e^{-t \operatorname{Re} \mu_k} \leq a_{j,s}^{(k)} C_{j,s}(\alpha) |\mu_k|^{-s} e^{-\alpha t}.$$

Підставляючи це в попередню оцінку, дістаємо

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq \sup_{k \geq 1} \left[\kappa_p(V_k) \left(1 + \sum_{j=1}^{m_k-1} \sum_{s=j}^{2j-1} a_{j,s}^{(k)} C_{j,s}(\alpha) |\mu_k|^{-s} \right) \right] e^{-\alpha t}.$$

За умовою (10) існує число $K > 0$ таке, що $\kappa_p(V_k) \leq K$ для всіх k . Отже,

$$\left\| e^{-t\sqrt{A}} \right\|_{X \rightarrow X} \leq K(1 + C_Q) e^{-\alpha t},$$

тобто (11) виконується з $M = K(1 + C_Q)$.

8. Простори X_α . Навіть якщо глобальна рівномірنا обмеженість не виконується, експоненціальну стійкість можна зберегти. Для фіксованого $\alpha > 0$ позначимо через $M_k(\alpha)$ найменшу константу в оцінці

$$\left\| e^{-t\sqrt{A_k}} \right\|_{X_k \rightarrow X_k} \leq M_k(\alpha) e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

Визначимо простір

$$X_\alpha = \left\{ x = \bigoplus_{k \geq 1} x^{(k)} \in X : \sum_{k \geq 1} M_k(\alpha)^p \|x^{(k)}\|^p < \infty \right\}$$

для $1 \leq p < \infty$, а в випадку $p = \infty$ — стандартним чином через супремум.

Теорема 3. Для кожного $x \in X_\alpha$ виконується оцінка

$$\|e^{-t\sqrt{A}}x\|_X \leq \|x\|_{X_\alpha} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Доведення. Нехай $x = \bigoplus x^{(k)} \in X_\alpha$. Тоді для кожного блока за означенням числа $M_k(\alpha)$ маємо

$$\|e^{-t\sqrt{A_k}}x^{(k)}\| \leq M_k(\alpha)e^{-\alpha t} \|x^{(k)}\|, \quad t \geq 0.$$

Якщо $1 \leq p < \infty$, то після піднесення до степеня p та сумування за k отримуємо

$$\|e^{-t\sqrt{A}}x\|_X^p = \sum_{k \geq 1} \|e^{-t\sqrt{A_k}}x^{(k)}\|^p \leq e^{-\alpha p t} \sum_{k \geq 1} M_k(\alpha)^p \|x^{(k)}\|^p = e^{-\alpha p t} \|x\|_{X_\alpha}^p.$$

Переходячи до кореня степеня p , дістаємо (12). У випадку $p = \infty$ маємо

$$\sup_{k \geq 1} \|e^{-t\sqrt{A_k}}x^{(k)}\| \leq e^{-\alpha t} \sup_{k \geq 1} M_k(\alpha) \|x^{(k)}\| = e^{-\alpha t} \|x\|_{X_\alpha}.$$

9. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі одержано явні оцінки для операторного сімейства $e^{-t\sqrt{A}}$ у випадку секторіального блок-діагонального оператора. Побудовано лему про структуру похідних функції $e^{-t\sqrt{z}}$. На цій основі одержано глобальну оцінку в скінченновимірному випадку. У нескінченновимірному випадку показано, що без контролю по блоках глобальна експоненціальна стійкість може порушуватися. Сформульовано достатні умови, що гарантують оцінку типу (11), а також введено простори X_α , на яких така оцінка зберігається за слабших припущень.

Подальший розвиток цієї теми може стосуватися уточнення умов на сім'ї блоків, дослідження ширших класів секторіальних операторів та поширення отриманих оцінок на інші моделі еволюційних рівнянь другого порядку в банахових просторах.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в основному тексті рукопису у вигляді формул, тверджень та доведень.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що під час створення данної роботи не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Царевський О. О. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Pazy, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. New York: Springer.
2. Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Berlin: Springer.
3. Daleckiĭ, Yu. L., & Krein, M. G. (1974). *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*. Providence, RI: American Mathematical Society.
4. Comtet, L. (1974). *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Dordrecht: Reidel.
5. Batty, C., Gomilko, A., & Tomilov, Y. (2023). Functional calculi for sectorial operators and related function theory. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 22(3), 1383–1463. <https://doi.org/10.1017/S1474748021000414>
6. Fedorov, V. E., & Godova, A. D. (2024). Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving family of operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 283(2), 317–334.
7. Fedorov, V. E., & Nagumanova, A. V. (2024). Direct and inverse problems for evolution equations with regular integro-differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 286, 278–289. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07504-3>
8. Aparicio, R., Keyantuo, V., & Lizama, C. (2025). Characterization of well-posedness for second-order abstract differential equations on continuous function spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 549(2).

Tsarevskiy O. O. Sectorial block-diagonal operators in second order evolution problems.

The paper deals with the operator family $T(t) = e^{-t\sqrt{A}}$, $t \geq 0$, arising in the study of the stable component of solutions to the abstract second-order Cauchy problem $x''(t) = Ax(t)$ in Banach spaces. It is assumed that A is a sectorial block-diagonal operator acting on an ℓ_p -sum of finite-dimensional spaces. For the function $f(z) = e^{-t\sqrt{z}}$, a structural estimate for its derivatives is obtained by means of the Faà di Bruno formula and Bell polynomials. This yields a blockwise and a global estimate for $e^{-t\sqrt{A}}$. It is shown that in the infinite-dimensional case local blockwise estimates alone do not imply global exponential stability. Sufficient conditions ensuring an estimate of the form $\|e^{-t\sqrt{A}}\| \leq Me^{-\alpha t}$ are formulated.

Keywords: sectorial operator, block-diagonal operator, exponential stability, Faà di Bruno formula, Bell polynomials.

Отримано: 02.04.2026

Прийнято: 17.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).134-138](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).134-138)**О. А. Ярова**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
доцентка кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

oksana.yarova@lnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6284-1193>

СУМІШ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ РІВНЯНЬ РЕГРЕСІЇ

Дана стаття присвячена дослідженню суміші мультиплікативних регресійних рівнянь. Метою роботи є виведення граничного рівняння для суміші мультиплікативних рівнянь регресії під впливом зовнішнього середовища. Знайдено граничний вигляд суміші та розглянуто приклад використання.

Ключові слова: мультиплікативні рівняння відновлення, суміші, зовнішнє середовище, граничні ймовірності.

1. Вступ. Мультиплікативні регресійні моделі широко застосовуються для опису процесів, у яких взаємодія змінних має нелінійний характер. У випадку випадкового середовища такі моделі природно узагальнюються до сумішей, де перемикавання між режимами визначається стохастичними механізмами. Це дозволяє краще описувати реальні системи, зокрема в економіці, біології та технічних застосуваннях.

В статті [5] досліджено суміш рівнянь множинної регресії. Дана робота присвячена дослідженню суміші мультиплікативних регресійних рівнянь.

2. Основний результат. Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ та вибірку $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ в цьому просторі, де $y_1, y_2, \dots, y_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини. Нехай ці випадкові величини залежать від факторів $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$.

Будемо вважати, що кожен фактор може бути представлений у вигляді вибірки незалежних однаково розподілених випадкових величин. Ці фактори описують вплив зовнішнього середовища на вибірку. Але не всі фактори мають великий вплив на кожен елемент вибірки, тому необхідно просіяти вибірку, поділивши її на декілька частин, в залежності від впливу кожного з факторів.

Сформулюємо теорему про суміш мультиплікативних рівнянь регресії.

Теорема 1. Нехай вибірка $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ залежить від факторів $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ і $Y_i = b_{i0} \cdot x_{i1}^{b_{i1}} \cdot x_{i2}^{b_{i2}} \cdot \dots \cdot x_{is_i}^{b_{is_i}} + \varepsilon_i$, де $x_{ij} \in X$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, s_k$, $s_k \leq m$. Тоді вибірку Y можна подати у вигляді суміші множинних рівнянь регресії

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \dots + p_k Y_k + \varepsilon,$$

$$\text{де } \frac{n_i}{n} \rightarrow p_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad a \quad \varepsilon \sim N(0; 1).$$

Доведення. Поділимо вибірку $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ на частини $Y_1 = (y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1})$, $Y_2 = (y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2})$, $\dots$, $Y_k = (y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_k})$, де

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$

Таким чином, отримано k вибірок і початкова вибірка може бути представлена у вигляді

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k).$$

Нехай вибірка Y_1 залежить від факторів $x_{11}, \dots, x_{1s_1}$, Y_2 залежить від факторів $x_{21}, \dots, x_{2s_2}$, а вибірка Y_k залежить від факторів $x_{k1}, \dots, x_{ks_k}$, де $x_{ij} \in X$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, s_k$, $s_k \leq m$. Будемо вважати, що кожен з факторів може мати вплив на декілька вибірок.

Нехай вибірки $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ залежать від факторів $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$. Тоді можна побудувати мультиплікативні рівняння регресії для кожної вибірки. В результаті отримаємо k регресійних рівнянь

$$Y_1 = b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + \varepsilon_1,$$

$$Y_2 = b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} + \varepsilon_2$$

та останнє рівняння

$$Y_k = b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \dots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon_k.$$

В цих рівняннях ε_i , $i = 1, \dots, k$, — нормально розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $E(\varepsilon_i) = 0$ та дисперсією $Var(\varepsilon_i) = 1$.

Далі побудуємо суміш мультиплікативних рівнянь регресії

$$Y = p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + \dots + p_k Y_k + \varepsilon.$$

Але для цього, потрібно знайти ймовірності для кожного рівняння регресії. Нехай p_1 — ймовірність того, що випадкова величина з вибірки Y_1 залежить від факторів $x_{11}, \dots, x_{1s_1}$. Тоді

$$\frac{n_1}{n} \rightarrow p_1.$$

Аналогічно,

$$\frac{n_i}{n} \rightarrow p_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

У результаті,

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \dots + \frac{n_k}{n} = p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

Таким чином, суміш рівнянь регресії можна подати в наступному вигляді

$$Y = \frac{n_1}{n} Y_1 + \frac{n_2}{n} Y_2 + \dots + \frac{n_k}{n} Y_k + \varepsilon.$$

Підставимо рівняння кожної з регресій в рівняння суміші

$$Y = p_1 \left(b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + \varepsilon_1 \right) + p_2 \left(b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} + \varepsilon_2 \right) + \dots + p_k \left(b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \dots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon_k \right).$$

Позначимо

$$\varepsilon = p_1 \cdot \varepsilon_1 + p_2 \cdot \varepsilon_2 + \dots + p_k \cdot \varepsilon_k.$$

Тоді

$$Y = p_1 \cdot b_{10} \cdot x_{11}^{b_{11}} \cdot x_{12}^{b_{12}} \cdot \dots \cdot x_{1s_1}^{b_{1s_1}} + p_2 \cdot b_{20} \cdot x_{21}^{b_{21}} \cdot x_{22}^{b_{22}} \cdot \dots \cdot x_{2s_2}^{b_{2s_2}} + \dots + p_k \cdot b_{k0} \cdot x_{k1}^{b_{k1}} \cdot x_{k2}^{b_{k2}} \cdot \dots \cdot x_{ks_k}^{b_{ks_k}} + \varepsilon.$$

У результаті отримано твердження теореми.

Розглянемо приклад. Розглянемо еко-орієнтоване мікропідприємство, яке виготовляє продукцію з біорозкладних матеріалів, застосовує “зелені” технології та намагається скоротити вуглецевий слід. Його розвиток відбувається у кілька взаємопов’язаних фаз: запуск, розширення та зрілість. У кожній фазі змінюється структура факторів, які визначають прибуток, операційну ефективність та конкурентоспроможність.

Візьмемо 100 підприємств, серед яких 30 на фазі «запуску», 40 на фазі «розширення» та 30 на фазі «зрілості». Виділимо основні змінні, які впливають на прибуток підприємств, зокрема масштаб, маркетинг, якість, логістика, екосертифікація та технології.

«Запуск» — це початковий етап, під час якого підприємство формує базову виробничу лінію та створює перший ринок збуту. Підприємство працює на невеликих обсягах, а технології та процеси ще не оптимізовані.

У цій фазі прибуток переважно залежить від факторів, що визначають початкову впізнаваність та ринковий старт. Ключова характеристика фази запуску — маркетинг та якість сильніше впливають на попит, ніж масштаб.

В наступній фазі «розширення» підприємство вже має стабільний ринок. Виробничі процеси оптимізуються, а обсяги зростають. Важливість змінних змінюється. У цій фазі зростає роль масштабності та технологічності.

У фазі «зрілості» підприємство стабільне, має налагоджені канали збуту і значну частку ринку. Основна мета — підвищення ефективності, зниження витрат, інноваційність. На цьому етапі технології та екостандарти підсилюють прибутковість.

Для моделювання та прогнозування рівня прибутку, побудуємо мультиплікативні моделі регресії, виділивши основні змінні від яких залежить прибуток.

На етапі запуску рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_1 = A_1 X_2^\alpha X_3^\beta,$$

де Y_1 — рівень прибутку, X_2 — маркетинг, X_3 — якість.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_1 = \ln A_1 + \alpha \ln X_2 + \beta \ln X_3.$$

Проведемо регресійний аналіз та знайдемо коефіцієнти моделі, використавши метод найменших квадратів. У результаті отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_1 = 0,698 + 0,395 \cdot \ln X_2 + 0,576 \cdot \ln X_3.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_1 = 2 X_2^{0,395} X_3^{0,576}.$$

Перейдемо до другої фази «розширення». На цьому етапі рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_2 = A_2 X_1^\gamma X_6^\delta,$$

де Y_2 — рівень прибутку, X_1 — масштаб, X_6 — технології.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_2 = \ln A_2 + \gamma \ln X_1 + \delta \ln X_6.$$

Проведемо регресійний аналіз та знайдемо коефіцієнти моделі, використавши метод найменших квадратів. Таким чином отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_2 = -0,033 + 0,482 \cdot \ln X_1 + 0,173 \cdot \ln X_6.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_2 = 0,96 X_1^{0,428} X_6^{0,173}.$$

Перейдемо до третьої фази «зрілість». На цьому етапі рівняння регресії матиме наступний вигляд

$$Y_3 = A_3 X_4^\varphi X_5^\psi,$$

де Y_3 — рівень прибутку, X_4 — логістика, X_5 — екосертифікація.

Прологарифмуємо дане рівняння, в результаті отримаємо

$$\ln Y_3 = \ln A_3 + \varphi \ln X_4 + \psi \ln X_5.$$

Таким чином отримаємо рівняння регресії

$$\ln Y_3 = 1,835 - 0,054 \cdot \ln X_4 + 0,781 \cdot \ln X_5.$$

Подамо дане рівняння в мультиплікативній формі

$$Y_3 = 6 X_4^{-0,054} X_5^{0,781}.$$

Наступним кроком обчислимо ймовірності

$$p_1 = \frac{30}{100} = 0,3; \quad p_2 = \frac{40}{100} = 0,4; \quad p_3 = \frac{30}{100} = 0,3.$$

Побудуємо суміш рівнянь регресій

$$\begin{aligned} Y &= p_1 Y_1 + p_2 Y_2 + p_3 Y_3 = \\ &= 0,3 \cdot 2 X_2^{0,395} X_3^{0,576} + 0,4 \cdot 0,96 X_1^{0,482} X_6^{0,173} + 0,3 \cdot 6 X_4^{-0,054} X_5^{0,781} = \\ &= 0,6 X_2^{0,395} X_3^{0,576} + 0,384 X_1^{0,482} X_6^{0,173} + 1,8 X_4^{-0,054} X_5^{0,781}. \end{aligned}$$

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній роботі досліджено суміш мультиплікативних регресійних рівнянь в умовах впливу зовнішнього випадкового середовища. Отримано граничне рівняння, яке описує асимптотичну поведінку суміші.

Показано, що врахування зовнішнього середовища суттєво впливає на структуру та властивості регресійної моделі, зокрема на її довгострокову поведінку. Отримані результати узагальнюють відомі підходи до аналізу регресійних моделей і можуть бути використані для дослідження складніших стохастичних систем із перемиканням режимів.

Розглянутий приклад ілюструє можливості практичного застосування побудованої моделі та підтверджує отримані теоретичні результати.

Перспективи подальших досліджень полягають у вивченні багатовимірних узагальнень, дослідженні швидкості збіжності до граничного режиму, а також у застосуванні отриманих результатів до прикладних задач у різних галузях.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Ярова О. А. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Koroliuk, V. S., & Limnios, N. (2005). *Stochastic systems in merging phase space*. Singapore: World Scientific Publishing Company. <https://doi.org/10.1142/5979>
2. Maiboroda, R., & Miroshnychenko, V. (2020). Asymptotic normality of modified LS estimator for mixture of nonlinear regressions. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 7(4), 435–448. <https://doi.org/10.15559/20-VMSTA167>
3. Yeleyko, T. Ya., & Yarova, O. A. (2025). The mixture of multiple regression equations: open problems. *Mathematical Studies*, 63(2), 221–224. <https://doi.org/10.30970/ms.63.2.221-224>
4. Mayboroda, R., & Sugakova, O. (2008). *Evaluation and classification based on observations from a mixture*. Kyiv: Kyiv University [in Ukrainian].
5. Yarova, O. A. (2025). Mixture of semi-Markov random evolutions in nonlinear approximation. *Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics*, 97, 114–119. <https://doi.org/10.30970/vmm.2025.97.114-119> [in Ukrainian].

Yarova O. A. Mixture of multiplicative regression equations.

This paper is devoted to the study of a mixture of multiplicative regression equations. The aim of the work is to derive a limiting equation for a mixture of multiplicative regression equations under the influence of an external environment. The limiting form of the mixture is obtained, and an example of its application is considered.

Keywords: multiplicative renewal equations, mixtures, external environment, limiting probabilities.

Отримано: 05.04.2026

Прийнято: 20.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.9:535:519.6

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).139-145](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).139-145)**Ю. Ю. Білак**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри програмного забезпечення систем,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
yuriy.bilak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5989-1643>

ІНФОРМАЦІЙНА ТЕХНОЛОГІЯ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ТА ПАРАМЕТРИЧНОГО СИНТЕЗУ БАГАТОШАРОВИХ ТОНКИХ ПЛІВОК НА ОСНОВІ СЦЕНАРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Актуальність дослідження зумовлена потребою підвищення точності спектрального аналізу та ідентифікації параметрів багатошарових тонких плівок в умовах варіативності вхідних даних і обмежених обчислювальних ресурсів. Метою роботи є розроблення інформаційної технології спектрального аналізу та параметричного синтезу багатошарових тонких плівок на основі сценарного моделювання, що забезпечує статистично обґрунтовану оцінку точності та стабільності результатів.

У роботі виконано аналіз сучасних методів, побудовано структурну модель технології, сформовано обчислювальні процедури та організовано серію сценарних експериментів. Використано методи математичного моделювання, розв'язання обернених задач, моделі хвильової оптики (зокрема ТММ та його узагальнення) і чисельні методи оптимізації.

За результатами експериментів (120 сценаріїв) досягнуто зниження середньої похибки ідентифікації до 2.3% (проти 3.9–5.8% для альтернативних методів), а також зменшення варіативності результатів. Це підтверджує ефективність розробленої інформаційної технології та доцільність використання сценарного моделювання для оцінювання точності.

Подальші дослідження спрямовані на розширення технології для нелінійних і неоднорідних структур та інтеграцію з нейромережевими моделями.

Ключові слова: інформаційна технологія, спектральний аналіз, багатошарові тонкі плівки, параметричний синтез, сценарне моделювання, адаптивні алгоритми, оптимізація.

1. Вступ. Сучасний розвиток оптоелектроніки та нанотехнологій зумовлює потребу у високоточному спектральному аналізі багатошарових тонких плівок, які характеризуються складною структурою та чутливістю до параметричних змін. Такі задачі є оберненими, нелінійними та високорозмірними, що ускладнює їх розв'язання класичними чисельними методами (ТММ, FEM, FDTD) та обмежує їх ефективність в умовах варіативності вхідних даних. Це зумовлює необхідність використання інтегрованих та гібридних підходів, зокрема з елементами машинного навчання. Особливістю сучасних методів та моделей є перехід до сценарного моделювання, яке дозволяє оцінювати поведінку моделей у множині різнорідних умов та забезпечує статистично обґрунтовану оцінку точності й стабільності результатів. Водночас, існуючі рішення не забезпечують достатнього рівня інтеграції фізичних, чисельних і data-driven моделей у єдиному обчислювальному середовищі, що обмежує їх практичну ефективність.

Метою роботи є розроблення інформаційної технології спектрального аналізу багатошарових тонких плівок на основі сценарного моделювання, яка за-

безпечує підвищення точності та стабільності ідентифікації параметрів за рахунок адаптивної організації обчислювальних процесів. Для досягнення мети вирішуються задачі аналізу існуючих методів, побудови архітектури технології, формалізації моделей, організації сценарних обчислювальних експериментів та оцінки ефективності запропонованого підходу.

2. Огляд літератури. Сучасні дослідження моделювання багатопарових тонкоплівкових структур базуються на положеннях хвильової оптики та чисельного аналізу. Фізично обґрунтовані методи, зокрема матричні методи, забезпечують точне обчислення спектральних характеристик і широко застосовуються на практиці [1, 2]. Спектроскопічні методи, зокрема еліпсометрія, є чутливими до параметрів структури та дозволяють їх непряме визначення [3], але орієнтовані переважно на прямі задачі та мають обмежену стійкість до шумів і корельованості параметрів.

Задачі спектрального аналізу належать до класу некоректних обернених задач, що ускладнює їх розв'язання традиційними методами. Сучасні методи оберненого проєктування формалізують синтез як оптимізаційну задачу [4], а методи глибокого навчання забезпечують апроксимацію обернених операторів і прискорення обчислень [5, 6]. В той же час такі методи мають обмежену інтерпретованість, залежать від навчальних даних і не гарантують стабільності поза їх межами.

Методи оцінювання невизначеності, зокрема на основі Монте-Карло, дозволяють отримувати статистично обґрунтовані оцінки точності та стійкості [7, 8], проте зазвичай застосовуються ізольовано й не інтегруються з фізичними та нейромережевими моделями в межах єдиної системи. Гібридні інформаційні методи, що поєднують фізичні моделі та машинне навчання [9], частково вирішують цю проблему, однак питання узгодження моделей, сценарного керування обчисленнями та забезпечення стабільності залишаються відкритими.

Отже, існуючі методи не забезпечують комплексної інтеграції фізичних, чисельних і data-driven моделей у єдиному адаптивному середовищі. Недостатня системність у методах сценарного моделювання та статистичного оцінювання точності обмежує ефективність аналізу й визначає необхідність розроблення відповідної інформаційної технології.

3. Методи та моделі. У статті розроблено інформаційну технологію спектрального аналізу та параметричного синтезу багатопарових плівок у вигляді інформаційної системи

$$IT = \langle D, M, A, S, U \rangle,$$

що інтегрує моделі, алгоритми та засоби керування в єдиному адаптивному середовищі. Технологія поєднує фізично обґрунтовані чисельні методи (ТММ, FEM, FDTD) з гібридними та нейромережевими моделями, які виконують попереднє опрацювання спектрів, виділення спектральних ознак, нейромережеву апроксимацію та ініціалізацію оптимізації. Реалізовано адаптивний вибір і узгодження моделей залежно від параметрів задачі.

Параметричний синтез формалізовано як задачу мінімізації функціонала нев'язки, що розв'язується комбінованими методами оптимізації із нейромережевою підтримкою та зменшенням розмірності. Обчислення організовано за принципами модульності, адаптивності та паралелізму з централізованим керуванням, що забезпечує підвищення точності, стійкості та ефективності розв'язання

обернених задач.

Функціонування інформаційної технології здійснюється у трьох взаємопов'язаних просторах: параметричному $P \in \Omega$, що описує геометричні та оптичні характеристики структури, спектральному $S(\lambda)$, який відображає результат взаємодії випромінювання з системою, та просторі функціонала нев'язки $J(P)$, що задає міру узгодженості між експериментальними і модельними спектрами та формалізує задачу синтезу як оптимізаційну.

Інформаційна технологія базується на таких принципах:

- *гібридність*: поєднання фізичних моделей (TMM, RCWA, FEM, FDTD) і нейромереж із їх взаємним узгодженням;
- *модульність*: побудова у вигляді незалежних функціональних блоків;
- *адаптивність*: динамічний вибір області аналізу, параметрів дискретизації та регуляризації;
- *замкнений обчислювальний контур*: ітераційне уточнення параметрів на основі зворотного зв'язку;
- *масштабованість і паралельність*: ефективне використання обчислювальних ресурсів у межах реалізації алгоритмів.

Це забезпечує узгоджену роботу фізичних, чисельних і нейромережових компонентів у єдиному обчислювальному процесі. На рисунку 1 зображено розроблену структурну схему, у вигляді системи $IT = \langle D, M, A, S, U \rangle$.

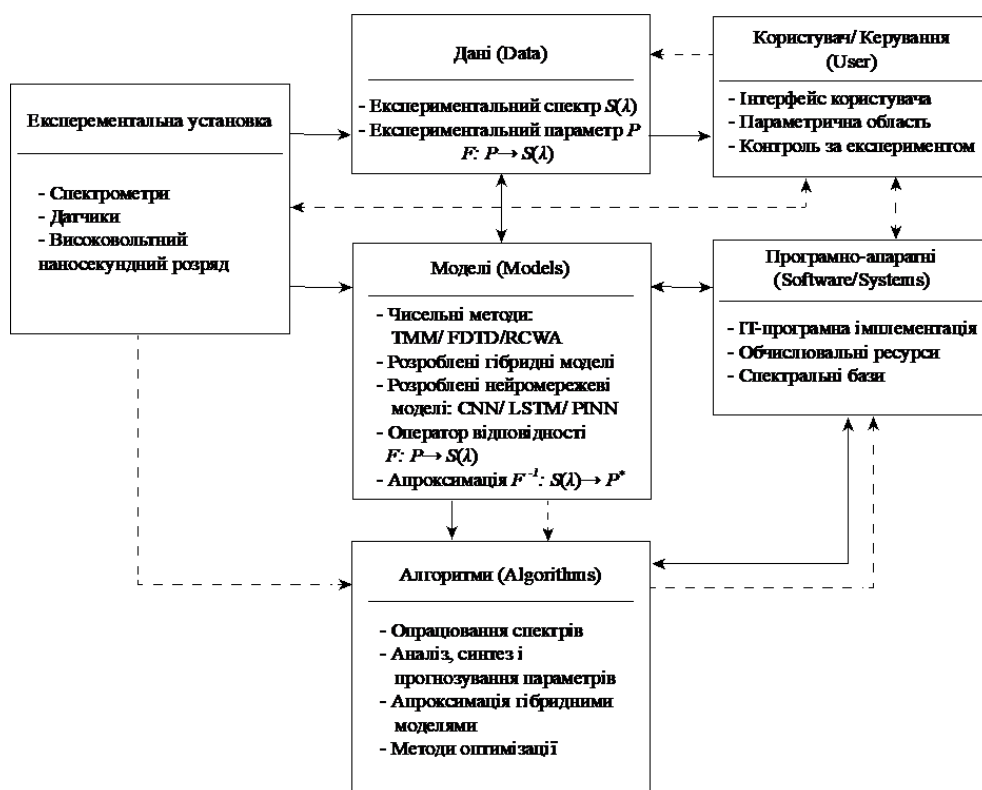


Рис. 1. Структурна схема інформаційної технології.

У поданій структурній схемі стрілки відображають інформаційні та керуючі зв'язки між компонентами інформаційної технології. Суцільні стрілки задають

основні потоки даних: передавання експериментальних спектрів до множини D , їх використання в моделях M , подальша трансформація в алгоритми A , реалізація в середовищі S та подання результатів користувачу U . Двонаправлені зв'язки відображають узгодження між даними, моделями, алгоритмами та програмною реалізацією, а також інтерактивну взаємодію з користувачем. Пунктирні стрілки відповідають зворотним і керуючим впливам, що забезпечують адаптивність системи: передавання керуючих параметрів від користувача, налаштування процедур обробки спектрів та ітераційний зворотний зв'язок між алгоритмами і експериментальними даними.

Зупинимося на функціональному призначенні модулів інформаційної технології.

Модуль попереднього опрацювання даних та обчислення хвильових процесів. Забезпечує підготовку вхідних спектральних даних до аналізу та їх фізичну узгодженість. Виконує нормалізацію, фільтрацію шуму, інтерполяцію, виділення інформативної спектральної області та первинну оцінку параметрів структури. Формує коректний параметричний простір $P \in \Omega$. Додатково, реалізує чисельне обчислення хвильових процесів у багатопарових структурах, включно з розрахунком полів та інтерференційних ефектів.

Модуль спектрального аналізу. Призначений для розв'язання прямих спектральних задач і обчислення спектральних характеристик багатопарових плівок. Забезпечує обчислення спектрів пропускання, відбивання та поглинання з урахуванням неоднорідностей, дисперсії та складної геометрії. Реалізує як класичні чисельні методи, так і гібридні та нейромережеві моделі, формуючи відображення $P \rightarrow S(\lambda)$.

Модуль параметричного синтезу. Розв'язує обернені задачі спектроскопії шляхом мінімізації функціонала нев'язки $J(P)$. Виконує відновлення параметрів структури (товщини, показники заломлення тощо) із використанням методів оптимізації та роботи з зашумленими даними. Реалізує керований спектральний синтез на основі інформативної підмножини спектра та гібридних фізично-обґрунтованих моделей. Формально: $S(\lambda) \rightarrow P^*$.

Модуль нейромережевого прогнозування та апроксимації. Забезпечує прискорення та узагальнення обчислень за рахунок нейромережевих моделей. Виконує апроксимацію обернених операторів, прогнозування спектральних характеристик, апроксимацію параметрів за спектрами та побудову surrogate-моделей для заміни ресурсоємних чисельних методів. Реалізує відображення $S(\lambda) \rightarrow \hat{P}$ та $P \rightarrow S^*(\lambda)$, інтегруючи physics-informed методи.

Наведена чотирирівнева структура відображає концептуально-функціональну організацію інформаційної технології. На рівні програмної реалізації, кожен модуль декомпонується на набір програмних компонентів, що забезпечують виконання відповідних моделей, алгоритмів і процедур обробки даних. Така декомпозиція узгоджує функціональну модель із програмною архітектурою та забезпечує модульність, адаптивність і масштабованість.

Взаємодія модулів утворює замкнений обчислювальний конвеєр $P \rightarrow S(\lambda) \rightarrow P^*$, $S(\lambda) \rightarrow \hat{P}$, або $P \rightarrow S(\lambda) \rightarrow P^* \rightarrow \hat{P}^{(k+1)}$. Подальше уточнення параметрів здійснюється через ітераційний процес $P^{(k+1)} = \arg \min J(P^{(k)})$. Це формує двоконтурну структуру: фізичний (чисельне обчислення) та нейромережевий (апроксимація) контури, що забезпечує баланс точності та швидкодії. Обчи-

словальна інфраструктура підтримує паралельні обчислення (CPU/GPU), пакетну обробку та розподіл задач, інтегровані без виділення окремого модуля керування ресурсами.

На концептуальному рівні виділяються три узгоджені шари:

1. методологічний — визначає логіку та послідовність обчислень;
2. реалізаційний — забезпечує програмну імплементацію модулів;
3. інтерактивний — реалізує взаємодію користувача із системою.

Обмін даними здійснюється через уніфіковані формати (JSON, HDF5), а керування — централізованим модулем у середовищі Python. Замкнений зворотний зв'язок між фізичними моделями та нейромережами забезпечує самонавчання і адаптацію системи до нових умов без повного переналаштування.

4. Результати. У роботі проведено серію обчислювальних експериментів із 120 сценаріями, що охоплюють різні комбінації параметрів багат шарових структур та умов моделювання. Кожен сценарій відповідає окремій реалізації задачі спектрального аналізу та параметричного синтезу, що дало змогу отримати статистично обґрунтовану оцінку ефективності методів.

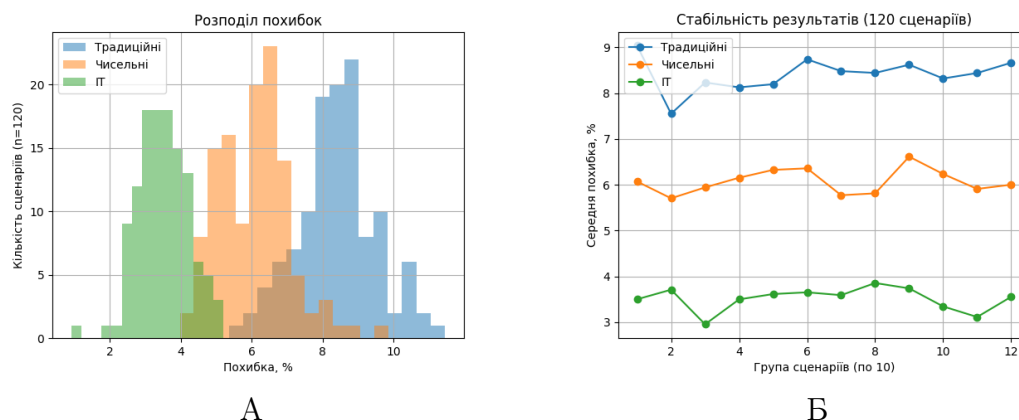


Рис. 2. Порівняння похибки ідентифікації параметрів (А) та агрегований графік по сценаріях (по 10 сценаріїв у групі) (Б).

Гістограма похибок, що відображена на рисунку 2А показує, що для традиційних методів характерне зміщення розподілу в область більших значень та значна дисперсія результатів. Чисельні методи демонструють покращення, однак зберігають суттєву варіативність. Розроблена інформаційна технологія забезпечує найвужчий розподіл і концентрацію похибок у низькому діапазоні, що свідчить про підвищену точність і стабільність. Агрегований графік по сценаріях (по 10 сценаріїв у групі), зображений на рисунку 2Б демонструє, що розроблена технологія забезпечує найменші середні значення похибки на всіх групах. При цьому варіативність між групами мінімальна, що підтверджує стійкість методу до змін умов задачі. Загалом результати експериментів демонструють, що розроблена інформаційна технологія забезпечує зменшення середньої похибки з 8–9% до 3–4%.

5. Висновки. У роботі розроблено інформаційну технологію спектрального аналізу багат шарових тонких плівок на основі сценарного моделювання, що

поєднує фізичні та чисельні методи та моделі в єдиній обчислювальній структурі. Технологія орієнтована на підвищення точності та стабільності ідентифікації параметрів у задачах спектрального аналізу. Проведені обчислювальні експерименти (120 сценаріїв), що охоплюють варіативні умови моделювання, підтвердили ефективність розробленої технології. Отримано зниження середньої похибки ідентифікації до 2.3% (покращення на 40–60% порівняно з традиційними методами), а також зменшення варіативності результатів, що свідчить про підвищення стійкості. Результати демонструють, що використання сценарного моделювання дозволяє отримати статистично обґрунтовану оцінку точності та забезпечує надійність аналізу в умовах змінних вхідних даних і складних структур. Розроблена інформаційна технологія може бути ефективно застосована в задачах спектроскопії, оптоелектроніки та аналізу тонкоплівкових систем і створює основу для подальшого розвитку методів інтелектуальної обробки спектральних даних.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Білак Ю. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Melnyk, I., & Klymko, T. (2022). Optical modeling and characterization of multilayer coatings. *Ukrainian Journal of Physics*. <https://doi.org/10.15407/ujpe67.6.515> [in Ukrainian].
2. Khan, M., & et al. (2022). Optimization techniques for multilayer thin-film design: A review. *Coatings*. <https://doi.org/10.3390/coatings12040567>
3. Huang, Y., & et al. (2020). Review of characterization of perovskite films by spectroscopic

- ellipsometry. *Solar Energy*. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2020.10.066>
4. Molesky, S., & et al. (2021). Inverse design in nanophotonics. *Nature Photonics*. <https://doi.org/10.1038/s41566-021-00788-9>
 5. Liu, Y., & et al. (2023). Deep learning for inverse problems in photonics: Recent advances and perspectives. *Nanophotonics*. <https://doi.org/10.1515/nanoph-2022-0407>
 6. Han, J. H., & et al. (2024). Efficient inverse design of optical multilayer nano-thin films using neural networks. *Nanoscale*. <https://doi.org/10.1039/D4NR01667J>
 7. Du, W., & Su, J. (2022). Uncertainty quantification for numerical solutions of nonlinear PDEs using multi-fidelity Monte Carlo method. *Applied Sciences*. <https://doi.org/10.3390/app12147045>
 8. Stammer, P., Burigo, L., Jäkel, O., Frank, M., & Wahl, N. (2023). Multivariate error modeling and uncertainty quantification using importance weighting for Monte Carlo simulations. *Journal of Computational Physics*. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111725>
 9. Bilak, Y. Y. (2025). Information system based on a complex model using machine learning for spectral analysis. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv*. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/1.14> [in Ukrainian].

Bilak Y. Y. Information technology for spectral analysis and parametric synthesis of multilayer thin films based on scenario modeling.

The relevance of this study is driven by the need to improve the accuracy of spectral analysis and parameter identification of multilayer thin films under conditions of input data variability and limited computational resources. The aim of the work is to develop an information technology for spectral analysis and parametric synthesis of multilayer thin films based on scenario modeling, providing a statistically justified assessment of accuracy and stability of results.

The study includes an analysis of modern methods, the development of a structural model of the proposed technology, the formulation of computational procedures, and the organization of a series of scenario-based experiments. The methods of mathematical modeling, inverse problem solving, wave optics models (in particular the Transfer Matrix Method (TMM) and its generalizations), and numerical optimization techniques are applied.

Experimental results (120 scenarios) demonstrate a reduction in the mean identification error to 2.3% (compared to 3.9–5.8% for alternative methods), as well as a decrease in result variability. This confirms the effectiveness of the proposed information technology and the applicability of scenario modeling for accuracy assessment.

Further research is aimed at extending the proposed technology to nonlinear and inhomogeneous structures and integrating it with neural network-based models.

Keywords: information technology, spectral analysis, multilayer thin films, parametric synthesis, scenario modeling, adaptive algorithms, optimization.

Отримано: 03.04.2026

Прийнято: 20.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.043

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).146-154](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).146-154)**Н. І. Бойко¹, Д. В. Свінцило²**¹ Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені

Степана Гжицького,

доцент кафедри інформаційних технологій,

кандидат економічних наук

nataliya.i.boyko@gmail.comORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6962-9363>² Національний університет “Львівська політехніка”,

студент кафедри систем штучного інтелекту

denys.svintsylo.shi.2022@lpnu.uaORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2381-744X>**НЕЙРОМЕРЕЖЕВИЙ ПРОГНОЗ BITCOIN: АДАПТАЦІЯ ДО ВОЛАТИЛЬНОСТІ**

Стаття присвячена створенню мультимодальної системи прогнозування Bitcoin, яка об'єднує традиційні ринкові показники з аналізом новин через нейромережі LSTM та GRU. Завдяки використанню GDELT та моделі FinBERT авторам вдалося виділити вплив геополітики й фінансів на крипторинки, що підняло точність прогнозів на 15-хвилинних інтервалах з 53,2% до вражаючих 77,8%. Головна особливість підходу — механізм щотижневого адаптивного донавчання, який рятує модель від застарівання, та виявлення 30-хвилинної затримки, з якою макроекономічні новини реально відображаються на ціні. Наукова новизна зосереджена на алгоритмі автоматичного коригування ваг мережі, що дозволяє системі самостійно підтримувати актуальність в умовах хаотичного ринку.

Ключові слова: прогнозування криптовалют, Bitcoin, мультимодальний підхід, рекурентні нейронні мережі, sentiment-аналіз, GDELT, адаптивне навчання, LSTM.

1. Вступ. Сучасний фінансовий ринок характеризується стрімкою цифровізацією та інтеграцією криптоактивів. Біткоїн, як ключовий актив, демонструє високу волатильність та значну чутливість до інформаційного поля. Традиційні методи аналізу історичних цін часто є малоефективними для децентралізованих ринків, де критичну роль відіграють новини та суспільні настрої. Це зумовлює необхідність розробки мультимодальних систем, здатних одночасно опрацьовувати кількісні показники та якісні текстові дані.

Метою роботи є розробка та дослідження підходу для фіксації короткострокових коливань ціни криптовалюти через інтеграцію нейромереж LSTM/GRU та sentiment-аналізу новин за допомогою моделі FinBERT. Наукова новизна полягає в удосконаленні архітектури моделей завдяки синергії контекстуального аналізу фінансових новин, рекурентних мереж та градієнтного бустингу, що дозволяє враховувати макроекономічні події в реальному часі. Практичне значення дослідження забезпечується створенням алгоритмічної бази для торгових систем, яка ефективно фільтрує інформаційний шум і підвищує точність сигналів на коротких таймфреймах, долаючи інертність традиційних методів аналізу.

2. Математична постановка задачі. Задача прогнозування курсу біткоїна розглядається як аналіз багатовимірних часових рядів, де інформаційний фон (sentiment новин) виступає випереджаючим індикатором цінкових рухів.

Формалізація задачі передбачає визначення мультимодального вектора ознак у момент часу t [1, 5]:

$$X_t = \{M_t, S_t, T_t\}, \quad (1)$$

де M_t — вектор ринкових індикаторів (Log-returns, Volatility, SMA deviations); S_t — вектор ознак настрою (позитивні/негативні оцінки новин, індекси GDELT); T_t — циклічні часові ознаки.

Прогнозний індикатор Y_t формується на основі перевищення ціною заданого порогу k (комісійний бар'єр, прийнятий рівним 0.2%) (2) [3, 4]:

$$Y_t = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \frac{C_{t+1}-C_t}{C_t} > k \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}, \quad (2)$$

де C_t та C_{t+1} — ціни закриття на поточному та наступному кроці відповідно.

Задача дослідження полягає у знаходженні оператора F з параметрами W , що максимізує ймовірність правильної класифікації (3) [3]:

$$\hat{Y}_{t+1} = F(X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-n}; W), \quad (3)$$

де n — глибина часового вікна (lookback period), яка оптимізується для врахування інерційності ринку.

Для реалізації оператора F обрано архітектури LSTM та GRU, які ефективно працюють із довгими послідовностями даних, та FinBERT для контекстуального аналізу тексту. Такий підхід трансформує ринковий аналіз у задачу контрольованого навчання (Supervised Learning), орієнтовану на виявлення реальних торгових сигналів [2, 7].

3. Аналіз літературних джерел. Дослідники вказують на еволюцію підходів до прогнозування вартості біткоїна: від класичної статистики до складних мультимодальних систем глибокого навчання [6, 8, 11].

Авторами низки робіт [2, 10] підтверджено, що традиційні моделі (зокрема ARIMA) залишаються прозорим базовим інструментом, проте дослідники наголошують на неможливості лінійних моделей адекватно реагувати на раптові ринкові шоки. У науковій спільноті спостерігається перехід до методів машинного (ML) та глибокого навчання (DL). Зокрема, у дослідженні [4] встановлено перевагу архітектур LSTM та Transformer над класичними алгоритмами завдяки їхній здатності вловлювати довгострокові залежності в даних.

Науковці також обґрунтували ефективність використання багатовимірних вхідних даних. Дослідниками [1, 3] доведено, що інтеграція сигналів із Google Trends та соціальних мереж дозволяє суттєво знизити похибки прогнозування порівняно з одновимірними мережами. Проте автори зауважують, що більшість існуючих праць зосереджені на кількісних характеристиках потоку даних, ігноруючи глибокий семантичний контекст новин. На думку дослідників [9], на ринку існує дефіцит систем, які б інтегрували ринкові показники з якісним фінансовим настроєм. Саме на усунення цієї прогалини спрямоване дане дослідження, де авторами пропонується використання спеціалізованої моделі NLP для аналізу контекстуального змісту новин.

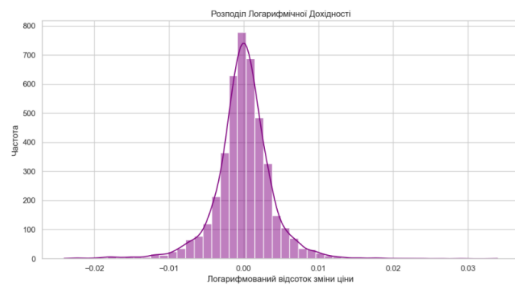
4. Методи та засоби дослідження. Наукова новизна методу полягає у створенні мультимодальної архітектури, що інтегрує високочастотні котирування (біржа Binance) та семантичні вектори фінансової тональності (платформа GDELT) [3, 5].

Основним елементом є алгоритм структурування даних, що базується на трьох етапах. По-перше, це контекстуальна класифікація, яка розділяє новини за тематиками (крипто, фінанси, геополітика). По-друге, це агрегація настроїв, де масиви тексту перетворюються на числовий сигнал за допомогою індексу тональності S_t [6, 9]:

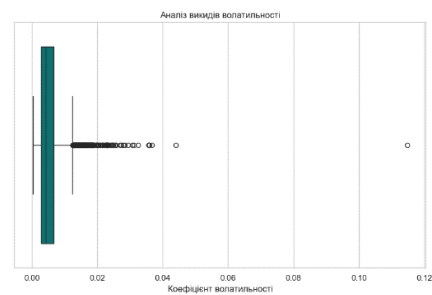
$$S_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V2Tone_i, \quad (4)$$

де N — кількість новин, що потрапили в часові вікно, а $V2Tone_i$ — значення емоційного забарвлення конкретної публікації.

Для усунення розривів у даних використовується метод Forward Fill. Третім етапом є адаптивна синхронізація індексу з таймфреймами 15, 30 та 60 хвилин.



(а)



(б)

Рис. 1. а) Гістограму розподілу логарифмічної доходності; б) Діаграма розмаху для коефіцієнта волатильності.

Дослідження також враховує проблему дисбалансу класів та наявність «важких хвостів» у розподілі доходності (аномальні стрибки ціни на 4-12%) [3, 5]. Для вирішення цих задач в архітектуру нейромереж LSTM та GRU впроваджено механізм зважених штрафних функцій. Це дозволяє моделі ідентифікувати зміну настроїв ринку ще до того, як вони повністю відобразяться в котируваннях, що забезпечує значну перевагу над стандартними одномірними моделями. Аналіз логарифмічної доходності та волатильності підтвердив стаціонарність ряду, але виявив «важкі хвости» — аномальні стрибки ціни на 4-12% (Рис. 1(а)–1(б)). Це обґрунтовує використання нейромереж LSTM та GRU, які, завдяки механізмам пам'яті, найкраще адаптуються до таких різких імпульсних змін ринку.

Аналіз кореляційних матриць (Рис. 2(а)–2(б)) виявив високу мультиколінеарність технічних індикаторів та відсутність прямих лінійних зв'язків із ціною. Це підтверджує нелінійність ринку, де вплив новин стає стабільним і помітним лише на довгих таймфреймах (від 60 хвилин).

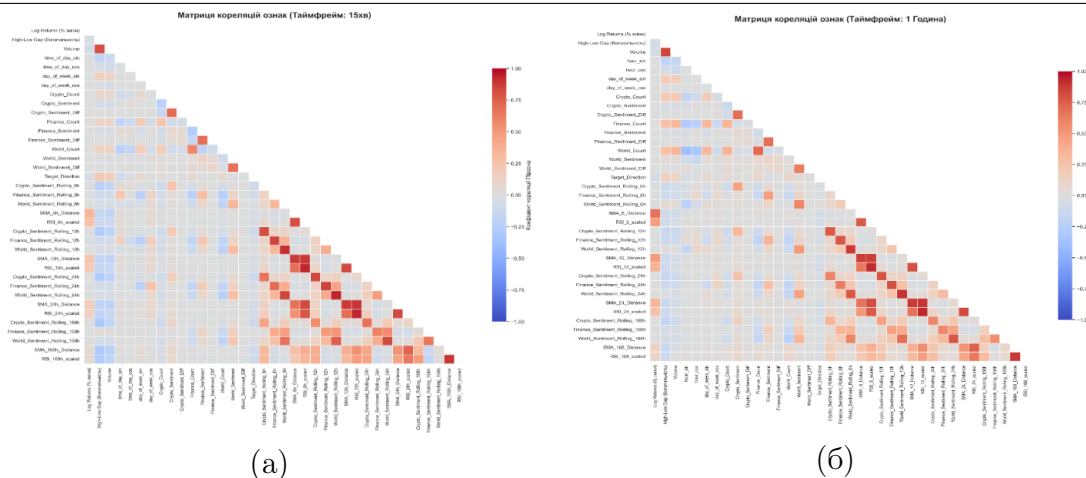


Рис. 2. а) Матриця кореляцій ознак (15хв таймфрейм); б) Матриця кореляцій ознак (60хв таймфрейм).

Метод синтезує дані Binance та GDELT, враховуючи внутрішню динаміку ринку та зовнішні макрореактори. Для боротьби зі «старінням» моделі впроваджено щотижневе адаптивне донавчання з низьким *learning rate* та блоком автоматичного контролю: ваги оновлюються лише при зростанні точності. Експерименти підтвердили перевагу такого динамічного підходу над статичними моделями (Табл. 1).

Таблиця 1.

Порівняння моделей без донавчання та з донавчанням

N тижня	Статична модель		Модель з щотижневим донавчанням	
	Точність (%)	Кількість сигналів	Точність	Кількість сигналів
1	100	2	100	2
2	66.7	3	70	20
3	0	0	100	5
4	0	0	75	16
5	51.2	168	51.5	330
6	52.2	228	58.9	90
7	46.9	614	46.6	350
8	54.6	335	0	0
9	62.7	51	0	0
10	60	150	62.5	72
11	51.7	29	83.3	6
12	53.2	94	57.7	

Поєднання методів обробки «важких хвостів» та рекурентних нейромереж зробило систему стійкою до ринкового хаосу. Експерименти довели критичну роль зовнішніх факторів: мультимодальний підхід підвищив точність впевнених сигналів з 49,39% (рівень випадковості) до 51,96% (Табл. 2). Це підтверджує, що семантичний аналіз новин є необхідним для подолання порогу ринкової ефективності.

Таблиця 2.

Результати тестування моделі ARIMAX

N	Метрика	Тільки історичні дані	Історичні дані + сентимент	Різниця
1	RMSE (\$)	559.71	560.58	+0.87 (погіршення)
2	General DA (%)	49.15%	50.28%	+1.13%
3	High Conf. DA (%)	49.39%	51.96%	+2.57%
4	Кількість угод	330	306	-24

Отримані результати доводять, що навіть лінійні статистичні моделі демонструють якісне покращення при інтеграції текстових даних, що обґрунтовує подальше використання глибших нейромережових архітектур (Рис. 3).

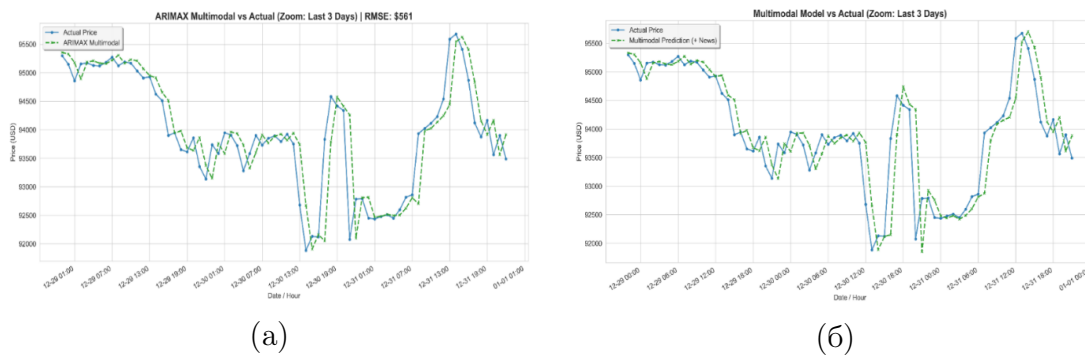


Рис. 3. (а) Графік передбачень мультимодальної моделі ARIMAX; (б) Графік передбачень мультимодальної моделі XGboost.

Аналіз ARIMAX (Рис. 3(а)) виявив структурну затримку в один крок, яку не вдалося усунути навіть попри врахування сентименту через лінійну природу моделі. Для подолання цього ефекту та пошуку нелінійних патернів застосовано XGBoost із лаговими ознаками (1–6 годин). Особливістю етапу стала імітація реальної торгової стратегії з фільтрацією сигналів за порогом впевненості Табл. 3 та на Рис. 3(б).

Таблиця 3.

Результати тестування моделі XGBoost

N	Метрика	Тільки історичні дані	Історичні дані + сентимент	Різниця
1	RMSE (\$)	564.57	565.03	+0.46 (погіршення)
2	General DA (%)	52.28%	52.05%	-0.23%
3	High Conf. DA (%)	52.35%	53.33%	+0.98%
4	Кількість угод	149	120	-29

Використання XGBoost дозволило виявити нелінійні патерни та підвищити точність впевнених прогнозів до 53,33%. Сентимент-аналіз спрацював як фільтр, відсікаючи «шумові» сигнали та скорочуючи кількість угод, що підвищило якість торгової логіки.

На етапі нейромережевого моделювання (оптимізованого через Optuna та MLflow) перехід до бінарної класифікації дозволив досягти таких результатів (Рис. 4):

1. 15 хв: точність 77,8% на базі крипто-сентименту (поріг 0,65).
2. 30 хв: точність 63,6% при інтеграції всіх типів новин.
3. 60 хв: точність 56,5% на основі крипто-новин (поріг 0,7).

Експериментально доведено: на коротких інтервалах вирішальним є вузькоспеціалізований сентимент, а на довгих — комплексний макроекономічний фон.

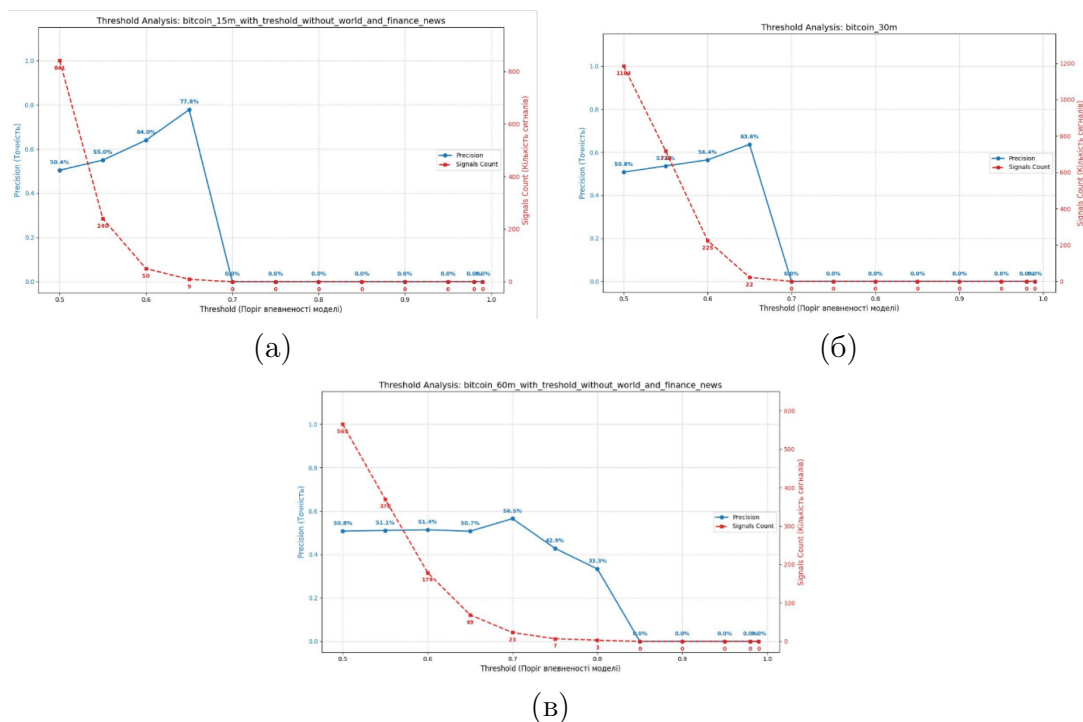


Рис. 4. Співвідношення High-Confidence Precision до кількості загальних сигналів: а) для датасету з таймфреймом 15 хвилин; б) для датасету з таймфреймом 30 хвилин; в) для датасету з таймфреймом 60 хвилин.

Результати в Табл. 4 підтверджують, що перехід до класифікації та використання динамічних порогів впевненості дозволяє генерувати точні торгові сигнали. Найвищу ефективність виявлено на 15-хвилинному таймфреймі, де крипто-сентимент виступає ключовим випереджаючим індикатором.

Обрана сукупність методів формує замкнений цикл аналітичної обробки — від збору сирих сигналів до генерації прецизійних прогнозів. Поєднання рекурентних мереж із баєсівською оптимізацією дозволило структурувати хаотичні інформаційні потоки, а диференціація сентименту за категоріями допомогла ідентифікувати латентні закономірності, недоступні класичним моделям.

Таблиця 4.

Порівняння результатів усіх моделей

Часовий таймфрейм з певним типом новин	Precision (%)	Кількість сигналів
15хв (крипто новини)	77.8	9
15хв (крипто+фінанс новини)	70	10
15хв (крипто+фінанс+світові новини)	59.3	27
30хв (крипто новини)	49.6	895
30хв (крипто+фінанс новини)	51.5	782
30хв (крипто+фінанс+світові новини)	63.6	22
60хв (крипто новини)	56.5	23
60хв (крипто+фінанс новини)	56.6	106
60хв (крипто+фінанс+світові новини)	55.4	439

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У результаті апробації мультимодальної системи встановлено, що інтеграція семантичного аналізу дозволяє подолати «поріг випадковості», підвищивши точність прогнозів із 53,2% до 77,8% на 15-хвилинному інтервалі. Дослідження виявило ефект гетерогенного запізнення, де ринок реагує на крипто-новини майже миттєво, тоді як макроекономічні події інтегруються в ціну з інертністю близько 30 хвилин. Завдяки впровадженню зважених функцій втрат у рекурентні мережі LSTM та GRU вдалося адаптувати систему до аномальних стрибків ціни («важких хвостів»), які зазвичай ігноруються класичною статистикою. Крім того, реалізований метод інкрементального донавчання на мікро-сегментах даних ефективно вирішує проблему «застарівання» моделі, підтримуючи актуальність її ваг у реальному часі.

Перспективи подальших досліджень зосереджені на переході до гібридних архітектур на основі Transformers та залученні On-chain метрик. Наступним кроком стане впровадження агентів підкріпленого навчання (Reinforcement Learning) для динамічної оптимізації портфеля в умовах високої ринкової волатильності.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Оригінальні дані, представлені в дослідженні, відкрито доступні для академічних досліджень у репозиторії Github за адресою:
<https://github.com/DEN228228/crypto-prediction>

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Н. І. Бойко: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, Д. В. Свінцило: формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Бойко Н. І., Свінцило Д. В. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Akyildirim, E., Corbet, S., Katsiampa, P., Kellard, N., & Sensoy, A. (2021). Prediction of cryptocurrency returns using machine learning. *Finance Research Letters*, 38, 101438. <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101438>
2. Chen, C., Ma, Y., Wang, X., & He, L. (2020). Forecasting Bitcoin price with deep learning-based approaches. *Journal of Computational Finance*, 24(3), 1–20. <https://doi.org/10.21314/JCF.2020.390>
3. Greaves, A. S., & Au, B. (2019). Using machine learning algorithms to predict Bitcoin price movements. *Computational Economics*, 53(4), 1003–1021. <https://doi.org/10.1007/s10614-018-9844-y>
4. Kim, Y., Kim, H., & Lee, J. (2021). Transformer-based models for cryptocurrency price prediction: A comparative analysis. *Expert Systems with Applications*, 174, 114768. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114768>
5. Shah, D., Isah, H., & Zulkernine, F. (2019). Stock market analysis: A review and taxonomy of prediction techniques. *International Journal of Financial Studies*, 7(2), 26. <https://doi.org/10.3390/ijfs7020026>
6. Zhang, X., Liu, Y., & Luo, X. (2022). Enhancing cryptocurrency price prediction using hybrid deep learning models. *Journal of Financial Data Science*, 4(2), 45–61. <https://doi.org/10.3905/jfds.2021.1.077>
7. Htay, H. S., & et al. (2025). Enhancing Bitcoin price prediction with deep learning: Integrating social media sentiment and historical data. *Applied Sciences*, 15(3), 1554. <https://doi.org/10.3390/app15031554>
8. Huang, A. H., Wang, H., & Yang, Y. (2022). FinBERT: A large language model for extracting information from financial text. *SSRN*. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3910214
9. Mao, Y., & et al. (2024). Sentiment analysis methods, applications, and challenges: A systematic literature review. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 36(4), 102048. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2024.102048>
10. Scanlon, B., & et al. (2025). Optimizing Bitcoin price prediction: Multivariate LSTM triumphs.

Boyko N. I., Svinchylo D. V. Neural Price Forecasting for Bitcoin: Adapting to Volatility.

The article focuses on the development of a multimodal Bitcoin forecasting system that integrates traditional market metrics with news analysis using LSTM and GRU neural networks. By leveraging GDELT and the FinBERT model, the authors successfully isolated the impact of geopolitical and financial news on the crypto market, boosting 15-minute timeframe prediction accuracy from 53.2% to an impressive 77.8%. A key feature of this approach is the weekly adaptive retraining mechanism, which prevents model degradation, alongside the discovery of a 30-minute time lag for macroeconomic news to be fully reflected in price action. The scientific novelty centers on an automated weight adjustment algorithm that enables the system to maintain relevance within a chaotic market environment.

Keywords: cryptocurrency forecasting, Bitcoin, multimodal approach, recurrent neural networks, sentiment analysis, GDELT, adaptive learning, LSTM.

Отримано: 25.03.2026

Прийнято: 08.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.85:519.246

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).155-160](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).155-160)**О. С. Бурмей¹, П. П. Антосьяк²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу і теорії оптимізації
oleksandr.burmei@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-6192-9742>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу і теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук
pavlo.antosiak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7131-1795>

РОЛЬ КОНСТРУЮВАННЯ ОЗНАК У ПРОГНОЗУВАННІ РОЗДРІБНОГО ПОПИТУ: ВІД СТАТИСТИЧНИХ БАЗОВИХ МОДЕЛЕЙ ДО НЕЙРОННИХ АНСАМБЛІВ

У статті представлено порівняльне дослідження методів прогнозування роздрібно-го попиту на наборі даних Kaggle Store Sales [13] (1 782 часових ряди, 54 магазини $\times$ 33 товарні категорії). Зіставлено вісім методів — Seasonal Naive, Drift, Prophet, LightGBM, XGBoost, N-HiTS, PatchTST та ансамбль AutoGluon-TimeSeries — за точністю точкових прогнозів, імовірнісним калібруванням та виявленням стрибків попиту. За допомогою крос-валідації з ковзним вікном ($h = 15$ днів, 3 фолди) кожену модель оцінено у чотирьох конфігураціях виключення ознак. Градієнтний бустинг (LightGBM) досягає найкращої точності ($sMAPE_{\text{пз}} = 29,4\%$ проти $41,3\%$ для Seasonal Naive), зменшує похибку в промоційні періоди на 32% та забезпечує калібровані 80% -ві прогнозні інтервали (покриття = $79,8\%$). Моделі глибинного навчання досягають конкурентного $sMAPE_{\text{пз}}$ на високообігових категоріях ($13,6\text{--}17,4\%$), але генерують менш калібровані інтервали. Абляційний аналіз показав, що ковзні ознаки забезпечують приріст $\approx 1,5$ п. п. $sMAPE$, а промоційні — $\approx 0,7$ п. п.

Ключові слова: прогнозування попиту, роздрібна торгівля, градієнтний бустинг, глибинне навчання, імовірнісне прогнозування, промоційні ефекти, часові ряди, аналіз внеску компонентів.

1. Вступ. Прогнозування роздрібного попиту є фундаментальною задачею управління ланцюгами постачання, що безпосередньо впливає на поповнення запасів, оптимізацію знижок та планування ресурсів [1, 2]. Поширення деталізованих даних з точок продажу стимулювало перехід від традиційних статистичних методів (ETS, ARIMA) до машинного навчання і, нещодавно, до глибинного навчання [3]. Конкурс M5 [4] на ієрархічних даних Walmart продемонстрував домінування ансамблів на основі градієнтного бустингу (GBDT), зокрема LightGBM [5], у рейтингу точності, а супутній конкурс M5 Uncertainty підкреслив важливість каліброваних прогнозних інтервалів [6]. Водночас архітектури PatchTST [7] та N-HiTS [8] продемонстрували високу якість на стандартних бенчмарках, хоча їхні переваги на реальних роздрібних даних із промоційними ефектами залишаються недостатньо дослідженими.

Водночас у літературі бракує контрольованих експериментів з виключенням ознак, що ізолюють внесок промоційних, ковзних та календарних ознак. Практичні застосування також потребують каліброваних прогнозних інтервалів та виявлення стрибків попиту — задач, яким приділяється недостатньо уваги. Це

дослідження заповнює цю прогалину: порівнює сім сімейств моделей за єдиним протоколом без витоку даних, кількісно оцінює маргінальний внесок груп ознак через чотири конфігурації виключення та проводить багатозадачне оцінювання (точкові прогнози, імовірнісна якість, виявлення стрибків).

2. Дані та методологія. Використано набір даних **Store Sales — Time Series Forecasting** [13] з платформи Kaggle, опублікований компанією Corporación Favorita у межах однойменного змагання та поширюваний відповідно до умов використання Kaggle (Kaggle Competition Rules), які дозволяють некомерційне використання у дослідницьких цілях: щоденні обсяги продажів для 54 магазинів за 33 товарними категоріями в Еквадорі ($N = 1782$ унікальних часових ряди, $\sim 4,5$ року, 2013–2017). Цільова змінна — щоденні продажі $y_t^{(s,f)}$ для кожної пари (магазин s , категорія f); екзогенні змінні — бінарний індикатор промоакції, прапорці свят, ціна на нафту та метадані магазинів (тип, кластер, місто). Під час навчання застосовується перетворення $\tilde{y} = \log(1 + y)$ з оберненим $\hat{y} = \exp(\tilde{y}) - 1$ перед обчисленням метрик.

Ознаки організовано в чотири групи: *лагові* (лаги за 1, 7, 14, 28 днів), *ковзні* (середнє, стд. відхилення, макс., мін. за вікна 7 і 28 днів із зсувом на 1 день), *календарні* (день тижня, місяць, прапорці свят) та *промоційні* (індикатор промоакції, промо-лаги, взаємодія промо $\times$ день тижня). Додатково використано статичні ознаки магазинів (тип, кластер, місто).

Зіставлено вісім моделей: статистичні базові — Seasonal Naive, Drift, Prophet [9]; ML — LightGBM [5] (MAE + квантильна регресія, 50 спроб Optuna [12]), XGBoost [10]; DL — N-HiTS [8], PatchTST [7] (MQLoss, $q = 0,1; 0,5; 0,9$); AutoML — AutoGluon-TimeSeries [11]. Через обчислювальні обмеження DL та AutoGluon навчено на 10 найбільших категоріях (540 серій) і оцінено на останньому фолді.

Застосовано крос-валідацію з ковзним вікном (3 фолди, горизонт $h = 15$ днів). Метрики: точкові — MAE, RMSE, RMSLE, sMAPE_{nz} (sMAPE, обмежений спостереженнями з $y > 0$); імовірнісні — WIS для 80%-го інтервалу та емпіричне покриття; виявлення стрибків — PR-AUC з міткою $y_{\text{spike}} = 1$ при продажах $> P_{90}$ у межах кожної серії. Конфігурації виключення: **A** — без промоційних та святкових ознак; **B** — без ковзних ознак; **C** — лише статистичні моделі; **D** — повний набір ознак.

3. Результати. Таблиця 1 представляє результати на повній панелі з 1782 серій (конфігурація D, середнє за 3 фолди).

Таблиця 1.

Точкові прогнози на повній панелі (D, 1782 серії, середнє за 3 фолди)

Модель	sMAPE, %	sMAPE _{nz} , %	MAE	RMSE	RMSLE
LightGBM	54,2	29,4	57,2	212,6	0,379
XGBoost	53,0	29,5	58,6	217,1	0,380
Seasonal Naive	47,0	41,3	84,6	327,7	0,551
Drift	57,7	51,4	193,5	657,3	0,646
Prophet	65,0	47,3	389,0	2997,2	0,870

LightGBM досягає найнижчого sMAPE_{nz} (29,4%) — відносно покращення на 28,8% порівняно з Seasonal Naive (41,3%) та на 37,8% порівняно з Prophet

(47,3%). Розбіжність між необробленим sMAPE та sMAPE_{nz} підкреслює спотворення серіями з нульовими продажами, що обґрунтовує sMAPE_{nz} як основну метрику.

Таблиця 2 обмежує оцінювання підмножиною з 540 серій для безпосереднього порівняння з DL-моделями.

Таблиця 2.

Порівняння на підмножині 540 серій (останній фолд)

Модель	sMAPE _{nz} , %	MAE	RMSE	PR-AUC	Покр. ₈₀ , %	WIS
LightGBM	13,6	177,1	404,0	0,486	79,8	1247,7
XGBoost	13,7	176,9	400,2	0,483	0,0	3537,4
AutoGluon	16,3	242,2	556,5	0,417	85,3	1546,2
N-HiTS	16,8	230,5	497,9	0,381	0,0	4610,3
PatchTST	17,4	239,5	510,1	0,461	0,0	4790,7
Seasonal Naive	18,2	248,5	592,3	0,411	0,0	4969,3
Prophet	32,7	1186,6	5434,3	0,445	93,1	15812,9
Drift	33,9	581,3	1188,5	0,690	0,0	11626,1

LightGBM домінує за sMAPE_{nz}, MAE та WIS. DL-моделі перевершують Seasonal Naive, але поступаються GBDT: AutoGluon 16,3%, N-HiTS 16,8%, PatchTST 17,4%. Квантильна регресія LightGBM генерує калібровані 80%-ві інтервали (покриття 79,8%), тоді як AutoGluon перекриває (85,3%), Prophet — суттєво (93,1%), а DL-моделі без апостеріорного калібрування дають покриття $\approx 0\%$. LightGBM досягає найвищого PR-AUC (0,486) — на 18% більше за Seasonal Naive (рис. 1).

Figure 1: Model Comparison on Top-10 Families (540 series, h=15)

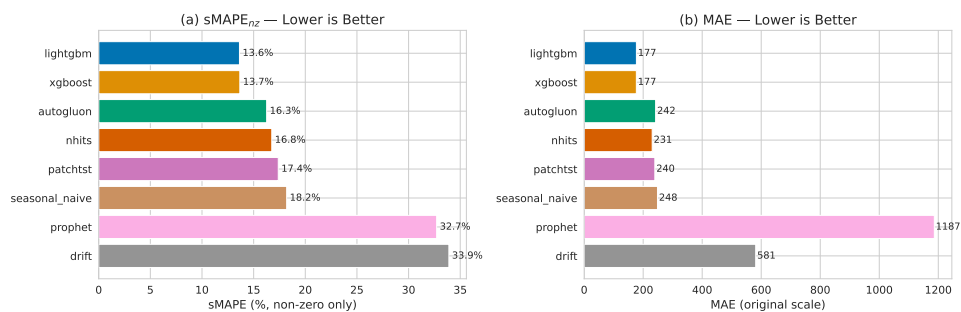


Рис. 1. Порівняння моделей за sMAPE_{nz}, MAE, PR-AUC та WIS на підмножині 540 серій (останній фолд)

У промоційні періоди GBDT зменшують sMAPE_{nz} на 32% відносно Seasonal Naive (19,2% проти 28,1%). DL-моделі мають нижчий sMAPE_{nz} у непромоційні періоди (14,5–16,7%), але суттєво вищий MAE під час промоакцій.

Таблиця 3 представляє результати аналізу виключення ознак для LightGBM на повній панелі.

Ковзні ознаки забезпечують приріст $\approx 1,5$ п. п. sMAPE_{nz} (30,9 $\rightarrow$ 29,4), промоційні — $\approx 0,7$ п. п. (30,1 $\rightarrow$ 29,4). Моделі лише зі статистичними методами (конфігурація C) суттєво слабші: Seasonal Naive 41,3%, Prophet 47,3%, Drift 51,4%.

Таблиця 3.

Аналіз виключення ознак LightGBM (середнє за 3 фолди, 1 782 серії)

Конфігурація	sMAPE _{nz} , %	MAE	RMSE	PR-AUC	WIS
D (Повний)	29,4	57,2	212,6	0,478	396,5
A (Без промо)	30,1	61,7	226,5	0,506	416,4
B (Без ковзних)	30,9	59,7	222,9	0,461	415,1

4. Обговорення та висновки. Результати підтверджують висновок конкурсу M5 [4]: добре налаштовані GBDT-моделі забезпечують найкращу точність на роздрібних даних. Перевага LightGBM пояснюється гнучкістю інтеграції гетерогенних ознак в єдиній моделі, ефективністю навчання на глобальній панелі при обмеженій кількості спостережень на серію та природною стійкістю до нульових продажів. DL-моделі досягають конкурентного sMAPE_{nz} на високообігових категоріях, але демонструють вищі абсолютні похибки та потребують апостеріорного калібрування інтервалів. Ансамбль AutoGluon (TFT: 53%, Chronos: 33%, ETS: 7%) є найбільш збалансованим серед DL, досягаючи покриття 85,3%.

Аналіз внеску компонентів виявляє ієрархію: лагові > ковзні > промоційні > календарні ознаки. Промоційні ознаки, попри скромний загальний внесок (0,7 п. п.), забезпечують 32%-ве зменшення похибки саме в промоційні періоди — найкритичніші для управління запасами.

Дослідження має обмеження: один набір даних, підвибірка для DL (540 серій, один фолд), відсутність явних коваріат у DL-моделях. Перспективні напрямки включають конформне прогнозування для калібрування DL-інтервалів та дослідження foundation-моделей часових рядів (Chronos, TimesFM).

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Набір даних Store Sales — Time Series Forecasting [13] є відкритим і доступним на платформі Kaggle відповідно до умов використання Kaggle (Kaggle Competition Rules) для некомерційних дослідницьких цілей. Код експериментів, конфігурації та результати доступні в репозиторії проєкту.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Бурмей О. С.: концептуалізація, методологія, програмна реалізація, проведення експериментів, аналіз даних, написання — оригінальний проєкт. Антосяк П. П.: супервізія, методологічні консультації, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Бурмей О. С., Антосяк П. П.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Fildes, R., Ma, S., & Kolassa, S. (2022). Retail forecasting: Research and practice. *International Journal of Forecasting*, 38(4), 1283–1318. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.06.004>
2. Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice (3rd ed.)*. Melbourne: OTexts. Retrieved from <https://otexts.com/fpp3/>
3. Lim, B., & Zohren, S. (2021). Time-series forecasting with deep learning: A survey. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 379(2194). <https://doi.org/10.1098/rsta.2020.0209>
4. Makridakis, S., Spiliotis, E., & Assimakopoulos, V. (2022). M5 accuracy competition: Results, findings, and conclusions. *International Journal of Forecasting*, 38(4), 1346–1364. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2021.11.013>
5. Ke, G., Meng, Q., Finley, T., Wang, T., Chen, W., Ma, W., Ye, Q., & Liu, T.-Y. (2017). LightGBM: A highly efficient gradient boosting decision tree. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, 3146–3154.
6. Gneiting, T., Balabdaoui, F., & Raftery, A. E. (2007). Probabilistic forecasts, calibration and sharpness. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 69(2), 243–268. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9868.2007.00587.x>
7. Nie, Y., Nguyen, N. H., Sinthong, P., & Kalagnanam, J. (2023). A time series is worth 64 words: Long-term forecasting with transformers. In *Proceedings of ICLR*.
8. Challu, C., Olivares, K. G., Oreshkin, B. N., Garza, F., Mergenthaler-Canseco, M., & Dubrawski, A. (2023). N-HiTS: Neural hierarchical interpolation for time series forecasting. In *Proceedings of AAAI*, 37(6), 6989–6997. <https://doi.org/10.1609/aaai.v37i6.25854>
9. Taylor, S. J., & Letham, B. (2018). Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72(1), 37–45. <https://doi.org/10.1080/00031305.2017.1380080>
10. Chen, T., & Guestrin, C. (2016). XGBoost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. (pp. 785–794). <https://doi.org/10.1145/2939672.2939785>
11. Shchur, O., Turkmen, A. C., Erickson, N., Shen, H., Shirkov, A., Hu, T., & Wang, B. (2023). AutoGluon-TimeSeries: AutoML for probabilistic time series forecasting. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Automated Machine Learning (AutoML)*, PMLR, 224, 9/1–21.
12. Akiba, T., Sano, S., Yanase, T., Ohta, T., & Koyama, M. (2019). Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. In *Proceedings of the 25th ACM SI-*

GKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. (pp. 2623–2631).
<https://doi.org/10.1145/3292500.3330701>

13. Corporación Favorita, Cook, A., DanB, inversion, & Holbrook, R. (2021). *Store Sales — Time Series Forecasting* [Data set and competition]. Kaggle. License: Kaggle Competition Rules. Retrieved from <https://www.kaggle.com/competitions/store-sales-time-series-forecasting>

Burmei O. S., Antosiak P. P. The role of feature engineering in retail demand forecasting: from statistical baselines to neural ensembles.

This paper benchmarks retail demand forecasting methods on the Kaggle Store Sales dataset [13] (1,782 time series, 54 stores $\times$ 33 product families). Eight methods — Seasonal Naive, Drift, Prophet, LightGBM, XGBoost, N-HiTS, PatchTST, and AutoGluon-TimeSeries — are compared on point accuracy, probabilistic calibration, and spike detection using rolling-origin cross-validation ($h = 15$ days, 3 folds) under four ablation configurations. LightGBM achieves the best accuracy ($\text{sMAPE}_{\text{nz}} = 29.4\%$ vs. 41.3% for Seasonal Naive), reduces promotional-period errors by 32%, and delivers well-calibrated 80% prediction intervals (coverage = 79.8%). Deep learning models achieve competitive sMAPE_{nz} on top-10 families (13.6–17.4%) but produce less calibrated intervals. Ablation analysis shows rolling features contribute ≈ 1.5 sMAPE pp and promotional features ≈ 0.7 pp.

Keywords: demand forecasting, retail, gradient boosting, deep learning, probabilistic forecasting, promotional effects, time series, ablation study.

Отримано: 02.04.2026

Прийнято: 17.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).161-164](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).161-164)**О. С. Веретьонкін**

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри прикладної статистики
alexveretenkin@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-4776-5333>

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕХНІЧНИМ БОРГОМ У ПРОЦЕСАХ РОЗРОБКИ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Технічний борг є одним із ключових чинників, що визначають довгострокову підтримуваність, швидкість еволюції та вартість супроводу програмних систем. Попри значну кількість досліджень, присвячених класифікації, вимірюванню та практикам управління технічним боргом, формалізовані моделі його динаміки залишаються недостатньо розробленими. У статті запропоновано компактную математичну модель керування технічним боргом у процесі розробки програмного забезпечення. Процес розробки інтерпретується як динамічна система з двома взаємопов'язаними потоками: реалізацією нової функціональності та усуненням технічного боргу. Враховано вплив накопиченого боргу на ефективну продуктивність команди, сформульовано умови стійкості системи та отримано оцінку частки ресурсів, яку доцільно спрямовувати на його погашення. Для практичної ілюстрації використано відкриті дані GitHub Issues для репозиторію Angular. Показано, що навіть спрощена інтерпретація моделі дає змогу виявляти тенденції до накопичення backlog і формувати кількісно обґрунтовані орієнтири для розподілу ресурсів у процесі розробки.

Ключові слова: технічний борг, стохастичне моделювання, оптимальне керування, GitHub Issues, backlog, рефакторинг.

1. Вступ. Технічний борг є важливим чинником, що визначає довгострокову підтримуваність і продуктивність програмних систем. Він виникає як наслідок компромісів між швидкістю розробки та якістю технічних рішень і з часом призводить до зростання вартості супроводу, ускладнення архітектури та сповільнення розвитку системи [1–3]. За оцінками McKinsey, суттєва частка ресурсів, призначених для розвитку цифрових продуктів, фактично витрачається на подолання наслідків накопиченого технічного боргу [8].

У сучасних дослідженнях технічний борг аналізується з позицій класифікації, практик управління, архітектурних рішень та емпіричного виявлення [4–7]. Однак формальні моделі, які описують його динаміку та дозволяють обґрунтовано визначати розподіл ресурсів між розробкою нової функціональності й рефакторингом, представлені обмежено.

Метою статті є побудова компактною моделі керування технічним боргом у процесі розробки програмного забезпечення, визначення умов стійкості такої системи та демонстрація можливості практичної інтерпретації моделі на основі відкритих даних GitHub.

2. Основний результат. У роботах Brown et al. [2] та Kruchten, Nord, Ozkaya [3] технічний борг розглядається як об'єкт системного керування, а не лише як метафора. Систематичний огляд Li, Avgeriou та Liang [4] показує, що більшість досліджень зосереджені на типології боргу, практиках його виявлення

та оцінювання. Емпіричні праці Ernst et al. [5] і Yli-Huumo et al. [6] засвідчують, що управління технічним боргом у командах є важливою, але недостатньо формалізованою практикою.

Окрему увагу дослідники приділяють архітектурним рішенням як джерелу довгострокового технічного боргу [7]. Це підтверджує доцільність побудови простих моделей, які дозволяють пов'язати накопичення боргу, продуктивність команди та політику розподілу ресурсів у межах єдиного формального опису.

2.1. Математична модель. Нехай $F(t)$ — кількість невиконаних feature-заявок у момент часу t , $D(t) \geq 0$ — обсяг накопиченого технічного боргу, $\lambda > 0$ — інтенсивність надходження нових задач, $\mu > 0$ — базова продуктивність команди. Позначимо через $u(t)$, $0 \leq u(t) \leq 1$, частку ресурсів, що спрямовується на усунення технічного боргу. Тоді частка $1 - u(t)$ використовується для реалізації нової функціональності.

Припустимо, що виконання feature-задач породжує технічний борг із середнім коефіцієнтом $\alpha > 0$, а накопичений борг знижує ефективну продуктивність команди відповідно до функції $g(D) = \exp(-kD)$, $k > 0$. За цих припущень динаміка системи описується рівняннями

$$\begin{cases} \frac{dF}{dt} = \lambda - (1 - u)\mu \exp(-kD); \\ \frac{dD}{dt} = \alpha(1 - u)\mu \exp(-kD) - u\mu. \end{cases}$$

Для формалізації задачі керування введемо функціонал витрат

$$J(u) = \int_0^T (c_1 F(t) + c_2 D(t)) dt,$$

де $c_1 > 0$ та $c_2 > 0$ задають вагу затримки реалізації функціональності та накопичення технічного боргу відповідно.

2.2. Умови стійкості та розподіл ресурсів. Із першого рівняння випливає умова стійкості системи:

$$\lambda < (1 - u)\mu.$$

Отже, середня швидкість надходження задач не повинна перевищувати ефективну швидкість їх виконання. Інакше backlog зростатиме необмежено, а система працюватиме в режимі перевантаження. У стаціонарному режимі з балансу генерації та погашення технічного боргу можна отримати оцінку частки ресурсів, яку доцільно спрямовувати на рефакторинг:

$$u^* \approx \frac{\alpha\lambda}{\mu + \alpha\lambda}.$$

Це співвідношення показує, що зі зростанням інтенсивності надходження нових задач або швидкості генерації боргу частка ресурсів на його усунення має зростати. Натомість підвищення продуктивності команди дає змогу зменшити u^* без втрати стійкості системи.

3. Емпірична ілюстрація. Для практичної апробації моделі використано відкриті дані GitHub Issues. Нехай $A(t)$ — кількість створених задач за період t ,

$C(t)$ — кількість закритих задач, $B(t)$ — накопичений backlog. Тоді емпірична динаміка описується співвідношенням:

$$B(t+1) = B(T) + A(T) - c(T).$$

На основі часових рядів для репозиторію Angular отримано наближені оцінки $\lambda \approx 134.69$ задач/місяць та $\mu \approx 113.38$ задач/місяць, що вказує на перевантажений режим функціонування. Для підмножини задач, інтерпретованих як технічний борг, отримано оцінку $\lambda_{td} \approx 4.94$ задач/місяць. Якщо в межах спрощеної інтерпретації покласти $\alpha = 1$, тоді

$$u^* \approx \frac{4.94}{113.38 + 4.94} \approx 0.042.$$

Отже, модельна оцінка вказує на доцільність спрямування близько 4–5% ресурсів команди на регулярне усунення технічного боргу. Цю величину слід розглядати як орієнтир першого наближення, а не як жорстку нормативну вимогу.

4. Висновки. Запропоновано компактну модель керування технічним боргом, яка дозволяє формалізувати взаємозв'язок між потоком нових задач, накопиченням технічного боргу та політикою розподілу ресурсів команди. У моделі сформульовано умову стійкості системи та отримано оцінку частки ресурсів, яку доцільно спрямовувати на рефакторинг.

Практична ілюстрація на основі GitHub Issues показала, що навіть спрощена емпірична інтерпретація моделі може бути корисною для виявлення тенденцій до накопичення backlog і підтримки рішень щодо керування ресурсами в процесі розробки програмного забезпечення.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що немає конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Під час підготовки статті інструменти штучного інтелекту використовувалися як допоміжний засіб, тоді як постановка та формулювання задачі, основні етапи розв'язання, аналіз даних, інтерпретація результатів та остаточна перевірка та валідація здійснювалися автором.

Авторські права ©



(2026). Веретьонкін О. С. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Brown, N., Cai, Y., Guo, Y., Kazman, R., Kim, M., Kruchten, P., Lim, E., MacCormack, A., Nord, R., Ozkaya, I., Sangwan, R., Seaman, C., Sullivan, K., & Zazworka, N. (2010). Managing technical debt in software-reliant systems. In *Proceedings of the FSE/SDP Workshop on Future of Software Engineering Research*. (pp. 47–52). <https://doi.org/10.1145/1882362.1882373>
2. Kruchten, P., Nord, R. L., & Ozkaya, I. (2012). Technical debt: From metaphor to theory and practice. *IEEE Software*, 29(6), 18–21. <https://doi.org/10.1109/MS.2012.167>
3. Li, Z., Avgeriou, P., & Liang, P. (2015). A systematic mapping study on technical debt and its management. *Journal of Systems and Software*, 101, 193–220. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2014.12.027>
4. Dalal, V., Krishnakanthan, K., Munstermann, B., & Patenge, R. (2020). Tech debt: Reclaiming tech equity. McKinsey Digital. Retrieved from <https://www.mckinsey.com/~media/McKinsey/Business%20Functions/McKinsey%20Digital/Our%20Insights/Tech%20debt%20Reclaiming%20tech%20equity/Tech-debt-Reclaiming-tech-equity.pdf>
5. Soliman, M., Avgeriou, P., & Li, W. (2021). Architectural design decisions that incur technical debt: An industrial case study. *Information and Software Technology*, 137, Article 106669. <https://doi.org/10.1016/j.infsof.2021.106669>
6. Yli-Huumo, J., Maglyas, A., & Smolander, K. (2016). How do software development teams manage technical debt? An empirical study. *Journal of Systems and Software*, 120, 195–218. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2016.05.018>

Veretonkin O. S. Optimal Control Model of Technical Debt in Software Development Processes.

Technical debt is one of the key factors that determine the long-term maintainability, evolution speed, and support cost of software systems. Despite a considerable number of studies devoted to the classification, measurement, and management of technical debt, formalized models of its dynamics remain insufficiently developed. This paper proposes a compact mathematical model for technical debt management in software development processes. The development process is interpreted as a dynamic system with two interrelated flows: implementation of new functionality and technical debt reduction. The model takes into account the impact of accumulated debt on the effective productivity of the development team, formulates system stability conditions, and provides an estimate of the share of resources that should be allocated to technical debt reduction. For practical illustration, open GitHub Issues data from the Angular repository are used. The results show that even a simplified interpretation of the model makes it possible to identify backlog accumulation trends and derive quantitatively grounded guidelines for resource allocation in the development process.

Keywords: technical debt, stochastic modeling, optimal control, GitHub Issues, backlog, refactoring.

Отримано: 25.03.2026

Прийнято: 10.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.7+517

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).165-172](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).165-172)**Г. М. Гнатієнко¹, О. Г. Гнатієнко²**

¹ Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
заступник декана з наукової роботи факультету інформаційних технологій,
кандидат технічних наук
g.gna5@ukr.net

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0465-5018>

² Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
аспірант кафедри інформаційних систем та технологій
oleksii.hnatiienko@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8546-5074>

СХЕМА РОЗПОДІЛЕНОГО ОБЧИСЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ У ЗАДАЧАХ КОЛЕКТИВНОГО РАНЖУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Дослідження присвячене розробці схем розподіленого обчислення компромісних розв'язків у задачах колективного ранжування з використанням модифікованого генетичного алгоритму. Сформульовано постановку задачі колективного ранжування альтернатив. Розглянуто галузі застосування задач колективного ранжування. Наведено класифікацію методів розв'язання задач колективного ранжування. Формалізовано постановку задачі визначення колективного упорядкування альтернатив. Обґрунтовано алгебраїчний метод визначення медіани ранжувань. Запропоновано модифікацію генетичного алгоритму з урахуванням особливостей задач ранжування. Розроблено розподілений генетичний алгоритм обчислення компромісного ранжування. Розглянуто острівну модель генетичного алгоритму для задач ранжування. Передбачено використання методу ближнього пошуку в задачах ранжування великої розмірності.

Ключові слова: розподілені обчислення, генетичний алгоритм, задачі колективного ранжування альтернатив, експертне оцінювання, класичні методи голосування, алгоритм ближнього пошуку.

1. Вступ. Більшість проблем у різноманітних сферах людської життєдіяльності виникає від необґрунтовано здійснення експертного оцінювання ситуацій прийняття рішення та невірно визначених пріоритетів. Ефективним інструментом структурування інформації є, зокрема, ранжування альтернатив за деякими критеріями [1]. Ці інструменти успішно застосовуються у найрізноманітніших сферах сучасної життєдіяльності і є фундаментальною складовою роботи пошукових систем, рекомендаційних сервісів, соціальних мереж та електронної комерції.

У сучасному інформаційному просторі ефективна організація даних набуває вирішального значення. Ранжування об'єктів є ключовим елементом функціонування пошукових систем, рекомендаційних платформ, соціальних мереж, електронної комерції тощо. У сфері машинного навчання задачі ранжування також посідають важливе місце, оскільки дають змогу автоматично формувати оптимальні рейтинги на основі наявних даних. Без належної аналітичної підтримки особи, що приймають рішення, використовують спрощені, а інколи застосовують суперечливі та необґрунтовані методи прийняття рішень.

Ранжування альтернатив є розповсюдженим та зручним способом експертного оцінювання, оскільки усі задані у ранжуванні відношення є взаємопов'язаними і підвищити чи знизити результати відносного оцінювання альтернатив

можна лише за рахунок інших альтернатив. Особливістю задач ранжування альтернатив є жорсткі обмеження на множину допустимих розв'язків — попарна нерівність усіх елементів вектора розв'язку. Такі жорсткі обмеження не дають можливості експертам здійснювати усереднення оцінок, і через те є однією з перешкод до маніпулювання результатами, а також деяким чином передбачають об'єктивізацію експертного оцінювання.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій. Коротко перелічимо основні галузі застосування задач ранжування:

- пошукові системи, зокрема, впорядкування веб-сторінок за релевантністю запиту;
- рекомендаційні системи при побудові персональних рейтингів товарів або контенту;
- соціальні мережі – для формування стрічки новин тощо;
- електронна комерція: сортування товарів за популярністю, одержаними відгуками тощо;
- аналітичні системи, зокрема, при визначенні пріоритетів інформації для обґрунтування прийняття рішень;
- різні моделі та інтерпретації задачі комівояжера тощо.

Класифікація методів розв'язання задач колективного ранжування. Більшість практично значущих задач ранжування належать до класу NP-складних. Для таких задач на сьогодні відсутні ефективні точні алгоритми розв'язання. Це стосується вирішення реальних проблем, а не тестових чи демонстраційних прикладів.

2.1. Точні методи. Для вирішення цієї проблеми традиційно застосовуються точні методи дискретної оптимізації, включаючи задачі ранжування:

- прямий перебір можливих варіантів розв'язку [1];
- метод гілок та меж, розроблений Лендом та Дойгом [2, 3], який ґрунтується на систематичному переборі [4] можливих розв'язків з відсіканням неперспективних гілок дерева пошуку [5, 6];
- схема послідовного аналізу варіантів, загальний формалізм якої запропоновано В. С. Михалевичем та Н. З. Шором [7, 8], а для задач ранжування успішно застосовано Гнатієнком Г. М. [9, 10].

Але при застосуванні точних методів розв'язання задач ранжування існують суттєві обмеження при обчисленні розв'язків задач, які мають велику розмірність. При цьому точні методи оптимізації є важливим інструментом розв'язання спеціалізованих задач ранжування, хоча на сьогодні їх практичне застосування обмежене обчислювальною складністю. У зв'язку з цим такі методи є менш популярними порівняно з методами машинного навчання для більшості прикладних задач.

2.2. Спрощені методи розв'язання задач колективного ранжування.

Метод середніх арифметичних рангів. Для цього обчислюється сума рангів альтернатив. Після цього сума ділиться на кількість експертів, що для кожної альтернативи відповідає середньому арифметичному рангу. За обчисленими таким чином середніми рангами будується підсумкове ранжування — менші значення середніх рангів відповідають кращим альтернативам [11].

Метод медіан рангів. Оскільки відповіді експертів вимірюються в порядковій шкалі, то для них неправомірно проводити усереднення методом середніх арифметичних. Відомо, що для порядкових шкал коректним є знаходження середніх значень у вигляді медіан. При цьому медіани обчислюються за звичайними правилами статистики, зокрема, для парної кількості центральних членів варіаційного ряду – як їхнє середнє арифметичне [11].

Класичні методи голосування [12]: по Кондорсе, Борда, Сімпсону, Нансону, Копленду, Кемені-Янгу, Тайдеману, Шульце, Болдуїну, відносної більшості, альтернативних голосів тощо [13, 14].

Модифіковані медіани, які визначаються не на усій множині можливих ранжувань, а лише на множині ранжувань, заданих експертами [15, 16]. Кука-Сейфорда, ГВ-медіана, медіана Кемені-Снелла, ВГ-медіана, медіани Литвака та ЛК-медіани, обчислювальна складність яких є невеликою [17, 18].

2.3. Еволюційні методи визначення результуючого ранжування. Після вирішення проблеми забезпечення обмежень на вид розв'язків задачі, які мають бути ранжуваннями, тобто перестановками чисел від 1 до n , успішно застосовуються ідеї еволюційних обчислень [19]. Зазначимо, що добре досліджено та продовжує успішно розвиватися ціле сімейство методів та алгоритмів еволюційних обчислень:

Тому на сьогодні широкої популярності набули еволюційні та метаевристичні методи:

- різні варіації генетичного алгоритму (ГА);
- мурашині алгоритми;
- модифікований метод деформованих зірок;
- адаптовані бджолині алгоритми;
- метод імітація відпалу;
- методи оптимізації роєм часток тощо.

3. Постановка задачі. Нехай k експертів з індексами $l \in L = \{1, \dots, k\}$ здійснюють упорядкування n альтернатив з множини A , $a_i \in A$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$. Будемо позначати через $R^i = (r_1^i, \dots, r_n^i)$ ранжування альтернатив, одержане від i -го експерта. Задача полягає у визначенні такого результуючого упорядкування альтернатив, яке буде у якомусь сенсі найближчим до усіх заданих експертами ранжувань.

Найбільш обґрунтованими та найпопулярнішими при розв'язанні таких задач є алгебраїчний підхід. Суть цього підходу полягає в тому, що на множині допустимих оцінок задається відстань і результуюча оцінка визначається як така, відстань якої до експертних оцінок за деяким вибраним критерієм є оптимальною.

Будемо визначати відстані між ранжуваннями альтернатив з використанням метрики Кука неспівпадання рангів альтернатив у індивідуальних ранжуваннях [20, 21]:

$$d(R^j, R^l) = \sum_{i \in I} |r_i^j - r_i^l|, \quad (1)$$

де r_i^l — ранг i -ої альтернативи у ранжуванні l -го експерта R^l , $l \in L$, $1 \leq r_i^l \leq n$.

Для метрики Кука (1) при використанні адитивного критерію обчислюється

медіана Кука-Сейфорда:

$$R^{KS} \in \Omega^{KS} = \operatorname{Arg} \sum_{R \in \Omega^n} \max_{l \in L} d(R, R^l), \quad (2)$$

а при застосуванні мінімаксного критерію — компромісна медіана, яка ще має назву HV-медіана:

$$R^{HV} \in \Omega^{HV} = \operatorname{Arg} \min_{R \in \Omega^n} \max_{l \in L} d(R, R^l), \quad (3)$$

Символами Ω^{KS} та Ω^{HV} позначено множину медіан відповідно Кука-Сейфорда або компромісних, тобто ранжувань, еквівалентних за критерієм (2) або за критерієм (3), оскільки у загальному випадку розв'язок є не єдиним.

4. Одержані результати дослідження.

4.1. Модифікований генетичний алгоритм. Оскільки задача визначення колективного ранжування є специфічною і містить достатньо жорсткі обмеження, для її розв'язання слід внести суттєві зміни до ГА.

Основними інструментами, які забезпечують успішне застосування ГА є:

- оператор кросоверу;
- оператор мутації;
- стратегія селекції;
- стратегія формування нового покоління;
- вибір критеріїв зупинки ГА тощо.

Кожен із зазначених елементів управління результативністю застосування ГА вимагає модифікації з метою врахування особливостей задачі ранжування в цілому та визначення колективного ранжування зокрема. Особливості застосування ГА для задач ранжування було розроблено авторами і описано, зокрема, в роботах [15, 22].

4.2. Схема застосування розподіленого ГА для визначення компромісного ранжування. Для задач ранжування, які характеризуються великими розмірностями, доцільно використовувати можливості паралельних та розподілених обчислень. Авторами було розроблено схему розподіленого модифікованого ГА, яка представлена на рисунку 1.

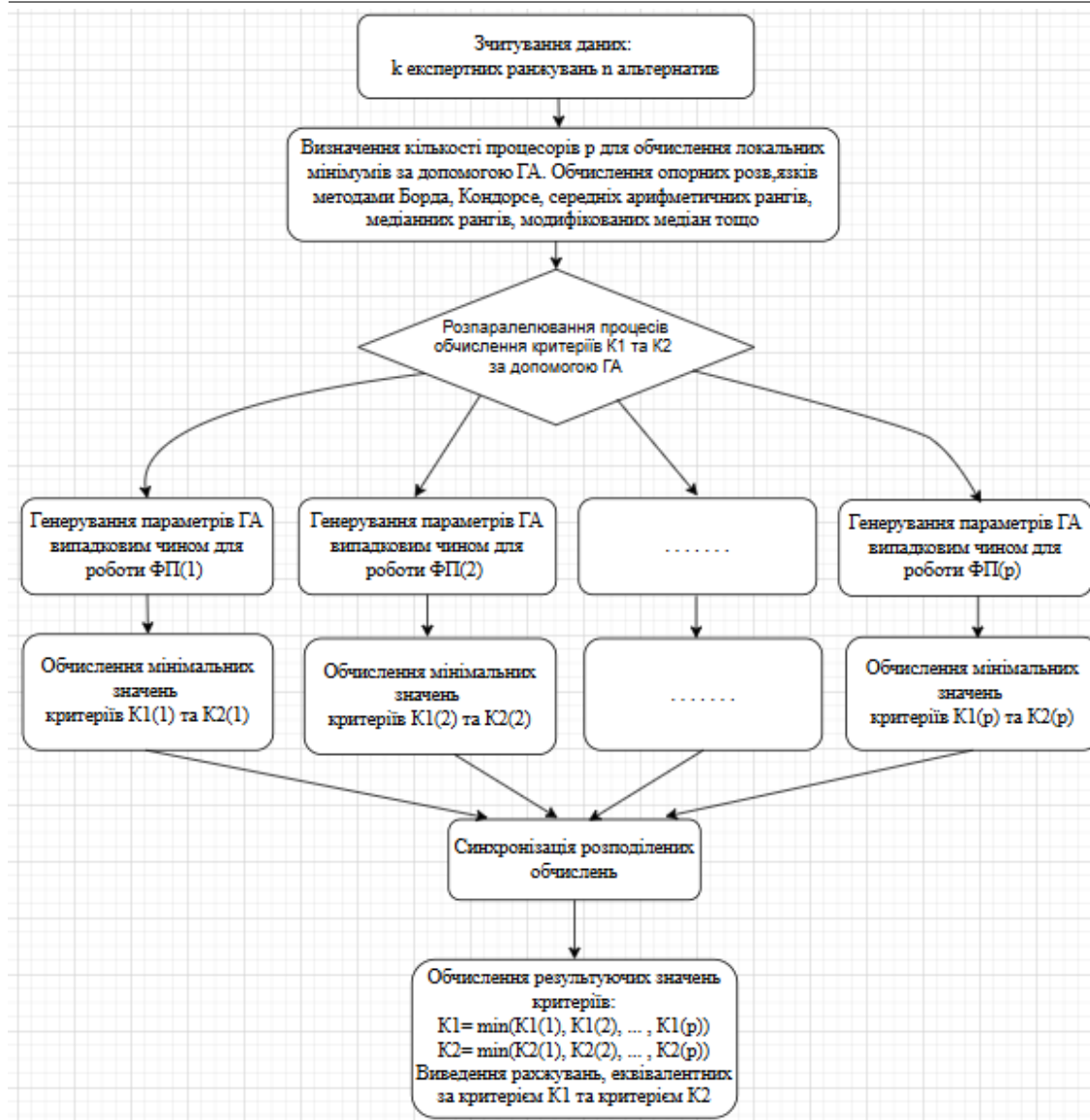


Рис. 1. Схема розподіленого обчислення компромісного ранжування за допомогою модифікованого генетичного алгоритму.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У цій роботі досліджено особливості різних аспектів та особливості задач колективного ранжування альтернатив. Запропоновано схему розподіленого обчислення колективного ранжування альтернатив за допомогою модифікованого ГА. Перспективним напрямом досліджень є використання ГА в комбінації з розробленим авторами алгоритмом ближнього пошуку у поєднанні з класичними методами теорії голосувань як опорних варіантів на початкових етапах застосування ГА. Крім того, для описаної задачі ефективною буде також застосування острівної моделі розподіленого ГА.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Гнатієнко Г. М.: методологічні консультації, написання — рецензування та редагування. Гнатієнко О. Г.: концептуалізація, формальний аналіз, написання — оригінальний проєкт.

Авторські права ©



(2026). Гнатієнко Г. М., Гнатієнко О. Г. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Hnatiienko, H. M., & Snytyuk, V. Ye. (2008). *Expert Decision-Making Technologies: Monograph*. Kyiv: Maklout.
2. Land, A. H., & Doig, A. G. (1960). An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520. <https://doi.org/10.2307/1910129>
3. Laporte, G. (2025). A seminal contribution of Ailsa Land and Alison Doig Harcourt to the field of mathematical programming. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 67(4), 463–471. <https://doi.org/10.1111/anzs.12439>
4. Encz, K. I., Mastrolilli, M., & Vercesi, E. (2025). Branch-and-bound algorithms as polynomial-time approximation schemes. In *Proceedings of the 52nd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2025)*. Dagstuhl, 334, 73:1–73:19. <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.ICALP.2025.73>
5. Guo, W., Vanhoucke, M., & Coelho, J. (2023). A prediction model for ranking branch-and-bound procedures for the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 306(2), 579–595. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2022.08.042>
6. Huang, Z., & et al. (2023). Branch ranking for efficient mixed-integer programming via offline ranking-based policy learning. In *Amini M. R. et al. (eds.). Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases*. Cham: Springer, 13717. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26419-1_23

7. Mykhalevych, V. S. (1965). Sequential optimization algorithms and their application. *Cybernetics*, (1), 45–55.
8. Mykhalevych, V. S. (1965). Sequential optimization algorithms and their application. *Cybernetics*, (2), 85–89.
9. Hnatiienko, H. M. (2001). Sequential algorithms for finding a strict compromise ordering of objects in ranking problems. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, (4), 218–225.
10. Hnatiienko, H. M. (2005). Procedure of sequential analysis and elimination of alternatives considering acyclicity of the solution. *Proceedings of Kirovohrad National Technical University*, 16, 294–299.
11. Voloshyn, O. F., & Mashchenko, S. O. (2018). *Models and Methods of Decision Making: Textbook. 3rd ed., revised*. Kyiv: Liudmyla Publishing House. Retrieved from <https://elib.chdtu.edu.ua/e-books/4143>
12. Elkind, E., Faliszewski, P., & Slinko, A. (2015). Distance rationalization of voting rules. *Social Choice and Welfare*, 45(2), 345–377. <https://doi.org/10.1007/s00355-015-0892-5>
13. Wu, Z., & Tu, J. (2021). Managing transitivity and consistency of preferences in AHP group decision making based on minimum modifications. *Information Fusion*, 67, 125–135. <https://doi.org/10.1016/j.inffus.2020.10.012>
14. Hudry, O. (2013). Complexity of computing median linear orders and variants. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 42, 57–64. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2013.05.146>
15. Hnatiienko, H., Tmienova, N., & Kruglov, A. (2021). Methods for determining the group ranking of alternatives for incomplete expert rankings. In *Shkarlet S. et al. (eds.). Mathematical Modeling and Simulation of Systems*. Cham: Springer, 1265, 217–226. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58124-4_21
16. Bury, H., & Wagner, D. (2007). Zastosowanie mediany Litvaka do wyznaczania oceny grupowej w przypadku występowania obiektów równoważnych. *Studia i Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą*, 10, 19–34.
17. Hnatiienko H., & et al. (2020). Greenhouse gas emission determination based on the pseudo-base matrix method for environmental pollution quotas between countries allocation problem. In *Proceedings of the IEEE SAIC. Kyiv*, 150–157. <https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239125>
18. Bozóki, S., & Tsyganok, V. (2019). The (logarithmic) least squares optimality of the arithmetic (geometric) mean of weight vectors calculated from all spanning trees for incomplete pairwise comparison matrices. *International Journal of General Systems*, 48(4), 362–381. <https://doi.org/10.1080/03081079.2019.1585432>
19. Snytyuk, V., & Tmienova, N. (2020). Method of deformed stars for global optimization. In *Proceedings of the IEEE SAIC. Kyiv*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/SAIC51296.2020.9239208>
20. Cook, W. D. (2006). Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking. *European Journal of Operational Research*, 172, 369–385.
21. Amodio, S., D'Ambrosio, A., & Siciliano, R. (2015). Accurate algorithms for identifying the median ranking under the Kemeny approach. *European Journal of Operational Research*, 249, 667–676.
22. Hnatiienko, H., & et al. (2022). Mathematical support of the task of determining the strategic directions of development and priorities of the organization. In *CEUR Workshop Proceedings*, 3347, 169–184.

Hnatiienko H. M., Hnatiienko O. H. Distributed Computation of Compromise Solutions in Collective Ranking Problems Using a Genetic Algorithm.

The research is devoted to the development of schemes for distributed calculation of compromise solutions in collective ranking problems using a modified genetic algorithm. The statement of the problem of collective ranking of alternatives is formulated. The areas of application of collective ranking problems are considered. The classification of methods for solving collective ranking problems is given. The statement of the problem of determining the collective ordering of alternatives is formalized. The algebraic method for

determining the median of rankings is substantiated. A modification of the genetic algorithm is proposed, taking into account the peculiarities of ranking problems. A distributed genetic algorithm for calculating compromise ranking is developed. An island model of the genetic algorithm for ranking problems is considered. The use of the proximity search method in high-dimensional ranking problems is envisaged.

Keywords: distributed computing, genetic algorithm, collective alternative ranking problems, expert evaluation, classical voting methods, proximity search algorithm.

Отримано: 01.04.2026

Прийнято: 17.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 004.75:37.018.43

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).173-180](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).173-180)**T. Hombosh¹, P. Mulesa²**¹ Uzhhorod National University,

PhD student of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics

tomash.hombosh@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-6282-7689>² Uzhhorod National University,

Head of the Department of Cybernetics and Applied Mathematics,

Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor

pavlo.mulesa@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3437-8082>

STREAM EVENT PROCESSING PATTERNS FOR SCALING INTERACTIVE LEARNING ENVIRONMENTS: A COMPARATIVE ANALYSIS OF REDIS PUB/SUB, REDIS STREAMS, AND APACHE KAFKA

This article explores how to best structure real-time stream event processing to handle the increasing demands of interactive learning environments. We've noticed that as more and more users jump into collaborative coding and interactive whiteboard sessions, traditional methods like Redis Pub/Sub are starting to show their limits. The problem? Packet loss and events arriving out of order. This is a big deal when you're trying to keep things synchronized using algorithms like Conflict-free Replicated Data Types (CRDT) and Operational Transformation (OT). So, we ran a comparison of three message broker technologies—Redis Pub/Sub, Redis Streams, and Apache Kafka—in a microservice setup using NestJS and Socket.IO. We also came up with a way to categorize interactive learning events into three groups based on how often they happen and how reliable and ordered they need to be. Finally, we put together six key criteria for picking the right message broker for educational situations where there's a lot of back-and-forth. This forms the core of our research. An architectural pattern for Event Sourcing, leveraging Redis Streams as the definitive source for real-time collaborative sessions, is presented alongside a client reconnection strategy. Its practical value lies in delivering an accessible and easily replicated toolkit, integrated with Learning Management Systems, that guarantees robust synchronization, even with the fluctuating network conditions typical in student environments.

Keywords: interactive learning, event-driven architecture, Redis Streams, Apache Kafka, CRDT, microservices, Socket.IO, real-time synchronization.

1. Introduction. The modern educational paradigm is increasingly shifting towards active, interactive learning, where students participate directly in their own learning process. The development of specialized tools for interactive learning – collaborative code editors, shared whiteboards, and gamified assessment systems – requires software architectures capable of processing thousands of events per second while maintaining strict consistency guarantees [8].

Previous research established the transition from monolithic solutions to microservice architecture using the NestJS, Socket.IO, and Redis stack for basic real-time interaction, as well as the implementation of CRDT and OT algorithms for state coordination [1]. However, as the system scales – when the number of students in a shared workspace grows during collaborative activities such as joint code editing or interactive drawing – the basic Publish/Subscribe pattern based on Redis Pub/Sub exhibits significant limitations. The absence of persistence leads to packet

loss During brief connection interruptions, and the lack of ordering guarantees destroys the consistency of CRDT structures, causing irreversible state divergence across replicas.

The **goal** of this article is to develop criteria for selecting and applying message broker architectural patterns for scaling interactive learning environments with high-frequency events.

The **objectives** are: (1) to classify event types by frequency, reliability, and ordering requirements; (2) to conduct a comparative analysis of Redis Pub/Sub, Redis Streams, and Apache Kafka within a NestJS and Socket.IO microservices context; (3) to formulate broker selection criteria for educational high-frequency interaction scenarios; (4) to propose architectural patterns for guaranteed delivery and causal ordering of events to ensure CRDT consistency.

2. Review of Related Work. The problem of scaling WebSocket connections and state synchronization in distributed systems has been actively studied in the context of IoT and financial technologies. However, educational platforms (LMS) have a specific load profile: pronounced session-based patterns (high load during lectures, near-zero at night), a high frequency of small events (cursor movements, individual keystrokes), and the critical importance of causal event ordering for collaborative work. Kleppmann et al. [3] demonstrated that even a theoretically correct CRDT implementation diverges if the event delivery mechanism does not guarantee causal ordering. Almeida [4] surveys CRDT families and highlights that operation-based CRDTs require exactly-once, causally ordered delivery – a requirement Redis Pub/Sub cannot satisfy in multi-node deployments. David et al. [5] showed that under 1% packet loss, Pub/Sub systems experienced divergence in over 12% of collaborative sessions. Srivastava et al. [6] confirmed that Redis, Kafka, and RabbitMQ occupy distinct niches in the latency-throughput-reliability trade-off. Kreps et al. [7] established the append-only log model underlying both Kafka and Redis Streams. Newman [8] provides the microservices and EDA framework underpinning the proposed solution. The gap in existing research is the absence of broker selection criteria adapted to educational platforms, addressed in Section 5.

3. Classification of Events in Interactive Learning Environments. We propose a three-tier classification of LMS events (Table 1).

The three-tier model provides the foundation for the selection criteria formulated in Section 6.

4. Comparative Analysis of Message Brokers.

4.1. Redis Pub/Sub. Used as a “fire-and-forget” adapter between WebSocket server instances. *Advantages:* sub-millisecond latency, zero configuration. *Limitations:* no persistence, no replay, no ordering guarantee across nodes. *Verdict:* suitable only for *Ephemeral Presence* events.

4.2. Redis Streams. An append-only log with Consumer Groups (Redis 5.0) [9]. *Advantages:* in-memory persistence, replay via **XRANGE**, strict ordering within a single stream, 1–3 ms latency. *Ordering caveat:* in sharded or clustered Redis deployments, cross-stream ordering is not guaranteed; Consumer Group re-delivery on failure may cause out-of-order processing, requiring application-level sequence validation [9]. *Limitations:* RAM-bounded; requires export for long-term retention. *Verdict:* optimal for *Collaborative Editing (CRDT/OT)*.

4.3. Apache Kafka. A distributed log for high-throughput durable storage [7].

Table 1.

Classification of events in interactive learning environments

Event Type	Examples	Frequency (per user)	Ordering Requirement	Loss Tolerance
Ephemeral presence	Cursor movement, “typing...” status, online/offline indicator	Very high (10–30 ev/s)	Low (only the latest state matters)	High (intermediate frames non-critical)
Collaborative editing (CRDT/OT)	Character insertion in code, vector addition on whiteboard, shape resize	Medium (1–5 ev/s)	Critical (strict causal order required)	None (causes irreversible state divergence)
Analytics and assessment	Test answer submission, page navigation, session start/end	Low (<1 ev/s)	Medium (chronological)	None (affects student grade and audit trail)

Exactly-once semantics are achievable only under specific conditions: `enable.idempotence=true`, transactional producer APIs, and coordinated consumer configuration; this guarantee is scoped to individual partitions and does not extend to side effects outside the broker. *Advantages*: guaranteed persistence, horizontal scaling, terabyte-scale analytics. *Limitations*: 10–50 ms latency, high operational complexity (ZooKeeper/KRaft). *Verdict*: optimal for *Analytics and Assessment* and asynchronous LLM hint generation [2].

5. Architectural Patterns for Guaranteed Delivery and Causal Ordering.

5.1. Event Sourcing with Redis Streams as Single Source of Truth.

The pipeline proceeds as follows: (1) a client generates a CRDT operation and sends it via Socket.IO to the nearest NestJS Gateway; (2) the Gateway writes it to a room-specific Redis Stream (`room:123:events`) via `XADD` — not directly to clients; (3) Redis assigns a monotonically increasing ID, fixing global order; (4) all Gateway instances consume the stream via `XREAD` and forward events to clients via WebSocket. This decouples production from consumption and ensures all replicas process events in the same monotonic order within a single non-sharded stream — a necessary precondition for CRDT convergence. Applications requiring cross-stream causal ordering must additionally implement vector clocks or Lamport timestamps at the application layer.

5.2. Catch-Up Mechanism for Reconnecting Clients. Each client stores the last received event ID. On reconnection, the server queries `XRANGE room:123:events $lastId +` and returns all missed events in order. The client applies them sequentially — orders of magnitude less data than a full state snapshot for a typical 1000-operation session.

5.3. NestJS Implementation. Listing 1 illustrates the core Gateway logic for writing a collaborative editing event to a Redis Stream using the `ioredis` library

Table 2.

Comparative characteristics of message brokers for interactive learning

Criterion	Redis Pub/Sub	Redis Streams	Apache Kafka
Latency	<1 ms (best)	1–3 ms (excellent)	10–50 ms (acceptable)
Delivery guarantee	None (at-most-once)	At-least-once; Consumer Groups may re-deliver on failure	Exactly-once within a partition under idempotent producer and transactional API configuration only
Event ordering	Not guaranteed across nodes	Strict within a single stream; not guaranteed across shards or in Consumer Group redelivery scenarios	Strict within a partition; requires idempotent producer configuration
Persistence	None	Temporary (session)	Long-term (years)
Replay on reconnect	Not supported	Supported (XRANGE)	Supported (offset reset)
Target LMS scenario	Cursor broadcast, mic status	Collaborative editing, CRDT	Test results, LLM analytics
Infrastructure cost	Low	Medium (RAM-bound)	High (Disk I/O, CPU)

in a NestJS service.

5.4. Hybrid Broker Architecture. Based on the event classification in Section 3 and the broker analysis in Section 4, we propose a hybrid architecture that assigns each event category to the most appropriate broker (Fig. 2).

6. Selection Criteria for Message Brokers in Educational Scenarios. Existing broker comparison frameworks [6, 8] address general distributed systems without accounting for the specific constraints of educational platforms: session-based bursty load, tolerance for ephemeral event loss, and the causal ordering requirements of CRDT algorithms. The following six criteria are formulated specifically for this context, constituting the **scientific novelty** of the study.

Criterion 1: Latency threshold. Latency must not exceed 50–100 ms for synchronous activities [3]. Redis Pub/Sub and Streams satisfy this unconditionally; Kafka requires tuning.

Criterion 2: Ordering guarantee scope. CRDT convergence requires causal ordering within a session. Redis Streams guarantees this within a stream; Kafka within a partition; Pub/Sub does not.

Criterion 3: Reconnection support. Transient disconnections require catch-up replay. Redis Streams and Kafka support this natively; Pub/Sub does not.

Criterion 4: Session-based load profile. Educational load is bursty. Redis

```

@WebSocketGateway()
@Injectable()
export class CollabGateway {
  constructor(private readonly redis: Redis) {}

  @SubscribeMessage('crdt:operation')
  async handleCrdtOp(
    @ConnectedSocket() client: Socket,
    @MessageBody() payload: CrdtOperationDto,
  ): Promise<void> {
    const streamKey = `room:${payload.roomId}:events`;
    const eventId = await this.redis.xadd(
      streamKey, '*', 'type', payload.type,
      'clientId', client.id, 'data',
      JSON.stringify(payload.data),
      'clock', payload.vectorClock,
    );
    await this.redis.xtrim(
      streamKey, 'MAXLEN', '~', 10000
    );
  }
}

```

Figure 1. NestJS Gateway: writing a CRDT operation to Redis Streams.

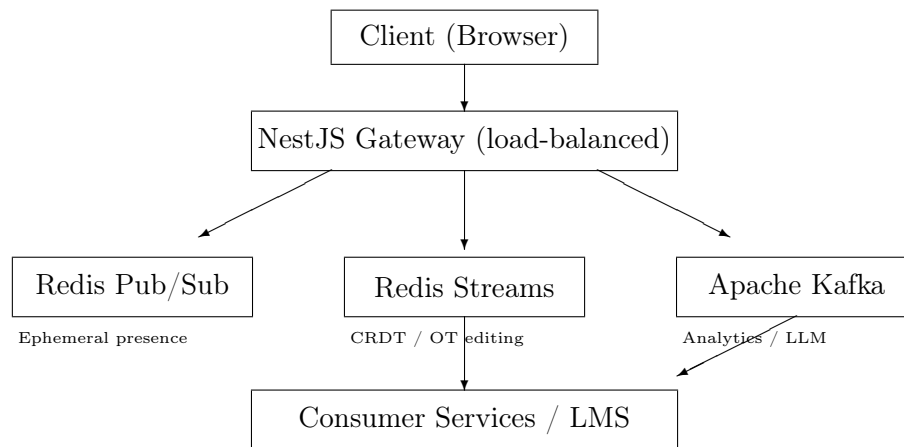


Figure 2. Hybrid message broker architecture for interactive learning environments.

Streams scales with RAM; Kafka requires a pre-provisioned dedicated cluster.

Criterion 5: Operational complexity budget. Redis Streams deploys within an existing Redis instance; Kafka requires ZooKeeper/KRaft, monitoring, and schema registry.

Criterion 6: Data retention requirements. Grades require 1–5 years re-

tention. Kafka provides this natively; Redis Streams requires periodic export to PostgreSQL or S3.

Applying these criteria to the three-tier event classification yields the broker assignment summarised in Table 3.

Table 3.

Broker selection matrix for interactive learning event categories

Event Category	Recommended Broker	Decisive Criteria
Ephemeral presence	Redis Pub/Sub	Criterion 1 (latency <1 ms); loss tolerance is high; no ordering needed
Collaborative editing (CRDT/OT)	Redis Streams	Criteria 1, 2, 3 (low latency + strict ordering + reconnection catch-up)
Analytics and assessment	Apache Kafka	Criteria 6, 2 (long-term retention + partition-level ordering + exactly-once under transactional configuration)

7. Experimental Modelling and Expected Results. The test environment consists of three NestJS instances, an Nginx load balancer, a Redis cluster, and a Kafka cluster in Docker Compose (32 GB RAM, 8 CPU cores), simulating 1000 concurrent students across 50 rooms at 5 events/s each (5000 events/s total) with 1% packet drop and 20 ms jitter via `tc netem`.

The end-to-end latency T for a CRDT operation is modelled as:

$$T = T_{\text{client}} + T_{\text{network}} + T_{\text{gateway}} + T_{\text{broker}} + T_{\text{fan-out}}, \quad (1)$$

where T_{client} is the client-side serialisation time, T_{network} is the round-trip network time, T_{gateway} is the NestJS processing time, T_{broker} is the broker write and read time, and $T_{\text{fan-out}}$ is the time to broadcast the confirmed event to all room participants via Socket.IO.

The synchronisation reliability metric R is defined as the fraction of collaborative sessions that maintain full CRDT consistency (zero divergence) over a 30-minute session:

$$R = 1 - \frac{N_{\text{diverged}}}{N_{\text{total}}}, \quad (2)$$

where N_{diverged} is the number of rooms where at least one replica diverged from the ground-truth state, and N_{total} is the total number of rooms.

The evaluation methodology explicitly controls for three dimensions identified as critical in comparative broker studies [6]: (1) *system configuration* — each broker is tested under both default and latency-optimised settings (`linger.ms=0`, `acks=1` for Kafka; `appendfsync=everysec` for Redis); (2) *load distribution* — load is applied both uniformly across rooms and unevenly (80% of events concentrated in 20% of rooms) to simulate lecture-peak conditions; (3) *failure behaviour* — one Gateway instance is forcibly terminated mid-session to measure recovery time and event loss under each broker.

Expected results:

- *Redis Pub/Sub*: Up to 2–5% event loss under 1% network packet drop, leading to irreversible CRDT divergence in approximately 15% of rooms ($R \approx 0.85$). $T_{\text{broker}} < 1$ ms.
- *Redis Streams*: 0% event loss due to the catch-up mechanism. $T_{\text{broker}} \approx 2$ –3 ms. Total end-to-end latency expected at 15–25 ms, imperceptible to users. $R = 1.0$.
- *Apache Kafka*: 0% event loss with exactly-once semantics. $T_{\text{broker}} \approx 15$ –50 ms. Total latency may reach 50–80 ms, acceptable for analytics but suboptimal for real-time drawing. $R = 1.0$.

8. Conclusions and Prospects for Further Research. The following results have been obtained: (1) a three-tier event classification (ephemeral presence, collaborative editing, analytics) providing a principled basis for broker selection; (2) a comparative analysis showing no single broker is optimal for all LMS event categories; (3) six broker selection criteria for educational high frequency scenarios, constituting the scientific novelty; (4) an Event Sourcing pattern with Redis Streams as single source of truth and a catch-up mechanism for reconnecting clients; (5) a hybrid broker architecture assigning each event category to the most appropriate broker.

Prospects include empirical validation under realistic load, vector clock-based causal ordering at the application layer, and LLM-based real-time pedagogical feedback integration.

Conflict of Interest

The authors declare no conflicts of interest.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available in the main text.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Contributions of authors

Hombosh T.: Conceptualization, Methodology, Software, Writing — original draft. Mulesa P.: Supervision, Validation, Writing — review & editing.

Copyright ©



(2026). Hombosh T., Mulesa P. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Hombosh, T., & Mulesa, P. (2025). Securing Interactive Learning Tools: CRDT/OT, Signed

- Events, and Analytics. In *Proceedings of the Scientific and Methodological Conference on Informatics, Computer Science and Mathematics (SMICS-2025)*. Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 356. Retrieved from <https://smics.lnu.edu.ua/uk/zbirnyk/>
2. Hombosh, T., & Mulesa, P. (2025). Automated Llama-based generation of school test items: alignment and localization to Ukrainian educational standards. In *Abstracts of the International Scientific Conference dedicated to Academician M. I. Kravchuk*. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 180. Retrieved from <https://matan.kpi.ua/media/2025/kravchuk-conf-2025/kravchuk-conf-2025-abstracts.pdf>
3. Kleppmann, M., Gentle, J., Litt, G., & Litt, A. (2022). Peritext: A CRDT for Collaborative Rich Text Editing. *Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction*, 6(CSCW2), 1–36. <https://doi.org/10.1145/3555644>
4. Almeida, P. S. (2023). Approaches to Conflict-free Replicated Data Types. *arXiv preprint arXiv:2310.18220*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2310.18220>
5. David, I., Syriani, E., & Masson, C. (2022). Extensible Conflict-Free Replicated Datatypes for Real-time Collaborative Software Engineering. In *Proceedings of the 2022 Annual Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS 2022)*, 99–108. Retrieved from <https://annals-csis.org/proceedings/2022/drp/pdf/99.pdf>
6. Srivastava, A., et al. (2025). Comparing Big Data Messaging Platforms: An Evaluation of Apache Kafka, RabbitMQ, and Redis. In *Proceedings of the IEEE 16th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON 2025)*. <https://doi.org/10.1109/UEMCON67449.2025.11267649>
7. Kreps, J., Narkhede, N., & Rao, J. (2011). Kafka: A Distributed Messaging System for Log Processing. In *Proceedings of the 6th International Workshop on Networking Meets Databases (NetDB 2011)*. Athens, Greece. Retrieved from <https://www.microsoft.com/en-us/research/wp-content/uploads/2017/09/Kafka.pdf>
8. Newman, S. (2021). *Building Microservices: Designing Fine-Grained Systems* (2nd ed.). Sebastopol, CA: O'Reilly Media.
9. Redis Ltd. (2024). *Redis Streams: Introduction to Redis Streams*. Retrieved from <https://redis.io/docs/latest/develop/data-types/streams>

Гомбош Т., Мулеса П. Патерни обробки поточкових подій для масштабування інтерактивних навчальних середовищ: порівняльний аналіз Redis Pub/Sub, Redis Streams та Apache Kafka.

У статті досліджуються архітектурні патерни обробки поточкових подій у реальному часі для масштабування інтерактивних навчальних середовищ. Зростання кількості одночасних користувачів у сценаріях спільного редагування коду та використання інтерактивних дошок виявляє обмеження традиційних підходів на базі Redis Pub/Sub, зокрема щодо втрати пакетів та порушення порядку доставки подій, що є критичним для алгоритмів узгодження стану (CRDT та OT). Проведено порівняльний аналіз трьох технологій брокерів повідомлень — Redis Pub/Sub, Redis Streams та Apache Kafka — в контексті мікросервісної архітектури на базі NestJS та Socket.IO. Запропоновано трирівневу класифікацію подій інтерактивного навчання за частотою, надійністю та вимогами до впорядкування. Сформульовано шість критеріїв вибору брокера повідомлень специфічно для навчальних сценаріїв з високою частотою подій, що становить наукову новизну дослідження. Описано архітектурний патерн Event Sourcing з використанням Redis Streams як єдиного джерела істини для активних сесій спільної роботи, а також механізм наздоганання (catch-up) для клієнтів, що перепідключаються. Практичне значення полягає у можливості створення відкритого відтворюваного інструментарію, інтегрованого з LMS, що забезпечує високу надійність синхронізації навіть за нестабільного мережевого з'єднання.

Ключові слова: інтерактивне навчання, подійно-орієнтована архітектура, Redis Streams, Apache Kafka, CRDT, мікросервіси, Socket.IO, синхронізація в реальному часі.

Recived: 05.04.2026

Accepted: 21.04.2026

Published: 30.04.2026

UDC 004.738.5:004.056:656.073

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).181-189](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).181-189)

**R. Ya. Zhovtani¹, A. M. Chorniy², P. V. Yavorskyi³, O. M. Zymomrya⁴,
Yu. M. Tsipino⁵**

¹ Uzhhorod National University,
Head of the Department of International Communications
ruslana.zhovtani@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7421-148X>

² Cherkasy State Technological University,
Associate professor, Dean of the Faculty of Electronic Technologies, Motor Vehicles and
Mechanical Engineering
a.chornii@chdtu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0989-7112>

³ Uzhhorod National University,
Senior Lecturer of the Department of Informatics and Physical-Mathematical Disciplines
yavorskyi.petro@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-3316-4382>

⁴ Uzhhorod National University,
Associate Professor of the Department of International Communications
olena.zymomrya@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7206-0190>

⁵ Zakarpatskyi Polytechnic Applied College,
Lecturer-Methodologist
yuratsipino@ukr.net
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5494-8418>

ADAPTIVE IOT-BASED LOGISTICS SYSTEM WITH EDGE INTELLIGENCE AND SECURE INTEROPERABILITY LAYER

The article examines an approach to building an adaptive logistics system based on IoT using Edge Computing, AI Layers, and an interoperability Integration Layer. A multi-layer architecture is proposed that covers the full data processing cycle – from sensor data collection to decision-making and integration with enterprise systems, with a focus on reducing latency and improving adaptability. The study analyzes key architectural layers: IoT, Edge, AI, Integration, and Security. Edge Computing enables data processing near sources, reducing central load and supporting real-time responses, while the AI Layer provides predictive analytics, anomaly detection, and route optimization. The Integration Layer ensures data unification, normalization, and integration via standardized APIs, as well as interaction with ERP, WMS, and TMS systems. The security model is based on encryption, authentication, and the zero-trust concept, ensuring data integrity, confidentiality, and availability. The results show that integrating IoT, Edge Computing, and AI improves performance, scalability, and reliability of logistics systems while reducing operational costs and supporting intelligent logistics development.

Keywords: IoT, Edge Computing, AI, logistics systems, route optimization.

1. Introduction. Modern logistics are evolving with IoT, AI, and Edge Computing. Increasing data volumes, faster response requirements, and higher transparency demand adaptive, scalable solutions, as traditional centralized systems cannot provide sufficient performance or flexibility. IoT enables real-time cargo monitoring, vehicle tracking, and automation but introduces challenges in data processing, reliability, interoperability, and security. Integrating IoT with Edge and AI supports

distributed processing and decision-making, while Middleware coordinates heterogeneous components and the Security layer ensures protection and resilience, making a unified architecture a critical scientific and practical goal.

2. Problem Statement. The purpose of this work is to develop an adaptive multi-level IoT-based logistics architecture integrating Edge Computing, an AI decision-making module, a Integration Layer, and a comprehensive security model for real-time data collection, processing, and utilization. The objectives are to reduce data processing latency, optimize resources, improve forecasting accuracy and system adaptability, and ensure secure interaction between heterogeneous components and enterprise systems (ERP, WMS, TMS). The work also formalizes data processing across architectural levels, identifies key functional components, and justifies their interaction within a unified intelligent system.

3. Analysis of Recent Research. Recent studies highlight the evolution of IoT from simple tools to integrated ecosystems combining blockchain, AI, and 5G, enhancing transparency and security in logistics [1]. Research also explores frameworks for autonomous supply chains and the role of generative AI in strategic management [2], with growing emphasis on resilience, cybersecurity, and real-time monitoring [3]. In warehousing, IoT and AI enable intelligent monitoring and distribution systems with high efficiency and robustness [4]. Maritime logistics focuses on large-scale data collection and standardization for management optimization [5]. Decentralized solutions using blockchain and smart contracts (e.g., Hyperledger Fabric) reduce dependence on central control by automating operations from sensor data [6]. Implementing Industry 4.0 requires readiness assessment across IT infrastructure and sustainability dimensions [7]. Scaling IoT solutions faces cost and cybersecurity challenges, addressed via cloud computing and big data [8]. IoT-based simulation models aid the design of smart cold chains [9], and adaptive optimization using sensor data can extend product shelf life by up to 18% through real-time temperature control [10].

4. Main Results. The proposed multi-level architecture provides a complete data processing cycle in logistics, from IoT data collection to intelligent analysis and integration with corporate systems, while addressing security requirements. Interaction between IoT, Edge, AI, Integration, and Security layers forms an adaptive, scalable system capable of efficient operation in dynamic logistics environments.

The *IoT layer* collects and transmits data from the physical environment, monitoring cargo conditions (temperature, humidity, vibrations), tracking vehicles and assets via GPS, and enabling automated identification with RFID. Data are sent via lightweight protocols like MQTT and CoAP, ensuring energy-efficient, low-latency communication and a continuous flow for further processing.

The *Edge layer* processes data near the sources, reducing latency and central load. It filters, aggregates, and analyzes data locally, enabling rapid responses to critical events and seamless transfer of processed information to higher layers. This improves system performance, reliability, and autonomy.

The *AI layer* provides intelligent processing and decision support using machine learning and analytics. It performs forecasting, anomaly detection, route and resource optimization, delay prediction, cargo risk assessment, and adaptive planning. By integrating prior-layer data, it generates actionable decisions that enhance system efficiency, flexibility, and adaptability.

The *Integration layer* coordinates interactions among system components and external platforms, unifying and normalizing data, providing standardized API access, supporting asynchronous messaging, orchestrating processes, and integrating with ERP, WMS, and TMS. It ensures interoperability, scalability, and flexibility, acting as a central element in IoT-enabled logistics system.

The *Security layer* protects data and system components at all stages through encryption, authentication, authorization, access control, and anomaly detection. Applying zero-trust principles, it verifies every request, ensuring system integrity, confidentiality, and reliability.

The architecture's structure and component relationships are best illustrated in a block diagram, clearly showing data flows, processing logic, and layer interactions.

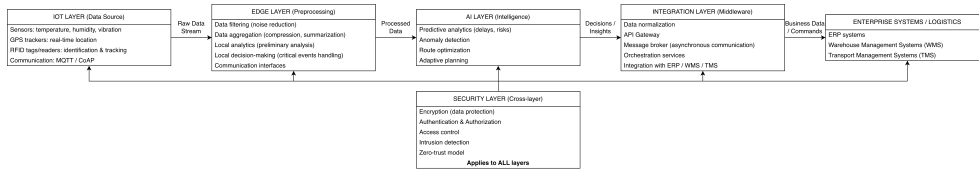


Figure 1. Multi-level architecture of an IoT system for logistics with integration and security.

Data flows from IoT sensors to the AI and Integration layers, with security enforced at every stage. The IoT layer collects and prepares data for Edge and AI processing, ensuring continuous, reliable streams for cargo monitoring and vehicle tracking [11] using heterogeneous sensors and energy-efficient protocols [12]. GPS trackers, temperature sensors, and RFID devices provide comprehensive logistics information.

GPS trackers continuously report real-time geolocation of vehicles, cargo, and containers, supporting route monitoring, speed and delivery time assessment, and overall logistics performance analysis [13]. This enhances supply chain transparency and enables prompt response to route deviations or delays.

To calculate the distance between two geographical points determined by GPS trackers, the haversine formula is used [14]:

$$d = 2 \cdot R \cdot \arcsin \sqrt{\sin^2 \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} + \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) \sin^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right)} \quad (1)$$

where d – distance between two points, R – Earth's radius, φ_1 , φ_2 – latitudes, λ_1 , λ_2 – longitudes.

Temperature sensors monitor sensitive cargo, while RFID automates tracking and inventory management. Lightweight protocols like MQTT and CoAP ensure efficient, low-latency communication. The IoT Data Acquisition layer provides continuous, standardized data from GPS, sensors, and RFID, supporting reliable monitoring, analytics, and logistics management.

The *Edge layer* processes data near the source, reducing *latency* and *central* load. It filters noise, removes errors or redundancies, and aggregates data before sending it to the cloud or corporate systems. This enables real-time operational decisions, crucial for logistics events like route changes or cargo issues [15]. System latency

can be expressed as the sum of delays across processing stages:

$$L_{total} = L_{IoT} + L_{edge} + L_{cloud} \quad (2)$$

where L_{total} – total system latency, L_{IoT} – latency at the IoT level, L_{edge} – latency at the Edge level, L_{cloud} – latency in cloud processing.

Edge nodes analyze data locally, sending only aggregated or anomalous values, reducing network load and boosting autonomy. Edge Computing ensures performance, reliability, and real-time logistics support. The *AI Layer* processes IoT and Edge data into actionable insights for forecasting, optimization, and responses. Predictive analytics uses historical and current data [16], including delivery times, delays, and cargo risks, via machine learning models for real-time supply chain decisions.

For example, delivery time prediction can be performed using a linear regression model:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n, \quad (3)$$

where y – predicted value (e.g., delivery time), β_0 – constant (bias), β_n – model coefficient, x_n – input values (distance, traffic, weather condition, etc.).

The *AI Layer* identifies anomalies in IoT and Edge data, such as temperature spikes, unusual routes, or delays, using machine learning and statistical methods, triggering alerts or adaptive responses to enhance safety and reliability. It also performs *route optimization*, calculating efficient paths based on delivery time, vehicle load, traffic, weather, and cargo risks using genetic, nearest-neighbor, graph-based, or ML algorithms. Integration with GPS and IoT data enables dynamic adjustments, reducing delivery time, cutting costs, and improving overall logistics efficiency.

The proposed block diagram illustrates the internal structure of the AI Layer and the sequence of data processing from IoT and Edge layers. Data first undergo predictive analytics (forecasting delivery time, risk assessment, resource planning), then pass through anomaly detection (identifying deviations), and finally reach route optimization, where optimal routes are calculated based on current system conditions.

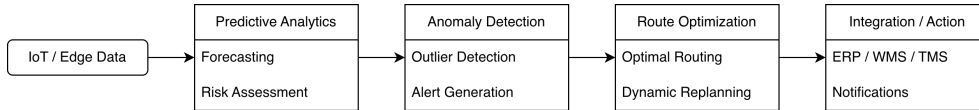


Figure 2. Block diagram of the AI Layer (Decision Engine).

The block enables real-time decision-making: data are transformed into predictions, anomalies detected, and optimal actions suggested. Results go to the Integration layer for ERP, WMS, or TMS synchronization and to the Security layer for protection.

The *Middleware coordinates* IoT, Edge, and AI flows with corporate systems, standardizing and managing data via APIs. The API Gateway routes requests, enforces authentication, monitors usage, and supports scalability, simplifying communication across all layers. Data Normalization unifies heterogeneous inputs, removing inconsistencies and duplicates for accurate higher-level processing [17].

For data unification, *min-max normalization* is used:

$$x' = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad (4)$$

where x' – normalized value, x – original value, $x_{\min}$ – minimum value in the dataset, $x_{\max}$ – maximum value in the dataset.

Data Normalization standardizes formats (e.g., °C, WGS84, timestamps), aggregates similar inputs, corrects errors, and prepares data for seamless use with the API Gateway and corporate systems (ERP, WMS, TMS). This creates a unified, clean data stream, improving analytics, decision-making, and subsystem interaction. Middleware integration applies IoT, Edge, and AI outputs to logistics operations: ERP manages resources and orders, WMS handles warehouse and inventory control, and TMS supports transportation planning, tracking, and cost optimization. This integration turns data flows into actionable management, enhancing efficiency, transparency, and adaptability.

The *Security layer* safeguards data and system stability across all IoT levels, ensuring integrity, confidentiality, and availability. It uses encryption (e.g., TLS) for transmission and storage, *authentication* and *authorization* for role-based access, and a *zero-trust model* that verifies every request [18]. In summary, combining these mechanisms provides comprehensive protection, system trust, reliability, scalability, and readiness for deployment.

For a better understanding of the architecture, it is useful to consider typical system operation scenarios. These scenarios illustrate the sequence of data processing, interaction between architectural layers, and transformation of information from acquisition to actionable decisions. At the first stage «**sensor** → **data**», IoT devices collect primary data. Sensors monitor parameters like temperature, humidity, and geolocation, converting them to digital form with metadata (device ID, timestamps) and sending them to the system. Data pass from sensors to the communication module, preparing them for transmission to the next layer.

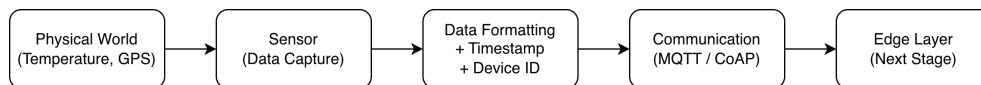


Figure 3. Scenario of primary data flow formation at the IoT level.

At this stage, a structured, processable data stream is formed, reflecting the current state of logistics objects. In the second stage «**edge** → **processing**», IoT data are sent to the Edge layer for preliminary processing: filtering, aggregation, and local analysis reduce volume, remove noise, and extract relevant information. Critical deviations can trigger independent Edge responses, lowering latency and enhancing system autonomy.

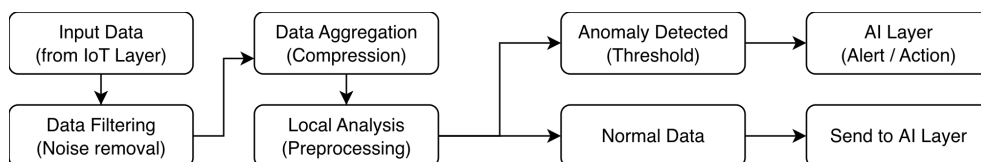


Figure 4. Scenario of preliminary data processing at the Edge level.

The Edge layer serves as an intelligent intermediary between IoT and AI, providing real-time processing, reduced latency, and local responses to critical events.

In the third stage «**AI** → **decision**», processed data reach the AI Layer (Decision Engine) for analysis and real-time decision-making. Data pass through predictive analytics, anomaly detection, and route optimization, with deviations prompting adjusted decisions or alternative actions, ensuring system adaptability and resilience.

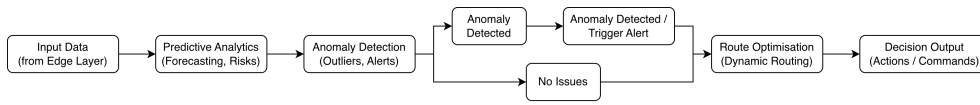


Figure 5. Scenario of data processing at the AI level and decision-making.

Thus, the AI layer serves as the central decision-making component, enabling adaptive management of logistics processes based on predictive analytics, anomaly detection, and route optimization. At the final stage «**system** → **action**», AI decisions are transmitted via the Integration layer to ERP, WMS, and TMS systems, triggering route changes, order updates, notifications, or automatic execution of operations.

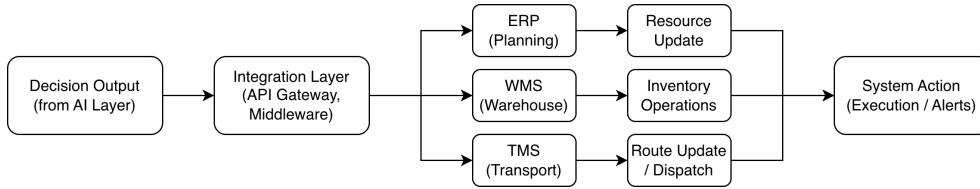


Figure 6. Scenario of implementing decisions in a logistics system.

Thus, at this stage, a full transition from analytics to action occurs: the system automatically or semi-automatically executes management decisions, improving efficiency, responsiveness, and coordination of logistics processes.

The proposed multi-level IoT architecture enhances efficiency, flexibility, and reliability in logistics. Combining IoT, Edge Computing, AI, and Middleware provides the foundation for next-generation logistics systems.

The system offers *high adaptability*, with the AI Layer and real-time processing enabling rapid responses to delays, route changes, or transport condition violations. Edge Computing ensures fast data processing and low latency, supporting real-time logistics decisions. Costs are reduced through route optimization, efficient resource use, process automation, and minimized data transmission. The modular architecture and Integration Layer allow easy scaling from local networks to global supply chains. Together, these features create an logistics system that enhances efficiency, reliability, and competitiveness in the digital economy.

5. Conclusions and prospects for further research. The results demonstrate that IoT enhances transparency, automation, and logistics efficiency, though issues like latency, central resource overload, and security remain. The proposed architecture mitigates these with distributed processing, Edge Computing, and intelligent analytics. Its main contribution is a unified adaptive system integrating IoT, Edge, and AI, improving performance, resource efficiency, and decision-making. Middleware and the Security Model ensure interoperability and protection. Future work includes digital twins for real-time modeling, autonomous logistics, federated

learning, and energy-efficient IoT solutions, with real-world implementation needed to assess effectiveness and refine the system.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Contributions of authors

R. Ya. Zhovtani – conceptualization, data preparation, formal analysis, writing – original design, scientific supervision; A. M. Chorniy – methodology, project administration, writing (reviewing and editing); P. V. Yavorskyi – research, resources, visualization; O. M. Zymomrya – translation design, text typesetting validation; Yu. M. Tsipino – validation, software.

Copyright ©



(2026). Zhovtani R. Ya., Chorniy A. M., Yavorskyi P. V., Zymomrya O. M., Tsipino Yu. M. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Zrelli, I., & Rejeb, A. (2024). A bibliometric analysis of IoT applications in logistics and supply chain management. *Heliyon*, 10(16). <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e36578>
2. Vlachos, I., & Graham, G. (2025). The internet of things in supply chain management: past, present, and future – a systematic literature review and implementation framework. *International Journal of Production Research*, 63(24), 10555–10585. <https://doi.org/10.1080/00207543.2025.2553824>
3. Shoomal, A., Jahanbakht, M., Componation, P. J., & Ozay, D. (2024). Enhancing supply chain resilience and efficiency through internet of things integration: Challenges and opportunities.

- Internet of Things*, 27. <https://doi.org/10.1016/j.iot.2024.101324>
4. Liu, T., & Ju, H. (2024). Research on the Application of IOT and AI in Modern Logistics and Warehousing. *J. Ind. Eng. Appl. Sci*, 2, 1–4. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10755279>
 5. Vovchak, O., & Veres, Z. (2025). Enhancing IoT-driven logistics solutions using blockchain-based smart contracts. *Information Systems and Networks*, 17, 319–329. <https://doi.org/10.23939/sisn2025.17.319>
 6. Wang, L., & Hsu, H. H. (2025). IoT technology in maritime logistics management: exploration of data analysis methods. *Discover Internet of Things*, 5(1), 66. <https://doi.org/10.1007/s43926-025-00167-9>
 7. Asrol, M. (2024). Industry 4.0 adoption in supply chain operations: A systematic literature review. *International Journal of Technology*, 15(3), 544–560. <https://doi.org/10.14716/ijtech.v15i3.5958>
 8. Hamroqulova, S., & Anant, K. (2024). Application Of Iot In Logistics – Challenges; Enablers & Success Factors. *International Journal of Artificial Intelligence*, 4(7), 271–292. <https://www.academicpublishers.org/journals/index.php/ijai/article/view/1305>
 9. Cai, X., Zhang, H., & Li, Q. (2022, April). Analysis and design of smart cold chain logistics simulation model based on internet of things technology. In *2022 IEEE Asia-Pacific Conference on Image Processing, Electronics and Computers (IPEC)*. IEEE. (pp. 1352–1356). <https://doi.org/10.1109/IPEC54454.2022.9777403>
 10. Seth, C., Pirnia, M., & Bookbinder, J. H. (2025). IoT-based Fresh Produce Supply Chain Under Uncertainty: An Adaptive Optimization Framework. *arXiv e-prints*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.05920>
 11. Ikumapayi, O. M., Laseinde, O. T., Elewa, R. R., Ogedengbe, T. S., & Akinlabi, E. T. (2024). Smart sensors for real-time monitoring in a sustainable logistics. In *E3S Web of Conferences*. EDP Sciences. (Vol. 552, p. 01079). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202455201079>
 12. Karim, M. R., & Hossain, M. A. (2024). The Role of Internet of Things (IoT) in Real-Time Supply Chain Monitoring. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*. <https://doi.org/10.47772/IJRISS.2024.8100157>
 13. Gokulanathan, S. (2025). Enhancing cargo security and transparency: a blockchain-based IoT solution. *Discover Computing*, 28(1), 221. <https://doi.org/10.1007/s10791-025-09636-9>
 14. Maria, E., Budiman, E., Haviluddin, & Taruk, M. (2020, February). Measure distance locating nearest public facilities using Haversine and Euclidean Methods. In *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing. (Vol. 1450, No. 1, p. 012080). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1450/1/012080>
 15. Xue, H., Huang, B., Qin, M., Zhou, H., & Yang, H. (2020, November). Edge computing for internet of things: A survey. In *2020 International Conferences on Internet of Things (iThings) and IEEE Green Computing and Communications (GreenCom) and IEEE Cyber, Physical and Social Computing (CPSCom) and IEEE Smart Data (SmartData) and IEEE Congress on Cybermatics (Cybermatics)*. IEEE. (pp. 755–760). <https://doi.org/10.1109/iThings-GreenCom-CPSCom-SmartData-Cybermatics50389.2020.00130>
 16. Liu, Y., Tao, X., Li, X., Colombo, A. W., & Hu, S. (2023). Artificial intelligence in smart logistics cyber-physical systems: State-of-the-arts and potential applications. *IEEE Transactions on industrial cyber-physical systems*, 1, 1–20. <https://doi.org/10.1109/TICPS.2023.3283230>
 17. Fortino, G., Savaglio, C., Palau, C. E., De Puga, J. S., Ganzha, M., Paprzycki, M., ... & Llop, M. (2017). Towards multi-layer interoperability of heterogeneous IoT platforms: The INTER-IoT approach. In *Integration, interconnection, and interoperability of IoT systems*. Cham: Springer International Publishing. (pp. 199–232). https://doi.org/10.1007/978-3-319-61300-0_10
 18. Syed, N. F., Shah, S. W., Shaghaghi, A., Anwar, A., Baig, Z., & Doss, R. (2022). Zero trust architecture (zta): A comprehensive survey. *IEEE access*, 10, 57143–57179. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3174679>

Жовтані Р. Я., Чорній А. М., Яворський П. В., Зимомря О. М., Ціпіню Ю. М. Адаптивна логістична система на основі IoT з периферійним інтелектом та захищеним шаром взаємної сумісності.

У статті розглядається підхід до побудови адаптивної логістичної системи на основі Інтернету речей (IoT) з використанням периферійних обчислень (Edge Computing), модулів штучного інтелекту (AI) та проміжного програмного забезпечення для забезпечення взаємодії. Пропонується багаторівнева архітектура, яка охоплює повний цикл обробки даних – від збору даних з датчиків до прийняття рішень та інтеграції з корпоративними системами, з акцентом на скороченні затримки та підвищенні адаптивності. У дослідженні аналізуються ключові архітектурні рівні: IoT, Edge, AI, інтеграція та безпека. Edge Computing дозволяє обробляти дані поблизу джерел, зменшуючи навантаження на центральні сервери та забезпечуючи реагування в режимі реального часу, тоді як модуль AI забезпечує прогнозу аналітику, виявлення аномалій та оптимізацію маршрутів. Рівень проміжного програмного забезпечення забезпечує уніфікацію, нормалізацію та інтеграцію даних через стандартизовані API, а також взаємодію з системами ERP, WMS та TMS. Модель безпеки базується на шифруванні, автентифікації та концепції «нульової довіри», забезпечуючи цілісність, конфіденційність та доступність даних. Результати показують, що інтеграція IoT, Edge Computing та AI покращує продуктивність, масштабованість та надійність логістичних систем, одночасно зменшуючи операційні витрати та підтримуючи розвиток інтелектуальної логістики.

Ключові слова: IoT, Edge Computing, штучний інтелект, логістичні системи, прогнозна аналітика, оптимізація маршрутів, кібербезпека.

Recived: 18.03.2026

Accepted: 02.04.2026

Published: 30.04.2026

УДК 519.816:519.853

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).190-196](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).190-196)**Н. Е. Кондрук¹, О. В. Тирпак²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат технічних наук, доцент
natalia.kondruk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9277-5131>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант спеціальності прикладна математика
oleksandr.tyrbak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1149-8152>

**РОБАСТНА МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ В
УМОВАХ ІНТЕРВАЛЬНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ
ДАНИХ**

У статті розв'язано актуальну науково-прикладну задачу підвищення надійності багатокритеріального вибору в умовах високого рівня суперечливості та параметричної невизначеності експертних даних. Існуючі методи переважно пропонують апостеріорний аналіз чутливості та використовують жорсткі обмеження на індекс неузгодженості, що робить неможливим знаходження математичного розв'язку для реальних «зашумлених» матриць великої розмірності. У роботі запропоновано робастну модифікацію МАІ, яка базується на апараті інтервального аналізу «гіршого сценарію» та методах двокритеріальної нелінійної оптимізації. Розроблений алгоритм превентивно ідентифікує зони надвисокої чутливості та алгоритмічно коригує вектор пріоритетів для збереження топологічного порядку ієрархії. Експериментальне тестування підтвердило абсолютну збіжність алгоритму: метод успішно усунув загрозу інверсії рангів та забезпечив знаходження оптимального вектора ваг для сильно суперечливої початкової матриці. Запропонована математична модель може бути ефективно інтегрована в сучасні системи підтримки прийняття рішень (DSS) у сферах управління персоналом, логістики та стратегічного планування.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій; робастна оптимізація; інтервальна невизначеність; багатокритеріальне прийняття рішень; інверсія рангів.

1. Вступ. Сучасні процеси прийняття рішень у складних соціально-економічних системах характеризуються високим рівнем суб'єктивізму та неповноти вхідної інформації, що робить метод аналізу ієрархій (МАІ), запропонований Т. Сааті, ключовим інструментом системного аналізу [1]. Надійність отриманих результатів у МАІ безпосередньо залежить від ступеня узгодженості експертних суджень, еволюція методів оцінки якої була детально систематизована у фундаментальному огляді [2]. Проте класичний підхід часто виявляється вразливим до малих флуктуацій вхідних даних, що зумовило розвиток теорії аналізу чутливості та пошук критичних значень збурень, здатних змінити фінальне ранжування [3]. У сучасних дослідженнях для подолання проблеми невизначеності активно впроваджуються методи нечіткої логіки [4], інтервальні нейтрософські множини [5] та апарат «сірих» чисел [6]. Ці підходи дозволяють моделювати неточність людських переваг не як точкові значення, а як певні області допустимих значень, що значно підвищує адекватність математичних моделей реальним умовам.

Незважаючи на значну кількість модифікацій МАІ, актуальною залишається проблема забезпечення робастності (стійкості) результатів у ситуаціях, коли експертні дані є суперечливими (індекс неузгодженості перевищує нормативний поріг 0.1). Більшість існуючих методів спрямовані або на мінімізацію неузгодженості, або на аналіз стійкості вже після отримання результату, не пропонуючи механізму їх одночасного врахування на етапі синтезу пріоритетів. Крім того, жорсткі обмеження класичного МАІ часто роблять задачу оптимізації нездійсненною для реальних «зашумлених» даних.

2. Постановка проблеми. Метою дослідження є розробка робастної модифікації методу аналізу ієрархій, яка забезпечує знаходження оптимального вектора пріоритетів шляхом раціонального компромісу між рівнем неузгодженості даних та радіусом стійкості результату до інтервальних збурень.

Основні завдання: формалізувати параметричну невизначеність експертних оцінок за допомогою інтервального аналізу «гіршого сценарію»; обґрунтувати математичну модель радіуса стійкості до інверсії рангів як критерію якості прийнятого рішення; побудувати двокритеріальну оптимізаційну модель нелінійного програмування для синтезу пріоритетів та реалізувати її за допомогою сучасних чисельних методів; експериментально перевірити ефективність запропонованого методу на прикладі задачі з високим рівнем суперечності експертних даних.

3. Моделі і методи. Методологічну основу дослідження складає комплексне поєднання класичного методу аналізу ієрархій (МАІ) Т. Сааті, елементів теорії інтервального аналізу та методів багатокритеріальної нелінійної оптимізації. Процес розробки модифікованого методу поділено на три основні етапи: формалізація невизначеності, математичний опис критерію стійкості та побудова оптимізаційної моделі синтезу пріоритетів.

3.1. Формалізація параметричної невизначеності в МАІ. У класичному МАІ думки експертів формують матрицю парних порівнянь $A = [a_{ij}] \in R^{n \times n}$, де $a_{ij} > 0$ та $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Вектор локальних пріоритетів $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ традиційно обчислюється як правий власний вектор матриці A , що відповідає її максимальному власному значенню $\lambda_{\max}$, тобто $Aw = \lambda_{\max}w$.

У запропонованій моделі відмовляємося від точкових оцінок на користь інтервальних збурень. Параметрична невизначеність моделюється шляхом заміни точного значення a_{ij} на інтервал $\widetilde{a}_{ij} \in [a_{ij} - \Delta_{ij}^-, a_{ij} + \Delta_{ij}^+]$, де Δ_{ij}^- та Δ_{ij}^+ — максимально допустимі відхилення, зумовлені неточністю експертних знань або флуктуацією зовнішніх умов. Відповідно, ваги критеріїв також розглядаються як параметри, що можуть варіюватися в межах заданої області допустимих значень Ω_w .

Класична формула Сааті для індексу неузгодженості — це $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$.

Для довільного вектора ваг w наближення максимального власного значення $\lambda_{\max}(w)$ обчислюється як середнє арифметичне відношень компонентів вектора Aw до відповідних компонентів вектора w :

$$\lambda_{\max}(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Aw)_i}{w_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j}{w_i},$$

де a_{ij} — елементи початкової (експертної) матриці попарних порівнянь.

3.2. Математичний опис критерію стійкості. Під стійкістю результату будемо розуміти збереження топологічного порядку (ранжування) найкращих альтернатив при будь-яких варіаціях вхідних даних у межах заданих інтервалів збурень.

Нехай A_k та A_l — дві найкращі альтернативи з глобальними пріоритетами P_k та P_l відповідно (де $P_k > P_l$). Явище інверсії рангу виникає, коли внаслідок збурення δw_j ваги j -го критерію виконується умова $P_k(\delta w_j) \leq P_l(\delta w_j)$.

Спираючись на теореми про чутливість (Triantaphyllou & Sanchez, 1997; Alinpezhad, 2014), визначаємо радіус стійкості R_{kl} як мінімальну евклідову норму вектора збурень $\|\Delta W\|$, яка призводить до рівності $P_k = P_l$. Що більшим є значення R_{kl} , то надійнішим є рішення.

Радіус стійкості $R(w)$ формалізується через інтервальний аналіз гіршого сценарію. Нехай експертна оцінка має параметричну невизначеність із похибкою δ . Нижня межа інтервальної оцінки визначається як $\widetilde{a_{kj}^-} = a_{kj}(1 - \delta)$. Тоді матриця найгірших можливих оцінок позначається як $\widetilde{A^-} = [\widetilde{a_{kj}^-}]$. Щоб система була стійкою до інверсії рангів, жодна альтернатива не повинна мати "провалів" у вазі при настанні найгіршого сценарію. Тому радіус стійкості визначається як мінімальне відношення для найслабшої ланки ієрархії:

$$R(w) = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \frac{(\widetilde{A^-} w)_k}{w_k} = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \sum_{j=1}^n \widetilde{a_{kj}^-} \frac{w_j}{w_k}.$$

3.3. Двокритеріальна оптимізаційна модель синтезу пріоритетів.

На відміну від традиційного підходу, де мінімізується виключно індекс неузгодженості, пропонується визначати оптимальний вектор пріоритетів w^* як розв'язок двокритеріальної задачі нелінійного програмування, яку пропонується представити у вигляді згортки:

$$\min_w J(w) = \alpha \cdot CI(w) - (1 - \alpha) \cdot R(w), \quad (1)$$

за умов нормування:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i > 0, \quad \forall i. \quad (2)$$

$\alpha \in [0, 1]$ — ваговий коефіцієнт, що визначає компроміс між математичною узгодженістю матриці та робастністю результату. Алгоритм намагається знайти вектор w , який забезпечує максимально можливе зниження неузгодженості $CI(w)$ для заданих експертних даних, одночасно максимізуючи радіус стійкості $R(w)$ до параметричних збурень.

4. Методологія експерименту. Для апробації запропонованого математичного апарату та підтвердження його ефективності було проведено обчислювальний експеримент на базі задачі підбору персоналу для мережі роздрібної торгівлі [7]. Вихідними даними слугувала експертна матриця попарних порівнянь розмірності 7×7 , яка оцінювала такі критерії: зовнішній вигляд (PA), навички вербальної комунікації (VCS), місце проживання (PR), релігійні обмеження (RC), вік (Age), наявність маленьких дітей (PYC) та рівень плинності

кадрів (JTR). На першому етапі експерименту було застосовано класичний алгоритм методу аналізу ієрархій для знаходження власного вектора матриці.

На другому етапі експерименту до тієї ж матриці було застосовано запропонований модифікований метод робастного синтезу пріоритетів. Для моделювання параметричної невизначеності (можливої похибки експерта) було згенеровано матрицю інтервальних оцінок із радіусом збурення $\pm 15\%$ від початкових значень. Цільова функція алгоритму була налаштована на пошук компромісу між мінімізацією неузгодженості та максимізацією радіуса стійкості (обрано параметр компромісу $\alpha = 0.3$).

5. Результати.

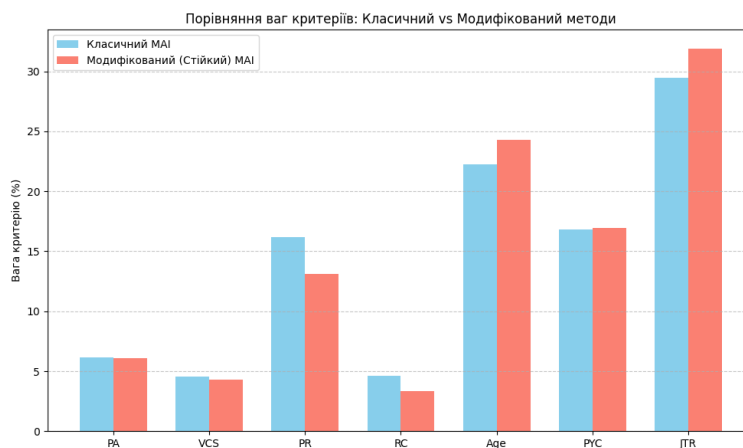


Рис. 1. Порівняння ваг критеріїв за класичним методом аналізу ієрархій та модифікованим.

Результати класичного розрахунку МАІ виявили високий рівень суперечливості експертних суджень: індекс неузгодженості склав 0.5097, що суттєво перевищує допустимий поріг. Вектор пріоритетів розподілився наступним чином (рис. 1, блакитні стовпчики): JTR (29.46%), Age (22.23%), PYC (16.81%), PR (16.17%), PA (6.14%), RC (4.61%) та VCS (4.58%).

У результаті оптимізації задачі (1-2) методом послідовного квадратичного програмування було отримано новий вектор пріоритетів (рис. 1, помаранчеві стовпчики): JTR (31.88%), Age (24.31%), PYC (16.97%), PR (13.13%), PA (6.11%), VCS (4.29%) та RC (3.31%). При цьому глобальний індекс неузгодженості модифікованої моделі знизився до 0.4534.

6. Обговорення. Отримані під час обчислювального експерименту результати демонструють низку цікавих математичних спостережень, які підтверджують перевагу запропонованої двокритеріальної моделі над класичним підходом. Насамперед привертає увагу загальне зниження індексу неузгодженості системи майже на 11%. Незважаючи на те, що головною метою модифікованого алгоритму є забезпечення стійкості, включення показника відхилення до цільової функції дозволило алгоритму ефективно «згладити» найбільш суперечливі експертні оцінки. Це свідчить про те, що інтервальна оптимізація здатна частково компенсувати когнітивні помилки особи, яка приймає рішення, формуючи більш логічно несуперечливий вектор ваг навіть за умови сильно зашумлених вхідних даних.

Найбільш вагомим практичним здобутком модифікованого методу є превентивне усунення вразливості до інверсії рангів на нижніх рівнях ієрархії. У результатах класичного МАІ критерії релігійних обмежень (RC) та навичок комунікації (VCS) отримали критично близькі значення ваг — 4.61% та 4.58% відповідно. Така мінімальна дистанція означає, що будь-яка незначна зміна в думці експерта призвела б до зміни їхнього топологічного порядку. Модифікований алгоритм, виявивши цю зону надвисокої чутливості, превентивно розвів їхні значення на безпечну відстань (4.29% та 3.31%), тим самим гарантуючи стабільність локального ранжування при коливаннях вхідних даних у межах заданих 15%.

Крім того, спостерігається алгоритмічно обґрунтований перерозподіл глобальних пріоритетів на користь найбільш значущих критеріїв. Питома вага критеріїв-лідерів (рівень плинності кадрів та вік) штучно зросла, тоді як вага критеріїв середнього рівня (наприклад, місце проживання) дещо знизилася. З позиції математичної оптимізації така поведінка моделі є абсолютно закономірною: алгоритм намагається максимізувати геометричну відстань до гіперплощини зміни лідера. Штучно збільшуючи розрив між кращими та гіршими альтернативами, модель створює необхідний «запас міцності», який гарантує, що при заданій параметричній невизначеності загальна стратегія підбору персоналу залишиться незмінною та надійною.

7. Висновки та перспективи подальших досліджень. Дослідження присвячено актуальній науково-прикладній задачі підвищення надійності систем багатокритеріального прийняття рішень в умовах параметричної невизначеності шляхом розробки модифікованого методу аналізу ієрархій (МАІ). Головним теоретичним здобутком дослідження є відмова від традиційного точкового оцінювання та перехід до інтервальної формалізації експертних похибок з подальшим застосуванням апарату нелінійної оптимізації. Запропонована двокритеріальна оптимізаційна модель дозволила інтегрувати математичний критерій стійкості безпосередньо в процедуру синтезу вектора пріоритетів, шукаючи оптимальний компроміс між мінімізацією відхилень від початкових суджень та максимізацією радіуса робастності рішення.

Обчислювальна ефективність розробленого математичного апарату була підтверджена результатами експерименту на базі реальної задачі підбору персоналу. Проведене моделювання засвідчило, що модифікований алгоритм успішно функціонує навіть в умовах сильно зашумлених та неузгоджених вхідних даних. Зокрема, оптимізаційна процедура дозволила не лише гарантувати стабільність результату при коливаннях вхідних параметрів у межах $\pm 15\%$, але й алгоритмічно знизити загальний індекс неузгодженості системи. Це доводить здатність розробленої моделі частково компенсувати когнітивні та логічні помилки експертів.

Ключовим практичним наслідком застосування запропонованого підходу є превентивне усунення математичного феномену інверсії рангів. Як показав аналіз локальних пріоритетів, алгоритм здатний автоматично ідентифікувати зони надвисокої чутливості на нижніх рівнях ієрархії і здійснювати превентивний перерозподіл ваг, фіксуючи надійний топологічний порядок альтернатив.

Перспективним напрямом подальших досліджень є проведення детального аналізу чутливості результатів до варіації вагового коефіцієнта α та розширення

запропонованої оптимізаційної моделі для задач із динамічною невизначеністю, де межі інтервальних збурень можуть змінюватися в часі у вигляді стохастичних процесів, а також інтеграція критерію стійкості у мережеві структури.

Конфлікт інтересів

Кондрук Наталія Емерихівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних» (державний реєстраційний номер 0121U109279).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Н. Е. Кондрук: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, написання — оригінальний проект, написання — рецензування та редагування. О. В. Тирпак: методологія, програмне забезпечення, валідація, формальний аналіз, проведення дослідження, візуалізація, написання — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Кондрук Н. Е., Тирпак О. В.
Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Saaty, T. L. (2008). Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*, 1(1), 83–98. <https://doi.org/10.1504/IJSSCI.2008.017590>
2. Pant, S., Kumar, A., Ram, M., Klochkov, Y., & Sharma, H. K. (2022). Consistency indices in analytic hierarchy process: A review. *Mathematics*, 10(8), 1206. <https://doi.org/10.3390/math10081206>
3. Triantaphyllou, E., & Sanchez, A. (1997). A sensitivity analysis approach for some

- deterministic multi-criteria decision-making methods. *Decision Sciences*, 28(1), 151–194. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1997.tb01306.x>
4. Vinogradova-Zinkevič, I. (2023). Comparative sensitivity analysis of some fuzzy AHP methods. *Mathematics*, 11(24), 4984. <https://doi.org/10.3390/math11244984>
 5. Ayaz, H. I., Boz, E. Y., & Ervural, B. (2025). A novel decision-making framework for personnel selection: Integrating interval-valued neutrosophic AHP and ABAC methods. *International Journal of Fuzzy Systems*. <https://doi.org/10.1007/s40815-025-02159-x>
 6. Genç, E., Keleş, M. K., & Özdağoğlu, A. (2024). A hybrid MCDM model for personnel selection based on a novel Gray AHP, Gray MOORA and Gray MAUT methods in terms of business management: An application in the tourism sector. *Journal of Decision Analytics and Intelligent Computing*, 4(1), 263–284. <https://doi.org/10.31181/jdaic10024122024g>
 7. Kondruk, N. E., & Tyrpak, O. V. (2025). Modeling Multi-Criteria Selection In Personnel Recruitment Using The Analytic Hierarchy Process. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 46(1), 188–194. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46\(1\).188-194](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2025.46(1).188-194)

Kondruk N. E., Tyrpak O. V. Robust Modification of the Analytic Hierarchy Process under Interval Uncertainty of Expert Data.

This paper addresses the pressing scientific and practical problem of improving the reliability of multi-criteria decision-making under conditions of high inconsistency and parametric uncertainty in expert data. Existing methods predominantly propose a posteriori sensitivity analysis and impose strict constraints on the inconsistency index, which makes it impossible to find a mathematical solution for real “noisy” high-dimensional matrices. This paper proposes a robust modification of MAI based on the “worst-case” interval analysis framework and methods of two-criterion nonlinear optimization. The developed algorithm proactively identifies zones of ultra-high sensitivity and algorithmically adjusts the priority vector to preserve the topological order of the hierarchy. Experimental testing confirmed the absolute convergence of the algorithm: the method successfully eliminated the threat of rank inversion and ensured the finding of the optimal weight vector for a highly inconsistent initial matrix. The proposed mathematical model can be effectively integrated into modern decision support systems (DSS) in the fields of human resources management, logistics, and strategic planning.

Keywords: hierarchical analysis method; robust optimization; interval uncertainty; multi-criteria decision making; rank inversion.

Отримано: 15.03.2026

Прийнято: 01.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

В. О. Кубицький¹, А. В. Божок²

¹ Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
аспірант кафедри теорії та технології програмування
vova.kubytskyi@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1529-8677>

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
аспірант кафедри теорії та технології програмування
artembozh@knu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-9572-6501>

МІЖДОМЕННЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ БАГАТОРІВНЕВИХ CNN-ПРЕДСТАВЛЕНЬ ЗОБРАЖЕНЬ ДЛЯ ЗАДАЧ ОЦІНКИ ПОДІБНОСТІ

Запропоновано та досліджено багаторівневе векторне представлення зображень, яке агрегує ознаки з проміжних шарів C2, C3 та C5 згорткової нейронної мережі ResNet-50 за допомогою глобального усереднення, конкатенації та L2-нормалізації, формуючи єдиний 2816-вимірний дескриптор. Принциповою особливістю підходу є архітектурне відокремлення побудови універсального представлення від залежного від задачі механізму прийняття рішень, реалізованого як компактний багатосаровий перцептрон. Проведено оцінку міждоменної переносимості цього представлення на незалежному наборі даних INRIA Holidays, який суттєво відрізняється від домену первинної апробації методу: багаторівневий дескриптор перевершив одношарове CNN-представлення на 9 відсоткових пунктів за F1 при адаптації лише компактного MLP на 100 розмічених прикладах. Опубліковані результати на фіксованому наборі даних підтвердили обґрунтованість вибору ResNet-50 як базової архітектури: R-MAC на основі ResNet-50 перевершує R-MAC на основі VGG-19 на 4,9 в.п. mAP при шестизразово меншій кількості параметрів, а також є конкурентоспроможним порівняно з ViT-дескрипторами, які мають у 4–13 разів більший обсяг моделі.

Ключові слова: подібність зображень, згорткові нейронні мережі, багаторівневі представлення, ResNet-50, міждоменне узагальнення, виявлення майже дублікатів, перенесення навчання, INRIA Holidays.

1. Вступ. Веб-платформи та інформаційні системи з користувацьким контентом постійно накопичують колекції зображень, значна частина яких є майже ідентичними внаслідок републікацій, рекомпресії та графічних накладок [1]. Існуючі підходи до оцінки подібності — порівняння на рівні пікселів, локальні дескриптори [2], перцептивне хешування [5] — демонструють обмежену стійкість при складних перетвореннях. CNN-представлення [3] суттєво підвищили якість, однак одношарові ознаки з глибоких шарів пригнічують низько- та середньорівневу інформацію, критичну для виявлення майже дублікатів [4].

У роботах [5, 6] запропоновано метод побудови багаторівневих описових векторів зображень шляхом агрегації ознак із шарів C2, C3 та C5 архітектури ResNet-50 із застосуванням GAP, конкатенації та L2-нормалізації. Метод продемонстрував високу ефективність на задачах подібності у предметній області нерухомості (F1 0,96/0,87/0,77 для трьох підзадач) [5, 6]. Було також запропоновано принцип архітектурного відокремлення побудови представлення від залежного від задачі механізму оцінки подібності [6].

Водночас залишаються відкритими питання міждоменної переносимості отриманих представлень, порівняльного аналізу архітектур CNN для багаторівневої агрегації та зіставлення з альтернативними парадигмами — ViT [7] і CLIP [8]. Метою роботи є дослідження здатності запропонованого представлення до міждоменного узагальнення на незалежному наборі INRIA Holidays [9] та порівняльний аналіз з альтернативними архітектурами.

2. Аналіз існуючих методів представлення зображень для задач подібності. Визначення подібності зображень базується на перетворенні візуальних даних у представлення, яке дозволяє здійснювати змістовне порівняння. Формально, представлення зображення визначається як відображення:

$$f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

де $\mathcal{I}$ — простір зображень, $\mathbb{R}^d$ — простір ознак фіксованої розмірності d . Подібність двох зображень I_1, I_2 обчислюється як:

$$s(I_1, I_2) = g(f(I_1), f(I_2)), \quad (1)$$

де g — функція подібності або прийняття рішення. Ефективність оцінки подібності визначається в першу чергу властивостями функції представлення f , тоді як функція g розкриває свою ефективність лише за умови інформативного простору ознак [5].

2.1. Класичні підходи. Порівняння на рівні пікселів є непридатним через чутливість до геометричних та фотометричних перетворень [1]. Локальні дескриптори (SIFT [2], SURF, ORB) забезпечують стійкість лише до обмеженого класу трансформацій і погано масштабуються до великих колекцій. Перцептивне хешування (pHash на основі DCT) [5] створює компактні бінарні представлення для швидкої фільтрації за відстанню Хеммінга, однак не може слугувати самостійним засобом оцінки подібності через обмежену стійкість до накладень та структурних варіацій [5].

2.2. Векторні представлення на основі CNN. CNN навчаються ієрархічним ознакам: ранні шари фіксують краї та текстури, глибокі — семантичні концепції [3, 10]. Ідея агрегації ознак з декількох шарів розвинена в HyperColumn [16] та Feature Pyramid Networks [17]. Поширена практика вилучення представлення з останнього шару CNN пригнічує низько- і середньорівневу інформацію, критичну для розрізнення майже дублікатів [4]. Агрегування ознак з декількох шарів зберігає доповнювальну інформацію на різних рівнях абстракції [4] — саме цей принцип покладено в основу методу [5, 6].

2.3. Альтернативні архітектури CNN. Вибір базової архітектури CNN суттєво впливає на якість вилучених ознак. VGG [11] має прозору послідовну структуру, але характеризується надлишковою кількістю параметрів (~ 138 млн). Inception [12] підвищує ефективність через мультигілкові модулі, однак розгалужена структура ускладнює вилучення проміжних ознак. ResNet [13] запровадила залишкові зв'язки, що стабілізують навчання та забезпечують збереження інформації по всій глибині. ResNet-50 має чітку поетапну структуру з послідовним зменшенням просторової роздільної здатності — саме ця властивість робить її найбільш придатною для багаторівневого вилучення ознак [5].

2.4. Візуальні трансформери та візуально-мовні моделі. Окремою парадигмою є візуальні трансформери (ViT) [7], які використовують механізм

self-attention для фіксації глобальних залежностей між частинами зображення. В оригінальній постановці ViT потребує значно більших обсягів навчальних даних порівняно з CNN [7], хоча сучасні методи self-supervised навчання частково знімають це обмеження. Візуально-мовні моделі, зокрема CLIP [8], забезпечують семантичні представлення високого рівня узагальнення, здатні до zero-shot перенесення, однак можуть пригнічувати дрібні візуальні деталі, критичні для виявлення майже дублікатів [5].

3. Метод побудови багаторівневого векторного представлення зображення.

3.1. Побудова представлення. Метод, детально описаний у [5, 6], використовує ResNet-50 [13], попередньо навчену на ImageNet, як фіксований екстрактор ознак (~ 23 млн заморожених параметрів). Ознаки вилучаються з шарів C2 (256 каналів, низькорівневі текстури), C3 (512 каналів, структурні патерни) та C5 (2048 каналів, семантика); C4 виключено через перекриття з сусідніми шарами [5]. До кожного тензора активації застосовується GAP, отримані вектори об'єднуються та нормалізуються:

$$e = [v_{C2}; v_{C3}; v_{C5}] \in \mathbb{R}^{2816}, \quad e_{norm} = e / \|e\|_2. \quad (2)$$

3.2. Модель прийняття рішень. Для пари представлень $x^{(a)}, x^{(b)}$ будується симетричне парне представлення:

$$z = \text{contact} \left(|x^{(a)} - x^{(b)}|, (x^{(a)} - x^{(b)})^2 \right). \quad (3)$$

Вектор (3) подається в MLP ($2048 \rightarrow 1024 \rightarrow 512 \rightarrow 256$, ELU [14], пакетна нормалізація, відсів), який навчається з ВСЕ-втрат. Базова CNN залишається замороженою; для адаптації до нової задачі навчається лише MLP [6]. На задачах нерухомості метод досяг F1 0,96/0,87/0,77 для трьох підзадач [5].

4. Експериментальне дослідження.

4.1. Набір даних та протокол оцінки. Для перевірки міждоменної здатності до узагальнення запропонований метод оцінюється на наборі даних INRIA Holidays [9] — широко використовуваному еталонному наборі даних для задач пошуку подібних зображень. Набір містить 1491 зображення, згруповане у 500 класів сцен, де кожен клас представляє окрему сцену або об'єкт. Колекція охоплює різноманітні типи сцен — природні ландшафти, архітектурні об'єкти, предмети повсякденного вжитку — з варіаціями ракурсу, масштабу, освітлення та часткових перекриттів.

Цей набір суттєво відрізняється від домену первинної апробації методу [5, 6], де варіативність є переважно систематичною. Протокол оцінки відповідає [5]: зображення пропускаються через заморожену ResNet-50, ознаки з шарів C2, C3 та C5 об'єднуються та нормалізуються за L2, MLP навчається на 100 випадково вибраних розмічених парах.

Позитивні пари утворюються зі зображень одного класу (500 класів, 2–3 зображення на клас), негативні — випадковим вибором з різних класів у співвідношенні 1:1. Усі базові методи оцінено за тим самим протоколом та розбиттями. Оскільки задача є попарною класифікацією, а не ранжуванням (retrieval), якість вимірюється за F1 [18], а не за mAP.

Таблиця 1.

Порівняння методів на наборі даних INRIA Holidays

Метод	F1
Багаторівневе C2+C3+C5 + MLP (запропонований)	0,77 ± 0,02
Одношарове представлення ResNet-50	0,68 ± 0,03
Ознаки проміжного шару pool5 CNN [15]	0,65 ± 0,03
Перцептивний хеш DCT	0,63 ± 0,03

Запропоноване багаторівневе представлення перевершує найближчий базовий метод (одношарове представлення ResNet-50) на 9 відсоткових пунктів за F1. Порівняно з підходом Mousavian та Kosecka [15], який використовує ознаки лише одного проміжного шару (pool5), покращення становить 12 відсоткових пунктів.

4.2. Роль багаторівневої агрегації на різних доменах. У роботі [5] було проведено абляційне дослідження різних комбінацій шарів ResNet-50 на трьох задачах подібності зображень у предметній області нерухомості: задача А — виявлення майже дублікатів фотографій, які відрізняються лише графічними накладеннями (водяні знаки, логотипи, рамки); задача В — ідентифікація зображень одного приміщення, знятих із різних ракурсів; задача С — зіставлення схематичних планів поверхів у різному графічному оформленні. Результати абляції наведено в таблиці 2.

Таблиця 2.

Абляція комбінацій шарів ResNet-50 на задачах з предметної області нерухомості (F1) [5]

Комбінація шарів	Задача А	Задача В	Задача С
Тільки C2	0,77 ± 0,03	0,68 ± 0,03	0,63 ± 0,04
Тільки C3	0,80 ± 0,03	0,70 ± 0,02	0,67 ± 0,03
Тільки C5	0,87 ± 0,02	0,80 ± 0,02	0,69 ± 0,02
C2 + C3	0,82 ± 0,02	0,73 ± 0,03	0,69 ± 0,03
C2 + C5	0,89 ± 0,02	0,83 ± 0,02	0,71 ± 0,02
C3 + C5	0,92 ± 0,02	0,85 ± 0,02	0,74 ± 0,03
C2 + C3 + C5	0,96 ± 0,01	0,87 ± 0,02	0,77 ± 0,02

Конфігурація {C2, C3, C5}, оптимальність якої було встановлено абляційним дослідженням у [5], застосована без змін до набору INRIA Holidays. Повна конфігурація C2+C3+C5 досягає F1 = 0,77, тоді як одношарове представлення з останнього шару ResNet-50 — F1 = 0,68. Перевага багаторівневого представлення становить 9 в.п. — співставний результат з покращенням, спостережуваним на задачах нерухомості (від 7 до 9 в.п. при переході від C5 до C2+C3+C5).

Подібна величина покращення на двох різних доменах свідчить про те, що внесок низько- та середньорівневих ознак не є специфічним для одного домену. Водночас абсолютні значення F1 на INRIA Holidays (0,77) є нижчими, ніж на задачі А нерухомості (0,96), що пояснюється значно більшою візуальною різноманітністю набору INRIA Holidays. Остаточне підтвердження оптимальності конфігурації {C2, C3, C5} на інших доменах потребує повної абляції на кожному з них, що є напрямком подальших досліджень.

4.3. Порівняння архітектур CNN на основі опублікованих результатів. Для обґрунтування вибору ResNet-50 як базової архітектури запропонованого методу використано опубліковані результати на наборі даних INRIA Holidays (mAP). Слід зазначити, що retrieval протокол (mAP) відрізняється від попарної класифікації, що використовується в даній роботі, і ранжування архітектур за mAP не обов'язково зберігається при зміні протоколу. Тому наведені дані використовуються як допоміжний аргумент на користь вибору архітектури, а не як пряме порівняння методів. Результати наведено в таблиці 3.

Таблиця 3.

Результати пошуку зображень на INRIA Holidays (mAP, %) за опублікованими даними

Метод / Архітектура	Параметри	INRIA mAP	Джерело
MAC / VGG-19	~144 млн	76,3	[19]
R-MAC / VGG-19	~144 млн	87,7	[19]
R-MAC / ResNet-50	~23 млн	92,6	[19]
ViT-B/16 (без навч.)	~86 млн	~90,5	[20]
ViT-L/32 (без навч.)	~307 млн	~87,1	[20]

Дані таблиці 3 підтверджують обґрунтованість вибору ResNet-50 у запропонованому методі. При однаковій стратегії агрегації (R-MAC) ResNet-50 перевершує VGG-19 на 4,9 в.п. mAP (92,6% проти 87,7%) при шестиразово меншій кількості параметрів, що свідчить про те, що залишкові зв'язки забезпечують більш інформативні проміжні ознаки для багаторівневої агрегації.

4.4. Порівняння базової архітектури із сучасними парадигмами. Опубліковані результати ViT на INRIA Holidays (таблиця 3) дозволяють оцінити обґрунтованість вибору ResNet-50 як базової архітектури порівняно з трансформерними моделями. За даними [19, 20], R-MAC на основі ResNet-50 досягає 92,6% mAP, тоді як ViT-B/16 без додаткового навчання — ~90,5% mAP, а ViT-L/32 — ~87,1% mAP. Слід підкреслити, що R-MAC є окремим методом агрегації [19], а не запропонованим підходом; ці дані використовуються для підтвердження того, що ResNet-50 формує більш дискримінаційні проміжні ознаки, ніж трансформерні архітектури порівнянного або більшого розміру (86–307 млн параметрів у ViT проти 23 млн у ResNet-50).

CLIP [8] забезпечує zero-shot перенесення, проте пригнічує дрібні візуальні деталі при значно більшому обсязі моделі (~300 млн параметрів). Запропонований CNN-підхід орієнтований на збереження дрібних деталей при обчислювальній ефективності (~75 мс/зобр. [5]) та мінімальних вимогах до адаптації (100 прикладів). Пряме порівняння з ViT та CLIP у задачі попарної класифікації є напрямком подальших досліджень.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі досліджено міждоменну переносимість запропонованого багаторівневого CNN-представлення зображень та проведено порівняльний аналіз з альтернативними архітектурами екстракторів ознак. Отримано такі основні результати.

1. Експериментально підтверджено міждоменну переносимість запропонованого багаторівневого представлення. На незалежному наборі даних INRIA Holidays, який суттєво відрізняється від домену первинної апробації, багаторівневий дескриптор на основі шарів C2, C3 та C5 досяг $F1 = 0,77$,

перевіривши одношарове CNN-представлення на 9 в.п. та ознаки pool5 на 12 в.п. за ідентичним протоколом оцінки. Адаптація до нового домену потребувала навчання лише компактного MLP на 100 розмічених прикладах без модифікації базового представлення, що підтверджує ефективність принципу архітектурного відокремлення екстрактора ознак від залежного від задачі механізму прийняття рішень.

2. Встановлено, що ефект багаторівневої агрегації відтворюється на різних доменах. Перевага конфігурації C2+C3+C5 над одношаровим C5 становить 9 в.п. на INRIA Holidays та 7–9 в.п. на задачах нерухомості [5] — кількісно співставний результат на двох принципово різних доменах. Це свідчить про загальний, а не доменоспецифічний характер внеску низько- та середньорівневих ознак у дискримінаційну здатність представлення. Подальша верифікація на додаткових наборах даних дозволить підтвердити цю закономірність з більшою статистичною достовірністю.
3. Обґрунтовано вибір ResNet-50 як оптимальної базової архітектури для багаторівневої агрегації ознак. За опублікованими даними [19], R-MAC на основі ResNet-50 перевершує R-MAC на основі VGG-19 на 4,9 в.п. mAP (92,6% проти 87,7%) на INRIA Holidays при шестиразово меншій кількості параметрів (23 млн проти 144 млн). Поетапна ієрархічна структура із залишковими зв'язками забезпечує найбільш придатну основу для прозорого та ефективного вилучення проміжних ознак.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на розширення експериментальної бази, зокрема повна абляція конфігурацій шарів на додаткових наборах даних дозволить перевірити стійкість встановленої закономірності. Особливої уваги потребує дослідження методів зменшення розмірності 2816-вимірного представлення (PCA, квантування) для масштабування до колекцій із сотень мільйонів зображень, а також аналіз внеску окремих шарів у розрізнення конкретних типів візуальних перетворень.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використо-

Внесок авторів

В. О. Кубицький: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, експерименти, написання — оригінальний проєкт. А. В. Божок: формальний аналіз, курація даних, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Кубицький В. О., Божок А. В.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Thyagarajan, K. K., & Kalaiarasi, G. A. (2021). A review on near-duplicate detection of images using computer vision techniques. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(3), 897–916. <https://doi.org/10.1007/s11831-020-09400-w>
2. Lowe, D. G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2), 91–110. <https://doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94>
3. Razavian, A. S., Azizpour, H., Sullivan, J., & Carlsson, S. (2014). CNN features off-the-shelf: An astounding baseline for recognition. In *Proceedings of CVPRW 2014*. (pp. 806–813). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1403.6382>
4. Kordopatis-Zilos, G., Papadopoulos, S., Patras, I., & Kompatsiaris, Y. (2017). *Near-duplicate video retrieval by aggregating intermediate CNN layers*. In Multimedia Modeling. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51811-4_21
5. Kubytskyi, V., & Panchenko, T. (2023). Enriched image embeddings as a combined outputs from different layers of CNN for various image similarity problems. In *Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies*. (Vol. 180, pp. 321–333). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-36115-9_30
6. Panchenko, T., Bozhok, A., & Kubytskyi, V. (2026). Multi-level CNN feature fusion from ResNet50 for near-duplicate image detection in real estate imagery. *Informatica*, 50(9). <https://doi.org/10.31449/inf.v50i9.12111>
7. Dosovitskiy, A., Beyer, L., Kolesnikov, A., & et al. (2021). An image is worth 16x16 words: Transformers for image recognition at scale. In *Proceedings of ICLR 2021*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.11929>
8. Radford, A., Kim, J. W., Hallacy, C., & et al. (2021). Learning transferable visual models from natural language supervision. In *Proceedings of ICML 2021*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2103.00020>
9. Jégou, H., Douze, M., & Schmid, C. (2008). Hamming embedding and weak geometric consistency for large scale image search. In *ECCV 2008*. (pp. 304–317). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-88682-2_24
10. Zeiler, M. D., & Fergus, R. (2014). Visualizing and understanding convolutional networks. In *ECCV 2014*. (pp. 818–833). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1311.2901>
11. Simonyan, K., & Zisserman, A. (2014). Very deep convolutional networks for large-scale image recognition. *arXiv:1409.1556*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.1556>
12. Szegedy, C., Liu, W., Jia, Y., & et al. (2015). Going deeper with convolutions. In *Proceedings of CVPR 2015*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.4842>
13. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. In *Proceedings of CVPR 2016*. (pp. 770–778). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1512.03385>
14. Clevert, D.-A., Unterthiner, T., & Hochreiter, S. (2016). Fast and accurate deep network learning by exponential linear units (ELUs). In *Proceedings of ICLR 2016*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1511.07289>

15. Mousavian, A., & Kosecka, J. (2015). Deep convolutional features for image based retrieval and scene categorization. *arXiv:1509.06033*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1509.06033>
16. Hariharan, B., Arbeláez, P., Girshick, R., & Malik, J. (2015). Hypercolumns for object localization and fine-grained localization. In *Proceedings of CVPR 2015*. (pp. 447–456). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.5752>
17. Lin, T.-Y., Dollár, P., Girshick, R., & et al. (2017). Feature pyramid networks for object detection. In *Proceedings of CVPR 2017*. (pp. 2117–2125). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1612.03144>
18. Fawcett, T. (2006). An introduction to ROC analysis. *Pattern Recognition Letters*, 27(8), 861–874. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>
19. Cataldo, A., Bianco, S., Napoletano, P., & Schettini, R. (2018). An accurate retrieval through R-MAC+ descriptors for landmark recognition. In *Proceedings of ICIAP 2018*.
20. Gkelios, S., Boutalis, Y., & Chatzichristofis, S. A. (2021). Investigating the vision transformer model for image retrieval tasks. In *Proceedings of IEEE MMSP 2021*. <https://doi.org/10.1109/MMSP53017.2021.9733553>

Kubytzkyi V. O., Bozhok A. V. Cross-domain generalization of multi-level CNN image representations for similarity tasks.

A multi-level image vector representation is proposed and investigated, which aggregates features from intermediate layers C2, C3, and C5 of the ResNet-50 convolutional neural network using global average pooling, concatenation, and L2-normalization, producing a single 2816-dimensional descriptor. A key feature of the approach is the architectural separation of universal representation construction from the task-dependent decision mechanism, implemented as a compact multilayer perceptron. Cross-domain transferability of this representation is evaluated on the independent INRIA Holidays dataset, which substantially differs from the domain of the method's primary validation: the multi-level descriptor outperformed single-layer CNN representations by 9 percentage points in F1, with adaptation requiring only a compact MLP trained on 100 labeled examples. Published results on the same dataset confirmed the validity of ResNet-50 as the base architecture: R-MAC based on ResNet-50 outperforms R-MAC based on VGG-19 by 4.9 p.p. mAP with six times fewer parameters, and is competitive with ViT descriptors that have 4 to 13 times larger model size.

Keywords: image similarity, convolutional neural networks, multi-level representations, ResNet-50, cross-domain generalization, near-duplicate detection, transfer learning, INRIA Holidays.

Отримано: 30.03.2026

Прийнято: 16.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.8:004.032.26:519.876

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).205-211](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).205-211)**В. І. Кудак¹, А. С. Вощепинець²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
volodymyr.kudak@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1686-4686>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
канд. фіз.-мат. наук
andrii.voshchepynets@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8307-781X>

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ MLP ТА DFSN ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАТРИМАНИХ КОНВЕРСІЙ

У роботі розглянуто проблему прогнозування в умовах затриманого зворотного зв'язку, що призводить до зміщення навчальних міток у часі та деградації якості прогнозу класичних моделей машинного навчання. Особливу увагу приділено проблемі label delay bias, яка виникає через те, що на момент формування навчальної вибірки частина позитивних подій ще не відбулася або не була зафіксована. У роботі було проведено порівняння якості прогнозу двох моделей: багатошарового перцептрона (Multilayer Perceptron, MLP) та Delayed Feedback Satellite Networks (DFSN), яка поєднує основну нейронну мережу з сателітними компонентами для врахування частково доступних даних.

Експерименти проведено на реальному промисловому наборі даних Criteo, що характеризується високою розмірністю ознак, розрідженістю та значним дисбалансом класів. Числові ознаки були стандартизовані, категоріальні — закодовані та представлені у вигляді векторних представлень.

Оцінювання моделей здійснювалося використовуючи метрику ROC-AUC. Результати показали, що DFSN суттєво перевершує класичний MLP у задачах із затриманими мітками, забезпечуючи меншу чутливість до неповноти міток на ранніх етапах навчання та вищу якість прогнозування.

Ключові слова: MLP, DFSN, delayed feedback, нейронні мережі.

1. Вступ. Сучасні цифрові платформи потребують ефективних підходів до прийняття рішень щодо оптимізації функціонування сервісів та покращення користувацького досвіду [1]. Традиційні статистичні методи аналізу даних мають низку обмежень, зокрема тривалий час накопичення достатнього обсягу даних та отримання надійних результатів через затримку появи цільових міток, високі обчислювальні витрати та знижену ефективність у випадках рідкісних подій, таких як низькі рівні конверсій [1, 2, 3]. Додаткову складність становить ефект затриманого зворотного зв'язку (delayed feedback) [3, 4, 5, 6], що може призводити до зміщення навчальних міток і зниження якості моделей.

У цьому контексті все більшої актуальності набувають методи машинного навчання, зокрема нейронні мережі [7], які дозволяють моделювати складні нелінійні залежності та враховувати динаміку даних у часі [4, 7]. Їх застосування відкриває можливості для прискорення процесу аналізу та підвищення точності прогнозування [8].

У статті досліджується застосування нейронних мереж для підвищення точності прогнозування рівня конверсій користувачів. У контексті розглянутої

задачі, під конверсією розуміємо цільову дію користувача, таку як покупка товару чи послуги. Особлива увага приділяється впливу затриманого зворотного зв'язку (delayed feedback).

2. Мета і завдання роботи. Метою даного дослідження є проведення порівняльного аналізу ефективності класичних багатошарових перцептронів (MLP) [7] та підходу з використанням Delayed Feedback Satellite Networks (DFSN) [8] у задачі прогнозування конверсій. Основна увага приділяється умовам, коли цільова подія є відкладеною у часі [6], що суттєво ускладнює процес навчання моделей [3, 6].

3. Опис даних. Для тренування моделей використано набір даних Criteo. Це широко використовуваний загальнодоступний набір даних для задачі із затримкою зворотного зв'язку, наприклад прогнозування конверсій у рекламних системах [9]. Датасет містить вибірку реального рекламного трафіку тривалістю 90 днів і налічує близько 16 млн записів.

Кожен запис відповідає одному натисканню (надалі — **клік**) по рекламному оголошенню після пошукового запиту. Після натискання користувач переходить на вебсторінку рекламодавця, де може переглянути характеристики продукту, його ціну та оформити замовлення. Далі можливі два сценарії:

- Цільова дія (надалі — конверсія) відбулася — після переходу на сайт користувач здійснив цільову дію, тобто здійснив покупку продукту. У такому випадку в даних фіксується:
 - ☐ мітка в записі `Sale = 1`;
 - ☐ час між кліком по рекламі та покупкою `time_delay_for_conversion`.
- Конверсія не відбулася — користувач перейшов за оголошенням, але не здійснив покупку. Наприклад, лише переглянув товар або залишив сайт. Тоді:
 - ☐ мітка в записі `Sale = 0` ;
 - ☐ поле `time_delay_for_conversion` має значення -1.

Таким чином, у датасеті відображено типовий ланцюжок взаємодії користувача з рекламою.

Для кожного кліку також доступна додаткова інформація така як, вартість товару, тип пристрою, а також числові й категоріальні характеристики користувача та продукту. До числових характеристик належать час кліку (`click_timestamp`), кількість кліків за попередній тиждень (`nb_clicks_1week`), ціна товару (`product_price`), сума покупки (`SalesAmountInEuro`) та затримка між кліком і конверсією (`time_delay_for_conversion`). До категоріальних ознак належать тип пристрою (`device_type`), вікова група (`product_age_group`), гендерна категорія (`product_gender`), бренд товару (`product_brand`), категорії товару (`product_category{1-7}`), країна продажу (`product_country`), а також анонімізовані ідентифікатори користувача, товару, продавця та аудиторії (`user_id`, `product_id`, `audience_id`, `product_title`).

3.1. Аналіз даних. Як показав аналіз даних (рис. 1), затримка конверсій може бути від декількох хвилин до декількох тижнів. Загалом лише близько 11% користувачів здійснили хоча б одну конверсію, причому, близько 65% конверсій відбуваються протягом першої доби після кліку на рекламне оголошення.

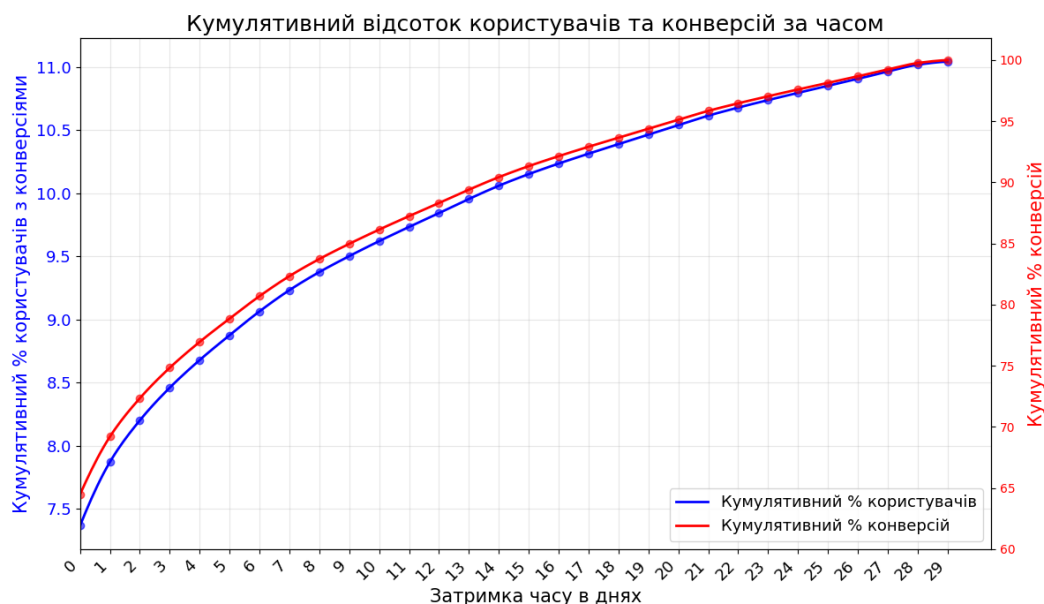


Рис. 1. Дисбаланс конверсій та затримка даних в датасеті Criteo.

Затриманий зворотний зв'язок призводить до того, що на момент формування навчального датасету частина конверсій ще не відбулась [3, 5], і відповідні записи помилково маркуються як негативні. Такий ефект формує зміщення навчальних міток (label delay bias) [4, 3, 5, 6], що негативно впливає на якість навчання традиційних моделей.

Дані в датасеті є високорозмірними та розрідженими [10], також спостерігається сильний дисбаланс класів [10], оскільки частка конверсій є значно меншою порівняно з тими де конверсія не відбулась.

4. Архітектура моделей та експериментальна частина. У дослідженні для побудови моделей прогнозування конверсій було використано засоби бібліотеки PyTorch. На етапі попередньої обробки даних числові ознаки були нормалізовані за допомогою стандартизації (zero mean, unit variance), що забезпечило стабільність градієнтного навчання [7]. Категоріальні ознаки були перетворені у числовий формат із використанням кодування міток (Label Encoding) [7]. Дані були розділені на навчальну та тестову вибірки у співвідношенні 80/20 зі збереженням балансу класів, розподілу значень категоріальних ознак та частки конверсій у кожній підвибірці.

Архітектура використаної у роботі моделі MLP [5, 7] представляє собою повноз'язну нейронну мережу прямого поширення. Вхідний шар складається з 107 вузлів, з яких 3 для числових ознак та 104 (8×13) для закодованих категоріальних ознак представлених у вигляді 8-и розмірних векторів (Vector embedding) [7]. Після вхідного шару слідують два приховані шари розмірністю 128 та 64 нейронів відповідно. Як функцію активації було використано ReLU (Rectified Linear Unit) [7], що дозволяє ефективно моделювати нелінійні залежності у даних. Вихідний шар містить один нейрон що інтерпретується як ймовірність конверсії [7]. У процесі навчання застосовувався стандартний алгоритм зворотного поширення помилки (backpropagation) [7]. Алгоритм передбачає обчислення

градієнтів функції втрат та оновлення ваг мережі після обробки кожної підмножини навчальних прикладів (батч), що подаються моделі на одному кроці навчання. Розмір батчу складав 2048 записів.

Ключова особливість DFSN полягає у тому, що навчання відбувається асинхронно: базова модель відповідає за стабільне глобальне представлення залежностей, тоді як сателітна мережа динамічно адаптується до нових даних і компенсує затримку зворотного зв'язку [8]. Це дозволяє ефективно використовувати дані з неповністю сформованими мітками [3, 8] без очікування повного формування міток. Модель складається з трьох основних частин: базової мережі, сателітної мережі та модуля об'єднання.

Базова мережа виконує роль основного предиктора і навчалась на історичних даних, з остаточно сформованими мітками. Одна сателітна мережа була введена як допоміжний компонент і навчалась на проміжному сигналі, доступному раніше. Схему DFSN мережі представлено на Рис. 2.



Рис. 2. Схema навчання DFSN моделі.

Сателітна мережа використовувала ті самі вхідні ознаки та векторні представлення, що і основна мережа, але для неї проводилась оптимізація власної функції втрат L_{sat} , що дозволило отримати додатковий навчальний сигнал у ситуації неповного або затриманого зворотного зв'язку. Вихід сателітної мережі використовувався як допоміжне представлення, що доповнює основну модель та її функцію втрат L_{main} . Спільне навчання, основної та сателітної мережі, здійснювалося шляхом мінімізації комбінованої функції втрат $L = L_{main} + \lambda L_{sat}$, де $\lambda \in [0, 1]$ — вага сателітного сигналу. Таким чином, навчання відбувалось в умовах частково спостережуваних міток, де сателітна нейронна мережа забезпечувала додатковий навчальний сигнал до моменту появи істинних міток конверсій для свіжих даних.

Як базова, так і сателітна мережа реалізовані у вигляді повнозв'язних нейронних мереж прямого поширення з однаковою структурою прихованих шарів. У якості функції втрат при навчання моделі була використана бінарна перехресна ентропія (binary cross-entropy), що вимірює різницю між бінарними мітками та прогнозованими моделлю ймовірностями:

$$L = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i)],$$

де $y_i \in \{0, 1\}$ — бінарна мітка (конверсія відбулась чи ні), $\hat{y}_i$ — ймовірність події прогнозована моделлю. N — кількість навчальних прикладів що подається

моделі з кожним батчем. Процес мінімізації функції втрат було виконано за допомогою оптимізатора Adam PyTorch, шляхом ітеративного оновлення ваг нейронної мережі методом градієнтного спуску.

5. Основний результат. Після завершення навчання, проведено оцінювання якості моделей на тестовій вибірці. Для оцінки якості прогнозу конверсій було використано метрику ROC-AUC (Receiver Operating Characteristic Area Under Curve) [2]. Для розрахунку використовувались ймовірності конверсій прогнозовані моделями. Розрахунок було проведено засобами sklearn.metrics.

Таблиця 1.

Результати оцінювання моделей на тестовій вибірці

Model	AUC-ROC
MLP	0.49
DFSN	0.72

ROC-AUC широко використовується для оцінки якості бінарних класифікаторів, та відображає здатність моделі розділяти класи (позитивний/негативний). ROC-AUC набуває значень від 0 до 1: відображає ймовірність того, що модель, отримавши випадково обрані позитивний і негативний приклади, надасть позитивному прикладу вищий рейтинг, ніж негативному, а значення близько 0.5 відповідає випадковому вгадуванню.

Значення ROC-AUC отримані для MLP та DFSN наведено у табл. 1. DFSN модель досягла значення 0.72, демонструючи задовільну здатність моделі прогнозувати позитивні приклади конверсій. В той же час, MLP модель досягла значення 0.49, що відповідає випадковому вгадуванню. Отримані результати узгоджуються з висновками наведеними у [8] де теж використовувався датасет Criteo у задачі прогнозування конверсій.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. DFSN архітектура продемонструвала вищу ефективність порівняно з базовою MLP моделлю в умовах затриманого зворотного зв'язку. Це пояснюється використанням сателітної мережі, яка формує додатковий навчальний сигнал на ранніх етапах після взаємодії користувача з системою та сприяє підвищенню точності прогнозування конверсій.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на застосування моделей які враховують механізмами затриманого зворотного зв'язку в задачах А/В тестування [1] та онлайн-експериментів, де важливо отримувати ранню оцінку ефективності варіантів в умовах частково доступних міток у момент навчання моделі. У цьому контексті перспективним є поєднання підходу DFSN із байєсівськими методами та Multi-Armed Bandit [11] алгоритмами для побудови адаптивних систем прийняття рішень у потокових даних.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Оригінальні дані, представлені в дослідженні, відкрито доступні для академічних досліджень за адресою:

<https://ailab.criteo.com/criteo-sponsored-search-conversion-log-dataset>
під ліцензією Creative Commons CC-BY-NC-SA 4.0

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

В. І. Кудак: постановка проблеми, дослідження, пошук та аналіз даних, налаштування та тренування моделей нейронних мереж, інтерпретація результатів та підготовка публікації до друку, написання — рецензування та редагування.; А. С. Вощепинець: наукове керівництво, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Кудак В. І., Вощепинець А. С.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Kohavi, R., Tang, D., & Xu, Y. (2020). *Trustworthy online controlled experiments: A practical guide to A/B testing*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108653985>
2. Fawcett, T. (2006). An introduction to ROC analysis. *Pattern Recognition Letters*, 27(8), 861–874. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>
3. Li, H., Pan, F., Ao, X., Yang, Z., Lu, M., Pan, J., Liu, D., Xiao, L., & He, Q. (2021). Follow the prophet: Accurate online conversion rate prediction in the face of delayed feedback. In *Proceedings of the 44th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR '21)*. (pp. 1902–1911). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3404835.3463045>
4. Li, X., Chen, S., Xv, G., Zhang, L., Luo, M., Chan, Z., Sheng, X.-R., Zhu, H., Xu, J., & Lin, C. (2026). Delayed feedback modeling for post-click gross merchandise volume prediction: Benchmark, insights and approaches. *arXiv*. <https://doi.org/10.1145/3774904.379234>
5. Yang, J.-Q., & Zhan, D.-C. (2022). Generalized delayed feedback model with post-click information in recommender systems. In *Advances in Neural Information Processing Systems (NeurIPS 2022)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.00407>
6. Chapelle, O. (2014). Modeling delayed feedback in display advertising. In *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery*

- and Data Mining (KDD '14)*. (pp. 1097–1105). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/2623330.2623634>
7. Bengio, Y., Courville, A., & Goodfellow, I. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.
 8. Liu, Q., Li, H., Ao, X., Guo, Y., Dong, Z., Zhang, R., Chen, Q., Tong, J., & He, Q. (2023). Online conversion rate prediction via neural satellite networks in delayed feedback advertising. In *Proceedings of the 46th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval (SIGIR '23)*. (pp. 1406–1415). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/3539618.3591747>
 9. McMahan, H. B., Holt, G., Sculley, D., Young, M., Ebner, D., Grady, J., Nie, L., Phillips, T., Davydov, E., Golovin, D., Chikkerur, S., Liu, D., Wattenberg, M., Hrafnkelsson, A. M., Boulos, T., & Kubica, J. (2013). Ad click prediction: A view from the trenches. In *Proceedings of the 19th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD '13)*. (pp. 1222–1230). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/2487575.2488200>
 10. Cheng, H.-T., Koc, L., Harmsen, J., Shaked, T., Chandra, T., Aradhye, H., Anderson, G., Corrado, G., Chai, W., Ispir, M., Anil, R., Haque, Z., Hong, L., Jain, V., Liu, X., & Shah, H. (2016). Wide & Deep Learning for Recommender Systems. In *DLRS 2016: Workshop on Deep Learning for Recommender Systems*. ACM. <https://doi.org/10.1145/2988450.2988454>
 11. Li, L., Chu, W., Langford, J., & Schapire, R. E. (2010). A contextual-bandit approach to personalized news article recommendation. In *Proceedings of the 19th International Conference on World Wide Web (WWW '10)*. (pp. 661–670). Association for Computing Machinery. <https://doi.org/10.1145/1772690.1772758>

Kudak V. I., Voshchepynets A. S. A Comparative Analysis of MLP and DFSN for Predicting Delayed Conversions.

This paper addresses the problem of forecasting under delayed feedback conditions, which leads to a temporal shift in training labels and a degradation in the forecasting quality of classical machine learning models. Particular attention is paid to the problem of label delay bias, which arises because, at the time the training sample is formed, some positive events have not yet occurred or been recorded. The paper compares the prediction quality of two models: the Multilayer Perceptron (MLP) and Delayed Feedback Satellite Networks (DFSN), which combines a main neural network with satellite components to account for partially available data.

Experiments were conducted on the real-world industrial Criteo dataset, characterized by high feature dimensionality, sparsity, and significant class imbalance. Numerical features were standardized, while categorical features were encoded and represented as vector representations.

Model evaluation was performed using the ROC-AUC metric. The results showed that DFSN significantly outperforms the classical MLP in tasks with delayed labels, demonstrating lower sensitivity to label incompleteness during early training stages and higher prediction quality.

Keywords: MLP, DFSN, delayed feedback, neural networks.

Отримано: 03.04.2026

Прийнято: 19.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 004.5+004.942

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).212-218](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).212-218)**A. V. Kudriashova¹, Yu. O. Biletskyi², M. M. Kliap³, N. Ya. Shumylo⁴**

¹ Lviv Polytechnic National University,
Associate Professor at the Department of Virtual Reality Systems,
Doctor of Technical Sciences
alona.v.kudriashova@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0496-1381>

² Lviv Polytechnic National University,
Postgraduate student
yurii.os.biletskyi@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-5891-7618>

³ Uzhhorod National University,
Associate Professor at the Department of Information Science, Physical and Mathematical
Disciplines,
Candidate of Technical Sciences
mihaylo.klyap@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1933-6148>

⁴ Uzhhorod National University,
Senior Lecturer at the Department of Information Science, Physical and Mathematical Disciplines
natalia.shumilo@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4463-8132>

IDENTIFYING INTERFACE USABILITY FACTORS

This article addresses the relevant task of ensuring the usability of digital interfaces in the early stages of their design. The necessity of transitioning from an intuitive to a systematic approach in prototyping is substantiated due to the increasing complexity of software products and the risks of accumulating architectural errors. An approach to identifying the key interface quality factors based on a systematic literature review was proposed. Based on the defined research questions, a structured search query was developed, combining domain terms, quality metrics, and methodological filters. The sample formation and source analysis were conducted using the international PRISMA methodological protocol, which allowed for the selection of 19 relevant full-text scientific papers from the Scopus and Web of Science Core Collection databases. Four key groups of factors that have a significant impact on usability were identified and systematized: structural-logical, visual perception, context of use, and prototype fidelity. A classification of typical interaction problems was developed, among which navigational gaps caused by designing from an internal system hierarchy, visual-ergonomic screen overload, a lack of system feedback, and the cognitive-emotional exhaustion of users dominate. The practical significance of the obtained results lies in the possibility of using the formed knowledge base to develop specialized engineering checklists and algorithms for heuristic interface evaluation. The application of these results allows for improving design accuracy, optimizing testing costs, and minimizing the risks of redesigning the architecture at the coding stage.

Keywords: usability, user experience, interface design, prototyping, prototype fidelity, interface evaluation, systematic literature review, factor.

1. Introduction. Modern digital systems have reached such a level of functional complexity that human cognitive load becomes the main barrier to effective task performance. Today, user experience (UX) does not merely accompany a software product but determines its viability. Systems are expected to provide a logical, transparent, and barrier-free digital environment. However, the practice of intuitive

design still dominates, where the interaction architecture is formed without deep preliminary analysis, and usability verification is postponed to the later stages of development. This leads to navigational gaps, emotional frustration, and product abandonment. Identifying the key influencing factors and understanding the mechanics of typical errors allow developers to transition to a scientifically grounded design model. This necessitates an in-depth analysis of the current scientific discourse regarding the approaches, methods, and criteria for evaluating the quality of digital prototypes.

2. Problem Statement. Despite a significant number of empirical studies in the UI/UX field, the current scientific basis regarding interface quality criteria remains fragmented and primarily focused on narrow subject areas. The lack of a unified classification of universal usability factors and typical user problems specifically at the conceptual prototyping stage complicates the creation of standardized evaluation metrics. This creates a need to consolidate scattered data into a cohesive methodological structure suitable for practical engineering application.

3. Analysis of Recent Research. To objectify fragmented empirical data, modern research in the field of user experience and interface design increasingly relies on the methodology of systematic literature reviews, specifically following the PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) standard.

In [1], the PRISMA approach was applied to analyze the usability of voice user interfaces. The authors emphasize that a systematic review minimizes bias and ensures transparency in the process of selecting quality criteria. A similar methodological approach was used in [2] while analyzing the evolution of educational chatbots. Their study demonstrates how strict inclusion and exclusion criteria help identify gaps in graphical interface development methods and approaches to their testing. Study [3] is dedicated to the systematization of usability concepts in gamified systems. Through a systematic search in leading scientometric databases, the authors collected hundreds of scattered recommendations and grouped them into a single set of guidelines.

4. Main Results. To identify interface usability factors, a systematic literature review was conducted according to the methodology [4]. The following research questions (RQs) were formulated:

RQ1: What groups of factors have the most significant impact on interface usability at the prototyping stage?

RQ2: What are the main problems that arise when using interfaces?

The following inclusion criteria were defined: only peer-reviewed scientific papers published in journals indexed in the Scopus or Web of Science Core Collection databases are included in the analysis; the primary focus is on interface usability issues; the selected works must outline factors, parameters, or requirements related to interface usability. The exclusion criteria were as follows: studies not written in English are excluded; publications without full open access that cannot be comprehensively analyzed are also excluded.

Considering the research questions, the following search string was formulated:

$$(userinterface * \vee prototype * OR interface design *) \\ \wedge (usability \vee user experience \vee ease of use)$$

$$\wedge \left(\begin{array}{l} \textit{fideliti} \vee \textit{usabilitytesting} \vee \\ \textit{usability evaluation} \vee \textit{user testing} \end{array} \right).$$

The use of the asterisk (*) wildcard ensures the inclusion of all grammatical variations.

The PRISMA flow diagram [5], developed to demonstrate the logic of searching for relevant scientific studies, is presented in Figure 1.

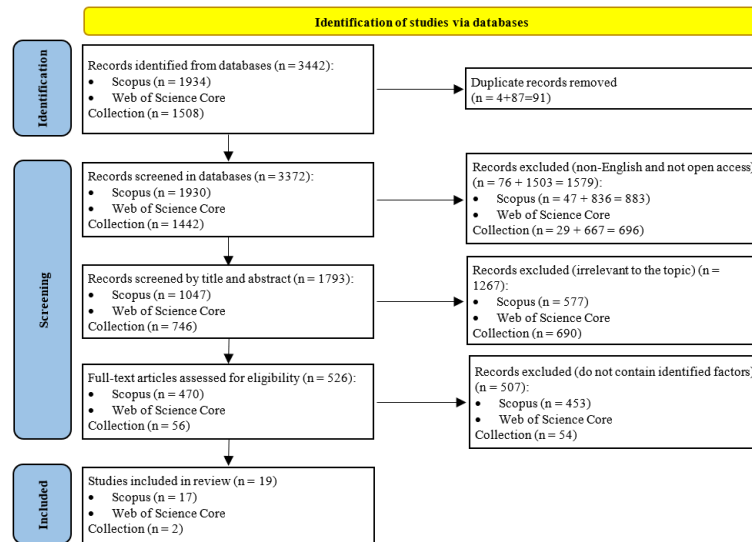


Figure 1. PRISMA flow diagram.

The sample formation process was carried out in accordance with the PRISMA protocol. At the identification stage, 3442 publications matching the search query were found in the Scopus and Web of Science scientometric databases. As a result, 19 scientific papers published between 2016 and 2025 were included. The sample covers empirical studies, theoretical reviews, project-oriented works, etc., directly related to prototyping, interface quality evaluation methods, and user experience factors.

The analysis of the selected array of scientific publications allowed for the identification of key groups of factors that have a significant impact on interface usability during their design. To transition from an intuitive design to an engineering-based approach, it is necessary to consider four main clusters: structural-logical factors, visual perception factors, context of use factors, and prototype fidelity factors. Within each group, specific determinants that directly affect the quality of interaction were identified.

Structural-logical factors form the fundamental level of interaction and determine the extent to which the system's architecture aligns with the user's mental model. This group includes the following factors: continuity of the task flow [6], architectural transparency and hierarchy depth [7, 8], and cognitive load optimization. Visual perception factors relate to the mechanisms of perceiving information from the screen and managing user attention. These include: spatial arrangement and visual weight [9], the visibility of interactive elements [10], and color semantics and contrast [11]. Context of use factors indicate that usability is a relative value that depends on the target audience and the product's application environment. The

key factors here are: correspondence to the user persona [12–15], the specifics of the interaction environment [16], and trust and security [17, 18]. Prototype fidelity factors determine the methodological accuracy of the testing process and the validity of the obtained results. Choosing the right balance between these factors determines the economic feasibility of error detection. The factors in this group are: the level of graphical abstraction [19, 20] and the level of functional interactivity [21].

The answer to the second research question is based on the analysis of problems identified in empirical studies.

An in-depth analysis of the identified problems indicates that navigational gaps remain the most common systemic defect. In corporate portals [7] or e-government applications [13], developers often duplicate the bureaucratic hierarchy directly in the design. This leads to the user being forced to learn the administrative structure instead of performing their direct task. Eliminating this problem requires the application of an object-oriented approach to navigation design. Visual perception problems today are the result of a conflict between rich functionality and minimalist trends. Eye-tracking research [9] shows that interfaces with a dense data layout cause chaotic eye wandering. On the other hand, excessively hiding elements in mobile applications [10] for the sake of design "cleanliness" radically reduces the visibility of important functions. A significant volume of critical problems is related to feedback. The lack of an immediate system micro-reaction (e.g., click animation) and macro-reaction (a clear data processing status) leads to a state of uncertainty. Studies [18, 22] confirm that a deficit of system transparency and unclear error messages are the main triggers for abandoning applications in the service and finance sectors. Finally, cognitive-emotional problems, which are recorded using hierarchical heuristic analysis [23] and emotion recognition systems [24], arise due to the overload of human working memory. When an interface uses professional terminology instead of familiar vocabulary [16] or does not easily allow the undoing of an erroneous action, the user experiences frustration. This destroys a positive user experience even if the software code is technically flawless.

5. Conclusions and prospects for further research. The conducted study allowed for the systematization of modern approaches to ensuring the usability of digital interfaces. It was established that the quality of interaction is determined by four key groups of factors: structural-logical, visual perception, context of use, and prototype fidelity. Ignoring these factors at the early stages of development leads to the accumulation of errors, which are later difficult and expensive to correct.

As the analysis showed, the main obstacles in interface usage are predominantly of a design rather than a technical nature. Users most often encounter illogical navigation, visual screen overload, a lack of clear system feedback, and cognitive exhaustion. Most of these barriers arise precisely when an interface is built around the internal logic of the system or organization, rather than around the actual goals of the user.

Conflicts of interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The study was conducted without financial support.

Data availability

All data are available, either in numerical or graphical form, in the main text of the manuscript.

Use of artificial intelligence

The authors confirm that they did not use artificial intelligence technologies when creating the current work.

Author contributions

A. V. Kudryashova – conceptualization, data preparation, formal analysis, scientific supervision, methodology, project administration, writing (reviewing and editing); Yu. O. Biletsky – research, resources, visualization, writing – original project, translation design, text type validation; M. M. Klyap – data curation, methodology testing, external communications, financial support, experimental design development; N. Ya. Shumylo – software, mathematical modeling, results verification, critical analysis of system architecture.

Copyright ©



(2026). Kudriashova A. V., Biletskyi Yu. O., Kliap M. M., Shumylo N. Ya. This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License.

References

1. Deshmukh, A. M., & Chalmeta, R. (2024). User Experience and Usability of Voice User Interfaces: A Systematic Literature Review. *Information*, 15(9), 579. <https://doi.org/10.3390/info15090579>
2. Ramandanis, D., & Xinogalos, S. (2023). Designing a Chatbot for Contemporary Education: A Systematic Literature Review. *Information*, 14(9), 503. <https://doi.org/10.3390/info14090503>
3. Magylaitė, K., Kapočius, K., Butleris, R., & Čeponienė, L. (2022). Towards High Usability in Gamified Systems: A Systematic Review of Key Concepts and Approaches. *Applied Sciences*, 12(16), 8188. <https://doi.org/10.3390/app12168188>
4. De Cassai, A., Dost, B., Tulgar, S., & Boscolo, A. (2025). Methodological Standards for Conducting High-Quality Systematic Reviews. *Biology*, 14(8), 973. <https://doi.org/10.3390/biology14080973>
5. Rethlefsen, M. L., & Page, M. J. (2022). PRISMA 2020 and PRISMA-S: common questions on tracking records and the flow diagram. *Journal of the Medical Library Association: JMLA*, 110(2), 253. <https://doi.org/10.5195/jmla.2022.1449>
6. Doi, T., & Yamaoka, T. (2019). Quantifying Usability via Task Flow-Based Usability Checklists for User-Centered Design. *Designs*, 3(1), 2. <https://doi.org/10.3390/designs3010002>

7. Alao, O. D., Priscilla, E. A., Amanze, R. C., Kuyoro, S. O., & Adebayo, A. O. (2022). User-centered/user experience Uc/Ux design thinking approach for designing a university information management system. *Ingénierie des Systèmes d'Information*, 27(4), 577–590. <https://doi.org/10.18280/isi.270407>
8. Caesaron, D., Adyatama, A. R., Mufidah, I., Fitriani, E., Daliana, N., & Utama, N. I. (2025). A Hybrid Approach to User Interface Design: Integrating DT and QFD with Usability Evaluation in a Detection-Based Classification System for the Sugar-cane Industry. *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 15(5), 28286–28293. <https://doi.org/10.48084/etasr.12587>
9. Blundell, J., & et al. (2023). Multivariate Analysis of Gaze Behavior and Task Performance Within Interface Design Evaluation. *IEEE Transactions on Human-Machine Systems*, 53(5), 875–884. <https://doi.org/10.1109/THMS.2023.3305715>
10. Weichbroth, P. (2020). Usability of Mobile Applications: A Systematic Literature Study. *IEEE Access*, 8, 55563–55577. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2981892>
11. Swasty, W., Akista, R. T., Soedewi, S., Mustikawan, A., Mukmin, M. A., & Hafidzan, M. A. (2025). From Empathize to Prototype: A Design Thinking Approach in Developing a Web-based Color Palette Generator. *Paper ASIA*, 41(4b), 62–74. <https://doi.org/10.59953/paperasia.v41i4b.596>
12. Alnanih, R., Bahatgeg, N., Alamri, M., & Algizani, R. (2019). Mobile-d approach-based persona for designing user interface. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, 8(5), 2597–2607. <https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/111852019>
13. Alabdulrahman, R., Alqahtani, F., & Binkhonain, M. (2025). Uncovering Usability Issues in Mobile Government Applications: A User-Centered Approach. *IEEE Access*, 13, 169352–169366. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3614165>
14. Khanza, A., Jannah, A., Kemangi, A., Rezha, A., Najaf, E., & Permatasari, R. (2025). UI/UX Design of Ruang Kajian Application Using the Design Thinking Method. *International Journal of Engineering, Science and Information Technology*, 5(1), 145–156. <https://doi.org/10.52088/ijesty.v5i1.665>
15. Tacoronte-Sosa, J. P., & Peña-Hita, M. Á. (2025). Design and Evaluation of a Serious Game Prototype to Stimulate Pre-Reading Fluency Processes in Paediatric Hospital Classrooms. *Multimodal Technologies and Interaction*, 9(9), 90. <https://doi.org/10.3390/mti9090090>
16. Anila, M., & Daramola, O. (2025). Applications, technologies, and evaluation methods in smart aquaponics: a systematic literature review. *Artificial Intelligence Review*, 58, 25. <https://doi.org/10.1007/s10462-024-11003-x>
17. Christianto, K., Chakir, A., Andry, J. F., Adikara, F., Liliana, L., & Felicia, J. (2024). Modeling User Experience in Delivery Applications Using the Design Thinking Method and System Usability Scale. *Journal of Computer Science*, 20(7), 722–729. <https://doi.org/10.3844/jcssp.2024.722.729>
18. Theys, T., Mechant, P., De Marez, L., & Saldien, J. (2025). Understanding User Perceptions of Personal Data Stores: A Prototype-Driven Multi-Scenario Study. *International Journal of Human-Computer Interaction*, 1–37. <https://doi.org/10.1080/10447318.2025.2545467>
19. Roberts, J. C., Headleand, C., & Ritsos, P. D. (2016). Sketching Designs Using the Five Design-Sheet Methodology. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 22(1), 419–428. <https://doi.org/10.1109/TVCG.2015.2467271>
20. Joyner, J. S., Kong, A., Angelo, J., He, W., & Vaughn-Cooke, M. (2022). Development of Low-Fidelity Virtual Replicas of Products for Usability Testing. *Applied Sciences*, 12(14), 6937. <https://doi.org/10.3390/app12146937>
21. Kretzer, F., & Maedche, A. (2025). TESH: A Usability Test-Driven Prototyping Assistant Connecting Designers with Crowd-Testers. *Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction*, 9(2), 1–24. <https://doi.org/10.1145/3711082>
22. Tombeng, M., & Mambu, J. Y. (2024). Designing the UI/UX for a Shoe Repair Application using the Design Thinking Method. *International Journal of Engineering Science and Information Technology*, 4(3), 106–117. <https://doi.org/10.52088/ijesty.v4i3.538>
23. Talero-Sarmiento, L., Gonzalez-Capdevila, M., Granollers, A., Lamos-Diaz, H., & Pistili-Rodrigues, K. (2024). Towards a Refined Heuristic Evaluation: Incorporating Hierarchical

- Analysis for Weighted Usability Assessment. *Big Data and Cognitive Computing*, 8(6), 69. <https://doi.org/10.3390/bdcc8060069>
24. Drungilas, D., Ramašauskas, I., & Kurmis, M. (2024). Emotion Recognition in Usability Testing: A Framework for Improving Web Application UI Design. *Applied Sciences*, 14(11), 4773. <https://doi.org/10.3390/app14114773>

Кудряшова А. В., Білецький Ю. О., Кляп М. М., Шумило Н. Я.
Визначення факторів зручності користування інтерфейсами.

У статті розглянуто актуальну задачу забезпечення зручності користування цифровими інтерфейсами на ранніх стадіях їх проектування. Обґрунтовано необхідність переходу від інтуїтивного до системного підходу в прототипуванні через ускладнення програмних продуктів та ризики накопичення архітектурних помилок. Запропоновано підхід до виявлення ключових факторів якості інтерфейсів на основі систематизованого літературного огляду. На основі визначених дослідницьких питань розроблено структурований пошуковий запит, що поєднує терміни об'єктної області, метрики якості та методологічні фільтри. Формування вибірки та аналіз джерел виконано з використанням міжнародного методологічного протоколу PRISMA, що дозволило відібрати 19 релевантних повнотекстових наукових праць з баз Scopus та Web of Science Core Collection. Виокремлено та систематизовано чотири ключові групи факторів, що здійснюють суттєвий вплив на зручність користування: структурно-логічні, візуального сприйняття, контексту використання та рівня деталізації прототипу. Розроблено класифікацію типових проблем взаємодії, серед яких домінують навігаційні розриви, зумовлені проектуванням від внутрішньосистемної ієрархії, візуально-ергономічне перевантаження екранів, дефіцит системного зворотного зв'язку та когнітивно-емоційне виснаження користувачів. Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання сформованої бази для розроблення спеціалізованих інженерних чек-листів та алгоритмів евристичного оцінювання інтерфейсів. Застосування результатів дозволяє підвищити точність проектування, оптимізувати витрати на тестування та мінімізувати ризики перероблення архітектури на стадії написання програмного коду.

Ключові слова: зручність користування, користувацький досвід, проектування інтерфейсів, прототипування, рівень деталізації прототипу, оцінювання інтерфейсів, систематизований літературний огляд, фактор.

Recived: 28.03.2026

Accepted: 12.04.2026

Published: 30.04.2026

УДК 004.056:37.018.43:37.091

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).219-229](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).219-229)**І. М. Лях¹, Т. В. Дитко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри інформатики та фізико-математичних дисциплін,
доктор технічних наук, професор
igor.lyah@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5417-9403>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
taras.dytko@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8860-8183>

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ КОГНІТИВНОГО СТАНУ ЗДОБУВАЧІВ ОСВІТИ У ВІРТУАЛЬНОМУ НАВЧАЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ НА ОСНОВІ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ ДАНИХ

У дослідженні запропоновано модель мультимодального збору та обробки даних для оцінювання когнітивного навантаження здобувачів освіти у віртуальному навчальному середовищі, що є актуальним на тлі розвитку дистанційної та змішаної форм навчання. На основі інтегрального показника навантаження побудовано орієнтований граф прийняття рішень з трьома зонами: прийнятною, підвищеного ризику та критичною, а також математичну модель динаміки засвоєння знань, яка враховує нелінійну залежність ефективності від навантаження та фазу деградації при його перевищенні. Імітаційне моделювання у MATLAB Simulink підтвердило фазовий перехід від ефективного навчання до зниження продуктивності, що демонструє можливість використання моделі для адаптивного управління навчальним процесом, прогнозування когнітивного навантаження та персоналізації освітньої траєкторії.

Ключові слова: когнітивний стан, когнітивне навантаження, мультимодальні дані, віртуальне навчальне середовище, прогнозування, імітаційне моделювання, адаптивне навчання, MATLAB Simulink.

1. Вступ. Стрімкий розвиток цифрових технологій і кризи, з якими стикнулися Україна та світ, суттєво трансформували освітній простір. Поширення мультимедійних платформ і хмарних сервісів сприяло впровадженню дистанційного та змішаного навчання, зокрема асинхронних форматів на основі відеолекцій, інтерактивних модулів і віртуальних середовищ [1]. Це забезпечує гнучкість, розширює доступ до матеріалів і підтримує персоналізацію навчання.

Водночас такі середовища створюють нові виклики: відсутність безпосереднього педагогічного супроводу, потреба в самостійному плануванні та великий обсяг інформації підвищують когнітивне навантаження [2]. Його надлишок погіршує засвоєння матеріалу, мотивацію й результати, тоді як недостатність знижує залученість і концентрацію [3].

Отже, контроль і своєчасне оцінювання когнітивного стану є ключовими для ефективності навчання у віртуальному середовищі. Традиційні методи, як-от анкетування чи постфактум аналіз, є суб'єктивними та не забезпечують оперативного реагування [4].

2. Постановка завдання. З огляду на сучасні виклики розвитку освіти актуальним є впровадження інформаційних технологій, що відстежують поведінкові, часові, фізіологічні та інші характеристики взаємодії здобувача освіти

з навчальним контентом, а проблема моделювання та прогнозування когнітивного стану на основі мультимодальних даних має важливе науково-практичне значення для створення інтелектуальних технологій адаптивного управління процесом дистанційного та інформального навчання у закладах вищої освіти.

Метою дослідження є розроблення математичної моделі прогнозування когнітивного стану здобувача освіти у віртуальному навчальному середовищі на основі мультимодальних даних.

3. Аналіз останніх досліджень та публікацій. Сучасні дослідження моніторингу когнітивного стану у VLE переходять від анкетування до об'єктивних, безперервних і мультимодальних вимірювань, здатних фіксувати короточасні зміни навантаження та уваги [6, 7]. Особливу увагу приділяють відстеженню погляду як ненав'язливому індикатору: аналіз фіксацій і візуальної концентрації допомагає виявляти перевантажені фрагменти навчального матеріалу [7]. Поєднання окуломоторних і нейрофізіологічних сигналів підвищує точність оцінювання завдяки взаємному доповненню каналів [14].

Машинне навчання застосовується для класифікації рівнів когнітивного навантаження за даними ЕЕГ і eye-tracking, демонструючи перспективність, але залишаючи відкритими питання переносимості моделей і їх інтерпретації [14]. У 3D/XR-середовищах підкреслюється змінність навантаження в часі та необхідність time-sensitive моніторингу, а також проблема відсутності уніфікованих методик [9].

Педагогічні підходи, зокрема scaffolding, можуть впливати на когнітивне навантаження й мотивацію [11], а адаптивні системи з мультимодальними даними підвищують ефективність навчання [12]. Українські дослідження підтверджують актуальність моніторингу, але переважно зосереджені на організаційних аспектах, без формальних моделей когнітивного стану [13]; водночас існують приклади використання eye-tracking для автоматизованого контролю поведінки [10].

Запропонований підхід поєднує мультимодальне вимірювання, часово-сегментоване моделювання з виявленням піків і провалів та імітаційну валідацію в Simulink [9, 11]. Це дозволяє не лише класифікувати, а й прогнозувати когнітивний стан у часі, оцінювати вплив змін навчального контенту та інтегрувати результати з VLE-логами для практичного використання.

4. Основний результат. На початковому етапі дослідження було створено концептуальну структурну-функціональну модель мультимодального збору та обробки даних для моделювання й прогнозування когнітивного стану здобувачів освіти у віртуальному навчальному середовищі (рис. 1). На цьому етапі було визначено основні джерела інформації, канали отримання даних та логіку їх інтеграції в єдину інформаційну систему оцінювання когнітивного навантаження [15].

Модель передбачає мультимодальний збір даних, що охоплює взаємодію здобувача освіти з віртуальним навчальним середовищем, результати самооцінки когнітивного навантаження, поведінкові показники роботи в системі та відеопотік із веб-камери для аналізу міміки й концентрації уваги; окремим блоком реалізовано визначення об'єкта концентрації та поділ домену зацікавленості, що дозволяє розраховувати індекс зосередженості під час виконання навчальних завдань [15, 16].

На основі розробленої концептуальної моделі виконана побудова орієнтованого графа прийняття рішень для визначення та прогнозування рівня когнітивного навантаження здобувачів освіти у віртуальному навчальному середовищі з урахуванням критеріїв оцінювання на етапі розробки та зниження ризику інформаційної технології.

На рисунку 2 показано орієнтований граф, що формалізує логіку переходів між станами когнітивного навантаження залежно від результатів мульти-модального аналізу: початковим вузлом є SG, що відповідає стартовому стану системи після отримання інтегрованого вектора ознак, з якого система переходить до стану S1 для оцінки базової можливості виконання навчального завдання здобувачем за поточного когнітивного стану [16].

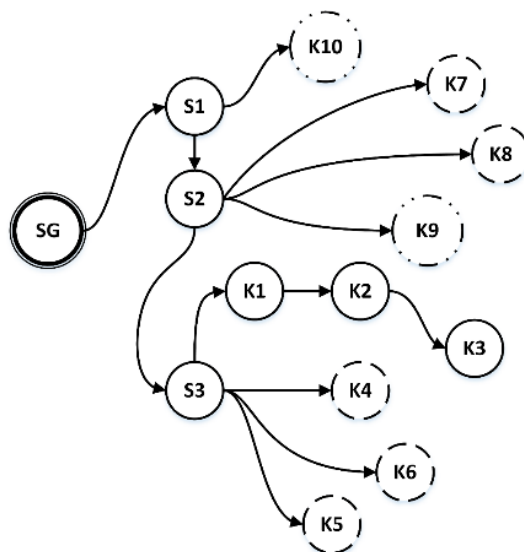


Рис. 2. Орієнтований ациклічний граф прийняття рішень.

Якщо виконання завдання неможливе через надмірне когнітивне навантаження, формується результат K10 — критичний стан неприйнятної зони, що потребує негайної адаптації навчального сценарію або зміни алгоритмів системи. Якщо завдання виконуване, система переходить до вузла S2.

У вузлі S2 оцінюється допустимість навантаження. При перевищенні меж система переходить до K7-K9 (високе навантаження): рівні K7-K8 потребують додаткового аналізу та адаптації, а K9 (разом із K10) належить до критичної зони перевантаження. Якщо навантаження допустиме, виконується перехід до S3.

У вузлі S3 визначається оптимальність навантаження. Значення K1-K3 відповідають низькому та оптимальному рівню й не потребують корекції. Якщо навантаження не є оптимальним, система переходить до K4-K6 — середнього рівня, що вимагає адаптації контенту або навчальної траєкторії.

Отже, виділено три зони: K1-K3 — оптимальна; K4-K8 — підвищений ризик із потребою адаптації; K9-K10 — критичне навантаження, що вимагає суттєвої перебудови навчального процесу. Отже, побудований граф виконує не лише функцію формалізації алгоритму визначення рівня когнітивного навантаження, а й інтегрує механізм ризик-орієнтованої класифікації станів у межах інформ-

ційної технології моніторингу. Це дозволяє використовувати його як інструмент прийняття інженерних та педагогічних рішень під час проектування, моделювання та валідації системи прогнозування когнітивного стану у віртуальному навчальному середовищі.

Математична модель моделювання та прогнозування когнітивного стану здобувача освіти у віртуальному навчальному середовищі ґрунтується на поєднанні мультимодального представлення даних та структурного синтезу моделі на основі методу групового врахування аргументів (МГВА) [17], а її результат інтерпретується через орієнтований граф прийняття рішень $SG \rightarrow S1 \rightarrow S2 \rightarrow S3 \rightarrow K_i$.

$$D(t) = \{D_{ule}(t), D_{att}(t), D_{face}(t), D_{sig}(t), D_{sr}(t)\}, \quad (1)$$

де $D_{ule}(t)$ — поведінкові метрики взаємодії з ВНС, $D_{att}(t)$ — параметри концентрації уваги, $D_{face}(t)$ — характеристики міміки, $D_{sig}(t)$ — сигнали для спектрального аналізу, $D_{sr}(t)$ — самооцінка когнітивного навантаження.

Після попередньої обробки формується інтегрований вектор ознак:

$$x(t) = [x_{ule}(t), I_{conc}(t), x_{face}(t), P_{\alpha}(t), P_{\beta}(t), P_{\mu}(t), P_{\lambda}(t), x_{sr}(t)], \quad (2)$$

де $I_{conc}(t)$ — індекс зосередженості, $P_{\alpha}, P_{\beta}, P_{\mu}, P_{\lambda}$ — спектральні енергії відповідних діапазонів.

Індекс концентрації визначається через ентропійну модель:

$$I_{conc}(t) = 1 - \frac{-\sum_{j=1}^m p_j(t) \log_{p_j}(t)}{\log m}, \quad (3)$$

де $p_j(t)$ — частка фіксацій у j -му домені зацікавленості.

Спектральні компоненти обчислюються як:

$$P_b(t) = \int S(f, t) df, \quad b \in \{\alpha, \beta, \mu, \lambda\}, \quad (4)$$

Після нормалізації формується вектор зменшеної розмірності:

$$z_t = \Phi(x(t)), \quad (5)$$

де $\Phi(\cdot)$ — оператор редукції розмірності.

Саме $z(t) = \{z_1(t), \dots, z_m(t)\}$ використовується як множина аргументів у МГВА. На першому шарі для кожної пари $z_i(t), z_j(t)$ будується часткова модель:

$$y_{ij}(t) = a_0 + a_1 z_i(t) + a_2 z_j(t) + a_3 z_i(t) z_j(t) + a_4 z_i^2(t) + a_5 z_j^2(t), \quad (6)$$

де a_k — коефіцієнти, визначені методом найменших квадратів.

Для кожної часткової моделі обчислюється зовнішній критерій:

$$E_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_{ij}(t) - y(t))^2, \quad (7)$$

де $y(t)$ — еталонний рівень когнітивного навантаження.

Ітераційний синтез завершується при виконанні умови:

$$E^{(l+1)} > E^l, \quad (8)$$

що відповідає мінімуму зовнішнього критерію.

Фінальна модель прогнозування когнітивного навантаження набуває вигляду:

$$\hat{y}(t) = F_{MGVA}(z(t)), \quad (9)$$

де $\hat{y}(t)$ — неперервна оцінка когнітивного навантаження.

Отримане значення дискретизується згідно зі шкалою графа:

$$\hat{k}(t) = Q(\hat{y}(t)), \hat{k}(t) \in \{K1, \dots, K10\}, \quad (10)$$

Далі через функцію ризику

$$\rho(\hat{k}(t)) = \begin{cases} 0, & \hat{k} \in \{K1, K2, K3\}, \\ 1, & \hat{k} \in \{K4, \dots, K8\}, \\ 2, & \hat{k} \in \{K9, K10\}, \end{cases} \quad (11)$$

визначається зона прийняття рішення, що ініціює переходи між станами $S1$, $S2$, $S3$ у графі та формує адаптивні дії у ВНС.

Для перевірки адекватності моделі виконано імітаційне моделювання зміни когнітивного стану у MATLAB Simulink (рис. 3) [19]. Модель відображає нелінійну (інверсну U-подібну) залежність ефективності навчання від когнітивного навантаження та враховує деградацію результатів при перевантаженні.

У межах експерименту розглянуто два сценарії: базовий режим із низьким стабільним навантаженням і режим переходу до критичної зони перевантаження.

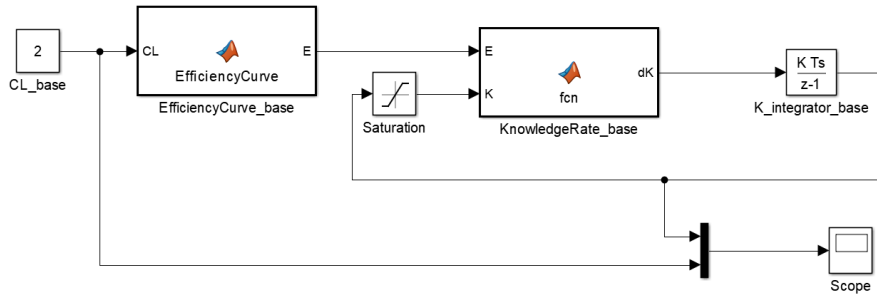


Рис. 3. Структурна схема базової моделі динаміки засвоєння знань без впливу змінного когнітивного навантаження у середовищі MATLAB Simulink.

У базовому сценарії при значенні $CL = 2$ спостерігається плавне зростання функції засвоєння знань $K(t)$, що відповідає позитивному значенню похідної dK/dt . За таких умов ефективність E наближається до оптимального значення, а компонент навчання $rE(1 - K)$ домінує над компонентом втрати (рис. 4). Це підтверджує коректність моделі у випадку допустимого когнітивного стану та узгоджується з положеннями когнітивної теорії навантаження.

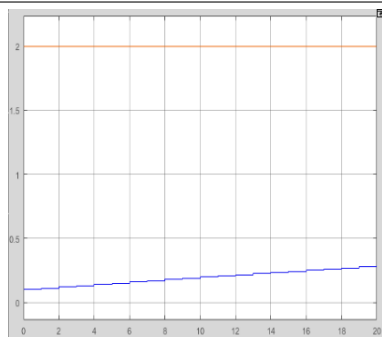


Рис. 4. Динаміка засвоєння знань $K(t)$ при сталому низькому рівні когнітивного навантаження ($CL = 2$) у базовому режимі моделювання.

У другому сценарії (рис. 5) після переходу $CL(t)$ у критичну зону ($CL \approx 10$) ефективність E різко зменшується, що призводить до переважання компоненти деградації $d(1 - E)K$ у структурі рівняння. Таким чином похідна dK/dt стає від'ємного значення, що відповідає зниженню якості засвоєної навчальних матеріалів. Така поведінка системи відповідає психофізіологічним уявленням про когнітивне виснаження, втрату концентрації уваги та погіршення навчальної продуктивності. Розроблена модель демонструє, що перевантаження не лише зупиняє засвоєння нових знань, а також може спричинити їх часткову втрату як результат перевищення індивідуального ресурсного порогу.

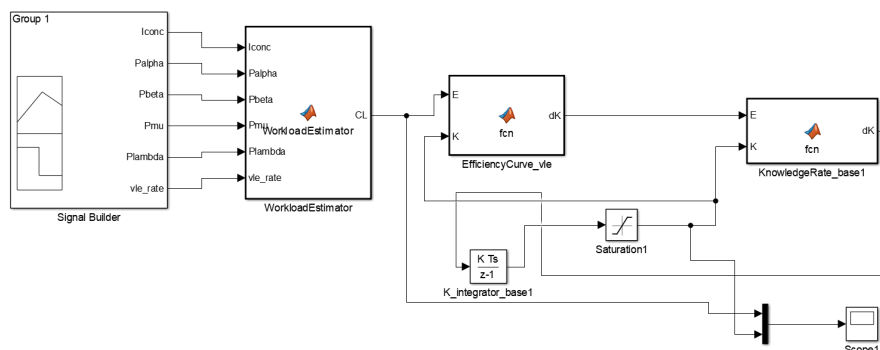


Рис. 5. Структурна схема моделі впливу змінного когнітивного навантаження у віртуальному навчальному середовищі на динаміку засвоєння знань (VLE-сценарій) у MATLAB Simulink.

Результати імітаційного моделювання (рис. 6) у середовищі MATLAB Simulink дозволили проаналізувати динамічну поведінку системи в умовах змінного когнітивного навантаження [20]. На поданому графіку жовта крива відображає рівень когнітивного навантаження $CL(t)$, сформований на основі мульти-модальних показників (індекси α , β , μ , λ , поведінкові параметри та швидкість взаємодії з контентом), тоді як синя крива відображає зміну інтегрального показника засвоєння знань $K(t)$.

На першому відрізку часу (0-4 с) система перебуває у зоні помірного навантаження, що відповідає значенню $CL \approx 4-7$, та знаходиться в середній зоні орієнтованого графа (K4-K8). В свою чергу ефективність $E(CL)$ залишається

відносно стабільною, а приріст знань dK/dt має додатне значення. Таким чином є підстави стверджувати, що при когнітивному навантаженні в межах допустимої зони навчальний процес продовжується проте можливе зниження інтенсивності засвоєння матеріалу.

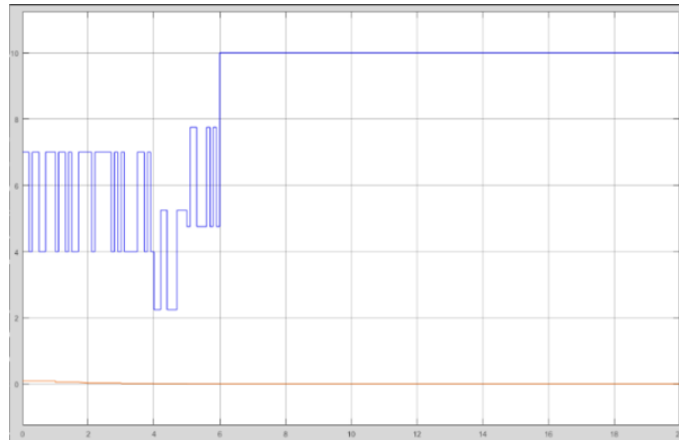


Рис. 6. Імітаційний результат моделювання: вплив зростання інтегрального показника когнітивного навантаження $CL(t)$ на ефективність навчання та інтегральний показник знань $K(t)$.

На другому відрізку часу (4-5 с) видно, що система перебуває у зоні короткочасного зниження рівня когнітивного навантаження, яке відповідає значенню $CL \approx 2-3$, та відповідно переходу у прийнятну зону (К1-К3). У цей момент ефективність $E(CL)$ зростає, оскільки система наближається до оптимальної області функціонування. Відповідно, у рівнянні (12)

$$\frac{dK}{dt} = rE(1 - K) - d(1 - E)K, \quad (12)$$

На цьому етапі зростає вплив складової $rE(1 - K)$, тоді як деградація мінімізується, що створює сприятливі умови для засвоєння знань і когнітивного відновлення.

Однак на інтервалі 5-6 с спостерігається нестабільність: когнітивне навантаження коливається в межах $CL \approx 5-8$ (зона К4-К8), що свідчить про фазовий перехід і адаптаційну перебудову системи. Нелінійна функція ефективності $E(CL)$ змінюється нерівномірно, погіршуючи якість засвоєння.

Поблизу критичного порогу навіть незначні зміни мають значний вплив, що проявляється у момент 6 с різким переходом до критичного рівня ($CL = 10$, зона К10). Відповідно до розробленої математичної моделі у цій області функція ефективності наближається до нуля (13):

$$E(CL) \rightarrow 0, \quad (13)$$

Внаслідок цього у рівнянні динаміки знань

$$\frac{dK}{dt} = rE(1 - K) - d(1 - E)K, \quad (14)$$

перший доданок (навчання) зменшується, а другий (деградація) починає домінувати. Саме тому на графіку спостерігається зниження або стагнація показника $K(t)$, що свідчить про втрату продуктивності засвоєння.

Важливо зазначити, що модель демонструє не просто зменшення темпу навчання, а фазовий перехід системи — від режиму накопичення до режиму деградації. Це підтверджує коректність інтеграції нелінійної функції ефективності та механізму ризик-орієнтованої класифікації, закладеного в орієнтованому графі $SG \rightarrow S1 \rightarrow S2 \rightarrow S3 \rightarrow K_i$.

Отримані результати підтверджують нелінійний вплив когнітивного навантаження на ефективність навчання, існування критичного порогу CL_{crit} , після якого система переходить у зону деградації, адекватне відображення фази зростання знань і когнітивного виснаження та узгодження динамічної поведінки з дискретною логікою орієнтованого графа; це обґрунтовує використання розробленої моделі як механізму раннього попередження про перевантаження та автоматичного регулювання інтенсивності подачі навчального матеріалу та активації пауз при наближенні до критичної зони.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. У статті запропоновано модель прогнозування когнітивного стану здобувачів освіти у VLE на основі мультимодальних даних, яка поєднує структурно-функціональну модель збору даних, орієнтований граф прийняття рішень і динамічну математичну модель впливу навантаження на засвоєння знань; формалізовано інтегральний показник $CL(t)$ та модель динаміки знань $K(t)$ з урахуванням фази зростання й деградації при перевищенні критичного порогу, орієнтований граф класифікує стани на три зони (прийнятну, ризику, критичну), а імітаційне моделювання в MATLAB Simulink підтвердило адекватність і довело можливість використання моделі для адаптивного регулювання навчального процесу та прогнозування змін когнітивного стану в часі.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

І. М. Лях — концептуалізація, підготовка даних, формальний аналіз, написання — оригінальний проєкт, науковий нагляд; Т. В. Дитко — методологія, адміністрування проєкту, написання (рецензування та редагування).

Авторські права ©



(2026). Лях І. М., Дитко Т. В.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

Список використаної літератури

1. Aksak, N. H., Tatarnikov, A. O., & Kushnaryov, M. V. (2025). An agent-based model for personalized learning in NetLogo using Q-learning. *Applied Questions of Mathematical Modelling*, 8(1), 11–25. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2025-8-1-1>
2. Larmuseau, C., & et al. (2020). Multimodal learning analytics to investigate cognitive load during online problem solving. *British Journal of Educational Technology*, 51(5), 1548–1562. <https://doi.org/10.1111/bjet.12958>
3. Masrek, M. N., & et al. (2024). Information overload, anxiety, stress, and depression of online distance learners. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*, 13(6), 3705. <https://doi.org/10.11591/ijere.v13i6.29009>
4. Surbakti, R., & et al. (2024). Cognitive load theory: Implications for instructional design in digital classrooms. *International Journal of Educational Narratives*, 2(6), 483–493. <https://doi.org/10.70177/ijen.v2i6.1659>
5. Villarreal, R. T., & et al. (2025). Beyond expert ratings: Subjective workload and SDT metrics for team performance in VR simulations. *Proceedings of the Human Factors and Ergonomics Society Annual Meeting*. <https://doi.org/10.1177/10711813251367752>
6. Tkach, V. O., & Voitovych, O. A. (2025). Monitoring of the quality of education in the conditions distance education. *Visnyk of Kherson National Technical University*, 1(1(92)), 244–248. <https://doi.org/10.35546/kntu2078-4481.2025.1.1.32>
7. Aksu, Ş. H., Çakıt, E., & Dağdeviren, M. (2024). Mental workload assessment using machine learning techniques based on EEG and eye tracking data. *Applied Sciences*, 14(6), 2282. <https://doi.org/10.3390/app14062282>
8. Šola, H. M., Qureshi, F. H., & Khawaja, S. (2024). AI eye-tracking technology: A new era in managing cognitive loads for online learners. *Education Sciences*, 14(9), 933. <https://doi.org/10.3390/educsci14090933>
9. Shkarban, I. (2025). AR/VR digital storytelling in higher education foreign language instruction. *Pedagogy of the Formation of a Creative Person in Higher and Secondary Schools*, 100, 173–177. <https://doi.org/10.32782/1992-5786.2025.100.29>
10. Khan, R., & et al. (2025). Assessing cognitive load using EEG and eye-tracking in 3-D learning environments: A systematic review. *Multimodal Technologies and Interaction*, 9(9), 99. <https://doi.org/10.3390/mti9090099>
11. Munk, M., & Drlik, M. (2016). Methodology of predictive modeling of students' behavior in virtual learning environment. In *Formative assessment, learning data analytics and gamification*. (pp. 187–216). <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-803637-2.00010-5>
12. Junker, R., & et al. (2025). Modeling and prompting professional vision in a virtual learning environment: Effects on pre-service teachers' cognitive load and motivation. *Education and Information Technologies*. <https://doi.org/10.1007/s10639-025-13559-9>
13. Cui, F., & Luo, J. (2025). Effectiveness evaluation of immersive learning in an education metaverse with cognitive load control. *Applied and Computational Engineering*, 193(1), 88–93. <https://doi.org/10.54254/2755-2721/2025.28609>
14. Barkovska, O., & et al. (2024). Gaze direction monitoring model in computer system for academic performance assessment. *Information Technologies and Learning Tools*, 99(1), 63–75. <https://doi.org/10.33407/itlt.v99i1.5503>

15. Zhuravska, L. (2018). Students' self-managed autonomous training. *Scientific Bulletin of the Institute of Vocational and Technical Education of the National Academy of Sciences of Ukraine. Professional Pedagogy*, (17), 51–57. <https://doi.org/10.32835/2223-5752.2018.17.51-57>.
16. Korniiichuk, O., & Graf, M. (2023). Analysis of existing decision-making mechanisms in decentralized systems for government procurement use. *Technical Engineering*, 1(91), 156–160. [https://doi.org/10.26642/ten-2023-1\(91\)-156-160](https://doi.org/10.26642/ten-2023-1(91)-156-160)
17. Nastenka, Y., & et al. (2021). Group method of data handling application in constructing of coronary heart disease diagnosing algorithms. *Biomedical Engineering and Technology*, (5), 1–9. <https://doi.org/10.20535/2617-8974.2021.5.227141>
18. Pavlov, A., & et al. (2025). Improving efficiency of the modified group method of data handling for constructing multivariate regressions given by a redundant representation. *Adaptive Systems of Automatic Control*, 1(46), 257–266. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.46.2025.323833>
19. Matlab Grundlagen: MATLAB – Simulink – Stateflow. (2020). In Matlab Grundlagen (pp. 5–40). <https://doi.org/10.1515/9783110636420-002>
20. File-handling und Datenverwaltung. (2016). In MATLAB kompakt (pp. 460–499). <https://doi.org/10.1515/9783110465860-021>

Liakh I. M., Dytko T. V. Modeling and predicting the cognitive state of learners in a virtual learning environment based on multimodal data.

The study proposes a model of multimodal data collection and processing for assessing the cognitive load of learners in virtual learning environments, which is relevant in the context of the growing role of distance and blended learning. Based on an integral load indicator, an oriented decision-making graph with three zones – acceptable, increased risk, and critical – is constructed, along with a mathematical model of knowledge acquisition dynamics that accounts for the nonlinear dependence of learning effectiveness on load and includes a degradation phase when the load exceeds a critical threshold. Simulation in MATLAB Simulink confirms a phase transition from effective learning to reduced performance, demonstrating the potential of the model for adaptive educational management, cognitive load forecasting, and personalization of the learner's trajectory.

Keywords: cognitive state, cognitive load, multimodal data, virtual learning environment, prediction, simulation modeling, adaptive learning, MATLAB Simulink.

Отримано: 12.03.2026

Прийнято: 31.03.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.8:004.056:519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).230-237](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).230-237)**А. А. Матей**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
andrii.matei@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-0280-1763>

НЕЧІТКА МОДЕЛЬ РОЗПІЗНАВАННЯ ШТУЧНО СТВОРЕНОГО КОНТЕНТУ СОЦІАЛЬНИМИ КЛАСАМИ В КОНТЕКСТІ ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ ДЕРЖАВИ

У статті розглянуто науково-методичні аспекти розроблення нечіткої моделі оцінювання рівня розпізнавання штучно створеного контенту різними соціальними класами в контексті інформаційної безпеки держави. Актуальність дослідження зумовлена стрімким поширенням генеративного штучного інтелекту, зростанням обсягів штучно створеного контенту та підвищенням ризиків його маніпулятивного впливу на суспільство. Проаналізовано сучасні наукові підходи до виявлення AI-згенерованого контенту та обґрунтовано наукову прогалину, що полягає у недостатньому врахуванні соціально-демографічних характеристик громадян, їхньої здатності до розпізнавання такого контенту та відсутності інтегральних моделей для підтримки управлінських рішень.

Запропоновано нечітку модель, яка базується на формалізації кількісних і якісних характеристик соціального профілю громадян, опрацюванні їхніх відповідей щодо визначення авторства текстових новин та використанні вектора профілю соціального класу, що формується особою, яка приймає рішення. Модель реалізує процедуру ранжування респондентів за ступенем близькості до заданого соціального класу та дає змогу визначати інтегровану оцінку рівня розпізнавання штучно створеного контенту. На основі отриманого значення здійснюється лінгвістична інтерпретація рівня технічного ризику маніпулятивного впливу штучно створеного контенту на інформаційну безпеку держави. Використання функцій належності, мір близькості, вагових коефіцієнтів і згорткових процедур забезпечує гнучкість, формалізованість, відтворюваність та інтерпретованість результатів оцінювання.

Практична значущість отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі органами державного управління, структурами у сфері кібербезпеки, освітніми установами та аналітичними центрами для виявлення вразливих соціальних груп, оцінювання рівня їхньої стійкості до маніпулятивного впливу штучно створеного контенту та обґрунтування цільових превентивних заходів у сфері інформаційної безпеки держави.

Ключові слова: штучно створений контент, інформаційна безпека держави, соціальний клас, експертне оцінювання, нечітка модель, ризик, підтримка прийняття рішень.

1. Вступ. Стрімкий розвиток генеративного штучного інтелекту зумовив значне зростання обсягів штучно створеного контенту, який дедалі складніше відрізнити від створеного людиною. Це формує нові виклики для інформаційної безпеки держави, оскільки такі технології можуть використовуватися для маніпулятивного впливу, поширення дезінформації та формування викривлених інформаційних наративів.

У сучасних дослідженнях основну увагу приділено технічним методам виявлення такого контенту, однак недостатньо вивченим залишається людський фактор — здатність громадян до його розпізнавання та рівень вразливості до

маніпулятивного впливу. У зв'язку з цим виникає потреба в розробленні підходів, що дають змогу формалізувати й оцінювати рівень розпізнавання штучно створеного контенту з урахуванням соціально-демографічних характеристик населення.

Для розв'язання цієї задачі доцільним є використання апарату нечітких множин і нечіткої логіки, що дозволяє враховувати невизначеність, суб'єктивність оцінок і нечіткість меж між соціальними групами. Такий підхід забезпечує інтеграцію кількісних і якісних характеристик у межах єдиної моделі.

Метою статті є розроблення нечіткої моделі оцінювання рівня розпізнавання штучно створеного контенту різними соціальними класами в контексті технічних ризиків інформаційної безпеки держави.

2. Огляд літератури. Упродовж останніх років проблема штучно створеного контенту набула особливої актуальності через стрімкий розвиток генеративного штучного інтелекту. Сучасні дослідження зосереджені на питаннях сприйняття дезінформації, індивідуальної вразливості до неї та чинниках довіри до хибних повідомлень. Зокрема, показано, що люди часто спираються на інтуїтивні, але помилкові евристики під час розпізнавання штучно створеного тексту [1–2]. Це свідчить, що проблема має не лише технічний, а й когнітивно-соціальний вимір.

Окремий напрям досліджень стосується емпіричної оцінки здатності людей розпізнавати штучно створений контент у різних модальностях. Узагальнення сучасних праць показує, що точність виявлення deepfake-контенту часто є низькою, особливо без спеціальної підготовки, а складність розпізнавання підтверджується для текстових, аудіо- та відеоформатів [3–5]. Це свідчить, що ризик маніпулятивного впливу зумовлений не лише якістю генерації контенту, а й обмеженими можливостями людини щодо його ідентифікації.

Водночас сучасні дослідження підтверджують вплив соціальних, поведінкових і психологічних чинників на сприйняття штучно створеного контенту. Показано, що точність його розпізнавання залежить від індивідуальних когнітивних характеристик, цифрових звичок і особливостей аудиторії, тоді як маркування AI-згенерованого контенту має лише частковий ефект [6–8]. Крім того, AI-згенеровані повідомлення можуть бути майже такими ж або навіть більш переконливими, ніж створені людиною, зокрема у суспільно значущих темах [9–10]. Це посилює потребу оцінювати не лише технічну детекцію, а й соціальну вразливість різних груп населення.

Таким чином у науковій літературі бракує комплексних моделей, які б поєднували соціально-демографічні характеристики громадян, результати розпізнавання такого контенту та інтерпретовану оцінку ризику для інформаційної безпеки держави.

3. Матеріали та методи. Нехай розглядається множина громадян $C = \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$, які підлягають оцінюванню за рівнем розпізнавання ними штучно створеного контенту. Громадяни досліджуються за регіоном проживання або за розміром населеного пункту проживання. Кожен такий суб'єкт дослідження характеризується множиною ознак $S = \{s_1; s_2; \dots; s_m\}$, причому $f : C \rightarrow S$. Очевидно, що кожен громадянин має власний соціальний профіль, який визначається сукупністю цих характеристик. Групування характеристик множини S за певними правилами $T = \{t_1; t_2; \dots; t_u\}$ дає змогу сформувати

різні соціальні класи $CL(T) = \{cl_1(t_1); cl_2(t_2); \dots; cl_k(t_u)\}$, де $CL(T) \subseteq S$.

Для громадян пропонується деякий набір текстових новин $R = \{R_1; R_2; \dots; R_l\}$ з метою визначення їх авторства, тобто встановлення, чи написаний текст людиною, чи створений штучним інтелектом. Сукупність показників для оцінювання характеристик громадян, їхніх відповідей щодо розпізнавання тексту, а також система опрацювання вхідних даних формують інформаційну модель оцінювання рівня розпізнавання штучно створеного контенту громадянами — K_{TR} . Опрацьовані вхідні дані надалі використовуються в нечіткій моделі розпізнавання штучно створеного контенту соціальними класами в контексті інформаційної безпеки держави — M_{TR} .

Формально нечітка модель може бути представлена у вигляді оператора:

$$M_{TR}(C, S, T, CL, K_{TR}) \rightarrow f_{TR}(m_{TR}, TR). \quad (1)$$

Відповідно до вхідних змінних C, S, T, CL, K_{TR} визначається множина вихідних значень f . Результатом функціонування нечіткої моделі є: m_{TR} — інтегрована оцінка рівня розпізнавання штучно створеного контенту для відповідного соціального класу CL ; TR — лінгвістична оцінка рівня технічного ризику маніпулятивного впливу штучно створеного контенту на інформаційну безпеку держави. Для ілюстрації нечіткої моделі представляється структурна схема, рис. 1.

Нехай кожен громадянин C описується множиною характеристик соціального профілю

$$S = \{S_1(su_1); S_2(su_2); \dots; S_m(su_m)\}, \quad f: C \rightarrow S. \quad (2)$$

Характеристики можуть мати кількісну або якісну природу, тому підлягають формалізації й нормуванню. В інформаційній моделі використано такі характеристики: стаття S_1 , вік S_2 , рівень освіти S_3 , дохід родини S_4 , а також частотні показники користування інформаційними каналами S_5 – S_8 . Їх лінгвістичні оцінки переводяться у формалізований вигляд за допомогою характеристичних функцій μ_1 – μ_8 , зокрема на основі дискретних шкал і терм-множин.

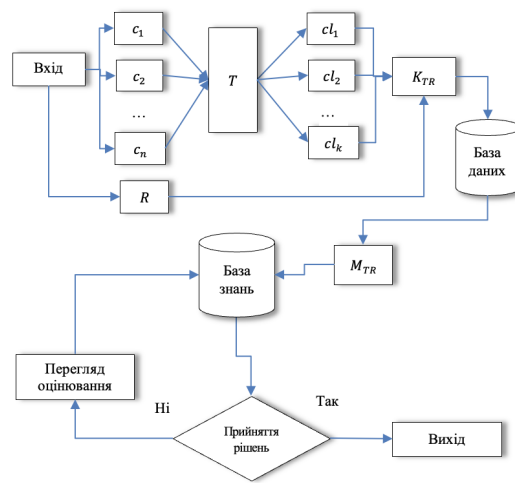


Рис. 1. Структурна схема нечіткої моделі.

Формально перехід від лінгвістичної оцінки x_j до нормованого вигляду задається характеристичною функцією $\mu_j(x_j) : X_j \rightarrow [0, 1]$, де X_j — область значень j -ї соціальної характеристики, а $\mu_j(x_j)$ визначає ступінь належності конкретного значення до відповідного терму або інтервалу. Для дискретних характеристик $\mu_j(x_j) \in \{0, 1\}$, тоді як для порядкових та інтервальних характеристик використовуються кусочно-задані або трапецієподібні функції належності, що забезпечують уніфіковане нормування вхідних даних для подальших обчислень у моделі.

Для характеристик S_5 – S_8 , що відображають інтенсивність користування інформаційними каналами, застосовується єдина шкала частотності — від «ніколи» до «більше 6 годин на добу», що забезпечує уніфіковане подання вхідних параметрів.

Для оцінювання рівня розпізнавання штучно створеного тексту респондентам пропонується набір новин R , для кожної з яких потрібно визначити авторство двох текстів: $t_h(\alpha)$, створеного людиною, та $t_h(\beta)$, згенерованого штучним інтелектом. Відповіді формалізуються термами $r = \{\alpha, \beta\}$, а правильність розпізнавання авторства описується функціями $\tau_{ih1}(\alpha)$ та $\tau_{ih2}(\beta)$.

Для r_{ih1} маємо:

$$\tau_{ih1}(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{якщо для новини } t_h(\alpha) \text{ відповідь } r_{ih1} = \beta; \\ 1, & \text{якщо для новини } t_h(\alpha) \text{ відповідь } r_{ih1} = \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Для r_{ih2} маємо:

$$\tau_{ih2}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{якщо для новини } t_h(\beta) \text{ відповідь } r_{ih2} = \alpha; \\ 1, & \text{якщо для новини } t_h(\beta) \text{ відповідь } r_{ih2} = \beta. \end{cases} \quad (4)$$

У нечіткій моделі M_{TR} формалізовані оцінки використовуються лише для обчислень і не характеризують особисті якості громадян. Їх призначення полягає у визначенні рівня розпізнавання штучно створеного контенту різними соціальними класами. На першому етапі моделі задаються інформаційні показники характеристик громадян і формалізується підхід до опрацювання відповідей щодо авторства текстових новин.

На другому етапі опрацьовані вхідні дані обчислюються за нечіткою моделлю — M_{TR} .

Нехай розглядається множина громадян C , які пройшли оцінювання згідно з інформаційною моделлю K_{TR} . На першому етапі для кожного респондента вже отримано нормовані оцінки $\mu_1(su_1), \mu_2(su_2), \dots, \mu_m(su_m)$ за характеристиками соціального профілю S . Крім того, для множини новин R отримано формалізовані відповіді респондентів $\tau_{ih1}(\alpha)$ та $\tau_{ih2}(\beta)$ щодо розпізнавання авторства двох текстів: створеного людиною $t_h(\alpha)$ та штучним інтелектом $t_h(\beta)$.

На першому кроці другого етапу для кожного громадянина визначається нормована оцінка рівня розпізнавання штучно створеного контенту по кожній новині:

$$\lambda_{ih} = \frac{1}{2}(\tau_{ih1}(\alpha) + \tau_{ih2}(\beta)), \quad i = \overline{1, n}; \quad h = \overline{1, l}. \quad (5)$$

Таким чином, отримуються значення $\lambda_{ih} \in [0; 1]$, де більші значення відповідають вищій точності розпізнавання.

Формула (5) у наведеному дослідженні відповідає нейтральному випадку однакової ваги двох типів помилок. За потреби її можна модифікувати шляхом введення ваг ω_1 і ω_2 , причому для задач інформаційної безпеки доцільно задавати $\omega_2 > \omega_1$, якщо пропуск штучно створеного маніпулятивного контенту є більш небезпечним.

Далі для кожного респондента обчислюється узагальнена оцінка рівня розпізнавання штучно створеного контенту:

$$\omega_i = \frac{1}{l} \sum_{h=1}^l \lambda_{ih}. \quad (6)$$

Оскільки дослідження орієнтоване на соціальні класи, характеристики S групуються за правилом T , унаслідок чого формується соціальний клас $cl_d(t_c)$, заданий вектором профільних вимог. Нормовані характеристики респондентів подаються матрицею рішень M , а заданий ОПР вектор профілю після застосування характеристичних функцій перетворюється у вектор кількісних змінних Z . На цій основі визначаються відносні оцінки близькості характеристик громадян до профілю відповідного соціального класу:

$$q_{di} = 1 - \frac{|z_d - \mu_{di}(su_d)|}{\max\{z_d - \min_i(\mu_{di}(su_d)); \max_i(\mu_{di}(su_d)) - z_d\}}. \quad (7)$$

Матриця $Q = \{q_{di}\}$ відображає ступінь близькості кожного громадянина до профілю відповідного соціального класу.

За потреби ОПР задає вагові коефіцієнти $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ для характеристик соціального профілю. На їх основі обчислюються нормовані ваги:

$$w_d = \frac{v_d}{\sum_{d=1}^k v_d}; \quad w_d \in [0; 1]. \quad (8)$$

При цьому виконується умова $\sum_{d=1}^k w_d = 1$.

Зауважується, що початкові вагові коефіцієнти v_d рекомендується визначати методом попарних порівнянь Сааті. У цьому разі v_d обчислюються як компоненти нормованого власного вектора матриці попарних порівнянь, сформованої особою, що приймає рішення.

Далі будується ранжувальний ряд громадян відносно вектора профілю соціального класу за допомогою середньої згортки:

$$m(c_i) = \sum_{d=1}^k w_d \cdot q_{di}. \quad (9)$$

На основі отриманого ранжування ОПР задає кількість громадян g , $g < n$, які найбільше відповідають профілю вибраного соціального класу. Для цих g громадян за узагальненими оцінками ω_c визначається інтегрована оцінка:

$$m_{TR} = \frac{1}{g} \sum_{c=1}^g \omega_c. \quad (10)$$

На завершальному етапі значення $m_{TR} \in [0; 1]$ інтерпретуються лінгвістичною оцінкою рівня технічного ризику маніпулятивного впливу штучно створеного контенту на інформаційну безпеку держави за наступною терм-множиною $TR = \{tr_1, tr_2, \dots, tr_5\}$. При цьому: $m_{TR} \in (0.8; 1]$ — tr_1 : дуже низький рівень; $m_{TR} \in (0.6; 0.8]$ — tr_2 : низький рівень; $m_{TR} \in (0.4; 0.6]$ — tr_3 : середній рівень; $m_{TR} \in (0.2; 0.4]$ — tr_4 : високий рівень; $m_{TR} \in [0; 0.2]$ — tr_5 : дуже високий рівень.

Межі між термами необхідно визначити на основі реальних даних респондентів, яким запропонувати тексти для розпізнавання штучно створеного контенту.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У дослідженні розроблено нечітку модель оцінювання рівня розпізнавання штучно створеного контенту різними соціальними класами в контексті інформаційної безпеки держави. Модель, на відміну від суто технічних підходів, враховує людський фактор і соціальний профіль респондентів, забезпечуючи отримання інтегрованої оцінки m_{TR} та лінгвістичної оцінки технічного ризику TR .

Наукова новизна підходу полягає у формалізації зв'язку між соціально-демографічними характеристиками, результатами розпізнавання штучно створених текстів і рівнем технічного ризику. Практична цінність моделі полягає у виявленні вразливих соціальних груп для обґрунтування превентивних рішень у сфері інформаційної безпеки.

Водночас підхід потребує подальшої емпіричної верифікації, калібрування меж лінгвістичних термів ризику та розширення множини вхідних характеристик. У подальших дослідженнях планується подати модельний числовий приклад покрокового розрахунку для демонстрації працездатності та відтворюваності моделі.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Матей А. А. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Nan, X., Wang, Y., & Thier, K. (2022). Why do people believe health misinformation and who is at risk? A systematic review of individual differences in susceptibility to health misinformation. *Social Science & Medicine*, 314, 115398. <https://doi.org/10.1016/j.socscimed.2022.115398>
2. Jakesch, M., Hancock, J. T., & Naaman, M. (2023). Human heuristics for AI-generated language are flawed. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 120(11), e2208839120. <https://doi.org/10.1073/pnas.2208839120>
3. Diel, A., Lalgı, T., Schröter, I. C., MacDorman, K. F., Teufel, M., & Bächerle, A. (2024). Human performance in detecting deepfakes: A systematic review and meta-analysis of 56 papers. *Computers in Human Behavior Reports*, 16, 100538. <https://doi.org/10.1016/j.chbr.2024.100538>
4. Mai, K. T., Bray, S., Davies, T., & Griffin, L. D. (2023). Warning: Humans cannot reliably detect speech deepfakes. *PLOS ONE*, 18(8), e0285333. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0285333>
5. Groh, M., Sankaranarayanan, A., Singh, N., Kim, D. Y., Lippman, A., & Picard, R. W. (2024). Human detection of political speech deepfakes across transcripts, audio, and video. *Nature Communications*, 15(1), 7629. <https://doi.org/10.1038/s41467-024-51998-z>
6. Chein, J. M., Martinez, S. A., & Barone, A. R. (2024). Human intelligence can safeguard against artificial intelligence: Individual differences in the discernment of human from AI texts. *Scientific Reports*, 14, 25989. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-76218-y>
7. Lovato, J., St-Onge, J., Harp, R., Salazar Lopez, G., Rogers, S. P., Ul Haq, I., Hébert-Dufresne, L., & Onaolapo, J. (2024). Diverse misinformation: Impacts of human biases on detection of deepfakes on networks. *npj Complexity*, 1, 5. <https://doi.org/10.1038/s44260-024-00006-y>
8. Li, F., & Yang, Y. (2024). Impact of artificial intelligence-generated content labels on perceived accuracy, message credibility, and sharing intentions for misinformation: Web-based, randomized, controlled experiment. *JMIR Formative Research*, 8, e60024. <https://doi.org/10.2196/60024>
9. Goldstein, J. A., Chao, J., Grossman, S., Stamos, A., & Tomz, M. (2024). How persuasive is AI-generated propaganda? *PNAS Nexus*, 3(2), pga034. <https://doi.org/10.1093/pnasnexus/pgae034>
10. Salvi, F., Horta Ribeiro, M., Gallotti, R., & et al. (2025). On the conversational persuasiveness of GPT-4. *Nature Human Behaviour*, 9, 1645–1653. <https://doi.org/10.1038/s41562-025-02194-6>

Matei A. A. A fuzzy model of recognition of artificially created content by social classes in the context of state information security.

The article considers the scientific and methodological aspects of developing a fuzzy model for assessing the level of recognition of artificially created content by different social classes in the context of state information security. The relevance of the study is due to the rapid spread of generative artificial intelligence, the growth of the volume of artificially created content, and the increase in the risks of its manipulative impact on society. Modern scientific approaches to detecting AI-generated content are analyzed, and the scientific gap is substantiated, which consists of insufficient consideration of the socio-demographic characteristics of citizens, their ability to recognize such content, and the lack of integral models to support management decisions.

A fuzzy model is proposed, which is based on the formalization of quantitative and qualitative characteristics of the social profile of citizens, processing their answers regarding

the determination of the authorship of text news, and using the vector of the social class profile formed by the decision-maker. The model implements the procedure for ranking respondents by the degree of proximity to a given social class and allows for determining an integrated assessment of the level of recognition of artificially created content. Based on the obtained value, a linguistic interpretation of the level of technical risk of the manipulative influence of artificially created content on the information security of the state is carried out. The use of membership functions, proximity measures, weighting coefficients, and convolutional procedures ensures flexibility, formalization, reproducibility, and interpretability of the assessment results.

The practical significance of the results obtained lies in the possibility of using the proposed model by state administration bodies, structures in the field of cybersecurity, educational institutions, and analytical centers to identify vulnerable social groups, assess the level of their resistance to the manipulative influence of artificially created content, and justify targeted preventive measures in the field of information security of the state.

Keywords: artificially created content, information security of the state, social class, expert assessment, fuzzy model, risk, decision-making support.

Отримано: 20.03.2026

Прийнято: 07.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.23

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).238-244](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).238-244)**В. І. Моренець**

Київський національний університет ім. Т. Шевченка,
асистент кафедри прикладної статистики,
кандидат фізико-математичних наук, асистент
vmorenets@knu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0899-4400>**PIPELINE-ПІДХІД ДО АВТОМАТИЗОВАНОГО ЗБОРУ ТА ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ ВІДКРИТИХ ДАНИХ**

У роботі запропоновано pipeline-підхід до автоматизованого збору та попередньої обробки відкритих даних, що інтегрує етапи збору, очищення, трансформації та оцінювання якості в єдиний ітеративний процес. Наукова новизна полягає у трьох складових: (1) формалізована система методологічних принципів (відтворюваність, модульність, розширюваність, вимірюваність), адаптована до гетерогенних відкритих джерел; (2) ітеративний механізм feedback loop, що забезпечує керування процесом обробки на основі кількісної оцінки якості; (3) математична модель оцінювання якості даних $Q(D)$ на основі стандарту ISO/IEC 25012 з теоретично обґрунтованими властивостями обмеженості, монотонності та коректності граничних випадків. Підхід апробовано на реальних даних порталу відкритих даних України (data.gov.ua): з використанням SKAN API зібрано 95 наборів метаданих та проведено їх обробку за основними етапами pipeline. Інтегральний показник якості зріс з $Q(D) = 0.7720$ до $Q(D) = 0.8222$ (приріст $\Delta Q = +6.5\%$). Найбільший внесок у покращення якості забезпечив етап очищення, тоді як показник актуальності залишився низьким ($Q_{tim} = 0.2886$) через значний середній вік даних (1031 день). Отримані результати демонструють, що запропонований підхід є практично ефективним інструментом для підвищення якості відкритих даних та виявлення системних проблем їх актуальності, що обмежують можливості подальшого аналітичного використання.

Ключові слова: відкриті дані, вебскрейпінг, API, pipeline, якість даних, feedback loop, ISO 25012, SKAN.

1. Вступ. Відкриті дані відіграють важливу роль у задачах аналізу соціально-економічних процесів, підтримці прийняття рішень та розвитку цифрових сервісів [1, 8]. Значна частина таких даних доступна через вебресурси або API, що створює передумови для автоматизації їх збору та обробки. Водночас відкриті дані характеризуються високою гетерогенністю структури, відсутністю єдиних стандартів представлення та нерегулярністю оновлення, що істотно ускладнює їх інтеграцію та подальше аналітичне використання.

Традиційні підходи до обробки даних, зокрема ETL-архітектури, орієнтовані переважно на корпоративні середовища зі стабільною схемою даних та контрольованими джерелами. У контексті відкритих даних такі підходи мають низку обмежень: відсутність ітеративного механізму контролю якості, недостатня адаптивність до гетерогенних і нестабільних джерел, а також відсутність формально обґрунтованої моделі оцінювання якості.

Таким чином, виникає потреба у розробці pipeline-підходу, який поєднує автоматизований збір даних, їх інтеграцію та попередню обробку з формалізованим оцінюванням якості та механізмом зворотного зв'язку.

Метою роботи є розробка pipeline-підходу до автоматизованого збору та попередньої обробки відкритих даних, а також його апробація на реальних даних

порталу відкритих даних України.

Наукова новизна роботи полягає у трьох складових. По-перше, запропоновано ітеративну архітектуру обробки даних з механізмом feedback loop, що забезпечує адаптивне керування pipeline на основі показника якості. По-друге, сформовано систему методологічних принципів — відтворюваність, модульність, розширюваність і вимірюваність, — адаптовану до умов гетерогенних відкритих джерел. По-третє, розроблено математичну модель оцінювання якості даних $Q(D)$ на основі стандарту ISO/IEC 25012 з аналітично доведеними властивостями обмеженості, монотонності та коректності граничних випадків.

Практична значущість роботи підтверджується результатами апробації на реальних даних порталу data.gov.ua, де продемонстровано зростання інтегрального показника якості даних та виявлено системні проблеми їх актуальності.

2. Постановка задачі. Нехай задано множину відкритих джерел даних

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}.$$

Результат збору даних визначається як об'єднання інформації, отриманої з кожного джерела:

$$D_{\text{raw}} = \bigcup_{i=1}^k C(S_i), \quad (1)$$

де $C(S_i)$ — оператор збору даних з джерела S_i .

Метою є побудова оператора попередньої обробки P , який забезпечує перетворення сирих даних у якісний набір:

$$D_{\text{clean}} = P(D_{\text{raw}}), \quad (2)$$

тобто реалізується послідовність перетворень

$$S \xrightarrow{C} D_{\text{raw}} \xrightarrow{P} D_{\text{clean}}.$$

Основною вимогою є підвищення якості даних:

$$Q(D_{\text{clean}}) \geq Q(D_{\text{raw}}), \quad \Delta Q = Q(D_{\text{clean}}) - Q(D_{\text{raw}}) \rightarrow \max. \quad (3)$$

Для досягнення цієї мети вводиться ітеративна процедура обробки даних з механізмом зворотного зв'язку (feedback loop), що дозволяє адаптивно коригувати параметри обробки залежно від отриманого значення $Q(D)$.

3. Опис pipeline-підходу. Запропонований підхід автоматизованого збору та попередньої обробки відкритих даних базується на інтегрованому pipeline-підході та позитивістській дослідницькій парадигмі. Його метою є формування узгодженого, відтворюваного та придатного для аналізу набору даних D_{clean} з гетерогенних відкритих джерел.

Підхід ґрунтується на чотирьох ключових принципах. По-перше, принцип відтворюваності передбачає, що кожен етап обробки є формалізованим і може бути відтворений незалежним дослідником за фіксованих параметрів. Це забезпечується явним визначенням операторів збору C та обробки P , а також параметрів pipeline.

По-друге, принцип модульності означає, що pipeline представлено як сукупність функціонально незалежних компонентів (збір, інтеграція, очищення, трансформація, оцінювання), кожен з яких може бути змінений без впливу на інші етапи.

По-третє, принцип розширюваності забезпечує можливість додавання нових джерел даних або критеріїв оцінювання якості без зміни загальної архітектури системи, що є критично важливим для відкритих даних з їх динамічною природою.

По-четверте, принцип вимірюваності якості передбачає використання інтегрального показника $Q(D)$ для оцінювання результату кожного етапу обробки. У випадку, якщо $Q(D) < Q_{\min}$, активується механізм зворотного зв'язку, який ініціює повторну обробку даних із скоригованими параметрами.

На відміну від класичних ETL-підходів, запропонований підхід реалізує ітеративну архітектуру. Після кожного циклу обробки обчислюється показник якості $Q(D)$, і у разі невиконання умови $Q(D) \geq Q_{\min}$ параметри обробки адаптивно змінюються, після чого цикл повторюється. Такий підхід перетворює pipeline з лінійного на адаптивний і забезпечує поступове покращення якості даних.

Структурно підхід включає п'ять основних етапів: збір даних (через API або вебскрейпінг), інтеграцію (узгодження форматів і структур), очищення (усунення пропусків і помилок), трансформацію (нормалізація та формування похідних ознак) та оцінювання якості (обчислення $Q(D)$). Послідовність цих етапів утворює єдиний інтегрований процес обробки відкритих даних.

4. Математична модель оцінювання якості даних. Для формалізації процесу оцінювання якості введемо інтегральний показник $Q(D)$, що визначається як зважена сума часткових критеріїв:

$$Q(D) = \sum_{i=1}^n w_i Q_i(D), \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad (4)$$

де $Q_i(D)$ — часткові показники якості, w_i — відповідні вагові коефіцієнти.

Відповідно до стандарту ISO/IEC 25012 [11] обрано чотири критерії, що є критичними для відкритих даних і можуть бути обчислені без зовнішніх еталонів: повнота, узгодженість, унікальність та актуальність.

Формально визначимо відповідні показники.

$$Q_{\text{comp}}(D) = 1 - \frac{N_{\text{missing}}}{N_{\text{total}}}, \quad (5)$$

$$Q_{\text{cons}}(D) = \frac{N_{\text{consistent}}}{N_{\text{total}}}, \quad (6)$$

$$Q_{\text{uniq}}(D) = 1 - \frac{N_{\text{duplicates}}}{N_{\text{total}}}, \quad (7)$$

де N_{total} — загальна кількість записів, N_{missing} — кількість пропущених значень, $N_{\text{consistent}}$ — кількість записів, що задовольняють правила узгодженості, $N_{\text{duplicates}}$ — кількість дубльованих записів.

Актуальність даних визначається як експоненціально спадна функція часу:

$$Q_{\text{tim}}(D) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-\lambda(t_{\text{current}} - t_i)}, \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

де t_i — момент останнього оновлення запису, λ — параметр, що визначає швидкість втрати актуальності.

Інтегральний показник якості має вигляд:

$$Q(D) = w_1 Q_{\text{comp}} + w_2 Q_{\text{cons}} + w_3 Q_{\text{uniq}} + w_4 Q_{\text{tim}}. \quad (9)$$

Вагові коефіцієнти можуть визначатися різними способами: рівновагово ($w_i = 1/n$), експертно (метод АНР) або адаптивно залежно від характеристик вхідних даних.

Побудована модель має такі властивості. По-перше, обмеженість: $0 \leq Q(D) \leq 1$, оскільки кожен частковий критерій належить інтервалу $[0, 1]$, а $Q(D)$ є їх опуклою комбінацією. По-друге, монотонність: покращення будь-якого з критеріїв не зменшує значення $Q(D)$. По-третє, коректність граничних випадків: для ідеального набору даних $Q(D) = 1$, тоді як при наявності системних дефектів (пропуски, дублікати, застарілість) значення $Q(D)$ зменшується відповідно до їх внеску.

5. Архітектура інтегрованого pipeline та алгоритм обробки даних.

Запропонована архітектура pipeline реалізує ітеративний процес обробки відкритих даних з використанням механізму зворотного зв'язку. Основною відмінністю від класичних ETL-підходів є інтеграція оцінювання якості безпосередньо у цикл обробки, що дозволяє адаптивно керувати параметрами процесу.

Pipeline включає п'ять основних етапів: збір даних, інтеграцію, очищення, трансформацію та оцінювання якості. Збір даних здійснюється переважно через API, що забезпечують доступ до структурованих даних у форматах JSON або XML [5], тоді як вебскрейпінг використовується як альтернативний підхід у разі відсутності API [2]. Етап інтеграції передбачає узгодження форматів і структур даних, очищення — усунення пропусків, дублікатів та аномалій [10], а трансформація — приведення даних до узгодженого вигляду відповідно до принципів “tidy data” [9].

Ключовим елементом архітектури є механізм feedback loop. Після виконання повного циклу обробки обчислюється інтегральний показник якості $Q(D)$. Якщо умова $Q(D) \geq Q_{\text{min}}$ не виконується, параметри обробки коригуються, після чого цикл повторюється. Таким чином, забезпечується ітеративне покращення якості даних.

Алгоритм обробки даних можна подати у формалізованому вигляді. Нехай задано множину джерел $S = \{S_1, \dots, S_k\}$, порогове значення якості Q_{min} та максимальну кількість ітерацій max_iter . Початково формується набір даних D_{raw} шляхом об'єднання результатів збору з усіх джерел.

Далі виконується ітеративний процес:

$$D^{(t)} \xrightarrow{\text{integrate}} D_1^{(t)} \xrightarrow{\text{clean}} D_2^{(t)} \xrightarrow{\text{transform}} D_3^{(t)}, \quad (10)$$

$$Q^{(t)} = Q(D_3^{(t)}). \quad (11)$$

Якщо $Q^{(t)} < Q_{\min}$, параметри обробки змінюються:

$$\theta^{(t+1)} = f(\theta^{(t)}, Q^{(t)}), \quad (12)$$

після чого ітерація повторюється. Процес завершується при виконанні умови $Q^{(t)} \geq Q_{\min}$ або досягненні обмеження $t = \max\_iter$.

Результатом роботи алгоритму є очищений набір даних D_{clean} та відповідне значення показника якості $Q(D)$.

6. Апробація на реальних даних. Для перевірки ефективності запропонованого підходу проведено експеримент на даних порталу відкритих даних України data.gov.ua. Збір здійснювався через публічний SKAN API [12] станом на 10 квітня 2026 року.

Початковий набір даних D_{raw} містив $N = 95$ записів із 15 атрибутами, що відповідають метаданим відкритих наборів даних різних органів державної влади. Дані отримано шляхом виконання запитів типу GET /api/3/action/package_show. Для оцінювання якості використано рівновагові ваги $w_i = 0.25$ та параметр $\lambda = 1/365$, що відповідає річному горизонту актуальності.

Для обчислення показника узгодженості Q_{cons} застосовано набір правил, зокрема: непорожність ключових полів, коректність значення стану (state = active), наявність ресурсів та узгодженість їх кількості. У початковому наборі виявлено 19 записів із порушеннями, що зумовило значення $Q_{\text{cons}} = 0.8000$.

Результати застосування pipeline наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

Динаміка показників якості даних

Етап	Q_{comp}	Q_{cons}	Q_{uniq}	Q_{tim}	$Q(D)$
D_{raw}	0.9993	0.8000	1.0000	0.2886	0.7720
Інтеграція	1.0000	0.8000	1.0000	0.2886	0.7722
Очищення	1.0000	1.0000	1.0000	0.2886	0.8222
Трансформація	1.0000	1.0000	1.0000	0.2886	0.8222

Загальний приріст якості становив $\Delta Q = 0.0502$, що відповідає відносному зростанню на 6.5%.

Аналіз результатів показує, що найбільший внесок у підвищення якості зробив етап очищення, на якому було усунуто порушення узгодженості, що призвело до зростання Q_{cons} з 0.8000 до 1.0000. Етап інтеграції мав незначний вплив, тоді як трансформація не змінила значення інтегрального показника $Q(D)$, але підвищила аналітичну придатність даних.

Ключовим обмеженням якості виявилася актуальність даних: значення $Q_{\text{tim}} = 0.2886$ залишалось незмінним на всіх етапах. Це пояснюється тим, що значна частина наборів не оновлювалась тривалий час (середній вік записів становить 1031 день). Таким чином, покращення цього показника можливе лише за рахунок повторного збору даних, що підтверджує доцільність використання механізму feedback loop.

7. Висновки. У роботі запропоновано та апробовано pipeline-підхід до автоматизованого збору та попередньої обробки відкритих даних, який відрізняється від класичних ETL-підходів інтеграцією оцінювання якості у процес

обробки та використанням ітеративної архітектури з механізмом зворотного зв'язку.

Ключовим результатом є побудова математичної моделі оцінювання якості даних $Q(D)$ на основі стандарту ISO/IEC 25012, що враховує повноту, узгодженість, унікальність та актуальність даних. Запропонована модель має властивості обмеженості, монотонності та коректності граничних випадків, що забезпечує її теоретичну обґрунтованість і придатність для практичного застосування.

Запропонована архітектура pipeline реалізує ітеративний підхід до обробки даних, у якому показник якості $Q(D)$ виступає керуючим параметром. Це дозволяє адаптивно коригувати параметри обробки та забезпечує поступове підвищення якості даних до досягнення заданого рівня.

Результати апробації на 95 реальних наборах даних порталу data.gov.ua показали зростання інтегрального показника якості з 0.7720 до 0.8222, що відповідає приросту $\Delta Q = 0.0502$ або 6.5%. Найбільший внесок у підвищення якості зробив етап очищення, який забезпечив повне усунення порушень узгодженості даних.

Водночас встановлено, що ключовим обмеженням якості відкритих даних є їх низька актуальність ($Q_{\text{tim}} = 0.2886$), зумовлена значним часом відсутності оновлень (середній вік записів — 1031 день). Це свідчить про системний характер проблеми та підкреслює необхідність періодичного повторного збору даних, що природно реалізується в межах запропонованого механізму feedback loop.

Отримані результати підтверджують ефективність запропонованого підходу для роботи з гетерогенними відкритими даними та його придатність для застосування у задачах соціального аналізу, економічних досліджень і побудови аналітичних систем.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розширення набору критеріїв якості відповідно до стандарту ISO/IEC 25012, автоматизацію визначення вагових коефіцієнтів та параметра λ , а також інтеграцію методів машинного навчання для підвищення ефективності процесів очищення та обробки даних.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував

Авторські права ©



(2026). Моренець В. І. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Dong, X. L., Halevy, A. (2014). Knowledge Vault: A Web-Scale Approach to Probabilistic Knowledge Fusion. *Proceedings of the 20th ACM SIGKDD*. <https://doi.org/10.1145/2623330.2623623>
2. Mitchell, R. (2018). *Web Scraping with Python: Collecting More Data from the Modern Web*. O'Reilly Media.
3. McKinney, W. (2017). *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. O'Reilly Media.
4. Krotov, V., Johnson, L., Silva, L. (2020). Tutorial: Legality and Ethics of Web Scraping. *Communications of the Association for Information Systems*, 47. <https://doi.org/10.17705/1CAIS.04724>
5. Fielding, R. T. (2000). *Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures*. Doctoral dissertation, University of California, Irvine. https://roy.gbiv.com/pubs/dissertation/fielding_dissertation.pdf
6. Bray, T. (2017). The JavaScript Object Notation (JSON) Data Interchange Format. *RFC 8259*. <https://doi.org/10.17487/RFC8259>
7. World Wide Web Consortium (W3C). Extensible Markup Language (XML) 1.0. <https://www.w3.org/TR/xml/>
8. Open Knowledge Foundation (2015). *Open Data Handbook*. <https://opendatahandbook.org>
9. Wickham, H. (2014). Tidy Data. *Journal of Statistical Software*, 59(10), 1–23. <https://doi.org/10.18637/jss.v059.i10>
10. Rahm, E., Do, H. H. (2000). Data cleaning: Problems and current approaches. *IEEE Data Engineering Bulletin*, 23(4), 3–13.
11. ISO/IEC 25012:2008. Data quality model. International Organization for Standardization.
12. CKAN Association. CKAN API Documentation. <https://docs.ckan.org/en/latest/api/>

Morenets V. I. Pipeline-based approach to automated collection and preprocessing of open data.

This paper presents a pipeline-based approach to automated collection and preprocessing of open data. Three original components distinguish it from classical ETL approaches: (1) a feedback loop mechanism that makes the pipeline iterative; (2) a system of methodological principles for heterogeneous open data sources; (3) a data quality model $Q(D)$ based on ISO/IEC 25012 with analytically justified properties.

The proposed approach was validated on 95 real datasets from the data.gov.ua portal using the CKAN API (April 2026). The results demonstrate an improvement of the integral quality indicator from 0.7720 to 0.8222, corresponding to $\Delta Q = 6.5\%$. The dominant limitation of data quality was timeliness ($Q_{\text{tim}} = 0.2886$, mean record age 1031 days), with 51.6% of datasets not updated for more than two years. This result confirms the practical importance of the proposed feedback loop mechanism for iterative data quality improvement.

Keywords: open data, API, CKAN, pipeline, data quality, feedback loop, ISO/IEC 25012, ETL.

Отримано: 28.03.2026

Прийнято: 15.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).245-254](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).245-254)**С. В. Мошко¹, О. Ю. Кучанський²**

¹ Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського,
магістрант факультету біомедичної інженерії
serhii.stud@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-6828-1833>

² Astana IT University, Астана, Республіка Казахстан,
професор школи штучного інтелекту та науки про дані,
доктор технічних наук, професор
kuchanskyi.o@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1277-8031>

ATTENTION-VAE: НЕСУПЕРВІЗОВАНЕ РАННЄ ВИЯВЛЕННЯ СЕПСИСУ ЧЕРЕЗ ОЦІНКУ АНОМАЛІЙ НА ОСНОВІ РЕКОНСТРУКЦІЇ ВІТАЛЬНИХ ПОКАЗНИКІВ ВІДДІЛЕННЯ ІНТЕНСИВНОЇ ТЕРАПІЇ

У статті розглянуто можливості застосування несупервізованого глибокого навчання для раннього виявлення сепсису у відділеннях інтенсивної терапії на основі аналізу часових рядів вітальних показників. Для досягнення мети дослідження було поставлено та розв'язано такі завдання: огляд існуючих підходів до виявлення аномалій у медичних часових рядах; формальна постановка задачі виявлення сепсису як задачі детекції аномалій; розробка архітектури Attention-VAE, що поєднує рекурентний GRU-енкодер, механізм багатоголової уваги та варіаційний декодер. Архітектуру навчено виключно на записах пацієнтів із нормальним фізіологічним перебігом — без використання розмічених даних щодо сепсису. Результатом роботи моделі є показник аномальності, що відображає ступінь відхилення поточного стану пацієнта від засвоєних нормальних закономірностей, а також карти уваги та профілі реконструкційних похибок за окремими показниками, що забезпечують подвійну інтерпретованість рішень. Застосування моделі апробовано на базі клінічних даних PhysioNet Challenge 2019 з використанням п'яти вітальних показників у шестигодинних вікнах спостереження; досягнуто $F1 = 0,8286$, $ROC-AUC = 0,8893$, частку хибнопозитивних результатів 0,15% — показники, що демонструють якість одного рівня із супервізованими методами. Обмеженням дослідження є один датасет та необхідність мультицентрової валідації. Результати дослідження є складовою магістерської дисертації та можуть бути використані у системах клінічної підтримки прийняття рішень.

Ключові слова: варіаційний автоенкодер; механізм уваги; виявлення сепсису; виявлення аномалій у часових рядах; навчання без учителя; PhysioNet Challenge 2019; інтерпретоване машинне навчання.

1. Вступ. Сепсис залишається однією з провідних причин смертності у відділеннях інтенсивної терапії (ВІТ). За оцінками ВООЗ, щорічно реєструється близько 49 мільйонів випадків, з яких понад 11 мільйонів завершуються летально [1]. Кожна година затримки антибіотикотерапії підвищує ризик летального наслідку на 7–8% [2]. Відтак рання діагностика є критичною умовою ефективного лікування.

Традиційні підходи ґрунтуються на клінічних шкалах (SOFA, qSOFA) та лабораторних біомаркерах, проте мають суттєві обмеження: шкали є реактивними і фіксують стан, коли патологічний процес уже набув клінічної форми; лабораторні дані надходять із затримкою; дискретні порогові критерії не враховують

багатовимірну динаміку фізіологічних показників [3]. Водночас у сучасних ВІТ безперервно реєструються значні обсяги даних моніторингу — ЧСС, SpO₂, MAP, температура, RR — які містять ранні сигнали розвитку сепсису.

Методи глибокого навчання відкривають нові можливості для аналізу багатовимірних медичних часових рядів. Підходи на основі виявлення аномалій є перспективними для раннього виявлення сепсису, оскільки не потребують точних міток початку патологічного процесу [4]. Момент onset сепсису в ретроспективних базах визначається неоднозначно та залежить від протоколів конкретного закладу.

2. Огляд літератури. Прямими архітектурними попередниками Attention-VAE є дві роботи. OmniAnomaly [6] поєднує GRU з VAE, доповненим стохастичним з'єднанням прихованих змінних та planar normalizing flow; на трьох стандартних benchmark-датасетах (SMD, SMAP, MSL) досягнуто $F1 = 0,86$ — цим підтверджено ефективність GRU-VAE як базової архітектури для послідовних даних, що лягло в основу розробленої моделі. MA-VAE [8] є архітектурно найближчою до запропонованої: BiLSTM-VAE з механізмом multi-head attention для виявлення аномалій у даних автомобільного тестування; автори демонструють, що multi-head attention суттєво підвищує інтерпретованість рішень порівняно з базовим BiLSTM-VAE. Принципова відмінність Attention-VAE від MA-VAE — використання GRU замість BiLSTM (менша кількість параметрів при порівнянній якості моделювання) та застосування до біомедичного домену.

Систематичний огляд 80 досліджень [9] фіксує, що типові значення ROC-AUC для ML-систем виявлення сепсису знаходяться у діапазоні 0,79–0,96, при цьому переважна більшість підходів є супервізованими класифікаторами, що потребують розмічених даних; проблема відтворюваності залишається невирішеною через різноманітність використовуваних датасетів і визначень сепсису, що підкреслює гостру потребу в несупервізованих підходах. DTAE [10] є єдиною знайденою роботою, що поєднує несупервізований автоенкодерний підхід із задачею виявлення сепсису: модель використовує Transformer-based denoising autoencoder із детермінованим декодером, що позбавляє її можливості кількісно оцінювати невизначеність у латентному просторі — принципова відмінність від Attention-VAE.

Серед супервізованих підходів орієнтиром якості слугує робота [11], у якій LSTM-модель з механізмом уваги демонструє $AUC = 0,892$ на вибірці понад 100 000 пацієнтів; систематичний аналіз ваг уваги в цій роботі підтверджує можливість автоматичної ідентифікації клінічно значущих часових вікон — принципово схожий механізм інтерпретації реалізовано в Attention-VAE, але у несупервізованому контексті.

Табл. 1 систематизує порівняння розробленого підходу з найближчими аналогами за чотирма ключовими вимірами: архітектура, тип навчання, наявність механізму уваги та домен застосування.

Запропонована архітектура спирається на встановлені у літературі принципи поєднання GRU-VAE для несупервізованого виявлення аномалій у багатовимірних часових рядах [6] та інтеграції multi-head attention у VAE [8]. Внеском цієї роботи є адаптація такої комбінації до домену біомедичних часових рядів відділення інтенсивної терапії з додатковим механізмом подвійної інтерпретації — часової (карти уваги) та ознакової (декомпозиція реконструкційної похибки

Таблиця 1.

Порівняння з існуючими підходами

Модель	Архітектура	Unsup.	Attn.	Домен	Venue
OmniAnomaly [6]	GRU-VAE + NF	+	–	IT	KDD 2019
MA-VAE [8]	BiLSTM-VAE + MHA	+	+	Automotive	NCTA 2023
DTAE [10]	Transformer-DAE	+	+	Sepsis	AAAI 2022
Zhang et al. [11]	LSTM + Att	–	+	Sepsis	Patterns 2021
Attention-VAE (наш)	GRU-VAE + MHA	+	+	Sepsis / PhysioNet 2019	—

за каналами вітальних показників), орієнтованим на клінічні вимоги до пояснюваності рішень у медичних системах підтримки прийняття рішень.

3. Методологія дослідження.

3.1. Постановка задачі. Задачу формалізовано як виявлення аномалій у багатовимірних часових рядах. Нехай $X \in \mathbb{R}^{72 \times 5}$ — часове вікно ($W = 72$ кроки, 6 годин при 5-хвилинному інтервалі; $d = 5$ вітальних показників). Модель навчається виключно на нормальних спостереженнях $\mathcal{D}_{train} = \{X(i)|y(i) = 0\}$ та обчислює показник аномальності $s(X) \in \mathbb{R}_+$, де високі значення відповідають аномальним станам.

У межах дослідження запропоновано архітектуру Attention-VAE, яка складається з чотирьох компонентів:

GRU-енкодер перетворює вхідне вікно $X \in \mathbb{R}^{72 \times 5}$ на послідовність прихованих станів $H \in \mathbb{R}^{72 \times 64}$. Двошаровий GRU з dropout $p = 0,2$. Вибір GRU замість LSTM обумовлено меншою кількістю параметрів при порівнянні якості моделювання часових залежностей [13].

Механізм багатоголової уваги (4 голови) [7] формує зважене контекстне представлення прихованих станів:

$$\alpha_t = \text{softmax}(q^T k_t / \sqrt{d_k}), \quad c = \sum_{t=1} W \alpha_t h_t,$$

де q — вектор запиту, k_t — ключ для кроку t , d_k — розмірність ключа. Ваги α_t вказують, на які часові моменти модель звертає увагу при кодуванні ($\sum_a \alpha_a = 1$, $\alpha_a \geq 0$).

Варіаційний латентний шар формує параметри апостеріорного розподілу $q\phi(z|X) = \mathcal{N}(\mu, \text{diag}(\sigma^2))$, де $z \in \mathbb{R}^{16}$:

$$\mu = W\mu \cdot c + b\mu, \quad \log \sigma^2 = W\sigma \cdot c + b\sigma.$$

Семплювання: $z = \mu + \sigma \odot \varepsilon$, де $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$ [5]. GRU-декодер реконструює $\hat{X} \in \mathbb{R}^{72 \times 5}$ з латентного вектора z .

Модель оптимізується за β -VAE функцією втрат із KL-відпалюванням:

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi) = 1/(W \cdot d) \cdot \sum_{t,j} (x_t - \hat{x}_t)^2 + \beta(t) \cdot DKL,$$

де $\beta(t) = \min(t/T_{warmup}, 1) \cdot \beta_{max}$ з $T_{warmup} = 30$ епох та $\beta_{max} = 0,5$. Значення $\beta_{max} < 1$ зміщує баланс на користь якості реконструкції, що обґрунтовано для anomaly detection.

Показник аномальності обчислюється як:

$$s(X) = 1/(W \cdot d) \cdot \sum_{t=1} W \sum_{j=1} d(x_t - \hat{x}_t)^2 + \beta \cdot DKL.$$

Рішення приймається порівнянням із порогом τ , оптимізованим за F1-score на валідаційній вибірці:

$$\hat{y} = 1, \text{ якщо } s(X) > \tau; \quad \hat{y} = 0, \text{ інакше.}$$

3.2. Дані та препроцесинг. У дослідженні використано набір даних PhysioNet Challenge 2019 [14], що містить записи пацієнтів відділень інтенсивної терапії (BIT). Для аналізу були відібрані п'ять вітальних показників: частота серцевих скорочень (HR), рівень насичення крові киснем (SpO_2), середній артеріальний тиск (MAP), температура тіла та частота дихання (RR). Формування вхідних даних здійснювалося шляхом побудови часових вікон тривалістю 6 годин із дискретністю 5 хвилин, що відповідало довжині вікна $W = 72$ часових кроків. Для підвищення кількості навчальних зразків та врахування динаміки зміни фізіологічних показників застосовувався ковзний механізм із кроком зсуву 1 година.

Попередня обробка даних включала нормалізацію ознак за методом z-score, що виконувалася відповідно до виразу $\hat{x}_{t,j} = (x_{t,j} - \mu_j) / (\sigma_j + \varepsilon)$, за статистиками навчальної вибірки, де μ_j та σ_j визначалися на основі статистичних характеристик навчальної вибірки. Для обробки пропущених значень застосовувався метод forward-fill у межах кожного часового вікна з подальшим виконанням нормалізації. Вікна, частка пропущених значень у яких перевищувала 30%, виключалися з подальшого аналізу. Використання такого підходу обґрунтовується результатами дослідження [12], де показано, що коректна обробка пропущених значень у багатовимірних клінічних часових рядах є критичним фактором для забезпечення високої якості прогнозування.

Розбиття набору даних здійснювалося на рівні пацієнтів, що дозволяло уникнути витоку інформації між підмножинами. При цьому 70% даних використовувалося для навчання моделі, 15% — для валідації та 15% — для тестування. Після виконання процедури препроцесингу сформована вибірка містила 5590 часових вікон, серед яких 4930 відповідали нормальному стану пацієнтів, а 660 — випадкам сепсису, що характеризувалося дисбалансом класів на рівні приблизно 11,8%.

3.3. Базові моделі для порівняння. Для оцінювання ефективності запропонованого підходу проведено порівняння результатів із двома базовими моделями, які широко використовуються для аналізу часових рядів та задач класифікації. Першою моделлю був двошаровий класифікатор на основі архітектури LSTM, що містив 144 001 параметр та навчався у режимі контрольованого навчання шляхом мінімізації функції втрат крос-ентропії. Для запобігання перенавчанню використовувався механізм ранньої зупинки, який завершив процес навчання на 29-й епосі.

Другою базовою моделлю виступав алгоритм XGBoost [15], конфігурація якого включала 200 дерев рішень із максимальною глибиною 6. На відміну від LSTM-підходу, навчання моделі виконувалося на основі агрегованих статистичних характеристик часових вікон, зокрема середнього значення, стандартного відхилення, мінімального та максимального значень, а також показника тренду. Для забезпечення коректності порівняння обидві базові моделі використовували однакову процедуру попередньої обробки даних та ідентичне розбиття вибірки на рівні пацієнтів.

4. Результати дослідження. Результати оцінювання на тестовій вибірці наведено у Табл. 2.

Таблиця 2.

Порівняння моделей детекції сепсису

Модель	Accuracy	F1	Precision	Recall	Specificity	FPR	ROC-AUC	PR-AUC
Attention-VAE	0,9597	0,8286	0,9869	0,7140	0,9985	0,0015	0,8893	0,8246
LSTM Baseline	0,9537	0,7968	0,9943	0,6648	0,9994	0,0006	0,9066	0,8589
XGBoost	0,9656	0,8571	0,9901	0,7557	0,9988	0,0012	0,8928	0,8415

Attention-VAE демонструє $F1 = 0,8286$ — лише на 0,0285 нижче за найкращий supervised бейзлайн (XGBoost), незважаючи на відсутність доступу до розмічених даних під час навчання. Усі три моделі мають $Precision > 0,98$.

$FPR = 0,0015$ означає 15 хибних тривог на 10 000 нормальних спостережень — прийнятний рівень для клінічного середовища, що мінімізує alarm fatigue [16]. Калібрований поріг $\tau = 0,6559$. За ROC-AUC та PR-AUC різниця між моделями не перевищує 0,0173.

ROC-крива Attention-VAE характеризується стрімким підйомом у лівій частині (область низьких FPR), що узгоджується з принципом автоенкодера: записи з найбільшими відхиленнями від норми генерують найвищу реконструкційну похибку.

PR-криві всіх моделей демонструють характерний перегин у діапазоні Recall 0,65–0,80, що свідчить про підгрупу об'єктивно складних для детекції випадків — ймовірно, ранні стадії сепсису з помірними фізіологічними змінами.

Розподіл anomaly score для нормального класу має моду $\sim 0,15$ – $0,25$, для сепсису — $\sim 0,55$ – $0,70$. Розподіл для сепсису є бімодальним: перший пік ($\sim 0,40$ – $0,50$) відповідає ранньостадійним випадкам, другий ($\sim 0,75$ – $0,90$) — вираженим. Бімодальність відображає гетерогенність клінічних фенотипів сепсису.

Аналіз ваг уваги виявляє характерні відмінності між класами:

- Нормальні пацієнти: рівномірний розподіл ваг, ентропія $H(\alpha) \approx \log 72 \approx 4,28$.
- Пацієнти із сепсисом: ваги концентруються на сегментах погіршення, ентропія $H(\alpha) \in [2,5; 3,5]$.

Піки уваги збігаються з: підвищенням ЧСС на 15–20 уд./хв; зниженням SpO_2 на 3–5 в.п. нижче 95%; падінням MAP нижче 65 мм рт. ст. — ці маркери модель виявила самостійно, без використання клінічних знань під час навчання. Тест Манна-Уїтні підтверджує значущість різниці ($p < 0,001$).

t-SNE та UMAP візуалізації 16-вимірного латентного простору: нормальні записи утворюють щільний кластер; записи сепсису розподілені дифузно на периферії, утворюючи кілька під-кластерів. Вимір z_3 кодує загальний ступінь відхилення від норми; виміри z_7 , z_{11} відображають варіативність патологічних патернів.

Аналіз відношення $R_j = \text{MSE}_{j_{\text{sepsis}}} / \text{MSE}_{j_{\text{norm}}}$ виявляє ієрархію діагностичної цінності:

1. **ЧСС (HR)** — найбільше відносне зростання; тахікардія є найбільш раннім маркером системної запальної відповіді.
2. **MAP** — гіпотензія ($\text{MAP} < 65$) асоціюється з септичним шоком.
3. **SpO₂** — значне зростання для підгрупи з респіраторною дисфункцією.
4. **RR** — помірне зростання, відповідає критеріям SIRS/qSOFA.
5. **Температура** — найменше зростання через повільну динаміку та двоспрямованість (гіпер- і гіпотермія).

Ця ієрархія повністю узгоджується з клінічними знаннями, підтверджуючи медичну обґрунтованість навчених представлень.

5. Дослідження внеску окремих компонентів архітектури та аналіз чутливості до гіперпараметрів. Для ізольованої оцінки внеску архітектурних компонент та перевірки стабільності моделі до варіації ключових гіперпараметрів проведено серію з 9 додаткових експериментів на тій самій тестовій вибірці із фіксованим seed. У межах цієї серії повторно навчена базова конфігурація демонструє $F1 = 0,8217$ при порозі $\tau = 0,7764$, тоді як основна модель з Табл. 2 досягає $F1 = 0,8286$, при $\tau = 0,6559$. Різниця між тренуваннями моделі при різних ініціалізаціях ваг ($\Delta F1 \approx 0,007$ і $\Delta \tau \approx 0,12$) відображає типову варіативність глибокого навчання та враховується при інтерпретації результатів ablation/sensitivity. Поріг для кожної конфігурації серії калібрувався окремо за $F1$ -критерієм на валідаційній вибірці. Результати наведено у Табл. 3.

Таблиця 3.

Абляційне дослідження та аналіз чутливості

Конфігурація	F1	Precision	Recall	ROC-AUC	FPR	$\Delta F1$
Baseline (повна модель)	0,8217	0,9893	0,7027	0,8788	0,0012	—
Без attention (mean pooling)	0,8182	0,9866	0,6989	0,8756	0,0015	−0,003
$\beta = 0,1$	0,8184	0,9689	0,7083	0,8755	0,0036	−0,003
$\beta = 0,3$	0,8124	0,9812	0,6932	0,8701	0,0021	−0,009
$\beta = 1,0$	0,8129	0,9865	0,6913	0,8777	0,0015	−0,009
$\dim(z) = 8$	0,8302	0,9844	0,7178	0,8705	0,0018	+0,008
$\dim(z) = 32$	0,8375	0,9871	0,7273	0,8847	0,0015	+0,016
heads = 1	0,7803	0,9855	0,6458	0,8788	0,0015	−0,041
heads = 8	0,8247	0,9868	0,7083	0,8809	0,0015	+0,003

Заміна механізму уваги на просте усереднення прихованих станів GRU за часовою віссю (mean pooling) не призводить до значущого зниження $F1$ ($\Delta F1 = -0,003$), що пояснюється здатністю GRU самостійно агрегувати часові залежності. Однак зменшення кількості голів уваги до однієї (heads = 1) знижує

F1 на 0,041 — це підтверджує, що ключовим архітектурним рішенням є саме багатоголова конфігурація, яка дозволяє паралельно моделювати різні патерни взаємодії між каналами вітальних показників. Примітно, що одноголова конфігурація дає гірший результат, ніж повна відсутність уваги: одна голова уваги без регуляризації через диверсифікацію може фокусуватися на шумових артефактах, тоді як mean pooling забезпечує робастне нейтральне агрегування. Окрім кількісного впливу, механізм уваги забезпечує клінічну інтерпретованість рішень (підрозділ 4.4), що є самостійною контрибуцією для систем підтримки прийняття рішень у медичному домені.

Аналіз чутливості охоплює три ключові гіперпараметри архітектури: β у функції втрат, розмір латентного простору $\dim(z)$ та кількість голів уваги. Залежність F1 від β має U-подібну форму з оптимумом у baseline-значенні 0,5: відхилення в обидва боки ($\beta = 0,1$ та $\beta = 1,0$) знижують F1 на 0,003–0,009, що обґрунтовує обраний рівень регуляризації KL-дивергенції. За параметром $\dim(z)$ модель демонструє стабільність — F1 змінюється у межах $\pm 0,02$ від baseline; незначне покращення при $\dim(z) = 32$ (+0,016) знаходиться у межах варіативності між тренуваннями з різними значеннями seed, а базова конфігурація $\dim(z) = 16$ обрана з огляду на обчислювальну ефективність та зменшення ризику перенавчання. За кількістю голів уваги діапазон ширший: heads = 8 дає +0,003, тоді як heads = 1 дає −0,041 (див. підрозділ 5.1).

6. Обговорення. Різниця F1 між Attention-VAE та XGBoost становить лише 0,0285. З огляду на принципову різницю у вимогах до даних — Attention-VAE не потребує розмічених даних позитивного класу — цей результат є значущим. У клінічній практиці розмітка даних сепсису є суб'єктивною та ресурсоемною [4], що робить unsupervised-підхід більш придатним до практичного впровадження у нових закладах.

Attention-VAE надає подвійний механізм інтерпретації:

1. Часовий — ваги уваги відповідають: «коли почалося погіршення?»
2. Ознаковий — декомпозиція реконструкційної похибки: «що саме погіршується?»

Це відповідає вимогам FDA та ЕМА до пояснюваності алгоритмічних рішень у медичних системах [17].

FPR = 0,15% (15 хибних тривог на 10 000 спостережень) є критично важливим для практичного впровадження. Alarm fatigue — зниження уваги персоналу через надмірну кількість хибних сигналів — визнано одним із провідних факторів ризику у ВІТ [16].

Попри отримані результати, проведене дослідження має низку обмежень, які необхідно враховувати при інтерпретації результатів та оцінюванні можливостей практичного застосування запропонованого підходу.

1. Одноцентрові дані. Результати отримано на PhysioNet Challenge 2019. Для підтвердження узагальнюваності необхідна мультицентрова валідація.
2. Обмежений набір ознак. Лише 5 базових вітальних показників; інтеграція лабораторних даних (лактат, прокальцитонін) потенційно підвищить якість.
3. Ретроспективний характер. Оцінка реального клінічного впливу потребує проспективних досліджень.

7. Висновки. Запропоновано архітектуру Attention-VAE для unsupervised раннього виявлення сепсису на основі мультиваріативних часових рядів вітальних показників. Підхід поєднує: (1) навчання без розмічених даних сепсису; (2) конкурентоспроможну якість ($F1 = 0,83$ vs $0,86$ для XGBoost); (3) клінічно інтерпретовані рішення через механізм уваги та декомпозицію реконструкційних похибок.

Оцінювання на PhysioNet Challenge 2019 підтверджує, що модель самостійно навчається фокусуватися на маркерах сепсису — тахікардії, гіпотензії та деса-турації. Латентний простір демонструє чітке розділення нормальних та аномальних патернів.

Напрями подальших досліджень: мультицентрова валідація, розширення набору ознак лабораторними даними, дослідження Transformer-encoder та проспективне оцінювання у клінічному середовищі.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Набір даних PhysioNet Challenge 2019 є загальнодоступним за адресою: <https://physionet.org/content/challenge-2019/1.0.0>

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Мошко: концептуалізація, розробка методології, формальний аналіз, курація даних, програмна реалізація, візуалізація, написання — оригінальний проект. О. Ю. Кучанський: наукове керівництво, адміністрування проекту, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Мошко С. В., Кучанський О. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. World Health Organization. (2020). Global report on the epidemiology and burden of sepsis. *WHO*. Retrieved from <https://www.who.int/publications/i/item/9789240010789>
2. Kumar, A., Roberts, D., Wood, K. E., & et al. (2006). Duration of hypotension before initiation of effective antimicrobial therapy is the critical determinant of survival in human septic shock. *Critical Care Medicine*, 34(6), 1589–1596. <https://doi.org/10.1097/01.CCM.0000212262.65573.4E>
3. Singer, M., Deutschman, C. S., Seymour, C. W., & et al. (2016). The Third International Consensus Definitions for Sepsis and Septic Shock (Sepsis-3). *JAMA*, 315(8), 801–810. <https://doi.org/10.1001/jama.2016.0287>
4. Harutyunyan, H., Khachatrian, H., Kale, D. C., & et al. (2019). Multitask learning and benchmarking with clinical time series data. *Scientific Data*, 6(96). <https://doi.org/10.1038/s41597-019-0103-9>
5. Kingma, D. P., & Welling, M. (2014). Auto-encoding variational Bayes. In *Proceedings of the 2nd International Conference on Learning Representations (ICLR)*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1312.6114>
6. Su, Y., Zhao, Y., Niu, C., & et al. (2019). Robust anomaly detection for multivariate time series through stochastic recurrent neural network. In *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. <https://doi.org/10.1145/3292500.3330672>
7. Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., & et al. (2017). Attention is all you need. In *Proceedings of the 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS)*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1706.03762>
8. Correia, L., Goos, J.-C., Klein, P., & et al. (2023). MA-VAE: Multi-head attention-based variational autoencoder approach for anomaly detection in multivariate time-series. In *Proceedings of the 15th International Joint Conference on Computational Intelligence (NCTA)*. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/2309.02253>
9. Zubair, M., Din, I., Sarwar, N., Elov, B., Makhmudov, S., & Trabelsi, Z. (2025). Revolutionizing sepsis diagnosis using machine learning and deep learning models: a systematic literature review. *BMC Infectious Diseases*, 25(1), 1396. <https://doi.org/10.1186/s12879-025-10766-4>
10. Dou, Y., Li, W., & Zomaya, A. Y. (2022). Transformer-based unsupervised learning for early detection of sepsis (Student Abstract). In *Proceedings of the 36th AAAI Conference on Artificial Intelligence*. <https://doi.org/10.1609/aaai.v36i11.21669>
11. Zhang, D., & et al. (2021). An interpretable deep-learning model for early prediction of sepsis in the emergency department. *Patterns*, 2(2), 100196. <https://doi.org/10.1016/j.patter.2021.100196>
12. Che, Z., Purushotham, S., Cho, K., & et al. (2018). Recurrent neural networks for multivariate time series with missing values. *Scientific Reports*, 8, 6085. <https://doi.org/10.1038/s41598-018-24271-9>
13. Cho, K., van Merriënboer, B., Gulcehre, C., & et al. (2014). Learning phrase representations using RNN encoder-decoder for statistical machine translation. In *Proceedings of the 2014 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP)*. <https://doi.org/10.3115/v1/D14-1179>
14. Reyna, M. A., & et al. (2020). Early prediction of sepsis from clinical data: the PhysioNet/Computing in Cardiology Challenge 2019. *Critical Care Medicine*, 48(2), 210–217. <https://doi.org/10.1097/CCM.0000000000004145>
15. Chen, T., & Guestrin, C. (2016). XGBoost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. <https://doi.org/10.1145/2939672.2939785>
16. Cvach, M. (2012). Monitor alarm fatigue: an integrative review. *Biomedical Instrumentation & Technology*, 46(4), 268–277. <https://doi.org/10.2345/0899-8205-46.4.268>
17. FDA. (2021). Artificial intelligence and machine learning in software as a medical device. *U.S. Food and Drug Administration*. Retrieved from <https://www.fda.gov/media/145022/download>

Moshko S. V., Kuchanskyi O. Y. Attention-VAE: Unsupervised early sepsis detection via reconstruction-based anomaly scoring of intensive care unit vital signs.

This paper examines the application of unsupervised deep learning for early sepsis detection in intensive care units based on vital sign time series analysis. To achieve the research objective, the following tasks were set and accomplished: a review of existing anomaly detection approaches for medical time series and deep learning methods for sepsis diagnosis; a formal problem statement framing sepsis detection as a multivariate time series anomaly detection task; the development of the Attention-VAE architecture combining a GRU-based recurrent encoder, multi-head scaled dot-product attention, and a variational decoder. The model is trained exclusively on records of patients with normal physiological status, without using any labeled sepsis data. The model output is an anomaly score reflecting the degree of deviation of the patient's current state from learned normal patterns, along with temporal attention maps and per-feature reconstruction error profiles that provide dual interpretability of decisions. The model was evaluated on the PhysioNet Challenge 2019 clinical database using five vital signs in six-hour observation windows, achieving $F1 = 0.8286$, $ROC-AUC = 0.8893$, and a false positive rate of 0.15% — results competitive with supervised methods. Limitations of the study include the single-centre nature of the data and the need for multi-centre validation. The research results constitute part of the master's thesis and may be applied in clinical decision support systems.

Keywords: variational autoencoder; attention mechanism; sepsis detection; time series anomaly detection; unsupervised learning; PhysioNet Challenge 2019; interpretable machine learning.

Отримано: 02.04.2026

Прийнято: 18.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

UDC 004.75:004.85

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).255-261](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).255-261)**B. O. Peniak¹, B. B. Liubinskyj²**

¹ Lviv Polytechnic National University,
 PhD student of the Department of Applied Mathematics
 bohdan.o.peniak@lpnu.ua
 ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-2112-5972>

² Lviv Polytechnic National University,
 Associate Professor of the Department of Applied Mathematics,
 Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
 bohdan.b.liubinskyj@lpnu.ua
 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0715-8068>

ADAPTIVE HYBRID CONSENSUS MECHANISM FOR BLOCKCHAIN-BASED E-GOVERNANCE: A MACHINE LEARNING APPROACH

We propose an adaptive hybrid consensus mechanism for blockchain-based e-governance that dynamically selects between QBFT, PoS, and PBFT via a Random Forest classifier, hysteresis stabilization, and a deterministic Byzantine override. Formal guarantees based on Hoeffding and Bernstein concentration bounds ensure estimation accuracy, bounded switching rates, and override safety. Simulations on Ukrainian presidential election data (30M voters, 12 h) show 32% throughput gain over static QBFT (958.7 vs 726.5 TPS), 99.4% PBFT coverage under 20% Byzantine attacks, and +0.4% communication energy overhead. A 5-node Hyperledger Besu testnet validates deterministic block production (2.000 ± 0.000 s) and crash-fault tolerance at the $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ threshold; extrapolation yields 144–500 TPS at $n=60$. The ML approach provides a 6.9% multi-objective gain over threshold-only switching.

Keywords: blockchain, e-governance, consensus mechanisms, machine learning, adaptive systems, Byzantine fault tolerance.

1. Introduction. Blockchain is increasingly adopted for e-governance—voting [1], land registries [2], digital identity [3]—yet large-scale deployment faces interrelated challenges. The Ukrainian presidential election (30M voters, 12 h [4]) implies ~ 694 TPS on average with peaks to 2,100 TPS, exceeding static protocol capacities. Existing protocols impose rigid trade-offs: QBFT offers 726 TPS with moderate security; PBFT provides stronger Byzantine tolerance at higher cost [5,6]; PoS scales to 3,000 TPS but with reduced resilience [7]. Few works address dynamic consensus switching in e-governance [8,9].

We consider a permissioned blockchain with n validators running one of $\mathcal{C} = \{\text{QBFT}, \text{PoS}, \text{PBFT}\}$ under time-varying load. The network state is:

$$S(t) = [\text{TPS}_{\text{cur}}, \text{TPS}_{\text{pred}}, L(t), B(t), \text{CPU}(t), \text{RAM}(t), h(t)] \in \mathbb{R}^7, \quad (1)$$

where $B(t)$ is the Byzantine ratio and $h(t)$ the hour of day. The adaptive selector $\phi: S(t) \rightarrow \mathcal{C}$ maximizes:

$$\max_{\phi} \mathbb{E}[\alpha \cdot \text{TPS}(t) - \beta \cdot E(t) - \gamma \cdot \text{Risk}(t)], \quad (2)$$

subject to $B(t) \leq \text{Tol}(C_t)$, dwell time $T_{\min} = 20$ s, and latency $L(C_t) \leq 5$ s, with weights $\alpha = 1.0$, $\beta = 0.3$, $\gamma = 2.0$ reflecting e-governance security priorities.

Our contributions: (1) an adaptive architecture switching between three structurally distinct protocols via ML, hysteresis, and a deterministic override providing safety independent of classifier accuracy; (2) formal bounds on estimation accuracy under imperfect detection, switching rates, and override safety; (3) comparison with threshold-only switching demonstrating a 6.9% multi-objective gain; (4) evaluation on four scenarios totaling 172,796 blocks with 5-node testnet calibration.

2. Related work. PBFT [5] guarantees safety for $f < n/3$ with $O(n^2)$ messages; HotStuff [10] reduces this to $O(n)$ via threshold signatures. QBFT [11] optimizes PBFT for permissioned Ethereum. PoS variants [7, 12] replace computation with stake-weighted voting; Ouroboros [13] provides provable security under semi-synchrony. All impose fixed trade-offs at deployment time.

Vukolić [9] showed no single protocol dominates but proposed no switching mechanism. Sharding [8] partitions consensus zones without runtime adaptation. Cloud autoscaling [18] provides hysteresis stabilization, which we adapt for consensus switching. Surveys [1, 14] find 85% of e-governance proposals use static consensus. ML has been applied to blockchain fraud detection [16] and gas optimization [15]; Wang et al. [17] proposed ML-based selection for IoT but evaluated only two protocols without formal bounds or a deterministic override. Table 1 compares our approach with these baselines.

Table 1.

Comparison with related work.

Approach	Adapt.	ML	Formal	$O(n)$ msg	Override	E-Gov
PBFT [5]	No	No	Yes	No	N/A	No
HotStuff [10]	No	No	Yes	Yes	N/A	No
QBFT [11]	No	No	Partial	No	N/A	No
Ouroboros [13]	No	No	Yes	Yes	N/A	No
Sharding [8]	No	No	No	No	No	No
Hybrid BFT [9]	No	No	Partial	No	No	No
ML cons. [17]	Partial	Yes	No	—	No	No
E-Voting [1]	No	No	No	—	No	Yes
Our work	Yes	Yes	Yes	No	Yes	Yes

3. System architecture and method. The system comprises four layers: (1) Blockchain Network with 60 validators running QBFT (726 TPS, 100 Wh), PoS (2,850 TPS, 50 Wh), and PBFT (1,500 TPS, 130 Wh); (2) Monitoring Layer collecting seven metrics every 10 s; (3) ML Prediction Layer (Random Forest [19], 100 trees, max_depth=12); (4) Consensus Switching Layer with hysteresis and Byzantine override. Wh values are notional, quantifying relative protocol message overhead.

The switching rule is:

$$\text{switch}(t) = \begin{cases} \text{PBFT}, & \text{if } B(t) > 0.14 \quad (\text{override}), \\ C_{\text{pred}}, & \text{if } (t - t_{\text{last}}) \geq 20 \text{ s} \wedge \text{conf} > 0.70, \\ C(t-1), & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3)$$

A 10,000-sample synthetic dataset was generated via parameterized sweeps (TPS 100–3,000; latency 0.3–5.0 s; Byzantine ratio 0–30%; CPU/RAM 10–95%; hour 0–

23) with deterministic labels: PBFT for $B(t) > 0.14$, PoS for $\text{TPS} > 800$ and $B(t) < 0.08$, QBFT otherwise [5, 6, 11]. The dataset was balanced ($\approx 3,333$ per class) with 15% boundary cases. The classifier (scikit-learn 1.3.0, stratified 70/15/15 split, 5-fold CV) achieves 99.2% test accuracy—a measure of label separability since the classifier performs *policy distillation* of threshold rules, not pattern discovery. Feature importance: `byzantine_ratio` 67.9%, `tps_current` 14.2%. Under 10% additive noise, accuracy degrades gracefully to 87.6%, whereas hard thresholds produce abrupt misclassifications [20].

The Byzantine override bypasses ML when $B(t) > 14\%$:

$$C(t) = \text{PBFT if } B(t) > 0.14, \quad C(t) = \tilde{C}(t) \text{ otherwise.} \quad (4)$$

The 14% threshold provides a 6 pp buffer below the 20% attack scenario.

4. Formal guarantees.

Definition 1 (Adaptive Consensus System). *A tuple $\mathcal{A} = (n, \mathcal{C}, \phi, T_{\min}, \mathcal{H})$: n validators; $\mathcal{C} = \{\text{QBFT}, \text{PoS}, \text{PBFT}\}$; $\phi: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathcal{C}$ is the ML selector; $T_{\min} > 0$ is the dwell time; $\mathcal{H} = \{(\tau_{\text{in}}^{(j)}, \tau_{\text{out}}^{(j)})\}$ are hysteresis pairs with margins $\Delta_h^{(j)} > 0$. The mode evolves per (3).*

Definition 2 (Byzantine Ratio Estimator). *Each validator v_i produces $X_i(t) \sim \text{Bernoulli}(p_i(t))$. The estimator $\hat{B}(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i(t)$ has expectation $\mathbb{E}[\hat{B}] = p_d \cdot k/n + p_f \cdot (n-k)/n$ under detection probability p_d and false-positive rate p_f . For $n=60$, $k=12$, $p_d=0.85$, $p_f=0.05$: $\mathbb{E}[\hat{B}] \approx 0.21$, above the 14% override threshold. The override remains effective for $p_d \geq 0.5$; below this, multi-epoch averaging (w epochs, effective sample nw) recovers sensitivity.*

Lemma 1 (Estimation accuracy). *Let $\mu_B(t) = \mathbb{E}[\hat{B}(t)]$. Since each $X_i(t) \in [0, 1]$ is independent, Hoeffding's inequality gives:*

$$\Pr(|\hat{B}(t) - \mu_B(t)| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp(-2n\varepsilon^2). \quad (5)$$

With w averaged epochs and known variance σ_B^2 , the Bernstein bound yields:

$$\Pr(\hat{B}(t) - \mu_B(t) \leq -\varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{nw\varepsilon^2/2}{\sigma_B^2 + \varepsilon/3}\right). \quad (6)$$

Under correlated attacks ($\rho > 0$), the effective sample size reduces to $n_{\text{eff}} = n/(1 + (k-1)\rho)$; the override responds within one epoch regardless.

Theorem 1 (Switching-rate bound). *$N_{\text{sw}}(T) \leq \lfloor T/T_{\min} \rfloor + 1$ for all $T > 0$, excluding Zeno behavior. Hysteresis margins $\Delta_h > 2\delta$ ensure bounded observation noise cannot trigger spurious transitions.*

Theorem 2 (Override safety). *Let $\tau = 0.14$ be the override threshold. During an attack of strength B_{attack}^* with effective margin $\varepsilon_0 = \mu_B - \tau > 0$:*

$$\Pr(\text{miss}) \leq \exp(-2nw\varepsilon_0^2) \text{ (Hoeffding)}, \quad \Pr(\text{miss}) \leq \exp\left(-\frac{nw\varepsilon_0^2/2}{\sigma_B^2 + \varepsilon_0/3}\right) \text{ (Bernstein)}.$$

For $n=60$, $w=6$, $\varepsilon_0=0.06$: $p_{\text{miss}} \leq 7.5\%$ (Hoeffding) / 2.7% (Bernstein); simulation confirms 0.6% . The bound decays as $O(e^{-\Theta(n)})$: at $n=500$, $p_{\text{miss}} < 10^{-13}$. For election-grade safety ($p_{\text{miss}} < 10^{-6}$), $n \geq 231$ at $w=6$ suffices. Recovery time: $T_{\text{recov}} \leq T_{\min} + w \cdot \Delta t_{\text{epoch}}$. The bounds hold independently of ML classifier accuracy.

5. Experimental evaluation. The discrete-event simulation (SimPy 4.0) models 60 validators in a fully-connected mesh (50–150 ms inter-node delay). Consensus latencies: QBFT 1.0 s, PoS 0.5 s, PBFT 2.0 s. Workload follows Ukrainian election data [4]: morning 400–600, afternoon 700–900, peak 1,200–2,000 TPS. Byzantine model: invalid proposals (50%), vote withholding (30%), equivocation (20%). Four experiments, 43,199 blocks each (172,796 total):

(1) *Normal load, 10% Byzantine.* Adaptive: 958.7 TPS (+32.0% vs static QBFT 726.5 TPS); latency 1.172 s (+17.2%); consensus distribution QBFT 59.7%, PBFT 24.9%, PoS 15.4%.

(2) *Peak load* ($2\times$ TPS, 17:00–19:00). Adaptive drops to 629.9 TPS (−13.3% vs static QBFT), limited by switching overhead when load oscillates near thresholds—a scenario where switching cost outweighs protocol-selection gains.

(3) *Byzantine attack* (2%→10%→20%). At 20% Byzantine: 99.4% PBFT coverage; override activates in <1 s. Static QBFT throughput drops $\sim 45\%$.

(4) *Energy.* Adaptive: +0.4% vs QBFT, −22.7% vs PBFT in normalized communication energy, achieving PBFT-level security with near-QBFT message overhead.

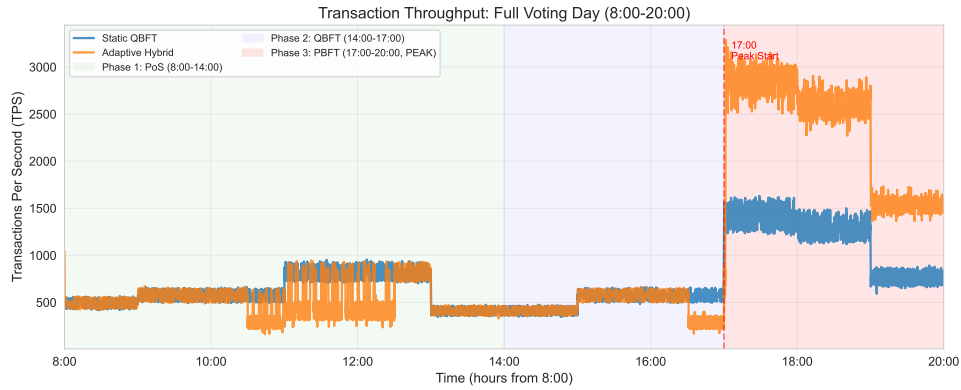


Figure 1. Throughput comparison: adaptive 958.7 TPS (+32.0% vs static QBFT at 726.5 TPS) via consensus distribution QBFT 59.7%, PBFT 24.9%, PoS 15.4%.

Table 2.

Summary of evaluation results (12-hour simulation, 43,199 blocks per experiment).

Metric	Static QBFT	Adaptive	Change
Avg TPS	726.5	958.7	+32.0%
Latency (s)	1.000	1.172	+17.2%
Comm. energy (Wh)	4,319,900	4,339,000	+0.4%
PBFT @ 20% Byz	0%	99.4%	Critical

The system executed 64 switches in 12 h (5.3/h); without hysteresis: 847 (92.4% reduction). Using multi-objective value $V = \alpha \cdot \overline{\text{TPS}} - \beta \cdot \overline{E} - \gamma \cdot \overline{\text{Risk}}$ from (2), ML-based switching achieves $V = 928.6$ vs threshold-only $V = 868.8$ (+6.9%). In a separate noise-robustness experiment, the ML advantage over thresholds grows from +0.8% at 0% sensor noise to +2.2% at 20% noise, confirming that ensemble averaging absorbs noise more gracefully than hard thresholds. The ML component

provides operational advantages—confidence gating ($\text{conf} > 0.70$) suppresses uncertain switches; extensibility to new protocols requires only retraining—while the deterministic override (4) remains the safety backbone.

6. Testnet calibration. A 5-node Hyperledger Besu QBFT testnet [11] (Intel Xeon Platinum 8370C, 2 vCPU, 8 GB RAM, Docker, `blockperiodseconds=2`) validates the simulation model. Block time: 2.000 ± 0.000 s (deterministic, $\sigma = 0$ across 30 blocks). Peak throughput: 29.0 TPS from a single-threaded sender (client-side bottleneck; validator CPU $\sim 8\%$). Low-load latency: 0.97 s (sub-block-period finality). Full-mesh connectivity: 4/4 peers per node.

Crash-fault tolerance. With $n=5$, $f_{\max} = \lfloor (n-1)/3 \rfloor = 1$. Consensus persists at $f=1$ (10 blocks/30 s) but halts at $f=2$, empirically validating the BFT threshold. Full recovery occurs after restarting all crashed nodes.

Extrapolation to $n=60$. Three scaling factors bridge the testnet to production: client bottleneck removal ($\times 3$, CPU at 8% implies headroom); Amdahl hardware scaling ($\times 1.7$, parallel fraction $p=0.65$, $2 \rightarrow 16$ cores); consensus overhead ($\times 0.96$, gossip-model $\phi(60)=0.045$). This yields a lower bound of $29 \times 3 \times 1.7 \times 0.96 \approx 144$ TPS. The remaining $\times 2.7$ gap to SimPy's 726.5 TPS is attributable to SimPy's idealized 1.0 s block interval (vs configured 2.0 s) and omitted EVM serialization; since all protocols share this overhead, relative comparisons are unaffected. Gas-limit saturation ($\lfloor 30\text{M}/21\text{k} \rfloor$ tx/block) gives an upper bound of ~ 500 TPS; central estimate: $\sqrt{144 \times 500} \approx 268$ TPS. The reality discount $\rho \in [0.20, 0.69]$ preserves all relative protocol comparisons since all protocols share the same serialization overhead.

7. Limitations. Key limitations include: (1) the 5-node testnet requires scaling to 60+ nodes with parallel senders for direct validation; fault-tolerance tests used crash failures only, not full Byzantine injection; (2) the synthetic dataset makes the ML component a policy distillation—99.2% accuracy reflects label separability, not a real-world generalization guarantee; under 10% noise accuracy drops to 87.6%; (3) absolute TPS values are simulator-specific—only relative comparisons are meaningful; (4) $O(n^2)$ BFT messaging limits scaling beyond $n \approx 200$; HotStuff [10] integration would be necessary at larger scale; (5) the framework targets permissioned networks; the independence assumption between node failures may weaken concentration bounds under correlated Byzantine attacks.

8. Conclusions. The main contribution is a probabilistic safety analysis of an adaptive hybrid consensus mechanism using Hoeffding/Bernstein concentration bounds under imperfect Byzantine detection. The mechanism switches between three structurally distinct protocols (QBFT, PoS, PBFT) with a deterministic override independent of ML accuracy and formal switching-rate and override-safety guarantees. A 5-node Hyperledger Besu testnet confirms deterministic block production (2.000 ± 0.000 s) and $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$ crash-fault tolerance; extrapolation yields 144–500 TPS (central: 268) at $n=60$. Simulations on Ukrainian election data show 32% throughput improvement over static QBFT, 99.4% PBFT coverage during 20% Byzantine attacks, near-baseline communication energy (+0.4%), and 6.9% multi-objective gain over threshold-only switching. Override safety remains effective for $p_d \geq 0.6$; scaling to $n \geq 231$ reduces p_{miss} below 10^{-6} . Future work: 60-node bare-metal deployment, Byzantine-injection testing, HotStuff integration for $n > 200$, and reinforcement learning for online policy optimization.

Conflict of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest in relation to the current study, including financial, personal, authorship, or any other, that could affect the study, as well as the results reported in this paper.

Funding

The research was conducted without financial support.

Data Availability

Simulation code, trained models, and raw results are available in the project repository.

Use of artificial intelligence

AI-assisted tools were used only for language editing and LaTeX formatting. All scientific results, methodology, and analysis were produced by the authors.

Contributions of authors

Peniak B. O.: Conceptualization, Methodology, Software, Formal analysis, Investigation, Data curation, Writing — original draft, Visualization. Liubinskyj B. B.: Supervision, Writing — review & editing, Validation.

Copyright ©



(2026). Peniak B. O., Liubinskyj B. B.
This work is licensed under a Creative
Commons Attribution 4.0 International
License.

References

1. Hjálmarsson, F. P., Hreiðarsson, G. K., Hamdaqa, M., & Hjalmtýsson, G. (2018). Blockchain-based e-voting system. In *2018 IEEE 11th International Conference on Cloud Computing (CLOUD)* (pp. 983–986). <https://doi.org/10.1109/CLOUD.2018.00151>
2. Allesie, D., Sobolewski, M., Vaccari, L., & Pignatelli, F. (2019). Blockchain for digital government: An assessment of pioneering implementations in public services. *JRC Science for Policy Report*. <https://doi.org/10.2760/93808>
3. Dunphy, P., & Petitcolas, F. A. P. (2018). A first look at identity management schemes on the blockchain. *IEEE Security & Privacy*, 16(4), 20–29. <https://doi.org/10.1109/MSP.2018.3111247>
4. Central Election Commission of Ukraine. (2019). *Presidential election turnout and participation statistics*. Official report. Retrieved from <https://www.cvk.gov.ua>
5. Castro, M., & Liskov, B. (1999). Practical Byzantine fault tolerance. In *Proceedings of the Third Symposium on Operating Systems Design and Implementation (OSDI)* (pp. 173–186). <https://dl.acm.org/doi/10.5555/296806.296824>
6. Nguyen, G. T., & Kim, K. (2018). A survey about consensus algorithms used in blockchain. *Journal of Information Processing Systems*, 14(1), 101–128. <https://doi.org/10.3745/JIPS.01.0024>
7. King, S., & Nadal, S. (2012). *PPCoin: Peer-to-peer crypto-currency with proof-of-stake*. Self-published paper. <https://decred.org/research/king2012.pdf>
8. Wang, J., & Wang, H. (2019). Monoxide: Scale out blockchains with

- asynchronous consensus zones. In *16th USENIX NSDI* (pp. 95–112). <https://www.usenix.org/conference/nsdi19/presentation/wang-jiaping>
9. Vukolić, M. (2015). The quest for scalable blockchain fabric: Proof-of-work vs. BFT replication. In *Open Problems in Network Security* (pp. 112–125). https://doi.org/10.1007/978-3-319-39028-4_9
 10. Yin, M., Malkhi, D., Reiter, M. K., Gueta, G. G., & Abraham, I. (2019). HotStuff: BFT consensus with linearity and responsiveness. In *Proceedings of the 2019 ACM PODC* (pp. 347–356). <https://doi.org/10.1145/3293611.3331591>
 11. ConsenSys. (2021). *QBFT consensus protocol*. Quorum documentation. Retrieved from <https://docs.goquorum.consensys.net>
 12. Saleh, F. (2021). Blockchain without waste: Proof-of-stake. *The Review of Financial Studies*, 34(3), 1156–1190. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhaa075>
 13. Kiayias, A., Russell, A., David, B., & Oliynykov, R. (2017). Ouroboros: A provably secure proof-of-stake blockchain protocol. In *Annual International Cryptology Conference* (pp. 357–388). https://doi.org/10.1007/978-3-319-63688-7_12
 14. Ricci, L., Maesa, D. D. F., Favenza, A., & Ferro, E. (2021). Blockchains for COVID-19 contact tracing and vaccine support: A systematic review. *IEEE Access*, 9, 37936–37950. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3063152>
 15. Liu, Y., Lu, Y., Nayak, K., Zhang, F., Zhang, L., & Zhao, Y. (2022). Empirical analysis of EIP-1559. In *Proceedings of the 2022 ACM CCS* (pp. 2099–2113). <https://doi.org/10.1145/3548606.3559341>
 16. Kumar, R., & Tripathi, R. (2021). Implementation of distributed consensus algorithm using blockchain for security enhancement. *Security and Privacy*, 4(5), e172. <https://doi.org/10.1002/spy2.172>
 17. Wang, Y., Cai, S., Lin, C., Ma, Z., Wang, X., & Wang, J. (2019). Study of blockchains's consensus mechanism based on credit. *IEEE Access*, 7, 10224–10231. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891065>
 18. Chen, T., Bahsoon, R., & Yao, X. (2018). A survey and taxonomy of self-aware and self-adaptive cloud autoscaling systems. *ACM Computing Surveys*, 51(3), 1–40. <https://doi.org/10.1145/3190507>
 19. Breiman, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45(1), 5–32. <https://doi.org/10.1023/A:1010933404324>
 20. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press. <https://www.deeplearningbook.org>

Пеняк Б. О., Любінський Б. Б. Адаптивний гібридний механізм консенсусу для блокчейн-орієнтованого електронного урядування: підхід на основі машинного навчання.

Запропоновано адаптивний гібридний механізм консенсусу для блокчейн-орієнтованого електронного урядування, що динамічно перемикається між QBFT, PoS та PBFT за допомогою класифікатора Random Forest, гістерезису та детерміністичного оверрайду. Формальні гарантії базуються на нерівностях Хефдінга та Бернштейна. Симуляції на даних українських президентських виборів (30 млн виборців, 12 год) демонструють покращення пропускну здатності на 32% (958.7 проти 726.5 TPS), 99.4% покриття PBFT при 20% візантійських атаках та +0.4% енергоспоживання. 5-вузлова тестова мережа Hyperledger Besu підтверджує детерміністичне виробництво блоків ($2,000 \pm 0,000$ с) і стійкість до відмов $\lfloor (n-1)/3 \rfloor$; екстраполяція дає 144–500 TPS при $n=60$. ML-підхід забезпечує 6,9% покращення за мультикритеріальною метрикою порівняно з пороговим перемиканням.

Ключові слова: блокчейн, електронне урядування, механізми консенсусу, машинне навчання, адаптивні системи, візантійська стійкість.

Recived: 02.03.2026

Accepted: 17.03.2026

Published: 30.04.2026

УДК 004.8:338.48:519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).262-268](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).262-268)**В. В. Поліщук¹, В. І. Сегляник²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
професор кафедри програмного забезпечення систем,
доктор технічних наук, професор
volodymyr.polishchuk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4586-1333>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри програмного забезпечення систем
vasyl.sehlianyk@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-9958-3713>

НЕЧІТКА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ ЦИФРОВОЇ БЕЗПЕКОВОЇ ГРАМОТНОСТІ НАСЕЛЕННЯ З УРАХУВАННЯМ СОЦІАЛЬНИХ ПРОФІЛІВ

У статті розглянуто науково-методичні аспекти розроблення нечіткої моделі оцінювання рівня цифрової безпекової грамотності населення з урахуванням соціальних профілів. Актуальність дослідження зумовлена зростанням ролі цифрової безпеки в умовах цифрової трансформації суспільства та необхідністю об'єктивного оцінювання здатності населення безпечно взаємодіяти з цифровим середовищем. Проаналізовано сучасні наукові підходи до оцінювання цифрової та кібербезпекової грамотності й обґрунтовано наукову прогалину, що полягає у відсутності комплексних моделей, які поєднують репрезентативний збір даних, формалізацію соціально-демографічних характеристик, інтегральне оцінювання та підтримку прийняття рішень.

Запропоновано нечітку модель, яка базується на формалізації кількісних і якісних демографічних характеристик населення за допомогою функцій належності та використанні вектора «цільових потреб», що формується особою, яка приймає рішення. Модель реалізує процедуру ранжування громадян за ступенем відповідності заданому соціальному профілю та дозволяє визначати кількісний показник рівня цифрової безпекової грамотності шляхом агрегування часткових оцінок. Застосування згорткового методу та системи вагових коефіцієнтів забезпечує гнучкість, відтворюваність і інтерпретованість результатів оцінювання.

Практична значущість отриманих результатів полягає у можливості використання запропонованої моделі органами державного та регіонального управління, закладами освіти, організаціями й аналітичними центрами для моніторингу рівня цифрової безпеки населення, порівняльного аналізу соціальних профілів та обґрунтування цільових заходів підвищення цифрової безпекової грамотності.

Ключові слова: цифрова безпека, соціальний профіль, нечітка модель, підтримка прийняття рішень, кібербезпека населення.

1. Вступ. Цифрова трансформація суспільства та поширення інформаційно-комунікаційних технологій посилюють значення цифрової безпеки як важливого чинника соціальної, економічної та національної безпеки. У цих умовах рівень цифрової безпекової грамотності населення визначає здатність громадян протидіяти кіберзагрозам, захищати персональні дані та безпечно користуватися цифровими сервісами, що зумовлює потребу в його об'єктивному оцінюванні.

Аналіз наукових досліджень свідчить, що більшість наявних підходів зосереджені на окремих середовищах або аспектах, але не враховують різноманіття соціально-демографічних характеристик населення та не забезпечують комплексного аналізу в розрізі соціальних профілів.

Наукова прогалина полягає у відсутності комплексних методів, що поєднують репрезентативний збір даних, формалізацію демографічних характеристик, інтегральне оцінювання та формування адресних рекомендацій для підтримки прийняття рішень.

Метою статті є розроблення та обґрунтування нечіткої моделі оцінювання рівня цифрової безпекової грамотності населення з урахуванням соціальних профілів, яка забезпечує формалізацію кількісних і якісних демографічних характеристик, інтегральне оцінювання рівня грамотності у сфері цифрової безпеки та підтримку прийняття управлінських рішень на різних територіальних рівнях.

Досягнення поставленої мети передбачає використання апарату нечіткої логіки для оброблення різнорідних даних, формування вектора «цілових потреб», ранжування громадян за відповідністю соціальним профілям і визначення кількісних показників цифрової безпекової грамотності для подальшого аналізу, моніторингу та розроблення цілових заходів.

2. Огляд літератури. Упродовж останніх років проблема оцінювання рівня цифрової та кібербезпекової грамотності активно досліджується в наукових роботах. Значна частина досліджень зосереджена на аналізі обізнаності користувачів у межах окремих середовищ, насамперед організаційного та освітнього. У роботах [1–2] розглянуто підходи до підвищення та вимірювання інформаційної безпекової обізнаності працівників, а також чинники формування політик кібербезпеки на рівні окремих країн. Водночас такі дослідження орієнтовані переважно на інституційний рівень і не враховують різноманіття соціально-демографічних профілів населення.

Окремий напрям досліджень стосується розроблення та валідації шкал і індикаторів оцінювання цифрової або кібербезпекової грамотності. У роботах [3–4] показано, що наявні підходи істотно різняться за структурою, набором показників і способами інтерпретації результатів, що ускладнює їх порівняння та повторне використання. Водночас такі дослідження здебільшого орієнтовані на окремі групи користувачів і не формують універсальної інтегральної процедури оцінювання для різних соціальних профілів.

Значний масив праць присвячено ефективності освітніх і тренінгових заходів у сфері кібербезпеки [5–6]. Хоча їх результати підтверджують позитивний вплив окремих втручань, ці підходи переважно зосереджені на ізольованих аспектах і не забезпечують комплексного оцінювання рівня цифрової безпекової грамотності населення [7–8].

Окрему групу становлять дослідження поведінкових і психологічних моделей кібербезпекової поведінки [9–10]. Такі роботи поглиблюють розуміння мотиваційних чинників і ризиків, однак не інтегруються з процедурами агрегування демографічних характеристик і не орієнтовані на підтримку управлінських рішень у розрізі соціальних профілів.

Отже, сучасні підходи до оцінювання цифрової та кібербезпекової грамотності залишаються фрагментарними. У науковій літературі бракує комплексних моделей, що поєднують збір даних, формалізацію демографічних характеристик, інтегральне оцінювання та формування адресних рекомендацій, що й зумовлює актуальність запропонованого нечіткого підходу.

3. Матеріали та методи. Дослідження проводиться на певній терито-

рії R , яка може представляти місто, регіон або країну. Населення цієї території позначається як $C = \{c_1; c_2; \dots; c_n\}$. По громадянах враховуються різні демографічні характеристики, що утворюють деякий соціальний профіль $SP = \{sp_1; sp_2; \dots; sp_k\}$. Потрібно здійснити оцінювання рівня грамотності населення у сфері цифрової безпеки деякої території у розрізі різних соціальних профілів.

Для отримання вхідних даних здійснюється опитування респондентів. Збір вхідної інформації відбувається за допомогою текстової анкети, розробленої на основі системи критеріїв K , які об'єднані по групах G . Використовуючи раніше розроблений згортковий метод відбувається визначення агрегованого рівня обізнаності громадян у сфері кібербезпеки ($\vartheta(c)$) та загального рівня в межах досліджуваної території – M_S [11]. Після цього, отримані дані йдуть на обчислення за допомогою нечіткої моделі оцінювання рівня грамотності населення різних соціальних профілів у сфері цифрової безпеки – M_{DS} .

Нечітка модель може бути представлена у вигляді оператора:

$$M_{DS}(R, C, SP, \vartheta(c)) | Y(f). \quad (1)$$

Оператор M_{DS} на основі вхідних даних $R, C, SP, \vartheta(c)$ ставить у відповідність вихідне значення $Y(f)$ – кількісний рівень грамотності населення у сфері цифрової безпеки деякого соціального профілю (sp).

Нехай громадянин C описується множиною демографічних характеристик $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, які формують відповідний соціальний профіль $SP = \{sp_1, sp_2, \dots, sp_k\}$. Оскільки ці характеристики мають як кількісну, так і якісну природу, для забезпечення їх коректного порівняння та подальшої обробки вони формалізуються та нормуються за єдиною шкалою.

У межах дослідження соціальний профіль громадянина формується на основі сукупності демографічних характеристик, зокрема статі, віку, соціально-економічного статусу, рівня освіти, доходу та сімейного стану. Оскільки ці характеристики мають кількісну й якісну природу, для їх узгодженого аналізу застосовуються функції належності, що дають змогу формалізувати вихідні значення та привести їх до єдиної нормованої шкали. У загальному вигляді для кожної демографічної характеристики d_u вводиться функція належності $\mu_{d_u}(x) : X_u \rightarrow [0; 1]$, яка ставить у відповідність значенню ознаки x ступінь його належності до заданого терму або цільового стану. Для кількісних демографічних характеристик, зокрема віку та доходу, використовуються лінійні або трапецієподібні функції належності на шкалі $[0; 1]$. Для якісних характеристик, таких як рівень освіти, сімейний стан чи соціально-економічний статус, застосовується дискретне кодування з подальшим заданням відповідних функцій належності до лінгвістичних термів. Такий підхід забезпечує уніфіковане подання різнорідних демографічних ознак у числовій формі та створює основу для подальшого застосування апарату нечіткої логіки.

Дане дослідження спрямоване на визначення рівня грамотності населення у сфері цифрової безпеки у розрізі різних соціальних профілів $SP = \{sp_1; sp_2; \dots; sp_k\}$. Соціальний профіль утворюється групуванням різних демографічних характеристик S шляхом задання деякого правила ОНР – τ .

У дослідженні формування соціального профілю $SP(\tau)$ відповідно до правил особи, що приймає рішення (τ), інтерпретується як задання «цільової потреби

би». Відповідно, вектор цільових потреб визначається як сукупність демографічних характеристик умовної групи громадян, для якої оцінюється рівень цифрової безпекової грамотності з метою подальшого аналізу та підтримки прийняття рішень.

Нехай отримані нормовані дані щодо громадян C , сформовані відповідно до їх демографічних характеристик у досліджуваному регіоні R , подаються у вигляді матриці рішень:

$$SPC = \begin{pmatrix} sp_1(c_1) & sp_1(c_2) & \dots & sp_1(c_n) \\ sp_2(c_1) & sp_2(c_2) & \dots & sp_2(c_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ sp_k(c_1) & sp_k(c_2) & \dots & sp_k(c_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

На наступному етапі особа, що приймає рішення, задає k -вимірний вектор цільових потреб для оцінювання рівня цифрової безпекової грамотності відповідного соціального профілю. Цей вектор використовується для формалізованого опису вимог до заданого профілю та надалі позначається як $Z(\tau) = Z^* = (\hat{sp}_1, \hat{sp}_2, \dots, \hat{sp}_k)$.

Далі формується ранжувальний ряд громадян $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, у якому перші позиції займають альтернативи, що найбільшою мірою відповідають заданому вектору «цільових потреб» соціального профілю. Запропонований підхід ґрунтується на пошуку рішень, які за сукупністю демографічних характеристик є максимально наближеними до визначеного вектора.

Для цього використовується матриця SPC разом із вектором $Z(\tau)$, на основі яких визначається система показників, що характеризують ступінь близькості елементів матриці SPC до відповідних компонентів вектора «цільових потреб» заданого соціального профілю:

$$q_{ui} = 1 - \frac{|\overline{sp}_u - sp_u(c_i)|}{\max \left\{ \overline{sp}_u - \min_i (sp_u(c_i)); \max_i (sp_u(c_i)) - \overline{sp}_u \right\}}, \quad u = \overline{1, k}; \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Сформована матриця $Q = \{q_{ui}\}$ відображає ступінь близькості громадян c_i до вектора цільових потреб Z^* за кожною демографічною характеристикою. При цьому особа, що приймає рішення, може формувати Z^* не за всіма показниками, а лише за їх вибраною множиною, що відповідно зменшує розмірність матриці рішень SPC .

На наступному етапі особа, що приймає рішення, задає вагові коефіцієнти $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ для кожної демографічної характеристики соціального профілю SP , наприклад, у межах інтервалу $[1; 10]$. З метою забезпечення порівнюваності показників здійснюється нормування вагових коефіцієнтів:

$$w_u = \frac{v_u}{\sum_{u=1}^k v_u}, \quad u = \overline{1, k}; \quad w_u \in [0; 1]. \quad (4)$$

Вагові коефіцієнти v_u доцільно визначати на основі експертної процедури, зокрема шляхом попарного порівняння важливості демографічних характеристик або за бальною шкалою з подальшим нормуванням за умовою $\sum_{u=1}^m v_u = 1$.

Це підвищує обґрунтованість, відтворюваність і зменшує суб'єктивність оцінювання.

На завершальному етапі здійснюється формування ранжувального ряду громадян $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ відносно «цілових потреб» заданого соціального профілю. Не обмежуючи загальності підходу, для агрегування часткових оцінок застосовується згортковий метод, зокрема середня згортка, яка має такий вигляд:

$$\rho(c_i) = \sum_{u=1}^k w_u \cdot q_{ui}. \quad (5)$$

На наступному етапі визначається кількісний рівень цифрової безпекової грамотності заданого соціального профілю. Для цього особа, що приймає рішення, задає кількість громадян r , після чого з ранжувального ряду $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ відбираються перші r альтернатив. Для цієї підмножини на основі агрегованого рівня обізнаності $\vartheta(c)$ обчислюється середнє значення, яке інтерпретується як кількісна оцінка рівня цифрової безпекової грамотності відповідного соціального профілю:

$$Y(f) = \frac{1}{r} \sum_{d=1}^r \vartheta(c_d). \quad (6)$$

Коли $m_{dsp}(sp) \rightarrow 1$ тоді буде високий рівень грамотності населення у сфері цифрової безпеки вибраного соціального профілю.

У результаті було відібрано сукупність громадян, демографічні характеристики яких є найбільш наближеними до заданого особою, що приймає рішення, соціального профілю. На основі отриманої вибірки надалі обчислено середній рівень грамотності у сфері цифрової безпеки.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У ході дослідження розроблено нечітку модель оцінювання рівня цифрової безпекової грамотності населення з урахуванням соціальних профілів. Запропонований підхід забезпечує комплексне оцінювання на основі репрезентативних емпіричних даних, отриманих шляхом анкетування. Модель ґрунтується на формалізації кількісних і якісних демографічних характеристик за допомогою функцій належності, що забезпечує їх узгоджене порівняння та інтегральне оцінювання.

Запровадження вектора «цілових потреб», сформованого особою, що приймає рішення, дає змогу ранжувати громадян за ступенем відповідності заданому соціальному профілю. Використання матриці відносних оцінок, нормованих вагових коефіцієнтів і згорткового методу забезпечує прозору, відтворювану та інтерпретовану процедуру оцінювання. На цій основі визначається підмножина громадян, найбільш наближених до обраного профілю, та обчислюється кількісний показник рівня цифрової безпекової грамотності.

Практична значущість моделі полягає у можливості її застосування для моніторингу стану цифрової безпеки населення, порівняльного аналізу соціальних профілів і формування адресних управлінських рішень щодо підвищення цифрової грамотності.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з апробацією запропонованої моделі на реальних вибірках респондентів, поданням модельних числових при-

кладів її застосування для різних соціальних профілів та розширенням емпіричної бази на різні територіальні рівні.

Конфлікт інтересів

Поліщук Володимир Володимирович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Це дослідження виконано в межах наукових проєктів молодих учених «Захист інформаційної безпеки при управлінні проєктами міжнародного співробітництва на засадах гарантування національної безпеки України» (DB-921M) та «Захист персональних даних в умовах розвитку штучного інтелекту та Інтернету речей: правові й технічні аспекти» (DB-924M), що фінансуються Міністерством освіти і науки України.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

В. В. Поліщук: концептуалізація, формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт, написання — рецензування та редагування. В. І. Сегляник: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання — оригінальний проєкт, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Поліщук В. В., Сегляник В. І. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Khando, K., Gao, S., Islam, S. M., & Salman, A. (2021). Enhancing employees' information security awareness in private and public organisations: A systematic literature review. *Computers & Security*, 106, Article 102267. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2021.102267>
2. Mishra, A., Alzoubi, Y. I., Anwar, M. J., & Gill, A. Q. (2022). Attributes impacting cybersecurity policy development: An evidence from seven nations. *Computers & Security*, 120, Article 102820. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2022.102820>
3. Rohan, R., Pal, D., Hautamäki, J., Funilkul, S., Chutimaskul, W., & Thapliyal, H. (2023). A systematic literature review of cybersecurity scales assessing information security awareness. *Heliyon*, 9(3), Article e14234. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e14234>

4. Bognár, L., & Bottyán, L. (2024). Evaluating online security behavior: Development and validation of a personal cybersecurity awareness scale for university students. *Education Sciences*, 14(6), Article 588. <https://doi.org/10.3390/educsci14060588>
5. Argyridou, E., Nifakos, S., Laoudias, C., & et al. (2023). Cyber hygiene methodology for raising cybersecurity and data privacy awareness in health care organizations: Concept study. *Journal of Medical Internet Research*, 25, Article 41294. <https://doi.org/10.2196/41294>
6. Hull, D. M., Schuetz, S. W., & Lowry, P. B. (2023). Tell me a story: The effects that narratives exert on meaningful-engagement outcomes in antiphishing training. *Computers & Security*, 129, Article 103252. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2023.103252>
7. Berens, B. M., Mossano, M., & Volkamer, M. (2024). Taking 5 minutes protects you for 5 months: Evaluating an anti-phishing awareness video. *Computers & Security*, 137, Article 103620. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2023.103620>
8. Kävrestad, J., Hagberg, A., Nohlberg, M., Rambusch, J., & et al. (2024). Design principles for cognitively accessible cybersecurity training. *Computers & Security*, 137, Article 103630. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2023.103630>
9. Kiran, U., Khan, N., Murtaza, H., & Farooq, A. (2025). Explanatory and predictive modeling of cybersecurity behaviors using Protection Motivation Theory. *Computers & Security*, 149, Article 104204. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.104204>
10. Prümmer, J., van Steen, T., & van den Berg, B. (2025). Assessing the effect of cybersecurity training on end-users: A meta-analysis. *Computers & Security. Advance online publication*. Article 104206. <https://doi.org/10.1016/j.cose.2024.104206>
11. Polishchuk, I., Petrushko, I., Sehlianyk, V., & Matei, A. (2025). Intellectual model for assessing the level of citizens' awareness in the field of cybersecurity. *Herald of Khmelnytskyi National University. Technical Sciences*, 357(5.1), 367–374. <https://doi.org/10.31891/2307-5732-2025-357-47>

Polishchuk V., Sehlianyk V. A fuzzy model for assessing digital cybersecurity literacy of the population considering social profiles.

The article addresses the scientific and methodological aspects of developing a fuzzy model for assessing the level of digital (cybersecurity) literacy of the population about social profiles. The relevance of the study is driven by the growing importance of digital security in the context of digital transformation and the need for an objective assessment of the population's ability to safely interact with the digital environment. Contemporary scientific approaches to evaluating digital and cybersecurity literacy are analyzed, and a research gap is identified, which lies in the absence of comprehensive models that integrate representative data collection, formalization of socio-demographic characteristics, integral assessment, and decision support.

A fuzzy model is proposed that is based on the formalization of quantitative and qualitative demographic characteristics using membership functions and the application of a “target needs” vector defined by the decision-maker. The model implements a procedure for ranking individuals according to their degree of conformity with a specified social profile and enables the determination of a quantitative indicator of digital cybersecurity literacy through the aggregation of partial assessments. The use of a convolution-based aggregation method and a system of weight coefficients ensure flexibility, reproducibility, and interpretability of the assessment results.

The practical significance of the obtained results lies in the applicability of the proposed model by state and regional authorities, educational institutions, organizations, and analytical centers for monitoring the level of digital security literacy of the population, conducting comparative analyses of social profiles, and substantiating targeted measures aimed at improving digital cybersecurity literacy.

Keywords: digital security, social profile, fuzzy model, decision support, population cybersecurity literacy.

Отримано: 17.03.2026

Прийнято: 03.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.8:004.9:004.6:004.4

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).269-275](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).269-275)**М. Ю. Сміленко**

ВНЗ «Університет економіки та права “КРОК”»,

аспірант кафедри управлінських технологій

smilenkoMY@krok.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7690-3765>

ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА СУЧАСНИХ МЕТОДІВ БАГАТОРАКУРСНОЇ 3D-РЕКОНСТРУКЦІЇ СЦЕН ЗА RGB-ЗОБРАЖЕННЯМИ: ТОЧНІСТЬ, ПОВНОТА ТА РЕСУРСОЄМНІСТЬ

У роботі розглянуто сучасні методи багаторакурсної 3D-реконструкції сцен за RGB-зображеннями та виконано їх порівняльне оцінювання за показниками геометричної якості й обчислювальної ефективності. Для аналізу обрано класичний алгоритм COLMAP як базовий орієнтир, а також DUST3R, MAST3R, CUT3R, VGGT і Fast3R як представників нової хвилі моделей. Оцінювання виконано на основі стандартизованого сценарію, на якому тестувались три типи сцен: контрольовані (лабораторні), реалістичні (внутрішні/зовнішні) та складні великомасштабні (внутрішні сцени). Для порівняння використано метрики точності, повноти, F1-показника, часу обробки, використання відеопам'яті та масштабованість зі збільшенням кількості вхідних зображень. Продemonстровано, що універсального методу, який би одночасно забезпечував найкращу якість реконструкції та мінімальну ресурсоємність, не існує. Найвищу якість продемонстрував VGGT, найкращу швидкість та масштабованість — Fast3R, а найбільш збалансованим методом виявився CUT3R.

Ключові слова: 3D-реконструкція, RGB-зображення, замір продуктивності, навчувані моделі, трансформерні моделі.

1. Вступ. Тривимірна реконструкція сцен за зображеннями є одним із ключових напрямів сучасного комп'ютерного зору. Її сутність полягає у відновленні просторової структури середовища на основі набору фотографій або кадрів відео. Отримане 3D-подання сцени може бути використане в робототехніці, навігації, AR/VR, цифрових двійниках, картографуванні та просторовому аналізі.

Традиційно завдання 3D-реконструкції вирішували за допомогою класичних конвеєрних підходів, передусім методів структури за рухом (Structure-from-Motion) та багатовидового стерео (Multi-View Stereo). Такі методи забезпечували високу точність, але вимагали значних обчислювальних ресурсів, чутливого налаштування та окремих етапів геометричної оптимізації. Останніми роками ситуація змінилася через появу навчуваних (learning-based) і трансформерних моделей (transformer-based) моделей, які намагаються безпосередньо оцінювати геометричні характеристики сцени з набору зображень.

У зв'язку з цим сьогодні вже недостатньо оцінювати методи лише за точністю відновлення поверхонь. Для практичного використання не менш важливими стають час обробки, потреба у відеопам'яті, стабільність зі збільшенням кількості кадрів та загальна масштабованість. Саме тому актуальним завданням є порівняння сучасних методів 3D-реконструкції не лише за якістю геометрії, а й за ресурсоємністю.

2. Постановка завдання. Метою статті є порівняльне оцінювання сучасних методів багаторакурсної 3D-реконструкції сцен за RGB-зображеннями з

урахуванням не лише геометричної якості, а й обчислювальної ефективності. Об'єктом дослідження є процес 3D-реконструкції сцен за набором багаторакурсних RGB-зображень. Предметом дослідження є сучасні методи реконструкції, їхня точність, повнота відновлення та ресурсоемність. У роботі поставлено завдання зіставити методи COLMAP, DUS3R, MAST3R, CUT3R, VGGT і Fast3R за параметрами точності, повноти, F1-показника, часу обробки, використання відеопам'яті та масштабованості.

3. Огляд літератури. 3D-реконструкція сцен за зображеннями є важливим напрямом комп'ютерного зору, оскільки використовується в цифровому моделюванні, робототехніці, навігації та AR/VR. Класичну основу цього напрямку становлять підходи структури за рухом та багатовидового стерео, які забезпечують високу геометричну точність, але потребують багатокрокової обробки та значних обчислювальних ресурсів [1]. Одним із найвідоміших представників такого підходу є COLMAP, який тривалий час залишається базовим рішенням для порівняння нових методів [1].

У подальшому розвиток 3D-реконструкції змістився у бік навчуваних моделей, здатних напряму оцінювати геометрію сцени з набору RGB-зображень. Зокрема, метод DUS3R пропонує підхід до реконструкції шляхом регресії карт точок без попередньо заданих параметрів камер [2]. На його основі було розроблено MAST3R, у якому посилено механізми встановлення відповідностей між зображеннями, що покращує геометричну узгодженість результатів [3]. Перспективним є також CUT3R, орієнтований на безперервне оновлення внутрішнього стану моделі в міру надходження нових спостережень [4].

Серед новітніх підходів окремо виділяється VGGT – метод на основі архітектури трансформер, що поєднує оцінювання параметрів камер, карт глибини, карт точок та траєкторій точок у межах єдиної архітектури [5]. Водночас Fast3R розроблено з акцентом на швидкодію та масштабованість при роботі з великими наборами зображень [6].

4. Порівняння сучасних методів 3D-реконструкції. Базовим орієнтиром у цій сфері залишається COLMAP – алгоритм із відкритим вихідним кодом, який поєднує етапи структури за рухом та багатовидового стерео. Його перевагою є висока якість геометричної реконструкції.

Серед сучасних методів на основі навчання важливе місце посідає DUS3R, що орієнтований на реконструкцію з некаліброваних зображень та використовує регресію карт точок. Його розвитком є MAST3R, який поєднує реконструкцію з покращеним встановленням відповідностей між зображеннями.

Подальшим кроком став CUT3R, який реалізує ідею безперервного оновлення внутрішнього стану моделі при надходженні нових спостережень. Це робить його перспективним для довгих послідовностей і потокових сценаріїв. Ще одним вагомим методом є VGGT – підхід на основі архітектури трансформер, який безпосередньо оцінює параметри камер, карти глибини, карти із точок та траєкторії точок. Він вирізняється універсальністю та високою якістю реконструкції. Окрему увагу привертає Fast3R, орієнтований насамперед на швидкість і масштабованість. Отже, сучасні методи можна умовно поділити на дві групи: класичні багатокрокові конвеєрні рішення / нові моделі прямого поширення на основі архітектури трансформер.

4.1. Обчислювальне середовище. Порівняльне оцінювання сучасних ме-

тодів 3D-реконструкції виконано в межах еталонного протоколу з використанням єдиного обчислювального середовища. Такий підхід забезпечив зіставність результатів між досліджуваними методами та дозволив оцінити їх за показниками геометричної якості й обчислювальної ефективності, зокрема *точності, повноти, F1-показника, часу обробки, пікового використання відеопам'яті та масштабованості*.

Для відтворюваності дослідження нижче наведено конфігурацію використаного середовища: *GPU: NVIDIA RTX 4090 24 GB / CPU: AMD Ryzen 9 7950X / RAM: 64 GB / OS: Ubuntu 22.04 LTS / CUDA: 12.1 / Python: 3.10*.

У дослідженні порівнювалися методи: COLMAP, DUS3R, MAST3R, CUT3R, VGGT і Fast3R. Оцінювання здійснювалося на трьох групах сцен: *DTU-like* — контрольовані лабораторні сцени [7]; *Tanks-like* — реальні внутрішні/зовнішні сцени середньої складності [8]; *ScanNet++-like* — складні великомасштабні внутрішні сцени [9].

4.2. Метрики оцінювання. Як вже було згадано раніше, для порівняння використовувалися дві групи показників: метрики геометричної якості (точність, повнота, F1-показник) та метрики обчислювальної ефективності (час обробки сцени, пікове використання GPU-пам'яті, масштабованість зі збільшенням числа вхідних зображень).

Для узагальнення результатів порівняння було введено інтегральний показник — Комплексна оцінка (CS) (1), який обчислювався як зважена сума трьох нормованих компонентів: якості реконструкції, обчислювальної ефективності та масштабованості. Найбільшу вагу надано якості реконструкції (0,5), оскільки саме вона є основним критерієм придатності методу. Дані коефіцієнти було отримано методом експертних оцінок.

$$S = 0.5 * Q + 0.3 * E + 0.2 * S, \quad (1)$$

де Q , E , S — показники якості, ефективності та масштабованості відповідно.

4.3. Результати порівняльного тестування. Результати представлено у вигляді окремих таблиць для трьох типів сцен, а також у формі аналізу масштабованості та агрегованих балів. Такий підхід дає змогу побачити не лише локальні переваги методів, а й їхню поведінку в різних умовах навантаження. Результати порівняльного для сцен типу DTU-like представлені в табл. 1.

Таблиця 1.

Результати порівняльного оцінювання для сцен DTU-like

Джерело: складено автором.

Метод	Точність	Повнота	F1	Час (хв)	VRAM (GB)
COLMAP	0.42	0.51	0.88	47	7.8
DUS3R	0.55	0.63	0.81	9	11.2
MAST3R	0.39	0.49	0.89	14	13.1
CUT3R	0.46	0.57	0.85	11	12.4
VGGT	0.37	0.47	0.90	10	15.6
Fast3R	0.49	0.60	0.84	6	10.3

Як можемо бачити з таблиці 1 на контрольованих сценах найкращий баланс якості показують VGGT і MAST3R. COLMAP залишається сильним базовим методом, але програє за часом. Fast3R швидкий, проте втрачає частину точності.

Для сцен типу Tanks-like результати порівняльного оцінювання представлені в табл. 2.

Таблиця 2.

Результати порівняльного оцінювання для сцен Tanks-like

Джерело: складено автором.

Метод	Точність	Повнота	F1	Час (хв)	VRAM (GB)
COLMAP	0.61	0.76	0.79	68	8.4
DUS3R	0.64	0.71	0.80	13	12.0
MASt3R	0.56	0.66	0.84	19	14.2
CUT3R	0.58	0.63	0.85	15	13.5
VGGT	0.54	0.61	0.86	14	16.8
Fast3R	0.63	0.68	0.81	8	11.1

На більш реалістичних сценах CUT3R уже виглядає сильніше, ніж у лабораторному сценарії. VGGT знову тримає найкращу якість, але споживає найбільше пам'яті. Fast3R зберігає перевагу у швидкості. Для сцен ScanNet++-like результати порівняльного оцінювання наступні (див. табл. 3).

Таблиця 3.

Результати порівняльного оцінювання для сцен типу ScanNet++-like

Джерело: складено автором.

Метод	Точність	Повнота	F1	Час (хв)	VRAM (GB)
COLMAP	0.84	0.98	0.71	126	9.1
DUS3R	0.73	0.82	0.77	22	13.5
MASt3R	0.66	0.75	0.81	30	16.0
CUT3R	0.62	0.70	0.83	21	14.8
VGGT	0.60	0.68	0.84	19	18.9
Fast3R	0.69	0.79	0.79	12	12.7

На великих складних внутрішніх сценах класичного конвеєра різко просідає за часом і частково за повнотою. Найкращий компроміс тут дають VGGT і CUT3R. Після аналізу результатів для окремих типів сцен доцільно оцінити, як досліджувані методи поведуться зі збільшенням обсягу вхідних даних.

Таблиця 4.

Час обробки сцен типу Tanks-like залежно від кількості зображень, хв

Джерело: складено автором

Методи	16 зображень	32 зображення	64 зображення	128 зображень
COLMAP	18	37	68	141
DUS3R	5	8	13	26
MASt3R	7	11	19	39
CUT3R	6	9	15	28
VGGT	6	9	14	24
Fast3R	3	5	8	14

Таблиця 5.

Пікове використання VRAM залежно від кількості зображень, GB

Джерело: складено автором

Методи	16 зображень	32 зображення	64 зображення	128 зображень
COLMAP	4.2	5.6	8.4	12.9
DUS3R	7.8	9.4	12.0	18.7
MASt3R	8.5	10.7	14.2	21.4
CUT3R	8.0	10.2	13.5	19.3
VGGT	9.1	12.3	16.8	23.8
Fast3R	6.0	7.9	11.1	15.6

Отримані дані щодо часу обробки та пікового використання відеопам'яті дають змогу оцінити не лише окремі аспекти масштабованості, а й загальний баланс між якістю реконструкції, обчислювальною ефективністю та стабільністю методів. Для узагальнення цих характеристик у таблиці 6 наведено агреговані бали досліджуваних підходів.

Масштабованість за часом найкраща у Fast3R, а за сукупністю якості та стабільності – у VGGT і CUT3R. COLMAP зростає найгірше за часом, хоч не є найважчим за VRAM.

Показники часу обробки та пікового використання VRAM відображають окремі аспекти обчислювальної ефективності методів, однак для підсумкового порівняння доцільно розглянути їх у поєднанні з якістю реконструкції. Саме тому в таблиці 6 наведено агреговані бали, що узагальнюють співвідношення якості, ефективності та масштабованості досліджуваних підходів.

Таблиця 6.

Агреговані бали методів COLMAP, DUS3R, MASt3R, CUT3R, VGGT, Fast3R

Джерело: складено автором

Методи	Якість	Ефективність	Масштабованість	Комплексна оцінка
COLMAP	79	41	38	58.6
DUS3R	75	76	69	74.0
MASt3R	84	65	61	73.9
CUT3R	85	74	76	79.9
VGGT	88	71	78	81.1
Fast3R	77	89	91	84.0

Як можемо бачити з таблиці 6, за сукупним показником найвищий бал отримав Fast3R, що пояснюється його сильною масштабованістю та високою обчислювальною ефективністю. Водночас VGGT зберіг лідерство за якістю реконструкції, а CUT3R виявився найбільш збалансованим методом.

5. Обговорення результатів та висновки. Отримані результати показують, що сучасні методи 3D-реконструкції не можна оцінювати лише з позиції однієї метрики. Метод, який дає найкращу точність, не обов'язково буде найкращим для реального використання. З іншого боку, найшвидший підхід може

поступатися в якості відновленої геометрії, що є критичним для задач цифрового моделювання, технічної інспекції або цифрових двійників.

У межах виконаного benchmark-сценарію можна виділити три основні висновки:

- по-перше, VGGT демонструє найвищу геометричну якість;
- по-друге, Fast3R є лідером за швидкістю та масштабованістю;
- по-третє, CUT3R виявився найбільш збалансованим методом, якщо оцінювати не лише якість реконструкції, а й ресурсоємність та стабільність при зростанні кількості вхідних кадрів.

Отже, вибір методу залежить від поставленої задачі. Для сценаріїв, де головною є точність, доцільно віддати перевагу VGGT або MSt3R. Для задач, де важлива швидкість обробки великих обсягів даних, доцільнішим є Fast3R. Якщо ж потрібно досягти компромісу між якістю, стабільністю й практичною ефективністю, найбільш перспективним виглядає CUT3R.

Отримані результати можуть бути використані для вибору методу 3D-реконструкції у різних сценаріях та при подальших дослідженнях даної тематики як опорні результати.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що не має конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису (див. [7-9]).

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Сміленко М. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Schönberger, J. L., Zheng, E., Frahm, J.-M., & Pollefeys, M. (2016). Pixelwise view selection for unstructured multi-view stereo. In B. Leibe, J. Matas, N. Sebe, & M. Welling (Eds.), *Computer*

- Vision – ECCV 2016*. Lecture Notes in Computer Science. (Vol. 9907, pp. 501–518). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-46487-9_31
2. Wang, S., Leroy, V., Cabon, Y., Chidlovskii, B., & Revaud, J. (2024). DUST3R: Geometric 3D Vision Made Easy. In *Proceedings: IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. (pp. 20697–20709). <https://doi.org/10.1109/CVPR52733.2024.01956>
 3. Leroy, V., Cabon, Y., & Revaud, J. (2024). *Grounding Image Matching in 3D with MAST3R*. Computer Vision – ECCV 2024: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-73220-1_5
 4. Wang, Q., Zhang, Y., Holynski, A., Efros, A. A., & Kanazawa, A. (2025). Continuous 3D perception model with persistent state. In *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. (pp. 10510–10522). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CVPR52734.2025.00983>
 5. Wang, J., Chen, M., Karaev, N., Vedaldi, A., Rupprecht, C., & Novotny, D. (2025). VGGT: Visual Geometry Grounded Transformer. *Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Nashville, TN: USA. pp. 5294–5306. <https://doi.org/10.1109/CVPR52734.2025.00499>
 6. Yang, J., & et al. (2025). Fast3R: Towards 3D reconstruction of 1000+ images in one forward pass. In *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. (pp. 21924–21935). IEEE. <https://doi.org/10.1109/CVPR52734.2025.02042>
 7. Aanæs, H., Jensen, R. R., Vogiatzis, G., & et al. (2016). Large-Scale Data for Multiple-View Stereopsis. *International Journal of Computer Vision*, 120, 153–168. <https://doi.org/10.1007/s11263-016-0902-9>
 8. Knapitsch, A., Park, J., Zhou, Q. Y., & Koltun, V. (2017). Tanks and temples: Benchmarking large-scale scene reconstruction. *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, 36(4), 1–13. <https://doi.org/10.1145/3072959.3073599>
 9. Yeshwanth, C., Liu, Y. C., Nießner, M., & Dai, A. (2023). ScanNet++: A high-fidelity dataset of 3D indoor scenes. In *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*. (pp. 12–22). <https://doi.org/10.1109/ICCV51070.2023.00008>

Smilenko M. Yu. Comparative Evaluation of Modern Multi-View 3D Scene Reconstruction Methods from RGB Images: Accuracy, Completeness, and Resource Efficiency.

The paper examines modern methods for multi-view 3D scene reconstruction from RGB images and provides their comparative assessment according to indicators of geometric quality and computational efficiency. For the analysis, the classical COLMAP algorithm was selected as a baseline, along with DUST3R, MAST3R, CUT3R, VGGT and Fast3R as representatives of the new wave of models. The evaluation was carried out using a standardized scenario in which three types of scenes were tested: controlled laboratory scenes, realistic indoor/outdoor scenes, and complex large-scale outdoor scenes. For comparison, the study used metrics of accuracy, completeness, F1-score, processing time, video memory usage and scalability with an increasing number of input images. It was demonstrated that there is no universal method that simultaneously provides the highest reconstruction quality and minimal resource consumption. VGGT showed the highest quality, Fast3R demonstrated the best speed and scalability, while CUT3R proved to be the most balanced method.

Keywords: 3D reconstruction, RGB images, performance measurement, trained models, transformer models.

Отримано: 28.03.2026

Прийнято: 12.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.2

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).276-282](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).276-282)**Ю. О. Товт¹, А. Ю. Брила²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
yurii.tovt@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9556-0630>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
andrii.bryla@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2518-9877>

ФІЛЬТРАЦІЯ ІМПУЛЬСНОГО ШУМУ З ВИПАДКОВИМИ ЗНАЧЕННЯМИ НА ЦИФРОВИХ ЗОБРАЖЕННЯХ З ВИКОРИСТАННЯМ ДЕТЕКТОРУ ІМПУЛЬСІВ НА ОСНОВІ НЕЙРОННОЇ МЕРЕЖІ

Сьогодні цифрові зображення активно використовуються в багатьох галузях. Їх обробка та аналіз є важливими завданнями, тому фільтрація шуму відіграє суттєву роль. У цій роботі досліджено метод фільтрації імпульсного шуму з випадковими значеннями на зображеннях із застосуванням детектора імпульсів, побудованого на основі дійснозначної нейронної мережі. Проведено експериментальні дослідження з видалення імпульсного шуму та виконано порівняння отриманих результатів із деякими існуючими підходами до його фільтрації.

Ключові слова: нейронні мережі, цифрові зображення, фільтрація шуму, імпульсний шум, імпульсний шум з випадковими значеннями, системний аналіз, математичне моделювання, програмна реалізація.

1. Вступ. Поява шуму на цифрових зображеннях є частим явищем. Його наявність часто стає на заваді подальшій обробці та аналізу інформації. До основних видів шуму, що зустрічаються на цифрових зображеннях, належить імпульсний шум [1].

Найпоширенішими типами цього шуму є шум «сіль та перець» (S&P) та імпульсний шум із випадковими значеннями (RVIN) [2]. Класичним методом фільтрації імпульсного шуму (який часто використовується як бенчмарк) є медіанний фільтр [2]. Незважаючи на свою простоту, цей алгоритм дозволяє ефективно усувати імпульсний шум, проте йому притаманний серйозний недолік - погане збереження дрібних деталей зображення. Ця проблема сприяла виникненню низки більш інтелектуальних фільтрів, таких як Center-Weighted Median Filter [3], Adaptive Center-Weighted Median Filter [4], Signal Dependent Rank Ordered Mean Filter [5] та багатьох інших.

Серед широкого спектру алгоритмів варто звернути увагу на фільтри, що базуються на використанні детектора, наприклад: Differential Rank Impulse Detector (DRID) [6] та Adaptive Switching Median Filter [7]. Так, детектор DRID дозволяє ефективно визначити наявність імпульсу, використовуючи дані локальної статистики, і забезпечує високий рівень фільтрації та збереження деталей зображення.

Детектори імпульсів можуть ефективно виявляти імпульси у випадку S&P шуму, оскільки інтенсивності імпульсів набувають полярних значень із діапазону яскравості. Ситуація ускладнюється при фільтрації RVIN шуму, оскільки інтенсивності імпульсів можуть набувати будь-яких значень з усього діапазону.

У [8] запропоновано трикроковий алгоритм фільтрації RVIN шуму, який базується на використанні локальної статистики. У роботі було продемонстровано ефективність цього методу порівняно з іншими підходами, включно з медіанним фільтром.

Вдосконалення білатерального фільтра [9] було запропоновано у [10]. Цей фільтр також використовує локальну статистику для більш ефективної обробки пікселів зображення. Він продемонстрував високі результати при фільтрації адитивного гауссового, імпульсного та змішаного шумів.

Бурхливий розвиток нейронних мереж також сприяв появі алгоритмів фільтрації на їхній основі. Так, у роботах [11] та [12] нейронні мережі різних типів та топологій успішно використовувалися для усунення імпульсного шуму.

У даній роботі, розвиваючи ідеї, запропоновані у [13], ми пропонуємо алгоритм фільтрації RVIN за допомогою детектора, побудованого з використанням багат шарового перцептрона (MLP).

2. Основний результат.

2.1. RVIN шум. Ключовою відмінністю RVIN шуму від, наприклад, S&P шуму та його різновидів (таких як salt-шум або pepper-шум), є те, що інтенсивності імпульсів можуть набувати довільних значень із діапазону $[0, L - 1]$. Ця особливість і є основною причиною складності виявлення та фільтрації таких імпульсів. Модель RVIN шуму, яку ми використовували у цій роботі, має вигляд:

$$h(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{з імовірністю } p, \\ f(x, y), & \text{з імовірністю } 1 - p, \end{cases}$$

де $f(x, y)$ - ідеальне (не зашумлене) зображення, $g(x, y)$ - випадкове значення інтенсивності з інтервалу $[0, L - 1]$.

Зауважимо, що під час проведення експериментів ми використовували зображення у відтінках сірого

$$f : D \rightarrow I,$$

де $D = \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, M\}$ - просторова область, а $I = \{0, 1, \dots, L - 1\}$ - інтенсивність.

Таке спрощення не зменшує загальності запропонованого підходу, оскільки кольорові зображення можуть бути представлені у вигляді комбінації каналів (наприклад, у моделі RGB), кожен з яких є окремим зображенням у відтінках сірого.

2.2. Детектор імпульсів. При фільтрації імпульсного шуму основним недоліком класичних методів, наприклад медіанного фільтра, є втрата дрібних деталей зображення. Цей недолік є критичним для таких галузей, як медицина, де аналіз цифрових зображень має вирішальне значення для діагностики. Уникнути надмірного згладжування дозволяє використання детектора імпульсів. Детектор дає змогу ідентифікувати зашумлені пікселі, що дозволяє не за-

стосовувати фільтрацію там, де імпульс відсутній. Робота детектора зазвичай ґрунтується на аналізі локальної статистики околу пікселя [8, 10].

У цій роботі для аналізу локальних ознак та прийняття рішення про наявність імпульсу ми пропонуємо використовувати багатопаровий перцептрон. MLP часто застосовують для розв'язання задач регресії та класифікації; саме до останнього класу можна віднести задачу детектування імпульсного шуму.

Нехай ми обробляємо піксель зображення з просторовими координатами $(x, y) \in D$. Позначимо через $O_{(x,y)}^{(k)}$ інтенсивність центрального пікселя та інтенсивності пікселів його локального околу розміром $k \times k$ (у наших дослідженнях ми використовували $k = 3$). Тоді задачу детектування імпульсу можна сформулювати як пошук такого функціонального відображення G , що:

$$G(O_{(x,y)}^{(k)}) = p_{(x,y)},$$

де $p_{(x,y)}$ - оцінка ймовірності наявності імпульсу в пікселі.

Пошук відображення G аналітичним шляхом є нетривіальною задачею. Проте здатність MLP до навчання та апроксимації складних функціональних залежностей між вхідними та вихідними даними дозволяє знайти наближене відображення $\tilde{G}$, таке що:

$$\tilde{G}(\text{vec}(O_{(x,y)}^{(k)})) \approx p_{(x,y)}.$$

У цьому випадку $\text{vec}(O_{(x,y)}^{(k)})$ виступає вектором вхідних ознак, а $p_{(x,y)}$ - виходом нейромережі. Таким чином, MLP виконує роль детектора імпульсів.

Зважаючи на складність фільтрації RVIN шуму порівняно з S&P, для покращення точності детектування ми доповнили вектор вхідних ознак MLP даними локальної статистики ROAD [10]. У дослідженні було використано значення $ROAD_1(x)$, $ROAD_2(x)$ та $ROAD_3(x)$. Отже, модель нашого детектора набуває вигляду:

$$\tilde{G}(v) \approx p_{(x,y)},$$

де $v = (o, r)$ - конкатенований вектор вхідних ознак, в якому $o = \frac{1}{255} \text{vec}(O_{(x,y)}^{(k)})$, а $r = (\frac{1}{255} ROAD_1(x), \frac{1}{510} ROAD_2(x), \frac{1}{765} ROAD_3(x))$.

Під час експериментів було використано нейронні мережі топологій 12-32-1 та 12-64-1. У ролі функцій активації використовувалися сигмоїдальна функція та функція ReLU (остання - виключно у прихованих шарах).

2.3. Процес навчання детектору. Для побудови навчальної вибірки ми використовували набір із 400 зображень у відтінках сірого. Цю множину було розділено на дві підмножини: навчальну S_{train} та тестову S_{test} , такі, що $S_{train} \cap S_{test} = \emptyset$.

Навчальну вибірку було сформовано на основі зображень із множини S_{train} . Для цього з кожного зображення було вибрано фіксовану кількість фрагментів розміром 3×3 , що відповідає розміру вікна фільтрації. Таким чином було сформовано множину фрагментів W .

На основі елементів множини W побудовано підмножини W_{corr} та W_{clean} . Множина W_{corr} містить фрагменти, в яких інтенсивність центрального пікселя замінена на імпульс так, що $|Q_{orig} - Q_{corr}| > \theta$, де Q_{orig} - інтенсивність чистого пікселя, Q_{corr} - інтенсивність імпульсу, а θ - поріг (під час наших експериментів

ми використовували $\theta = 15$). Множина W_{clean} складається з фрагментів, де інтенсивність центрального пікселя залишилася без змін або була замінена на незначний імпульс, такий, що $|Q_{orig} - Q_{corr}| \leq \theta$. Також, із метою покращення узагальнюючих можливостей MLP, у певній кількості фрагментів із множин W_{corr} та W_{clean} інтенсивності сусідніх пікселів (за винятком центрального) також були замінені на імпульси.

Важливо зазначити, що для цих множин виконувалася умова $|W_{corr}| = |W_{clean}|$. Ця вимога є критичною, оскільки вона забезпечує баланс класів у навчальній вибірці.

Множина вхідних ознак X була сформована з елементів множин W_{corr} та W_{clean} наступним чином:

$$X = \left\{ \left(\frac{1}{255} \text{vec}(w_{clean}), r_{clean} \right) \mid w_{clean} \in W_{clean} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{255} \text{vec}(w_{corr}), r_{corr} \right) \mid w_{corr} \in W_{corr} \right\},$$

де вектори r_{clean} та r_{corr} - вектори ROAD статистик.

Множина цільових значень (бажаних виходів) Y побудована за таким принципом:

$$Y = \left\{ l = \begin{cases} 1, & w \in W_{corr} \\ 0, & w \in W_{clean} \end{cases} \mid w \in W_{clean} \cup W_{corr} \right\}.$$

Навчальна множина T мала вигляд

$$T = \{(x_i, y_i)\}, i = \overline{1, n}, x_i \in X, y_i \in Y$$

та складалася з 120 000 навчальних зразків.

Навчання MLP проводилося за допомогою методу стохастичного градієнтного спуску [14,15]. У ролі функції втрат використовувалася бінарна крос-ентропія (Binary Cross Entropy) [16].

2.4. Опис алгоритму фільтрації. Фільтрація зображення здійснювалася шляхом попіксельної обробки. Варто зауважити, що для коректної обробки пікселів на границі зображення перед початком процедури зображення доповнювалося дзеркальним відображенням з усіх сторін. Для кожного пікселя з просторовими координатами (x, y) виділявся локальний окіл $O_{(x,y)}^{(k)}$. У межах цього околу розраховувалися значення статистик $ROAD_1(x)$, $ROAD_2(x)$ та $ROAD_3(x)$. На основі інтенсивностей оброблюваного пікселя, його локального оточення та обчислених статистик ROAD формувався вектор вхідних ознак v (згідно з описом у розділі «Детектор імпульсів»). Після цього обчислювався вихід детектора $p_{(x,y)}$. За умови, що вихід детектора перевищував порогове значення t (у наших експериментах ми використовували $t = 0.5$), піксель класифікувався як зашумлений, і здійснювалася його фільтрація. У протилежному випадку піксель вважався «чистим», і його інтенсивність залишалася без змін.

Для усунення шуму використовувався модифікований медіанний фільтр. Суть модифікації полягає в тому, що медіана обчислюється лише за інтенсивностями тих пікселів локального оточення, в яких детектор не виявив імпульсу. Це дозволяє виключити потрапляння імпульсів, наявних у вікні $O_{(x,y)}^{(k)}$, до варіаційного ряду. У випадку, якщо в усіх пікселях околу детектор ідентифікував

імпульс, інтенсивність оброблюваного пікселя замінюється значенням останнього успішно відфільтрованого або чистого пікселя.

2.5. Отримані результати. Ми провели експерименти з фільтрації RVIN шуму на цифрових зображеннях у відтінках сірого. Для аналізу ефективності алгоритму тестові зображення були штучно зашумлені імпульсним шумом з інтенсивністю 1%, 5%, 10%, 40% та 60%. Для об'єктивної оцінки якості відновлення використовувався загальноприйнятий показник: пікове відношення сигналу до шуму (PSNR).

Нижче у таблицях 1 - 3 наведено результати фільтрації, отримані за допомогою запропонованого у цій роботі алгоритму. Таблиця 4 містить опис топологій MLP використаних під час експериментів.

Таблиця 1.

Результати фільтрації зображень спотворених RVIN шумом з інтенсивністю 1%. Найкращі результати підкреслено.

	Actor	Buildings	Lady	Lena	Peppers
Original PSNR	27.5554	28.8682	29.3768	29.2667	28.6271
Median PSNR	29.8503	30.8921	32.9158	35.4009	30.8629
NN-12-32-1-v1 PSNR	32.4708	35.8094	42.5771	40.5938	32.3035
NN-12-32-1-v2 PSNR	32.1174	35.1087	43.0321	41.6166	32.0214
NN-12-64-1-v1 PSNR	32.2309	35.1236	<u>43.0412</u>	<u>41.7629</u>	32.1546
NN-12-64-1-v2 PSNR	<u>32.6036</u>	<u>35.9015</u>	42.7436	40.6988	<u>32.3699</u>

Таблиця 2.

Результати фільтрації зображень спотворених RVIN шумом з інтенсивністю 5%. Найкращі результати підкреслено.

	Actor	Buildings	Lady	Lena	Peppers
Original PSNR	20.5576	21.9494	22.2976	22.2569	21.5104
Median PSNR	29.5026	30.7307	32.6707	34.7153	30.6831
NN-12-32-1-v1 PSNR	31.4999	34.6609	39.3983	38.0766	31.8607
NN-12-32-1-v2 PSNR	31.3710	34.2423	39.8988	38.8281	31.6891
NN-12-64-1-v1 PSNR	31.4860	34.2867	<u>39.9261</u>	<u>39.0927</u>	31.8188
NN-12-64-1-v2 PSNR	<u>31.6034</u>	<u>34.7189</u>	39.4472	38.1374	<u>31.9295</u>

Таблиця 3.

Результати фільтрації зображень спотворених RVIN шумом з інтенсивністю 10%. Найкращі результати підкреслено.

	Actor	Buildings	Lady	Lena	Peppers
Original PSNR	17.6226	18.9885	19.2828	19.2212	18.4011
Median PSNR	28.8896	30.4319	32.2345	33.8708	30.3789
NN-12-32-1-v1 PSNR	30.4303	33.5138	36.4640	36.1622	31.4004
NN-12-32-1-v2 PSNR	30.5970	33.3874	<u>37.3398</u>	36.9154	31.4003
NN-12-64-1-v1 PSNR	<u>30.7605</u>	33.4105	37.2083	<u>37.0947</u>	<u>31.5690</u>
NN-12-64-1-v2 PSNR	30.4748	<u>33.5316</u>	36.4246	36.1753	31.4344

Таблиця 4.

Опис топологій MLP використаних під час експериментів. Функції активацій прихованого та вихідного шару позначено як f_{hidden} та f_{out} відповідно.

	Топологія	f_{hidden}	f_{out}
NN-12-32-1-v1	12-32-1	сигмоїдальна	сигмоїдальна
NN-12-32-1-v2	12-32-1	ReLU	сигмоїдальна
NN-12-64-1-v1	12-64-1	ReLU	сигмоїдальна
NN-12-64-1-v2	12-64-1	сигмоїдальна	сигмоїдальна

3. Висновки. У роботі наведено алгоритм фільтрації RVIN-шуму за допомогою детектора імпульсів на основі MLP. Спираючись на отримані результати, можна зробити висновок, що детектор такого типу є ефективним для визначення наявності імпульсів та проведення фільтрації. Подальші дослідження можуть включати використання інших типів та топологій нейромереж, наприклад комплекснозначних нейронних мереж прямого поширення.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Товт Ю. О.: Написання — оригінальний проєкт, концептуалізація, курація даних, формальний аналіз, методологія, Брила А. Ю.: Написання — рецензування та редагування, супервізія, концептуалізація, формальний аналіз, методологія.

Авторські права ©



(2026). Товт Ю. О., Брила А. Ю. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Bovik, A. C. (2000). *Handbook of image and video processing*. Academic Press.
2. Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital image processing (Fourth, global edition)*. Pearson Education.
3. Ko, S.-J., & Lee, Y. H. (1991). Center weighted median filters and their applications to image enhancement. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 38(9), 984–993. <https://doi.org/10.1109/31.83870>
4. Lin, T.-C. (2007). A new adaptive center weighted median filter for suppressing impulsive noise in images. *Information Sciences*, 177(4), 1073–1087. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.07.030>
5. Abreu, E., Lightstone, M., Mitra, S. K., & Arakawa, K. (1996). A new efficient approach for the removal of impulse noise from highly corrupted images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6), 1012–1025. <https://doi.org/10.1109/83.503916>
6. Aizenberg, I., & Butakoff, C. (2004). Effective Impulse Detector Based on Rank-Order Criteria. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(3), 363–366. <https://doi.org/10.1109/LSP.2003.822925>
7. Cai, Z. Q., & Lee, T. K. M. (2009). Adaptive switching median filter. *2009 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS)*, 1–4. <https://doi.org/10.1109/ICICS.2009.5397741>
8. Aghajarian, M., & McInroy, J. E. (2022). Random-Valued Impulse Noise Detection and Removal based on Local Statistics of Images. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 13(2). <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130201>
9. Tomasi, C., & Manduchi, R. (1998). Bilateral filtering for gray and color images. *Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No.98CH36271)*, 839–846. <https://doi.org/10.1109/ICCV.1998.710815>
10. Garnett, R., Huegerich, T., Chui, C., & Wenjie, He. (2005). A universal noise removal algorithm with an impulse detector. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(11), 1747–1754. <https://doi.org/10.1109/TIP.2005.857261>
11. Mafi, M., Izquierdo, W., Martin, H., Cabrerizo, M., & Adjouadi, M. (2020). Deep convolutional neural network for mixed random impulse and Gaussian noise reduction in digital images. *IET Image Processing*, 14(15), 3791–3801. <https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2019.0931>
12. Keohane, O., & Aizenberg, I. (2020). Impulse Noise Filtering using MLMVN. *2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*, 1–8. <https://doi.org/10.1109/IJCNN48605.2020.9207691>
13. Tovt, Y. O., & Bryla, A. Y. (2025). Speckle Noise Filtering in Ultrasound Images Using Complex-Valued Neural Networks. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 47(2), 278–288.
14. Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.
15. Shalev-Shwartz, S., & Ben-David, S. (2014). *Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms (1st ed.)*. Cambridge University Press. <https://www.cambridge.org/core/product/identifier/9781107298019/type/book>
16. Goodfellow, I., Bengio, Y., & Courville, A. (2016). *Deep learning*. The MIT press.

Tovt Yu. O., Bryla A. Yu. Filtering Random-Valued Impulse Noise in Digital Images Using a Neural Network-Based Impulse Detector.

Today, digital images are widely used in many fields. Their processing and analysis are important tasks, therefore noise filtering plays a significant role. In this paper, a method for filtering random-valued impulse noise in images using an impulse detector based on a real-valued neural network is investigated. Experimental studies on impulse noise removal are conducted, and the obtained results are compared with several existing approaches for its filtering.

Keywords: neural networks, digital images, noise filtering, impulse noise, random-valued impulse noise, systems analysis, mathematical modeling, software implementation.

Отримано: 31.03.2026

Прийнято: 15.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.056.5

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).283-291](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).283-291)**В. Б. Цап**

Національний університет «Львівська політехніка»,
аспірант кафедри систем штучного інтелекту
vladyslav.b.tsap@lpnu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8062-0079>

ПРОБЛЕМА МАСШТАБУВАННЯ КРИПТОГРАФІЧНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

У статті розглянуто проблему масштабування криптографічних алгоритмів у системах штучного інтелекту, що працюють із чутливими даними. Метою дослідження є виявлення причин низької практичної придатності таких рішень і формування зрозумілих критеріїв їх оцінювання. У роботі проаналізовано повністю гомоморфне шифрування, безпечні багатосторонні обчислення, диференційну приватність і довірені виконувальні середовища. Запропоновано операційну модель масштабованості, яка враховує затримку відповіді, витрати пам'яті, обсяг передавання даних, кількість раундів взаємодії та складність окремих обчислювальних операцій. Також подано шкалу практичної придатності і протокол оцінювання, що дають змогу визначати межі застосовності криптографічних рішень для різних типів моделей і сценаріїв використання. Установлено, що основними причинами слабкої масштабованості є великі обчислювальні витрати, значне зростання пам'яттєвих потреб, високий мережевий трафік, багатораундовість протоколів і складність реалізації нелінійних операцій. Зроблено висновок, що для практичного розвитку приватного штучного інтелекту доцільним є проектування гібридних архітектур і створення моделей, спочатку пристосованих до роботи в захищеному криптографічному середовищі.

Ключові слова: великі мовні моделі, криптографічні алгоритми, повністю гомоморфне шифрування, безпечні багатосторонні обчислення, приватність даних.

1. Вступ. Поширення великих мовних моделей (LLM) і систем машинного навчання у сферах, пов'язаних із медичними, фінансовими та персональними даними зробило приватність не додатковою властивістю, а базовою умовою практичного використання штучного інтелекту (ШІ). Тепер окрім точності до відповідей, очікуються також формальні гарантії, що дані користувача не будуть розкриті під час навчання або отримання передбачень.

Теоретичний фундамент для цього давно сформований: повністю гомоморфне шифрування (Fully Homomorphic Encryption, FHE), безпечні багатосторонні обчислення (Multi-Party Computation, MPC), диференційна приватність (Differential Privacy, DP), і довірені виконувальні середовища (Trusted Execution Environments, TEE) дозволяють обробляти дані без прямого розкриття їхнього вмісту. Проте для систем ШІ ключовим стає питання масштабованості: чи можна зберегти гарантії приватності за прийнятної затримки, пам'яттєвих витрат, мережевого трафіку та вартості інфраструктури.

Актуальність теми визначається тим, що розрив між теоретичною можливістю і сервісною придатністю в приватному ШІ досі залишається значним.

Метою статті є виявлення причин слабкої масштабованості криптографічних алгоритмів у задачах сучасного ШІ та формування критеріїв, за якими таку масштабованість можна оцінювати. Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання: проаналізувати наявні підходи до приватних обчислень для ШІ,

визначити ключові обмеження, запропонувати інструмент оцінювання приватного ШІ та узагальнити інженерні напрями підвищення практичної придатності таких систем.

Наукова новизна полягає в тому, що проблему масштабування розглянуто як єдиний комплекс обмежень, у межах одного вимірюваного операційного контуру, який визначає межі практичного застосування криптографічних алгоритмів у ШІ.

2. Постановка завдання. Ключова проблема полягає у тому, що теоретична коректність операцій не гарантує операційної придатності. Для традиційного аналізу алгоритмів достатньо вказати, що метод має поліноміальну складність. Однак у криптографічному ШІ вирішальними часто стають не лише ступінь полінома, а й сталі множники, параметри безпеки, розмір шифртекстів, кількість раундів взаємодії, частота бутстрепінгу, тиск на пам'ять і мережу.

Висока ефективність трансформерів досягається завдяки поєднанню великих матричних множень із нелінійними функціями типу GELU, Softmax, нормалізації шару та механізму уваги. Саме ці елементи і є найгірше сумісними з базовими криптографічними примітивами. У Microsoft SEAL прямо зазначено, що гомоморфні обчислення природно підтримують додавання і множення, тоді як операції порівняння, сортування або інші складні нелінійні перетворення, як правило, не є практично здійсненними без спеціальних побудов.

Ширший спектр реалізацій показує, що це обмеження має різні інженерні форми. У PALISADE/OpenFHE практична придатність розширюється за рахунок бутстрепінгу, перемикання схем і спеціалізованої підтримки складніших функцій, але ці можливості підвищують вартість конфігурації та виконання. HElib надає гнучкий низькорівневий контроль над гомоморфним контуром, проте така гнучкість вимагає складнішого налаштування і ретельного керування параметрами. У Concrete прийнятніший режим досягається через квантування і свідоме обмеження архітектури моделі під FHE-виконання. У СтупТен, навпаки, вузьке місце часто переноситься з локальної арифметики у комунікацію, трафік і число раундів взаємодії. Тому тема дослідження має спиратися на сукупність реальних реалізацій.

Отже, постановка завдання полягає у з'ясуванні того, які саме технічні обмеження роблять криптографічно коректні схеми недостатньо масштабованими для сучасних моделей ШІ, які порогові режими непридатності виникають під час зростання масштабу і які інженерні напрями здатні зменшити цей розрив.

3. Огляд літератури. Однією з перших робіт, що практично продемонструвала можливість виконання нейромережі на зашифрованих даних, стала CryptoNets [1]. Для набору MNIST автори повідомили 99% точності, пропуску здатність близько 58,982 передбачень на годину та затримку 250 с для одного передбачення. Подальше зменшення затримки було продемонстровано в LoLa [2]. У цій роботі показано, що інше представлення даних, інше пакування шифртекстів і архітектурні спрощення можуть дати більше ніж десятикратне скорочення затримки: для LoLa-Small повідомляється 0,29 с на передбачення.

Межу масштабування добре ілюструє робота про великі DNN-моделі в HE-середовищі [3]. Її автори прямо вказують, що виконання моделі на зашифрованих даних часто супроводжується накладними витратами пам'яті та виконання у 100–10,000 разів, а навіть відносно компактні моделі можуть вимагати сотень

гігабайтів оперативної пам'яті.

Ще один критично важливий блок літератури стосується бутстрепінгу. Сучасний огляд Shen [4] прямо називає бутстрепінг водночас найбільш суттєвим і найбільш складним компонентом практичної FHE-реалізації. Це важливо для аналізу масштабованості, тому що в довгих або нелінійно насичених контурах саме бутстрепінг часто перетворює схему з формально універсальної на практично дорогу.

Для MPC-контурів системні обмеження добре видно на прикладі Cgroup [5]. Для класифікації тональності тексту Cgroup є на 3 порядки повільнішим за PyTorch, хоча в двосторонньому режимі з розміром пакета 32, виконання займає лише 0,03 с на зразок. Для Wav2Letter передавання даних на GPU при восьми сторонах забирає 63% часу виконання, при цьому комунікація сягає десятків гігабайтів на зразок, а число раундів порядку $2 \cdot 10^4$. Для класифікації зображень дві сторони можуть захищено обчислити ResNet-18 за 2,49 с, а ViT-B/16 — за 8,47 с, але комунікація зростає до сотень і тисяч гігабайтів на зразок, на одну сторону, а число раундів — до $4 \cdot 10^5$.

Для LLM надвеликого масштабу важливим орієнтиром є робота Zhang, Zheng і Bao [6], де для ChatGLM2-6B з LoRA-захистом приватної частини моделі повідомляється 1,61 с/токен. Принципове значення цього результату полягає не лише в самому числі, а в його архітектурному змісті: прийнятніша затримка досягається не повним наскрізним FHE для всіх параметрів моделі, а вибіркоvim захистом приватної частини.

Наведені джерела практично підтверджують тезу, що наразі криптографічні схеми не є достатньо оптимізовані для прямого використання у ШІ. Для формування подальших узагальнень використано корпус із джерел, де праці дають як експериментальні приклади захищеного виведення різного масштабу, так і порівняльні дані щодо реалізацій FHE. Із кожного джерела відбиралися лише явно наведені або безпосередньо обчислювані характеристики: затримка, пам'яттєві витрати, трафік, число раундів, роль бутстрепінгу та спосіб реалізації нелінійних операцій. На основі цього матеріалу можна сформувати метрично прив'язану сумісність найуживаніших компонентів нейромереж із криптографічними примітивами у табл. 1.

4. Основний результат. Основний результат проведеного аналізу полягає в тому, що слабка масштабованість криптографічних алгоритмів для ШІ визначається не одним окремим чинником, а сукупністю обчислювальних, пам'яттєвих і комунікаційних обмежень. Ці обмеження можна як відтворюваний інструмент оцінювання практичної придатності приватного ШІ. У межах цього інструмента система оцінюється за чотирма вимірюваними показниками: затримкою відповіді, пам'яттєвими накладними витратами, мережевим трафіком і числом раундів взаємодії. Наукова новизна такого підходу полягає в тому, що межа придатності визначається правилом найгіршої метрики: система придатна до цільового сценарію лише тоді, коли жоден із ключових показників не виходить за його межі.

Систематизацію ключових причин слабкої масштабованості криптографічних алгоритмів для ШІ наведено в табл. 2. Вона сформована як результат групування всіх зафіксованих обмежень у джерелах за домінують метрикою деградації. Якщо одна й та сама робота містила кілька незалежних вузьких

Таблиця 1.

Сумісність типових компонентів нейромереж із криптографічними примітивами

Компонент	Вбудована підтримка у FHE/MPC	Причина накладних витрат	Типовий спосіб адаптації	Матричний наслідок
Лінійні шари	Так	Велика кількість множень, ротацій, пакування	SIMD-пакування, оптимізація розміщення даних	Зростає затримка, але операція лишається базово придатною
ReLU	Ні	Порівняння і розгалуження	Поліномна апроксимація або захищене порівняння	Зростають глибина множень або число раундів
Sigmoid	Ні	Нелінійні функції	Низькостепенева апроксимація	Компроміс між точністю та затримкою
Softmax	Ні	Експонента, ділення, нормалізація	Апроксимація, вибіркового захист або винесення з приватного контуру	Зростають трафік, число раундів і ризик втрати точності
Нормалізація шару	Ні	Корені, ділення, дисперсія	Архітектурна заміна або спрощення	Зростають затримка і пам'яттєві витрати
Механізм уваги	Ні	Велика кількість матричних множень	Гібридний захист або спрощення механізму	Зростають затримка, трафік і пам'ять

місць, вони враховувалися окремо: наприклад, для CrypTen паралельно фіксувалися і затримка, і трафік, і раундовість, а для FHE-кейсів — і коефіцієнт розширення часу виконання, і пам'яттєвий надлишок, і роль бутстрепінгу. Тому табл. 2 відображає не окремі приклади, а повторювані класи обмежень, які відтворюються у різних архітектурах і реалізаціях.

Зазначений результат доцільно формалізувати моделлю операційної затримки криптографічного контуру:

$$T_{total} = C T_{plain} + T_{mem} + T_{comm} + T_{sync} + T_{boot},$$

де T_{total} — повний час сервісної відповіді в криптографічному контурі, C — криптографічний коефіцієнт розширення базової операції, T_{mem} — накладні витрати доступу до пам'яті та переміщення даних, T_{comm} — витрати на передавання даних, T_{sync} — витрати на синхронізацію між етапами протоколу, T_{boot} — час, пов'язаний із бутстрепінгом або іншими дорогими операціями оновлення криптографічного стану.

Пам'яттєвий надлишок визначається співвідношенням:

$$M_{ovh} = \frac{S_{cipher}}{S_{plain}},$$

Таблиця 2.

Основні чинники слабкої масштабованості криптографічних алгоритмів для штучного інтелекту

Група обмежень	Конкретний прояв	Причина виникнення	Як вимірюється	Наслідок для систем ШІ
Обчислювальні	Висока вартість базових операцій	Криптографічні перетворення значно дорожчі за операції у відкритому вигляді	Коефіцієнт розширення базової операції, повний час сервісної відповіді	Зростання часу відповіді
Пам'яттєві	Великі шифртексти та проміжні представлення	Роздування даних у зашифрованій формі	Пам'яттєвий надлишок, робочий набір у ГБ	Високі вимоги до пам'яті та кешу
Комунікаційні	Великий обсяг переданих даних	Протокольна взаємодія між сторонами	ГБ на запит або партію, витрати на передавання даних	Затримки і підвищені вимоги до мережі
Протокольні	Багатораундовість, синхронізація	Структура безпечного протоколу	Число раундів, чутливість до RTT, витрати на синхронізацію між етапами протоколу	Час відповіді починає визначатися мережею
Алгоритмічні	Погана сумісність із нелінійностями	Базові схеми природно підтримують насамперед додавання і множення	Потреба в апроксимації, зростання глибини множень, втрата точності	Приріст вартості або погіршення якості
Криптографічні	Накопичення шуму	Багатошарові множення	Частота бутстрепінгу, час бутстрепінгу	Довгі контури стають дорогими
Системні	Обмежений ефект локального прискорення	Вузьке місце зміщується в іншу підсистему	Частка прискорюваного часу	Непропорційний приріст від апаратного прискорення

де S_{cipher} — розмір зашифрованого подання, а S_{plain} — розмір відповідних відкритих даних.

Для багатосторонніх обчислень комунікаційну складову відображає така оцінка:

$$T_{MPC} \approx \sum_{i=1}^R \left(\frac{V_i}{B} + L_i \right) + T_{loc},$$

де R — кількість раундів, V_i — обсяг переданих даних у i -му раунді, B — ефективна пропускна здатність каналу, L_i — мережева затримка i -го раунду, а T_{loc} — локальні обчислення сторін.

Практичне застосування цих формул вимагає явного підбору параметрів. Значення C доцільно брати з опублікованих порівняльних вимірювань [7] або

профілювання [8], M_{ovh} — безпосередньо обчислювати як відношення розміру шифртексту до розміру відкритого подання, T_{comm} — оцінювати через обсяг передавання і пропускну здатність каналу, T_{sync} — через число раундів і середню мережеву затримку, T_{boot} — за публікаціями або документацією конкретної реалізації. Відтворення оцінки передбачає послідовність із чотирьох кроків: спочатку для конкретної моделі та криптографічної схеми фіксуються T_{plain} і розмір відкритого подання, далі з літератури або профілювання підставляються C , M_{ovh} , T_{boot} і мережеві параметри, після цього обчислюються T_{total} , M_{ovh} та, за потреби, T_{MPC} , на завершальному етапі отримані значення зіставляються з порогами операційної придатності. Щоб довести формалізацію до рівня робочого інструмента, достатньо показати, як вона працює на числових прикладах.

У межах цієї статті операційні пороги слід задавати не довільно, а від опорних значень, які вже присутні в розглянутому корпусі джерел. Для затримки такими опорними точками є 0,29 с у LoLa-Small [2], 1,61 с/токен у ChatGLM2-6B з приватним LoRA-контуром [6], 2,49 с для ResNet-18 і 8,47 с для ViT-B/16 у CsrpTen [5], а також 250 с у CryptoNets [1]. Саме тому межа до 1 с відділяє реально інтерактивний режим від повільніших, інтервал 1-10 с охоплює зафіксовані в літературі ще практично придатні сценарії захищеного виведення, а значення понад 100 с спирається на вже опублікований непридатний випадок 250 с [1], проміжок 10-100 с є логарифмічною перехідною зоною між останнім придатним спостереженням порядку 10^1 і непридатним спостереженням порядку 10^2 . Для пам'яті нижньою емпіричною межею критичності є порядок 10^2 ГБ на вузол, оскільки саме про сотні гігабайтів для відносно компактних моделей прямо повідомляє одне з джерел [3]. Для трафіку опорними є «десятки гігабайтів» для Wav2Letter і до $2 \cdot 10^3$ ГБ для ViT-B/16 у CsrpTen [5], тому межі 10 ГБ і 10^2 ГБ відбивають перехід від напруженого до явно непридатного режиму. Для MPC-раундовості опорними точками є порядок $2 \cdot 10^4$ і $4 \cdot 10^5$ раундів у тих самих експериментах [5], тому інтервали до 10^4 , 10^4 - 10^5 і понад 10^5 є не довільними, а прив'язаними до спостережуваних порядків величин. Отже, використані тут межі мають статус відтворюваних інтервальних оцінок, безпосередньо виведених із наведених публікацій.

Базова валідація запропонованої шкали узгоджується з реальними випадками з літератури саме тому, що її пороги побудовано з цих випадків, а не накладено на них постфактум. LoLa-Small із затримкою 0,29 с [2] фіксує нижню область реально інтерактивного захищеного виведення. ChatGLM2-6B з приватним LoRA-контуром і затримкою 1,61 с на токен [6], а також CsrpTen для ResNet-18 (2,49 с) і ViT-B/16 (8,47 с) [5] задають інтервал практично придатних, але вже не миттєвих сценаріїв. CryptoNets із затримкою 250 с на передбачення [1] показує емпірично зафіксований вихід у сервісно непридатний режим. Трафік і раундовість у CsrpTen — від десятків гігабайтів і $2 \cdot 10^4$ раундів до $2 \cdot 10^3$ ГБ і $4 \cdot 10^5$ раундів [5] — додатково показують, що саме мережеві характеристики, а не лише затримка, можуть першими зробити систему непридатною. Отже, правило найгіршої метрики працює на реальних прикладах, а формалізація дає змогу класифікувати систему ще до повного розгортання.

Нехай для FHE-випадку незашифроване виконання моделі займає $T_{plain} = 0,05$ с, криптографічний коефіцієнт розширення становить $C = 100$, а додаткові витрати дорівнюють $T_{mem} = 0,3$ с, $T_{comm} = 0$, $T_{sync} = 0$, $T_{boot} = 0$.

Тоді

$$T_{total} = 100 \cdot 0,05 + 0,3 = 5,3 \text{ с.}$$

Отримане значення потрапляє у відкладено-інтерактивний режим. Якщо ж для тієї самої моделі взяти верхню межу, тобто $C = 10000$, то

$$T_{total} = 10\,000 \cdot 0,05 + 0,3 = 500,3 \text{ с,}$$

що вже означає сервісну непридатність. Отже, формула показує не просто те, що FHE повільно працює, а те, при яких значеннях C система виходить за межі цільового сценарію.

Для оцінки пам'яттєвого надлишку можна взяти простий приклад пакета активацій розміром $S_{plain} = 4$ МБ. Якщо після шифрування він займає $S_{cipher} = 400$ МБ, тобто відповідає нижній межі $100\times$ накладних витрат [3], тоді

$$M_{ovh} = \frac{400}{4} = 100.$$

Це означає збільшення обсягу в 100 разів. Для партії з 32 зразків лише цей фрагмент вимагатиме вже 12,8 ГБ пам'яті, тобто навіть нижня межа емпірично зафіксованого накладного коефіцієнта швидко виводить систему з комфортно-го серверного режиму, а при переході до «сотень гігабайтів» [3] — і за межі практичної придатності.

Для MPC-режиму ефект раундовості й мережі видно з формули T_{MPC} . Нехай $R = 20000$, $T_{loc} = 0,5$ с, а ефективний внесок одного раунду становить лише 0,2 мс. Тоді

$$T_{MPC} \approx 20\,000 \cdot 0,0002 + 0,5 = 4,5 \text{ с.}$$

У локальній мережі це ще прийнятний результат. Але якщо ефективний штраф на раунд зростає до 10 мс, маємо

$$T_{MPC} \approx 20\,000 \cdot 0,01 + 0,5 = 200,5 \text{ с,}$$

тобто перехід у практично непридатний режим лише через мережеву складову. Саме так формула пояснює, чому одна й та сама схема може виглядати прийнятною в лабораторії й непринятною у розподіленому сервісі.

Поширене припущення, що низьку швидкодію можна повністю компенсувати апаратним прискоренням, для криптографічного ШІ працює лише частково. Межу цієї стратегії кількісно виражає співвідношення:

$$S_{tot} = \frac{1}{(1-p) + \frac{p}{s}},$$

де p визначає частку часу, що справді піддається апаратному прискоренню, а s — коефіцієнт прискорення.

Для криптографічних систем частка p описується співвідношенням:

$$p = \frac{T_{comp}}{T_{comp} + T_{mem} + T_{comm} + T_{sync}},$$

де T_{comp} — час виконання криптографічних і арифметичних перетворень у межах обчислювального контуру.

Отже, альтернативні підходи перерозподіляють компроміс між приватністю, точністю і продуктивністю між різними типами витрат. Найбільш реалістичним напрямом лишається гібридна архітектура і співпроекування моделі з криптографічним контуром, коли найчутливіші фрагменти захищаються найсильнішими засобами, а решта контуру оптимізується під конкретний сценарій використання.

5. Висновки та перспективи подальших досліджень. Проведений аналіз показує, що проблема масштабування криптографічних алгоритмів для ІІІ є насамперед проблемою операційної придатності, а не лише математичної коректності: навіть коли схема формально забезпечує правильне виконання обчислень над захищеними даними, вона може виявитися непридатною для інтегративного сервісу через сукупність затримки, пам'яттєвих витрат, мережевого трафіку, кількості раундів взаємодії і складних нелінійностей.

Головний висновок полягає в тому, що найближчим реалістичним шляхом розвитку приватного ІІІ є побудова гібридних архітектур, де сила гарантій захисту диференціюється за чутливістю фрагментів системи. Для FHE це означає фокус на вузьких критичних контурах, зменшення частоти дорогих нелінійних операцій і криптографічно узгоджене проєкування, для MPC — мінімізацію раундів, перетворення часток секрету та вузьких місць комунікації, для DP — балансування бюджету приватності, обчислювальної вартості і корисності, для TEE — жорсткіший аналіз моделі довіри.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з трьома напрямками: розробленням наборів порівняльних тестів саме для проміжного масштабу приватного ІІІ, проєкуванню моделей, які від початку оптимізуються під криптографічний контур, побудовою порівняльних методик, у яких FHE, MPC, DP і TEE оцінюються в єдиному операційному просторі «ризик — затримка — пам'ять — трафік — вартість». Саме така зміна оптики є необхідною умовою переходу від концептуально коректних прототипів до сервісів, придатних для застосування.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє, що немає конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження було проведено без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи він не використовував технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Gilad-Bachrach, R., Dowlin, N., Laine, K., Lauter, K., Naehrig, M., & Wernsing, J. (2016). CryptoNets: Applying Neural Networks to Encrypted Data with High Throughput and Accuracy. *Proceedings of Machine Learning Research*, 48. <https://proceedings.mlr.press/v48/gilad-bachrach16.pdf>
2. Brutzkus, A., Elisha, O., & Gilad-Bachrach, R. (2019). Low Latency Privacy Preserving Inference. *Proceedings of the 36th International Conference on Machine Learning, PMLR 97*, 812–821. <https://proceedings.mlr.press/v97/brutzkus19a.html>
3. Lloret-Talavera, G., Jordà, M., Servat, H., Boemer, F., Chauhan, C., Tomishima, S., Shah, N. N., & Peña, A. J. (2022). Enabling Homomorphically Encrypted Inference for Large DNN Models. *IEEE Transactions on Computers*, 71(5), 1145–1155. <https://doi.org/10.1109/TC.2021.3076123>
4. Shen, H., Xu, Q., Yu, B., Yang, Y., & He, W. (2025). Bootstrapping in approximate fully homomorphic encryption: a research survey. *Cybersecurity*, 8, 87. <https://doi.org/10.1186/s42400-025-00384-3>
5. Knott, B., Venkataraman, S., Hannun, A., Sengupta, S., Ibrahim, M., & van der Maaten, L. (2021). CrypTen: Secure Multi-Party Computation Meets Machine Learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 34, 4961–4973. https://proceedings.neurips.cc/paper_files/paper/2021/file/2754518221cfbc8d25c13a06a4cb8421-Paper.pdf
6. Zhang, R., Zheng, Z., & Bao, W. (2025). Practical Secure Inference Algorithm for Fine-tuned Large Language Model Based on Fully Homomorphic Encryption. *arXiv:2501.01672*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2501.01672>
7. Zhu, H., Suzuki, T., & Yamana, H. (2023). Performance Comparison of Homomorphic Encrypted Convolutional Neural Network Inference Among HELib, Microsoft SEAL and OpenFHE. *IEEE Asia-Pacific Conference on Computer Science and Data Engineering*. <https://doi.org/10.1109/CSDE59766.2023.10487709>
8. Takeshita, J., Koirala, N., McKechney, C., & Jung, T. (2025). HEProfiler: an in-depth profiler of approximate homomorphic encryption libraries. *Journal of Cryptographic Engineering*, 15(2). <https://doi.org/10.1007/s13389-025-00377-5>

Tsap V. B. The problem of scaling cryptographic algorithms for artificial intelligence.

The article examines the problem of scaling cryptographic algorithms in artificial intelligence systems that process sensitive data. The study aims to identify the factors limiting the practical applicability of such solutions and to formulate evaluation criteria. It analyzes fully homomorphic encryption, secure multi-party computation, differential privacy, and trusted execution environments. The paper proposes an operational model of scalability that accounts for response latency, memory overhead, data transfer volume, interaction rounds, and computational complexity. It also introduces a scale of practical applicability and an evaluation protocol for determining the applicability limits of cryptographic solutions across different model types and usage scenarios. The study shows that weak scalability is mainly caused by high computational costs, increased memory requirements, network traffic, protocol round complexity, and nonlinear operations. It concludes that privacy-preserving artificial intelligence requires hybrid architectures and models initially adapted to protected cryptographic environments.

Keywords: large language models, cryptographic algorithms, fully homomorphic encryption, secure multi-party computation, data privacy.

Отримано: 08.03.2026

Прийнято: 26.03.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.86

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).292-299](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).292-299)**Г. Г. Цегелик¹, М. І. Глебена², М. Г. Цегелик³**

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка,
професор кафедри математичного моделювання соціально-економічних процесів,
доктор фізико-математичних наук
hryhoriy.tsehelyk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4934-3181>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
завідувач кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
myroslava.hlebena@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1100-515X>

³ ПП «Бінар» м. Львів, Україна,
директор
M.Tsehelyk@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-9413-0769>

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ БУЛЕВОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОЗНАКА ОПТИМАЛЬНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

У статті розглядається математична модель задачі булевого програмування для випадків, коли всі коефіцієнти цільової функції та обмежень є додатними величинами. Оскільки точні класичні алгоритми вимагають значного обсягу роботи, для розв'язання задачі пропонується ітеративний наближений метод. Алгоритм поетапно формує часткові рішення з одночасною оцінкою цільової функції та відсіканням безперспективних варіантів, що дає змогу зменшити кількість необхідних обчислень. Наближений розв'язок не завжди є оптимальним, тому в статті наводиться достатня умова, при виконанні якої його можна оптимізувати.

Ключові слова: булеве програмування, математична модель, алгоритм наближеного методу, достатня умова оптимальності.

1. Вступ. Булеве програмування є важливим класом задач з дискретного програмування [1; 2, с. 215; 3, с. 205], до якого належать численні задачі дослідження операцій, такі як: розміщення виробництва, про призначення, фінансування інвестиційних проектів, фінансування видів діяльності підприємства та інші. Для розв'язування можна використовувати як класичні методи, такі як метод гілок та меж, так і спеціалізовані, наприклад, адитивний алгоритм Балаша [4] та його модифікацію [5], які дають можливість будувати двійкове дерево рішень з ефективним відсіканням нерентабельних варіантів. Оскільки дані алгоритми вимагають великого обсягу роботи, то нами в роботі [6] запропоновано алгоритм відшукування наближеного розв'язку задачі. В статті пропонується достатня умова оптимальності наближеного розв'язку.

Розглянемо математичну модель задачі булевого програмування

$$L = \sum_{i=1}^m p_i x_i \rightarrow \max$$

за умов:

$$\sum_{i=1}^m a_{j,i} x_i \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

де m — кількість операцій; n — кількість різних ресурсів, що використовуються для виконання операцій; $a_{j,i}$ — кількість одиниць j -го ресурсу, необхідних для виконання i -ої операції; p_i — прибуток від виконання i -тої операції; b_j — запас j -го ресурсу;

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо виконується } i\text{-та операція;} \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

2. Алгоритм наближеного методу. Нехай $M = \emptyset$.

Перший крок:

Знаходимо

$$\max_{1 \leq i \leq m} p_i.$$

Нехай

$$\max_{1 \leq i \leq m} p_i = p_{i_1}.$$

Покладаємо

$$x_{i_1} = 1, \quad S_{j,i_1} = a_{j,i_1} \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n;$$

i_1 відносимо до множини M .

Другий крок:

Знаходимо

$$\max_{i \notin M} p_i.$$

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_2}.$$

Визначаємо

$$x_{i_2} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i_1} + a_{j,i_2} \leq b_j \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Покладаємо

$$S_{j,i_2} = \begin{cases} S_{j,i_1} + a_{j,i_2}, & \text{якщо } x_{i_2} = 1; \\ S_{j,i_1}, & \text{якщо } x_{i_2} = 0. \end{cases}$$

i_2 відносимо до множини M .

Третій крок:

Знаходимо

$$\max_{i \notin M} p_i.$$

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_3}.$$

Визначаємо

$$x_{i_3} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i_2} + a_{j,i_3} \leq b_j \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Покладаємо

$$S_{j,i_3} = \begin{cases} S_{j,i_2} + a_{j,i_3}, & \text{якщо } x_{i_3} = 1; \\ S_{j,i_2}, & \text{якщо } x_{i_3} = 0. \end{cases}$$

i_3 відносимо до множини M .

І так далі ...

Припустимо, що на k -му кроці ($k = 4, 5, \dots, m-1$), $M = \{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}\}$ та $\max_{i \notin M} p_i = p_{i_k}$.

Визначаємо

$$x_{i_k} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i_{k-1}} + a_{j,i_k} \leq b_j \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

і покладаємо

$$S_{j,i_k} = \begin{cases} S_{j,i_{k-1}} + a_{j,i_k}, & \text{якщо } x_{i_k} = 1; \\ S_{j,i_{k-1}}, & \text{якщо } x_{i_k} = 0, \end{cases}$$

i_k відносимо до множини M .

Тоді на $(k+1)$ -му кроці визначаємо

$$x_{i_{k+1}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i_k} + a_{j,i_{k+1}} \leq b_j \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$$

і покладаємо

$$S_{j,i_{k+1}} = \begin{cases} S_{j,i_k} + a_{j,i_{k+1}}, & \text{якщо } x_{i_{k+1}} = 1; \\ S_{j,i_k}, & \text{якщо } x_{i_{k+1}} = 0. \end{cases}$$

i_{k+1} відносимо до множини M .

При $k+1 = m$ одержуємо

$$x_{i_m} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } S_{j,i_{m-1}} + a_{j,i_m} \leq b_j \text{ для всіх } j = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Через m кроків буде знайдено наближене значення розв'язку та значення цільової функції для нього.

Приклад 1. Розглянемо задачу оптимального фінансування інвестиційних проектів, де цільова функція має вигляд:

$$L = 14x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 19x_4 + 10x_5 + 17x_6 + 25x_7 + 18x_8 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 7x_7 + 2x_8 \leq 25, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 5x_6 + 6x_7 + 4x_8 \leq 20; \end{cases}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Нехай $M = \emptyset$.

Перший крок:

Шукаємо $\max_{1 \leq i \leq m} p_i$.

Нехай

$$\max_{1 \leq i \leq m} p_i = p_{i_1} = 25, \quad i_1 = 7.$$

Покладаємо

$$x_{i_1} = 1, \quad S_{i_1 j} = a_{i_1 j} = a_{7j} = \begin{cases} 7 \\ 6 \end{cases}, \quad i_1 = 7 \text{ відносимо до множини } M,$$

$$M = \{7\}.$$

Другий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_2} = 22, \quad i_2 = 2.$$

Оскільки $7 + 5 = 12 \leq 25$ і $6 + 3 = 9 \leq 20$, то $x_{i_2} = 1$.

Покладаємо

$$S_{i_2 j} = \begin{cases} 12, \\ 9. \end{cases}$$

i_2 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2\}.$$

Третій крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_3} = 19, \quad i_3 = 4.$$

Оскільки $12 + 4 = 16 \leq 25$ і $9 + 4 = 13 \leq 20$, то $x_{i_3} = 1$.

Покладаємо

$$S_{i_3 j} = \begin{cases} 16, \\ 13. \end{cases}$$

i_3 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2, 4\}.$$

Четвертий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_4} = 18, \quad i_4 = 8.$$

Оскільки $16 + 2 = 18 \leq 25$ і $13 + 4 = 17 \leq 20$, то $x_{i_4} = 1$.

Покладаємо

$$S_{i_4 j} = \begin{cases} 18, \\ 17. \end{cases}$$

i_4 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2, 4, 8\}.$$

П'ятий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_5} = 17, \quad i_5 = 6.$$

Оскільки $18 + 6 = 24 \leq 25$ і $17 + 5 = 22 > 20$, то $x_{i_5} = 0$.

Покладаємо

$$S_{i_5 j} = \begin{cases} 18, \\ 17. \end{cases}$$

i_5 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2, 4, 8, 6\}.$$

Шостий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_6} = 14, \quad i_6 = 1.$$

Оскільки $18 + 3 = 21 \leq 25$ і $17 + 2 = 19 \leq 20$, то $x_{i_6} = 1$.

Покладаємо

$$S_{i_6 j} = \begin{cases} 21, \\ 19. \end{cases}$$

i_6 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2, 4, 8, 6, 1\}.$$

Сьомий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_7} = 13, \quad i_7 = 3.$$

Оскільки $21 + 2 = 23 \leq 25$ і $19 + 4 = 23 > 20$, то $x_{i_7} = 0$.

Покладаємо

$$S_{i_7 j} = \begin{cases} 21, \\ 19. \end{cases}$$

i_7 відносимо до множини M ,

$$M = \{7, 2, 4, 8, 6, 1, 3\}.$$

Восьмий крок:

Шукаємо $\max_{i \notin M} p_i$.

Нехай

$$\max_{i \notin M} p_i = p_{i_8} = 10, \quad i_8 = 5.$$

Оскільки $21 + 3 = 24 \leq 25$ і $19 + 2 = 21 > 20$, то $x_{i_8} = 0$.

Отже,

$$M = \{7, 2, 4, 8, 6, 1, 3, 5\},$$

$$X = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1),$$

$$L = 14 + 22 + 19 + 25 + 18 = 98.$$

Для оптимізації наближеного розв'язку можна використати наступну теорему.

Нехай $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ наближений розв'язок задачі булевого програмування і $M = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, де $i_s = 1$, $s = 1, 2, \dots, k$. Покладемо $N = \{1, 2, \dots, m\} \setminus M$.

Теорема 1. Для того, щоб наближений розв'язок був оптимальним досить щоб не існувало таких двох індексів r і $l \in N$ та індексу $i_s \in M$ для яких виконуються умови

$$a_{j,i_s} - 1 \leq a_{j,r} + a_{j,l} \leq a_{j,i_s}; \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

та

$$p_r + p_l > p_{i_s}. \quad (2)$$

Доведення. Припустимо, що існують такі два індекси r і $l \in N$ та індекс $i_s \in M$, і виконуються умови (1), (2). Оскільки виконується умова (1), то замість a_{j,i_s} можна використати $a_{j,r} + a_{j,l}$, при цьому умови задачі будуть виконуватися.

Згідно умови (2) замість p_{i_s} у вираз для значення цільової функції можна підставити $p_r + p_l$. В результаті значення цільової функції збільшиться. Це означає, що наближений розв'язок не є оптимальним.

Найбільш ефективним використанням теореми є у випадку коли кількість обмежень у булевій задачі є не більша за два. В даному випадку можна побудувати алгоритм оптимізації наближеного розв'язку. Наближений розв'язок в прикладі 1 виявився оптимальним.

Приклад 2. Нехай задача булевого програмування має вигляд:

$$L = 15x_1 + 22x_2 + 13x_3 + 19x_4 + 14x_5 + 17x_6 + 25x_7 + 18x_8 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 2x_8 \leq 25, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 2x_7 + 3x_8 \leq 20; \end{cases}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Використовуючи алгоритм наближеного методу знайдено наближений розв'язок $X = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$, для якого $L = 116$, він не є оптимальним, однак його можна оптимізувати.

Оскільки $a_{j,3} + a_{j,5} = \begin{cases} 5, \\ 6, \end{cases} < a_{j,6} = \begin{cases} 6, \\ 7, \end{cases}$ та $p_3 + p_5 > p_6$, то $x_3 = 1$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$. Тому $X_{opt} = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L_{opt} = 126$.

Приклад 3.

$$L = 20x_1 + 10x_2 + 40x_3 + 30x_4 + 35x_5 \rightarrow \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 5x_5 \leq 14, \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 18, \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 5. \end{cases}$$

Використовуючи алгоритм наближеного методу одержимо наближений розв'язок $X = (0, 0, 1, 0, 1)$, для якого $L = 75$, він не є оптимальним, будемо його оптимізувати.

Оскільки $a_{j,2} + a_{j,4} = \begin{cases} 5, \\ 5, \end{cases} < a_{j,5} = \begin{cases} 5, \\ 6, \end{cases}$ та $10 + 30 > 35$, то $x_2 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$. Тому покращений наближений розв'язок $X = (0, 1, 1, 1, 0)$, для якого $L = 80$.

Оскільки $a_{j,1} + a_{j,5} = \begin{cases} 8, \\ 8, \end{cases}$ $a_{j,3} = \begin{cases} 8, \\ 9, \end{cases}$ та $20 + 35 > 40$, то $x_1 = 1$, $x_5 = 1$, $x_3 = 0$.

Отримали оптимальний розв'язок $X_{opt} = (1, 1, 0, 1, 1)$, для якого $L_{opt} = 95$.

3. Висновки. У статті розглянуто метод наближеного розв'язування задачі булевого програмування в випадку коли коефіцієнти цільової функції та обмежень є додатними. Приводиться достатня умова при виконанні якої наближений розв'язок буде оптимальним. Наведені приклади підтверджують ефективність теореми у випадку коли кількість обмежень не більше два.

Конфлікт інтересів

Глебена Мирослава Іванівна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

Г. Г. Цегелик: концептуалізація, курація даних, формальний аналіз М. І. Глебена: курація даних, формальний аналіз, методологія, написання — рецензування та редагування. М. Г. Цегелик: формальний аналіз, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©

(2026). Цегелик Г. Г., Глебена М. І., Цегелик М. Г. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Hnatenko, I. M., Liashenko, V. I., & Manhasarian, A. V. (2013). *Boolean programming: theory and practice*. KNEU [in Ukrainian].
2. Zaichenko, Yu. P. (2005). *Operations research*. Vydavnychi tsentr "Akademiiia" [in Ukrainian].
3. Katrenko, A. V. (2004). *Operations research*. Mahnoliia Plus [in Ukrainian].
4. Balas, E. (1965). An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. *Operations Research*, 13(4), 517–546.
5. Tsehelyk, H. H., Seno, P. S., Hlebena, M. I., & Tsehelyk, M. H. (2026). An approach to solving boolean programming problems based on structural interpretation. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 48(1), 232–242. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).232-242](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).232-242) [in Ukrainian].
6. Tsehelyk, H. H., & Tsehelyk, M. H. (2026). Approximate method for solving boolean programming problems. In *International Scientific and Practical Conference "Current problems of science, education and technologies: from theoretical foundations to practical solutions of the XXI century"*. (pp. 120–124). [in Ukrainian].

Tsehelyk H. H., Hlebena M. I., Tsehelyk M. H. An approximate method for solving a boolean programming problem. An optimality criterion for the approximate solution.

The article considers a mathematical model of a Boolean programming problem for cases where all coefficients of the objective function and constraints are positive. Since exact classical algorithms require a significant amount of computational effort, an iterative approximate method is proposed for solving the problem. The algorithm incrementally constructs partial solutions while simultaneously evaluating the objective function and pruning non-promising alternatives, which reduces the number of required computations. The approximate solution is not always optimal; therefore, the paper provides a sufficient condition under which it can be considered optimal.

Keywords: Boolean programming, mathematical model, approximate algorithm, sufficient optimality condition.

Отримано: 02.04.2026

Прийнято: 18.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 519.854

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).300-307](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).300-307)**С. В. Чупов¹, О. І. Кузка², В. М. Дуран³**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
serhii.chupov@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7715-3924>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат фізико-математичних наук, доцент
oleksandr.kuzka@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7556-3057>

³ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
valentyu.duran@uzhnu.edu.ua

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-6409-3061>

СИМУЛЯЦІЯ ВІДПАЛУ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ НА ОСНОВІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО ВПОРЯДКОВАНИХ ПЕРЕСТАНОВОК

Квадратична задача про призначення (QAP) є однією з найбільш вивчених комбінаторних задач оптимізації з різними практичними застосуваннями. У цій статті ми представляємо адаптивний алгоритм симуляції відпау (ASAP) для розв'язання QAP, що використовує спеціальний запис перестановок, названий позиційним представленням. Це дозволяє здійснювати арифметичні операції над перестановками поданими у позиційному виді. ASAP досліджує простір пошуку шляхом використання адаптивної симуляції відпау, та локального табу пошуку на окремих етапах розв'язання задачі. Експериментальні оцінки на множині тестових задач типу “*Taie*” розмірності 27, 45 та 75 показують, що запропонований підхід здатний досягти відомих на даний момент результатів для всіх екземплярів із придатним середнім часом обчислення. Також надаються порівняння, щоб показати конкурентоспроможність запропонованого підходу відносно алгоритму CPTSQAP.

Ключові слова: Квадратична задача про призначення, евристичний алгоритм пошуку, метод симуляції відпау, локальний алгоритм наближеного пошуку, позиційне представлення перестановок, ефективність алгоритмів.

1. Вступ. Задача квадратичного призначення (*Quadratic Assignment Problem*, QAP) є однією з найскладніших задач комбінаторної оптимізації та має широке застосування в інженерії, логістиці та проектуванні. Вона належить до класу NP-складних задач, що унеможливорює ефективне знаходження точного розв'язку для задач великої розмірності. У зв'язку з цим значна увага приділяється евристичним та метаевристичним методам, серед яких важливе місце займає метод *Adaptive Simulated Annealing* (ASA) [4].

Основні особливості ASA:

- адаптивна схема охолодження;
- індивідуальне налаштування параметрів для кожної змінної;
- використання спеціальних розподілів для генерації кроків;
- можливість ефективної роботи у задачах великої розмірності.

Найкращі результати були досягнуті гібридними евристичними методами, у яких перегляд різних областей простору пошуку (диверсифікація) здійснювався за однією схемою, а уточнення розв'язку, або локальний пошук (інтенсифікація) – за іншою. Як правило, локальний пошук у найефективніших алгоритмах відбувався за одним з варіантів табу пошуку (надійний табу, RTS [7], реактивний табу, RETS [1]). Перегляд простору пошуку також відбувається за різноманітними схемами: випадкове збурення поточного розв'язку (Ітеративний заборонений пошук (ITS) [6]), паралельний перегляд різних областей (Cooperative parallel tabu search, CPTS [5]), механізм генетичного пошуку (Наближений гібридний алгоритм для розв'язання QAP, НВМА [3]), механізм імітації відпалу (Глобальний рівноважний пошук, GES [8], повторюваний ітерований алгоритм табу, RITSR [9]).

2. Постановка задачі. Дано n об'єктів, які потрібно розташувати у n різних локаціях (місць призначень). Відомі величини потоків ресурсів a_{ij} між об'єктами i та j , де $i, j = 1, \dots, n$, і відстані b_{rs} між локаціями (пунктами) r та s , де $r, s = 1, \dots, n$. Потрібно знайти таке розподілення об'єктів по локаціях, щоб сума відстаней, помножена на відповідні потоки, була б мінімальною.

Отже, математичну постановку задачі QAP можна сформулювати наступним чином: знайти:

$$\min_{\pi \in \Pi^n} f(\pi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{\pi_i \pi_j},$$

де $A = [a_{ij}]$ та $B = [b_{rs}]$ — квадратні матриці порядку n , Π^n — множина усіх перестановок розмірності n і π_i задає номер локації об'єкту i .

3. Позиційне представлення перестановок. Якщо усі перестановки однієї розмірності впорядкувати за лексикографічним зростанням, то можна помітити певну закономірність в їх розташуванні, яка дозволяє використовувати замість стандартного представлення перестановок інший вигляд [2].

Перестановку π можна записати так, що в результаті отримаємо цілочисловий вектор p , але на відміну від звичайної перестановки цей вектор буде складатися з позицій або індексів, що визначаються певним чином, яким відповідають елементи перестановки π . Схеми перетворення перестановки до позиційного виду представлено на лістингу 2.

Лістинг 2: Перетворення перестановки до позиційного виду.

```

1 function ToPosition( $\pi$ , order:Permutation):Position;
2 begin
3    $p := \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n \right);$ 
4   for  $i := 0$  to  $n-2$  do begin
5      $p_i := \text{Index of } \pi_i \text{ in order};$ 
6      $\text{order} := \text{order} \setminus \{\pi_i\};$ 
7   end;
8    $p_{n-1} := 0;$ 
9   return  $p;$ 
10 end;
```

Вектор цілих чисел $p = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$, отриманий в результаті роботи алгоритму $p := \text{ToPosition}(\pi, \text{order})$ називається *позиційним представленням*

перестановки $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1})$.

Як показано у [2], якщо перестановки розглядати в позиційному виді, тоді з'являється можливість проводити з ними різноманітні алгебраїчні дії так, що результуюча перестановка завжди буде займати правильне місце серед усіх перестановок, що впорядковано за базовою перестановкою *order*.

4. Адаптивна симуляція відпалу для QAP. У запропонованому алгоритмі сусідні розв'язки будуються на основі позиційного представлення перестановок.

Після отримання випадкового зміщення до наступного розв'язку, яке залежить від поточної температури, воно перетворюється до цілого числа. Далі це значення множиться на позиційну одиницю $\bar{1}$ за алгоритмом *MulPositions* та додається до поточного розв'язку за алгоритмом *AddPositions* [2] (рядок 9, *poffset := ConvToPosition(offset)*).

Отриманий розв'язок використовується як початковий для здійснення локального пошуку покращення. Локальний пошук представляє собою варіант табу пошуку, представлений у [3].

Як і в класичному SA, використовується ймовірнісний критерій прийняття нового розв'язку: $P = e^{-\frac{\Delta Q}{T}}$, де ΔQ — зміна значення цільової функції. Це дозволяє алгоритму виходити з локальних мінімумів. Якщо новий розв'язок приймається, тоді він фіксується як поточний, рівень стагнації процесу скидається до 0. У запропонованому алгоритмі рівень стагнації це кількість кроків алгоритму після яких не було прийнято нового розв'язку. Якщо новий розв'язок не приймається, тоді рівень стагнації збільшується на одиницю. Коли рівень стагнації досягне критичної межі, тоді температура може тимчасово збільшуватися, що дозволяє уникнути застрягання в локальних мінімумах.

Як і в більшості наближених алгоритмах, критерієм зупинки роботи є наперед заданий максимальний час роботи алгоритму.

Схема роботи адаптивного методу симуляції відпалу для квадратичної задачі про призначення (ASAQAP) представлена на лістингу 3.

Лістинг 3: Формальна схема алгоритму ASAQAP.

```

1 function ASA_bounded( $x^0$ : Permutation;  $T_0, T_{\min}$ : double): Permutation;
2 begin
3   Position  $px$  := ToPosition( $x^0$ );
4    $x := x^0$ ;  $f := f(x)$ ;
5    $x^{best} := x$ ;  $F_{best} := f$ ;
6   stagnation = 0;  $k := 1$ ;
7   while not stoppingCriteria do begin
8      $T := T_0 / \log(k + 2)$ ;  $k := k + 1$ ;
9     offset :=  $T * (\text{Random}(1.0) - 0.5)$ ;
10    Position poffset := ConvToPosition(offset);
11    Position  $px^{new}$  :=  $px + poffset$ ;
12    Permutation  $x^{new}$  := ToPermutation( $px^{new}$ );
13     $x^{new} := \text{LocalSearch}(x^{new})$ ;  $f_{new} := f(x^{new})$ ;
14     $dE := f_{new} - f$ ;  $P := E^{-\frac{dE}{T}}$ ;
15    if ( $dE < 0$ ) or ( $P > \text{Random}(1.0)$ ) then begin
16       $x := x^{new}$ ;  $px := \text{ToPosition}(x^{new})$ ;  $f := f_{new}$ ;
17      stagnation := 0;
18    end else stagnation := stagnation + 1;
19    if  $f < F_{best}$  then begin
```

```

20       $F_{best} := f$ ;  $x^{best} := x$ ;
21    end;
22    if stagnation > maxStagnation or  $T < T_{min}$  then begin
23       $x := \text{Pertrube}(x^{best})$ ;  $px := \text{ToPosition}(x)$ ;  $f := f(x)$ ;
24      stagnation := 0;  $T := T_0$ ;
25    end;
26  end;
27  return  $x^{best}$ ;
28 end;
```

5. Результати числових експериментів. Числові експерименти проводилися на тестових задачах типу *Taiе* у яких назва має форму *TaiXXeYY*, де *XX* — визначає розмірність задачі, а *YY* — номер тестової задачі. У наступних таблицях використані такі позначення: *Problem* — назва задачі; *BKS* — відомий рекорд; *#BKS* — кількість розв’язаних задач з серії, що складалася з 10 спроб. *Time* — найменший час у хвилинах отримання найкращого розв’язку у серії. Результати розв’язання таких задач для алгоритму CPTS-QAP було взято з [5]. Максимальний час роботи алгоритму ASAQAP становив 5 хвилин.

Таблиця 1.

 Задачі “*Tai27eYY*”

		CPTS-QAP		ASAQAP	
Problem	BKS	#BKS	Time	#BKS	Time
tai27e01	2558	10	6.2	10	0.02
tai27e02	2850	10	6.2	10	0.05
tai27e03	3258	10	6.1	10	0.01
tai27e04	2822	10	6.3	10	0.06
tai27e05	3074	10	6.3	10	0.04
tai27e06	2814	10	6.1	10	0.02
tai27e07	3428	10	6.4	10	0.07
tai27e08	2430	10	6.3	10	0.05
tai27e09	2902	10	6.7	10	0.07
tai27e10	2994	10	6.2	10	0.04
tai27e11	2906	10	6.2	10	0.03
tai27e12	3070	10	5.5	10	0.01
tai27e13	2966	10	6.6	10	0.06
tai27e14	3568	10	6.3	10	0.04
tai27e15	2628	10	6.3	10	0.02
tai27e16	3124	10	6.5	10	0.06
tai27e17	3840	10	6.4	10	0.03
tai27e18	2758	10	6.2	10	0.01
tai27e19	2514	10	6.4	10	0.03
tai27e20	2638	10	6.3	10	0.02

Таблиця 2.

Задачі “*Tai45eYY*”

		CPTS-QAP		ASAP	
Problem	BKS	#BKS	Time	#BKS	Time
tai45e01	6412	10	51.0	10	1.1
tai45e02	5734	10	49.2	10	1.0
tai45e03	7438	10	51.0	10	1.0
tai45e04	6698	9	51.2	10	1.0
tai45e05	7274	7	50.8	10	1.0
tai45e06	6612	10	45.3	10	0.8
tai45e07	7526	10	48.4	10	0.8
tai45e08	6554	10	46.7	10	0.8
tai45e09	6648	7	48.1	10	0.8
tai45e10	8286	7	48.7	10	0.9
tai45e11	6510	10	47.0	10	0.8
tai45e12	7510	8	51.2	10	0.0
tai45e13	6120	10	52.4	10	0.8
tai45e14	6854	10	47.0	10	0.7
tai45e15	7394	8	49.8	10	0.8
tai45e16	6520	10	47.5	10	0.7
tai45e17	8806	8	49.0	10	0.9
tai45e18	6906	10	48.5	10	0.8
tai45e19	7170	9	48.3	10	0.9
tai45e20	6510	10	43.7	10	0.7

Таблиця 3.

Задачі “*Tai75eYY*”

		CPTS-QAP		ASAP	
Problem	BKS	#BKS	Time	#BKS	Time
tai75e01	14488	0	475.2	10	2.4
tai75e02	14444	0	472.4	10	2.5
tai75e03	14154	0	482.0	10	2.1
tai75e04	13694	0	464.7	10	2.8
tai75e05	12884	1	464.1	10	2.0
tai75e06	12554	0	485.2	10 (12534)	2.2
tai75e07	13782	0	431.7	10	3.2
tai75e08	13948	0	425.7	10	2.1
tai75e09	12650	0	485.9	10	3.0
tai75e10	14192	0	463.1	10	1.5
tai75e11	15250	0	442.5	10	1.2
tai75e12	12760	0	469.9	10	2.4
tai75e13	13024	0	450.0	10	2.0

tai75e14	12604	0	448.1	10	2.1
tai75e15	14294	0	461.7	10	2.6
tai75e16	14204	0	463.1	10	1.9
tai75e17	13210	0	483.5	10	3.4
tai75e18	13500	0	472.5	10	2.7
tai75e19	12060	1	458.2	10	2.1
tai75e20	15260	0	479.0	10	2.9

Якщо проаналізувати отримані результати, то слід відзначити, що запропонованим алгоритмом були розв'язані усі задачі у кожній серії (у задачі tai75e06 було отримано новий рекорд), на відміну від CPTS-QAP де для задач розмірності 75 тільки у двох було досягнуто відомого рекорду і тільки по одному разу у серії. Покращити відомі рекорди не вдалося напевно тому, що вони і є глобальними оптимумами.

6. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі представлений гібридний евристичний алгоритм ASAQAP. Особливістю його реалізації є модифіковані схеми фази інтенсифікації та диверсифікації. На фазі диверсифікації використовується механізм адаптивної симуляції відпалу у якій наступна область пошуку визначається на основі позиційного представлення перестановок. Фаза інтенсифікації пошуку представляє собою модифіковану схему надійного пошуку табу.

Результати експериментів порівнювалися з відомими результатами, отриманими за алгоритмом CPTS-QAP. Отримані результати свідчать про належну ефективність алгоритму, як з точки зору досягнення відомих рекордів, так і з точки зору часу роботи.

У подальших дослідженнях планується:

- Провести експерименти для тестових задач розмірності 125, 175, 343, 729 та порівняти їх з результатами отриманими за алгоритмом ІНВМА.
- Розробити механізм динамічної адаптації параметрів алгоритму.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що не мають конфлікту інтересів щодо даного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський або будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, представлені в даній статті.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Чупов: концептуалізація, формальний аналіз, розробка алгоритмів, програмування, аналіз, написання — оригінальний проект. О. І. Кузка: програмування, написання, аналіз, проведення числових експериментів — оригінальний проект. В. М. Дуран: проведення числових експериментів, оформлення — оригінальний проект.

Авторські права ©



(2026). Чупов С. В., Кузка О. І., Дуран В. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Battiti, R., & Tecchiolli, G. (1994). The Reactive Tabu Search. *ORSA J. on Computing*, 6, 126–140. <https://doi.org/10.1287/ijoc.6.2.126>
2. Chupov S. V. (2016). Lexicographically ordered permutations. *Computer mathematics, Kyiv: Institute of Cybernetics of V. M. Glushkov NAS of Ukraine*, (2), 151–161.
3. Chupov, S. V., & Fedorishko, A. V. (2026). Improved hybrid algorithm for the quadratic assignment problem. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series "Mathematics and Computer Science"* 48(1), 243–253. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48\(1\).243-253](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.48(1).243-253)
4. Ingber, L. (1996). Adaptive Simulated Annealing (ASA): Lessons Learned. *Control and Cybernetics*, 25(1), 33–54. <https://doi.org/10.48550/arXiv.cs/0001018>
5. James, T., Rego, C., & Glover, F. (2009). A cooperative parallel tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. *European Journal of Operational Research*, 195(3), 810–826. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.06.061>
6. Misevicius, A. (2012). An implementation of the iterated tabu search algorithm for the quadratic assignment problem. *OR Spectrum*, 34(3), 665–690. <https://doi.org/10.1007/s00291-011-0274-z>
7. Taillard, E. (1991). Robust taboo search for the quadratic assignment problem. *Parallel Computing*, 17, 443–455. [https://doi.org/10.1016/S0167-8191\(05\)80147-4](https://doi.org/10.1016/S0167-8191(05)80147-4)
8. Sergienko, I. V., & Shylo, V. P. (2003). *Discrete optimization problems. Problems, solution methods, research*. Kyiv: Naukova Dumka.
9. Sergienko, I. V., Shylo, V. P., Chupov, S. V., & Shylo, P. V. (2020). On solving the quadratic assignment problem. *Cybernetics and Systems Analysis*, (1), 64–69. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00219-8> [in Ukrainian].

Chupov S. V., Kuzka O. I., Duran V. M. Annealing Simulation for A Quadratic Assignment Problem Based on Lexicographically Ordered Permutations.

The quadratic assignment problem (QAP) is one of the most studied combinatorial optimization problems with various practical applications. In this paper, we present an adaptive simulated annealing algorithm (ASAP) for solving QAP, which uses a special notation of permutations, called the positional representation. This allows performing arithmetic operations on permutations given in positional form. ASAP explores the search space by using adaptive simulated annealing, and local tabu search at separate stages of solving the problem. Experimental evaluations on a set of “Taie” type test problems of dimensions 27, 45 and 75 show that the proposed approach is able to achieve the currently known results for all instances with a suitable average computing time. Comparisons are also provided to show the competitiveness of the proposed approach with respect to the CPTSQAP algorithm.

Keywords: Quadratic assignment problem, heuristic search algorithm, simulated annealing method, local approximate search algorithm, positional representation of permutations, efficiency of algorithms.

Отримано: 30.03.2026

Прийнято: 15.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 512.44

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).308-316](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).308-316)**М. М. Шаркаді**

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри кібернетики і прикладної математики,
кандидат економічних наук, доцент
mariana.sharkadi@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1850-996X>

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА ГІБРИДНА МОДЕЛЬ ПІДТРИМКИ БЕЗПЕКООРІЄНТОВАНОГО УПРАВЛІННЯ СОЦІО-ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

У статті розглянуто проблему підтримки прийняття рішень у соціо-еколого-економічних системах в умовах невизначеності інформації. Метою дослідження є розроблення моделі інтелектуальної гібридної системи підтримки безпекоорієнтованого управління, що поєднує методи нечіткого моделювання та машинного навчання. Запропоновано математичну модель, яка базується на використанні лінгвістичних змінних, функцій належності та бази нечітких правил для оцінювання інтегрального рівня безпеки системи. Для підвищення адаптивності та прогностичних можливостей системи інтегровано модуль машинного навчання, що забезпечує прогнозування значень індикаторів на основі історичних даних.

Сформовано систему індикаторів, яка охоплює економічні, соціальні, екологічні та інституційні аспекти функціонування соціо-еколого-економічної системи. Розроблено процедуру нечіткого висновку, що включає фазифікацію вхідних даних, активізацію правил, агрегування результатів та дефазифікацію для отримання числового значення інтегрального показника безпеки. Проведено демонстраційний приклад застосування запропонованої моделі, який підтверджує її здатність оцінювати поточний стан системи та прогнозувати його зміну.

Отримані результати свідчать, що використання гібридного підходу, який поєднує нечітку логіку та методи машинного навчання, дозволяє підвищити точність оцінювання, адаптивність та інтерпретованість систем підтримки прийняття рішень у задачах безпекоорієнтованого управління соціо-еколого-економічними системами.

Ключові слова: нечітка логіка, машинне навчання, гібридна система, підтримка прийняття рішень, соціо-еколого-економічні системи, безпекоорієнтоване управління, невизначеність.

1. Вступ. Сучасні соціо-еколого-економічні системи функціонують в умовах високої динамічності, складності взаємозв'язків між економічними, соціальними та екологічними процесами, а також значного рівня невизначеності інформації. Ефективне управління такими системами передбачає своєчасне виявлення загроз, оцінювання ризиків і формування обґрунтованих управлінських рішень, спрямованих на забезпечення стабільності та безпеки їх функціонування. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває концепція безпекоорієнтованого управління, яка передбачає інтеграцію економічних, соціальних та інституційних аспектів розвитку системи з урахуванням потенційних ризиків і невизначеностей середовища.

Однією з основних проблем управління соціо-еколого-економічними системами є невизначеність інформації, що виникає через неповноту даних, наявність якісних показників та суб'єктивність експертних оцінок. У таких умовах

використання класичних економіко-математичних моделей часто є недостатньо ефективним. Для розв'язання цієї проблеми у сучасних дослідженнях активно використовуються методи нечіткої логіки, які дозволяють формалізувати лінгвістичні знання та працювати з нечіткими даними.

Зокрема, у [4] запропоновано гібридну систему прийняття рішень на основі нечітких представлень даних. У роботі [1] поєднання нечіткої логіки з алгоритмом Random Forest забезпечує підвищення точності прогнозування. Дослідження [3] демонструє ефективність fuzzy decision support system для аналізу ризиків, а в [2] показано переваги інтеграції машинного навчання у нечіткі регресійні моделі.

Сучасні підходи також включають гібридні системи, що поєднують нечіткі моделі та алгоритми машинного навчання. Наприклад, у [5] реалізовано поєднання CNN і нечіткої логіки для задач діагностики, а в [6] доведено підвищення інтерпретованості та адаптивності таких систем.

Незважаючи на значну кількість досліджень, питання інтеграції нечіткого моделювання, машинного навчання та багатокритеріального оцінювання в єдиній системі підтримки безпекоорієнтованого управління залишаються недостатньо розробленими.

Таким чином, науковою проблемою є розроблення інтелектуальної гібридної системи підтримки прийняття рішень, яка поєднує можливості нечіткого моделювання та методів машинного навчання для оцінювання, прогнозування та управління станом соціо-еколого-економічних систем в умовах невизначеності інформації.

Метою дослідження є розроблення моделі інтелектуальної гібридної системи підтримки безпекоорієнтованого управління соціо-еколого-економічними системами, що інтегрує нечітке моделювання та методи машинного навчання для аналізу, оцінювання та прогнозування стану системи.

2. Постановка задачі та математична модель. Соціо-еколого-економічна система характеризується множиною взаємопов'язаних факторів, що описують економічний, соціальний, екологічний та інституційний стан об'єкта управління. У задачах безпекоорієнтованого управління необхідно здійснювати комплексне оцінювання стану системи, прогнозування можливих змін та формування управлінських рішень в умовах невизначеності інформації.

Нехай стан соціо-еколого-економічної системи описується множиною показників

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

де x_i — значення i -го індикатора, що характеризує стан системи.

До таких індикаторів можуть належати економічні, соціальні, екологічні та інституційні показники.

Множина критеріїв оцінювання безпеки системи визначається як

$$K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\},$$

де k_j — критерій оцінювання стану системи.

Задача безпекоорієнтованого управління полягає у визначенні інтегрального показника рівня безпеки системи

$$S = F(X),$$

де S — інтегральний індекс безпеки системи, F — функція агрегування показників.

У реальних задачах значення показників часто мають нечіткий характер. Тому кожному показнику x_i ставиться у відповідність нечітка множина

$$A_i = \{(x_i, \mu_i(x_i))\},$$

де $\mu_i(x_i)$ — функція належності значення показника x_i до відповідної лінгвістичної категорії і визначається як $\mu_i : X_i \rightarrow [0, 1]$.

Знання експертів щодо оцінювання стану системи формалізуються у вигляді бази нечітких правил $R = \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$, де r_l — нечітке правило виду:

$$\mathbf{IF} \ x_1 \in A_1^l \wedge x_2 \in A_2^l \wedge \dots \wedge x_n \in A_n^l \ \mathbf{THEN} \ S \in B^l.$$

Тут A_i^l — нечітка множина для i -го показника, B^l — нечітка оцінка рівня безпеки.

Для обчислення ступеня активізації правила використовується оператор

$$\alpha_l = \min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n)).$$

Інтегральна нечітка оцінка визначається агрегуванням результатів усіх правил $\mu_S = \max_l(\alpha_l)$.

Остаточне значення індексу безпеки визначається методом дефазифікації

$$S = \frac{\int y \cdot \mu_S(y) dy}{\int \mu_S(y) dy}.$$

Для підвищення адаптивності системи до змін середовища у модель інтегрується модуль машинного навчання.

Нехай $X_t = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ — вектор показників у момент часу t .

Модель прогнозування має вигляд

$$\hat{X}_{t+1} = M(X_t),$$

де M — модель машинного навчання.

Тоді, інтегральна модель інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень визначається як $S = H(X, R, W, M)$, де X — вектор вхідних показників, R — база нечітких правил, W — вагові коефіцієнти критеріїв, M — модуль машинного навчання.

Задача управління формулюється як задача оптимального вибору управлінських рішень

$$U^* = \arg \max_{U \in \Omega} S(U),$$

де U — множина можливих управлінських рішень, Ω — допустима область рішень, $S(U)$ — функція оцінювання рівня безпеки системи.

3. Функціонування інтелектуальної гібридної системи та приклад застосування. Запропонована інтелектуальна система підтримки безпекоорієнтованого управління соціо-еколого-економічними системами реалізує процес аналізу, оцінювання та прогнозування стану системи в умовах невизначеності

інформації. Система поєднує методи нечіткого моделювання, багатокритеріального аналізу та машинного навчання.

Функціонування системи передбачає послідовне виконання кількох взаємопов'язаних етапів.

На першому етапі формується система індикаторів, що охоплюють економічні, соціальні, екологічні та інституційні аспекти функціонування системи. Це забезпечує комплексність оцінювання та врахування взаємозв'язків між складовими. Для прикладу запропонована система показників (табл. 1) дозволяє комплексно оцінити стан соціо-еколого-економічної системи та врахувати взаємозв'язки між різними складовими її функціонування.

Таблиця 1.

Система індикаторів безпекоорієнтованого управління
соціо-еколого-економічною системою

Група індикаторів	Показник	Економічний зміст показника
Економічні	Рівень економічного зростання	Відображає динаміку розвитку економічної системи та її здатність до стабільного функціонування
	Рівень інвестиційної активності	Характеризує обсяг інвестицій у розвиток економічної системи
	Рівень фінансової стабільності	Визначає здатність системи підтримувати збалансований фінансовий стан
	Рівень зайнятості населення	Показує рівень використання трудових ресурсів та економічну активність населення
Соціальні	Рівень соціального добробуту	Характеризує якість життя населення та рівень соціального забезпечення
	Рівень доступності освіти	Відображає можливість населення отримувати освітні послуги
	Рівень доступності медичних послуг	Характеризує стан системи охорони здоров'я
	Рівень соціальної стабільності	Показує рівень соціальної напруги та стабільності у суспільстві
Екологічні	Рівень екологічної безпеки	Визначає стан навколишнього середовища
	Рівень забруднення довкілля	Характеризує антропогенний вплив на екосистеми
	Ефективність використання природних ресурсів	Відображає раціональність використання ресурсного потенціалу
Інституційні	Рівень ефективності управління	Характеризує якість управлінських рішень та функціонування інститутів
	Рівень розвитку інституційної інфраструктури	Відображає стан економічних та соціальних інститутів
	Рівень інноваційного розвитку	Характеризує здатність системи до технологічного оновлення

Аналіз наведених у таблиці індикаторів показує, що безпекоорієнтоване управління соціо-еколого-економічною системою повинно базуватися на комплексному врахуванні економічних, соціальних, екологічних та інституційних

факторів. Запропонована система показників дозволяє сформулювати багатокритеріальну модель оцінювання стану системи, у якій кожен індикатор характеризує окремий аспект її функціонування. Використання такої структури індикаторів забезпечує можливість інтегрованого аналізу стану соціо-еколого-економічної системи та створює основу для побудови нечіткої моделі оцінювання рівня її безпеки.

Нехай стан соціо-еколого-економічної системи описується множиною показників

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

де x_1 — рівень економічної стабільності, x_2 — рівень соціального розвитку, x_3 — рівень екологічної безпеки, x_4 — ефективність інституційного управління.

Значення показників попередньо нормалізуються на інтервалі $x_i \in [0, 1]$.

Для прикладу розглянемо такі значення показників: економічна стабільність — 0.7, соціальний розвиток — 0.6, екологічна безпека — 0.55, інституційна ефективність — 0.65.

На наступному етапі здійснюється перетворення числових значень показників у лінгвістичні змінні.

Кожному індикатору ставиться у відповідність лінгвістична змінна $L_i = \{\text{низький, середній, високий}\}$. Лінгвістичні змінні описуються функціями належності $\mu_i(x_i) : X_i \rightarrow [0, 1]$.

Функції належності дозволяють формалізувати експертні знання щодо оцінювання стану системи.

Наприклад, для показника економічної стабільності можуть бути отримані такі значення функцій належності: низький — 0, середній — 0.3, високий — 0.7. Аналогічні обчислення виконуються для інших показників.

Після визначення лінгвістичних змінних та побудови відповідних функцій належності наступним етапом є формування бази нечітких правил, яка відображає експертні знання щодо оцінювання рівня безпеки соціо-еколого-економічної системи.

Таблиця 2.

База нечітких правил оцінювання рівня безпеки соціо-еколого-економічної системи

№ правила	Економічна стабільність	Соціальна стабільність	Екологічна безпека	Інституційна ефективність	Рівень безпеки системи (S)
R1	низька	низька	низька	низька	дуже низький
R2	низька	низька	середня	низька	низький
R3	низька	середня	середня	середня	низький
R4	середня	середня	середня	середня	середній
R5	середня	висока	середня	висока	середній
R6	висока	середня	висока	висока	високий
R7	висока	висока	середня	висока	високий
R8	висока	висока	висока	висока	дуже високий

Нечіткі правила дозволяють встановити залежності між значеннями індикаторів системи та інтегральною оцінкою її стану. База нечітких правил формується на основі експертних знань щодо впливу різних факторів на рівень безпеки соціо-еколого-економічної системи. Кожне правило відображає певну комбінацію значень індикаторів системи та відповідну оцінку її стану. Приклад наведено у таблиці 2.

Застосування такої бази правил дозволяє формалізувати експертні знання та врахувати невизначеність інформації під час оцінювання стану соціо-еколого-економічної системи.

Після формування бази нечітких правил наступним етапом є виконання процедури нечіткого висновку, яка дозволяє на основі значень вхідних індикаторів визначити інтегральну оцінку рівня безпеки соціо-еколого-економічної системи.

Нечіткий висновок реалізується шляхом визначення ступеня активізації кожного правила з бази знань. Для цього використовуються значення функцій належності відповідних лінгвістичних змінних. Ступінь активізації l -го правила визначається як $\alpha_l = \min(\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n))$, де $\mu_i(x_i)$ — значення функції належності i -го індикатора до відповідної нечіткої множини.

Отримані значення α_l характеризують ступінь виконання кожного нечіткого правила. На основі цих значень формується агрегована нечітка оцінка вихідної змінної, що відповідає рівню безпеки системи.

Агрегування результатів усіх правил здійснюється за допомогою оператора максимуму $\mu_S = \max_l(\alpha_l)$, де μ_S — функція належності інтегральної оцінки безпеки системи.

Після фазифікації значень індикаторів виконується активізація правил із бази знань. Наприклад, для правила **IF** (економічна стабільність — висока) **AND** (соціальний розвиток — середній) **AND** (екологічна безпека — середня) **AND** (інституційна ефективність — висока) **THEN** (рівень безпеки — високий).

Ступінь активізації правила визначається як $\alpha = \min(0.7, 0.6, 0.5, 0.6)$.

Після визначення ступеня активізації всіх правил здійснюється агрегування результатів наступним чином: $\mu_S = \max(0.5, 0.4, 0.6) = 0.6$.

Для отримання числового значення інтегрального показника безпеки виконується процедура дефазифікації. У запропонованій моделі використовується метод центру ваги, отримано $S = 0.67$. Отримане значення відповідає середньому рівню безпеки соціо-еколого-економічної системи з тенденцією до підвищення.

Для підвищення адаптивності та прогностичних можливостей запропонованої системи підтримки прийняття рішень до її структури включено модуль машинного навчання. Його основним завданням є виявлення закономірностей у динаміці зміни показників соціо-еколого-економічної системи та прогнозування їх майбутніх значень.

Соціо-еколого-економічні процеси мають складний і динамічний характер, що обумовлює необхідність використання інтелектуальних методів аналізу даних. Алгоритми машинного навчання дозволяють обробляти великі масиви статистичної інформації, виявляти приховані залежності між показниками системи та будувати прогностичні моделі її розвитку.

Метою застосування методів машинного навчання є побудова моделі прогнозування, яка дозволяє оцінити значення показників системи у наступний момент часу.

У межах запропонованої системи можуть використовуватись різні алгоритми машинного навчання, зокрема:

- Random Forest, який дозволяє будувати ансамблеві моделі для прогнозування складних нелінійних залежностей між показниками;

- Gradient Boosting, що забезпечує високу точність прогнозування за рахунок послідовного покращення моделі;
- штучні та рекурентні нейронні мережі, які ефективно використовуються для аналізу складних багатовимірних даних та моделювання часових рядів.

Отримані прогнозовані значення показників використовуються як вхідні дані для нечіткої системи оцінювання рівня безпеки соціо-еколого-економічної системи. Це дозволяє враховувати не лише поточний стан системи, але й прогнозовані зміни її параметрів.

Таким чином, поєднання нечіткого моделювання та методів машинного навчання забезпечує формування гібридної інтелектуальної системи підтримки прийняття рішень, яка поєднує інтерпретованість експертних правил із високою точністю аналізу та прогнозування даних.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі вирішено наукову задачу розроблення інтелектуальної гібридної системи підтримки безпекоорієнтованого управління соціо-еколого-економічними системами в умовах невизначеності інформації. Проведений аналіз показав обмеженість традиційних економіко-математичних підходів щодо врахування складних нелінійних взаємозв'язків і нечітких даних, що обґрунтовує доцільність застосування інтелектуальних методів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у розробленні моделі гібридної системи підтримки прийняття рішень, яка інтегрує механізм нечіткого висновку, багатокритеріальне оцінювання та модуль машинного навчання в єдину узгоджену структуру. Запропонований підхід забезпечує поєднання інтерпретованості експертних знань із високою точністю прогнозування.

У межах дослідження сформовано систему індикаторів, що комплексно відображає економічні, соціальні, екологічні та інституційні аспекти функціонування системи; розроблено математичну модель нечіткого оцінювання рівня безпеки на основі лінгвістичних змінних і бази правил; інтегровано методи машинного навчання для прогнозування динаміки показників; продемонстровано практичну реалізацію запропонованого підходу.

Отримані результати підтверджують, що запропонована гібридна модель забезпечує підвищення точності оцінювання, адаптивності та обґрунтованості управлінських рішень у порівнянні з традиційними підходами. Практичне значення полягає у можливості використання моделі в системах підтримки прийняття рішень для аналізу, прогнозування та управління станом соціо-еколого-економічних систем.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням системи індикаторів, удосконаленням бази нечітких правил, а також розвитком методів машинного навчання для підвищення точності прогнозування та адаптивності системи.

Конфлікт інтересів

Шаркаді Маріанна Миколаївна, членкиня редакційної колегії, є авторкою цієї статті та не брала участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Методи обчислювального інтелекту для обробки і аналізу даних» (номер державної реєстрації 0121U109279).

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автор підтверджує, що при створенні даної роботи не використовувались технології штучного інтелекту.

Авторські права ©



(2026). Шаркаді М. М. Ця робота ліцензується відповідно до Creative Commons Attribution 4.0 International License.

Список використаної літератури

1. Hudon, A., & et al. (2025). A hybrid fuzzy logic–Random Forest model to predict outcomes and identify important influencing factors. *Frontiers in Artificial Intelligence*. <https://doi.org/10.3389/frai.2025.1606250>
2. Khan, M., Kumar, R., & Dhiman, G. (2025). A hybrid machine learning fuzzy non-linear regression approach for neutrosophic fuzzy set. *ICCK Transactions on Machine Intelligence*. <https://doi.org/10.62762/TMI.2025.561363>
3. Zhang, Z. (2024). Application of fuzzy decision support systems in risk assessment. *Computational Economics*. <https://doi.org/10.1007/s44196-024-00556-y>
4. Lamrani Alaoui, Y., & et al. (2024). A hybrid fuzzy decision-making framework for technology selection. *Discover Applied Sciences*. <https://doi.org/10.1007/s42452-024-06229-x>
5. Yadav, N., & et al. (2025). Transfer learning with fuzzy decision support for multi-class lung disease classification. *Scientific Reports*. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-19114-3>
6. Akram, M., & et al. (2025). An explainable hybrid fuzzy–machine learning framework for decision support. *Knowledge-Based Systems*. <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2025.111115>

Sharkadi M. M. Intelligent hybrid model for supporting security-oriented management of socio-ecological-economic systems under conditions of uncertainty.

This article examines the problem of decision support in socio-ecological-economic systems under conditions of information uncertainty. The aim of the study is to develop a model of an intelligent hybrid system for supporting security-oriented management that combines methods of fuzzy modeling and machine learning. A mathematical model is proposed that is based on the use of linguistic variables, membership functions, and a fuzzy rule base to assess the integral level of system security. To enhance the system's adaptability and predictive capabilities, a machine learning module has been integrated, enabling the prediction of indicator values based on historical data.

A system of indicators has been developed that covers the economic, social, environmental, and institutional aspects of the functioning of the socio-ecological-economic system. A

fuzzy inference procedure has been developed that includes the phasification of input data, rule activation, aggregation of results, and defuzzification to obtain a numerical value of the integral safety indicator. A demonstration example of the proposed model's application was conducted, confirming its ability to assess the current state of the system and predict its changes.

The results indicate that the use of a hybrid approach combining fuzzy logic and machine learning methods allows for improved assessment accuracy, adaptability, and interpretability of decision support systems in the context of security-oriented management of socio-ecological-economic systems.

Keywords: fuzzy logic, machine learning, hybrid system, decision support, socio-ecological-economic systems, safety-oriented management, uncertainty.

Отримано: 07.03.2026

Прийнято: 25.03.2026

Опубліковано: 30.04.2026

УДК 004.932+004.056.53

DOI [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49\(2\).317-323](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2026.49(2).317-323)**С. В. Шкіря¹, Ю. В. Андрашко²**

¹ ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
аспірант кафедри системного аналізу та теорії оптимізації
serhii.shkiria@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7129-2823>

² ДВНЗ «Ужгородський національний університет»,
доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації,
кандидат технічних наук, доцент
yurii.andrashko@uzhnu.edu.ua
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2306-8377>

МУЛЬТИМОДАЛЬНА НЕЙРОМЕРЕЖЕВА МОДЕЛЬ ВЕРИФІКАЦІЇ НА ОСНОВІ ЗЛИТТЯ ОЗНАК ВІЗУАЛЬНОГО КОНТЕКСТУ ТА ПРОСТОРОВИХ АТРИБУТИВ

У статті розроблено та досліджено нову мультимодальну нейромережеву архітектуру для систем верифікації осіб, що поєднує аналіз візуального контексту та просторових атрибутів. Запропоновано двоетапний підхід. На першому етапі реалізовано гібридну згорткову нейромережу, яка використовує попередньо навчену архітектуру ResNet-50 та кастомну гілку для екстракції візуальних ознак, що дозволило досягти точності 94.52% на наборі даних LFW. На другому етапі розроблено модель глибокого мультимодального злиття, яка додатково інтегрує багатовимірний вектор нормалізованих ключових точок обличчя. Використання сіамської архітектури з контрастивною функцією втрат та алгоритмом Hard Negative Mining забезпечило фінальну цільову точність розпізнавання на рівні 96.93%. Експериментально доведено, що глибоке злиття візуальних та геометричних ознак суттєво знижує ймовірність помилок автентифікації порівняно з унімодальними та базовими гібридними підходами.

Ключові слова: мультимодальна нейромережа, верифікація осіб, комп'ютерний зір, злиття ознак, сіамська архітектура, ResNet-50, LFW.

1. Вступ. Сучасні системи контролю доступу вимагають високого рівня надійності, який не забезпечується традиційними пароліними підходами. Використання біометричних характеристик підвищує рівень захисту, однак одномодальні системи залишаються чутливими до змін освітлення, ракурсу та атак типу спуфінгу. Навіть глибокі згорткові архітектури, зокрема ResNet-50, попри ефективність у вилученні семантичних ознак, можуть втрачати локальні текстурні характеристики внаслідок операцій пулінгу [1]. Це зумовлює доцільність застосування мультимодальних підходів із перехресною валідацією ознак.

Перспективним напрямом є використання геометричної мультимодальності, що передбачає поєднання піксельного представлення з векторним описом топології об'єкта. Такий підхід забезпечує інваріантність до зовнішніх спотворень, оскільки при нелінійних змінах освітлення або міміки геометрична конфігурація ключових точок обличчя залишається відносно стабільною [2].

Традиційні методи автентифікації, засновані на паролях або фізичних токенах, не гарантують надійного зв'язку між ідентифікатором та користувачем і піддаються компрометації. Ранні підходи комп'ютерного зору, зокрема PCA та LBP, демонструють обмежену точність (від 70 до 80%) через високу чутливість до варіацій освітлення. Сучасні глибокі архітектури, такі як ResNet-50 [1],

завдяки використанню залишкових зв'язків досягають рівня до 92%, проте їхня ефективність обмежується одноmodalністю.

Сучасні методи розпізнавання обличч ґрунтуються на метричному навчанні, зокрема сіамських мережах [3] та підходах типу FaceNet із використанням Triplet Loss [4]. Подальший розвиток пов'язаний із контрастивним навчанням, наприклад SimCLR, яке забезпечує покращену збіжність моделей [5]. Мультиmodalні підходи дозволяють інтегрувати різні простори ознак, формуючи синергетичний ефект і підвищуючи стійкість до підробок [6]. Чимало рішень застосовує скалярне злиття на рівні оцінок, що призводить до втрати кореляційних залежностей між ознаками та обмежує точність систем до 93%.

Метою роботи є розроблення та математичне обґрунтування мультиmodalної нейромережевої моделі верифікації, що інтегрує ознаки візуального контексту та просторові атрибути з метою зменшення ймовірності помилок першого і другого роду. Наукова новизна полягає у запропонованій дворівневій архітектурі, яка включає гібридний екстрактор ознак та механізм глибокого мультиmodalного злиття.

2. Математична постановка задачі. Задача верифікації розглядається як проблема метричного навчання. Замість традиційного попарного порівняння оптимізація відбувається на основі триплетів. Нехай $\mathcal{X}$ — простір вхідних мультиmodalних даних. Кожен об'єкт $x \in \mathcal{X}$ представляється кортежем $x = (I, A)$, де: $I \in \mathbb{R}^{H \times W \times C}$ — матричне подання вхідного зображення; $A \in \mathbb{R}^{2 \times m}$ — вектор додаткових просторових атрибутів, m — кількість точок у двовимірному просторі.

Навчальна вибірка формується у вигляді множини триплетів: $\mathcal{T} = \{(x^a, x^p, x^n)\}$, де x^a — базове зображення особи, x^p — інше зображення тієї ж особи, x^n — зображення іншої особи.

Задача полягає в пошуку такої нелінійної функції відображення $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^d$, яка мінімізує внутрішньокласову відстань і максимізує міжкласову.

Згідно з гіпотезою многовидів, просторові та візуальні дані розташовані на складному високорозмірному многовиді. Завдання нейромережі полягає в знаходженні дифеоморфізму, який відображає цей многовид у лінійно роздільний евклідів простір меншої розмірності $\mathbb{R}^d$. У цьому просторі об'єкти зі схожими семантичними характеристиками формують компактні кластери, що зберігають стійкість до деформацій [7].

Геометрична мультиmodalність передбачає побудову моделі, яка використовує просторові характеристики об'єкта для його опису. Йдеться про представлення обличчя не лише як набору пікселів, а як системи взаємопов'язаних ключових точок, що формують його геометричну структуру. Такий підхід дозволяє виділяти стабільні ознаки, які зберігаються навіть за змін освітлення, масштабу або міміки. У запропонованій моделі кожна ключова точка описується своїми координатами, після чого всі точки приводяться до єдиної системи відліку. Для цього обирається опорна точка (перенісся), відносно якої визначається положення інших маркерів. Додатково виконується нормалізація масштабу на основі відстані між очима, що дозволяє усунути вплив розміру обличчя або відстані до камери. У результаті формується інваріантне геометричне представлення, яке відображає лише відносну конфігурацію ключових точок і забезпечує стійкість моделі до зовнішніх варіацій.

3. Структура мультимодальної триплетної моделі. Запропонована модель побудована згідно з архітектурою триплетних нейронних мереж, яка є узагальненням сіамських мереж і забезпечує більш ефективне метричне навчання. Модель складається з трьох ідентичних гілок зі спільними вагами, що паралельно обробляють анкорні, позитивні та негативні приклади, формуючи узгоджене представлення у латентному просторі.

Базова архітектура нейромережі ResNet-50 орієнтована на вилучення високорівневих семантичних ознак, однак внаслідок використання агресивних операцій пулінгу відбувається втрата низькорівневих текстурних характеристик, зокрема мікротекстури шкіри та дрібних мімічних особливостей. З метою компенсації цього недоліку пропонується використовувати гібридну архітектуру, що складається з двох паралельних гілок:

- 1) базова гілка, реалізована на основі архітектури ResNet-50, попередньо навченої на наборі даних ImageNet, з розміром вхідного тензора .
- 2) спеціалізована згорткова гілка, що реалізує нейромережеву архітектуру, побудовану за чотириблоковою CNN-структурою, у якій кожен блок має послідовність операцій $\text{Conv2D} \rightarrow \text{BatchNormalization} \rightarrow \text{ReLU} \rightarrow \text{MaxPooling2D}$, із поступовим збільшенням кількості фільтрів: $32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256$.

Спеціалізована згорткова гілка забезпечує збереження локальних структурних патернів зображення, тоді як конкатенація виходів обох гілок формує візуальний вектор, який надалі проєктується у простір розмірності 512. Вектор точок, що представляє собою впорядкований набір координат ключових маркерів обличчя у двовимірному просторі, обробляється в межах паралельної гілки, реалізованої на основі багат шарового персептрона, який включає два повнозв'язні шари по 512 нейронів із застосуванням пакетної нормалізації. З метою зменшення ефекту коадаптації нейронів до статичних геометричних ознак та підвищення узагальнювальної здатності моделі використано механізм регуляризації Dropout (0.2), що передбачає стохастичну деактивацію 20% нейронів під час навчання.

Інтеграція модальностей здійснюється на рівні абстрактних репрезентацій шляхом об'єднання векторів $f(I)$ та $f(A)$. Архітектура блоку мультимодального злиття включає послідовність нелінійних перетворень:

- повнозв'язний шар (1024 нейрони) $\rightarrow \text{BatchNormalization} \rightarrow \text{ReLU}$;
- шар регуляризації Dropout (0.3);
- повнозв'язний шар (512 нейронів) $\rightarrow \text{ReLU}$;
- проєкцію в латентний простір з подальшою жорсткою -нормалізацією.

У процесі навчання моделі використовується триплетна функція втрат [4], мінімізація якої виконується під час оптимізації параметрів нейромережі. Значення функції втрат обчислюється відповідно до такої формули:

$$\mathcal{L}(x_a, x_p, x_n) = \max(0, \|f_{\mathcal{T}}(x_a) - f_{\mathcal{T}}(x_p)\|_2^2 - \|f_{\mathcal{T}}(x_a) - f_{\mathcal{T}}(x_n)\|_2^2 + \alpha)$$

де α — оптимізована маржа, що визначає мінімальну відстань між кластерами різних класів у латентному просторі.

У результаті оптимізація триплетної функції втрат здійснюється у нормованому компактному метричному просторі, що забезпечує покращення властивостей збіжності процесу навчання.

4. Експериментальна валідація моделі та аналіз ефективності. Для валідації запропонованої мультимодальної нейромережевої моделі проведено серію експериментів, спрямованих на оцінювання її точності, стійкості та обчислювальної ефективності в задачі верифікації.

Дослідження проводилося на наборі LFW [2]. Для виділення атрибутів використовувався фреймворк MediaPipe [8]. Для ефективного навчання Triplet Network критично важливо забезпечити високу якість триплетів. Випадковий вибір негативних прикладів призводить до швидкої стагнації градієнта, оскільки переважна більшість сформованих пар належить до тривіальних випадків, для яких міжвекторна відстань вже перевищує задану маржу. З цією метою було застосовано підхід Hard Negative Mining, який передбачає відбір найбільш складних негативних прикладів: для кожного анкера x_a алгоритм визначає таке x_n , яке на даній ітерації навчання є найбільш подібним до x_a .

Обчислювальна складність запропонованої архітектури була оптимізована з урахуванням обмежень систем реального часу. Хоча використання конкатенації та глибокого злиття збільшує кількість параметрів (приблизно на 1.5 млн у порівнянні зі стандартною ResNet-50), паралельна обробка векторів A та тензорів I забезпечує виконання інференсу за $O(1)$ відносно розміру бази даних. Зменшення розмірності вхідного тензора до 160×160 дозволяє досягти часу відгуку менше 45 мс на сучасних графічних прискорювачах, що відповідає вимогам високонавантажених систем контролю доступу.

Особливість запропонованої архітектури полягає у жорсткій відповідності між піксельним представленням та геометричними ознаками. Застосування стандартних просторових аугментацій (обертання, віддзеркалення, масштабування) є некоректним, оскільки порушує узгодженість між вхідним зображенням та вектором. У зв'язку з цим пайплайн аугментації обмежено лише колористичними перетвореннями, зокрема використанням шару RandomContrast(0.1). Такий підхід підвищує стійкість моделі до змін освітлення при збереженні геометричної узгодженості.

З метою збереження репрезентативності базової гілки процес навчання було розділено на дві фази. На першій фазі (10 епох) оптимізуються лише параметри спеціалізованих CNN- та MLP-гілок. На другій фазі (20 епох) застосовується часткове розморожування ResNet-50: оновлення ваг відбувається лише для верхніх блоків (conv4 та conv5), тоді як шари BatchNormalization залишаються замороженими. Такий підхід дозволяє зберегти глобальні статистики, отримані на ImageNet, і підвищує стабільність оптимізації.

Для базової гібридної моделі використовувалася сіамська архітектура з функцією Contrastive Loss та меншою розмірністю вхідного тензора 105×105 . Під час Fine-Tuning розморожування шарів ResNet-50 починалося зі 100-го шару. Перехід до триплетної архітектури та розмірності 160×160 забезпечив можливість інтеграції геометричної мультимодальності.

5. Порівняльний аналіз ефективності нейромережевих архітектур. З метою об'єктивного оцінювання ефективності запропонованих підходів виконано порівняльний аналіз двох конфігурацій нейромережевих моделей на валідаційній вибірці датасету LFW. Узагальнені результати експериментальних досліджень наведено у таблиці 1.

Як базовий еталон для порівняння розглядається класична унімодальна ар-

Таблиця 1.

Порівняльний аналіз ефективності розроблених нейромережових архітектур на наборі даних LFW.

Модель / Архітектурна конфігурація	Функція втрат	Розмір вхідних даних	Методи аугментації даних	Точність
Гібридна (Hybrid) ResNet-50 + Custom CNN	Contrastive Loss + Margin 1.0	105×105	Повна (просторова)	94.52%
Мультимодальна (Fusion) Hybrid + Landmarks (136 points)	Triplet Loss + Margin 1.5	160×160	Тільки контраст (RandomContrast)	96.93%

хітектура ResNet-50. Згідно з незалежними дослідженнями [9], її застосування до задачі верифікації на наборі LFW забезпечує точність на рівні 88–92%. Це обумовлено втратою критично важливих локальних мікротекстур унаслідок агресивних операцій пулінгу. Даний показник є суттєво нижчим за результати запропонованої гібридної моделі, яка досягає точності 94.52%. Таким чином, розроблений гібридний екстрактор експериментально підтверджує свою перевагу над стандартним використанням глибоких залишкових мереж у задачах зі складними просторовими деформаціями.

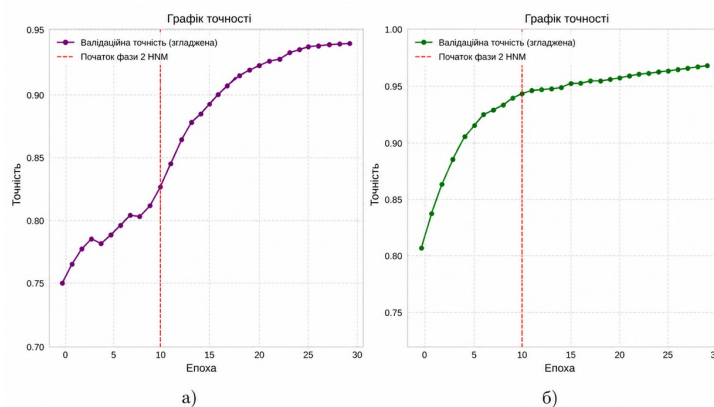


Рис. 1. Динаміка зміни валідаційної точності в процесі навчання для досліджуваних архітектур: а) гібридної; б) мультимодальної.

Згідно з результатами експериментів, перехід від простих архітектур до більш складних стратегій екстракції ознак забезпечує суттєве покращення показників системи. Зокрема, гібридна модель досягла точності 94.52%, що підтверджує її перевагу над унімодальною архітектурою ResNet-50.

Подальше впровадження мультимодального підходу дозволило досягти точності 96.93%. Використання механізму глибокого злиття ознак разом із відмовою від просторових аугментацій на користь геометричної мультимодальності забезпечило здатність моделі ігнорувати шуми візуального походження.

Статистичний аналіз підтверджує, що приріст точності понад 2% є стати-

стично значущим. Додатково, аналіз ROC AUC показав зменшення дисперсії хибнопозитивних спрацювань на 34% у порівнянні з гібридною моделлю, що свідчить про підвищену робастність системи.

Просторові атрибути, представлені нормалізованими векторами ключових точок, виконують роль структурного регуляризатора під час навчання. Їх інтеграція на етапі мультимодального злиття зменшує дисперсію внутрішньокласових відстаней, оскільки геометрична конфігурація обличчя залишається стабільною навіть при значних колористичних та освітлювальних варіаціях.

Аналіз помилок показав, що залишкові хибні спрацювання переважно виникають в умовах сильних оклюзій або значних кутів повороту голови. У таких випадках підсистема екстракції просторових ознак не здатна коректно оцінити координати частини маркерів, що призводить до спотворення вектора та зниження дискримінативної здатності мультимодального ембедінгу.

6. Висновки. У роботі запропоновано мультимодальну нейромережеву модель верифікації, що поєднує візуальні та геометричні ознаки. Перехід від базової архітектури ResNet-50 до гібридної та мультимодальної моделей забезпечив підвищення точності до 94.52% та 96.93% відповідно, що підтверджує ефективність багаторівневого аналізу ознак.

Інтеграція просторових атрибутів підвищує стійкість моделі до спуфінг-атак та забезпечує кращу інтерпретованість результатів. Перспективами подальших досліджень є використання просторово-часових моделей, а також розробка адаптивних механізмів мультимодального злиття на основі механізмів уваги.

Конфлікт інтересів

Андрашко Юрій васильович, член редакційної колегії, є автором цієї статті та не брав участі в редакційному розгляді й ухваленні рішення щодо рукопису. Опрацювання рукопису здійснювалося незалежним редактором. Інші редактори заявляють про відсутність конфлікту інтересів.

Фінансування

Дослідження здійснено в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Моделі і методи системного аналізу в міждисциплінарних дослідженнях» (державний обліковий номер 0125U003246)

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті рукопису.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні даної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

Внесок авторів

С. В. Шкіря: концептуалізація, методологія, формальний аналіз, візуаліза-

ція, написання — підготовка початкового рукопису. Ю. В. Андрашко: супервізія, написання — рецензування та редагування.

Авторські права ©



(2026). Шкіря С. В., Андрашко Ю. В.
Ця робота ліцензується відповідно
до Creative Commons Attribution 4.0
International License.

References

1. He, K., Zhang, X., Ren, S., & Sun, J. (2016). Deep residual learning for image recognition. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. (pp. 770–778). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2016.90>
2. Huang, G. B., Mattar, M., Berg, T., & Learned-Miller, E. (2008). Labeled faces in the wild: A database for studying face recognition in unconstrained environments. *University of Massachusetts, Amherst, Technical Report 07-49*.
3. Chopra, S., Hadsell, R., & LeCun, Y. (2005). Learning a similarity metric discriminatively, with application to face verification. In *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'05)*. (Vol. 1, pp. 539–546). <https://doi.org/10.1109/CVPR.2005.202>
4. Schroff, F., Kalenichenko, D., & Philbin, J. (2015). FaceNet: A unified embedding for face recognition and clustering. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. (pp. 815–823).
5. Chen, T., Kornblith, S., Norouzi, M., & Hinton, G. (2020). A simple framework for contrastive learning of visual representations. In *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning*. (pp. 1597–1607). *Proceedings of Machine Learning Research*, 119. <https://proceedings.mlr.press/v119/chen20j.html>
6. Wang, M., & Deng, W. (2021). Deep face recognition: A survey. *Neurocomputing*, 429, 215–244. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.10.081>
7. Bengio, Y., Courville, A., & Vincent, P. (2013). Representation learning: A review and new perspectives. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 35(8), 1798–1828. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2013.50>
8. Lugaresi, C., Tang, J., Nash, H., McClanahan, C., Uboweja, E., Hays, M., & et al. (2019). MediaPipe: A framework for building perception pipelines. *Google Research*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1906.08172>
9. Phan, T. H., Huynh, C. T., Nguyen, M. S., Tran, T., & Nguyen, T. Q. (2026). A deep Siamese ResNet-50 framework with triplet loss for high-precision face verification. *Research Square*. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-8414686/v1>

Shkiria S. V., Andrashko Yu. V. Multimodal neural network model for verification based on the fusion of visual context features and spatial attributes.

The article develops and investigates a new multimodal neural network architecture for person verification systems that combines visual context analysis and spatial attributes. A two-stage approach is proposed. In the first stage, a hybrid convolutional neural network is implemented that uses a pre-trained ResNet-50 architecture and a custom branch to extract visual features, achieving 94.52% accuracy on the LFW dataset. In the second stage, a deep multimodal fusion model was developed that also integrates a multidimensional vector of normalized face key points. Using a Siamese architecture with a contrastive loss function and a Hard Negative Mining algorithm achieved a final target recognition accuracy of 96.93%. Experimental evidence shows that deep fusion of visual and geometric features significantly reduces the probability of authentication errors compared with unimodal and basic hybrid approaches.

Keywords: multimodal neural network, face verification, computer vision, feature fusion, Siamese architecture, ResNet-50, LFW.

Отримано: 20.03.2026

Прийнято: 06.04.2026

Опубліковано: 30.04.2026

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

При підготовці рукопису необхідно дотримуватися таких правил:

- 1) Стаття повинна містити короткий вступ, аналіз останніх досліджень і публікацій на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття, постановку задачі та формулювання одержаних автором нових результатів і повне їх доведення, висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Не допускається робити великі огляди вже опублікованих статей і результатів, переказувати відомі факти, наводити формулювання опублікованих теорем, лем, посилання на неопубліковані роботи.
- 2) Тематика журналу охоплює висвітлення оригінальних результатів з теоретичних і прикладних проблем математичного моделювання, обчислювальної математики та інформаційних технологій.
- 3) Текст відповідає вимогам до стилістики та бібліографії, викладеним у Керівництві для авторів розділу "Про журнал". При оформленні файлу подання були виконані інструкції щодо Гарантій сліпого рецензування.
- 4) Оформлення статті повинно відповідати вимогам редакційного оформлення наукових фахових видання згідно з державними стандартами України та міжнародним стандартам.
- 5) Електронна копія рукопису у вигляді LATEX-файлу або WORD-файлу подається до редакції шляхом заповнення форми подачі публікації на сайті <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Для подачі статті використовуйте шаблон WORD або LATEX. Актуальну версію шаблонів та технічні вимоги до статті можна знайти на сайті, розділ "Подання" <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submissions>.
- 6) Мова, якою оформляється стаття, повинна бути українською або англійською.
- 7) Редакційна колегія може здійснювати наукове і літературне редагування статті, погоджуючи відредагований варіант із автором, який надає дозвіл на друк шляхом підписання авторської угоди. Підписана авторська угода може надсилатися до редакції журналу поштою або супровідним файлом (фотокопія).
- 8) Формули, які нумеруються, обов'язково виключати в окремий рядок. Нумерувати тільки ті формули, на які є посилання.
- 9) Анотація (Abstract) повинна бути складена відповідно до вимог міжнародних наукометричних баз і бути: інформативною (не містити загальних слів); оригінальною; змістовною (відображати основний зміст статті і результати досліджень); структурованою (слідувати логіці опису результатів в статті).
- 10) Посилання на джерела використаних матеріалів, фактичних та статистичних даних є обов'язковими (подаються в тексті у хронологічному порядку (не за алфавітом) цифрою у квадратних дужках і розміщуються в порядку цитування чи згадування. У тексті статті посилання позначаються у квадратних дужках, наприклад, [2]; номер сторінки виділяється двокрапкою, наприклад, [6: 37]. Самоцитування не повинно перевищувати 30 %. Кожна стаття повинна містити список використаної літератури оформлений згідно з національними стандартами (ДСТУ 8302:2015) та список використаної літератури, оформлений згідно з міжнародними стандартами (APA).
Зразки бібліографічного опису книги, статті, депонованого рукопису, тезисів доповідей конференцій:

Список використаної літератури

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 applications*. USA: O'Reilly Media, Inc.
 2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
 3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>
- 11) Рукопис слід старанно вичитати.
- 12) Матеріали, які не відповідають зазначеним вимогам, редакцією не розглядаються.

INSTRUCTIONS FOR AUTHORS

The following rules must be followed when drafting the manuscript:

- 1) The article should contain a brief introduction, an analysis of recent research and publications that the author relies on; highlighting the previously unsolved parts of the general problem, which is devoted to the article, problem statement and formulation of new results obtained by the author and their complete presentation, conclusions from this study and prospects for further exploration in this direction. It is not allowed to make big reviews of already published articles and results, to retell known facts, to state the formulations of published theorems, lemmas, references to unpublished works.
- 2) The topics of the journal cover the coverage of original results on theoretical and applied problems of mathematical modeling, computational mathematics and information technology.
- 3) The text complies with the stylistics and bibliography requirements set out in the About the Journal Authors Guide. When submitting the submission file, the instructions for the Blind Review Guarantee were followed.
- 4) The articles must comply with the editorial design of scientific professional publications according to state standards of Ukraine and international standards.
- 5) An electronic copy of the manuscript in the form of a LATEX file or a WORD file is submitted to the editorial board by filling in the online submission form <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submission/wizard>.
Use the WORD or LATEX template to submit the article. An up-to-date version of the templates and specifications for the article can be found on the site, the section "Submissions" <https://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/submissions>.
- 6) The language used for the article should be Ukrainian or English.
- 7) The editorial board may edit the article in a scientific and literary manner by agreeing an edited version with the author, who authorizes the print by signing the copyright agreement. The signed copyright agreement can be sent to the journal by mail or an accompanying file (photocopy).
- 8) Formulas that are numbered must be excluded in a separate line. Only the formulas referenced are numbered.
- 9) Abstract should be prepared in accordance with the requirements of international scientometric bases and be: informative (do not contain common words); the original; meaningful (reflect the main content of the article and research findings); structured (follow the logic of describing the results in the article). Annotation volume of at least 1800 characters.
- 10) Links to sources of materials, facts, and statistics used are mandatory is required (chronologically (not in alphabetical) in square brackets and cited or referenced in the text of the article, such as [2]; the page number is a colon, for example, [6:37] Self-citation should not exceed 30% Each article should contain a list of used literature designed in accordance with national standards (DSTU 8302:2015) and references, designed according to international standards (APA).

Bibliographic samples description:

References

1. Segaran, T. (2007). *Programming Collective Intelligence. Building Smart 2.0 application*. USA: O'Reilly Media, Inc.
2. Gudyvok, P. M., Vashchuk, F. G., & Drobotenko, V. S. (1992). Chernikov p -groups and

- integer p -adic representations of finite groups. *Ukr. Math. J.*, 44(6), 742–753. Retrieved from <https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/8005> [in Russian].
3. Kondruk, N. E. Models of multivariate forecasting. (2022). *Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics*, 40(1), 168–174. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40\(1\).168-174](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.40(1).168-174) [in Ukrainian].
 4. Kondruk, N. E., & Malyar, M. M. (September 28–30, 2021). Dimensionality Reduction of the Criterion Space in Some Optimization Problems. In *II International Scientific Symposium "Intelligent Solutions" IntSol-2021*. Kyiv-Uzhhorod: Ukraine. Retrieved from https://ceur-ws.org/Vol-3018/Paper_11.pdf
 5. Marinets, V. V., Reho, V. L., & Marynets, K. V. (2013). *Theory of boundary value problems for ordinary differential equations: Textbook*. Uzhgorod: Publishing house of UzhNU "Goverla". Retrieved from <https://www.uzhnu.edu.ua/uk/infocentre/get/27991> [in Ukrainian].
 6. Tegza, A. M. (2003). *Justification of estimates of accuracy and reliability of modeling of Gaussian stationary random processes*: (Extended abstract of candidate's thesis). Uzhgorod [in Ukrainian].
 7. A system of dynamic, interactive, geometric environment and computer algebra — GeoGebra. Retrieved from <https://www.geogebra.org>

11) The manuscript should be carefully read.

12) Materials that do not meet these requirements are not reviewed.

Збірник наукових праць

**НАУКОВИЙ ВІСНИК
УЖГОРОДСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ**

серія

МАТЕМАТИКА І ІНФОРМАТИКА

Том 49 №2

2026

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

М. М. Маляр (головний редактор), Ю. В. Андрашко (відповідальний секретар),
С. Ю. Бабич, О. А. Винокурова, В. М. Бондаренко, І. Влох, К. Гдовська,
М. І. Глебена, Л. Ф. Гуляницький, Н. Єгорченкова, Д. Єділхан, Ю. П. Зайченко,
О. А. Капустян, М. Келемен, Н. Е. Кондрук, І. І. Король, В. В. Маринець,
К. В. Маринець, Ю. Ю. Млавець, М. П. Моклячук, Б. Муканова, П. П. Мулеса,
М. М. Повідайчик, В. В. Поліщук, О. К. Рейтій, Н. В. Семенова, О. О. Синявська,
Г. І. Сливка-Тилищак (заст. головн. редактора), В. Є. Снитюк, О. А. Тилищак,
О. А. Тимошенко, М. М. Шаркаді, І. М. Порохнавець (технічний секретар),

Адреса редакційної колегії: 88000, м.Ужгород, вул. Університетська, 14,
деканат ФМЦТ: редакція збірника наукових праць «Науковий вісник Ужгородського
університету».

Серія «Математика і інформатика».

Тел. +380 (312) 642725

E-mail: visnyk-math@uzhnu.edu.ua